



**BERNSTEIN OPERATÖRLERİNİN MODİFİKASYONLARININ
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

Mehmet KAĞIZMAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mehmet KAĞIZMAN

11/06/2024

BERNSTEİN OPERATÖRLERİNİN MODİFİKASYONLARININ YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Mehmet KAĞIZMAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu tezde Cheney Sharma ve Cheney Sharma Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Birinci bölümü giriş olmak üzere, tez toplam altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tez içerisinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bir ve iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri üzerinde durulmuş, nasıl oluşturuldukları verilerek bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde ağırlıklı uzaylarda Cheney Sharma Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde ayrıca iki değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri oluşturularak yaklaşım özelliklerine bakılmıştır. Beşinci bölümde ise üçüncü ve dördüncü bölümde bahsi geçen operatörlerin bazı örnek fonksiyonlara yaklaşımları bilgisayar programına çizdirilen grafikler yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak altıncı bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Lineer pozitif operatörler, süreklilik modülü, ağırlıklı yaklaşım, Cheney Sharma operatörleri
Sayfa Adedi : 117
Danışman : Prof. Dr. Mediha ÖRKÇÜ

ON APPROXIMATION PROPERTIES OF MODIFICATION BERNSTEIN
OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Mehmet KAĞIZMAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2024

ABSTRACT

In this thesis, the properties of Cheney Sharma and Cheney Sharma Chlodowsky operators are discussed. The thesis consists of six chapters in total, the first part of which is the introduction. In the second chapter, some basic definitions and theorems used in the thesis are given. The third chapter focuses on one- and two-variable Cheney Sharma operators, how they were created is given and some approach features are examined. In the fourth chapter, the properties of Cheney Sharma Chlodowsky operators are examined in weighted spaces. Furthermore, in the fourth chapter, two-variable Cheney Sharma Chlodowsky operators are created and their properties are examined. In the fifth chapter, the approaches of the operators mentioned in the third and fourth chapters to some sample functions are shown with the help of graphics drawn by the computer program. Finally, the sixth chapter is devoted to the conclusion.

Science Code : 20406

Key Words : Linear positive operators, modulus of continuity, weighted approximation, Cheney Sharma operators

Page Number : 117

Supervisor : Prof. Dr. Mediha ÖRKÇÜ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince bilgi ve tecrübesiyle bana rehberlik eden, sorularıma sıkılmadan yanıt verip beni aydınlatan ve beni her zaman cesaretlendirip teşvik eden danışman hocam sayın Prof. Dr. Mediha ÖRKÜ'ye, ilkokuldan bugüne bana emek vermiş tüm öğretmenlerime, manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme ve sevgi, sabır ve anlayışla her koşulda yanımda olan sevgili eşim Naime KAĞIZMAN'a teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Temel Kavramlar.....	3
2.2. Lineer Pozitif Operatörler	5
3. CHENEY SHARMA OPERATÖRLERİ.....	9
3.1. Tek Değişkenli Cheney Sharma Operatörleri.....	9
3.2. İki Değişkenli Cheney Sharma Operatörleri.....	18
3.2.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	18
3.2.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	30
4. CHENEY SHARMA CHLODOWSKY OPERATÖRLERİ.....	39
4.1. Tek Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri.....	39
4.2. İki Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri.....	62
3.2.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	62
3.2.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	71
5. UYGULAMALAR	97
5.1. Tek Değişkenli Cheney Sharma Operatörleri.....	97

Sayfa

5.2. İki Değişkenli Cheney Sharma Operatörleri.....	98
5.2.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	99
5.2.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	102
5.3. Tek Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri.....	105
5.4. İki Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri.....	106
5.4.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	107
5.4.2. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri.....	109
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	113
KAYNAKLAR	115
ÖZGEÇMİŞ	117

