

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE
BAZI UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Hami GÜNDOĞDU

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

HAZİRAN 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE
BAZI UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Hami GÜNDOĞDU

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

HAZİRAN 2024

Hami GÜNDOĞDU tarafından hazırlanan “Modüler metrik uzaylarda sabit nokta teorisi ve bazı uygulamaları” adlı tez çalışması 27.06.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL (Danışman)
	Sakarya Üniversitesi
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK
	Sakarya Üniversitesi
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Zahir MURADOĞLU
	Kocaeli Üniversitesi
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Soley ERSOY
	Sakarya Üniversitesi
Jüri Üyesi :	Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGİN
	Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “**MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE BAZI UYGULAMALARI**” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(27/06/2024).

Hami GÜNDOĞDU





Eşim Dr. Kübra Özata GÜNDOĞDU'ya ve çocuklarım Muhammed Ali ve Yasin'e



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma boyunca desteğini ve yardımlarını esirgemeyen bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Değerli katkılarından dolayı tez jüri üyelerine teşekkür ederim. Sakarya Üniversitesi Matematik bölümünde üzerimde emeği geçen öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini her zaman hissettiğim başta babam, annem, ablam, abilerime ve değerli eşim Dr. Kübra ÖZATA GÜNDOĞDU'ya gösterdikleri sabır ve anlayıştan ötürü teşekkür ederim.

Ayrıca doktora öğrenimimi Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı ile destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Hami Gündoğdu



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
KISALTMALAR	xiii
SİMGELER	xv
ŞEKİL LİSTESİ	xviii
ÖZET	xixx
SUMMARY	xxiii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	3
3. MODÜLER METRİK UZAYLAR	11
3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	11
3.2. Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	14
4. MODÜLER METRİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ C -ŞARTINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI	17
4.1. Modüler Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş C -Şartları ve Sabit Nokta Teoremleri	17
4.2. Sınırlı Genelleştirilmiş φ -Varyasyonları için Modüler Metrik Uzayları	28
4.2.1. Anti-periyodik sınır değer problemi için modüler metrik uzay yapısı	28
4.2.2. Başlangıç değer problemi için modüler metrik uzay yapısı	31
4.3. Genelleştirilmiş C -Şartları için Sabit Nokta Teoremlerinin Uygulamaları	34
4.3.1. Anti-periyodik sınır değer problemi için sabit nokta teoremi	34
4.3.2. Başlangıç değer problemi için sabit nokta teoremi	40
5. KISMİ SIRALI MODÜLER METRİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ C -ŞARTINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI	47
5.1. Kısmi Sıralı Modüler Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş C -Şartları ve Sabit Nokta Teoremleri	47
5.2. Kısmi Sıralı Modüler Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş C -Şartı için Sabit Nokta Teoreminin İntegral Denkleme Uygulaması	54
6. MODÜLER METRİK UZAYLARDA F_α -DARALMA ŞARTINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI	57
6.1. Modüler Metrik Uzaylarda F_α -Daralma Şartları ve Sabit Nokta Teoremleri ..	57
6.2. Modüler Metrik Uzaylarda F_α -Daralma Şartları için Sabit Nokta Teoremlerinin İntegral Denklemlere Uygulamaları	69
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	73
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	79



KISALTMALAR

$C[0,L]$	: $[0,L]$ aralığında Tanımlı Mutlak Sürekli Fonksiyonların Kümesi
$C([a,b])$	: $[a,b]$ aralığında Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Kümesi
$G(t, s)$	: Green Fonksiyonu
$GV_{\varphi}([0, L])$	: Sınırlı Genelleştirilmiş φ -Varyasyon Dönüşümlerinin Uzayı
$Fix(T)$	: T dönüşümünün Sabit Noktaları Kümesi
L	: Sıfırdan Büyük Bir Reel Sayı
$L^1[0, L]$	: $[0, L]$ aralığında Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonların Kümesi



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
t	: Zaman [Birim]
Tx	: x noktasının T dönüşümü Altındaki Görüntüsü
$\tilde{X}$	: $[0, L]$ aralığındaki Reel Fonksiyonlar Kümesi
$\dot{X}$	: $[0, L]$ aralığındaki Anti-periyodik Reel Fonksiyonların Kümesi
$\ddot{X}$	: $[0, L]$ aralığındaki Başlangıç Değeri 0 Olan Reel Fonksiyonlar Kümesi
X_ρ	: Modüler Uzak
(X_w^*, w)	: Modüler Metrik Uzak
$(X_w^*, w, \leq)$	: Kısmi Sıralı Modüler Metrik Uzak
$w_\lambda(x, y)$	: Modüler Metrik
ρ	: Modüler
$\leq$	: Kısmi Sıralama Bağıntısı



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 5.1. Örnek 5.1.4'te verilen dönüşümün sabit noktası.....	51
Şekil 5.2. Örnek 5.1.5'te verilen dönüşümün sabit noktası.....	53





MODÜLER METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEORİSİ VE BAZI UYGULAMALARI

ÖZET

Bu doktora tezi yedi bölümden oluşmaktadır. Alışılmış metrik uzayların genelleştirilmiş bir hali olan modüler metrik uzaylar ve bu uzaylardaki sabit nokta teoremlerini içermektedir. Öncelikle, alışılmış metrik uzaylarda tanımlanmış olan bazı özel şartların modüler metrik uzaylarda genelleştirilmiş halleri bu tezin farklı bölümlerinde tanımlanmıştır. Her bir bölümde tanımlanan bu genelleştirilmiş şartlar için modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri önce ifade edilmiş sonra da ispatı yapılmıştır. Bu bölümlerde ispatlanan teoremlerin sonuçlarını pekiştirmek için özel örnekler verilmiştir. Uygulama olarak da bahsi geçen uzaylarda farklı tip dönüşümler için sabit nokta teoremlerinin sonuçları kullanılarak genel halde verilen birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

Giriş bölümünde, sabit nokta kavramı açıklanıp ve bu konu hakkında literatür özeti verilmiştir. Sabit nokta teoremi ve bu teoremin ilk uygulamaları hakkında kısaca bilgiler verilmiştir.

İkinci kısımda, öncelikle metrik ve metrik uzay kavramları açıklanmış olup bu uzaylarda Banach büzülme prensibine dayanan sabit nokta teoremleri hakkında özet bilgiler verilmiştir. Daha sonra, bu tez çalışmasında faydalanılan bazı özel fonksiyonlar ile alışılmış metrik uzaylarda tanımlanan C -şartı ve F -daralma şartlarının tanımlarından kısaca bahsedilmiştir. Metrik uzaylarda bahsi geçen şartları sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve yapılan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölüme modüler metrik uzay hakkında literatür özeti verilerek başlanmıştır. Modüler metrik uzaydan önce modüler ve modüler uzay kavramları tanıtılmıştır. Bu kavramların ne zaman ve kim tarafından ortaya atıldığından bahsedilmiştir. Daha sonra da Chistyakov tarafından ortaya atılan modüler metriğin tanımı verilmiştir. Bu tanımdan yola çıkılarak oluşturulan modüler metrik uzay kavramı açıklanmıştır. Modüler metrik uzaylarda ilk defa daralma dönüşümleri için sabit nokta teoreminin ifade ve ispat edildiğine değinilmiştir. Bu gelişmeden sonra birçok bilim insanı modüler metrik uzaylarda farklı tip dönüşümler için sabit nokta teoremleri üzerinde çalışmaya başlamıştır. Bu uzaylarda sabit nokta teoremi ile ilgili birçok sonuçlar ortaya konduğundan bahsedilmiştir. Bazı özel modüler metrik uzay yapıları tanıtılmıştır. Ayrıca, modüler metrik uzaylarda limit, yakınsaklık, tamlık, Cauchy dizisi olma gibi bazı önemli tanımlar verilmiştir. Bunun yanında, modüler metrik uzaylarda daralma şartı kavramının tanımı verilip bu şart için literatürde var olan bazı sabit nokta teoremlerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü kısımda metrik uzaylarda verilen genelleştirilmiş C -şartı modüler metrik uzaylara genişletilerek bu uzaylarda ilk defa tanımlanmıştır. Öncelikle, bu şartı sağlayan dönüşümler için modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ifade edilip

ispatlanmıştır. Burada elde edilen sonuçlardan faydalanılarak birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için anti-periyodik sınır değer probleminin ve başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Dolayısıyla, ilk önce bu problemler için ayrı ayrı modüler metrik uzaylar tanımlanmıştır. Sonra da bu bölümün başında ispatlanan sabit nokta teoremleri kullanılarak ele alınan problemler için tanımlanan modüler metrik uzaylarda bahsedilen problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Ayrıca, burada modüler metrik uzayların alışılmış metrik uzaylardan farkını göstermek için metrik olmayan özel bir modüler metrik ele alınmıştır. Bu teoremlerin modüler metrik uzaylar ile alışılmış metrik uzaylar arasındaki fark uzayında geçerli olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde öncelikle $\leq$ sıralama bağlantısı tanımlanmıştır. Bu tanım kullanılarak kısmi sıralı modüler metrik uzaylar tanımlanmıştır. Bir önceki bölümde modüler metrik uzaylarda tanımlanan genelleştirilmiş C -şartları için kısmi sıralı modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin ifade ve ispatları verilmiştir. Bunun yanında bu teoremlerden elde edilen sonuçları pekiştirmek için bazı özel kısmi sıralı modüler metrik uzaylarda örnekler verilmiştir. Bu örneklerde verilen dönüşümlerin çözümlerinin var ve tek olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, dönüşümün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişiminden faydalanılarak sabit noktasının tek olduğu gösterilmiştir. Uygulama olarak özel bir kısmi sıralı modüler metrik uzayında bir integral denklem ele alınmıştır. Son olarak da bu bölümde ispat edilen teoremler kullanılarak ele alınan bu integral denklemin çözümünün bahsedilen modüler metrik uzayda varlığı ve tekliği ispat edilmiştir.

Altıncı kısımda alışılmış metrik uzaylarda tanımlanan F -daralma şartının α -kabul edilebilir dönüşümler kullanılarak genelleştirilmiş tipi modüler metrik uzaylarda tanımlanmıştır. Bu çalışmada ilk defa tanımlanan bu genelleştirilmiş F -daralma şartı F_α -daralma şartı olarak gösterilmiştir. Burada 1. tip ve 2. tip olmak üzere iki farklı F_α -daralma şartları tanımlanmış olup her biri için ayrı ayrı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Öncelikle, bazı şartları sağlayan dönüşümler için sabit noktanın varlığı ispatlanmıştır. Bununla ilgili örnek verilir örnekteki dönüşüm sabit noktasının var fakat tek olmadığı gösterilmiştir. Bunun yanında farklı şartlar altında yine bir dönüşümün sabit noktasının varlığı ifade ve ispat edilip birçok sonuç verilmiştir. Daha sonra burada ispatlanan teoremlerdeki bazı şartlar değiştirilerek sabit noktanın tek olduğu ifade ve ispat edilmiştir. Bu teoremlerle ilgili örnek verilmiş olup örnekteki dönüşümün sabit noktasının var ve tek olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, sabit noktanın tekliği ile ilgili yine birçok sonuç ifade edilmiştir. Son olarak genel formda verilmiş bir integral denklemin tanımlanan modüler metrik uzayda çözümünün var olduğu gösterilmiştir. Bunun uygulaması olarak ise özel halde verilmiş bir integral denklemin çözümünün ele alınan modüler metrik uzayda var olduğu gösterilip bu var olan çözüm belirtilmiştir.

Bu tez çalışmasının son bölümünde modüler metrik uzaylarda sabit nokta teorisi ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Tez kapsamında alışılmış metrik uzaylarda var olan bazı özel şartların modüler metrik uzaylara genişletilmiş halleri tanımlanmış olup bu şartları sağlayan dönüşümler için ele alınan uzaylarda sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Bunun yanında burada ispatlanan teoremlerin sonuçlarını pekiştirmek için ayrı ayrı örnekler verilmiştir. Bu ispatlara dayanarak her bölüm önemli sonuçlar içermektedir. Bu tezin dört, beş ve altıncı bölümlerindeki modüler metrik uzaylarda tanımlanan genelleştirilmiş şartlar ilk defa bu tez çalışmasında tanımlanmış olup bu bölümlerde ifade ve ispat edilen sabit nokta teoremleri bu tez çalışmasının orijinal

bulgularıdır. Sonuç olarak, bu tez çalışması literatüre katkı yapacak yeni ve orijinal sonuçlar bulundurmaktadır.





FIXED POINT THEORY AND SOME APPLICATIONS IN MODULAR METRIC SPACES

SUMMARY

This doctoral thesis consists of seven chapters. It includes modular metric spaces, which generalize ordinary metric spaces, and fixed point theorems in these spaces. First, the generalized versions of some particular conditions defined in ordinary metric spaces are described in modular metric spaces. For these generalized conditions defined in each chapter, fixed point theorems are first stated and then proven in modular metric spaces. Illustrative examples are considered to reinforce the results of the theorems proven in these chapters. As applications, the existence and uniqueness of the solutions of first-order nonlinear differential and integral equations given in general are proven by using the results of fixed point theorems for different types of mappings in the mentioned spaces.

The introduction section explains the concept of fixed points, and a summary of the literature on this subject is given. Brief information about the fixed point theorem and the first applications of this theorem is given.

In the second part, the concepts of metric and metric spaces are first explained, and brief information about the fixed point theorems based on the Banach contraction principle in these spaces is given. Then, short descriptions of the C -condition and F -contraction conditions defined in ordinary metric spaces and some particular functions utilized in this thesis are provided. Information about the fixed point theorems and the studies carried out for the mappings that satisfy the mentioned conditions in these spaces is given.

The third section starts by giving a summary of the literature on modular metric space. Before the modular metric space, the concepts of modular and modular space are introduced. It is mentioned when and by whom these concepts were introduced. Then, the definition of the modular metric, introduced by Chistyakov, is given. Based on this definition, the structure of modular metric spaces is explained. It is mentioned that the fixed point theorem was expressed and proved for the first time in modular metric spaces. After this development, many scientists began to work on fixed point theorems for different types of mappings in modular metric spaces. It is stated that many results regarding the fixed point theorem emerged in these spaces. Some specific modular metric spaces are introduced. In addition, some important definitions such as limit, convergence, completeness, and being Cauchy series, in modular metric spaces are given. In addition, the definition of the contraction condition in modular metric spaces is given, and some fixed point theorems existing in the literature for this condition are mentioned.

In the fourth part, the generalized C -condition given in metric spaces is extended to modular metric spaces and defined in these spaces for the first time. First of all, the fixed point theorems in modular metric spaces for mappings that satisfy this condition are expressed and proven. Based on the results obtained here, the existence and

uniqueness of the solution of the anti-periodic boundary value problem and the initial value problem for first-order nonlinear differential equations are demonstrated. Therefore, separated modular metric spaces are defined for these problems. By using the fixed point theorems proven at the beginning of this section, the existence and uniqueness of the solutions for the problems mentioned in these defined spaces are demonstrated. Moreover, a non-metric modular metric is considered. It is shown that these theorems are valid in the difference space between modular metric spaces and ordinary metric spaces.

In the fifth section, the sort connection $\preceq$ is mentioned. By using this definition, partially ordered modular metric spaces are defined. Expressions and proofs of the fixed-point theorems in partially ordered modular metric spaces are presented for the generalized C -conditions defined in the previous section within modular metric spaces. In addition, some illustrative examples of partially ordered modular metric spaces are given to reinforce the results obtained from these theorems. It is proven that the solutions of the mappings given in these examples exist and are unique. Additionally, by using the intersection of the mapping's graph and the line $y=x$, it is shown that the fixed point is unique. As an application, an integral equation in a specific partially ordered modular metric space is considered. Finally, the existence and uniqueness of the solution of this integral equation in the mentioned modular metric space are proven by using the theorems proven in this section.

In the sixth part, the generalized type of the F -contraction condition defined in ordinary metric spaces is defined in modular metric spaces by using α -admissible mappings. This generalized F -contraction condition, defined for the first time in this study, is denoted as the F_α -contraction condition. Two different F_α -contraction conditions, type 1 and type 2, are defined and separate fixed point theorems are expressed and proven for each of them. First of all, the existence of a fixed point is proven for the mappings that satisfy certain conditions. An example is given, and it is shown that the fixed point of the mapping in the example exists but is not unique. In addition, the existence of a fixed point of a mapping under different conditions is expressed and proven. Many results are given, as well. Later, by changing some of the conditions in the theorems proven here, it is stated and proven that the fixed point is unique. An example for this theorem is given. It is shown that the fixed point of the mapping in the example exists and is unique. Additionally, many results are expressed regarding the uniqueness of the fixed point. Finally, the existence of a solution of an integral equation given in a general form in the defined modular metric space is demonstrated. As an application of this, it is shown that the solution of the given integral equation exists in the specifically considered modular metric space. Furthermore, this existing solution is stated.

In the final section, a summary of this thesis is given. Significant results regarding fixed point theorems in modular spaces are presented. Within the scope of the thesis, the extended versions of certain conditions existing in ordinary metric spaces are defined in modular metric spaces. Fixed point theorems are stated and proven for the mappings that satisfy these conditions in the considered modular metric spaces. In addition, separate examples are given to reinforce the results of the theorems proven here. Based on these proofs, each chapter contains significant conclusions and outcomes. The generalized conditions defined in modular metric spaces in the fourth, fifth, and sixth chapters of this thesis are defined for the first time in this thesis work. The fixed-point theorems expressed and proven in these chapters are the original

results of this thesis work. As a result, this thesis study contains original results that do not exist in the literature, and so it contributes to the literature with new results.





1. GİRİŞ

Başta matematik, fizik ve kimya olmak üzere mühendisliğin birçok alanında karşılaşılan problemlerin çözümlerinin bulunmasından önce bu tür problemlerin en azından bir çözümünün var olması araştırılmaktadır. Bu tür çözümlerin varlığı, ele alınan problemlerin çözümünü bulmak için bir umut vadetmektedir. Hatta var olan bu çözümlerin tek olması da çok büyük önem taşımaktadır. Dolayısıyla bir problemin çözümünün var olması ve bu çözümün tekliği her zaman bilim adamları tarafından araştırılan ve ilgi çeken bir konu olarak günümüze kadar ulaşmıştır. Günümüzde hala bu konu üzerinde sabit nokta teoremi ve genelleştirmeleri adı altında çalışmalar yapılmaktadır.

Sabit nokta teoreminin amacı, X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere X kümesinin hangi elemanları için $Tx = x$ eşitliğinin sağlandığını araştırmaktadır. Bu şartı sağlayan $x \in X$ noktalarına T 'nin sabit noktaları denir. Diğer bir deyişle, sabit nokta teoremleri T 'nin hangi şartlar sağlandığında sabit noktası veya noktaları vardır sorusuna cevap bulmak için verilen ifadelerdir.

İlk olarak 1844 yılında Cauchy ve Euler $y' = T(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ diferansiyel denklemini ele almış ve bu problemin çözümünün varlığı ve tekliğini ispatlayarak bu alanda öncü olmuşlardır. 1877 yılında R. Lipschitz bu ispatı daha sade hale getirmiştir. Daha sonraki yıllarda Peano sadece süreklilik şartını kullanarak bahsi geçen problemin çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlamıştır.

Topolojik olarak Sabit nokta teoremi üzerine ilk çalışmalar 1912 yılında Brouwer tarafından yapılmıştır [1]. Metrik uzaylarda sabit nokta teoremi S. Banach tarafından 1922 yılında ifade ve ispat edilmiştir [2]. İntegral denklem tipindeki bir problemin çözümünün var olduğunu ispatlamak için kullandığı bu ifade Banach sabit nokta teoremi veya Banach büzülme prensibi olarak literatüre geçmiştir.

Banach'ın bu teoremi ifade ve ispat etmesiyle birlikte birçok matematikçi bahsi geçen prensibi çeşitli tiplerde genelleştirerek farklı farklı bulgulara ulaşmışlardır. Elde edilen bulgulardan faydalanarak başta adi ve kısmi diferansiyel denklemler, integral denklemler olmak üzere lineer denklem sistemleri, başlangıç ve sınır değer

problemleri gibi matematik ve mühendisliğin birçok alanında karşılaşılan özel problemlerin çözümlerinin varlığının ve tekliğinin hakkında bilgi elde edilebilmektedir.

Bu doktora tezinin amacı yukarıda bahsedilen genelleştirilmiş C -şartını sağlayan dönüşümlerini ve α -kabul edilebilir ile değiştirilmiş F -daralma dönüşümlerini modüler metrik uzaylarda tanımlayıp bu dönüşümler için metrik uzaylarda elde edilen sabit nokta teoremlerini ve sonuçlarını modüler metrik uzaylara genişletmektir. Burada elde edilen sonuçlar yardımıyla farklı türde verilen diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği ele alınan modüler metrik uzaylarda gösterilecektir.



2. ÖN BİLGİLER

Tezin bu kısmı genel olarak sonraki bölümlerde faydalanılacak olan bazı temel tanımları ve teoremleri içermektedir. Ayrıca, alışılmış metrik uzaylarda tanımlanmış bazı özel dönüşümler hakkında bilgiler sunmaktadır. Bunun yanında, bu özel dönüşümler ile ilgili literatürde var olan alışılmış metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri ve sonuçları verilecektir.

Tanım 2.1. X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlı reel değerli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. d fonksiyonu her $\forall x, y, z \in X$ için

$$i) d(x, y) \geq 0,$$

$$ii) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$iii) d(x, y) = d(y, x),$$

$$iv) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

şartlarını sağlarsa X uzayında bir metrik adını alır. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.2. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \gamma d(x, y) \quad (2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \geq 0$ reel sayısı var ise f dönüşümü X üzerinde Lipschitzian dönüşüm olarak adlandırılır. Burada (2.1) ifadesine Lipschitz şartı ve bu şartı gerçekleyen en küçük γ sayısına da Lipschitz sabiti adı verilir [3].

Tanım 2.3. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \gamma d(x, y) \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in [0, 1)$ sayısı var ise f dönüşümü daralma dönüşümü adını alır [4].

Metrik uzaylarda 1922 yılında Banach tarafından ortaya konulan büzülme prensibi ve bu prensibin genelleştirilmesi üzerine birçok çalışmalar yapılmıştır.

Teorem 2.4. (X, d) tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ daralma dönüşümü olsun. O zaman f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır [2].

Teorem 2.4 ifadesi literatürde Banach büzülme prensibi olarak geçmektedir.

Tanım 2.5. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) < d(x, y) \quad (2.3)$$

olursa f dönüşümü kesin daralma olarak adlandırılır [4].

Tanım 2.6. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq d(x, y) \quad (2.4)$$

sağlanırsa f dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm adı verilir [4].

(2.1) eşitsizliğinden her daralma dönüşümünün sürekli olduğu kolaylıkla görülür. Burada sürekli olmayan dönüşümler için sabit noktanın var olup olmadığı sorusu akla gelebilir. 1969 yılında Kannan ortaya koyduğu dönüşümle sürekli olmayan dönüşümler için de sabit nokta teoremini ispatlamıştır [5].

Tanım 2.7. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \gamma[d(x, fx) + d(y, fy)] \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı var ise f dönüşümünü Kannan dönüşümü adını alır [5].

Kannan'ın ortaya koyduğu bu tanımdan sonra süreklilik şartı olmaksızın farklı türlerde daralma dönüşümleri literatüre kazandırılmıştır.

1972 yılında Chatterjea (2.5)'teki ifadesinden yola çıkarak aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.8. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \gamma[d(x, fy) + d(y, fx)] \quad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ sayısı var ise f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır [6].

Tanım 2.9. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq ad(x, y) + bd(x, fx) + cd(y, fy) \quad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlayan $a + b + c < 1$ sabitleri var ise f , Ciric-Reich-Rus dönüşümü adını alır [7].

Tanım 2.10. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq ad(x, y) + bd(x, fx) + cd(y, fy) + dd(x, fy) + ed(y, fx) \quad (2.8)$$

eşitsizliğini sağlayan $a + b + c + d + e < 1$ sabitleri var ise f dönüşümü Hardy-Rogers dönüşümü adını alır [8].

2003 yılında Berinde dönüşümler için zayıf daralma şartının tanımlamıştır [19]. Ayrıca bu tür dönüşüm için sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Tanım 2.11. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \gamma d(x, y) + \vartheta d(y, fx) \quad (2.9)$$

eşitsizliğini sağlayan $\gamma \in [0, 1)$ ve $\vartheta \geq 0$ sabitleri var ise f dönüşümü zayıf daralma adını alır [9].

