



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS

UEHLİNG POTANSİYELİNİN ANALİTİK İFADESİNİN
TÜRETİLMESİ ve PARÇACIKLAR ARASI MESAFEYE GÖRE
DEĞİŞİMİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mine KILIÇ

Danışman: Doç. Dr. Ebru ÇOPUROĞLU

TOKAT- 2024

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Ebru ÇOPUROĞLU danışmanlığında hazırlamış olduğum “Uehling Potansiyelinin Analitik İfadesinin Türetilmesi ve Parçacıklar Arası Mesafeye Göre Değişiminin İncelenmesi” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

22/08/2024

Mine KILIÇ

İmza

JÜRİ KABUL VE ONAY

Mine KILIÇ tarafından hazırlanan “**Uehling Potansiyelinin Analitik İfadesinin Türetilmesi ve Parçacıklar Arası Mesafeye Göre Değişiminin İncelenmesi**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22.08.2024 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri (Unvanı, Adı Soyadı)

İmzası

Üye (Başkan) :Prof.Dr.Bahtiyar MEHMETOĞLU

.....

Üye :Doç.Dr. Ebru ÇOPUROĞLU

.....

Üye :Doç.Dr.Elif SOMUNCU

.....

ONAY

...../...../.....

YUSUF TEMUR
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

BaŐta tez dönemime başlarken ve tez yazma sürecimde beni sürekli destekleyen her anlamda ufkumu aŐan değerli hocam DoÇ.Dr. Ebru ÇOPUROĞLU'na, ders döneminde ve lisans döneminde üzerimde oldukÇa emeği olan bölüm hocalarıma özellikle Prof. Dr. Bahtiyar MEHMETOĞLU'na en iŐten Őükranlarımı ifade ederim.

Eğitim hayatım boyunca her türlü imkansızlığına rağmen beni maddi manevi destekleyen anneme, babama ve kardeŐlerime, meslek hayatım ve eğitimim konusunda her zaman arkamda olan sevgili eŐim, çalıŐmam sırasında buna tahammül eden kızıma ve oğluma, çocuklarıma her ihtiyaç duyduğum anda bakıp yanımızda olan eŐimin değerli ailesine teşekkür ederim.

İTHAF

Tezimi kızım Bilge KILIÇ ve oğlum Ali Kağan KILIÇ'a ithaf ediyorum.



ÖZET

UEHLING POTANSİYELİNİN ANALİTİK İFADESİNİN TÜRETİLMESİ VE PARÇACIKLAR ARASI MESAFEYE GÖRE DEĞİŞİMİNİN İNCELENMESİ

Kılıç, Mine
Yüksek Lisans, Fizik Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ebru Çopuroğlu
Ağustos 2024, 38 sayfa

Uehling potansiyeli kuantum elektrodinamiğinden türetilmiştir ve nükleonların kuantum düzeyinde nasıl etkileştiğine dair daha kapsamlı bir anlayış için gerekli olan vakum polarizasyon etkilerini içermektedir. Uehling potansiyeli, görelî ve kuantum elektrodinamik etkilerini entegre ederek nükleer kuvvetler hakkındaki anlayışımızı geliştirmeye yardımcı olur ve daha doğru nükleer modellere ve tahminlere yol açmaktadır. Gerçek hesaplamalar, döngü diyagramlarını ve yeniden normalizasyonu değerlendirme dahil olmak üzere kuantum elektrodinamiği ve kuantum alan teorisindeki gelişmiş teknikleri içermektedir. Elde edilen sonuçlar, vakum polarizasyonundan kaynaklanan Coulomb potansiyeline yapılan düzeltmeleri içerir ve nükleon etkileşimlerinin daha doğru bir tanımını sağlar. Literatürde, vakum polarizasyonunun Coulomb potansiyeline olan gerçek etkilerini tahmin etmemize yardımcı olan birkaç sayısal ve yarı analitik yöntem vardır. Kuantum elektrodinamiğinin başlangıcından itibaren bilim insanları, analitik hesaplama yöntemleriyle Uehling potansiyeli için en iyi hesaplama yaklaşımını çözmeye ve önermeye çalışmışlardır. Bu amaçla, bu tezde Binom açılımı teoreminin yardımıyla Uehling potansiyelini analitik olarak hesaplamayı amaçladık. Sonuçlarımızın diğer algoritmalarla karşılaştırıldığında tatmin edici olduğu görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kuantum Elektrodinamiği, Vakum Polarizasyonu, Uehling Potansiyeli, Binom Açılımı Teoremi

ABSTRACT

DERIVATION OF ANALYTICAL EXPRESSION OF UEHLING POTENTIAL AND INVESTIGATION ITS DERIVATION ACCORDING TO INTERMOLECULAR DISTANCE

Kılıç, Mine

Master's Thesis, Physics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ebru Çopuroğlu

August 2024, 38 pages

The Uehling potential has been derived from quantum electrodynamics and includes vacuum polarization effects, which are essential for a more comprehensive understanding of how nucleons interact at a quantum level. The Uehling potential helps refine our understanding of nuclear forces by integrating relativistic and quantum electrodynamic effects, leading to more accurate nuclear models and predictions. The actual calculations involve advanced techniques in quantum electrodynamics and quantum field theory, including evaluating loop diagrams and renormalization. Obtained results incorporate corrections to the Coulomb potential that arise from vacuum polarization and provide a more accurate description of nucleon interactions. In literature there are several numeric and semi-analytical methods that help us to estimate the real effects of vacuum polarization to the Coulomb potential. From beginning of quantum electrodynamics scientists have tried to solve and suggest best calculation approximation for Uehling potential by analytical calculation methods. For this purpose, in this thesis we aimed to calculate the Uehling potential analytically with help of Binomial expansion theorem. It seems that our results are satisfactory compared with other algorithms.

Keywords: Quantum Electrodynamics, Vacuum Polarization, Uehling Potential, Binomial Expansion Theorem

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ETİK SÖZLEŞME SAYFASI.....	i
JÜRİ KABUL VE ONAY	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İTHAF	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	x
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	9
2.1. Kuantum Mekanikinin Temel Prensipleri.....	9
2.2. Rölativistik Kuantum Mekanikisi.....	13
2.3. Kuantum Elektrodinamigine Geçiş.....	16
2.4. Kuantum Elektromanyetik Düzeltmeler ve Vakum Polarizasyonu	22
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	26
4. TARTIŞMA VE BULGULAR.....	29
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	35
6. KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	38

TABLULAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1. $I(r)$ integralinin parçacıklar arası mesafenin değişimine göre aldığı değerler ve literatürle karşılaştırılması ($N = 450$).....	30
Tablo 4.2. Uehling potansiyeli için elde edilen analitik ifadenin literatürle karşılaştırılması ($N = 450, \alpha = 1/137, Q = 2$).....	31
Tablo 4.3. Vakum polarizasyonu için elde edilen analitik ifadenin literatürle karşılaştırılması ($N = 450, \alpha = 1/137, Q = 2$).....	32

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Elektron-Elektron (moller) Saçılımı için Feynman diyagramları: (a) ikinci dereceden diyagramı (iki tepe); (b-j) dördüncü dereceden diyagramları göstermektedir.....	18
Şekil 2.2. Feynman diyagramları gösterim örnekleri	19
Şekil 2.3. Farklı tek foton süreçleri. Çift çizgiler atomik potansiyel alandan yayılan elektronları temsil ederken, dalgalı çizgiler ise yayılan fotonu göstermektedir. a) elektronun öz-enerjisini b) vakum polarizasyonunu c) bağlı iki elektronun etkileşimini göstermektedir.	23
Şekil 2.4. İki foton etkileri.....	24
Şekil 2.5. Vakum polarizasyonu şematik gösterimi	25
Şekil 4.1. Uehling potansiyelinin parçacıklar arası mesafeye göre değişiminin analitik yöntem ve nümerik yöntem (Frolov ve Wardlaw, 2012) ile karşılaştırılması	34

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

QED Kuantum elektrodinamiği



1. GİRİŞ

Kuantum elektrodinamiği (QED) hesaplamalarında ortaya çıkan vakum polarizasyonundan doğan enerji farkının düzeltilmesi amacıyla Coulomb potansiyeline eklenen Uehling potansiyelinin analitik ifadesinin türetilmesi ve parçacıklar arası mesafeye göre değişiminin incelenmesi amaçlanarak bu çalışmaya başlarken öncelikle kuantum mekaniksel süreçlerden bahsedilerek kuantum elektrodinamiğine geçiş ve kuantum elektrodinamiğindeki yetersizliklerin giderilmeye çalışılma süreçleri işlenmiştir.

Maddeyi ve evreni anlama yolculuğunda, maddeyi oluşturan atomun yapısı ve atomun yapısında temel parçacık olarak bulunan elektronun durumunun anlaşılması süreci klasik fizikten kuantum fiziğine oradan da kuantum elektrodinamiğine yolculuğu başlatmıştır (Griffiths, 2017). Elektronun keşfi 1879 yılında Crookes adlı bilim insanının katot ışınlarını incelerken yaptığı gözlemlere dayanmaktadır (Crookes, 1879). Crookes katot ışınlarının manyetik alanda tıpkı bir parçacık gibi saptığını fakat elektrik alanda sapmadığını gözlemledi. Daha sonra Thomson deneyi bir düzeltme ile tekrar yaparak ışınların elektrik alanda da saptığını gösterdi. Zıt yüklü iki levha kullanan Thomson negatif yüklü parçacığın sapma miktarını ölçmeyi başardı. Bulduğu bu parçacık için kütle/yük oranını hesaplayarak bu negatif yüklü parçacığa elektron adını verdi. Milikan yağ damlası deneyi ile elektronun yükü ve kütle/yük oranı bilindiği için kütlesi de hesaplandı (MacKay, 1999). Bundan sonraki modeller varlığı bilinen atom üyelerini dikkate alınarak sunulacaktı. Rutherford radyoaktivite alanından faydalanarak atomun iç yapısını tanımlamak adına bir deney düzeneği kurdu. Yüksek enerji gerekliliğinden dolayı alfa parçacığının uygun olacağını düşünerek gözlemini yaptı. Bu deneyde büyük açılı sapmalar gözlemledi (Rutherford, 1911). Bu sapmalar atomun içinde yüksek elektrik alan olduğunu gösteriyordu. Büyük elektrik alan atom çekirdeği modeli ile açıklandı. Geiger ve Mertens tarafından doğrulanan bu durum atom çekirdeğinin varlığını kabul ettirdi (Geiger ve Mertens, 1909). Rutherford modeli atomun parçalanabileceğine ilk adım olarak bugünkü yapısını betimlese de açıklayamadığı durumlar vardı. Çekirdek etrafında ışınlar yaparak dolanan elektronun

enerjisinin bitince nasıl olup çekirdeğe yapışmadan devam ettiğini yani atomik denge sorununu açıklayamadı. Bu eksiklik Bohr tarafından önerilen modellerle giderilmek istenmişti (Bohr, 1913). Klasik fizik kuralları ile durumun açıklanamayacağını ileri sürerek Planck'ın enerji kuantumu düşüncesinin elektronlara uygulanabileceğini söylemişti.