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 5.1. f_1 ve CS operatörleri.....	97
Şekil 5.2. f_2 ve CS operatörleri.....	97
Şekil 5.3. f_3 ve CS operatörleri.....	98
Şekil 5.4. f_4 ve CS operatörleri.....	98
Şekil 5.5. f_5 grafiği	99
Şekil 5.6. f_5 ve 1.tip tensör CS operatörü.....	99
Şekil 5.7. f_5 ve 2.tip tensör CS operatörü.....	99
Şekil 5.8. f_6 grafiği	100
Şekil 5.9. f_6 ve 1.tip tensör CS operatörü.....	100
Şekil 5.10. f_6 ve 2.tip tensör CS operatörü.....	100
Şekil 5.11. f_7 grafiği	101
Şekil 5.12. f_7 ve 1.tip tensör CS operatörü.....	101
Şekil 5.13. f_7 ve 2.tip tensör CS operatörü.....	101
Şekil 5.14. f_4 ve 1.tip non-tensör CS operatörü.....	102
Şekil 5.15. f_4 ve 2.tip non-tensör CS operatörü.....	102
Şekil 5.16. f_8 grafiği	103
Şekil 5.17. f_8 ve 1.tip non-tensör CS operatörü.....	103
Şekil 5.18. f_8 ve 2.tip non-tensör CS operatörü.....	103
Şekil 5.19. f_9 grafiği	104
Şekil 5.20. f_9 ve 1.tip non-tensör CS operatörü.....	104
Şekil 5.21. f_9 ve 2.tip non-tensör CS operatörü.....	104
Şekil 5.22. g_1 ve CSC operatörleri	105
Şekil 5.23. g_2 ve CSC operatörleri	105

Şekil	Sayfa
Şekil 5.24. g_3 ve CSC operatörleri	106
Şekil 5.25. g_4 ve CSC operatörleri	106
Şekil 5.26. g_5 grafiği.....	107
Şekil 5.27. g_5 ve 1. tip tensör CSC operatörü	107
Şekil 5.28. g_5 ve 2. tip tensör CSC operatörü	107
Şekil 5.29. 1. ve 2. tip tensör CSC operatörleri	108
Şekil 5.30. g_6 grafiği.....	108
Şekil 5.31. g_6 ve 1. tip tensör CSC operatörü	108
Şekil 5.32. g_6 ve 2. tip tensör CSC operatörü	109
Şekil 5.33. 1. ve 2. tip tensör CSC operatörleri	109
Şekil 5.34. g_5 ve 1. tip non-tensör CSC operatörü	109
Şekil 5.35. g_5 ve 2. tip non-tensör CSC operatörü	110
Şekil 5.36. g_7 grafiği.....	110
Şekil 5.37. g_7 ve 1. tip non-tensör CSC operatörü	110
Şekil 5.38. g_7 ve 2. tip non-tensör CSC operatörü	111
Şekil 5.39. g_8 grafiği.....	111
Şekil 5.40. g_8 ve 1. tip non-tensör CSC operatörü	111
Şekil 5.41. g_8 ve 2. tip non-tensör CSC operatörü	112

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$C(A)$	A kümesinde sürekli fonksiyonlar uzayı
Lip_m^α	Lipschitz sınıfı
$L_n(f) \Rightarrow f$	Lineer operatörün fonksiyona düzgün yakınsaması
$P_n(f, x)$	1. tip CS operatörü
$P_n^\beta(f; x, y)$	1. tip iki değişkenli CS operatörü
$P_n^*(f, x)$	1. tip CSC operatörü
$P_n^{\beta*}(f; x, y)$	1. tip iki değişkenli CSC operatörü
$Q_n(f, x)$	2. tip CS operatörü
$Q_n^\beta(f; x, y)$	2. tip iki değişkenli CS operatörü
$Q_n^{\beta*}(f; x, y)$	2. tip iki değişkenli CSC operatörü
$Q_n^*(f, x)$	2. tip CSC operatörü
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyonu
$\Gamma(k)$	Gamma fonksiyonu
$\omega(f; x)$	Süreklilik modülü

Kısaltmalar

Açıklamalar

CS	Cheney Sharma
CSC	Cheney Sharma Chlodowsky

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi gerek matematiğin kendi iç problemlerinde gerekse fizikten mühendisliğe pek çok farklı disiplinde kendine uygulama alanı bulmuştur. Bu nedenle giderek daha fazla dikkat çekmiş ve daha çok çalışılmıştır.

Günümüzde bu denli popüler olan yaklaşım teorisiyle ilgili ilk önemli çalışmayı Karl Weierstrass yapmıştır. Weierstrass 1885 yılında kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlara yakınsayan bir polinom bulunabileceğini söylemiştir [1]. Sonraki yıllarda pek çok matematikçi buna farklı ispatlar yapmış ve bazı örnekler sunmuşlardır. Fakat Sergey Natanovich Bernstein'ın 1912 yılında verdiği polinom örneği ve yaptığı ispat diğerlerinden daha farklı ve kullanışlı bulunmuştur. Bu nedenle üzerinden geçen yüz yılı aşkın süreye rağmen sıklıkla kullanılmaya ve araştırılmaya devam etmektedir.