(2.9)'daki şart Babu ve ark. tarafından geliştirilerek aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.12. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \gamma d(x, y) + \vartheta \min \{d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)\} \quad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlayan $\gamma \in [0, 1)$ ve $\vartheta \geq 0$ sabitleri var ise f dönüşümü geliştirilmiş zayıf daralma adını alır [10].

2008 yılında Suzuki metrik uzaylarda aşağıdaki sabit nokta teoremini ifade edip ispatlamıştır [11].

Teorem 2.13. (X, d) kompakt bir metrik uzay ve f de bu uzayda tanımlı bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2} d(x, fx) \leq d(x, y) \Rightarrow d(fx, fy) \leq d(x, y) \quad (2.11)$$

ifadesi sağlansın. Bu durumda f 'nin sabit noktası vardır [12].

Popescu [12]'deki çalışmasında (2.11)'de verilen ifadeyi metrik uzaylarda tanımlanmış dönüşümler için C -şartı olarak ifade etmiştir.

Tanım 2.14. f , (X, d) metrik uzayında tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer bu dönüşüm $\forall x, y \in X$ için (2.1)'i sağlarsa f dönüşümü C -şartını sağlar [12].

Popescu (2.11)'deki ifadenin ikinci kısmını değiştirerek bu şartı sağlayan dönüşümler için tam metrik uzaylarda aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 2.15. (X, d) tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $a \geq 0$, $b, c > 0$ ve $a + 2b + 2c = 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}d(x, fx) \leq d(x, y) \Rightarrow \quad (2.12)$$

$$d(fx, fy) \leq ad(x, y) + b[d(x, fx) + d(y, fy)] + c[d(x, fy) + d(y, fx)]$$

ifadesi gerçekleşirse, bu durumda f 'nin bir tek sabit noktası vardır [12].

Tanım 2.16. Ψ , aşağıdaki şartları sağlayan $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarının kümesi olsun:

1) ψ azalmayandır, yani $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ için $t_1 \leq t_2$ ise $\psi(t_1) \leq \psi(t_2)$,

2) Her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi^n(t) < \infty$.

Yukarıdaki şartları sağlayan ψ fonksiyonuna c -kıyaslama fonksiyonu denir [13]. Burada her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ olur. ψ fonksiyonu 0 noktasında sürekli olduğundan $\psi(0) = 0$ olur.

Berinde, c -kıyaslama fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki sabit nokta teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.17. (X, d) tam metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. ψ , c -kıyaslama fonksiyonu ve $\gamma \geq 0$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \psi(d(x, y)) + \gamma d(x, fy) \quad (2.13)$$

eşitsizliğini sağlanırsa, f 'nin bir sabit noktası vardır [14].

2017 yılında Gupta ve ark. (2.11)'de tanımlanan C -şartını aşağıdaki gibi tanımlamıştır. Aynı çalışmada bu şart için sabit nokta teoremi ifade ve ispat edilmiştir [15].

Tanım 2.18. f , (X, d) metrik uzayında tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer f dönüşümü $\forall x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}d(x, fx) \leq d(x, y) \Rightarrow \psi(d(fx, fy)) \leq \beta(d(x, y)) \quad (2.14)$$

şartını sağlarsa, f dönüşümü C_β^ψ -şartını sağlar. Burada $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur [15].

Teorem 2.19. (X, d) tam metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ dönüşümü de C_β^ψ -şartını sağlasın. $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ sağlansın. Bu durumda f 'nin bir tek sabit noktası vardır [15].

2019 yılında Gupta ve ark. (2.14)'te verilen C_β^ψ -şartının bir genelleştirmesini tanımlamış ve bu şartı sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremi ispatlanmıştır [16].

Tanım 2.20. (X, d) metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}d(x, fx) \leq d(x, y) \Rightarrow \quad (2.15)$$

$$\psi(d(fx, fy)) \leq \beta(\max\{d(x, y),$$

$$\frac{1}{2}(d(x, fx) + d(y, fy)), \frac{1}{2}(d(x, fy) + d(y, fx))\})$$

ifadesi sağlanırsa, f dönüşümü genelleştirilmiş C_β^ψ -şartını sağlar. Burada, $\psi \in \Psi$ and $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur [16].

Teorem 2.21. $(X, d, \leq)$ kısmi sıralı tam metrik uzay olsun. $f: X \rightarrow X$ genelleştirilmiş C_β^ψ -şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\forall t > 0$, $\psi(t) > \beta(t)$ sağlansın. Her bir $x, y \in X$ için x, y ile karşılaştırılabilir bir $z \in X$ var olsun. Dahası, $x_0 \leq f x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var ise f, X üzerinde tek bir sabit noktaya sahiptir [16].

Wardowski, aşağıdaki gibi belli şartları sağlayan fonksiyon ailesini tanımlamıştır [17].

Tanım 2.22. $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıda verilen şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

$F_1)$ F kesin artandır, yani $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ için $x < y$ ise $F(x) < F(y)$ olur.

$F_2)$ Pozitif reel sayılarda tanımlı bir α_n dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\alpha_n) = -\infty$ olmasıdır.

$F_3)$ $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ sayısı vardır.

Yukarıda verilen şartları sağlayan fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}$ ile gösterilmektedir [17].

Örnek 2.23. $K, H, M, Y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $K(a) = \ln(a)$, $H(b) = \ln(b) + b$, $M(c) = -\frac{1}{\sqrt{c}}$, ve $Y(d) = \ln(d^2 + d)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar $(F_1) - (F_3)$ şartlarını sağlamaktadır, yani $K, H, M, Y \in \mathcal{F}$ 'tir.

Wardowski yukarıdaki fonksiyon ailesini kullanarak yeni bir daralma yapısı tanımlamıştır [17].

Tanım 2.24. (X, d) metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ de bu uzay üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $\tau > 0$ için

$$d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \quad (2.16)$$

ifadesi sağlanırsa, T dönüşümüne F -daralama denir.

[17]'deki çalışmada (2.16)'da verilen daralma şartı için sabit nokta teoremi ifade edilip ispatı verilmiştir.

Teorem 2.25. (X, d) tam metrik uzay olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü de F -daralama olsun. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir [17].

Metrik uzaylarda F -daralama dönüşümleri ve bu şartı sağlayan dönüşümlerin sabit nokta teoremleri ile ilgili çalışmalar için bkz. [18-25].

Samet ve ark. çalışmalarında α -kabul edilebilir dönüşümleri tanımlamıştır [25].

Tanım 2.26. $X \neq \emptyset$ olmak üzere $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx, Ty) \geq 1 \quad (2.17)$$

ifadesi sağlanırsa, $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne α -kabul edilebilir dönüşüm denir [26].

Aydi ve ark. çalışmalarında F -daralama dönüşümünü α -kabul edilebilir dönüşüm ile birleştirerek aşağıdaki şartı tanımlamıştır.

Tanım 2.27. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $F \in \mathcal{F}$ ve $\psi \in \Psi$ olmak üzere her $x, y \in X$ için öyle bir $\tau > 0$ vardır öyle ki

$$d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(\alpha(x, y)d(Tx, Ty)) \leq F(\psi(d(x, y))) \quad (2.18)$$

ifadesi sağlanır. Bu durumda $T: X \rightarrow X$ dönüşümüne α -kabul edilebilir dönüşüm ile geliştirilmiş F -daralama denir [27].

Eğer (2.16) ifadesinde $F(x) = \ln x \in \mathcal{F}$ alınırsa $Tx \neq Ty$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau}\psi(d(x, y)) \leq \psi(d(x, y)) \quad (2.19)$$

elde edilir. (2.19)'deki ifade Samet ve ark. tarafından α - ψ -daralma şartı olarak tanımlanmıştır [26].

Aydi ve ark. (2.18) ifadesindeki şartı sağlayan dönüşümler için tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremi ve önemli birkaç sonuç daha vermiştir.

Teorem 2.28. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü de α -kabul edilebilir dönüşüm ile geliştirilmiş F -daralama olsun. Aşağıdaki şartlar sağlansın:

- i) T dönüşümü α -kabul edilebilir,
- ii) Öyle bir $x_0 \in X$ vardır ki $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olur,
- iii) T süreklidir.

Bu durumda T 'nin sabit noktası vardır [27].

Yukarıdaki teoremden bahsi geçen dönüşümün sabit noktasının var olduğunu belirtilmektedir. Fakat sabit noktanın tekliği hakkında bilgi vermektedir. Aydi ve ark. aynı çalışmada Teorem 2.26'daki şartlara ilave olarak aşağıdaki

iv) T nin sabit noktalarının kümesi $Fix(T)$ olmak üzere, $\forall x, y \in Fix(T)$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olsun,

şartı ekleyerek sabit noktanın tekliğini garantilemişlerdir.

Teorem 2.29. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü de α -kabul edilebilir dönüşüm ile geliştirilmiş F -daralama olsun. Teorem 2.126'daki şartlara ek olarak (iv) şartı da sağlansın. Bu durumda T 'nin bir tek sabit noktası vardır [27].



3. MODÜLER METRİK UZAYLAR

1950 yılında Nakano modüler ifadesinin tanımlayıp daha sonra modüler uzay yapısını oluşturmuştur [28]. Daha sonra bu alandaki çalışmalar Musielak ve Orlicz tarafından genişletilmiştir [29, 30]. İlerleyen yıllarda modüler uzaylar üzerinde sabit nokta sonuçları Khamsi ve ark. tarafından verilmiştir [31].

Chistyakov modüler metrik ifadesini ilk kez tanımlamıştır [32, 33]. Bundan sonra da standart metrik uzayların genellemeleri olan modüler metrik uzayların yapısını oluşturmuştur. Bununla birlikte Chistyakov modüler metrik uzaylarda daralma dönüşümleri için sabit nokta teoremini ifade ve ispat etmiştir [34]. Daha sonra modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri birçok kişi tarafından ele alınmış ve farklı sonuçlar ortaya konulmuştur [35-48].

Bu bölümde öncelikle modüler ifadesinin tanımı verilecektir. Bu tanımdan yola çıkarak modüler uzay yapısı incelenecektir. Bunun yanında modüler metrik kavramının tanımı verilecektir. Daha sonra metrik uzayların genellenmesi olan modüler metrik uzayların yapısı anlatılacaktır. Son olarak da bu uzaylarla ilgili temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Nakano modüler kavramını aşağıdaki gibi tanılamıştır.

Tanım 3.1.1. X , reel vektör uzayı ve $\rho: X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyonel olsun. Herhangi $x, y \in X$ için

$$i) \rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$ii) a \text{ bir skaler olmak üzere } |a| = 1 \text{ ise } \rho(ax) = \rho(x),$$

$$iii) a, b > 0 \text{ ve } a + b = 1 \text{ olmak üzere } \rho(ax + by) \leq \rho(x) + \rho(y)$$

şartları sağlanırsa ρ 'ya bir modüler denir [28].

(iii) şartı yerine

$$iv) a, b > 0, r \in (0,1] \text{ ve } a^r + b^r = 1 \text{ için } \rho(ax + by) \leq a^r \rho(x) + b^r \rho(y)$$

şartı sağlanırsa ρ fonksiyoneli r –konvektir. Burada $r = 1$ ise ρ konveks modüler olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.2. X bir vektör uzay ve ρ da X üzerinde bir modüler olsun.

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \rho(\lambda x) = 0 \right\} \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanan kümeye modüler uzay denir.

Şimdi modüler metrik uzaylarla ilgili temel bilgiler verilecektir. Chistyakov standart metrik fonksiyonunu kümedeki herhangi iki nokta arasındaki sonlu uzaklık olarak ele almıştır. Buna karşın modüler fonksiyonunun ise negatif olmayan hatta sonsuz değerli olabilen hızları ifade ettiğini kabul etmiştir. Modüler metrik kavramını ise iki nokta arasında ortalama hız olarak tanımlamıştır. Chistyakov buradaki durumu şu şekilde açıklamıştır. $w_\lambda(x, y)$ ifadesi x noktasından y noktasına doğru hareket boyunca λ zamanındaki ortalama hızı göstermektedir. Bu durumu da x ile y arasındaki uzaklık $d(x, y)$ olmak üzere matematiksel olarak

$$w_\lambda(x, y) = \frac{d(x, y)}{\lambda} \quad (3.1.2)$$

şeklinde ifade etmiştir. Burada, $w_\lambda(x, y)$ ifadesi x ile y arasındaki uzaklığı λ zamanda geçmesi için gereken ortalama hızı göstermektedir.

(3.1.2)'de verilen ifadeyi incelenecektir. X boştan farklı bir küme ve $\lambda > 0$ için w fonksiyonu $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde tanımlansın. Burada w fonksiyonu her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X$ için $w_\lambda: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ olmak üzere $w(\lambda, x, y) = w_\lambda(x, y)$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1.3. $X \neq \emptyset$ ve $w: (0, \infty) \times X \times X \rightarrow [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

$$m_1) \forall \lambda > 0 \text{ için } w_\lambda(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (3.1.3)$$

$$m_2) \forall \lambda > 0 \text{ için } w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x),$$

$$m_3) \forall \lambda, \mu > 0 \text{ için } w_{\lambda+\mu}(x, z) \leq w_\lambda(x, y) + w_\mu(y, z)$$

şartları sağlanırsa w fonksiyonuna X üzerinde bir modüler metrik denir [32].

w fonksiyonu (m_1) şartı yerine sadece aşağıdaki şartı sağlarsa w 'ya sözde modüler metrik denir:

$$w_\lambda(x, x) = 0, \forall \lambda > 0. \quad (3.1.4)$$

Eğer w , (3.1.4)'teki ifadeyi sağlar ve keyfi seçilen $x, y \in X$ noktaları için x ve y 'ye bağlı bir $\lambda > 0$ sayısı vardır öyle ki $w_\lambda(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ sağlanırsa w 'ya X üzerinde kesin modüler metrik denir. Örnek olarak, $d(x, y)$ metrik olmak üzere $w_\lambda(x, y) = d(x, y)$ kesin modüler metriktir.

Tanım 3.1.4. w fonksiyonu X 'de bir modüler olsun. (3.1.3)'teki şartlardan (m_3) yerine her $\lambda, \mu > 0$ için

$$w_{\lambda+\mu}(x, z) \leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu} w_\lambda(x, y) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} w_\mu(y, z) \quad (3.1.5)$$

ifadesini sağlanırsa, w 'ya konveks modüler metrik denir. Örnek olarak, $d(x, y)$ metrik olmak üzere $w_\lambda(x, y) = \frac{d(x, y)}{\lambda}$ kesin konveks modüler metriktir.

Chistyakov [32]'deki çalışmasında $\forall x, y \in X$ ve $0 < \mu \leq \lambda$ olmak üzere w konveks modüler metriği

$$w_\lambda(x, y) \leq \frac{\mu}{\lambda} w_\mu(x, y) \leq w_\mu(x, y). \quad (3.1.6)$$

eşitsizliğini sağladığını göstermiştir. Herhangi bir w modüler metriğin (m_3) şartı kullanılarak $\forall x, y \in X$ ve $\lambda_1 < \lambda_2$ için

$$w_{\lambda_2}(x, y) \leq w_{\lambda_1}(x, y). \quad (3.1.7)$$

eşitsizliği sağladığı elde edilir. Chistyakov tarafından ele alınan modüler metrik uzayların tanımları ve özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1.5. w fonksiyonu X üzerinde bir (sözde) modüler olsun. Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$X_w = X_w(x_0) = \{x \in X: \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(x, x_0) = 0\}, \quad (3.1.8)$$

$$X_w^* = X_w^*(x_0) = \{x \in X: \exists \lambda = \lambda(x) > 0, w_\lambda(x, x_0) < \infty\}. \quad (3.1.9)$$

şeklinde verilen kümeler modüler metrik uzaylardır.

Yukarıdaki (3.1.8) ve (3.1.9) tanımlarından $X_w \subset X_w^*$ sağlandığı görülür.

$X \neq \emptyset$ ve w da X üzerinde modüler metrik ise X_w modüler metrik uzayı herhangi $x, y \in X_w$ için aşağıdaki w ile üretilmiş bir metrik ile donatılabilir:

$$d_w(x, y) = \inf\{\lambda > 0: w_\lambda(x, y) \leq \lambda\}. \quad (3.1.10)$$

Eğer w modüler metriği konveks ise bu durumda $X_w = X_w^*$ olur ve bu uzaylar aşağıdaki metrik ile donatılabilir:

$$d_w^*(x, y) = \inf\{\lambda > 0: w_\lambda(x, y) \leq 1\}. \quad (3.1.11)$$

Tanım 3.1.6. X_w ve X_w^* modüler metrik uzaylar olsun.

- X_w veya X_w^* üzerinde bir $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına w -yakınsaktır ancak ve ancak herhangi bir $\lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ dır. Burada x modüler limittir.
- Eğer herhangi bir $\lambda > 0$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_m) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi X_w uzayında w -Cauchy dizisidir.
- Eğer bu uzaydaki herhangi bir w -Cauchy dizisi w -yakınsak ise X_w veya X_w^* w -tamdır.

Teorem 3.1.7. w sözde modüler metrik ise X_w ve X_w^* modüler metrik uzayları w -yakınsaklığa göre kapalıdır, yani $\{x_n\}$ dizisi X_w (veya X_w^*) üzerinde bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ ise $x \in X_w$ (veya $x \in X_w^*$) olur. Bunun yanında, eğer w kesin modüler metrik ise modüler limit varsa tektir [34].

Teorem 3.1.8. Bazı $\lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ ise o zaman her $0 < \lambda < \mu$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\mu(x_n, x) = 0$ olur [34].

3.2. Modüler Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısım modüler metrik uzaylarda ifade edilmiş sabit nokta teoremlerini içermektedir. Ayrıca Banach daralma şartının modüler metrik uzaylardaki uyarlamaları ifade edilecektir.

Tanım 3.2.1. $X \neq \emptyset$ ve w da X üzerinde modüler metrik olmak üzere $T: X_w \rightarrow X_w$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X_w$ ve $\lambda_0 > \lambda > 0$ için

$$w_{k\lambda}(Tx, Ty) \leq w_\lambda(x, y) \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde $0 < k < 1$ sayısı ve k 'ya bağlı $\lambda_0 > 0$ varsa T dönüşümüne w -daralma denir [14].

Tanım 3.2.2. $X \neq \emptyset$ ve w da X üzerinde modüler metrik olmak üzere $T: X_w \rightarrow X_w$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X_w$ ve $\lambda_0 > \lambda > 0$ için

$$w_{k\lambda}(Tx, Ty) \leq kw_{\lambda}(x, y) \quad (3.2.2)$$

olacak şekilde $0 < k < 1$ sayısı ve k 'ya bağılı $\lambda_0 > 0$ varsa T dönüşümüne kuvvetli w -daralma denir [34].

Modüler metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ifadeleri verilecektir.

Teorem 3.2.3. $X \neq \emptyset$ ve w , X üzerinde modüler metrik ve X_w da w -tam modüler metrik uzay olmak üzere $T: X_w \rightarrow X_w$ dönüşümü w -daralma olsun. Her $\lambda > 0$ için $w_{\lambda}(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde $x \in X_w$ varsa T 'nin bir tek sabit noktası vardır. Bunun yanında $x \in X_w$ olmak üzere $\{T^n x\}$ iterasyon dizisi T 'nin sabit noktasına yakınsar [36].

Teorem 3.2.4. $X \neq \emptyset$ ve w , X üzerinde kesin konveks modüler metrik olsun. X_w , w -tam modüler metrik uzay olmak üzere $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü w -daralma olsun. Her bir $\lambda > 0$ için $w_{\lambda}(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde $x = x(\lambda) \in X_w^*$ varsa T 'nin sabit noktası vardır. Bunun yanında eğer her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X_w^*$ için $w_{\lambda}(x, y) < \infty$ sağlanırsa T 'nin sabit noktası tektir [34].

Teorem 3.2.5. $X \neq \emptyset$ ve w , X üzerinde kesin konveks modüler metrik olsun. X_w , w -tam modüler metrik uzay olmak üzere $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü güçlü w -daralma olsun. Her bir $\lambda > 0$ için $w_{\lambda}(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde $x = x(\lambda) \in X_w^*$ varsa T 'nin sabit noktası vardır. Bunun yanında eğer her $\lambda > 0$ ve $x, y \in X_w^*$ için $w_{\lambda}(x, y) < \infty$ sağlanırsa T 'nin sabit noktası tektir [34].

Teorem 3.2.6. w , X üzerinde modüler metrik ve X_w da w -tam modüler metrik uzay olmak üzere $T: X_w \rightarrow X_w$ dönüşümü olsun. N pozitif tam sayı olmak üzere T^N dönüşümü w -daralma ise T 'nin X_w üzerinde bir tek sabit noktası vardır [36].



4. MODÜLER METRİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ C-ŞARTLARINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMARI

Bu bölümde metrik uzaylarda tanımlanan C-şartının modüler metrik uzaylara uyarlaması yapıp bu uzaylarda genelleştirilmiş C-şartlarının tanımları verilecektir. Daha sonra bu tanımlardan yola çıkarak genelleştirilmiş C-şartını sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremlerinin ifadesi verilecek ve ispatı yapılacaktır. Daha sonraki bölümde ele alınacak olan problemler için modüler metrik uzaylar yapıları oluşturulacaktır. Son olarak teoremlerde elde edilen sonuçlardan yararlanarak birinci mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemler için anti-periyodik sınır değer probleminin ve başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği tanımlanan modüler metrik uzaylarda gösterilecektir.

4.1. Modüler Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş C-Şartları ve Sabit Nokta Teoremleri

İlk olarak modüler metrik uzaylarda tanımlı dönüşümler için C-şartının tanımı verilecektir.

Tanım 4.1.1. $X \neq \emptyset$ ve w , X üzerinde modüler metrik olsun. T dönüşümü de X_w^* modüler metrik uzayında tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, y) \Rightarrow \psi(w_\lambda(Tx, Ty)) \leq \beta(w_\lambda(x, y)) \quad (4.1.1)$$

şartını sağlarsa, T 'ye C-şartını sağlayan dönüşüm denir. Burada, $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur.

Şimdi de bu tanımdan faydalanılarak modüler metrik uzaylarda birinci ve ikinci tip genelleştirilmiş C-şartlarının tanımları verilecektir.

Tanım 4.1.2. $X \neq \emptyset$ ve w , X üzerinde modüler metrik ve X_w modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ şeklinde bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, y) \Rightarrow \quad (4.1.2)$$

$$\psi(w_\lambda(Tx, Ty)) \leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \right)$$

şartını sağlarsa T dönüşümü 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlar. Burada, $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur.

Tanım 4.1.3. $X \neq \emptyset$ ve w , X üzerinde modüler metrik ve X_w modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ şeklinde bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, y) \Rightarrow \quad (4.1.3)$$

$$\psi(w_\lambda(Tx, Ty)) \leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(x, Tx)}{1 + w_\lambda(Tx, Ty)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(y, Tx)}{1 + w_\lambda(y, Tx) + w_\lambda(x, Ty)} \right\} \right)$$

şartını sağlarsa T dönüşümü 2. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlar. Burada, $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur.

Yukarıda verilen şartlar için modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerini ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 4.1.4. w_λ modüler metriği X üzerinde kesin ve konveks olsun. X_w^* üzerinde w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\forall t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ olmak üzere 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlasın. Eğer her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x \in X_w^*$ varsa T dönüşümünün sabit noktası vardır. Buna ek olarak, eğer her $\lambda > 0$ ve $\forall x, y \in X_w^*$ için $w_\lambda(x, y) < \infty$ sağlanırsa T 'nin sabit noktası tektir.

İspat. $w_\lambda(x_0, Tx_0) < \infty$ olacak şekilde bir $x_0 \in X_w^*$ verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ olacak şekilde iterasyon $\{x_n\} \in X_w^*$ dizisi tanımlansın. Eğer herhangi bir $\lambda_0 > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ için $w_{\lambda_0}(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ olursa x_{n_0} elemanı T 'nin sabit noktası olurdu. O zaman her $\lambda > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) > 0$ olsun.