Klasik fiziğin yetersiz kalışının ilk kanıtı kuantalanan ışıktır. Klasik fiziğe göre ışık elektromanyetik bir dalgadır. Fakat ışığın elektromanyetik dalga olarak varlığını kabul ettiremediği durumlar vardı. Atomun yapısı ile ilgili çalışmaların yapıldığı ve ard arda gelen açıklamaların olduğu yıllarda Max Planck 'Kara Cisim Işıması' deneyi ile uğraşıyordu (Planck, 1900). Bu deney sıcaklık ile ışığın dalga boyu arasındaki ilişki ile ilgili bir deneydir. Mutlak sıfırdan daha büyük sıcaklıklarda ısıtılan her cisim tüm dalga boylarında sürekli dağılıma sahip bir spektrum vermektedir. Deneyin sonuçlarının işlendiği grafik bir yorum istiyordu. Sonuçlar ile Rayleigh-Jeans formülündeki enerji-frekans ilişkisinde sorun vardı. Alçak frekanslar için doğru sonuç verirken yüksek frekanslar için uyumsuzdu. Bunun üzerine Planck siyah cisim ışımalarının kuantalanmış olabileceği hipotezinin ortaya attı. Planck temel ve evrensel bir özelliği keşfettiğini bilemiyordu çünkü bu durumu kendisi açıklayamadı. 1905 yılında Planck'ın fikirlerini geliştiren Einstein birçok olayın açıklanmasında bu fikirlerin kullanılabileceğini söyleyip göstererek Nobel Ödülü aldı (Einstein, 1905). 1877 yılında Hertz tarafından bulunan ve açıklığa kavuşamayan fotoelektrik olay da siyah cisim olayındaki gibi klasik fizik kuralları ile çelişiyordu. Planck'ın yaşadığı probleme bulduğu çözüm fotoelektrik olaya uyarlanarak hem fotoelektrik olay denklemi yazıldı hem de Planck hipotezi doğrulandı. İlerleyen adımlarda 'foton' kavramı ortaya çıktı. Yani elektro manyetik dalga olarak tanıdığımız ışık artık parçacıktı. Dalga boyu ve sıcaklık arasındaki ilişkinin yazılmasında kullanılan Stefan-Boltzman denklemlerindeki değerleri kullanılarak ortaya çıkan Planck sabiti, bir sistemin eylem boyutu için referans alınmıştır. Planck sabiti ışığın parçacık ve dalga özelliği arasındaki ilişkiyi temsil eder. Eylem boyutu Planck sabitinden çok büyük ise sistem kuantum mekaniksel olarak incelenemez.

Dalganın parçacık, parçacığın dalga gibi davranabildiği ilginç kuantum dünyasına geçiş gelişmelerle devam etti. 1936'da Milikan Einstein'ın ön görüşünü deneysel olarak da

kanıtladı ve çizdiği grafik ile Planck Sabitini hesapladı. Buna rağmen ışığı parçacık olarak kabullenmek zaman aldı. Compton tarafından fotonun serbest bir elektrona çarparak saçılması gözlemlendi (Compton, 1923). Görünür ışık ve X-ışını kullanarak yaptığı deneylerde foton ile elektronun etkileştiğini duyurdu. Fotonun enerji ve momentum taşıyan bir parçacık gibi algılanabileceğini kanıtladı.

Yapılan çalışmalar ışığın parçacık olduğunu kanıtlamıştır. Fakat ışık dalga olarak da varlığını göstermektedir. Işık hem dalga hem parçacıktır. Peki elektronun durumu nedir? Elektron parçacıktır. Fakat hareketini ve özelliklerini açıklamak için dalga denklemine ihtiyaç duyulmaktadır. Hatta elektron gibi kütleli parçacığın kuantum teorisi foton gibi kütsüz ve ışık hızıyla hareket eden parçacığın kuantum teorisine göre daha kolaydır. Elektron gibi parçacıkların dalga özelliğinin matematiğine duyulan ihtiyaç üzerine kuantum mekaniğinin anahtarı olan Schrödinger denklemi ortaya çıkmıştır. Kuantum mekaniğinde parçacığın hareket durumu dalga denklemi ile belirlenir. Fizikte hareketi tanımlamak ise zaman değişkenine göredir. Bir taneciğin konumuna ve zaman bağlı yazılan dalga fonksiyonu bilinirse o parçacığın kendine özgü özellikleri belirlenebilir. Fonksiyon içindeki dalga boyu tam hesaplanamaz. Bu sebeple momentum da belirlenemez momentum belirsizleştikçe konum daha bilinir olur. Bu olaya konumda artan olasılık yoğunluğu denir.

Kuantum mekaniği Newton Mekaniği fikirlerine dayanır. Newton'dan uzaklaşmalar De Broglie'nin dalganın frekansını parçacık ile ilişkilendirmesi ile başlamıştır. De Broglie $E = \hbar \nu$ denkleminin foton için kullanıldığı gibi parçacık için de kullanılacağını göstermiştir. Bu düşüncenin gelişmesi bir parçacık için dalga denkleminin yazılmasını sağlamıştır. Schrödinger tarafından yazılan bu denklem klasik fizikte Newton'un ikinci yasası görevini kuantum mekaniğinde yapmıştır. Yani temel yasanın eş değeridir. Kuantum mekaniğinin de temelidir. Newton'un ikinci yasası sistemin zaman içindeki hareketini tahmin ederken Schrödinger denklemi dalga fonksiyonun zaman içindeki evrimini tahmin eder. Matematiksel olarak bir temele dayandırılmış bu olay elektron kırınımının gözlemlendiği deneylerle doğrulanmıştır. Max Born dalga fonksiyonun tek başına anlamı olmadığını elektronun konumu için olası bir dağılım için dalga fonksiyonun karesinin alınması gerektiğini önermiştir (Born, 1926). Kuantum

mekaniğini klasik mekanikten ayıran en derin fark burada ortaya çıkar bu da şudur; klasik mekanikte bir deneyin sonucu kesin hesaplanırken kuantum mekaniğinde aynı deney tekrarlandığında farklı sonuçlar gözlenebilir. Sonuçlar değil gerçekleşme olasılıkları hesaplanabilir.

Elektronun konumunun belirlenme çalışmaları bizi kuantum dünyasına sokmuş birçok gelişmeye de yol açarak kuantum elektrodinamiğine sürüklemiştir. Yani elektronun atomun içindeki hareketi incelenmek istenildiğinde kuantum mekaniği de bu davranışı tam olarak açıklamamıştır. Elektronun ışık hızına yakın hızda hareket ettiği düşünülünce Einstein'ın Görelilik Teorisine de başvurulması gerekiyordu fakat görelilik Teorisi kuantum mekaniğine uyarlanamıyordu. Yüklü bir parçacık olması ile elektromanyetizmadan da ayrılamıyor dolayısı ile Maxwell denklemlerine olan ihtiyaç da halen devam ediyordu. Problemin çözümü aranırken daha fazla problemle karşılaşılıyor aranan çözümün yanında ise beklenmedik durumlar da açığa çıkıyordu. Bütün bu olaylar Fizik biliminin güncel çalışma alanı olan Kuantum Elektrodinamiğinin doğuşuna zemin hazırlamıştır. Kuantum Elektrodinamiği (QED), ışımaya yapan yüklü parçacıkların tüm davranışlarını matematiksel olarak ifade edebilmek için ortaya çıkmış bir teoridir. QED içerisinde elektromanyetik teori (klasik fizik), kuantum teorisi ve görelilik teorisini barındıran elektronun hareketini ve atomun yapısını açıklamak üzere doğmuş bir teoridir (Feynman ve ark., 1961).

Kuantum mekaniğinin temeli olan fakat rölativistik durumlarda geçersiz olan Schrödinger denkleminin rölativiteye uyarlanması Dirac Denklemleri sayesinde olmuştur (Dirac, 1928). Rölativistik durumda fermiyon olan elektronun enerjisine göre uzay zamanda bükülmesini açıklamayı göreliliği kuantum mekaniğine uyarlayarak başarmıştır. Schrödinger denklemini genişleterek Rölativiteye uyumlu hale getirmeyi amaçlayan Dirac hem bunu başardı hem de daha fazlasını elde etmiştir. Böylece fiziğin bilinen en kesin sonuçlar içeren başarılı bir teorisi olarak QED doğmuştur. Bu teori elektron pozitron çifti ve foton arasındaki kuantum alan teorisidir. Aynı zamanda bütün yüklü temel parçacıkların elektromanyetik etkileşimini tanımlamakta kullanılabilir. QED atomik fizik için teorik temel sağlaması açısından da oldukça önemlidir. Modern

atom teorisini ileriye taşımıştır. Gelişimi sırasında standart modele ve parçacık fiziğine de katkı sağlamıştır.

Pozitronun hipotez olarak ortaya çıkmasını sağlaması bu alana önemli katkısıdır. Kozmik ışınları inceleyen Amerikalı fizikçi Anderson daha sonra pozitronun varlığını deneyle kanıtlamayı başarmıştır. Uzaydan gelen kozmik ışınları incelerken kütlesi elektrona ve yükü protona eşit bir parçacığın izlerini aygıtında gözlemlemiştir. Böylece Dirac'ın çalışması aynı zamanda anti parçacık kavramının ortaya çıkmasını sağlamıştır (Dirac, 1930).

Dirac denklemleri yardımı ile elektromanyetik dalga olan ışığın davranışını açıklayan Maxwell denklemlerini yeniden yazarak kuantum elektrodinamiğine uygun hale getirilmesi Feynman ve arkadaşlarının çalışmaları ile sağlanmıştır. Schrödinger denkleminin rölativiteye uyarlanması ile QED'in doğuşuna sebep olmak üzere yazılan Dirac denklemleri yardımıyla Feynman Maxwell denklemlerini kuantum elektrodinamiğine dönüştürmüştür (Feynman R. P., 1949). Böylece QED klasik elektromanyetizmanın kuantum karşılığını temsil eden ve fizikte birçok olayda kesin sonuçlar veren yeni bir teori halini almıştır.

Manyetik alan içerisine konulan atomun incelenmesi sırasında ortaya çıkan yarımla sonucu oluşan spektrumu inceleyen Zeeman bu gözlemini klasik fizik zamanında yapmıştır. Spinleri sıfır olan durumlar için geçerli olan normal Zeeman Olayı manyetik alan etkisini açıklayamamıştır. Çünkü manyetik alan etkisi klasik fizik kuralları ile açıklanamaz. Burada ihtiyaç duyulan düzeltme elektronun spinin keşfine yol açmıştır. Yapılan düzeltmeye anormal Zeeman Olayı denilir. Zeeman Olayı enerji düzeylerinin dış manyetik alanda yarılmaya denir. Yörünge hareketlerinden dolayı iç manyetik alana sahip olan atomların enerji düzeylerinde ve spektrumlarında meydana gelen yarımlara da ince yapı yarımları denir. Bu yarımlarının sebebi spin-yörünge etkileşmesidir. Bu ayrışma her durumda gözlenmez. Spin -yörünge etkisi varsa dalga boyu hesaplanması gereken iki foton gözlenir. Dalga boyu hesaplanması için manyetik alanın bilinmesi gerekir ve görelî bir düzeltmeye ihtiyaç duyulur. Klasik fizikle her durumun açıklanamadığı bu yarımlara QED açıklık getirmiştir. QED etkileri elektronun anormal yapısı, hidrojen enerji seviyelerinin kayması, ince yapı yarımları