$x \in [0,1], f \in C[0,1]$ olmak üzere Bernstein polinomu,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [2]. Bernstein, bu polinomun $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyona yakınsadığını göstermiştir. 1951'de Bohman [3], 1953'te Korovkin [4] sınırlı aralıklarda bir lineer pozitif operatörler dizisinin bir fonksiyona yakınsama koşullarını ortaya koymuşlardır. Sonraki dönemlerde Bernstein polinomu matematikçiler tarafından çok farklı biçimlerde geliştirilmiştir. Bu geliştirmelerden biri de Cheney ve Sharma tarafından yapılmıştır.

Cheney ve Sharma [5] 1964 yılında, Jensen eşitliğinden [6] yola çıkarak aşağıdaki operatörleri tanımlamışlardır.

$$P_n(f, x) = (1 + n\beta)^{-n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x(x + k\beta)^{k-1} [1 - x + (n - k)\beta]^{n-k},$$

$$Q_n(f, x) = (1 + n\beta)^{1-n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x(x + k\beta)^{k-1} (1 - x) [1 - x + (n - k)\beta]^{n-k-1}.$$

Bunlar sırasıyla birinci tip ve ikinci tip Cheney Sharma operatörleri olarak adlandırılmıştır. Mevcut tezde çalışılacak olan Cheney Sharma operatörleri hakkında pek çok araştırma yapılmıştır. [7-11] bunlardan bazılarıdır.

Buraya kadar bahsi geçen çalışmalar sınırlı aralıklar üzerinde yapılan çalışmalardır.

Chlodowsky $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0, x \in [0, \infty)$ olmak üzere

$$C_n(f; x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, & x \in [0, b_n) \\ f(x), & x > b_n \end{cases}$$

Bernstein-Chlodowsky polinomunu tanımlamıştır [12]. Böylelikle sınırsız bir aralıkta çalışma imkânı doğmuştur. Ancak Korovkin koşulları sınırsız aralıklarda geçerli değildir. Ağırlıklı uzaylarda yakınsaklık koşulları üzerine Gadjiev çalışmalar yapmıştır [13-15].

[16] da Cheney Sharma Chlodowsky operatörünü tanımlamışlar ve yakınsaklık özelliklerini ve yakınsama oranını incelemişlerdir. Tanımlanan operatör ikinci tip Cheney Sharma operatörünün bir genelleştirmesi olup

$$Q_n^*(f, x) = (1 + n\beta)^{1-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}b_n\right) \frac{x}{b_n} \left(\frac{x}{b_n} + k\beta\right)^{k-1} \\ \times \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) \left[1 - \frac{x}{b_n} + (n-k)\beta\right]^{n-k-1}$$

biçiminde gösterilmiştir. [17] de ise bu operatörün bazı koruma özellikleri gösterilmiştir.

Bu tez için yapılan alanyazın taramasında görülmüştür ki Cheney Sharma operatörleri hakkında yapılan çalışmalar genellikle ikinci tip üzerinde yoğunlaşmış olup birinci tip pek çalışılmamıştır. Bu nedenle mevcut tezde [10,11,16,17] gibi çalışmalardan esinlenilerek iki değişkenli Cheney Sharma, bir ve iki değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özellikleri üzerinde durulmuştur. Ayrıca iki değişkenli operatörlerin hem tensör çarpımla hem de non-tensör çarpımla elde edilen versiyonları ayrı ayrı incelenmiştir. Son olarak bu operatörlerin seçilen bazı fonksiyonlara yaklaşımları verilen grafikler yardımıyla örneklendirilmiştir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tez içerisinde kullanılacak tanımlar ve teoremler yer almaktadır. Yazılmış olan tanım ve teoremler, [13-15, 18-23] gibi kaynaklardan aktarılmıştır.

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım

$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0(\varepsilon)$ ise (f_n) , A kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir [18].

2.1.2. Tanım

L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F üzerinde lineer uzay denir [21].

A) L , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G1) $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2) $\forall x, y, z \in L$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ dir.

G3) $\forall x \in L$ için $x + \lambda = \lambda + x = x$ olacak şekilde $\lambda \in L$ vardır.

G4) $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \lambda$ olacak şekilde $\lambda \in L$ vardır.