(4.1.2) de $x = x_n$ ve $y = x_{n+1}$ yazılsın. Bu durumda

$$\frac{1}{2} w_\lambda(x_n, Tx_n) = \frac{1}{2} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \quad (4.1.4)$$

sağlandığı görülür ve bu da

$$\begin{aligned}
& \psi(w_\lambda(Tx_n, Tx_{n+1})) = \psi(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) \quad (4.1.5) \\
& \leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \frac{w_\lambda(x_n, Tx_n)(1 + w_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{w_\lambda(x_{n+1}, Tx_n)(1 + w_\lambda(x_{n+1}, Tx_n))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})} \right\} \right) \\
& \leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \frac{w_\lambda(x_n, x_{n+1})(1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})}, \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1})(1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})} \right\} \right)
\end{aligned}$$

gerektirir. (4.1.5)'teki ifade düzenlenirse

$$\psi(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \frac{w_\lambda(x_n, x_{n+1})(1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})} \right\} \right) \quad (4.1.6)$$

elde edilir. Burada $w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) > w_\lambda(x_n, x_{n+1}) > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\frac{1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})} < \frac{w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})}{w_\lambda(x_n, x_{n+1})}$ olur. Bunun yardımıyla (4.1.6) tekrar düzenlenirse

$$\psi(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \beta(\max\{w_\lambda(x_n, x_{n+1}), w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})\}) \quad (4.1.7)$$

bulunur. $w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) > w_\lambda(x_n, x_{n+1})$ olduğundan (4.1.7) eşitsizliği

$$\psi(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \beta(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) \quad (4.1.8)$$

eşitsizliğine indirgenir. Bu ise $\psi(t) > \beta(t), \forall t > 0$ ifadesiyle çelişir. Dolayısıyla $w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq w_\lambda(x_n, x_{n+1})$ elde edilir. $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ alttan sınırlı ve artmayan olduğu için limiti vardır. Bu limit ℓ olsun, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = \ell \geq 0$ sağlanır. (4.1.6)'da her iki taraftan limit alınırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) = \psi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) \right) = \psi(\ell) \quad (4.1.9) \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \frac{w_\lambda(x_n, x_{n+1})(1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})} \right\} \right), \\
& \leq \beta \left(\max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_\lambda(x_n, x_{n+1})(1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})} \right\} \right),
\end{aligned}$$

$$\leq \beta\left(\ell, \frac{\ell(1+\ell)}{1+\ell}\right) = \beta(\ell)$$

olup $\psi(\ell) \leq \beta(\ell)$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Bu yüzden $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0$ olmalıdır.

$\{x_n\} \in X_w^*$ dizisinin w -Cauchy olduğu gösterilecektir. Tersine, $\{x_n\}$ dizisi w -Cauchy olmadığı kabul edilsin. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $n_k > m_k > k$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisinin iki alt dizisi $\{x_{n_k}\}$ ve $\{x_{m_k}\}$ bulunabilir öyle ki her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k-1}) < \varepsilon \quad (4.1.10)$$

sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq w_{4\lambda}(x_{m_k}, x_{n_k}) \\ &\leq w_{2\lambda}(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + w_\lambda(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) + w_\lambda(x_{n_k+1}, x_{n_k}) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

yazılabilir. (4.1.11)'de her iki taraftan limit alınır $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) \geq \varepsilon$ elde edilir. Diğer yandan

$$w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{m_k}, x_{n_k-1}) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \quad (4.1.12)$$

yazılabilir. (4.1.12)'de limit alınır $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \varepsilon$ bulunur. Benzer bir şekilde

$$w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k+1}) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{m_k}, x_{n_k-1}) + w_{\frac{\lambda}{4}}(x_{n_k-1}, x_{n_k}) + w_{\frac{\lambda}{4}}(x_{n_k}, x_{n_k+1}) \quad (4.1.13)$$

yazılıp limit alınır $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k+1}) \leq \varepsilon$ elde edilir.

(4.1.2)'de $x = x_{n_k}$ ve $y = x_{m_k}$ yazılsın.

$$\frac{1}{2}w_\lambda(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = \frac{1}{2}w_\lambda(x_{n_k}, x_{n_k+1}) \leq w_\lambda(x_{n_k}, x_{m_k}) \quad (4.1.14)$$

ifadesi sağlanır. Bu da

$$\psi(w_\lambda(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})) = \psi(w_\lambda(x_{n_k+1}, x_{m_k+1})) \quad (4.1.15)$$

$$\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x_{n_k}, x_{m_k}), \frac{w_\lambda(x_{n_k}, Tx_{n_k})(1 + w_\lambda(x_{m_k}, Tx_{m_k}))}{1 + w_\lambda(x_{n_k}, x_{m_k})}, \frac{w_\lambda(x_{m_k}, Tx_{n_k})(1 + w_\lambda(x_{m_k}, Tx_{n_k}))}{1 + w_\lambda(x_{n_k}, x_{m_k})} \right\} \right),$$

eşitsizliğini gerektirir. (4.1.15)'in her iki tarafında $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(\varepsilon) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(w_\lambda(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})) \leq \beta \left(\max \left\{ \varepsilon, 0, \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon} \right\} \right) \leq \beta(\varepsilon), \quad (4.1.16)$$

olup $\psi(\varepsilon) \leq \beta(\varepsilon)$ olur. Bu da bir çelişki olduğundan baştaki kabul yanlıştır, yani $\{x_n\} \in X_w^*$ dizisi w -Cauchy olur. X_w^* uzayı w -tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bu uzayda w -yakınsaktır, yani $x \in X_w^*$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ dır. w kesin modüler metrik olduğundan bu limit tektir.

Bu limit noktasının $Tx = x$ eşitliğini sağladığı, yani T 'nin sabit noktası olduğu gösterilecektir. Bu amaçla (4.1.2)'de x yerine $x = x_n$ ve y yerine $y = x$ yazılsın.

$$\frac{1}{2} w_\lambda(x_n, Tx_n) = \frac{1}{2} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq w_\lambda(x_n, x), \quad (4.1.17)$$

ifadesi sağlanır ve bu da

$$\begin{aligned} \psi(w_\lambda(Tx_n, Tx)) &= \psi(w_\lambda(x_{n+1}, Tx)) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x_n, x), \frac{w_\lambda(x_n, Tx_n)(1 + w_\lambda(x, Tx))}{1 + w_\lambda(x_n, x)}, \frac{w_\lambda(x, Tx_n)(1 + w_\lambda(x, Tx_n))}{1 + w_\lambda(x_n, x)} \right\} \right). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

olmasını gerektirir.

(4.1.18)'de limit alınırsa

$$\psi(w_\lambda(x, Tx)) \leq \beta(0) < \psi(0) \quad (4.1.19)$$

bulunur. Burada $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ olduğundan $w_\lambda(x, Tx) = 0$ sonucuna ulaşılır. w kesin modüler metrik olduğundan $Tx = x$ olur.

T 'nin sabit noktasının tek olduğu gösterilecektir. Bunun için T 'nin x ve y birbirinden farklı ($x \neq y$) iki tane sabit noktası olsun. $x, y \in X_w^*$ elemanları T 'nin sabit noktası olduğundan $Tx = x$ ve $Ty = y$ olur.

(4.1.2) ifadesinden

$$0 = \frac{1}{2}w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, y), \quad (4.1.20)$$

sağlandığı görülür. Bu da gerektirir ki;

$$\begin{aligned} \psi(w_\lambda(Tx, Ty)) &= \psi(w_\lambda(x, y)) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \right) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, x)(1 + w_\lambda(y, y))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, x)(1 + w_\lambda(y, x))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \right) \\ &\leq \beta(\max\{w_\lambda(x, y), 0, w_\lambda(y, x)\}) = \beta(w_\lambda(x, y)). \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Bu eşitsizlikten $\psi(w_\lambda(x, y)) \leq \beta(w_\lambda(x, y))$ elde edilir. Her $t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ ve her $x, y \in X_w^*$ için $w_\lambda(x, y) < \infty$ olduğundan dolayı $w_\lambda(x, y) = 0$ olduğu bulunur. Buradan da $x = y$ elde edilir, yani T 'nin sabit noktası tektir.

Şimdi de 2. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlayan dönüşümler için aşağıdaki sabit nokta teoremi ifade edilecektir.

Teorem 4.1.5. w_λ modüler metriği X üzerinde kesin konveks olsun. X_w^* 'da w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\psi(t) > \beta(t), \forall t > 0$ olmak üzere 2. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlasın. Eğer her $\lambda > 0$ için $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ olacak şekilde bir $x \in X_w^*$ varsa T dönüşümünün sabit noktası vardır. Buna ek olarak, eğer her $\lambda > 0$ ve $\forall x, y \in X_w^*$ için $w_\lambda(x, y) < \infty$ sağlanırsa T 'nin sabit noktası tektir.

İspat. $w_\lambda(x_0, Tx_0) < \infty$ olacak şekilde bir $x_0 \in X_w^*$ verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ olacak şekilde iterasyon $\{x_n\} \in X_w^*$ dizisi tanımlansın.

Eğer herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olursa x_{n_0} , T 'nin sabit noktası olurdu. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. Bu durumda w kesin olduğundan $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) > 0$ olur.

(4.1.3)'de $x = x_n$ ve $y = x_{n+1}$ yazılırsa

$$\frac{1}{2}w_\lambda(x_n, Tx_n) = \frac{1}{2}w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \quad (4.1.22)$$

sağlandığı görülür. Bu durumda

$$\begin{aligned} \psi(w_\lambda(Tx_n, Tx_{n+1})) &= \psi(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ \begin{aligned} &w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \frac{w_\lambda(x_n, Tx_n)(1 + w_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})}, \\ &\frac{w_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1})w_\lambda(x_n, Tx_n)}{1 + w_\lambda(Tx_n, Tx_{n+1})}, \frac{w_\lambda(x_{n+1}, Tx_{n+1})w_\lambda(x_{n+1}, Tx_n)}{1 + w_\lambda(x_{n+1}, Tx_n) + w_\lambda(x_n, Tx_{n+1})} \end{aligned} \right\} \right) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ \begin{aligned} &w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \frac{w_\lambda(x_n, x_{n+1})(1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})}, \\ &\frac{w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})w_\lambda(x_n, x_{n+1})}{1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})}, \frac{w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1})}{1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+1}) + w_\lambda(x_n, x_{n+2})} \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned}$$

olur. (4.1.23)'teki ifade düzenlenirse

$$\psi(w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2})) \leq \beta \left(\max \left\{ \begin{aligned} &w_\lambda(x_n, x_{n+1}), \\ &\frac{w_\lambda(x_n, x_{n+1})(1 + w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}))}{1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1})} \end{aligned} \right\} \right) \quad (4.1.24)$$

elde edilir. Burada Teorem 4.1.4'teki (4.1.6) ile (4.1.8) arasındaki bilgilerden yola çıkarak $w_\lambda(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq w_\lambda(x_n, x_{n+1})$ elde edilir. $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ alttan sınırlı ve artmayan bir dizi olduğu için limiti vardır. Bu limit ℓ ile gösterilmek üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = \ell \geq 0$ yazılabilir. (4.1.24)'te her iki taraftan limit alınırsa $\psi(\ell) \leq \beta(\ell)$ elde edilir. Her $t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bu yüzden $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0$ olur.

$\{x_n\} \in X_w^*$ dizisinin w -Cauchy olduğu gösterilecektir. Tersine, $\{x_n\}$ dizisi w -Cauchy olmadığı kabul edilsin. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $n_k > m_k > k$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisinin iki alt dizisi $\{x_{n_k}\}$ ve $\{x_{m_k}\}$ bulunabilir öyle ki her $\lambda > 0$ için

$$w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad w_\lambda(x_{m_k}, x_{n_k-1}) < \varepsilon \quad (4.1.25)$$

sağlanır. Buradan

$$\varepsilon \leq w_{4\lambda}(x_{m_k}, x_{n_k}) \quad (4.1.26)$$

$$\leq w_{2\lambda}(x_{m_k}, x_{m_{k+1}}) + w_{\lambda}(x_{m_{k+1}}, x_{n_{k+1}}) + w_{\lambda}(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})$$

yazılabilir. (4.1.26)'da her iki taraftan limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x_{m_{k+1}}, x_{n_{k+1}}) \geq \varepsilon$ elde edilir. Diğer yandan

$$w_{\lambda}(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{m_k}, x_{n_{k-1}}) + w_{\frac{\lambda}{2}}(x_{n_{k-1}}, x_{n_k}) \quad (4.1.27)$$

yazılabilir. (4.1.27)'de limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq \varepsilon$ bulunur.

(4.1.3)'te $x = x_{n_k}$ ve $y = x_{m_k}$ yazılsın.

$$\frac{1}{2}w_{\lambda}(x_{n_k}, Tx_{n_k}) = \frac{1}{2}w_{\lambda}(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq w_{\lambda}(x_{n_k}, x_{m_k}) \quad (4.1.28)$$

ifadesi sağlanır. Bu da

$$\begin{aligned} \psi(w_{\lambda}(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})) &= \psi(w_{\lambda}(x_{n_{k+1}}, x_{m_{k+1}})) \quad (4.1.29) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ \begin{aligned} &w_{\lambda}(x_{n_k}, x_{m_k}), \frac{w_{\lambda}(x_{n_k}, Tx_{n_k})(1 + w_{\lambda}(x_{m_k}, Tx_{m_k}))}{1 + w_{\lambda}(x_{n_k}, x_{m_k})}, \\ &\frac{w_{\lambda}(x_{m_k}, Tx_{m_k})w_{\lambda}(x_{n_k}, Tx_{n_k})}{1 + w_{\lambda}(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})}, \frac{w_{\lambda}(x_{m_k}, Tx_{m_k})w_{\lambda}(x_{m_k}, Tx_{n_k})}{1 + w_{\lambda}(x_{m_k}, x_{n_{k+1}}) + w_{\lambda}(x_{n_k}, Tx_{m_k})} \end{aligned} \right\} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğini gerektirir. (4.1.29)'un her iki tarafında $k \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$\psi(\varepsilon) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(w_{\lambda}(Tx_{n_k}, Tx_{m_k})) \leq \beta(\max\{\varepsilon, 0, 0, 0\}) \leq \beta(\varepsilon) \quad (4.1.30)$$

olup $\psi(\varepsilon) \leq \beta(\varepsilon)$ bulunur. Bu da bir çelişki olduğundan baştaki kabul yanlıştır, yani $\{x_n\} \in X_w^*$ dizisi w -Cauchy olur. X_w^* uzayı w -tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bu uzayda w -yakınsaktır. $x \in X_w^*$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x_n, x) = 0$ elde edilir. w modüler metriği kesin olduğundan bu limit tektir.

Bu limit noktası x 'in $Tx = x$ eşitliğini sağladığını, yani T 'nin sabit noktası olduğu gösterilecektir. Bu amaçla (4.1.3)'de x yerine $x = x_n$ ve y yerine $y = x$ yazılırsa

$$\frac{1}{2}w_{\lambda}(x_n, Tx_n) = \frac{1}{2}w_{\lambda}(x_n, x_{n+1}) \leq w_{\lambda}(x_n, x) \quad (4.1.31)$$

ifadesi sağlanır. Buradan

$$\psi(w_{\lambda}(Tx_n, Tx)) = \psi(w_{\lambda}(x_{n+1}, Tx)) \quad (4.1.32)$$

$$\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x_n, x), \frac{w_\lambda(x_n, Tx_n)(1 + w_\lambda(x, Tx))}{1 + w_\lambda(x_n, x)}, \frac{w_\lambda(x, Tx_n)w_\lambda(x_n, Tx)}{1 + w_\lambda(Tx_n, Tx)}, \frac{w_\lambda(x, Tx)w_\lambda(x, Tx_n)}{1 + w_\lambda(x, Tx_n) + w_\lambda(x_n, Tx)} \right\} \right)$$

yazılır. (4.1.32)'de limit alınırsa

$$\psi(w_\lambda(x, Tx)) \leq \beta(0) < \psi(0) \quad (4.1.33)$$

bulunur. Burada $w_\lambda(x, Tx) < \infty$ olduğundan $w_\lambda(x, Tx) = 0$ sonucuna ulaşılır. w modüler metriği kesin olduğundan $Tx = x$ elde edilir.

T 'nin sabit noktasının tek olduğu gösterilecektir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X_w^*$ elemanları T 'nin birbirinden farklı iki sabit noktası olduğu kabul edilsin. Bu durumda $Tx = x$ ve $Ty = y$ sağlanır.

(4.1.3)'den

$$0 = \frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, y) \quad (4.1.34)$$

sağlandığı görülür. Buradan

$$\psi(w_\lambda(Tx, Ty)) = \psi(w_\lambda(x, y)) \quad (4.1.35)$$

$$\begin{aligned} &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(x, Tx)}{1 + w_\lambda(Tx, Ty)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(y, Tx)}{1 + w_\lambda(y, Tx) + w_\lambda(x, Ty)} \right\} \right) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, x)(1 + w_\lambda(y, y))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, y)w_\lambda(x, x)}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, y)w_\lambda(y, x)}{1 + w_\lambda(y, x) + w_\lambda(x, y)} \right\} \right) \\ &\leq \beta(\max\{w_\lambda(x, y), 0, 0, 0\}) = \beta(w_\lambda(x, y)) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlikten $\psi(w_\lambda(x, y)) \leq \beta(w_\lambda(x, y))$ elde edilir. Her $t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ olduğundan $\psi(w_\lambda(x, y)) \leq \beta(w_\lambda(x, y)) < \psi(w_\lambda(x, y))$ olur. Her $x, y \in X_w^*$ için $w_\lambda(x, y) < \infty$ olduğundan dolayı $w_\lambda(x, y) = 0$ olduğu bulunur. Buradan da $x = y$ elde edilir, yani T 'nin sabit noktası tektir.

Metrik olmayan bir modüler metrik örneği verilerek bulunan sonuçları pekiştirmek

Örnek 4.1.6. $X = [-1,1]$ üzerinde tanımlı bir $Tx = -x$ dönüşümü verilsin. Burada modüler metrik uzayı olarak $X_w^* = \{x \in X : \exists \lambda = \lambda(x) > 0, w_\lambda(x, x_0) < \infty\}$ verilsin. Ayrıca, metrik olmayan $w_\lambda(x, y) = e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y|$ kesin ve konveks modüler metriği verilsin. Burada $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ bir dönüşüm olduğu görülmektedir.

Öncelikle T 'nin $\psi(t) > \beta(t), \forall t > 0$ olmak üzere 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağladığı gösterilecektir. Her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}w_\lambda(x, Tx) &= \frac{1}{2}w_\lambda(x, -x) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-\lambda}|x - (-x)| + |x| + |-x|) \\ &= e^{-\lambda}|x| + |x| \\ &\leq e^{-\lambda}|x - y + y| + |x| \\ &\leq e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y| = w_\lambda(x, y) \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

elde edilir. (4.1.2) şartının ikinci kısmındaki ifadeler ayrı ayrı hesaplanacaktır. $w_\lambda(Tx, Ty)$ ifadesi

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tx, Ty) &= w_\lambda(-x, -y) = e^{-\lambda}|-x + y| + |-x| + |-y| \\ &= e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y| \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

şeklinde yazılır. Burada $\lambda > 0$ için $e^{-\lambda} \leq 1$ ve $x, y \in [-1,1]$ olduğu kullanılırsa

$$w_\lambda(Tx, Ty) \leq |x - y| + |x| + |y| \leq 2(|x| + |y|) \leq 4 \quad (4.1.38)$$

elde edilir.

(4.1.2)'nin ikinci kısmındaki diğer ifade de

$$\begin{aligned} &\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \\ &= \max \left\{ e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y|, \frac{2(e^{-\lambda}|x| + |x|)(1 + 2(e^{-\lambda}|y| + |y|))}{1 + e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y|}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(e^{-\lambda}|x - y| + |y| + |x|)(1 + e^{-\lambda}|x - y| + |y| + |x|)}{1 + e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y|} \right\} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

Burada $\lambda > 0$ için $e^{-\lambda} \leq 1$ ve $1 + e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y| > 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \max \left\{ w_{\lambda}(x, y), \frac{w_{\lambda}(x, Tx)(1 + w_{\lambda}(y, Ty))}{1 + w_{\lambda}(x, y)}, \right. \\ & \quad \left. \frac{w_{\lambda}(y, Tx)(1 + w_{\lambda}(y, Tx))}{1 + w_{\lambda}(x, y)} \right\} \\ & \leq \max \left\{ 2(|x| + |y|), 4|x|(1 + 4|y|), \right. \\ & \quad \left. 2(|x| + |y|)(1 + 2(|x| + |y|)) \right\}, \end{aligned}$$

bulunup $x, y \in [-1, 1]$ için

$$\max \left\{ w_{\lambda}(x, y), \frac{w_{\lambda}(x, Tx)(1 + w_{\lambda}(y, Ty))}{1 + w_{\lambda}(x, y)}, \right. \\ \left. \frac{w_{\lambda}(y, Tx)(1 + w_{\lambda}(y, Tx))}{1 + w_{\lambda}(x, y)} \right\} \leq 20$$

elde edilir.

$\forall t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ olacak şekilde $\psi(t) = t$ ve $\beta(t) = \frac{t}{2}$ fonksiyonları verilsin.

Burada $\psi(t) \in \Psi$ ve $\beta(t)$ fonksiyonunun $[0, \infty)$ aralığında sürekli olduğu görülmektedir. Böylece $\psi(4) = 4 \leq \beta(20) = 10$ elde edilir. Dolayısıyla T 'nin 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağladığı görülmektedir.

Eğer $w_{\lambda}(x_0, Tx_0) < \infty$ olacak şekilde bir $x_0 \in X_w^*$ var olduğunu gösterilirse T 'nin en az bir sabit noktasının var olduğunu garanti edilir.

Her $0 \in [-1, 1]$ için

$$w_{\lambda}(x_0, Tx_0) = w_{\lambda}(0, 0) = e^{-\lambda}|0 + 0| + |0| + |0| = 0 < \infty \quad (4.1.39)$$

olup T 'nin en az bir sabit noktası vardır.

Sabit noktanın tekliği için de her $x, y \in X_w^*$ için $w_{\lambda}(x, y) < \infty$ olduğu gösterilmelidir.

Gerçekten, her $x, y \in X_w^*$ için

$$w_{\lambda}(x, y) = e^{-\lambda}|x - y| + |x| + |y| = 2(|x| + |y|) \leq 4 < \infty \quad (4.1.40)$$

elde edilir.

Böylece, Teorem 4.1.4'teki bütün şartlar sağlanmış olur. Dolayısıyla, T 'nin bir tek sabit noktası vardır, o da $x = 0$ dır.

4.2. Sınırlı Genelleştirilmiş φ -Varyasyonları için Modüler Metrik Uzayları

Bu kısımda bir sonraki bölümde ele alınacak anti-periyodik sınır değer ve başlangıç değer problemlerin çalışılacağı modüler metrik uzaylar tanımlanacaktır. Chistyakov tarafından ele alınan örneklerden yola çıkılarak bu uzayların yapısı oluşturulacaktır.

4.2.1. Anti-periyodik sınır değer problemi için modüler metrik uzay yapısı

Bir sonraki bölümde uygulama olarak ele alınacak ilk problem $\forall t \in [0, L]$ olmak üzere

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = -u(L), \end{cases} \quad (4.2.1.1)$$

şeklinde tanımlanan birinci mertebeden lineer olmayan anti-periyodik sınır değer problemi olacaktır. Bu kısımda bu problem için modüler metrik uzay yapısı oluşturulacaktır.

Öncelikle $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi(x) = 0$ olması için $x = 0$ gerek ve yeter şartını sağlayan sürekli, konveks, azalmayan ve sınırlı olmayan bir fonksiyon olsun.

$L > 0$ olmak üzere $[0, L]$ kapalı aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar kümesi $\tilde{X}$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\tilde{X} = \{u | u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad (4.2.1.2)$$

şeklinde gösterilebilir.

Her $\lambda > 0$ ve $u, v \in \tilde{X}$ için $w: (0, \infty) \times \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow [0, \infty]$ modüler metriği

$$w_\lambda(u, v) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^n \varphi \left(\frac{|[u(t_i) + v(t_{i-1})] - [u(t_{i-1}) + v(t_i)]|}{\lambda(t_i - t_{i-1})} \right) (t_i - t_{i-1}) \quad (4.2.1.3)$$

şeklinde tanımlansın. Burada supremum $[0, L]$ aralığının bütün parçaları $\sigma = \{t_i\}_{i=0}^n$ üzerinde alınmıştır. Diğer bir deyişle, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = L$ sağlanmaktadır. Burada $w_\lambda(u, v)$ modüler metriği $\tilde{X}$ üzerinde sözde konveks modülerdir [49].

$u_0(t) = u_0 \in \tilde{X}$ olmak üzere aşağıdaki modüler metrik uzayı

$$\tilde{X}_w^* = \tilde{X}_w^*(u_0) = \{u \in \tilde{X} : \exists \lambda = \lambda(u) > 0, w_\lambda(u, u_0) < \infty\} \quad (4.2.1.4)$$

verilsin. Bu uzay aynı zamanda $GV_\varphi([0, L])$ ile de gösterilmektedir ve sınırlı genelleştirilmiş φ -varyasyon dönüşümlerinin uzayı olarak da adlandırılmaktadır [38].