gibi olaylarda kesin yorumlar vermiştir fakat yetersiz kaldığı durumlar ortaya çıkmıştır. Mesela bu yöntemlerin yüksek dereceden pertürbasyon teorilerine uygulanması sonuç vermemişti. Schrödinger denklemini çözmek için ihtiyaç duyulan yaklaşım yöntemleri gibi QED hesaplamalarında benzer katkılara ihtiyaç duyulacaktı. Çünkü enerji seviyelerinin frekansları için beklenen rezonans durumlarının gerçekleşmediği gözlemlenmişti. Yani enerji seviyesi farklarını dikkate alacak katkılara gerek duyuluyordu Fotonun yayılımı sırasında meydana gelen elektron-pozitron çift yaratılması etkisinin hesaplamalarında kullanılan polarizasyon tensörü buna bir örnektir. Bu hesaplamalar sırasında kullanılan zincir yöntemi ile çeşitli grafikler çizilebilmişti. Fakat bu yöntem de her şeyi anlatamıyordu. Enerjideki farkın vakum polarizasyonundan kaynaklandığı ortaya çıktı ve Vakum polarizasyonu hesaba katmak için yeni düzeltmelere ihtiyaç duyuldu. Normalize edilen denklem yazılarak pertürbasyon teorisinde vakum polarizasyonuna bağlı enerji değişimi hesabı yapıldı. Yazılan eşitlikte enerji kayması saptandı. Mikrodalga teknikleri kullanılarak küçük bir kayma gözlemlendi. Bu Lamb kayması olarak adlandırıldı. Bu enerji kaymaları vakum polarizasyonunun varlığını doğruluyordu. Deneysel olarak vakum polarizasyonu etkisi müonik atomlarda gözlemlenmiştir. Normalize edilmiş yükler ve vakumun polarizasyonu dikkate alınarak çeşitli hesaplamalar yapılmış ve grafikler çizilmiştir. Vakum polarizasyonu, elektromanyetik alanın yük ve dağılımlarını değiştiren sanal elektron pozitron çiftleri üretmesidir. Yüklü parçacık foton etkisiyle yükünü azaltarak sanal elektron pozitron çifti oluşturur. Vakumda oluşan elektron pozitron çiftinden parçacık elektron ise pozitron çekilir, sanal elektron itilir. Yani polarize olur. Vakumun polarizasyonu ile elektronun kütle artışına benzer olarak enerji farkı oluşabilir. Bu enerji değişimi hesaplamaları için mevcut QED denklemleri yeterli gelmediğinden düzeltmelere ihtiyaç duyulmuştur (Greiner, 1996).

Enerji seviyeleri farkı Dirac denklemine göre olmamalıydı. Yani enerji seviyeleri farkı rölativistik kuantum mekaniği ile açıklanamazdı. Bu katkı için yeni bir hesaplama gerekiyordu. İlk olarak Bethe bu katkıyı hesaba kattı. İki parçacığın etkileşimini incelemek için pertürbasyon teorisinden daha iyi bir açıklama gerekmiştir. Özellikle bağlı durumlarla uğraşılıyorsa daha da gereklidir. Çünkü uzun bir süre etkileşen

parçacıklar arasında keyfi etkileşimler meydana gelebilir. Bu keyfi etkileşimin etkisi Feynman Diyagramları ile belirlenemez. Parçacıklar eşit kütleli değilse Dirac denklemi ile basitçe çözülebilir ama eşit kütleli parçacıkların etkileşimini çözmek için durum zorlaşabilir. Bunun en önemli örneği Pozitronyum yani elektron pozitronun bağlı sistemidir. Burada alanın kaynağı ve test parçacığı arasında ayırım yapılamaz. Her iki parçacık eşit şekilde işlenmelidir. İki parçacıklı sistemin dalga fonksiyonu iki zaman koordinatına bağlıdır bu yüzden yorumlanması zordur.

Pertürbasyon teorisinin ötesine geçebilmek adına yazılan denklemler sonucu etkileşim çekirdeği kavramı ortaya çıkmıştır. Bu kavram iki fermiyon hattı kesilerek birbirine bağlı olmayan iki parçaya bölünebilmesi ile karakterize edilir. İndirgenmez ve indirgenebilir durumların grafikleri çizilmiş indirgenemez çekirdek Feynman grafikleri içerir ve tam olarak hesaplanamaz. Çözüm sonsuz sayıda bir etkileşim serisi içerir. Yani bağlı durumları incelenirken sonsuz sayıda etkileşim dahil edilmelidir.

Burada pratik birçok amaç için merdiven tekniği kullanılır. Belirli bir zamanda tek bir fotonun değiştirildiği Lorentz çerçevesi bulunabilir. Fakat çok sayıda grafik olduğunun farkında olunmalıdır. Buraya kadar olan hesaplamalarda bazı indekslerin yeniden adlandırılmasıyla bir denklem elde edilir.

Bu homojen olmayan integral denklemi, Bethe denklemidir. Serbest iki parçacıklı dalga fonksiyonudur. Pertürbasyon teorisinin ötesine geçmek için gereken bedeldir. Bethe-Salpeter denkleminin momentum uzayına dönüştürülmesiyle elde edilen başka yararlı formu da vardır. Fakat bu denklemin yapısı o kadar karışıktır ki kesin çözümler vermez. Sadece spini sıfır olan parçacığın skaler bir etkileşimle bağlanması durumunu tamamen çözebilir (Bethe & Salpeter, 2012).

Bethe-Salpeter denkleminde ciddi zorluklarla karşılaşmıştır. QED' nin problemleri için pertürbatif yaklaşım teknikleri yeterlidir sonucuna varılmıştır. Bethe-Salpeter eşitliğinin çözümü temel parçacık fiziği sınır durumları için oldukça önemli olsa da vakum polarizasyonu için tam sonuç verememiştir. Daha sonra Kremer yeniden normalizasyon görüşünü kullanarak 27.1 Mhz olarak ölçülen frekansı 1040 Mhz olarak hesaplamıştır. Böylece enerji seviyeleri arasındaki fark yeniden normalizasyonla

giderilmiştir. Elektronun öngörülen özelliklerinin deneysel olanlarla karşılaştırılmasını sağlayan yeniden normalizasyonla hesaplanan etkinin üzerine Dyson, Feynman, Schwinger ve Tomonaga bu yöntemi kullanarak QED teorisini sonuçlandırmıştır (Feynman R. P., 1961). Yeniden normalizasyona göre elektronun kütlesi ve yükü gibi parametreler doğrudan ölçülemez. Bir alanın yayıcısı her zaman dalga fonksiyonun ikinci derece fonksiyondur. Bu yüzden fotonun dalga fonksiyonunu renormalize etmek gerekir. Aynı zamanda foton kaynağının yükü de renormalize edilmelidir. Bunun için vakum polarizasyon kabarcıklarının katkısını düşürmek yeterlidir. Böylece çıplak yük ortadan kaldırılır. Bir çekirdeğin alanındaki elektronun hareketi statik bir potansiyel ile çok doğru bir şekilde tanımlanabilir. 1935'te Uehling tarafından elektromanyetik etkileşimin modifikasyonu elde edilmiştir. Bundan önce vakum polarizasyonu Dirac ve Heisenberg tarafından tartışılmıştı. Böylelikle vakum polarizasyonunda Uehling potansiyeli olarak adlandırılan bir potansiyel hesaba katılmaya başlanmıştır (Uehling, 1935).

Vakumun polarize edilebilirliği dikkate alınarak ve yeniden normalize edilmiş yükler kullanılarak yapılan hesaplamalara bakılınca, değiştirilmiş foton yayıcı renormalize edilmiş vakum polarizasyon fonksiyonu cinsinden ifade edilebildiği gözlenmiştir. Burada potansiyele Uehling potansiyeli için yaygın olarak kullanılan integral temsili denklem yazılır. Gamma fonksiyonu yardımıyla, Uehling potansiyelinin integral temsili kullanılır ve vakum polarizasyonun yük dağılımı oluşturulmuştur (Çopuroğlu E. ve Mehmetoğlu T., 2019). Uehling potansiyeli ve ilgili vakum yük dağılımı böylelikle analitik olarak hesaplanabilmektedir.

Bu çalışmada da enerji seviyeleri farkının giderilmesi için etkili bir yöntem olan Uehling Potansiyeli incelenecektir ve böylelikle ince yapı sabitini mesafe ve enerjiye göre bir parça değiştirerek Uehling Potansiyeli için elde edilmiş analitik ifade yardımıyla hesaplamalar yapıp literatürle karşılaştırma yapılacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Kuantum Mekanikinin Temel Prensipleri

Fizik bilimini deterministik dünyadan olasılıklar dünyasına götüren kuantum mekaniği özellikle atomlar ve atomaltı temel parçacık olan elektronlar gibi küçük parçacıkların işlere katılmasını sağlamıştı. Dahası bu parçacıkların elektromanyetik alanlar ile etkileştiği süreçler de ortaya çıkmıştı. Bu olayların en başında siyah cisim ışıması gelir. Katıların ısı sığası, fotoelektrik olay, Compton olayı, elektronlarla kırınım, atomların ışıma ve soğurma spektrumları olayları da kuantum mekaniğinin doğuşuna zemin hazırlamıştı. Bu olaylar klasik fizik yasaları ile çeşitli varsayımlarla açıklansa da varsayımların çoğalmasi ile yeni bir formülasyona ihtiyaç duyulmuştu (Yılmaz, 2020).

Hareketin yeni teorisi için ihtiyaç duyulan denklem olasılık genliğı olarak yorumlanan fonksiyonlardan oluşur. Olasılık genliklerinin uzay ve zaman içindeki evrimi kısmi türevli bir çizgisel denklem olan Schrödinger denklemi ile belirlenir (Griffiths, 2017). Bu denklem kuantum mekaniğinin temelini oluştururken deneylerle uyumlu sonuçlar vermektedir ve bu da teörinin başarısını gösterir.

Kuantum mekaniğinde fiziksel gözlenebilir durumların klasik fizikte karşılığı vardır. Karşılığı olmayan gözlenebilirler de mevcuttur. Burada işler işlemcilerle yürür. İşlemcilerin öz değerleri okunarak süreç değerlendirilir. Konum, çizgisel momentum, açısal momentum, enerji gibi niceliklere fiziksel gözlenebilir denir. Kuantum mekaniğinin temel varsayımları bu gözlenebilirlerle yakından ilgilidir. Bu varsayımlardan söz ederek Schrödinger denklemine geçiş yapabiliriz.

1. Postula: Her fiziksel gözlenebilire bir çizgisel Hermitsel işlemci karşılık gelir.
2. Postula: Bir gözlenebilire karşı gelen Hermitsel işlemci, gözlenebilirin bir kesin ölçümünün sonucu Hermitsel işlemcinin kesikli veya sürekli öz değerlerinden biridir. Gözlenebilirin bir ölçümü Hermitsel in bir özdeğerini vermiş ise sistem Hermitsel işlemcinin öz değerine karşılık gelen öz durumundadır.

Bir parçacığın zamanla gelişimini belirleyen hareket denklemi yazılmadan önce sahip olması gereken belli özellikler belirlenmiştir. İlk olarak oluşturulacak denklem içinde enerjinin korunum yasası geçerlidir. Denklem aynı zamanda ikinci dereceden homojen lineer diferansiyel denklem olmalıdır. Yani iki çözümün toplamı da yine denklemin çözümünü vermelidir. Hareket denkleminde zaman birinci türevle dahil olmalıdır. Son olarak denkleme dahil olan değişkenlerin limit değerlerinde oluşturulan denklem klasik fiziğin hareket denklemini vermelidir. Bu şartlar göz önünde bulundurularak dalga paketini temsil eden hareket denklemi oluşturulmuştur. m kütleli v hızıyla serbest olarak hareket eden parçacığın enerjisi $E = P^2 / 2m$ olarak yazılır. Parçacığa eşlik eden dalga paketinin frekansı ve dalga sayısı ise $P = \hbar k$ ve $E = \hbar f$ ile bulunur. Dalga paketini temsil eden fonksiyon yazılır. Yazılan fonksiyonun konuma göre 2. dereceden, zamana göre ise 1. dereceden türevi alınır. Sonuç olarak bir boyutlu uzayda serbest parçacık için Schrödinger denklemi yazılır.