G5) $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

L1) $\alpha x \in L$ dir

L2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

L3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

L4) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

L5) $1x = x$ (1 , F nin birim elemanıdır.)

2.1.3. Tanım

L , bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \|: L \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna L üzerinde norm denir [21].

$$N1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| (\alpha \in F)$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Ayrıca L bir normlu uzaydır denir. Normlu uzaylar genellikle $(L, \|x\|)$ ile gösterilir.

2.1.1. Teorem

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (x := (x_1, x_2, x_3 \dots x_n), y := (y_1, y_2, y_3, \dots y_n))$ için Cauchy-Schwartz eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [21]:

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.1.2. Teorem

$p, q, p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için Hölder eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki eşitsizlik sağlanır [20]:

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.1.5. Tanım

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. $\Gamma(x + 1) = x!$ olduğundan gamma fonksiyonuna genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir [22].

2.2. Lineer Pozitif Operatörler

2.2.1. Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X uzayından alınmış her bir f fonksiyonu Y de bir g fonksiyonuna karşılık getiren L kuralına operatör denir [15]. $g(x) = L(f; x)$ ile gösterilir.

2.2.2. Tanım

X bir lineer uzay, $f_1, f_2 \in X$ ve $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

özellikliğini sağlayan L operatörüne lineer operatör denir [15].

2.2.3. Tanım

L bir lineer operatör, $X^+ = \{f \in X: f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$ olsun. L , X^+ teki bir fonksiyonu Y^+ deki bir fonksiyona dönüştürüyorsa L 'ye lineer pozitif operatör denir [15].

2.2.1. Lemma

Lineer pozitif operatörler monotondur. Yani her $f_1, f_2 \in X$ için $f_1(t) \leq f_2(t)$ olduğunda $L(f_1; x) \leq L(f_2; x)$ olur.

2.2.2. Lemma

L bir lineer pozitif operatör olmak üzere aşağıdaki özelliği sağlar:

$$|L(f; x)| \leq L(|f|; x).$$

2.2.1. Teorem

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ sınırlı aralığında $n \rightarrow \infty$ için

$$i) L_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$\text{ii) } L_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$\text{iii) } L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

şartları sağlanıyorsa $f \in C[a, b]$ ve tüm reel ekseninde sınırlı fonksiyonu için

$$L_n(f) \Rightarrow f$$

olur [4]. Bu teorem Korovkin teoremi olarak bilinmektedir.

2.2.2. Teorem

(L_n) lineer pozitif operatörler dizisi ve $D, \mathbb{R}^2$ de sınırlı bir bölge olsun. Eğer (L_n) , D bölgesinin kompakt bir alt kümesi olan κ üzerinde

$$\text{i) } L_n(1; x, y) \Rightarrow 1$$

$$\text{ii) } L_n(t; x, y) \Rightarrow x$$

$$\text{iii) } L_n(r; x, y) \Rightarrow y$$

$$\text{iv) } L_n(t^2 + r^2; x, y) \Rightarrow x^2 + y^2$$

şartları sağlanıyorsa,

$$f \in C(\kappa), n \rightarrow \infty \text{ için}$$

$$L_n(f; x, y) \Rightarrow f$$

olur [24]. Bu teorem Volkov teoremi olarak bilinmektedir.

2.2.4. Tanım

$f \in C[a, b]$ ve $x, t \in [a, b]$ olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ \delta \geq |t-x|}} |f(t) - f(x)|$$

biçiminde tanımlanır.

2.2.5. Teorem

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i. $\omega(f; \delta) \geq 0$,
- ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$,
- iii. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$,
- iv. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$,
- v. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$,
- vi. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$.

2.2.5. Tanım

f reel değerli, sürekli bir fonksiyon ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. $\forall x, t \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Lipschitz sınıfındandır denir. Bu fonksiyon sınıfı Lip_m^α ile gösterilir.