Bu durumda $u \in \tilde{X}_w^* = GV_\varphi([0, L])$ için gerek ve yeter şart $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$w_\lambda(u, u_0) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^n \varphi \left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\lambda(t_i - t_{i-1})} \right) (t_i - t_{i-1}) < \infty \quad (4.2.1.5)$$

sağlayacak şekilde öyle bir $\lambda = \lambda(u) > 0$ var olmasıdır. Burada $w_\lambda(u, u_0)$ 'ın u_0 'dan bağımsız olduğu görülmektedir.

$[0, L]$ kapalı aralığında tanımlı anti-periyodik reel değerli fonksiyonların kümesi

$$\tilde{X} := \{u \mid u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, u(0) = -u(L)\} \subset \tilde{X}. \quad (4.2.1.6)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (4.2.1.3)'te tanımlanan $w_\lambda(u, v)$ modüler metriği $\tilde{X}$ üzerinde konveks sözde modüler metriktir [32, 34].

Önerme 4.2.1.1. (4.2.1.3)'te tanımlanan $w_\lambda(u, v)$ modüler metriği $\tilde{X}$ üzerinde kesin konvektir.

İspat. Bunun ispatlamak için $w_\lambda(u, v) = 0$ olduğunda $\forall u, v \in \tilde{X}$ ve $t \in [0, L]$ için $u(t) = v(t)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi $t \neq s$ olmak üzere $s, t \in [0, L]$ için

$$\varphi \left(\frac{|[u(t)+v(s)]-[u(s)+v(t)]|}{\lambda(t-s)} \right) |t-s| \leq w_\lambda(u, v) \quad (4.2.1.7)$$

olduğu açıktır.

φ 'nin tersi var olduğundan (4.2.1.7)'den

$$|u(t) + v(s) - u(s) - v(t)| \leq \lambda |t-s| \varphi^{-1} \left(\frac{w_\lambda(u, v)}{|t-s|} \right) \quad (4.2.1.8)$$

yazılabilir. Burada (4.2.1.8) de $w_\lambda(u, v) = 0$ olduğu ve φ fonksiyonun özelliklerini kullanılırsa

$$|u(t) + v(s) - u(s) - v(t)| \leq \lambda |t-s| \varphi^{-1}(0) = 0 \quad (4.2.1.9)$$

elde edilir. Buradan da

$$u(t) - v(t) = u(s) - v(s) \quad (4.2.1.10)$$

bulunur. (4.2.1.10)'daki denklemde sırasıyla $s = 0$ ve $s = L$ yazılırsa

$$u(t) - v(t) = u(0) - v(0), \quad (4.2.1.11)$$

$$u(t) - v(t) = u(L) - v(L)$$

denklemleri elde edilir. Bu sistemde anti-periyodik koşullar olan $u(0) = -u(L)$ ve $v(0) = -v(L)$ yerlerine yazılırsa her $t \in [0, L]$ için $u(t) - v(t) = 0$ olup ispat tamamlanır.

Şimdi $\tilde{X}_w^* = GV_\varphi([0, L])$ olmak üzere

$$\dot{X}_w^* = \tilde{X}_w^* \cap \dot{X} = \{u \in \tilde{X}_w^* \mid u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, u(0) = -u(L)\} \quad (4.2.1.12)$$

kümesi tanımlansın.

Önerme 4.2.1.2. (4.2.1.12)'de tanımlanan

$$\dot{X}_w^* = \{u \in \dot{X} : \exists \lambda = \lambda(u) > 0, w_\lambda(u, u_0) < \infty\} \quad (4.2.1.13)$$

modüler metrik uzayı w -tamdır.

İspat. Bunu göstermek için X_w^* üzerinde alınan herhangi bir w -Cauhcy dizisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. O zaman $\{u_n\} \subset X_w^*$ bir w -Cauhcy dizisi olsun. Bu durumda bazı $\lambda = \lambda(u_n) > 0$ için $n, m \rightarrow \infty$ iken $w_\lambda(u_n, u_m) \rightarrow 0$ dır.

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ ve $t \in [0, L]$ için

$$\begin{aligned} 2|u_n(t) - u_m(t)| &= |2[u_n(t) - u_m(t)] - u_n(0) + u_m(0) - u_n(L) + u_m(L)| \\ &\leq |[u_n(t) + u_m(0)] - [u_n(0) + u_m(t)]| + |[u_n(t) + u_m(L)] - [u_n(L) + u_m(t)]| \\ &\leq \lambda|t - 0|\varphi^{-1}\left(\frac{w_\lambda(u_n, u_m)}{|t-0|}\right) + \lambda|L - t|\varphi^{-1}\left(\frac{w_\lambda(u_n, u_m)}{|L-t|}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınır $\lim_{n, m \rightarrow \infty} |u_n(t) - u_m(t)| = 0$ bulunur.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi tam olduğundan $\{u_n\}$ dizisi $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $u(0) = -u(L)$ olacak şekilde bir elemana yakınsar. Diğer bir deyişle, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(t) - u(t)| = 0$ olur.

Geriye $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n(t), u(t)) = 0$ olduğunu göstermek kalır. w_λ alt yarı sürekli olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $w_\lambda(u_n, u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m)$ yazılır.

$\{u_n\}$ w -Cauhcy olduğundan aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow w_\lambda(u_n, u_m) < \varepsilon. \quad (4.2.1.14)$$

Buradan $\forall n \geq N(\varepsilon)$ için $\limsup_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m) \leq \sup_{m \geq N(\varepsilon)} w_\lambda(u_n, u_m) < \varepsilon$ yazılabilir.

Sonuç olarak her bir $\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$w_\lambda(u_n, u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m) < \varepsilon \quad (4.2.1.15)$$

bulunur. Bu da $\{u_n\}$ dizisinin X_w^* üzerinde w -yakınsak olduğunu gösterir. X_w^* uzayı da modüler yakınsaklık altında kapalı olduğundan $u_n \xrightarrow{w} u$ olacak şekilde bir $u \in X_w^*$ vardır. Sonuç olarak X_w^* uzayın w -tam olduğu elde edilir.

φ fonksiyonu, ek olarak $y \rightarrow \infty$ iken $\frac{\varphi(y)}{y} \rightarrow \infty$ şeklinde tanımlanan sonsuzlukta Orlicz şartını da sağlarsa $w_1(u, 0)$ şeklindeki modüler metriğe $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun φ -varyasyonu denir. Bunun yanında $w_1(u, 0) < \infty$ ise u fonksiyonunun $[0, L]$ aralığında sınırlı φ -varyasyonu vardır, denir ve

$$w_\lambda(u, v) = w_\lambda(u - v, 0) = w_1\left(\frac{u-v}{\lambda}, 0\right) \quad (4.2.1.16)$$

şeklinde gösterilir.

$\tilde{X}_w^* = GV_\varphi([0, L])$ uzayındaki $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki fonksiyonlar için

$$u \in GV_\varphi([0, L]) \quad (4.2.1.17)$$

$$\Leftrightarrow \text{bazı } \lambda = \lambda(u) > 0 \text{ için } w_\lambda(u, 0) = w_1\left(\frac{u}{\lambda}, 0\right) < \infty$$

$$\Leftrightarrow u \in AC[0, L], u' \in L^1[0, L] \text{ ve } w_\lambda(u, 0) = \int_0^L \varphi\left(\frac{|u'(t)|}{\lambda}\right) dt < \infty$$

ifadeleri geçerlidir [34]. Burada $AC[0, L]$ ile $[0, L]$ aralığında tanımlı tüm reel değerli mutlak sürekli fonksiyonların uzayı temsil edilirken $L^1[0, L]$ ifadesi ile de $[0, L]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların uzayı gösterilmektedir.

4.2.2. Başlangıç değer problemi için modüler metrik uzay yapısı

Uygulama bölümünde incelenecek ikinci problem $\forall t \in [0, L]$ olmak üzere

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (4.2.2.1)$$

şeklinde tanımlanan birinci mertebeden lineer olmayan homojen başlangıç değer problemidir. Burada (4.2.1.1)'de verilen problem için modüler metrik uzay yapısı oluşturulacaktır.

Kısım (4.2.1) sayfa (28-29)'daki (4.2.1.1)-(4.2.1.5) arasındaki ifadeler aynı olarak alınacaktır.

$[0, L]$ kapalı aralığında tanımlı başlangıç değeri sıfır olan reel değerli fonksiyonların kümesi

$$\check{X} := \{u \mid u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, u(0) = 0\} \subset \tilde{X} \quad (4.2.2.2)$$

şeklinde tanımlansın.

Önerme 4.2.2.1. (4.2.1.3)'de tanımlanan $w_\lambda(u, v)$ modüler metriği $\check{X}$ üzerinde kesin konvektir.

İspat. Bunun ispatlamak için $w_\lambda(u, v) = 0 \Rightarrow u(t) = v(t), \forall u, v \in X$ ve $t \in [0, L]$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi $t \neq s$ olmak üzere $s, t \in [0, L]$ için

$$\varphi\left(\frac{|[u(t)+v(s)]-[u(s)+v(t)]|}{\lambda(t-s)}\right) |t-s| \leq w_\lambda(u, v) \quad (4.2.2.3)$$

olduğu açıktır.

φ 'nin tersi var olduğundan (4.2.2.3) den

$$|u(t) + v(s) - u(s) - v(t)| \leq \lambda |t-s| \varphi^{-1}\left(\frac{w_\lambda(u, v)}{|t-s|}\right) \quad (4.2.2.4)$$

yazılabilir. Burada (4.2.2.4)'te $w_\lambda(u, v) = 0$ yazılsın. φ fonksiyonun özellikleri kullanılarak

$$|u(t) + v(s) - u(s) - v(t)| \leq \lambda |t-s| \varphi^{-1}(0) = 0 \quad (4.2.2.5)$$

elde edilir. Buradan da

$$u(t) - v(t) = u(s) - v(s) \quad (4.2.2.6)$$

bulunur. (4.2.2.6)'daki denklemde $s = 0$ yazılırsa

$$u(t) - v(t) = u(0) - v(0) \quad (4.2.2.7)$$

eşitliği elde edilir. Burada başlangıç koşulları olan $u(0) = 0$ ve $v(0) = 0$ yerlerine yazılırsa her $t \in [0, L]$ için $u(t) = v(t)$ elde edilip ispat biter.

$\tilde{X}_w^* = GV_\varphi([0, L])$ olmak üzere

$$\check{X}_w^* = \tilde{X}_w^* \cap \check{X} = \{u \in \tilde{X}_w^* \mid u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, u(0) = 0\} \quad (4.2.2.8)$$

kümesi tanımlansın.

Önerme 4.2.2.2. (4.2.2.8)'de tanımlanan

$$\ddot{X}_w^* = \{u \in \ddot{X} : \exists \lambda = \lambda(u) > 0, w_\lambda(u, u_0) < \infty\} \quad (4.2.2.9)$$

modüler metrik uzayı w -tamdır.

İspat. Bunu göstermek için $\ddot{X}_w^*$ üzerinde alınan herhangi bir w -Cauhcy dizisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. O zaman $\{u_n\} \subset \ddot{X}_w^*$ bir w -Cauhcy dizisi olsun. Bu durumda bazı $\lambda = \lambda(u_n) > 0$ için $n, m \rightarrow \infty$ iken $w_\lambda(u_n, u_m) \rightarrow 0$ olur.

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ ve $t \in [0, L]$ için

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_m(t)| &= |u_n(t) - u_n(0) - u_m(t) + u_m(0)| \\ &\leq |[u_n(t) + u_m(0)] - [u_n(0) + u_m(t)]| \\ &\leq \lambda |t - 0| \varphi^{-1} \left(\frac{w_\lambda(u_n, u_m)}{|t - 0|} \right) \end{aligned} \quad (4.2.2.10)$$

yazılabilir. Burada $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n, m \rightarrow \infty} |u_n(t) - u_m(t)| = 0$ bulunur.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi tam olduğundan $\{u_n\}$ dizisi $u: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, $u(0) = 0$ olacak şekilde bir elemana yakınsar. Diğer bir deyişle, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(t) - u(t)| = 0$ sağlanır.

Geriye $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n(t), u(t)) = 0$ olduğunu göstermek kalır. w_λ alt yarı sürekli olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $w_\lambda(u_n, u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m)$ yazılabilir.

Şimdi $\{u_n\}$ w -Cauhcy olduğundan aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \forall n, m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow w_\lambda(u_n, u_m) < \varepsilon. \quad (4.2.2.11)$$

Buradan $\forall n \geq N(\varepsilon)$ için $\limsup_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m) \leq \sup_{m \geq N(\varepsilon)} w_\lambda(u_n, u_m) < \varepsilon$ yazılabilir.

Sonuç olarak her bir $\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$w_\lambda(u_n, u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} w_\lambda(u_n, u_m) < \varepsilon \quad (4.2.2.12)$$

bulunur. Bu da $\{u_n\}$ dizisinin $\ddot{X}_w^*$ de w -yakınsak olduğunu gösterir.

$\ddot{X}_w^*$ uzayı da modüler yakınsaklık altında kapalı olduğundan $u_n \xrightarrow{w} u$ olacak şekilde bir $u \in \ddot{X}_w^*$ vardır. Sonuç olarak $\ddot{X}_w^*$ uzayın w -tam olduğu sonucuna ulaşılır.

Bir önceki kısımdaki sayfa (31)'deki (4.2.1.16) ile (4.2.1.17) arasındaki ifadeler bu uzayda da geçerlidir.

4.3. Genelleştirilmiş C-Şartları İçin Sabit Nokta Teoremlerinin Uygulamaları

Bu bölümde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için anti-periyodik sınır değer problemi ve başlangıç değer problemi ele alınacaktır. Yukarıdaki bölümlerde tanımlanan modüler metrik uzaylarda bu problemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenecektir.

Bu amaçla yukarıda ispatlanan sabit nokta teoremlerinde bulunan sonuçlardan faydalanılacaktır.

4.3.1. Anti-periyodik sınır değer problemi için sabit nokta teoremi

Bu kısımda aşağıdaki birinci mertebeden lineer olmayan anti-periyodik değer problemi $\forall t \in [0, L]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) \\ u(0) &= -u(L) \end{aligned} \quad (4.3.1.1)$$

ele alınacaktır. Öncelikle (4.3.1.1)'de verilen ifade $\forall t \in [0, L]$ olmak üzere

$$\begin{cases} u'(t) + u(t) = f(t, u(t)) + u(t), \\ u(0) = -u(L) \end{cases} \quad (4.3.1.2)$$

şeklinde yazılsın. (4.3.1.2)'deki problem

$$u(t) = \int_0^L G(t, s)[f(s, u(s)) + u(s)]ds. \quad (4.3.1.3)$$

integral denklemine denktir. Burada $G(t, s)$ fonksiyonu Green fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{L+s-t}}{e^{L+1}}, & 0 \leq s \leq t \leq L \\ \frac{-e^{s-t}}{e^{L+1}}, & 0 \leq t \leq s \leq L \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $u \in GV_\varphi([0, L])$ olmak üzere eğer u fonksiyonu (4.3.1.1)'i veya denk olarak (4.3.1.3)'ü sağlarsa u fonksiyonuna (4.3.1.1)'de verilen problemin çözümüdür denir.

(4.3.1.1)'de verilen problemi (4.2.1.3)'te tanımlanmış modüler metrikle donatılmış ve (4.2.1.12)'de oluşturulan w -tam modüler metrik uzay X_w^* üzerinde çalışılacaktır.

(4.3.1.1)'de verilen problemin çözümünün varlığı ve tekliği yine bu X_w^* uzay üzerinde incelenecektir.

$u \in X_w^*$ ve $t \in [0, L]$ olmak üzere

$$Tu(t) = \int_0^L G(t, s)[f(s, u(s)) + u(s)]ds \quad (4.3.1.4)$$

dönüşümü tanımlansın. Burada $G(t, s)$ fonksiyonu (4.3.1.4)'te verilen ilgili Green fonksiyonudur.

Eğer $u \in X_w^*$ fonksiyonu (4.3.1.5)'te tanımlana T dönüşümünün bir sabit noktası ise (4.3.1.3)'teki integral denklemin çözümü olur, aynı zamanda (4.3.1.1)'teki problemin de çözümü olmuş olur.

Burada T dönüşümünün sabit noktasının var ve tek olduğunu göstermek amaçlanmaktadır. Öncelikle teoremden kullanılacak hipotezler verilecektir.

H1) $\forall u \in \mathbb{R}$ için $f(., u)$ Lebesgue ölçülebilirdir ve öyle bir $u^* \in \mathbb{R}$ var ki bazı $\lambda = \lambda(f(., u^*)) > 0$ için $\int_0^L \varphi\left(\frac{|f(t, u^*)|}{\lambda}\right) dt < \infty$ olur.

H2) $\forall u, v \in \mathbb{R}$ ve $t \in [0, L]$ için öyle bir $M > 0$ sabiti var ki $|f(t, u) - f(t, v)| \leq M|u - v|$ eşitsizliği sağlanır.

Önerme 4.3.1.1. Eğer $f(t, u)$ fonksiyonu (H1) ve (H2)'de verilen şartları sağlarsa bu durumda T dönüşümü $\dot{X}_w^*$ üzerinde tanımlı bir dönüşümdür, yani $T: \dot{X}_w^* \rightarrow \dot{X}_w^*$ şeklindedir. Ayrıca, T dönüşümü için $(Tu)' = f(t, u) + u - Tu$ eşitliği sağlanır [34].

Teorem 4.3.1.2. $u, v \in \dot{X}_w^*$ fonksiyonları her $t \in [0, L]$ için $u(t) \leq v(t)$ ve $f(t, u(t)) \leq v'(t)$ eşitsizlikleri sağlasın. Bunun yanında $f(t, u)$ fonksiyonu (H1) ve (H2)'deki şartları sağlarsa bu durumda (4.3.1.1)'te tanımlanan problemin $\dot{X}_w^*$ üzerinde bir tek çözümü vardır.

İspat. Öncelikle $u(t) \leq v(t)$ ve $f(t, u(t)) \leq v'(t)$ olduğundan $u(t) + f(t, u(t)) \leq v(t) + v'(t)$ yazılabilir. Burada her iki taraftan $[0, L]$ aralığında integral alınırsa

$$Tu(t) = \int_0^L G(t, s)[f(s, u(s)) + u(s)]ds \leq v(t) \quad (4.3.1.5)$$

elde edilir.

(4.1.2.) şartının ilk kısmının sağlandığı, yani $\frac{1}{2}w_\lambda(u, Tu) \leq w_\lambda(u, v)$ olduğu gösterilecektir. Modüler metriğin özelliğinden

$$w_\lambda(u, Tu) = w_\lambda(u - Tu, 0) = \int_0^L \varphi\left(\frac{|(u(t) - Tu(t))'|}{\lambda}\right) dt < \infty \quad (4.3.1.6)$$

yazılır. $(Tu)' = f(t, u) + u - Tu$ ve $u' = f(t, u)$ olduğundan

$$\left|(u(t) - Tu(t))'\right| = |u'(t) - Tu'(t)| = |u - Tu| \quad (4.3.1.7)$$

elde edilir. Buradan (4.3.1.7)'deki eşitlik (4.3.1.6)'da yerine konulursa (4.3.1.6) ifadesi

$$w_\lambda(u, Tu) = \int_0^L \varphi\left(\frac{|u - Tu|}{\lambda}\right) dt \quad (4.3.1.8)$$

eşitliğine indirgenir. (4.3.1.5)'te $Tu(t) \leq v(t)$ bulunduğundan $|u - Tu| \leq |u - v|$ olur.

Buradan yola çıkılarak

$$\begin{aligned} |u - Tu| &\leq |u - v| \quad (4.3.1.9) \\ &\leq \left| \int_0^L G(t, s) \left[[f(s, u(s)) + u(s)] - [f(s, v(s)) + v(s)] \right] ds \right| \\ &\leq \int_0^L |G(t, s)| \left| [f(s, u(s)) + u(s)] - [f(s, v(s)) + v(s)] \right| ds \\ &\leq \left| [f(s, u(s)) + u(s)] - [f(s, v(s)) + v(s)] \right| \int_0^L |G(t, s)| ds \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\int_0^L |G(t, s)| ds = \frac{e^L - 1}{e^L + 1} \leq 1$ olduğu ve (H2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} |u - Tu| &\leq \left| [f(s, u(s)) + u(s)] - [f(s, v(s)) + v(s)] \right| \quad (4.3.1.10) \\ &\leq |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| + |u(s) - v(s)| \\ &\leq M|u(s) - v(s)| + |u(s) - v(s)| \\ &= (M + 1)|u(s) - v(s)| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada her $s \in [0, L]$ için $|u(s) - v(s)| \leq \int_0^L |(u(s) - v(s))'| ds$ olduğu

kullanılırsa

$$|u - Tu| \leq (M + 1)|u(s) - v(s)| \quad (4.3.1.11)$$

$$\leq (M + 1) \int_0^L |(u(s) - v(s))'| ds$$

elde edilir. $|(u(t) - Tu(t))'| = |u - Tu|$ olduğundan (4.3.1.11)'den

$$|(u(t) - Tu(t))'| \leq (M + 1) \int_0^L |(u(s) - v(s))'| ds \quad (4.3.1.12)$$

olur. φ fonksiyonu monoton azalmayan olduğundan

$$\varphi\left(\frac{|(u(t) - Tu(t))'|}{\lambda}\right) \leq \varphi\left((M + 1) \int_0^L \frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda} ds\right) \quad (4.3.1.13)$$

yazılır. Burada $k \leq 1$ olacak şekilde $L(M + 1) = \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}$ olduğu kabul edilsin.

φ konveks ve $L(M + 1) < 1$ olduğundan

$$\varphi\left(\frac{L(M+1)}{L} \int_0^L \frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda} ds\right) \leq L(M + 1) \varphi\left(\frac{1}{L} \int_0^L \frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda} ds\right) \quad (4.3.1.14)$$

bulunur. Şimdi Jensen eşitsizliğini kullanılırsa (4.3.1.14)'ten

$$L(M + 1) \varphi\left(\frac{1}{L} \int_0^L \frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda} ds\right) \leq (M + 1) \int_0^L \varphi\left(\frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda}\right) ds \quad (4.3.1.15)$$

olup (4.3.1.13)'ten

$$\varphi\left(\frac{|(u(t) - Tu(t))'|}{\lambda}\right) \leq (M + 1) \int_0^L \varphi\left(\frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda}\right) ds \quad (4.3.1.16)$$

elde edilir. (4.3.1.16)'da her iki tarafının $[0, L]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^L \varphi\left(\frac{|(u(t) - Tu(t))'|}{\lambda}\right) ds \leq (M + 1) \int_0^L \int_0^L \varphi\left(\frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda}\right) ds dt \quad (4.3.1.17)$$

olup

$$\begin{aligned} w_\lambda(u, Tu) &\leq L(M + 1) w_\lambda(u - v, 0) \\ &= L(M + 1) w_\lambda(u, v) \leq w_\lambda(u, v) \end{aligned} \quad (4.3.1.18)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{2} w_\lambda(u, Tu) \leq w_\lambda(u, v) \quad (4.3.1.19)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.3.1.19)'un 1. tip genelleştirilmiş C -şartının ikinci kısmını gerektirdiği gösterilecektir.

$$w_\lambda(Tu, Tv) = w_\lambda(Tu - Tv, 0) = \int_0^L \varphi\left(\frac{|(Tu(t) - Tv(t))'|}{\lambda}\right) dt \quad (4.3.1.20)$$

yazılır ve $(Tu)'$ tanımı kullanılırsa

$$w_\lambda(Tu, Tv) = \int_0^L \varphi \left(\frac{|f(t, u(t)) + u(t) - Tu(t) - f(t, v(t)) - v(t) + Tv(t)|}{\lambda} \right) dt \quad (4.3.1.21)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} |Tu - Tv| &= \left| \int_0^L G(t, s) \left[[f(s, u(s)) + u(s)] - [f(s, v(s)) + v(s)] \right] ds \right| \quad (4.3.1.22) \\ &\leq \int_0^L |G(t, s)| |f(s, u(s)) + u(s) - [f(s, v(s)) + v(s)]| ds \\ &\leq |f(s, u(s)) + u(s) - [f(s, v(s)) + v(s)]| \int_0^L |G(t, s)| ds \end{aligned}$$

olur. $\int_0^L |G(t, s)| ds \leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} |Tu - Tv| &\leq |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| + |u(s) - v(s)| \quad (4.3.1.23) \\ &\leq M|u(s) - v(s)| + |u(s) - v(s)| \\ &= (M + 1)|u(s) - v(s)| \end{aligned}$$

bulunur. $|f(t, u(t)) + u(t) - Tu(t) - f(t, v(t)) - v(t) + Tv(t)|$ ifadesi için

$$\begin{aligned} &|f(t, u(t)) + u(t) - Tu(t) - f(t, v(t)) - v(t) + Tv(t)| \quad (4.3.1.24) \\ &\leq |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| + |u(s) - v(s)| + |Tu(s) - Tv(s)| \\ &\leq M|u(s) - v(s)| + |u(s) - v(s)| + (M + 1)|u(s) - v(s)| \\ &\leq 2(M + 1)|u(s) - v(s)| \leq 2(M + 1) \int_0^L |(u(s) - v(s))'| ds \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu sonuçlardan ve φ 'nin monoton azalmayan, konveks bir fonksiyon olduğundan yararlanılarak

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tu, Tv) &= \int_0^L \varphi \left(\frac{|f(t, u(t)) + u(t) - Tu(t) - f(t, v(t)) - v(t) + Tv(t)|}{\lambda} \right) dt \quad (4.3.1.25) \\ &\leq \int_0^L \varphi \left(2(M + 1) \int_0^L \frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda} ds \right) dt \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Burada da Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tu, Tv) &\leq 2(M + 1) \int_0^L \int_0^L \varphi \left(\frac{|(u(s) - v(s))'|}{\lambda} \right) ds dt \quad (4.3.1.26) \\ &\leq 2(M + 1) \int_0^L w_\lambda(u, v) dt = 2L(M + 1)w_\lambda(u, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki $L(M + 1) = \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}$ kabulünden $k = 2L(M + 1) \leq 1$ olur ve

(4.3.1.26)'dan

$$w_\lambda(Tu, Tv) \leq kw_\lambda(u, v) \quad (4.3.1.27)$$

yazılabilir. Burada $k \leq 1$ olmak üzere $\psi(t) > \beta(t), \forall t > 0$ şartını sağlayacak şekilde $\psi(t) = t$ ve $\beta(t) = kt$ seçilebilir. Dolayısıyla T dönüşümü 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlamaktadır. (4.3.1.7)'den de görüldüğü üzere $w_\lambda(u, Tu) < \infty$ olacak şekilde bir $u \in X_w^* = GV_\varphi([0, L])$ vardır. Dolayısıyla T 'nin en az bir sabit noktası vardır.