Bu denklem elektronun doğasını tanımlayabilmek adına yazılan bir diferansiyel denklemdir. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar.

Kuantum mekaniği rölativistik ve rölativistik olmamasına göre ikiye ayrılır. Rölativistik olmayan kuantum mekaniğinde iki parçacıklı bir sistemin enerjileri radyal Schrödinger Denklemi ile belirlenir. Bu denklemin çözümü için birçok yöntem geliştirilmiştir. Çözümleri sadece bazı potansiyellerle sınırlı kalabilmektedir. Bunun için potansiyel türetme çalışmaları yapılır. Yaklaşık çözüm yöntemlerinden bazıları değişen parametrelere göre denge prensipleri, renormalize pertürbasyon serileri, hipervirial JWKB metodu, faz integrali metodu olarak sıralanabilir (Candarlı, M., 2002).

Rölativistik olmayan hareketi tanımlama programı klasik fizikte belirli bir zamanda konumu yani $x(t)$ 'yi belirlemektir. Newton'un ikinci yasası uygulanarak belirlenir. Kuantum mekaniği bu probleme çok farklı yaklaşır. Böyle bir durumda aranan, parçacığın dalga fonksiyonu $\psi(x,t)$ 'dir. Bu da Schrödinger denklemi çözülerek bulunabilir.

$$i\hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Burada \hbar Planck sabiti olup değeri $1,0545717 \times 10^{-34} J.s$ ' dir. Newton'un ikinci yasası ile aynı rolde olan bu denklem tüm zamanlar için $\psi(x,t)$ 'yi belirler. Peki dalga fonksiyonu aslında ne olabilir ve fiziksel yorumu nedir? Bu soruların sahibi ve cevabını bulan kişi Born'dur. Born'un dalga denklemine getirdiği yorum istatistiksel bir durumdur. Bu yorum olasılıklardan söz etmektedir. Bir parçacığın t anında x noktasında bulunma olasılığı $|\psi(x,t)|^2$ ile belirlenir ve aşağıdaki şekilde integral ile gösterilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \psi(x,t) dx \quad (2.3)$$

Burada $\psi^*(x,t)$, dalga fonksiyonunun kompleks eşleniğidir çünkü dalga fonksiyonunun kendisi komplekstir.

İstatistiksel yorum beraberinde belirsizlikleri getirmiştir. Parçacık hakkında her şey bilinse bile parçacığın konumunu ölçecek deneyin sonucunu kesin olarak tahmin edemezsiniz. Yani kuantum teorisi bize sunacağı mümkün sonuçlar hakkında istatistiksel bilgi vermektedir.

Schrödinger Denklemini yazılmış fakat fiziksel olarak bir anlam içermemiştir. Yani fiziksel yorumu eksik kalmıştır. Dalga fonksiyonu kullanılarak parçacıkların konumlarının aritmetik ortalaması (beklenen değer) hesaplanmıştır. Beklenen değer hesabında tüm uzay koordinatları üzerinden integral alınır.

Gözlenebilir bir fiziksel değişkenin beklenen değeri bulunma olasılıklarının ortalama değeridir. Dalga paketini temsil eden dalga fonksiyonunun öz fonksiyonlarının açılım katsayılarının mutlak değerinin karesi gözlenebilir bir ölçümünün bulunma olasılığı olarak yorumlanır.

Ortalama değer yorumu istatiksels olarak geçerlidir. Beklenen değerlerin ortalama değer yorumlarına göre dalga fonksiyonu $\psi(x,t)$ konum olasılık genliği olarak adlandırılır. Normalizasyon koşulu bütün bu konum olasılık yoğunluklarının toplamının 1 olduğunu yani parçacığın tüm uzay içinde muhakkak bir yerde olduğunu söyler. Parçacığın konumu ve zamanı büyük olasılıkla belirlenmiş olur. Schrödinger' in madde dalgası olarak adlandırdığı $\psi(x,t)$ 'ye Max Born tarafından yeni bir anlam getirilmiştir. $\psi(x,t)$ artık olasılık genliği dalgasıdır.

Matematiksel olarak bakacak olursak dalga fonksiyonların sahip olması gereken bazı özellikler de vardır. Örneğin dalga fonksiyonları ortonormallik şartını sağlamalıdır. Schrödinger denkleminde alınan zmler bunu sağlamayabilir. Dalga fonksiyonu periyodik özelliğe sahip olmamalıdır. nkn parçacığın uzayın farklı noktalarında aynı zamanda bulunması mümkün değildir. Son olarak dalga fonksiyonu sürekli ve yakınsak özelliğe sahip olmalıdır. Schrödinger denkleminin birinci türevi buna uyar, süreklidir.

Fiziksel sistemi temsil eden dalga fonksiyonunun zamanın bir t anından normalizasyon koşulunu sağladığını gördükten sonra t zamanı değiştiğinde yani zamana göre türev alındığında da denklemin sağlanıp sağlanamayacağı incelendi. Eğer sağlanırsa olasılık formülü zamanın tüm anları için geçerli olacaktı. Bu hesaplamaların kurgulanması ve yapılması üzerine olasılık korunumunun zamanın tüm aralığı için geçerli olduğu görüldü. Olasılık korunumu için yapılan matematiksel işlemlerin yorumlanması sırasında olasılık akı yoğunluğunu içeren süreklilik denklemini ortaya çıkmıştır. Süreklilik denklemine göre bir ortamda zamanla yük yoğunluğu artarsa o ortamda akım vardır.

Kuantum mekaniğinin 1. ve 2. varsayımlarına göre işlemci hem çizgisel hem Hermitsel olmalıdır. Fakat bunlar yeterli değildir. Bir sistemin kuantum mekaniksel olarak durumu nasıl belirlenir sorusuna cevap olarak 3. varsayım ne sürülmüştür.

3. Postula: Bir sistemin herhangi bir t anındaki durumu dalga fonksiyonu ile belirlenir. Bu dalga fonksiyonu sistemle ilgili bütün bilgileri taşır. Bu bilgiler deneyden lnen değerlere karşılık gelir.

4. Postula: Dalga fonksiyonunun zaman içindeki değişimi zamana bağlı Schrödinger denklemi ile belirlenir.

Bir fiziksel büyüklüğün zaman içerisindeki hareketi zamana bağlı Schrödinger denklemi çözümlenerek incelenir. Schrödinger denklemi rölativistik olmayan durum yani incelenen sistemin hızının ışık hızından küçük olduğu durumlar için geçerlidir. Rölativite enerjiden parçacık yaratılmasını mümkün kılar. Schrödinger Denklemi olasılık korunumu bu konuda yetersiz kalmaktadır. Yine de parçacık yaratılma-yok olma ve ışımali geçiş mekanizmaları dışında çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Atom ve molekül fiziğinde kullanıldığı gibi bazı atom altı parçacıklarla ilgili incelemelerde kullanılır.

2.2. Rölativistik Kuantum Mekaniki

Bilindiği gibi özel rölativite enerjiden parçacık yaratılmasını mümkün kılar. Rölativite ve kuantum mekaniği hemen hemen aynı zamanlarda gelişmiştir. Başlangıçta karşı karşıya kalmışlar ve bu durumun düzelmesi zaman almıştır. Yüksek hızlardaki parçacıklar için standart kuantum mekaniğinin bazı kavramlarının değiştirilmesi gerekmiştir ve rölativistik kuantum mekaniği adı altında bu çalışmalar yapılmıştır (Greiner, Relativistic quantum mechanics, 1990). Rölativistik kuantum mekaniği modern parçacık fiziğinin özellikle atomaltı parçacıklar düzeyinde yapılan çalışmalarda temel teorilerden biridir. Bu çalışmaların başlıcaları yüksek enerjili parçacıklar arasındaki güçlü etkileşimler, zayıf etkileşimler, kütlelendirme mekanizmaları ve elektromanyetik etkileşimlerdir. Rölativistik kuantum mekaniği denklemlerinin oluşturulmasında, özel görelilik simetrisinin korunması dikkate alınarak seçilen operatörler özel görelilik altında kovaryant olmalıdır. Bilindiği gibi rölativistik enerji ve momentum arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (2.4)$$

Burada E enerji, p momentum, c ışık hızı ve m kütedir. (2.4)'ün diferansiyel formda yeniden yazacak olursak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}, t) = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + m^2 c^4 \psi(\vec{r}, t) \quad (2.5)$$

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.6)$$

(2.6)' ya Klein-Gordon denklemi denmektedir (Klein, 1926).

Rölativistik Klein-Gordon denklemi kovaryant doğası gereği elektromanyetik etkileşimleri Hamiltonyene eklemekte oldukça pratiktir. Hamiltonyen yerine karesini kullanmak ifadedeki karekökten kurtulmayı sağlar. Dolayısıyla dalga denkleminin negatif çözümleri de olur.

Klein-Gordon denkleminin rölativistik olmayan Schrödinger denkleminde farkı zaman türevlerinde 2. dereceden oluşudur. Bu da daha fazla bilgiyi gerekli kılar. 2.dereceden Klein-Gordon denklemini iki tane 1. dereceden denkleme indirgersek sonucu elektrik yükünün işaretine göre yorumlayabiliriz. Tanımlanan yeni iki fonksiyonun çözümü ile çiftlenmiş denklemleri Schrödinger denklemine çok benzer olarak sağlarlar.

Klein-Gordon denklemi olasılık yoğunluğunun yeniden yazılmasını sağlamıştır ve yeni denklem olasılık yük yoğunluğu olarak yorumlanmıştır. Bir pozitif parçacığın dalga fonksiyonu bir negatif parçacığın dalga fonksiyonudur yani yüklü bir parçacık ile ona özdeş davranan zıt yüklü parçacığın eş zamanlı serbestlik derecelerini görememiştir. Burada negatif enerjilerin anlamını görebilmek önemliydi. Bu da olasılık akım yoğunluğu kullanılarak görülebilirdi. Yük ve enerjinin işaretine bağlı olmayan yük akım yoğunluğu elde etmenin yolu bir normlama ile bulunabilir. P momentum vektörünün işaretine dikkat çekilerek işaretinin yanlış olduğunun farkına varılması ile işarete bağlı olmama durumu çözülebilir. Negatif enerjili çözümler için P' nin işareti ters çevrilebilir. Ya da negatif enerjili çözümlerin zamanda geriye gittikleri düşünülebilir. Klein-Gordon denkleminin negatif enerjili çözümleri bize 'antiparçacık' kavramının varlığına götürür.