3. CHENEY SHARMA OPERATÖRLERİ

Tezin bu bölümünde Cheney ve Sharma operatörlerinin nasıl elde edildiği ve yaklaşım özellikleri hakkında bilgi verilecektir. Bu operatörlerin bir ve iki değişkenli halleri ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

3.1. Tek değişkenli Cheney Sharma Operatörleri

Cheney ve Sharma [5] 1964 yılında Bernstein polinomunun bir genelleştirmesini yaptılar. Bunun için Jensen eşitliği [6] olarak bilinen aşağıdaki açılımları kullandılar:

$$(x + y + m\beta)^m = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} [y + (m - v)\beta]^{m-v} \quad (3.1)$$

$$(x + y)(x + y + m\beta)^{m-1} = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} y[y + (m - v)\beta]^{m-v-1} \quad (3.2)$$

Eş. 3.1 eşitliğinde y yerine $1 - x$ yazıldığında

$$(1 + m\beta)^m = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v} \quad (3.3)$$

elde edilir.

$$(1 + m\beta)^m (1 + m\beta)^{-m} = 1$$

olacağından

$$(1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v} = 1 \quad (3.4)$$

yazılabilir.

Buradan hareketle birinci tip Cheney Sharma operatörü

$$P_m(f; x) = (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m f\left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v} \quad (3.5)$$

elde edilmiştir.

Benzer şekilde Eş. 3.2’de y yerine $1 - x$ yazıldığında

$$(1 + m\beta)^{m-1} = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1 - x) [(1 - x) + (m - v)\beta]^{m-v-1}$$

elde edilir.

Eşitliğin her iki tarafı $(1 + m\beta)^{1-m}$ ile çarpılırsa

$$(1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1 - x) [(1 - x) + (m - v)\beta]^{m-v-1} = 1 \quad (3.6)$$

bulunur.

Buradan ikinci tip Cheney Sharma operatörü olarak bilinen

$$Q_m(f, x) = (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m f\left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1 - x) \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Her iki tip operatörde $x \in [0,1]$ ve $\forall m \in \mathbb{N}$ için β, m ’e bağlı bir pozitif reel sayıdır. Şayet $\beta = 0$ olarak alınırsa her iki operatörden de Bernstein polinomu elde edilmektedir.

3.1.1. Lemma

Eş. 3.5 ile verilen ikinci tip Cheney Sharma operatörü P_m lineer pozitif operatördür.

İspat

f_1, f_2 birer fonksiyon ve $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned}
P_m(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m (a_1 f_1 + a_2 f_2) \left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x+v\beta)^{v-1} \\
&\quad \times [1-x+(m-v)\beta]^{m-v} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \left[\sum_{v=0}^m a_1 f_1 \left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x+v\beta)^{v-1} [1-x+(m-v)\beta]^{m-v} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{v=0}^m a_2 f_2 \left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x+v\beta)^{v-1} [1-x+(m-v)\beta]^{m-v} \right] \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m a_1 f_1 \left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x+v\beta)^{v-1} [1-x+(m-v)\beta]^{m-v} \\
&\quad + (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m a_2 f_2 \left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x+v\beta)^{v-1} [1-x+(m-v)\beta]^{m-v} \\
&= a_1 (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m f_1 \left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x+v\beta)^{v-1} [1-x+(m-v)\beta]^{m-v} \\
&\quad + a_2 (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m f_2 \left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x+v\beta)^{v-1} [1-x+(m-v)\beta]^{m-v} \\
&= a_1 P_m(f_1; x) + a_2 P_m(f_2; x)
\end{aligned}$$

olup, bu P_m operatörlerinin lineerliğini kanıtlar.

Ayrıca $x \in [0,1]$ için $f \geq 0$ alındığında $P_m(f; x) \geq 0$ olacağından P_m lineer pozitif operatörlerin bir dizisidir.

3.1.2. Lemma

Eş. 3.7 ile verilen ve Q_m ile gösterilen ikinci tip Cheney Sharma operatörü lineer pozitif operatörler dizisidir [9].

Cheney Sharma operatörlerinin yakınsaklık özelliklerini incelerken hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla [5]'te aşağıda Eş. 3.8 ile gösterilen yardımcı fonksiyon verilmiştir:

$$S(j, m, x, y) = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta)^{v+j-1} [y + (m-v)\beta]^{m-v}. \quad (3.8)$$

Bu yardımcı fonksiyona ait bazı özellikler [8]'de verilmiştir. Çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak lemmalar aşağıda sunulmuştur.