T 'nin sabit noktasının tek olduğu gösterilecektir. Bunun için de $\forall u, v \in X_w^*$ ve $\lambda > 0$ için $w_\lambda(u, v) < \infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall u, v \in X_w^*$ için

$$w_\lambda(u, v) = w_\lambda(u - v, 0) \quad (4.3.1.28)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^L \varphi \left(\frac{|(u(t) - v(t))'|}{\lambda} \right) dt \\ &= \int_0^L \varphi \left(\frac{|f(t, u) - f(t, v)|}{\lambda} \right) dt \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buradan $u^* \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t, u) - f(t, v)| = |f(t, u) - f(t, u^*) - f(t, v) + f(t, u^*)| \quad (4.3.1.29)$$

$$\leq |f(t, u) - f(t, u^*)| + |f(t, v) - f(t, u^*)|$$

elde edilir. $u(0) = -u(L)$ olduğundan $u(t) = \int_0^t u'(s)ds - u(L)$ yazılabilir.

Buradan

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq M|u - u^*| + M|v - u^*| \quad (4.3.1.30)$$

$$\leq M \int_0^t |u'(s)|ds + M \int_0^t |v'(s)|ds + 2M|u^* + u(L)|,$$

bulunur.

Her $u, v \in X_w^*$ olduğundan öyle $\lambda_1 = \lambda_1(u) > 0$ ve $\lambda_2 = \lambda_2(v) > 0$ sayılar vardır ki

$$w_{\lambda_1}(u, 0) = \int_0^L \varphi \left(\frac{|u'(t)|}{\lambda_1} \right) dt < \infty, \quad (4.3.1.31)$$

$$w_{\lambda_2}(v, 0) = \int_0^L \varphi \left(\frac{|v'(t)|}{\lambda_2} \right) dt < \infty$$

olur. Burada $\lambda_0 = ML\lambda_1 + ML\lambda_2 + 1$ verilsin öyle ki $\frac{ML\lambda_1}{\lambda_0} + \frac{ML\lambda_2}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0} = 1$ olur.

Buradan

$$\begin{aligned} & \varphi \left(\frac{1}{\lambda_0} \left[M \int_0^t |u'(s)| ds + M \int_0^t |v'(s)| ds + 2M|u^* + u(L)| \right] \right) \quad (4.3.1.32) \\ &= \varphi \left(\frac{ML\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{1}{L} \int_0^t \frac{|u'(s)|}{\lambda_1} ds \right) + \frac{ML\lambda_2}{\lambda_0} \left(\frac{1}{L} \int_0^t \frac{|v'(s)|}{\lambda_2} ds \right) + \frac{1}{\lambda_0} 2M|u^* + u(L)| \right) \end{aligned}$$

yazılır. φ konveks olduğundan ve Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} w_{\lambda}(u, v) &= \int_0^L \varphi \left(\frac{|f(t,u)-f(t,v)|}{\lambda_0} \right) dt \quad (4.3.1.33) \\ &\leq \frac{ML\lambda_1}{\lambda_0} \int_0^L \varphi \left(\frac{|u'(t)|}{\lambda_1} \right) dt + \frac{ML\lambda_2}{\lambda_0} \int_0^L \varphi \left(\frac{|v'(t)|}{\lambda_2} \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_0} \varphi(2M|u^* + u(L)|) := A < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 4.1.3'teki bütün şartlar sağlanmış olur, yani T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

4.3.2. Başlangıç değer problemi için sabit nokta teoremi

Bu kısımda $\forall t \in [0,1]$ olmak üzere birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için

$$u'(t) = g(t, u(t)) \quad (4.3.2.1)$$

$$u(0) = 0$$

şeklinde tanımlanan başlangıç değer problemi ele alınacaktır. (4.3.2.1)'te verilen bu problem aşağıdaki

$$u(t) = \int_0^1 Y(t, s) g(t, u(t)) dt \quad (4.3.2.2)$$

integral denklem şeklinde yazılabilir. Burada $Y(t, s)$ fonksiyonu

$$Y(t, s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ 0, & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.3.2.3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $u \in GV_\varphi([0, L])$ olmak üzere eğer u fonksiyonu (4.3.2.2)'de tanımlanan integral denkleminin çözümü ise aynı şekilde (4.3.2.1)'de verilen probleminin de çözümüdür.

Öncelikle

$$Tu(t) = \int_0^1 Y(t, s)g(t, u(t))dt \quad (4.3.2.4)$$

dönüşümü tanımlansın. u fonksiyonu T 'nin sabit noktası ise (4.3.2.2)'deki integral denkleminin aynı zamanda da (4.3.2.1) probleminin çözümüdür. Şimdi ana teoremden ve önermede kullanılacak şartlar verilecektir:

K1) $\forall u \in \mathbb{R}$ için $g(\cdot, u)$ Lebesgue ölçülebilir ve öyle bir $u^* \in \mathbb{R}$ var ki bazı $\lambda = \lambda(g(\cdot, u^*)) > 0$ için $\int_0^L \varphi\left(\frac{|g(t, u^*)|}{\lambda}\right) dt < \infty$,

K2) $\forall u, v \in \mathbb{R}$ ve $t \in [0, L]$ için öyle bir $M > 0$ sabiti var ki $|g(t, u) - g(t, v)| \leq M|u - v|$ eşitsizliği sağlanır.

Öncelikli amaç (4.3.2.4)'te tanımlanan T dönüşümün $T: \ddot{X}_w^* \rightarrow \ddot{X}_w^*$ şeklinde tanımlı olduğunu göstermektir.

Önerme 4.3.2.1. Eğer $g(t, u(t))$ fonksiyonu (K1) ve (K2) şartlarını sağlarsa T dönüşümü $\ddot{X}_w^*$ üzerinde tanımlı bir dönüşümdür, yani $T: \ddot{X}_w^* \rightarrow \ddot{X}_w^*$ şeklindedir.

İspat. Öncelikle herhangi bir $u \in \ddot{X}_w^*$ verilsin. $Tu \in \ddot{X}_w^*$ olduğu gösterilecektir. $\ddot{X}_w^* = \tilde{X}_w^* \cap \ddot{X}$ olduğundan $Tu \in \tilde{X}_w^*$ ve $Tu \in \ddot{X}$ olduğu gösterilecektir.

$u \in \ddot{X}_w^*$ olduğundan $u \in \ddot{X}$ dir, yani $u(0) = 0$ olur. $Tu(t)$ dönüşümünün (4.3.2.4)'teki ifadesinden

$$Tu(t) = \int_0^1 Y(t, s)g(t, u(t))dt = \int_0^t g(t, u(t))dt \quad (4.3.2.5)$$

olup burada $t = 0$ yazılırsa $Tu(0) = 0$ olur, yani $Tu \in \ddot{X}$ elde edilir. Dolayısıyla $Tu \in \ddot{X}_w^*$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} |g(t, u)| &= |g(t, u) - g(t, u^*) + g(t, u^*)| \\ &\leq |g(t, u) - g(t, u^*)| + |g(t, u^*)| \\ &\leq M|u - u^*| + |g(t, u^*)| \end{aligned} \quad (4.3.2.6)$$

bulunur. $u(0) = 0$ olduğundan $u(t) = \int_0^t u'(t)dt$ yazılır. Bu eşitlik kullanılarak (4.3.2.6)'dan

$$|g(t, u)| \leq M \int_0^t |u'(t)|dt + |u^*| + |f(t, u^*)| \quad (4.3.2.7)$$

elde edilir. Şimdi $u \in \dot{X}_w^*$ olduğundan $u \in \tilde{X}_w^*$ olur. Bundan dolayı öyle bir $\lambda_3 = \lambda_3(u) > 0$ vardır öyle ki

$$w_{\lambda_3}(u, 0) = \int_0^1 \varphi\left(\frac{|u'(t)|}{\lambda_3}\right) dt < \infty \quad (4.3.2.8)$$

sağlanır. Aynı zamanda (H1)'den dolayı $\lambda_4 = \lambda_4(u^*) > 0$ için

$$\int_0^1 \varphi\left(\frac{|f(t, u^*)|}{\lambda_4}\right) dt < \infty \quad (4.3.2.9)$$

olur. $\frac{M\lambda_3}{\lambda_5} + \frac{\lambda_4}{\lambda_5} + \frac{1}{\lambda_5} = 1$ olacak şekilde $\lambda_5 = M\lambda_3 + \lambda_4 + 1$ verilsin. φ 'nin konvekslik özelliğinden

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{|g(t, u)|}{\lambda_5}\right) &\leq \varphi\left(\frac{M\lambda_3}{\lambda_5} \int_0^t \frac{|u'(s)|}{\lambda_3} ds + \frac{\lambda_4}{\lambda_5} \frac{|f(t, u^*)|}{\lambda_4} + \frac{1}{\lambda_5} M|u^*|\right) \\ &\leq \frac{M\lambda_3}{\lambda_5} \varphi\left(\int_0^t \frac{|u'(s)|}{\lambda_3} ds\right) + \frac{\lambda_4}{\lambda_5} \varphi\left(\frac{|f(t, u^*)|}{\lambda_4}\right) + \frac{1}{\lambda_5} \varphi(M|u^*|) \end{aligned} \quad (4.3.2.10)$$

yazılır. (4.3.2.10)'nun her iki tarafının $[0,1]$ aralığında integrali alınıp Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi\left(\frac{|g(t, u)|}{\lambda_5}\right) dt &\leq \frac{M\lambda_3}{\lambda_5} \int_0^1 \varphi\left(\int_0^t \frac{|u'(s)|}{\lambda_3} ds\right) dt + \frac{\lambda_4}{\lambda_5} \int_0^1 \varphi\left(\frac{|f(t, u^*)|}{\lambda_4}\right) dt \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_5} \varphi(M|u^*|) := B < \infty \end{aligned} \quad (4.3.2.11)$$

elde edilir.

Tekrar Jensen eşitsizliğinden faydalanılarak

$$\varphi\left(\frac{1}{\lambda_5} \int_0^1 |g(t, u)| dt\right) \leq \int_0^1 \varphi\left(\frac{|g(t, u)|}{\lambda_5}\right) dt \leq B \quad (4.3.2.12)$$

bulunur. Buradan da φ 'nin tersi var olduğu kullanılarak

$$\int_0^1 |g(t, u)| dt \leq \lambda_5 \varphi^{-1}(B) < \infty \quad (4.3.2.13)$$

elde edilir. Buradan $(Tu)'(t) = g(t, u) \in L^1[0,1]$ olur. Bunun yanında (4.3.2.5)'ten $Tu(t) = \int_0^t g(t, u)dt$ olduğundan $Tu(t) \in AC[0,1]$ olduğu görülür. Son olarak $w_\lambda(Tu, 0) < \infty$ olduğunu göstermek yeterlidir. (4.2.1.17)'den

$$w_\lambda(Tu, 0) = \int_0^1 \varphi\left(\frac{|(Tu)'(t)|}{\lambda}\right) dt \quad (4.3.2.14)$$

yazılabilir. (4.3.2.12)'den $g(t, u)$ için $\int_0^1 \varphi\left(\frac{|g(t, u)|}{\lambda_5}\right) dt < \infty$ olacak şekilde bir $\lambda_5 > 0$ vardır. (4.3.2.14)'te $(Tu)'(t) = g(t, u)$ olduğu kullanılırsa

$$w_\lambda(Tu, 0) = \int_0^1 \varphi\left(\frac{|g(t, u)|}{\lambda}\right) dt < \infty \quad (4.3.2.15)$$

sağlandığı görülür. Dolayısıyla $Tu(t) \in \check{X}_w^*$ elde edilir. Sonuç olarak $Tu \in \check{X}$ ve $Tu(t) \in \check{X}_w^*$ ise $Tu \in \check{X}_w^*$ olup $T: \check{X}_w^* \rightarrow \check{X}_w^*$ olur.

Şimdi bu bölümdeki ana teoremin ifadesi verilip ispatı yapılacaktır.

Teorem 4.3.2.2. $T: \check{X}_w^* \rightarrow \check{X}_w^*$ dönüşümü (4.3.2.4)'teki gibi verilsin. Eğer $g(t, u)$ fonksiyonu (K1) ve (K2)'deki şartları sağlarsa bu durumda (4.3.2.1)'te verilen problemin $\check{X}_w^*$ üzerinde bir tek çözümü vardır.

İspat. Öncelikle T 'nin 2. tip genişletilmiş C -şartını sağladığı gösterilecektir. Bunun için de ilk iş $u, v \in \check{X}_w^*$ için $\frac{1}{2}w_\lambda(u, Tu) \leq w_\lambda(u, v)$ olduğunu göstermektir.

$$\begin{aligned} w_\lambda(u, Tu) &= w_\lambda(u - Tu, 0) = \int_0^1 \varphi\left(\frac{|(u-Tu)'(t)|}{\lambda}\right) dt \\ &= \int_0^1 \varphi\left(\frac{|u'(t) - (Tu)'(t)|}{\lambda}\right) dt \\ &= \int_0^1 \varphi\left(\frac{|g(t, u(t)) - g(t, u(t))|}{\lambda}\right) dt \end{aligned} \quad (4.3.2.16)$$

olduğundan $0 = \frac{1}{2}w_\lambda(u, Tu) \leq w_\lambda(u, v)$ sağlanır.

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tu, Tv) &= w_\lambda(Tu - Tv, 0) = \int_0^1 \varphi\left(\frac{|(Tu-Tv)'(t)|}{\lambda}\right) dt \\ &\leq \int_0^1 \varphi\left(\frac{|g(t, u(t)) - g(t, v(t))|}{\lambda}\right) dt \\ &\leq \int_0^1 \varphi\left(\frac{M|u(t) - v(t)|}{\lambda}\right) dt \end{aligned} \quad (4.3.2.17)$$

$$\leq \int_0^1 \varphi \left(M \int_0^1 \frac{|(u(t)-v(t))'|}{\lambda} dt \right) dt$$

bulunur.

$M \leq 1$ olarak verilsin. φ konveks olduğundan $\varphi(Mx) \leq M\varphi(x)$ yazılabilir. Bundan dolayı

$$w_\lambda(Tu, Tv) \leq M \int_0^1 \varphi \left(\int_0^1 \frac{|(u(t)-v(t))'|}{\lambda} dt \right) dt \quad (4.3.2.18)$$

yazılıp Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$w_\lambda(Tu, Tv) \leq M \int_0^1 \varphi \left(\frac{|(u(t)-v(t))'|}{\lambda} \right) dt \leq Mw_\lambda(u, v) \quad (4.3.2.19)$$

elde edilir. Burada $\psi(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları $\forall x > 0$ için $\psi(x) > \beta(x)$ şartı sağlanacak şekilde $\psi(x) = x$ ve $\beta(x) = Mx$ olarak tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü 2. tip genişletilmiş C -şartını sağlar.

Şimdi çözüm varlığı ve tekliği için gerekli şartların sağlanıp sağlanmadığı araştırılacaktır. (4.3.2.16)'dan $0 = w_\lambda(u, Tu) < \infty$ olacak şekilde bir $u \in \check{X}_w^*$ var olduğu görülür. Bu da çözümün varlığını garanti eder.

$\forall u, v \in \check{X}_w^*$ için $w_\lambda(u, v) < \infty$ sağlandığı gösterilecektir. $u, v \in \check{X}_w^*$ olduğundan

$$w_{\lambda_6}(u, 0) = \int_0^1 \varphi \left(\frac{|u'(t)|}{\lambda_6} \right) dt < \infty, \quad (4.3.2.20)$$

$$w_{\lambda_7}(v, 0) = \int_0^1 \varphi \left(\frac{|v'(t)|}{\lambda_7} \right) dt < \infty,$$

olacak şekilde $\lambda_6 = \lambda_6(u) > 0$ ve $\lambda_7 = \lambda_7(u) > 0$ sayıları vardır. Ayrıca $\frac{\lambda_6}{\lambda_8} + \frac{\lambda_7}{\lambda_8} = 1$ eşitliği sağlanacak biçimde $\lambda_8 = \lambda_6 + \lambda_7 > 0$ sayısı tanımlansın.

φ 'nin konvekslik özelliği ve $|(u-v)'(t)| \leq |u'(t)| + |v'(t)|$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^1 \varphi \left(\frac{|(u-v)'(t)|}{\lambda_8} \right) ds \leq \int_0^1 \varphi \left(\frac{\lambda_6}{\lambda_8} \frac{|u'(s)|}{\lambda_6} + \frac{\lambda_7}{\lambda_8} \frac{|v'(s)|}{\lambda_7} \right) ds \quad (4.3.2.21)$$

$$\leq \frac{\lambda_6}{\lambda_8} \varphi \left(\int_0^1 \frac{|u'(s)|}{\lambda_6} ds \right) + \frac{\lambda_7}{\lambda_8} \varphi \left(\int_0^1 \frac{|v'(s)|}{\lambda_7} ds \right)$$

$$:= C < \infty$$

bulunup

$$w_\lambda(u, v) = w_\lambda(u - v, 0) = \int_0^1 \varphi \left(\frac{|(u-v)'(t)|}{\lambda_8} \right) ds < \infty \quad (4.3.2.22)$$

elde edilir. Böylelikle (4.3.2.1)'de verilen problemin bir tek çözümünün olduğunu sonucuna ulaşılır.





5. KISMİ SIRALI MODÜLER METRİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ C-ŞARTLARINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde kısmi sıralı modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ele alınacaktır. $\preceq$ sıralama bağlantısı ve X_w^* da modüler metrik uzayı göstermek üzere $(X_w^*, \preceq)$ ikilisine veya $(X_w^*, w, \preceq)$ üçlüsüne kısmi sıralı modüler metrik uzay denir. (4.1.2) ve (4.1.3) te ifade edilen 1. tip ve 2. tip genelleştirilmiş C-şartlarını sağlayan dönüşümler için $(X_w^*, w, \preceq)$ kısmi sıralı modüler metrik uzayında sabit nokta teoremleri verilecektir. Bunun yanında bazı özel örnekler verilerek bu teoremlerden elde edilen sonuçlar pekiştirilecektir. Son olarak bu bölümde ispatlanan teoremler kullanılarak ele alınan bir integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir.

5.1. Kısmi Sıralı Modüler Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş C-Şartları ve Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda 1. tip ve 2. tip genelleştirilmiş C-şartları için $(X_w^*, w, \preceq)$ kısmi sıralı modüler metrik uzayında sabit nokta teoremleri verilecektir. Ayrıca bazı örneklerle bu sonuçlar pekiştirilecektir.

Tanım 5.1.1. $\preceq$ sıralama bağlantısı olmak üzere herhangi $x, y \in X$ için $x \preceq y$ veya $y \preceq x$ ise x ve y karşılaştırılabilir denir.

Şimdi bu bölümdeki ana teoremin ifadesi verilip ispatı yapılacaktır.

Teorem 5.1.2. w, X üzerinde tanımlı kesin modüler metrik olsun. $(X_w^*, w, \preceq)$ uzayı da kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\forall t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ olacak şekilde 1. tip genelleştirilmiş C-şartını sağlasın. Herhangi $x, y \in X_w^*$ için x ve y ile karşılaştırılabilir bir $z \in X_w^*$ var olsun. Ayrıca $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde herhangi bir $x_0 \in X$ elemanı var ise T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde herhangi bir $x_0 \in X$ verilsin. $\{x_n\} \in X_w^*$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_n = T^n x_0$ iterasyon dizisini tanımlansın.

Eğer herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ eşitliği sağlanırsa x_n , T 'nin sabit noktası olur. O yüzden $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. $x_0 \leq T x_0 = x_1$ ve T azalamayan olduğundan $x_0 \leq \dots \leq x_n$ elde edilir.

Sabit noktanın varlığı Teorem 4.1.4 (veya Teorem 4.1.5)'teki yol takip edilerek elde edilir. Benzer şekilde $\{x_n\}$ dizisinin X_w^* üzerinde T 'nin sabit noktasına yakınsadığı elde edilir, yani $\{x_n\} \rightarrow x \in X_w^*$ için $Tx = x$ sağlanır.

Burada sabit noktanın tekliğinin ispatı farklılık gösterecektir. Kabul edilsin ki $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in X_w^*$, T 'nin birbirinden farklı iki sabit noktası olsun. Burada x ve y noktalarının karşılaştırılabilir olması ve olmaması şeklinde iki durum vardır.

İlk olarak, x ve y karşılaştırılabilir olsun. Genellemeyi bozmayacak şekilde $x \leq y$ verilsin.

(4.1.2)'den

$$0 = \frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) = \frac{1}{2} w_\lambda(x, x) \leq w_\lambda(x, y) \quad (5.1.1)$$

sağlanır. Bu durumda

$$\psi(w_\lambda(Tx, Ty)) = \psi(w_\lambda(x, y)) \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \right) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, x)(1 + w_\lambda(y, y))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, x)(1 + w_\lambda(y, x))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \right) \\ &\leq \beta(\max\{w_\lambda(x, y), 0, w_\lambda(y, x)\}) = \beta(w_\lambda(x, y)) \end{aligned}$$

sağlanır. Bu eşitsizlikten $\psi(w_\lambda(x, y)) \leq \beta(w_\lambda(x, y))$ elde edilir. Her $t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ ve her $x, y \in X_w^*$ için $w_\lambda(x, y) < \infty$ olduğundan dolayı $w_\lambda(x, y) = 0$ olduğu bulunur. w_λ kesin modüler metrik olduğundan $x = y$ elde edilir.

Diğer durum ise x ve y karşılaştırılabilir olmaması durumudur. x ve y karşılaştırılabilir değilse teoremin hipotezinden x ve y ile karşılaştırılabilir bir $z \in X_w^*$ vardır, yani $x \leq z$ ve $y \leq z$ sağlanır.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_0 = z$ ve $z_{n+1} = Tz_n$ olmak üzere $\{z_n\}$ dizisini tanımlansın. T azalmayan ve $x \preceq z$ olduğundan $x = Tx \preceq Tz = z_1 \preceq Tz_1 = z_2 \dots \preceq Tz_{n-1} = z_n$ olup $x \preceq z_n$ elde edilir.