Spini sıfır olan atomik sistemler için Klein-Gordon denklemi çözmek mümkündür. Bu çözümler deneylerle de uyum gösterir. Fakat Klein-Gordon denkleminin yorumlanmasında güçlükler yaşanmıştır. Bu güçlüklerin başında denklemin 2.

dereceden bir diferansiyel denklem olması gelir. Kesin artı olmayan olasılık yoğunluğu ve ek serbestlik dereceleri de işi zorlaştıran etkenlerdir. Bu Dirac'ı yeni bir lineer denklem arayışına götürmüştür. Bu denklem zamanda birinci dereceden diferansiyel bir denklem olmalıydı. Bir sorun olarak yorumlanan negatif enerji durumları rölativistik kuantum mekaniğinin gelişiminde çok yararlı bir duruma dönüşecekti. Dirac yaptığı çalışmalar sonucunda rölativistik kuantum mekaniği denklemini aşağıdaki gibi oluşturdu.

$$\left(\beta mc^2 + c \sum_{n=1}^3 \alpha_n p_n \right) \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

Burada β ve α parametreleri hermitik matrisler olup aşağıdaki gibidir.

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

(2.8)'de ortaya çıkan σ_i 'ler Pauli matrisleri olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Böylelikle Dirac denklemi aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir.

$$\left(i\hbar \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - mc^2 \right) \psi = 0 \quad (2.11)$$

Burada $\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ ve $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ alınır. (2.11) formülünden alınan sonuçlar

negatif enerjili durumların varlığını doğrular. Bu durumlar antiparçacık kavramının doğuşuna sebep olmuş ve Pauli antimadde ile ilgili kuram geliştirmiştir. Denklemin

çözümü özellikle spini $\frac{1}{2}$ olan fermiyonların kuantum durumunu spinor kullanarak zamanla nasıl geliştiğini belirlemiştir.

Ayrıca Dirac denklemi kesin artı olasılık yoğunluğu verebilmişti. Böylelikle bu yolun rölativistik kuantum mekaniğine giden doğru yol olduğu görülüyordu. $j=1/2$ açısız momentumlu durumların doğada var olması gerektiğini keşfetti. Serbest parçacık çözümleri incelendi. Bu da pozitronun keşfini sağladı. Carl Anderson elektronun bütün özelliklerine sahip pozitif parçacığı gözlemledi ve Dirac denklemi rölativistik kuantum mekaniğinin temel ifadesi oldu.

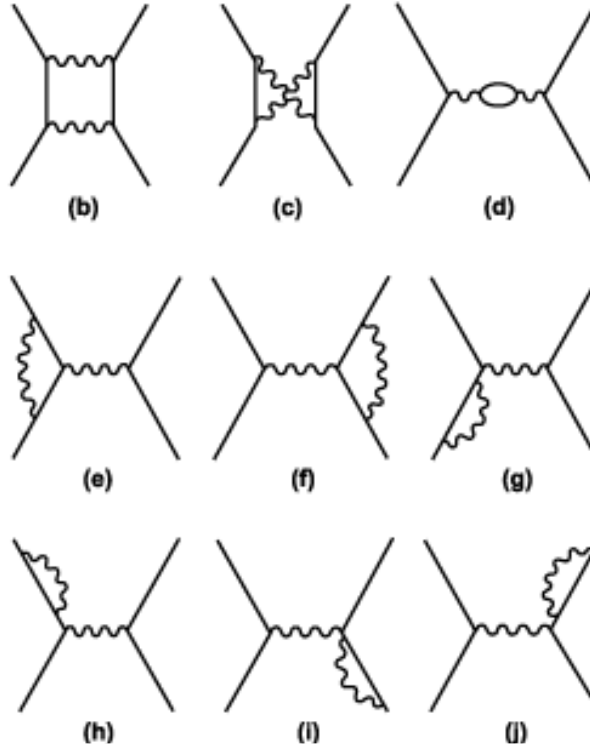
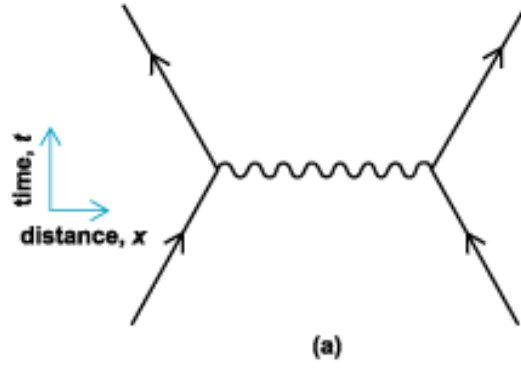
Özetle Klein-Gordon ve Dirac denklemleri kuantum mekaniğinde önemli iki rölativistik denklemdir. Klein-Gordon denklemi ikinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Dirac denklemi ise birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Klein-Gordon spini 0 olan parçacıklar (bozonlar) için yani skaler alanlar için geçerliken, Dirac denklemi spini $\frac{1}{2}$ olan parçacıklar (fermiyonlar) için kullanılmaktadır. Bu nedenle farklı parçacık türlerinin fiziksel özelliklerini ve etkileşimlerini açıklamada farklı öneme sahiptirler.

2.3. Kuantum Elektrodinamiğine Geçiş

Fiziğin bilinen en kesin sonuçlarını içeren başarılı bir teorisi olan kuantum elektrodinamiğinin (QED) doğuşu, Dirac denklemleri yardımı ile elektromanyetik dalga olan ışığın davranışını açıklayan Maxwell denklemlerini yeniden yazarak kuantum elektrodinamiğine uygun hale getirilmesini sağlayan Feynman ve arkadaşlarının çalışmaları ile gerçekleşmiştir.

Daha önceki bölümlerde de bahsedildiği gibi klasik fizik elektromanyetizmayı Maxwell denklemleri ile açıklar fakat bu açıklama elektromanyetik alanın ve parçacıkların etkileşimlerinin tam olarak açıklanmasında yetersiz kalmaktadır. Elektromanyetik alanların kuantum mekaniği içinde nasıl ele alındığı kuantum elektromanyetizma olarak bilinir. Kuantum elektrodinamiği ise elektronlar gibi yüklü parçacıkların elektromanyetik etkileşimlerini kuantum mekaniği esaslarına göre modelleyen başarılı bir teoridir. Bu teori temel parçacıklar arasındaki elektromanyetik etkileşimlerin doğru tahmin edilmesi ve deneyle uyumlu hale getirilmesi için kritik rol oynar.

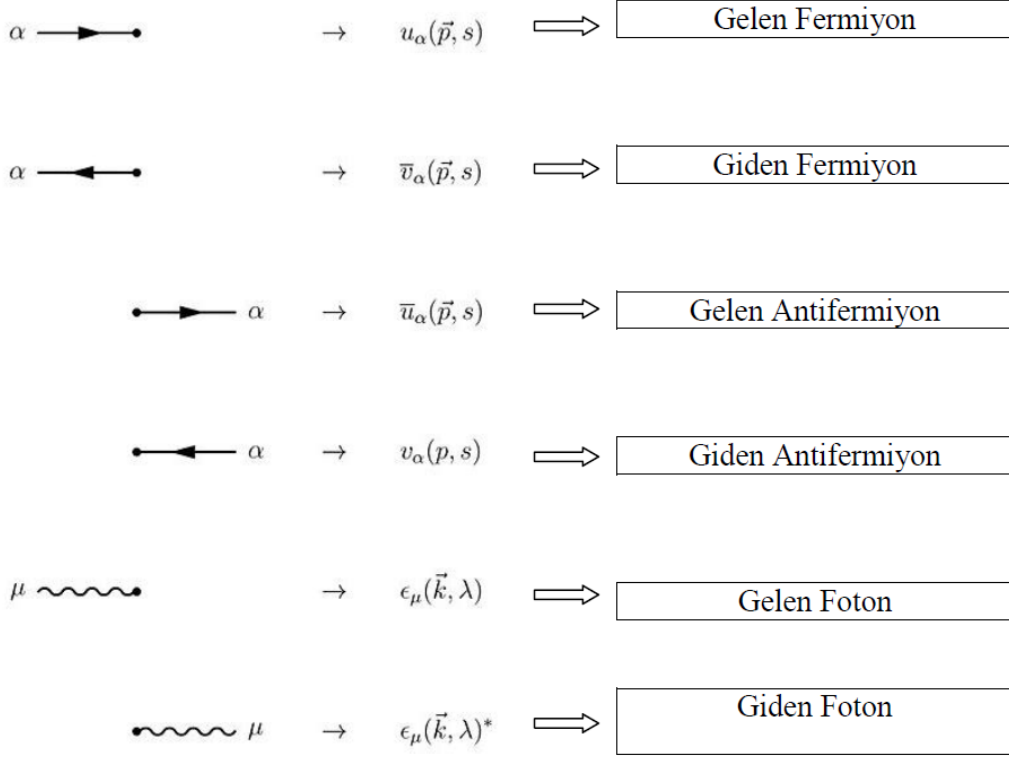
Kuantum elektrodinamiğinin geliştirilmesinde büyük rol oynayan bilim insanlarından birisi de R. Feynman'dır ve Feynman diyagramları olarak adlandırılan kuantum alan teorisinde parçacıklar arası etkileşimleri görsel olarak temsil eden grafiksel bir araç geliştirmiştir. Feynman diyagramları parçacıkları ve alanları göstermek için çizgiler ve noktalar kullanır. Noktalar parçacıkların (elektron, foton, gluon vb.) başlangıç veya bitiş noktalarını, çizgiler ise bu parçacıkların yollarını ve etkileşimlerini temsil eder. Çizgiler genellikle zamanda ileriye doğru çizilir ve zamanla nasıl ilerlediğini gösterir. Ayrıca bu diyagramlarda parçacıkların birleştiği veya dallandığı noktalar mevcuttur. Elektronik çizgiler elektron, pozitron ve diğer yüklü leptonları temsil eder. Foton çizgileri fotonları yani ışık taşıyıcı parçacıkları, Gluon çizgileri quarklar arasındaki güçlü etkileşimleri taşıyan gluonları, W ve Z bozon çizgileri ise zayıf etkileşimleri taşıyan W ve Z bozonlarını temsil etmektedir.



Şekil 2.1. Elektron-Elektron (moller) Saçılımı için Feynman diyagramları: (a) ikinci dereceden diyagramı (iki tepe); (b-j) dördüncü dereceden diyagramları göstermektedir.

Feynman Diyagramları, Lorentz invaryant saçılım genliğinin bileşenlerinin gösterildiği zaman ve uzay olan iki ana eksenden oluşan özel diyagramlardır. Vertex denen çizgilerden ve Vertice denen noktalardan oluşmaktadır. Fermiyon grubu parçacıklar düz vertexler ile gösterilirken, bozon grubu parçacıklar ise kesikli, dalgalı ve kıvrımlı vertexler ile gösterilmektedirler. Zaman ekseninde seçtiğimiz yöne göre parçacıklar ve antiparçacıklar tanımlanır. Zaman ekseninde yukarı doğru hareket parçacığı, aşağı doğru hareket ise antiparçacığı gösterirken, Vertexler, Vertice denen noktalara yönelmiş

ise parçacık, noktalardan uzaklaşıyorsa anti parçacıktır. Bu gösterim çeşitleri ve nasıl isimlendirildiklerine dair gösterim Şekil 2.2 ile verilmiştir.



Şekil 2.2. Feynman diyagramları gösterim örnekleri

Feynman diyagramlarında etkileşimler temel etkileşimler ve karmaşık etkileşimler olarak ikiye ayrılmaktadır. İki elektronun bir foton değiş-tokuşu temel etkileşime örnek gösterilebilirken çoklu parçacıklar arasındaki etkileşimler, parçacıkların birleştiği ve dallandığı noktaları içeren karmaşık diyagramlarla gösterilir. Ayrıca her Feynman diyagramı bir matematiksel ifade ile ilişkilidir ve bu ifadeler parçacıkların spinleri, momentumları etkileşim katsayıları gibi fiziksel özelliklerini içermektedir. Böylelikle diyagramlar hesaplamalar yapmak için kullanılmaktadır. Bu hesaplamaların yaygın olarak kullanıldığı alanlar; kuantum elektrodinamiği, kuantum kromodinamiği, zayıf etkileşimler ve parçacık fiziği deneyleridir. R. Feynman ve arkadaşları yapmış oldukları çalışmalarla 1965 yılında Nobel ödülünü almışlardır. Feynman formüllerinin gücü

kuantum teorisi ile açıklanması zor olan sonuçları kolaylıkla açıklamasıdır. Bu teori elektron pozitron çifti ve foton arasındaki kuantum alan teorisidir. Aynı zamanda bütün yüklü temel parçacıkların elektromanyetik etkileşimini tanımlamakta kullanılabilir. QED atomik fizik için teorik temel sağlaması açısından da oldukça önemlidir. Modern atom teorisini ileriye taşımıştır. Feynman yayıcı metodunda saçılma süreçlerini integral eşitlikleri aracılığı ile tanımlamıştır. Kısacası Feynman diyagramları parçacık fiziği ve kuantum alan teorisi alanlarında teorik ve deneysel hesaplamalar arasında köprü görevi yaparak temel parçacıkların ve doğanın temel kuvvetlerinin anlaşılmasına katkıda bulunur.

Yukarıda bahsettiğimiz genel tanımlamaları biraz daha özelleştirecek olursak öncelikle elektron ve pozitron çift oluşumu veya yok etmesine değinebiliriz. Elektron ve pozitron çift oluşumu ya da yok etmesini tanımlamak için baştan beri göreliliği olan bir formalizm zorunluydu. Saçılma süreçlerini integral eşitlikleri aracılığı ile tanımlanmasını Feynman yayıcı yöntem ile yapmıştır. Onu bu yola götüren fikir, pozitronların zamanın tersi yönünde hareket eden negatif enerjili elektronlar olarak yorumlanmasıdır. Bunu formüle eden ilk kişi Stückelberg'tir.

Kuantum mekaniğinden rölativistik kuantum mekaniğe geçmek için öncelikle rölativistik olmayan yayıcılar incelenmelidir. Bu yayıcılar düzlem dalgalarının bir dalga paketi gibi süperpozisyonunu gösterir. Bilindiği gibi her pozisyonda girişim gözlenemez. Saçılma teorisi sabit formülasyonunda düzlem dalgası ile dalga paketini temsil edilir. Saçılma problemi için bir soru ortaya çıkar. Saçılma merkezine yaklaşan uzak geçmişte bir parçacığı temsil eden dalga paketinin başına ne gelir? Burada bize Huygens cevap vermeye çalışır. Green fonksiyonunu da içeren genelleştirilmiş bir prensip sunar. Buna göre ışık belli durumlarda dalga belli durumlarda parçacıktır. Green fonksiyonu saçılma sorunu için önemlidir. Bu fonksiyon Schrödinger denklemini geliştirmiştir. Ψ dalga fonksiyonunun ileriye ya da geriye doğru yayılması durumunu incelemek için yazılmıştır. Rölativistik kuantum mekaniğine geçmek için bu fonksiyonu tanımak önemlidir.

Geliştirilen göreliliği olmayan yayıcı teori elektronların ve pozitronların göreliliğine genelleştirilir. Burada amaç göreliliği olmayan yayıcı teori ile analogi yoluyla saçılma

süreçlerini Dirac delik teorisi çerçevesinde matematiksel olarak tanımlama ve hesaplama yöntemleri geliştirmektir. Oradan da saçılma süreçlerini Dirac delik teorisi çerçevesinde matematiksel olarak tanımlama ve hesaplama yöntemleri geliştirmektir. Artık saçılma süreçlerinin görelî resminde yer alan çift oluşturma ve yok etme süreçlerinin yeni özelliğine odaklanılmıştır. Hesaplama kurallarının birçoğu Dirac denkleminin dinamikleriyle tutarlı olmalarını şart koşarak sezgisel olarak benimsenmiştir. Elektron saçılması, pozitron saçılması, elektron pozitron çift yaratımı, çift yok oluşu, bir elektron pozitron çift oluşumu süreci dahilinde elektron saçılması, vakum polarizasyonunu tanımlayan kapalı bir döngü elde edilmiştir.

Elektron pozitron çifti uzay zaman noktasında hareket eden bir potansiyel tarafından oluşturulur. İki parçacık daha sonra zamanla ileriye doğru serbestçe yayılır. Bu çiftin pozitronu ve ilk elektron birleşir ve yok edilir. Çiftin hayatta kalan elektronu daha sonra yayılır, üretilen, yayılan ve oradaki alanda yok edilen bir çifti gösterir. Elektron, burada sadece kısa bir zaman aralığında sanal olarak bulunmaktadır. Aşağıda bu süreci vakum polarizasyonu olarak tanıyacağız.

Görelî elektron-pozitron teorisi görelî olmayana göre daha fazla bileşen içerir. Sadece elektronun yayılma genliği değil aynı zamanda bir uzay zaman noktasından diğerine yayılan ve tekrar yok edildiği bir pozitronun yaratılmasının genliğini de tanımlamak gerekmektedir. Daha sonra toplam genliğin bulunmasına yararı olacağı için ilk etapta bilinmesi gereken bu pozitronun genliğidir.

Saçılma olayına hem elektron hem pozitron genliği katkı sağlamaktadır. Dirac delik teorisi bir pozitronu Dirac denizinde bir delik, yani dolu denizden negatif enerjili bir elektronunun olmaması olarak yorumlar. Böylece bir uzay zaman noktasında bir pozitronun yok edilmesi bu noktada bir elektronun oluşturulmasına eş değer olarak görülebilir. Çift oluşturma işlemleri aşağıdaki pozitron yorumuna yol açar: uzay zamanda ileriye doğru hareket eden pozitif enerjiye sahip pozitronlar, yayıcı teoride uzay zamanda geriye doğru hareket eden negatif enerjiye sahip elektronlar olarak görülür. Bu bize pozitron tanımını verir.

2.4. Kuantum Elektromanyetik Düzeltmeler ve Vakum Polarizasyonu

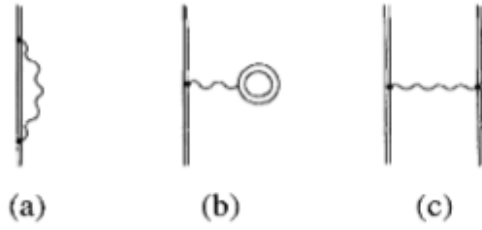
Kuantum elektromanyetik düzeltmeler kuantum alan teorisinde elektromanyetik etkileşimlerin klasik elektromanyetik teoriden farklı olarak nasıl hesaplandığını ve anlatıldığını ifade eder (Tomonaga, 1950) (Schwinger, 1948). Bu düzeltmeler klasik elektromanyetizmanın kuantum mekaniğine genişletilmesiyle ortaya çıkar.

Elektromanyetik düzeltmelerin kaynağı kuantum mekaniği gereklilikleri, sanal parçacıklar ve kuantum dalgalanmaları olarak ikiye ayılır. Kuantum mekaniği gerekliliklerinin çıkış sebebi, klasik fizikte elektromanyetik alanlar ve parçacıklar arasındaki etkileşimin deterministik olmasından kaynaklanmaktadır. Kuantum dalgalanmaları ise sanal parçacıkların (sanal fotonlar gibi) elektromanyetik alanların içinde geçici olarak ortaya çıkan ve etkileşimlerde rol oynayan düzeltmelere neden olur. Elektromanyetik düzeltmelerin önemli üç çeşidi vardır. Öz enerji düzeltmeleri (self-energy corrections), vakum polarizasyonu (vacuum polarization) ve foton öz etkileşimleri (photon self-corrections). Öz enerji düzeltmeleri, elektron gibi yüklü parçacıkların kendi elektromanyetik alanları tarafından etkilemelerinden kaynaklanır ve bu etkileşimler enerji düzeltmelerine yol açar. Bu etkileşimlerin en önemli özelliği parçacığın kendi kütlesini etkileyebilmesidir. Vakum polarizasyonu boş uzayın içinde geçici olarak oluşturulan elektromanyetik alanlar sebebiyle ortaya çıkan etkidir ve bu etki elektromanyetik alanların yayılmasını ve parçacıklar arası etkileşimleri etkiler. Son olarak foton öz etkileşimleri ise fotonlar arasındaki etkileşimlerde özellikle yüksek enerjili fotonlar arasındaki elektromanyetik düzeltmelerin bir parçasıdır (Feynman R. P., 1961).

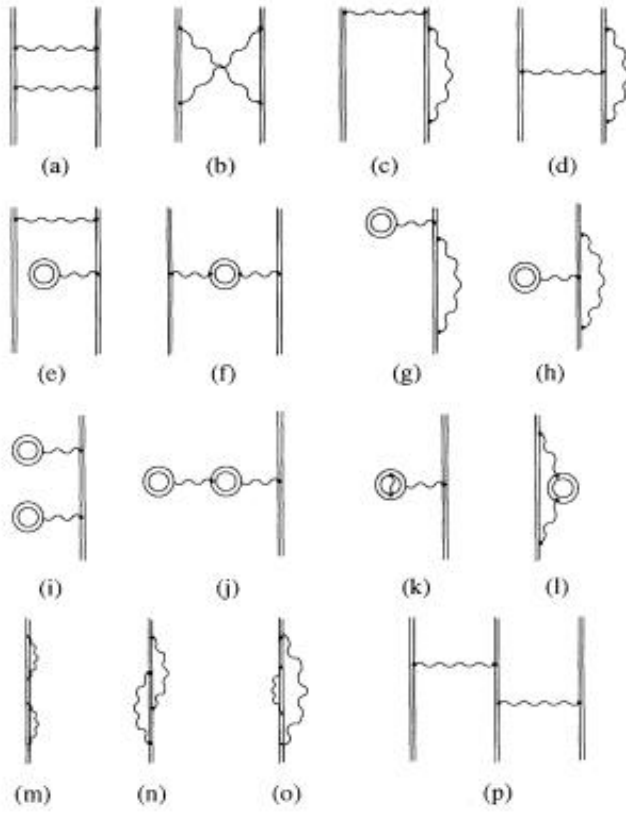
Elektromanyetik düzeltmelerin uygulamaları ve önemi özellikle kuantum elektrodinamiği içindeki teorik hesaplamaların doğruluğunu artırır ve yüksek hassasiyetteki deneysel verilerle uyumlu olmasını sağlar. Elektromanyetik düzeltmeler, bazen gözlemlenemeyen veya küçük etkileri bile örneğin manyetik moment ölçümlerindeki çok küçük değişiklikleri hesaplayabilir.

Sonuç olarak elektromanyetik düzeltmeler klasik elektromanyetizmanın kuantum mekaniği çerçevesine nasıl genişletilebileceğini ve bu genişleme ile ortaya çıkan yeni fiziksel etkileri nasıl hesaplayabileceğimizi açıklar (Weinberg, 1995).

Şimdi bu tezin konusu olan Uehling potansiyelinin çıkış noktası olan ve kuantum elektrodinamiği hesaplamalarında ortaya çıkan vakum polarizasyonundan bahsedeceğiz. Bağlı elektronlar için baskın QED etkisi tek foton öz enerjisidir (bkz. Şekil 2.3(a)). Son zamanlarda geliştirilen yöntemler artık yüksek yüklü iyonlar için öz enerjiyi doğru bir şekilde belirleyebilir. Bu yüksek yüklü iyonlara yönelik mevcut ilgi göz önüne alındığında, ikinci en önemli katkı olan vakum polarizasyonunun (bkz. Şekil 2.3(b)) daha doğru teorik hesaplamalarının yapılması yönünde çalışmalara ilgi artmaktadır.