Eğer herhangi bir $N_0 \in \mathbb{N}$ için $x = z_{N_0}$ ise $x = Tx \preceq Tz_{N_0} = z_{N_0}$ olup her $N \geq N_0$ için $x = T^N z = z_N$ bulunur. Buradan $\{z_n\} \rightarrow x$ olur. Aynı zamanda $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x, z_n) = 0$ yazılır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x \neq z_n$ olsun. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$0 = \frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, z_n) \quad (5.1.3)$$

sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \psi(w_\lambda(Tx, Tz_n)) &= \psi(w_\lambda(x, z_{n+1})) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, z_n), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(z_n, z_{n+1}))}{1 + w_\lambda(x, z_n)}, \frac{w_\lambda(z_n, Tx)(1 + w_\lambda(z_n, Tx))}{1 + w_\lambda(x, z_n)} \right\} \right) \\ &\leq \beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, z_n), \frac{w_\lambda(x, x)(1 + w_\lambda(z_n, z_{n+1}))}{1 + w_\lambda(x, z_n)}, \frac{w_\lambda(z_n, x)(1 + w_\lambda(z_n, x))}{1 + w_\lambda(x, z_n)} \right\} \right) \\ &\leq \beta(\max\{w_\lambda(x, z_n), 0, w_\lambda(y, z_n)\}) = \beta(w_\lambda(x, z_n)) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

yazılıp $\psi(w_\lambda(x, z_{n+1})) \leq \beta(w_\lambda(x, z_n)) \leq \psi(w_\lambda(x, z_n))$ elde edilir. ψ azalmayan olduğundan $w_\lambda(x, z_{n+1}) \leq w_\lambda(x, z_n)$ olur. Burada $w_\lambda(x, z_n)$ artmayan pozitif bir dizi olduğundan $w_\lambda(x, z_n)$ yakınsak olduğu elde edilir. Böylece, $l \geq 0$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x, z_n) = l$ yazılabilir. (5.1.2)'de her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ iken limiti alırsa $\psi(l) \leq \beta(l)$ bulunur. Buradan da $l = 0$ elde edilir, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x, z_n) = 0$ olur. Aynı yol izlenerek $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(y, z_n) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x, y) = 0$ olup $x = y$ elde edilir. Nihayet T 'nin sabit noktasının tek olduğu sonucuna ulaşılır.

2. tip genelleştirilmiş C -şartı için sabit nokta teoremi ifade edilecek, fakat ispatı verilmeyecek.

Teorem 5.1.3. w, X üzerinde tanımlı kesin modüler metrik olsun. $(X_w^*, w, \leq)$ da kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\forall t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ olacak şekilde 2. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlasın. Herhangi $x, y \in X_w^*$ için x ve y ile karşılaştırılabilir bir $z \in X_w^*$ var olsun. Ayrıca $x_0 \leq Tx_0$ olacak şekilde herhangi bir $x_0 \in X$ elemanı var ise T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. Teorem 5.1.2 ile benzer şekilde ispatlanır.

Yukarıda verilen teoremlerde elde edilen sonuçları pekiştirmek için bazı özel örnekler verilecektir.

Örnek 5.1.4. $Tx = \frac{1}{10} [\ln(x^2 + 10) + x]$ dönüşümünün $X = [0,1]$ kapalı aralığında sabit noktasının varlığını ve tekliğini araştıralım.

$X = [0,1]$ ve w modüler metriği $w(x, y) = d(x, y)$ şeklinde verilsin. $d(x, y) = \max_{x, y \in [0,1]} |x - y|$ olarak alınırsa X_w^* uzayı w -tam olur. $[0,1] \subset \mathbb{N}$ olduğundan $\leq$ 'e göre kısmi sıralıdır. Bu durumda $(X_w^*, w, \leq)$ uzayı $\leq$ 'e göre kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzay olur. Ayrıca $\forall x \in [0,1]$ için $Tx \in [0,1]$ olduğu görülür, yani $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ şeklindedir.

İlk olarak T 'nin 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağladığı gösterilecektir. (4.1.2)'den

$$\frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) = \frac{1}{2} d(x, Tx) \quad (5.1.5)$$

$$= \frac{1}{2} \max_{x, y \in [0,1]} \left| x - \frac{1}{10} [\ln(x^2 + 10) + x] \right| = 0.1151$$

bulunur. $w_\lambda(x, y) = d(x, y) = \max_{x, y \in [0,1]} |x - y| = 1$ olup $\frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, y)$

sağlandığı görülür. (4.1.2)'nin diğer tarafı için de

$$w_\lambda(Tx, Ty) = d(Tx, Ty) = \max_{x, y \in [0,1]} |Tx - Ty| \quad (5.1.6)$$

$$= \max_{x, y \in [0,1]} \left| \frac{1}{10} [\ln(x^2 + 10) + x] - \frac{1}{10} [\ln(y^2 + 10) + y] \right|$$

$$\leq \frac{1}{10} \max_{x, y \in [0,1]} \left\{ \left| \ln \left(\frac{x^2 + 10}{y^2 + 10} \right) \right| + |x - y| \right\} \leq 0.1095$$

olur. $w_\lambda(x, y) = 1$, $w_\lambda(x, Tx) = w_\lambda(y, Tx) = w_\lambda(y, Ty) = 0.66$ olduğundan

$$\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} = 1 \quad (5.1.7)$$

elde edilir. Burada $\forall x > 0$ için $\psi(x) > \beta(x)$ olacak şekilde $\psi(x) = e^x - 1$ ve $\beta(x) = x^2$ fonksiyonları alınsın. Burada $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyon olduğu açıktır.

(5.1.6) ve (5.1.7)'den sırasıyla

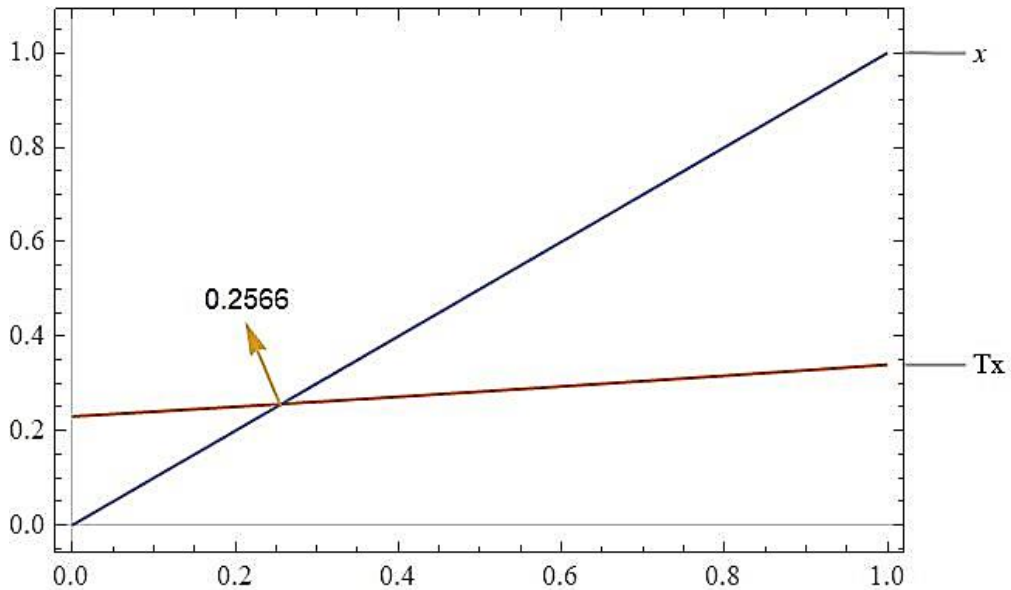
$$\psi(w_\lambda(Tx, Ty)) = \psi(0.1095) = e^{0.1095} - 1 = 0.116$$

ve

$$\beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \right) \leq \beta(1) = 1$$

olup $\psi(0.1095) \leq \beta(1)$ olur. Sonuç olarak T dönüşümü 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlar.

$X = [0, 1] \subset \mathbb{R}^+$ olduğundan karşılaştırılabilir, yani öyle bir $z \in [0, 1]$ elemanı bulunabilir ki $\forall x, y \in [0, 1]$ için x ve y ile kıyaslanabilir.



Şekil 5.1. Örnek 5.1.4'te verilen dönüşümün sabit noktası

Son olarak $x_0 \leq Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [0, 1]$ olduğunun gösterilmesi kalır. Gerçekten $x_0 = 0.2 \in [0, 1]$ için $Tx_0 = 0.2507$ olup bu şartta sağlanır. Dolayısıyla

Teorem 5.1.2'deki bütün şartlar sağlanmaktadır. Böylece Teorem 5.1.2'den T 'nin $[0,1]$ aralığında bir tek sabit noktası olduğu sonucuna ulaşılır.

Şekil 5.1.1'de $Tx = \frac{1}{10} [\ln(x^2 + 10) + x]$ fonksiyonu ile $y = x$ doğrusunun kesişim noktası gösterilmiştir. Buradan da görüldüğü gibi $T(0.2566) = 0.2566 \in [0,1]$ olup T 'nin tek sabit noktası $x = 0.2566$ 'dır.

Örnek 5.1.5. $Tx = \frac{1}{4} [\sin x + x^2 - 1]$ dönüşümünün $[0,1]$ kapalı aralığında sabit noktasının varlığını ve tekliğini araştıralım.

X kümesi $X = [0,1]$ ve w modüler metriği de $w_\lambda(x, y) = \frac{d(x,y)}{\lambda}$ olsun. $d(x, y) = \max_{x,y \in [0,1]} |x - y|$ olarak alınırsa modüler metrik $w_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda} \max_{x,y \in [0,1]} |x - y|$ olup X_w^* uzayı w -tam olur. $[0,1] \subset \mathbb{N}$ olduğundan $\leq$ 'e göre kısmi sıraladır. Bu durumda $(X_w^*, w, \leq)$ uzayı $\leq$ 'e göre kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzaydır. Ayrıca $\forall x \in [0,1]$ için $Tx \in [0,1]$ olduğu görülür, yani $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ olur.

Öncelikle T 'nin 2. tip genelleştirilmiş C -şartını sağladığı gösterilecektir. (4.1.3)'ten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) &= \frac{1}{2\lambda} d(x, Tx) \\ &= \frac{1}{2\lambda} \max_{x,y \in [0,1]} \left| x - \frac{1}{4} [\sin x + x^2 - 1] \right| \\ &= \frac{0.1448}{\lambda} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

bulunur. $w_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda} d(x, y) = \frac{1}{\lambda} \max_{x,y \in [0,1]} |x - y| = \frac{1}{\lambda}$ olup $\frac{1}{2} w_\lambda(x, Tx) \leq w_\lambda(x, y)$ sağlandığı görülür. $w_\lambda(Tx, Ty)$ için

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tx, Ty) &= \frac{1}{\lambda} d(Tx, Ty) = \frac{1}{\lambda} \max_{x,y \in [0,1]} |Tx - Ty| \\ &= \frac{1}{\lambda} \max_{x,y \in [0,1]} \left| \frac{1}{4} [\sin x + x^2 - 1] - \frac{1}{4} [\sin y + y^2 - 1] \right| \\ &\leq \frac{1}{4\lambda} \max_{x,y \in [0,1]} \{ |\sin x - \sin y| + |x - y||x + y| \} \leq 0.5 \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

bulunur. $x, y \in [0,1]$ olmak üzere (4.1.3)'ün diğer kısmı için de

$$\max \left\{ \begin{aligned} &w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \\ &\frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(x, Tx)}{1 + w_\lambda(Tx, Ty)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(y, Tx)}{1 + w_\lambda(y, Tx) + w_\lambda(x, Ty)} \end{aligned} \right\} = 1$$

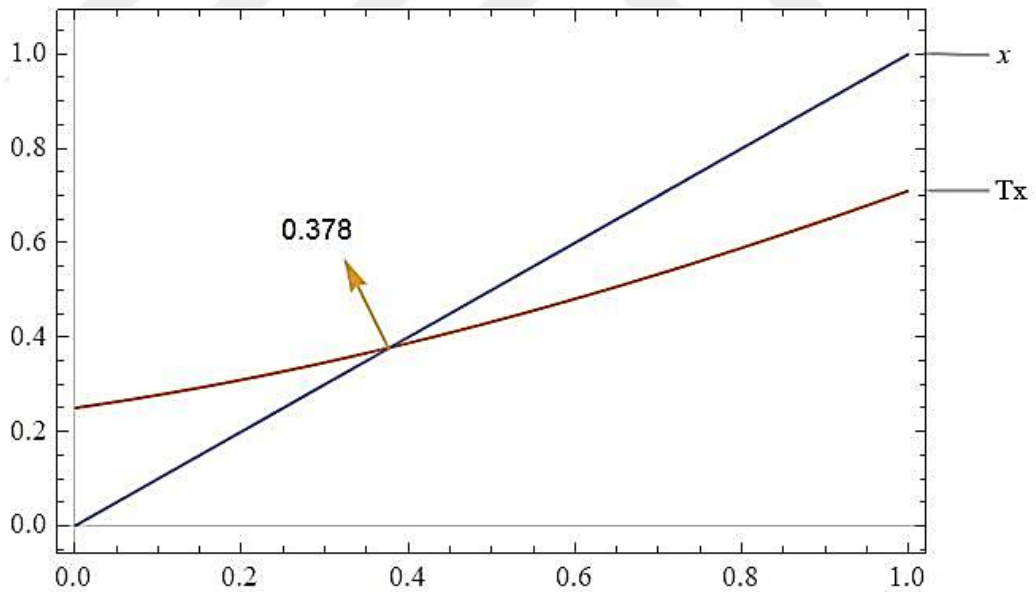
elde edilir. Burada $\forall x > 0$ için $\psi(x) > \beta(x)$ şartını sağlayacak şekilde $\psi(x) = x$ ve $\beta(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonları alınsın. Burada $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyon olduğu açıktır. Bu fonksiyonlar düşünüldüğünde

$$\psi(w_\lambda(Tx, Ty)) = \psi(0.5) = 0.5$$

ve

$$\beta \left(\max \left\{ w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)} \right\} \right) \leq \beta(1) = \frac{1}{2} = 0.5$$

bulunup $\psi(0.5) \leq \beta(1)$ olur. Yani, T dönüşümü 2. tip genelleştirilmiş C -şartını sağlar. $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}^+$ olduğundan kıyaslanabilir, yani öyle bir $z \in [0, 1]$ elemanı bulunabilir ki $\forall x, y \in [0, 1]$ için x ve y ile karşılaştırılabilir.



Şekil 5.2. Örnek 5.1.5'teki dönüşümün sabit noktası

Son olarak $x_0 = 0.1 \in [0, 1]$ için $Tx_0 = 0.2775$ olup $x_0 \leq Tx_0$ şartı da sağlanır. Dolayısıyla Teorem 5.1.3'teki bütün şartlar sağlanmış olup T 'nin $[0, 1]$ aralığında bir tek sabit noktası olduğu sonucuna ulaşılır.

Şekil 5.1.2’de $Tx = \frac{1}{4}[\sin x + x^2 - 1]$ fonksiyonu ile $y = x$ doğrusunun kesişim noktası gösterilmiştir. Buradan da görüldüğü gibi $T(0.378) = 0.378 \in [0,1]$ olup T ’nin tek sabit noktası $x = 0.378$ ’dir.

5.2. Kısmi Sıralı Modüler Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş C-Şartı için Sabit Nokta Teoreminin İntegral Denkleme Uygulaması

Bu kısımda yukarıda ispatlanan sabit nokta teoremlerinden elde edilen sonuçlar kullanılarak ele alınan integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılacaktır.

Uygulama olarak aşağıdaki

$$u(t) = H(t) + \int_0^T M(t,s)Y(s,u(s)) ds \quad (5.2.1)$$

integral denklemi ele alınacaktır. Burada $H: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $M: [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları sürekli ve $Y: [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da azalmayan sürekli bir fonksiyondur.

Bu uygulamada ele alınan integral denklemi $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı olan $X = C([0, T])$ üzerinde düşünülecektir. Dolayısıyla (5.2.1) integral denklemi aşağıdaki

$$X_w = X_w(u_0) = \left\{ u \in C([0, T]): \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(u, u_0) = 0 \right\} \quad (5.2.2)$$

modüler metrik uzayında ele alınacaktır. Modüler metrik olarak $w_\lambda(u, v) = \frac{d(u,v)}{\lambda}$ alınacaktır. Burada $d(u(t), v(t)) = \max_{t \in [0, T]} |u(t) - v(t)|$ olarak alınırsa (5.2.2)’deki

X_w modüler metrik uzayı w -tam olur. Yine bu uzayda kısmi sıralama $u, v \in C([0, T])$ ve $\forall t \in [0, T]$ olmak üzere $u \preceq v \Rightarrow u(t) \leq v(t)$ şeklinde tanımlanırsa $(X_w, \preceq)$ uzayı kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzay olur.

T dönüşümü

$$Tu(t) = H(t) + \int_0^T M(t,s)Y(s,u(s)) ds, \quad t \in [0, T] \quad (5.2.3)$$

şeklinde tanımlansın. $u(t)$ fonksiyonun (5.2.3)’deki $Tu(t)$ dönüşümünün sabit noktası olması bu fonksiyonun (5.2.1)’deki integral denkleminin de çözümü olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla $Tu(t)$ dönüşümünün Teorem 5.1.2’deki şartları sağladığı

gösterilirse sabit noktasının varlığı ve tekliği yani (5.2.1)'deki integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği garantilenmiş olur.

Şimdi bu kısımdaki ana teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 5.2.1. $\forall u, v \in C([0, T])$ ve $\forall s \in [0, T]$ olmak üzere $Y(s, u(s))$ fonksiyonu

$$|Y(s, u(s)) - Y(s, v(s))| \leq \sqrt[4]{\ln \left[\left(\frac{|u(s) - v(s)|}{\lambda} \right)^5 + 1 \right]} \quad (5.2.4)$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca $M(t, s)$ fonksiyonu için $\max_{t, s \in [0, T]} \int_0^T |M(t, s)| ds \leq \frac{\lambda}{T}$ olsun. Bu durumda (5.2.1)'deki integral denkleminin bir tek çözümü vardır.

İspat. Genelliği bozmayacak şekilde $\forall u, v \in C([0, T])$ için $u \leq v$ olsun. Bu durumda $Y(s, u(s))$ azalmayan fonksiyon olduğundan $Tu \leq Tv$ olur, yani T dönüşümü de azalmayandır. Ayrıca $\forall t, s \in [0, T]$ için

$$\begin{aligned} v &= H(t) + \int_0^T M(t, s) Y(s, v(s)) ds \\ &\leq H(t) + \int_0^T M(t, s) Y(s, u(s)) ds = Tu \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

olduğu görülür. Öncelikle T 'nin 1. tip genelleştirilmiş C -şartını sağladığı gösterilecektir.

$$\begin{aligned} w_\lambda(u, Tu) &= \frac{1}{\lambda} d(u, Tu) = \frac{1}{\lambda} \max_{t \in [0, 1]} |u - Tu| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \max_{t \in [0, 1]} |u - v| = w_\lambda(u, v) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

olup $\frac{1}{2} w_\lambda(u, Tu) \leq w_\lambda(u, v)$ elde edilir. Diğer kısım için de $w_\lambda(Tu, Tv)$ ile $w_\lambda(u, v)$ incelenecektir.

$$\begin{aligned} w_\lambda(Tu, Tv) &= \frac{1}{\lambda} d(Tu, Tv) = \frac{1}{\lambda} \max_{t \in [0, 1]} |Tu(t) - Tv(t)| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \max_{s \in [0, 1]} \left\{ \int_0^T |M(t, s)| |Y(s, u(s)) - Y(s, v(s))| ds \right\} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \max_{s \in [0, 1]} \left\{ \int_0^T |M(t, s)| \sqrt[4]{\ln \left[\left(\frac{|u(s) - v(s)|}{\lambda} \right)^5 + 1 \right]} ds \right\} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \max_{s \in [0, 1]} |M(t, s)| \int_0^T \sqrt[4]{\ln \left[\left(\frac{|u(s) - v(s)|}{\lambda} \right)^5 + 1 \right]} ds \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt[4]{\ln \left[\left(\frac{|u(s)-v(s)|}{\lambda} \right)^5 + 1 \right]} ds$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_0^T \sqrt[4]{\ln \left[\left(\frac{|u(s)-v(s)|}{\lambda} \right)^5 + 1 \right]} ds &\leq \int_0^T \sqrt[4]{\ln \left[\left(\frac{1}{\lambda} \max_{s \in [0,1]} |u(s) - v(s)| \right)^5 + 1 \right]} ds \quad (5.2.8) \\ &\leq \int_0^T \sqrt[4]{\ln \left[(w_\lambda(u, v))^5 + 1 \right]} ds \\ &\leq T \sqrt[4]{\ln \left[(w_\lambda(u, v))^5 + 1 \right]} \end{aligned}$$

yazılabilir. (5.2.7) ve (5.2.8)'den

$$w_\lambda(Tu, Tv) \leq \sqrt[4]{\ln \left[(w_\lambda(u, v))^5 + 1 \right]} \quad (5.2.9)$$

yazılıp

$$w_\lambda(Tu, Tv)^4 \leq \ln[w_\lambda(u, v)^5 + 1] \quad (5.2.10)$$

elde edilir. $\forall t > 0$ için $\psi(t) > \beta(t)$ olacak şekilde $\psi(t) = t^4$ ve $\beta(x) = \ln(t^5 + 1)$ fonksiyonları alınsın. Burada $\psi \in \Psi$ ve $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyon olduğu açıktır. Dolayısıyla (5.2.10)'dan $\psi(w_\lambda(Tu, Tv)) \leq \beta(w_\lambda(u, v))$ bulunur, yani T dönüşümü 1. tip genişletilmiş C -şartını sağlar. Sonuç olarak Teorem 5.1.2'deki bütün şartlar sağlanmış olur ve dolayısıyla (5.2.1)'deki integral problemin bir tek $u \in C([0, T])$ çözümü vardır.

6. MODÜLER METRİK UZAYLARDA F_α -DARALMA ŞARTLARINI SAĞLAYAN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Bu bölümde alışılmış metrik uzaylarda ele alınan F -daralma şartından ilham alınarak modüler metrik uzaylarda F -daralma şartı ve genelleştirilmiş halleri tanımlanacaktır. Ayrıca α -kabul edilebilir dönüşümler kullanılarak genelleştirilmiş F -daralma şartları ortaya konulacaktır. Bu çalışmada yukarıda bahsedilen şartlar F_α -daralma şartı olarak adlandırılacaktır. Genel olarak 1. tip ve 2. tip F_α -daralma şartı olmak üzere iki farklı şart tanımlanacaktır.

1. tip ve 2. tip F_α -daralma şartlarının her biri için sabit nokta teoremleri ifade edilip ispatları yapılacaktır. İlk olarak bu teoremlerden elde edilen bilgiler kullanılarak ele alınan dönüşümlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği gösterilecektir. Daha sonra genel formda verilmiş bir integral denklemin çözümünün varlığının ve tekliğinin ispatı yapılacaktır. Son olarak ise özel halde verilmiş integral denklemin bir çözümü olduğu gösterilip bu var olan çözüm belirtilecektir.

6.1. Modüler Metrik Uzaylarda F_α -Daralma Şartları ve Sabit Nokta Teoremleri

Öncelikle Tanım 2.1.15 ve 2.1.16'daki tanımlardan yola çıkılarak modüler metrik uzaylarda 1. tip ve 2. tip F_α -daralma şartlarının tanımları verilecektir.

Tanım 6.1.1. w, X üzerinde tanımlı modüler metrik olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X_w^*$ için

$$w_\lambda(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \quad (6.1.1)$$

$$\kappa + F(\alpha(x, y)w_\lambda(Tx, Ty)) \leq F(\psi(\max\{w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)}\})),$$

olacak şekilde $\kappa > 0$ varsa T ye '1. tip F_α -daralma şartını sağlıyordur' denir. Burada $\psi \in \Psi$ ve $F \in \mathcal{F}$ dir.

Tanım 6.1.2. w , X üzerinde tanımlı modüler metrik olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X_w^*$ için

$$w_\lambda(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \quad (6.1.2)$$

$$\begin{aligned} \kappa + F(\alpha(x, y)w_\lambda(Tx, Ty)) &\leq F(\psi(\max\{w_\lambda(x, y), \\ &\frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(x, Tx)}{1 + w_\lambda(Tx, Ty)}, \\ &\frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(y, Tx)}{1 + w_\lambda(y, Tx) + w_\lambda(x, Ty)}\}))) \end{aligned}$$

olacak şekilde $\kappa > 0$ varsa T ye 2. tip F_α -daralma şartını sağlar denir. Burada $\psi \in \Psi$ ve $F \in \mathcal{F}$ 'dir.

Eğer (6.1.1) ve (6.1.2)'de $F(x) = \ln x \in \mathcal{F}$ alınırsa $Tx \neq Ty$ olmak üzere $\forall x, y \in X_w^*$ için

$$\begin{aligned} \alpha(x, y)w_\lambda(Tx, Ty) &\leq e^{-\kappa}\psi(\max\{w_\lambda(x, y), \dots\}) \\ &\leq \psi(\max\{w_\lambda(x, y), \dots\}) \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

elde edilir.

(6.1.1) ve (6.1.2)'de tanımlanan 1. ve 2. tip F_α -daralma şartlarını sağlayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve bazı sonuçları verilecektir.