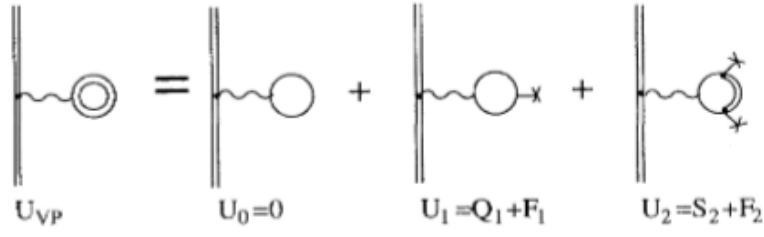


Şekil 2.3. Farklı tek foton süreçleri. Çift çizgiler atomik potansiyel alandan yayılan elektronları temsil ederken, dalgalı çizgiler ise yayılan fotonu göstermektedir. a) elektronun öz-enerjisini b) vakum polarizasyonunu c)bağlı iki elektronun etkileşimini göstermektedir.



Şekil 2.4. İki foton etkileri

Serbest elektronlar durumunda, negatif enerjili tamamen dolu elektron denizi gözlemlenebilir bir etkiye sahip değildir. Ancak, Dirac denizine yüklü bir çekirdek yerleştirirsek gözlemlenebilir bir etki olur. Bunun nedeni, bir Coulomb alanında oluşturulan sanal bir elektron-pozitron çiftinin, elektronların çekirdeğe çekilme eğilimindeyken pozitronların çekirdekten kaçma eğiliminde olması gerçeğidir. Sonuç olarak, büyük ancak sonlu mesafelerde gözlemlenen net yük, çekirdeğin çıplak yükünden daha küçüktür. Bu gözlemlenen yükün çekirdekte sınırlandırıldığı bir modele yapılan düzeltmeye vakum polarizasyonu denir. Toplam vakum polarizasyon yükü böylece sıfırdır ve kabaca çekirdeğin dışında negatif bir yük yoğunluğu ve çekirdeğin içinde pozitif bir yük yoğunluğu vardır.



Şekil 2.5. Vakum polarizasyonu şematik gösterimi

Vakum polarizasyonu (U_{vp}), sıfır-potansiyel terimi ($U_0=0$), Uehling potansiyeli (U_1) ve Wichmann-Kroll terimini (U_2) içermektedir. Bu terimlerin hesaplamalarıyla ilgili literatürde farklı hesaplama yöntemleri bulunmaktadır (Greiner, 1996).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

İki parçacık arasındaki etkileşim potansiyeli atomik birim sisteminde ($h = m = c = 1$) vakum polarizasyonu dikkate alındığında aşağıdaki gibidir (Uehling, 1935) (Frolov, 2012):

$$\phi(r) = \frac{Qe}{r} \left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi} \int_1^{\infty} e^{-2\alpha^{-1}t} \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2} dt \right]. \quad (3.1)$$

$$\phi(r) = \frac{Q}{r} + \frac{2\alpha Q}{3\pi} \int_1^{\infty} e^{-2\alpha^{-1}t} \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2} dt = \frac{Q}{r} + U(r), \quad (3.2)$$

burada Q yük, α -ince yapı sabiti, r parçacıklar arası mesafe ve $U(r)$ ise Uehling potansiyelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır (Uehling, 1935):

$$U(r) = \frac{2\alpha Q}{3\pi} \int_1^{\infty} e^{-2\alpha^{-1}t} \left(1 + \frac{1}{2t^2} \right) \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2} dt = \frac{2\alpha Q}{3\pi} I(r) \quad (3.3)$$

Uehling potansiyeli için literatürde verilen yaklaşımlar vardır ve aşağıdaki gibidir (Frolov, 2012) (Frolov ve Wardlaw, 2012):

$$U(a) = \frac{4Q}{3\pi a} \left[\left(1 + \frac{a^2}{12} \right) Ki_0(a) - \frac{a}{12} Ki_1(a) - \left(\frac{a^2}{12} + \frac{5}{6} \right) Ki_2(a) \right], \quad (3.4)$$

$$U(a) = \frac{4Q}{3\pi a} \left[Ki_0(a) - \frac{1}{2} Ki_2(a) - \frac{1}{2} Ki_4(a) \right], \quad (3.5)$$

Burada $a = 2\alpha^{-1}r$ ve $Ki_n(x)$ fonksiyonları Bickley-Naylor fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki gibi gösterilirler (Altaç, 1996):

$$Ki_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x \cosh t)}{\cosh^n t} dt. \quad (3.6)$$

Bilindiği gibi $n=0$ özel durumu için Bickley-Naylor fonksiyonları Bessel fonksiyonlarına indirgenir ve

$$Ki_0(x) = K_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi(k+1) + \ln 2 - \ln x) \frac{x^k}{2^{2k} (k!)^2}, \quad (3.7)$$

şeklinde gösterilir. Burada $\psi(k+1)$ Euler fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\psi(k+1) = -\gamma - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i F_i(k)}{i}. \quad (3.8)$$

Burada γ literatürde iyi bilinen Euler sabitidir.

$n \geq 2$ için Bickley-Naylor fonksiyonları aşağıdaki tekrarlı bağıntıları yardımıyla hesaplanmaktadır (Frolov ve Wardlaw, 2012) (Abramowitz ve Stegun, 1948):

$$nKi_{n+1}(x) = (n-1)Ki_{n-1}(x) - xKi_n(x) + xKi_{n-2}(x). \quad (3.9)$$

Uehling potansiyelinin hesaplanması için Bickley-Naylor fonksiyonlarının tam ve doğru şekilde hesaplanması gerekmektedir. Literatürde bu fonksiyonlar nümerik yöntemler kullanılarak hesaplanmaktadır.

Literatürde binomial açılım yöntemi kullanılarak türetilmiş Uehling potansiyeli için analitik ifade verilmiştir. Bilindiği gibi binomial açılım yöntemi aşağıdaki gibidir (Grandshteyn & Ryzhik, 1980)(Çopuroğlu, 2015):

$$(x \pm y)^n = \sum_{m=0}^N (\pm 1)^m f_m(n) x^{n-m} y^m, \quad (3.10)$$

Burada $f_m(n)$ binomial fonksiyonudur ve

$$f_m(n) = \begin{cases} \frac{1}{m!} \prod_{i=0}^{m-1} (n-i) & n \text{ tamsayı} \\ \frac{(-1)^m \Gamma(m-n)}{m! \Gamma(-n)} & n \text{ kesir sayı} \end{cases}. \quad (3.11)$$

ile gösterilir. Binomial açılım yöntemi yardımıyla Uehling potansiyeli için (3.3)'de $I(r)$ ile gösterilen integral için aşağıdaki ifade alınmıştır (Çopuroğlu ve Mehmetoğlu, 2019).

$$I(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N F_i(1/2)(-1)^i \left[E_{1+2i}(r) + \frac{1}{2} E_{3+2i}(r) \right]. \quad (3.12)$$

Burada $E_{1+2i}(r)$ üstel integral fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt, \quad (3.13)$$

$$E_n(z) = z^{n-1} \Gamma(1-n, z). \quad (3.14)$$

(3.12) ve (3.14)' de ortaya çıkan $\Gamma(m)$ ve $\Gamma(m, n)$ fonksiyonları literatürden iyi bilinen tam ve tam olmayan Gamma fonksiyonlarıdır ve aşağıdaki şekilde gösterilir (Gradshteyn & Ryzhik, 1980).

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (3.15)$$

$$\Gamma(x, \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (3.16)$$

Bu durumda Uehling potansiyeli için (3.3) şeklinde verilen ifade için Binom açılımı kullanılarak elde edilen yeni ifade aşağıdaki gibi gösterilir:

$$U(r) = \frac{2\alpha Q}{3\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N F_i(1/2)(-1)^i \left[E_{1+2i}(r) + \frac{1}{2} E_{3+2i}(r) \right] \quad (3.17)$$

Böylece atomik birim sisteminde ($h = m = c = 1$) Coulomb potansiyeline düzeltme terimi olarak eklenen vakum polarizasyonu için yeni analitik ifade aşağıdaki gibi olur:

$$\phi(r) = \frac{Q}{r} + \frac{2\alpha Q}{3\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N F_i(1/2)(-1)^i \left[E_{1+2i}(r) + \frac{1}{2} E_{3+2i}(r) \right] \quad (3.18)$$

4. TARTIŞMA ve BULGULAR

Vakum polarizasyonu, Coulomb potansiyelindeki kısa süreli değişimleri betimleyici terimdir. Bu süreç foton değişimiyle yüklü bir parçacığın, sanal elektron pozitron çiftine eşleşmesini gösterir. Dielektriğin kutuplaşması gibi yüklü parçacık yükünü azaltarak vakumda kutuplaşır ve bu sanal elektron pozitron çifti yüklü parçacıkla etkileşir. Bir elektron olması halinde ise pozitron çekecek ve sanal elektron itecektir. Bu durum, elektron yükünü perdeleyen vakum polarizasyonuna neden olur. Çekirdeğin Coulomb alanında bulunan bir elektron için vakum polarizasyonu düzeltmesi, Coulomb potansiyeline Uehling potansiyeli olarak hesaba katılır. Böylelikle ince yapı sabiti α , enerji ve mesafeye bağlı olarak değişecektir.

Uehling potansiyeli kuantum elektrodinamik (QED) katkılardan olan vakum polarizasyonu için düzeltici terim olduğundan özellikle yüksek Z 'li atomlar için önemli olduğundan hesaplamalarda dikkate alınmalıdır. Literatürde Uehling potansiyelinin numerik hesaplama yöntemleri bulunmaktadır. Biz ise bu çalışmada Uehling potansiyeli için elde edilmiş analitik ifade yardımıyla etkileşim mesafesinin farklı değerleri için hesaplamalar yapıp literatürle karşılaştırma yapmayı hedefledik.

Bu hesaplamalar yapılırken bir önceki bölümde elde ettiğimiz (3.12) analitik ifadesi için Mathematica programlama dilinde algoritması oluşturulmuştur. Tablo 4.1'de etkileşim mesafesinin küçük ve büyük değerleri için Uehling potansiyeli içerisinde ortaya çıkan $I(r)$ integralinin aldığı değerler literatürde kullanılan nümerik sonuçlarla kıyaslanmıştır (Frolov ve Wardlaw, 2012). (3.12) ifadesinden de açıkça görülebileceği gibi, bu ifade üst sınırı sonlu olan bir seri şeklindedir. Hesaplamalarımız yapılırken serinin üst sınırı $N = 450$ olarak alınmıştır.

Tablo 4.2'de Uehling potansiyeli için aldığımız sonuçlar denklem (3.17) dikkate alınan hesaplama sonuçları literatürle karşılaştırılmalı olarak verilmiş olup alınan sonuçlar oluşturulan analitik ifadenin doğruluğunu ispatlamaktadır. Ayrıca Şekil 4.1'de Uehling potansiyelinin parçacıklar arası mesafeye göre değişimi literatür kıyaslamalı olarak gösterilmiştir. Şekil 4.1'de kesikli çizgi literatür sonucunu gösterirken düz çizgi bizim

aldığımız sonuçlardır. Uehling potansiyeli için elde ettiğimiz analitik ifadenin hızını da kıyaslamak için parçacıklar arası mesafenin $r=0.01$ olduğu durum için CPU süresi hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlarda bizim formülümüz nümerik yöntemden yaklaşık 20 kat daha hızlı çıkmıştır.

Son olarak Tablo 4.3' de denklem (3.18) dikkate alınarak Coulomb potansiyeline düzeltme terimi olarak eklenen ve Uehling potansiyelini içeren vakum polarizasyonu için hesaplama sonuçları verilmiştir. Vakum polarizasyonunun parçacıklar arası mesafenin çok küçük ve büyük değerler için beklenen davranışı sağladığı ve literatür ile kıyaslandığında yakın değerler alındığı görülmektedir.

Bu tezde vakum polarizasyonu ve Uehling potansiyeli hesaplamaları için önerilen (3.12), (3.17) ve (3.18) denklemleri için analitik ifadelerin belirli bir üst sınırı alınmıştır ($N=450$). Daha hassas çalışmalar için toplamın üst sınırı artırılabilir. Ayrıca tüm formülasyon ve hesaplamalar atomik birim sistemi ($h=m=c=1$) dikkate alınarak yapılmış olup hesaplamalarda $\alpha=1/137, Q=2$ değerleri kullanılmıştır.

Tablo 4.1. $I(r)$ integralinin parçacıklar arası mesafenin değişimine göre aldığı değerler ve literatürle karşılaştırılması ($N=450$)

r	Denklem (3.12)	(Frolov ve Wardlaw, 2012)
0.01	8.115051	8.115036
0.02	7.422076	7.422061
0.2	5.122582	5.122568
0.5	4.211433	4.211418
1	3.526823	3.526809
1.5	3.129856	3.1298421
2	2.850633	2.8506191
5	1.984293	1.984275

8	1.562901	1.562887
10.5	1.330496	1.330483
15.7	1.007708	1.007696
20	0.828739	0.828728
25.2	0.670948	0.670938
30	0.561539	0.561530
35.9	0.458456	0.458447
40.8	0.3913553	0.391347
48.7	0.3077415	0.307734
60.9	0.218009	0.2180029
100	0.0820734	0.0820701
200	0.0098917	0.0098914

Tablo 4.2 Uehling potansiyeli için elde edilen analitik ifadenin literatürle karşılaştırılması ($N = 450$, $\alpha = 1/137$, $Q = 2$)

r	Denklem (3.17)	(Frolov ve Wardlaw, 2012)
0.01	0.0251211	0.0251388
0.02	0.0228752	0.022992
0.2	0.0158487	0.0158684
0.5	0.0130387	0.0130458
1	0.0107488	0.0109249
1.5	0.0096495	0.0096952
2	0.00882891	0.00883016

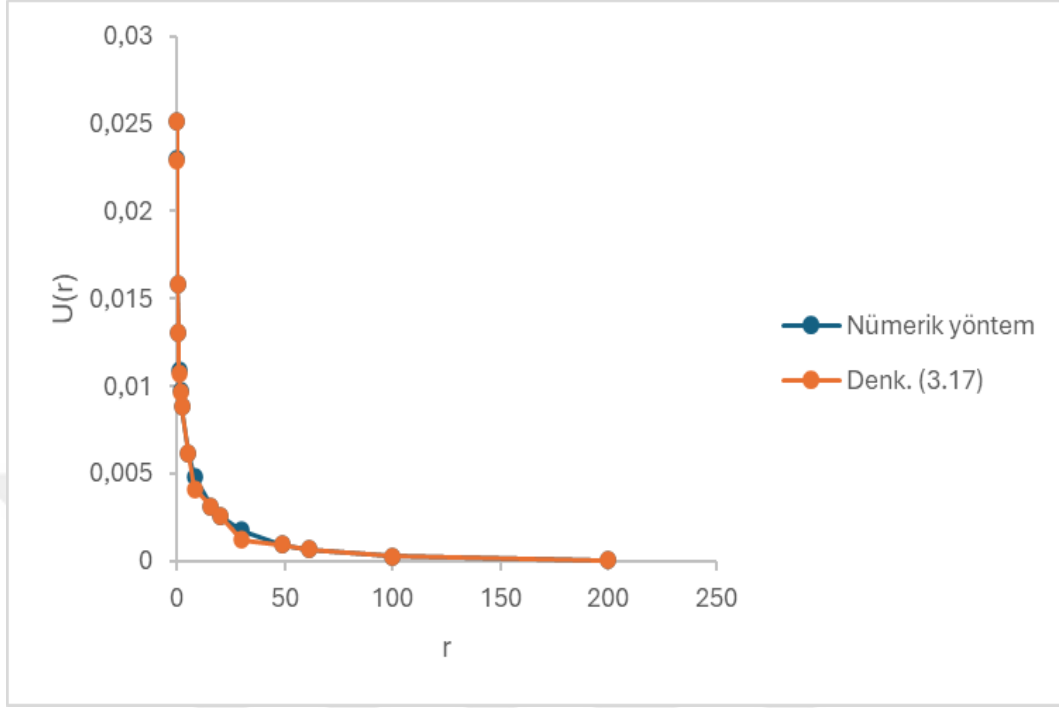
5	0.00612533	0.00614636
8	0.00483998	0.00484097
10.5	0.00411983	0.00412103
15.7	0.00311936	0.00312113
20	0.00255987	0.00256675
25.2	0.00206685	0.00207797
30	0.00172902	0.00173908
35.9	0.00140599	0.00141978
40.8	0.00119779	0.00121195
48.7	0.00094945	0.00095297
60.9	0.00067184	0.00067506
100	0.00025209	0.00025409
200	0.00002996	0.00003061

Tablo 4.3. Vakum polarizasyonu için elde edilen analitik ifadenin literatürle karşılaştırılması ($N = 450$, $\alpha = 1/137$, $Q = 2$)

r	Denklem (3.18)	(Frolov ve Wardlaw, 2012)
0.01	200.0251	200.0251
00.2	100.0229	100.0230
0.2	10.01585	10.01586
0.5	4.013039	4.013045
1	2.010749	2.010923
1.5	1.342582	1.343028

2	1.008829	1.0088301
5	0.406125	0.4061463
8	0.254839	0.2548409
10.5	0.194596	0.1945972
15.7	0.130579	0.1305096
20	0.102559	0.1025667
25.2	0.0814319	0.0814431
30	0.0683956	0.0684057
35.9	0.0571163	0.0571301
40.8	0.0502174	0.0502316
48.7	0.0420172	0.0420207
60.9	0.0335126	0.0335158
100	0.0202521	0.0202541
200	0.0100299	0.0100306

($N = 450$, $\alpha = 1/137$, $Q = 2$)



Şekil 4.1. Uehling potansiyelinin parçacıklar arası mesafeye göre değişiminin analitik yöntem ve nümerik yöntem (Frolov ve Wardlaw, 2012) ile karşılaştırılması

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Uehling potansiyeli ve vakum polarizasyonu kuantum elektrodinamiği çerçevesinde elektromanyetik etkileşimlerin doğru bir şekilde hesaplanmasında önemli rol oynamaktadır. Özellikle yüksek hassasiyet gerektiren parçacığın enerji seviyelerinin belirlenmesinde, Lamb kayması ve manyetik moment hesaplamalarında kuantum elektrodinamiğinin deneysel doğruluğunu test etmek için kullanılmaktadır.

Uehling potansiyeli özellikle iki parçacık arasındaki Coulomb etkileşimine ilave bir terim olarak hesaplanması gereken bir potansiyeldir. Bu tezde de Uehling potansiyelinin analitik bir ifadesi oluşturulmuştur ve alınan sonuçlardan önerilen yöntemin hızlı ve hassas olduğu belirlenmiştir.

Sonuç olarak özellikle iki elektrik yükü arasındaki etkileşim potansiyelinin etkili olduğu atomik ve müon-atomik sistemlerde, Uehling potansiyeli için önerdiğimiz ifade ileri çalışmalara ışık tutacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1948). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55)*. US Government printing office.
- Altaç, Z. (. (1996). Integrals involving Bickley and Bessel functions in radiative transfer, and generalized Exponential Integral. *ASME J. Heat Transfer*, 789-792.
- Bethe, H. A., & Salpeter, E. E. (2012). *Quantum mechanics of one-and two-electron atoms*. Springer Science & Business Media.
- Bohr, N. (1913). On the constitution of atoms and molecules. *Philosophical Magazine*, 1-25.
- Born, M. (1926). Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge. *Zeitschrift für Physik*, 863-867.
- Candarlı, M. (2002). *Heisenberg metodu ile Schrödinger denkleminin çözümleri / Solutions of the Schrödinger equation by the heisenberg method (yüksek lisans tezi)*. Ankara: Gazi üniversitesi.
- Compton, A. H. (1923). A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements. *Physical Review*, 483-502.
- Crookes, W. (1879). On the size and charge of the corpuscles of matter. *Philosophical Magazine*, 191-195.
- Çopuroğlu, E. & Mehmetoğlu, T. (2015). Full analytical evaluation of the Einstein relation for disordered semiconductors. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1580-1583.
- Çopuroğlu, E. & Mehmetoğlu, T. (2019). Analytical evaluation of the Uehling potential using binomial expansion theorems. *Вестник Карагандинского университета*, 12.
- Dirac, P. A. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A*, 610-624.
- Dirac, P. A. (1930). *The principles of quantum mechanics*. Oxford University Press.
- Einstein, A. (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. . *Annalen der Physik*, 132-148.
- Feynman, R. P. (1949). The theory of positrons. *Physical Review*, 749-759.
- Feynman, R. P. (1961). *Quantum electrodynamics*. Addison-Wesley.
- Frolov, A. M. & Wardlaw D.M. (2012). Analytical formula for the Uehling potential. *The European Physical Journal B*, 348.

- Frolov, A. M. (2012). On the properties of the Uehling potential. *arXiv preprint arXiv:1210.6737*.
- Geiger, H. & Mertens, W. (1909). On the scattering of α -particles by matter. *Proceedings of the Royal Society A*, 495-500.
- Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. (1980). *Table of integrals, series, and products*. New York: Academic Press.
- Greiner, W. (1990). *Relativistic quantum mechanics*. Springer.
- Greiner, W. (1996). *Quantum electrodynamics*. Springer.
- Griffiths, D. J. (2017). *Introduction to quantum mechanics (3rd ed.)*. Cambridge University Press.
- Klein, O. & Gordon, W. (1926). Die Quantelung des rotorischen und des translationalen Freiheitsgrades. *Zeitschrift für Physik*, 895-906.
- MacKay, D. M. (1999). *Millikan and the oil drop experiment*. Cambridge University Press.
- Planck, M. (1900). Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik*, 69-122.
- Rutherford, E. (1911). The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom. *Philosophical Magazine*, 669-688.
- Schwinger, J. (1948). On the classical radiation of accelerated electrons. *Physical Review*, 416-417.
- Tomonaga, S. (1950). The quantum theory of fields. *Progress of Theoretical Physics*, 544-570.
- Uehling, E. A. (1935). Exponential corrections to the Coulomb potential. *Physical Review*, 55-62.
- Weinberg, S. (1995). *The quantum theory of fields*. Cambridge University Press.
- Yılmaz, A. (2020). *Kuantum mekaniği: Temel prensipler ve uygulamalar*. Türkiye Bilimler Akademisi.