Teorem 6.1.3. w kesin modüler metrik ve X_w^* de w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü 1. tip F_α -daralma şartını sağlasın. Ayrıca

$$(T1) \text{ Herhangi bir } x_0 \in X_w^* \text{ için } \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1,$$

$$(T2) \text{ } T \text{ dönüşümü } \alpha\text{-kabul edilebilir,}$$

$$(T3) \text{ } T \text{ sürekli}$$

olsun. Bu durumda T 'nin sabit noktası vardır.

İspat. Öncelikle $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X_w^*$ noktası verilsin. $\{x_n\} \in X_w^*$ olmak üzere $x_n = T^n x_0$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi tanımlasın.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ olursa o zaman x_n elemanı T 'nin sabit noktası olur. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. Bu durumda $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) > 0$ olur. Aynı zamanda $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = w_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0$ yazılır.

$\alpha(x_0, Tx_0) = \alpha(x_0, x_1) \geq 1$ ve T dönüşümü α -kabul edilebilir olduğundan $\alpha(Tx_0, Tx_1) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$ olur. Benzer şekilde $\forall n > 0$ için $\alpha(x_{n-1}, x_n) \geq 1$ elde edilir.

(6.1.1)'de $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ yazılırsa $w_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n) = w_\lambda(x_n, x_{n+1}) > 0$ olur. Ayrıca

$$\kappa + F(\alpha(x_{n-1}, x_n)w_\lambda(Tx_{n-1}, Tx_n)) \quad (6.1.4)$$

$$\leq F \left(\psi \left(\max \left\{ w_\lambda(x_{n-1}, x_n), \frac{w_\lambda(x_{n-1}, Tx_{n-1})(1 + w_\lambda(x_n, Tx_n))}{1 + w_\lambda(x_{n-1}, x_n)}, \frac{w_\lambda(x_n, Tx_{n-1})(1 + w_\lambda(x_n, Tx_{n-1}))}{1 + w_\lambda(x_{n-1}, x_n)} \right\} \right) \right)$$

yazılabilir. Burada w kesin modüler olduğundan $w_\lambda(x_n, Tx_{n-1}) = w_\lambda(x_n, x_n) = 0$ 'dır. Dolayısıyla (6.1.4)'ten

$$\kappa + F(\alpha(x_{n-1}, x_n)w_\lambda(x_n, x_{n+1})) \quad (6.1.5)$$

$$\leq F \left(\psi \left(\max \left\{ w_\lambda(x_{n-1}, x_n), \frac{w_\lambda(x_{n-1}, x_n)(1 + w_\lambda(x_n, x_{n+1}))}{1 + w_\lambda(x_{n-1}, x_n)} \right\} \right) \right)$$

yazılabilir. Burada $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) > w_\lambda(x_{n-1}, x_n)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda (6.1.5)'ten

$$\kappa + F(\alpha(x_{n-1}, x_n)w_\lambda(x_n, x_{n+1})) \quad (6.1.6)$$

$$\leq F(\psi(\max\{w_\lambda(x_{n-1}, x_n), w_\lambda(x_n, x_{n+1})\})) \leq F(\psi(w_\lambda(x_n, x_{n+1})))$$

elde edilir. (F_1) 'den dolayı F kesin artandır ve $\alpha(x_{n-1}, x_n) > 1$ olduğundan

$$F(w_\lambda(x_n, x_{n+1})) < \kappa + F(w_\lambda(x_n, x_{n+1})) \quad (6.1.7)$$

$$< \kappa + F(\alpha(x_{n-1}, x_n)w_\lambda(x_n, x_{n+1}))$$

olur.

ψ fonksiyonunun özelliğinden $\psi(w_\lambda(x_n, x_{n+1})) < w_\lambda(x_n, x_{n+1})$ olur. Yine (F_1) 'den dolayı $F(\psi(w_\lambda(x_n, x_{n+1}))) < F(w_\lambda(x_n, x_{n+1}))$ yazılır. Bu eşitsizlikler (6.1.6)'da yerlerine yazılırsa $F(w_\lambda(x_n, x_{n+1})) < F(w_\lambda(x_n, x_{n+1}))$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $w_\lambda(x_n, x_{n+1}) > w_\lambda(x_{n-1}, x_n)$ kabulü yanlıştır, yani

$$w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq w_\lambda(x_{n-1}, x_n) \quad (6.1.8)$$

olur. (6.1.8)'deki eşitsizlik (6.1.5)'te kullanılırsa $\forall n \geq 1$ için

$$\kappa + F(w_\lambda(x_n, x_{n+1})) \leq F(w_\lambda(x_{n-1}, x_n)) \quad (6.1.9)$$

elde edilir.

$\forall \lambda_0 > \lambda > 0$ için $a_n = w_\lambda(x_n, x_{n+1})$ dizisi tanımlasın. O zaman (6.1.9)'dan $\forall n \geq 1$ için

$$\kappa + F(a_n) \leq F(a_{n-1}) \quad (6.1.10)$$

yazılabilir. Buradan yola çıkarak $\forall n \geq 1$ için

$$F(a_n) \leq F(a_{n-1}) - \kappa \leq F(a_0) - n\kappa \quad (6.1.11)$$

yazılabilir. (6.1.11)'de $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = -\infty$ elde edilir.

(F_2) 'den $\forall \lambda_0 > \lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0$ bulunur. Ayrıca (F_3) özelliğinden de $k \in (0,1)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k F(a_n) = 0$ yazılabilir.

(6.1.11) kullanılarak

$$0 \leq a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \quad (6.1.12)$$

$$\leq a_n^k (F(a_0) - n\kappa) - a_n^k F(a_0)$$

$$\leq -n\kappa a_n^k \leq 0$$

bulunur. (6.1.12)'de limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} n\kappa a_n^k = 0$ elde edilir. Limit tanımından öyle

bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki $\forall n_0 > n > 0$ için

$$a_n = w_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/k}} \quad (6.1.13)$$

yazılabilir. Ayrıca modüler metriğin 3. özelliğinden $\lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{m-1}$ olmak üzere $m > n > n_0$ için

$$w_\lambda(x_n, x_m) \leq w_{\lambda_n}(x_n, x_{n+1}) + w_{\lambda_{n+1}}(x_{n+1}, x_{n+2}) \quad (6.1.14)$$

$$+ w_{\lambda_{n+2}}(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + w_{\lambda_{m-1}}(x_{m-1}, x_m)$$

yazılır. (6.1.14)'te (6.1.13)'teki eşitlik kullanılırsa

$$w_\lambda(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n^{1/k}} + \frac{1}{(n+1)^{1/k}} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^{1/k}} \quad (6.1.15)$$

$$\leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j^{1/k}} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1/k}}$$

bulunur. $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{1/k}}$ dizisi yakınsak olduğundan $\lim_{n,m \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_m) = 0$ olup x_n dizisi w -Cauhcy'dir. X_w^* tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi X_w^* üzerinde yakınsaktır, yani $u \in X_w^*$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, u) = 0$ olur. Son olarak T 'nin sürekliliği kullanılırsa

$$w_\lambda(u, Tu) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, Tx_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (6.1.16)$$

elde edilir. w_λ modüler metriği kesin olduğundan $Tu = u$ olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisinin limit noktası olan u elamanı T 'nin sabit noktası olup ispat biter.

(6.1.2)'de tanılanan 2. tip F_α -daralma şartı için de aşağıdaki teorem benzer şekilde ispat edilir.

Teorem 6.1.4. w kesin modüler metrik ve X_w^* de w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü 2. tip F_α -daralma şartını sağlasın. Ayrıca

$$(T1) \text{ Herhangi bir } x_0 \in X_w^* \text{ için } \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1,$$

$$(T2) \text{ } T \text{ dönüşümü } \alpha\text{-kabul edilebilir,}$$

$$(T3) \text{ } T \text{ sürekli}$$

olsun. Bu durumda T 'nin sabit noktası vardır.

İspat. Teorem 6.1.3'ün ispatındaki yol izlenerek yapılır.

Şimdi Teorem 6.1.3'teki elde edilen sonuçtan faydalananarak aşağıda verilen dönüşümün sabit noktası olduğu gösterilecektir.

Örnek 6.1.5. $X = [0, \infty)$ verilsin. Her $x, y \in X$ için w_λ modüler metriği de $w_\lambda(x, y) = \frac{|x-y|}{\lambda}$ şeklinde tanımlansın. T fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} \frac{x+3}{4}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases} \quad (6.1.17)$$

şeklinde verilsin. Ayrıca

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in [0,1] \\ 0, & x, y \notin [0,1] \end{cases} \quad (6.1.18)$$

olsun.

$x_0 = 0 \in [0,1]$ elemanı için $Tx_0 = \frac{3}{4} \in [0,1]$ olup α 'nın tanımından $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olup (T1) şartı sağlanır.

T 'nin α -kabul edilebilir olduğunu göstermek için öncelikle $\alpha(x, y) \geq 1$ verilsin. Bu durumda (6.1.18)'den $x, y \in [0,1]$ olmalıdır. (6.1.17)'den $x, y \in [0,1]$ için de $Tx, Ty \in [0,1]$ olduğu görülür. Tekrar α 'nın tanımından $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ olup T α -kabul edilebilir olur, yani (T2) şartı sağlanır. Yine (6.1.17)'den T sürekli olup (T3) şartı da sağlanır.

T 'nin (6.1.1)'deki 1. tip F_α -daralma şartını sağladığını göstermek yeterlidir. Burada $F(t) = \ln t \in \mathcal{F}$ ve $\psi(t) = \frac{1}{2}t \in \Psi$ alınacaktır. Öncelikle x veya $y \notin [0,1]$ olsun. Bu durumda $\alpha(x, y) = 0$ olup (6.1.1) şartı sağlanır. Şimdi $x, y \in [0,1]$ ve $Tx \neq Ty$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha(x, y)w_\lambda(Tx, Ty) &= 1. \left| \frac{Tx - Ty}{\lambda} \right| = \frac{1}{4} \left| \frac{x - y}{\lambda} \right| \leq e^{-0.6} \frac{1}{2} \left| \frac{x - y}{\lambda} \right| \quad (6.1.19) \\ &= e^{-0.6} \frac{1}{2} w_\lambda(x, y) = e^{-0.6} \psi(w_\lambda(x, y)) \\ &\leq e^{-0.6} \psi(\max \{w_\lambda(x, y), \\ &\quad \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)(1 + w_\lambda(x, Tx))}{1 + w_\lambda(Tx, Ty)}\}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\forall x, y \in [0,1]$ olmak üzere $\kappa = 0.6 > 0$, $F(t) = \ln t \in \mathcal{F}$ ve $\psi(t) = \frac{1}{2}t \in \Psi$ için T , 1. tip F_α -daralma şartını sağlar. Teorem 6.1.3'ten T 'nin sabit noktasının var olduğu garanti edilir. Gerçekten $T1 = 1$ ve $T2 = 2$ eşitlikleri sağlanıp $x = 1$ ve $x = 2$ noktaları T 'nin sabit noktalarıdır.

Teorem 6.1.3 ve 6.1.4'teki (T3) koşulu

(T3*) $u \in X_w^*$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, u) = 0$ ve $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartlarını sağlayan $\{x_n\}$ dizisinin her p için $\alpha(x_{n_p}, u) \geq 1$ olacak şekilde bir $\{x_{n_p}\}$ alt dizisi var olsun, şartı ile değiştirildiğinde yine T 'nin sabit noktası vardır.

Teorem 6.1.5. w kesin modüler metrik ve X_w^* de w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü 1. tip F_α -daralma olsun. Ayrıca (T1), (T2) ve (T3*) şartları sağlansın. Bu durumda T 'nin sabit noktası vardır.

İspat. Teorem 6.1.3'te inşa edilen $\{x_n\} \in X_w^*$ dizisini ele alınsın. Teorem 6.1.3'tin ispatında $\{x_n\}$ dizisinin w -Cauchy ve $u \in X_w^*$ noktasına w -yakınsak olduğu gösterildi.

$x_{n_p} = Tu$ olduğu kabul edelsin. Bu durumda limitin tekliğinden $u = Tu$ olup ispat biter. Dolayısıyla $\forall p \geq p_0$ için $x_{n_p} \neq Tu$ olacak şekilde $p_0 \in \mathbb{N}$ var olsun. Buradan her $p \geq p_0$ için $Tx_{n_{p-1}} \neq Tu$ olup $w_\lambda(Tx_{n_{p-1}}, Tu) > 0$ olur.

(6.1.1)'den

$$\begin{aligned} & \kappa + F\left(\alpha(x_{n_{p-1}}, u)w_\lambda(Tx_{n_{p-1}}, Tu)\right) \\ & \leq F\left(\psi\left(\max\left\{\begin{aligned} & w_\lambda(x_{n_{p-1}}, u), \frac{w_\lambda(x_{n_{p-1}}, Tx_{n_{p-1}})(1 + w_\lambda(u, Tu))}{1 + w_\lambda(x_{n_{p-1}}, u)} \\ & \frac{w_\lambda(u, Tx_{n_{p-1}})(1 + w_\lambda(u, Tx_{n_{p-1}}))}{1 + w_\lambda(Tx_{n_{p-1}}, Tu)} \end{aligned}\right\}\right)\right) \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

yazılabilir.

$\alpha(x_{n_{p-1}}, u) \geq 1$ ve F artan olduğundan

$$w_\lambda(Tx_{n_{p-1}}, Tu) \leq \quad (6.1.21)$$

$$\psi \left(\max \left\{ w_{\lambda}(x_{n_{p-1}}, u), \frac{w_{\lambda}(x_{n_{p-1}}, Tx_{n_{p-1}})(1 + w_{\lambda}(u, Tu))}{1 + w_{\lambda}(x_{n_{p-1}}, u)}, \frac{w_{\lambda}(u, Tx_{n_{p-1}})(1 + w_{\lambda}(u, Tx_{n_{p-1}}))}{1 + w_{\lambda}(Tx_{n_{p-1}}, Tu)} \right\} \right)$$

elde edilir. (6.1.21)'de limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda}(x_{n_p}, Tu) = 0$ sonucuna ulaşılır. Limitin tekliğinden $Tu = u$ bulunur.

Benzer yol izlenerek aşağıdaki teorem de ispatlanır.

Teorem 6.1.6. w kesin modüler metrik ve X_w^* de w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü 2. tip F_{α} -daralma olsun. Ayrıca (T1), (T2) ve (T3*) şartları sağlansın. Bu durumda T 'nin sabit noktası vardır.

Şimdiye kadar verilen teoremlerde sabit noktanın var olduğu gösterilmiştir. Aşağıdaki teoremler sabit noktanın tekliğini garanti etmektedir.

Teorem 6.1.7. w kesin modüler metrik ve X_w^* uzayı da w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü 1. tip F_{α} -daralma olsun. Ayrıca (T1), (T2) ve (T3) şartları sağlansın. Ayrıca $Fix(T)$, T 'nin sabit noktalarının kümesi olmak üzere eğer $\forall u, v \in Fix(T)$ için $\alpha(u, v) \geq 1$ ise T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. u ve v noktaları T 'nin birbirinden farklı iki sabit noktası olsun. Bu durumda $Tu = u$ ve $Tv = v$ yazılabilir. $u \neq v$ olduğundan $Tu \neq Tv$ ve $w_{\lambda}(Tu, Tv) > 0$ olur. (6.1.1)'de u ve v yazılırsa

$$\kappa + F(\alpha(u, v)w_{\lambda}(Tu, Tv)) \leq \quad (6.1.22)$$

$$F \left(\psi \left(\max \left\{ w_{\lambda}(u, v), \frac{w_{\lambda}(u, Tu)(1 + w_{\lambda}(v, Tv))}{1 + w_{\lambda}(u, v)}, \frac{w_{\lambda}(v, Tu)(1 + w_{\lambda}(v, Tu))}{1 + w_{\lambda}(Tu, Tv)} \right\} \right) \right),$$

elde edilir. (6.1.22) ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} \kappa + F(\alpha(u, v)w_{\lambda}(Tu, Tv)) &\leq F(\psi(w_{\lambda}(u, v))) \\ &\leq F(w_{\lambda}(u, v)) \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

bulunur. $u, v \in \text{Fix}(T)$ olduğundan $\alpha(u, v) \geq 1$ olur. F artan olduğundan (6.1.23)'ten

$$\kappa + F(w_\lambda(u, v)) \leq \kappa + F(\alpha(u, v)w_\lambda(Tu, Tv)) \quad (6.1.24)$$

yazılır. (6.1.23) ve (6.1.24)'ten

$$\kappa + F(w_\lambda(u, v)) \leq F(w_\lambda(u, v)) \quad (6.1.25)$$

olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T 'nin sabit noktası yoktur.

Teorem 6.1.8. w kesin modüler metrik ve X_w^* uzayı da w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü 2. tip F_α -daralma olsun. Ayrıca (T1), (T2) ve (T3) şartları sağlansın. Ayrıca $\text{Fix}(T)$, T 'nin sabit noktalarının kümesi olmak üzere eğer $\forall u, v \in \text{Fix}(T)$ için $\alpha(u, v) \geq 1$ ise bu durumda T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. Teorem 6.1.7'nin ispatındaki yol izlenerek ispat yapılır.

Örnek 6.1.9. $X = [0, \infty)$ verilsin. Her $x, y \in X$ için $w_\lambda(x, y) = \frac{|x-y|}{\lambda}$ şeklinde tanımlansın. T fonksiyonu

$$Tx = \begin{cases} \frac{x^2+x}{4}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases} \quad (6.1.26)$$

şeklinde verilsin. Ayrıca

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in [0, 1] \\ 0, & x, y \notin [0, 1] \end{cases} \quad (6.1.27)$$

olsun.

$x_0 = \frac{1}{2} \in [0, 1]$ elemanı için $Tx_0 = \frac{3}{16} \in [0, 1]$ olur. α 'nın tanımından $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ elde edilir.

T 'nin α -kabul edilebilir olduğunu göstermek için öncelikle $\alpha(x, y) \geq 1$ verilsin. Bu durumda α 'nın tanımından $x, y \in [0, 1]$ olmalıdır. (6.1.26)'dan $x, y \in [0, 1]$ için de $Tx, Ty \in [0, 1]$ olduğu görülür. Tekrar (6.1.27)'den $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ olup T α -kabul edilebilirdir. Yine (6.1.26)'dan T 'nin sürekli olduğu görülmektedir.

$F(t) = \ln t \in \mathcal{F}$ ve $\psi(t) = \frac{3}{2}t \in \Psi$ olmak üzere T 'nin 1. tip F_α -daralma şartını sağladığı gösterilecektir.

Öncelikle $x \notin [0,1]$ veya $y \notin [0,1]$ olsun. Bu durumda $\alpha(x, y) = 0$ olup (6.1.1) sağlanır. Şimdi $x, y \in [0,1]$ ve $Tx \neq Ty$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \alpha(x, y)w_\lambda(Tx, Ty) &= \left| \frac{Tx - Ty}{\lambda} \right| = \frac{1}{4} \left| \frac{(x^2 + x) - (y^2 + y)}{\lambda} \right| \\
 &\leq \frac{1}{4} \left| \frac{(x^2 - y^2) + (x - y)}{\lambda} \right| \\
 &\leq \frac{1}{4\lambda} (|(x - y)(x + y)| + |x - y|) \\
 &\leq \frac{1}{4\lambda} (|x - y||x + y| + |x - y|) \\
 &\leq \frac{1}{4\lambda} |x - y|(|x + y| + 1) \\
 &\leq \frac{3}{4} \left| \frac{x - y}{\lambda} \right| \leq e^{-0.6} \frac{3}{2} w_\lambda(x, y) \\
 &\leq e^{-0.6} \psi(w_\lambda(x, y))
 \end{aligned} \tag{6.1.28}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\forall x, y \in [0,1]$ olmak üzere $\kappa = 0.6 > 0$, $F(t) = \ln t \in \mathcal{F}$ ve $\psi(t) = \frac{3}{2}t \in \Psi$ için T dönüşümü 1. tip F_α -daralma şartını sağlar.

$\forall u, v \in \text{Fix}(T)$ için $\alpha(u, v) \geq 1$ olduğunu gösterilecektir. $u, v \in \text{Fix}(T)$ olsun. Burada $x > 1$ için $Tx = \frac{1}{2}$ olduğundan T 'nin $x > 1$ için sabit noktası olamaz. Dolayısıyla $u, v \in [0,1]$ olmalıdır. Bu durumda α 'nın tanımından $\alpha(u, v) \geq 1$ elde edilir. Teorem 6.1.7'den T 'nin bir tek sabit noktasının var olduğu sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak T 'nin tek bir sabit noktası vardır. Gerçekten $T0 = 0$ olup T 'nin tek sabit noktası $x = 0$ noktasıdır.

Yukarıdaki teoremlerden yararlanarak bazı sonuçlar verilecektir.

Teorem 6.1.10. w kesin modüler metrik ve X_w^* de w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\psi \in \Psi$, $F \in \mathcal{F}$ ve $\kappa > 0$ olmak üzere her $x, y \in X_w^*$ için

$$w_\lambda(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tag{6.1.29}$$

$$\kappa + F(w_\lambda(Tx, Ty)) \leq F(\psi(\max \{w_\lambda(x, y),$$

$$\frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(x, y)} \}}))$$

şartını sağlasın. Bu durumda T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. Teorem 6.1.7'de $\alpha(x, y) = 1$ alınırsa ispat biter.

Teorem 6.1.11. w kesin modüler metrik ve X_w^* de w -tam modüler metrik uzay olsun.

$T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\psi \in \Psi$, $F \in \mathcal{F}$ ve $\kappa > 0$ olmak üzere her $x, y \in X_w^*$ için

$$w_\lambda(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \quad (6.1.30)$$

$$\kappa + F(\alpha(x, y)w_\lambda(Tx, Ty)) \leq F(\psi(\max \{w_\lambda(x, y),$$

$$\frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(x, Tx)}{1 + w_\lambda(Tx, Ty)},$$

$$\frac{w_\lambda(y, Ty)w_\lambda(y, Tx)}{1 + w_\lambda(y, Tx) + w_\lambda(x, Ty)} \})))$$

şartını sağlasın. Bu durumda T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

İspat. Teorem 6.1.8'de $\alpha(x, y) = 1$ alınırsa ispat biter.

Şimdi yukarıdaki sonuçlar kullanılarak kısmi sıralı modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilecektir. Öncelikle aşağıdaki tanımlar verilecektir.

Tanım 6.1.12. $(X_w^*, w, \preceq)$ kısmi sıralı modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü her $x_1, x_2 \in X_w^*$ için $x_1 \preceq x_2 \Rightarrow Tx_1 \preceq Tx_2$ şartını sağlarsa $\preceq$ sıralama bağıntısına göre azalmayandır denir. Ayrıca X_w^* üzerinde tanımlı herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi $x_n \preceq x_{n+1}$ şartını sağlarsa $\preceq$ sıralama bağıntısına göre azalmayandır denir.

Tanım 6.1.13. $(X_w^*, w, \preceq)$ kısmi sıralı modüler metrik uzay olsun. X_w^* üzerinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin her $k > 0$ için $x_{n_k} \preceq x$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi varsa $(X_w^*, \preceq)$ uzayına düzenlidir denir.

Teorem 6.1.14. w kesin modüler metrik olmak üzere $(X_w^*, w, \preceq)$ kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\preceq$ sıralama bağıntısına göre azalmayan olsun. Ayrıca $x \preceq y$ olmak üzere (6.1.29) şartı sağlansın. Eğer aşağıdaki şartlar

$$(K1) \text{ Herhangi bir } x_0 \in X_w^* \text{ için } x_0 \preceq Tx_0,$$

(K2) Ya T süreklidir,

(K3) Ya da $(X_w^*, \leq)$ düzenlidir

sağlanırsa bu durumda T 'nin sabit noktası vardır.

İspat. Öncelikle

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \text{ veya } y \leq x \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (6.1.30)$$

şeklinde tanımlansın. $x \leq y$ olduğundan $\alpha(x, y) = 1$ olur. $w_\lambda(Tx, Ty) \neq 0$ olmak üzere (6.1.29) şartı sağlandığından T dönüşümü 1. tip F_α -daralma şartını sağlar.

$x_0 \leq Tx_0$ olduğundan $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olur. Bunun yanında her $x, y \in X_w^*$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olsun. (6.1.30)'dan $x \leq y$ veya $y \leq x$ olup $Tx \leq Ty$ veya $Ty \leq Tx$ olur. Buradan da $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ elde edilip T α -kabul edilebilirdir.

T sürekli olsun. Bu durumda Teorem 6.1.3'ten T 'nin sabit noktasının varlığı garanti edilir.

$(X_w^*, \leq)$ düzenli olsun. X_w^* uzayında $\lim_{n \rightarrow \infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$ olacak şekilde azalmayan $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $n > 0$ için $x_n \leq x_{n+1}$ olduğundan $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olur. $(X_w^*, \leq)$ düzenli olduğundan her $k > 0$ için $x_{n_k} \leq x$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. $x_{n_k} \leq x$ ise $\alpha(x_{n_k}, x) \geq 1$ olur. Burada Teorem 6.1.5'ten T 'nin sabit noktasının var olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 6.1.14'ün ispatındaki yol izlenerek aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 6.1.15. w kesin modüler metrik olmak üzere $(X_w^*, w, \leq)$ kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzay olsun. $T: X_w^* \rightarrow X_w^*$ dönüşümü $\leq$ sıralama bağıntısına göre azalmayan olsun. Ayrıca $x \leq y$ olmak üzere (6.1.25) şartı sağlansın. Eğer aşağıdaki şartlar

(K1) Herhangi bir $x_0 \in X_w^*$ için $x_0 \leq Tx_0$,

(K2) Ya T süreklidir,

(K3) Ya da $(X_w^*, \leq)$ düzenlidir

sağlanırsa bu durumda T 'nin sabit noktası vardır.

6.2. Modüler Metrik Uzaylarda F_α -Daralma Şartları için Sabit Nokta Teoremlerinin İntegral Denklemlere Uygulamaları

Bu bölümde F_α -daralma şartı için verilen sabit nokta sonuçlarından faydalanılarak ele alınan bir integral denkleminin çözümünün var ve tek olduğu gösterilecektir.

Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$g(t) = K(t) + \int_a^b M(t, \zeta) Y(\zeta, g(\zeta)) d\zeta, \quad t \in [a, b] \quad (6.2.1)$$

integral denklemi ele alınsın. Burada $Y: [a, b] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve azalmayan, $K: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $M: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli fonksiyonlardır.

Burada (6.2.1)'de tanımlanan integral denklemi $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi olan $X = C([a, b])$ üzerinde ele alınacaktır. Dolayısıyla aşağıdaki modüler metrik uzay üzerinde çalışılacaktır:

$$X_w = X_w(g_0) = \left\{ g \in C([a, b]): \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_\lambda(g, g_0) = 0 \right\}. \quad (6.2.2)$$

Bu uzayda kesin konveks olan $w_\lambda(g, f) = \frac{d(g, f)}{\lambda}$ modüler metriği alınacaktır. Burada $d(g(t), f(t)) = \max_{t \in [a, b]} |g(t) - f(t)|$ olarak alınırsa (6.2.2)'de verilen X_w modüler metrik uzayı w -tam olur. Yine bu uzayda kısmi sıralama $g, f \in C([a, b])$ ve $\forall t \in [a, b]$ olmak üzere $g \leq f \Rightarrow g(t) \leq f(t)$ şeklinde tanımlanırsa $(X_w, \leq)$ uzayı $\leq$ sıralama bağıntısına göre kısmi sıralı w -tam modüler metrik uzay olur.

$H: C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ dönüşümü

$$Hg(t) = K(t) + \int_a^b M(t, \zeta) Y(\zeta, g(\zeta)) d\zeta, \quad t \in [a, b], \quad (6.2.3)$$

şeklinde tanımlansın. $g(t)$ fonksiyonu (6.2.3)'deki $Hg(t)$ dönüşümünün sabit noktası ise (6.2.1)'deki integral denklemin çözümü olduğu açıktır. Dolayısıyla H dönüşümünün Teorem 6.1.14'teki şartları sağladığı gösterilirse (6.2.1)'de tanımlanan integral denklemin çözümünün var olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 6.2.1. Aşağıda verilen

(T1) $Y(\zeta, g(\zeta))$ ikinci değişkene göre azalmayandır.

(T2) $\kappa > 0$ ve $A \in (0,1)$ olsun. Ayrıca $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ ve $z: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda her $g, f \in X$ için $\alpha(g, f) \geq 1$ olmak üzere her $\zeta \in [a, b]$ için

$$|Y(\zeta, g(\zeta)) - Y(\zeta, f(\zeta))| \leq z(g, f)|g - f|, \quad (6.2.4)$$

$$\max_{t \in [a, b]} \int_a^b M(t, \zeta) z(g, f) d\zeta \leq Ae^{-\kappa} \quad (6.2.5)$$

olsun.

(T3) $g_0(t) \leq K(t) + \int_a^b M(t, \zeta) Y(\zeta, g(\zeta)) d\zeta$ şartını sağlayacak şekilde bir $g_0 \in X$ vardır.

şartları sağlansın. Bu durumda H 'nin $X = C([a, b])$ üzerinde sabit noktası vardır.

İspat. Öncelikle $\alpha: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(g, f) = \begin{cases} 1, & g \preceq f \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (6.2.6)$$

şeklinde tanımlansın.

$g \preceq f$ olacak şekilde $g, f \in C([a, b])$ verilsin. $g \preceq f$ ise $\forall t \in [a, b]$ için $g(t) \leq f(t)$ olur. $Y(\zeta, g(\zeta))$ ikinci değişkene göre azalmayan olduğundan $Hg \leq Hf$ olur. Buradan H dönüşümünün azalmayan olduğu elde edilir. Ayrıca, $Hg \neq Hf$ olduğundan $w_\lambda(Hg, Hf) > 0$ sağlanır.

$g \preceq f$ olduğundan $\alpha(g, f) \geq 1$ olur. Bu durumda (T2)'deki (6.2.4) şartından

$$w_\lambda(Hg, Hf) = \frac{d(Hg, Hf)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \max_{t \in [a, b]} |Hg(t) - Hf(t)| \quad (6.2.7)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |M(t, \zeta)| |Y(\zeta, g(\zeta)) - Y(\zeta, f(\zeta))| d\zeta$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \max_{t \in [a, b]} \int_a^b M(t, \zeta) z(g, f) |g - f| d\zeta$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \max_{t \in [a, b]} |g - f| \max_{t \in [a, b]} \int_a^b M(t, \zeta) z(g, f) d\zeta$$

$$\leq w_\lambda(g, f) \max_{t \in [a, b]} \int_a^b M(t, \zeta) z(g, f) d\zeta$$

olur. Burada da (6.2.5)'ten

$$w_\lambda(Hg, Hf) \leq w_\lambda(g, f)Ae^{-\kappa} \quad (6.2.8)$$

elde edilir. Böylece $g \leq f$ ve $Hg \neq Hf$ olacak şekilde her $g, f \in C([a, b])$ için $A \in (0,1)$ ve $\psi(x) = Ax$ olmak üzere

$$\alpha(g, f)w_\lambda(Hg, Hf) \leq e^{-\kappa}\psi(w_\lambda(g, f)) \quad (6.2.9)$$

$$\leq e^{-\kappa}\psi\left(\max\left\{w_\lambda(x, y), \frac{w_\lambda(x, Tx)(1 + w_\lambda(y, Ty))}{1 + w_\lambda(x, y)}, \frac{w_\lambda(y, Tx)(1 + w_\lambda(y, Tx))}{1 + w_\lambda(Tx, Ty)}\right\}\right)$$

sağlanır. Dolayısıyla H dönüşümü $F(x) = \ln x$ olmak üzere 1. tip F_α -daralma şartını sağlar. Ayrıca, (6.2.3)'den H sürekli olduğu görülür.

$g \leq f$ ise $Hg \leq Hf$ olduğundan $\alpha(Hg, Hf) \geq 1$ olur. Yani, H dönüşümü α -kabul edilebilirdir.

(T3)'ten $g_0(t) \leq K(t) + \int_a^b M(t, \zeta)Y(\zeta, g(\zeta)) d\zeta$ olacak şekilde bir $g_0 \in X$ var olduğu biliniyor. Dolayısıyla Teorem 6.1.14'teki bütün şartlar sağlanır. Sonuç olarak H 'nin sabit noktası vardır, yani $g \in C([a, b])$ olmak üzere (6.2.1)'deki integral denkleminin çözümüdür.

Örnek 6.2.2. $X = C([0,1])$ ve $w_\lambda(g, f) = \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{g(t)-f(t)}{\lambda} \right|$ olsun. Her $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$g(t) = 1 + \frac{t}{2} + \int_0^1 \frac{t}{\zeta+1} \frac{g(\zeta)}{2} d\zeta \quad (6.2.10)$$

şeklinde tanımlanan integral denklemi ele alınacaktır. Burada $K(t) = 1 + \frac{t}{2}$, $M(t, \zeta) = \frac{t}{\zeta+1}$ ve $Y(\zeta, g(\zeta)) = \frac{g(\zeta)}{2}$ şeklinde verilmiş fonksiyonlardır.

H operatörü $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$Hg(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{\zeta+1} g(\zeta) d\zeta \quad (6.2.11)$$

şeklinde tanımlansın. α dönüşümü de (6.2.6)'daki gibi verilsin.

Teorem 6.2.1'deki şartların sağlandığı gösterilecektir. $g \preccurlyeq f$ için $Y(\zeta, g(\zeta)) \leq Y(\zeta, f(\zeta))$ olup $Y(\zeta, g(\zeta))$ ikinci değişkene göre azalmayan olduğu kolaylıkla görülür. Yani, (T1) şartı sağlanır.

$g \preccurlyeq f$ ise $\alpha(g, f) \geq 1$ olur. Ayrıca her $t \in [0, 1]$ için $z(g, f) = \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$|Y(\zeta, g(\zeta)) - Y(\zeta, f(\zeta))| \leq \frac{1}{2} |g - f| = z(g, f) |g - f| \quad (6.2.12)$$

sağlanır. Dahası

$$\max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{t}{\zeta+1} d\zeta \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0, 1]} \{t\} \int_0^1 \frac{1}{\zeta+1} d\zeta \leq \frac{1}{2} \ln 2 \leq e^{-0.6} \ln 2 \quad (6.2.13)$$

elde edilir. Diğer bir deyişle, $\kappa = 0.6 > 0$, $A = \ln 2 \in (0, 1)$ için (T2) şartı sağlanır.

$g_0(t) = 0 \in C([0, 1])$ vardır öyle ki $g_0(t) = 0 \leq 1 + \frac{t}{2} + \int_0^1 \frac{t}{\zeta+1} \frac{g(\zeta)}{2} d\zeta$ olup (T3)

şartı da sağlanır. Dolayısıyla Teorem 6.2.1'deki bütün şartlar sağlanmış olur, yani (6.2.11)'de tanımlanan H dönüşümünün $C([0, 1])$ uzayında sabit noktası vardır.

Gerçekten, $g(t) = t + 1$ fonksiyonu H 'nin sabit noktasıdır, yani $g(t) = t + 1 \in C([0, 1])$ fonksiyonu (6.2.9)'da verilen integral denkleminin çözümüdür.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölüm tezde ele alınan konuları ve bulunan sonuçları özetlemektedir. Tezin birinci ve ikinci bölümünde metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri hakkında literatür özeti verilmiştir. Üçüncü bölümde ise modüler metrik uzaylarla ilgili bilgiler verilmiş ve ayrıca modüler metrik uzaylardaki sabit nokta teoremleri ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde metrik uzaylarda verilen genelleştirilmiş C -şartı modüler metrik uzaylara genişletilerek bu uzaylarda bu tarz dönüşümler için sabit nokta teoremleri ifade edilip ispatlanmıştır. Burada elde edilen sonuçlarla birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler için anti-periyodik sınır değer probleminin ve başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde bir modüler metrik uzaylarda tanımlanan 1. tip ve 2. tip genelleştirilmiş C -şartları için kısmi sıralı modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bunun yanında bu teoremlerden elde edilen sonuçları pekiştirmek için bazı özel örnekler verilmiştir. Bu örneklerde verilen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği ispatlanarak grafik üzerinde görsel olarak gösterilmiştir. Son olarak da buradaki teoremlerden elde edilen bulgular kullanılarak ele alınan bir integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde metrik uzaylarda tanımlanan F -daralma şartı modüler metrik uzaylara α -kabul edilebilir dönüşümler kullanılarak genelleştirilmiştir. Bu çalışmada tanımlanan F_α -daralma şartları 1. tip ve 2. tip F_α -daralma şartı olarak adlandırılmıştır. 1. tip ve 2. tip F_α -daralma şartların her biri için sabit nokta teoremleri ifade edilip ispatları yapılmıştır. Bunun yanında birçok sonuç elde edilmiştir. Örnek olarak ele alınan dönüşümlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Daha sonra genel formda verilmiş bir integral denklemin çözümünün varlığının ispatlanmıştır. Son olarak ise özel halde verilmiş integral denklemin çözümünün var olduğu gösterilip bu var olan çözüm belirtilmiştir.

Bu tezde alışılmış metrik uzaylarda tanımlanmış C -şartı ve F -daralma şartı gibi bazı özel şartlar modüler metrik uzaylara genişletilmiş hallerini tanımlanamıştır. Bu şartları sağlayan dönüşümler için bahsi geçen uzaylarda sabit nokta teoremleri ve bazı

sonuçları içermektedir. Bu tezin dört, beş ve altıncı bölümünde ifade ve ispat edilen teoremler bu tez çalışmasında ilk kez kullanılmış olup bu tez çalışması orijinal sonuçlar barındırmaktadır.

İleriye dönük çalışma olarak, burada verilen tanımlardan yararlanılarak alışılmış metrik uzaylarda var olan farklı şartlar modüler metrik uzaylara genişletilebilir. Bu tip şartları sağlayan dönüşümler için modüler metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri verilip bazı sonuçlar ortaya konulabilir. Bu sonuçlar kullanılarak bazı uygulamalar verilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1), 97-115. doi.org/10.1007/BF01456931
- [2] Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181. <http://eudml.org/doc/213289>
- [3] Lipschitz, R. (1877). Lehrbuch der analysis, Bonn, M. Cohen & sohn F. Cohen.
- [4] Berinde, V. (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Verlag.
- [5] Kannan, R. (1969). Some results on fixed points II. *The American Mathematical Monthly*, 76, 405-408. <https://doi.org/10.2307/2316437>
- [6] Chatterjea, S. (1972). Fixed point theorem. *Comptes Rendus de l 'Academie bulgare des Sciences*, 25, 727-730.
- [7] Ćirić, L. (1971). Generalized contractions and fixed-point theorems. *Publications de l'Institut Mathématique*, 12, 19-26. eudml.org/doc/258436
- [8] Hardy, G. E. ve Rogers, T. D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(2), 201-206. <https://doi.org/10.4153/CMB-1973-036-0>
- [9] Berinde, V. (2003). On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, *Carpathian Journal of Mathematics*, 19(1) ,722-732.
- [10] Babu, G.V.R., Sandhya, M.L. ve Kameswari, M.V.R. (2008). A note on a fixed point theorem of Berinde weak contractions, *Journal of Mathematics*, 24(1), 8-12.
- [11] Suzuki, T. (2008). A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136, 1861-1869.
- [12] Popescu, O. (2011). Two generalizations of some fixed point theorems. *Computers and hematics with Applications*, 62, 3912-3919. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.09.044>
- [13] Berinde, V. (2002). Iterative approximation of fixed points. Berlin: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72234-2>
- [14] Berinde, V. (2004) Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, *Nonlinear Analysis Forum*, 43-54.
- [15] Gupta, V., Mani, N. ve Kaushik, A. (2017). Fixed point theorems satisfying C_ψ^β -condition and application to boundary value problem. *Functional Analysis: Theory, Methods & Applications*, 3(1), 26-334.

- [16] Gupta, V., Mani, N. ve Sharma, N. (2019). Fixed point theorems for weak (ψ, β) -mappings satisfying generalized C-condition and its application to boundary value problem. *Computational and Mathematical Methods*, 1(4), 1041-1053. <https://doi.org/10.1002/cmm4.1041>
- [17] Wardowski, D. (2012). Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 94. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-94>
- [18] Piri, H. ve Kumam, P. (2014). Some fixed point theorems concerning F -contraction in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 210. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-210>
- [19] Shukla, S. ve Radenovic, S. (2013). Some common fixed point theorems for F -contraction type mappings in 0-complete partial metric space. *Journal of Mathematics*, 2013, 7. <https://doi.org/10.1155/2013/878730>
- [20] Olgun, M., Biçer, Ö., Alyıldız, T. ve Altun, İ. (2019). A related fixed point theorem for F -contractions on two metric spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*, 48, 150-156. <https://doi.org/10.15672/HJMS.2017.517>
- [21] Öztürk, A. (2019). A fixed point theorem for mappings with an F -contractive iterate. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 4(3), 231-236. <https://doi.org/10.31197/atnaa.644325>
- [22] Luambano, S., Kumar, S. ve Kakiko, G. (2019). Fixed point theorem for F -contraction mappings in partial metric spaces. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 40, 183-188. <https://doi.org/10.1134/S1995080219020094>
- [23] Debnath, P. (2022). A new extension of Kannan's fixed point theorem via F -contraction with application to integral equations. *Asian-European Journal of Mathematics*, 15(7), 2250123. doi.10.1142/S1793557122501236
- [24] Popescu, O. ve Stan, G. (2020). Two Fixed Point Theorems Concerning F -Contraction in Complete Metric Spaces. *Symmetry*, 12(1), 58. <https://doi.org/10.3390/sym12010058>
- [25] Padcharoen, A., Gopal, D., Chaipunya, P. ve Kumam, P. (2016). Fixed point and periodic point results for α -type F -contractions in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2016(39), 1-12. <https://doi.org/10.1186/s13663-016-0525-4>
- [26] Samet, B., Vetro, C. ve Vetro, P. (2012). Fixed point theorems for α - ψ -contractive type mappings. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(4), 2154-2165. <https://doi.org/10.1016/j.na.2011.10.014>
- [27] Aydi, H., Karapinar, E. ve Yazidi, H. (2017). Modified F -contractions via α -admissible mappings and application to integral equations. *Filomat*, 31(5), 1141-1148. <https://doi.org/10.2298/FIL1705141A>
- [28] Nakano, H. (1950). *Modulared semi-ordered linear spaces*, Tokyo: Maruzen Company.
- [29] Musielak, J. ve Orlicz, W. (1959). On modular spaces. *Studia Mathematica*, 18(1), 49-65. <http://eudml.org/doc/216946>.

- [30] Musielak, J. (1983). Orlicz spaces and modular spaces. Berlin: Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0072210>
- [31] Khamsi, M. A., Kozłowski, W. M. ve Reich, S. (1990). Fixed point theory in modular function spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 14(11), 935-953. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(90\)90111-S](https://doi.org/10.1016/0362-546X(90)90111-S)
- [32] Chistyakov, V. (2010). Modular metric spaces, I: Basic concepts. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(1), 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.057>
- [33] Chistyakov, V. (2010). Modular metric spaces, II: Application to superposition operators. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 72(1), 15-30. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.018>
- [34] Chistyakov, V. (2011). A fixed point theorem for contractions in modular metric spaces. arXiv:1112.5561, 1-31.
- [35] Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W. ve Kumam, P. (2011). Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011(1), 1-9. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2011-93>
- [36] Chaipunya, P., Cho, Y. J. ve Kumam, P. (2012). Geraghty-type theorems in modular metric spaces with an application to partial differential equation. *Advances in Difference Equations*, 2012(1), 1-12. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-83>
- [37] Kilinc, E. ve Alaca, C. (2014). A fixed point theorem in modular metric spaces. *Advances in Fixed Point Theory*, 2014(4), 199-206. <https://scik.org/index.php/afpt/article/view/1443>
- [38] Chaipunya, P. ve Kumam, P. (2015). An observation on set-valued contraction mappings in modular metric spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 13(1), 9-17.
- [39] Jleli M., Karapinar, E. ve Samet, B. (2013). A best proximity point result in modular spaces with Fatou property. *Topological Methods in Analysis*, 2013, 1-4. <https://doi.org/10.1155/2013/329451>
- [40] Öztürk, M., Abbas, M. ve Girgin, E. (2016) Common fixed point results of a pair of generalized (ψ, ϕ) -contraction mappings in modular spaces. *Fixed Point Theory Application*, 19(2016). <https://doi.org/10.1186/s13663-016-0503-x>.
- [41] Padcharoen, A., Kumam, P. ve Gopal, D. (2017). Coincidence and periodic point results in a modular metric spaces endowed with a graph and applications. *Creative Mathematics and Informatics*, 95, 95-104. <https://doi.org/10.37193/CMI.2017.01.13>
- [42] Aksoy, U., Karapinar, E. ve Erhan, I. M. (2017). Fixed Point Theorems in Complete Modular Metric Spaces and an Application to Anti-periodic Boundary Value Problems. *Filomat*, 31(17), 5475-5488. <https://doi.org/10.2298/FIL1717475A>
- [43] Aksoy, U., Karapinar, E., Erhan, I. M. ve Rakocevic, V. (2018). Meir-Keeler Type Contractions on Modular Metric Spaces. *Filomat*, 32(10), 3697-3707, <https://doi.org/10.2298/FIL1810697A>

- [44] Turkoglu, D. ve Manav, N. (2018). Fixed point theorems in a new type of modular metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2018(25), 1-10. <https://doi.org/10.1186/s13663-018-0650-3>
- [45] Mutlu, A., Ozkan, K. ve Gürdal, U. (2018). A New Fixed Point Theorem in Modular Metric Spaces. *International Journal of Analysis and Applications*, 16(4), 472-483. <https://doi.org/10.28924/2291-8639-16-2018-472>
- [46] Mutlu, A., Ozkan, K. ve Gürdal, U. (2018). Coupled fixed point theorem in partially ordered modular metric spaces and its an application. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 25(2), 207-216.
- [47] Girgin E. ve Öztürk, M. (2023). Modified Suzuki-Simulation Type Contractive Mapping in Non-Archimedean Quasi Modular Metric Spaces and Application to Graph Theory. *Mathematics*, 7(9), 769-783. <https://doi.org/10.3390/math7090769>
- [48] Büyükkaya, A. ve Öztürk, M. (2023). Some Fixed Point Results for Sehgal-Proinov Type Contractions in Modular b -Metric Spaces. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 31(3), 61-86. <https://doi.org/10.2478/auom-2023-0032>
- [49] Chistyakov, V. (2004). Selections of bounded variations. *Journal of Applied Analysis*, 10, 1-82. <https://doi.org/10.1515/JAA.2004.1>

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Hami GÜNDOĞDU

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi / Matematik Bölümü
- **Yükseklisans** : 2016, Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Uygulamalı Matematik

MESLEKİ DENEYİM:

- 2012-2013 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak çalıştı.
- 2015 yılından itibaren Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Gündoğdu, H, Öztürk, M. ve Gözükcı, Ö. F. 2023. Fixed point theorems of new generalized C -conditions for (ψ, γ) –mappings in modular metric spaces and its applications, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 28(5), 949-970.
- Gündoğdu, H, Öztürk, M. ve Gözükcı, Ö. F. Novel fixed point theorems in partially ordered modular metric spaces with applications, *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, Submitted.
- Gündoğdu, H, Öztürk, M. ve Gözükcı, Ö. F. Some fixed point results for generalized modified F_α -contractions in modular metric spaces and its applications, *Miskolc Mathematical Notes*, Submitted.

DİĞER ESERLER:

- Gündoğdu, H. ve Gözükcı, F.Ö. 2017. Solving Benjamin-Bona-Mahony equation by using the sn-ns method and the tanh-coth method, *Mathematica Moravica*, 21(1):95-103. doi: 10.5937/MatMor1701095G

- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2017. Solving Nonlinear Partial Differential Equations By Using Adomian Decomposition Method, Modified Decomposition Method And Laplace Decomposition Method, *MJEN*, 5(1):1-13.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2017. Obtaining the solution of Benney-Luke Equation by Laplace and adomian decomposition methods, *SAUJS*, 21(6):1524-8.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2018. Applications of the decomposition methods to some nonlinear partial differential equations, *NTMSCI*, 6(3), 57-66.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2019. Double Laplace Decomposition Method and Exact Solutions of Hirota, Schrödinger and Complex mKdV Equations, *Konuralp J. Math*, 7(1):7-15.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2019. On different kinds of solutions to simplified modified form of a Camassa-Holm equation, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 18(2):31-40.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2021. On the new type of solutions to Benney-Luke equation, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 39(5), 103-111.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2021. On The Existence Conditions for New Kinds of Solutions to (3+1)-Dimensional mKDV and mBBM Equations, *SAUJS*, 25(1):141-9.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2021. Cubic nonlinear fractional Schrödinger equation with conformable derivative and its new travelling wave solutions. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 20(2), 29-41.
- Gündoğdu, H. ve Gözükızıl, F.Ö. 2022. On the approximate numerical solutions of fractional heat equation with heat source and heat loss, *Thermal Science*, 26(5), 3773-3786. doi: 10.2298/TSCI210713321G.