3.1.3. Lemma

(3.1.8) ile verilen $S(j, m, x, y)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$S(j, m, x, y) = xS(j-1, m, x, y) + m\beta S(j, m-1, x+\beta, y). \quad (3.9)$$

3.1.4. Lemma

$S(j, n, x, y)$ ifadesi için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$xS(0, m, x, y) = (x + y + m\beta)^m. \quad (3.10)$$

3.1.5. Lemma

$S(j, m, x, y)$ ifadesi için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$S(1, m, x, y) = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} v! \beta^v [x + y + m\beta]^{m-v}. \quad (3.11)$$

3.1.6. Lemma

$S(j, m, x, y)$ ifadesi için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$S(2, m, x, y) = \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} (x + v\beta) v! \beta^v S(1, m-v, x + v\beta, y). \quad (3.12)$$

3.1.7. Lemma

$S(j, m, x, y)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$S(1, m, x, y) = \int_0^\infty e^{-t} (x + y + m\beta + t\beta)^m dt. \quad (3.13)$$

3.1.8. Lemma

$S(j, m, x, y)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$S(2, m, x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} [x(x + y + (m + t + s)\beta)^m + mt\beta^2(x + y + (m + t + s)\beta)^{m-1}] dt ds. \quad (3.14)$$

3.1.9. Lemma

$e_i = t^i$ olmak üzere Eş. 3.5 ile verilen birinci tip Cheney Sharma operatörü için

$$P_m(e_0, x) \leq 1 \quad (3.15)$$

$$P_m(e_1, x) \leq \frac{x}{1 + \beta} \quad (3.16)$$

$$P_m(e_2, x) \leq \frac{(m-1)x(x+2\beta)(1+n\beta)^2}{m} + \frac{x(m-1)(1+n\beta)^2\beta^2}{(1+\beta)^3} + \frac{x}{m(1+m\beta)} \quad (3.17)$$

özellikleri sağlanır.

3.1.1. Teorem

$m \in \mathbb{N}$ için β , m 'ye bağlı bir pozitif reel sayı dizisi, $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ olsun.

$\forall f \in C([0,1])$ için Eş. 3.5 ile verilen birinci tip Cheney Sharma operatörler dizisi, f fonksiyonuna $[0,1]$ de düzgün yakınsaktır [5].

3.1.10. Lemma

$e_i = t^i$ olmak üzere Eş. 3.7' de verilen ikinci tip Cheney Sharma operatörü için

$$Q_m(e_0, x) = 1 \quad (3.18)$$

$$Q_m(e_1, x) = x \quad (3.19)$$

$$Q_m(e_2, x) \leq x(x + 2\beta)(1 + m\beta) + xm(1 + m\beta)\beta^2 + x(x + 2\beta)m\beta + xm^2\beta^3 + \frac{x}{m} \quad (3.20)$$

özellikleri sağlanır [9].

3.1.2. Teorem

$m \in \mathbb{N}$ için β , m ye bağlı bir pozitif reel sayı dizisi, $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ olsun. $\forall f \in C([0,1])$ için Eş. 3.7 ile verilen ikinci tip Cheney Sharma operatörler dizisi, f fonksiyonuna $[0,1]$ de düzgün yakınsaktır [5].

3.1.3. Teorem

$x \in [0,1], f \in C[0,1]$ ve $\beta = (\beta_m)$ bir pozitif reel sayı dizisi olsun. P_m operatörler dizisi için

$$|P_m - f| \leq 2\omega(f, \delta)$$

olur.

Burada δ ile verilen moment

$$\delta = \delta_m = \left(\frac{(m-1)x(x+2\beta)(1+n\beta)^2}{m} + \frac{(m-1)(1+n\beta)^2x}{m(1+2\beta)^3} - \frac{2x^2}{1+m\beta} + x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dir [8].

3.1.4. Teorem

$x \in [0,1], f \in C[0,1]$ ve $\beta = (\beta_m)$ bir pozitif reel sayı dizisi olsun. Q_m operatörler dizisi için

$$|Q_m - f| \leq 2\omega(f, \delta_m)$$

olur.

Burada δ_m ile verilen moment

$$\delta_m = \left(x(x + 2\beta)(1 + m\beta) + xm(1 + m\beta)\beta^2 + x(x + 2\beta)m\beta + xm^2\beta^3 + \frac{x}{m} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak alınacaktır.

İspat

Q_m operatörü için

$$\begin{aligned} Q_m(f; x) - f(x) &= (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m f\left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\ &\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} - f(x) \\ &= (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m f\left(\frac{v}{m}\right) \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\ &\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \\ &\quad - (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m f(x) \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\ &\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \\ &= (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^n \left(f\left(\frac{v}{m}\right) - f(x) \right) \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\ &\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
|Q_m(f; x) - f(x)| &= |(1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \left(f\left(\frac{v}{m}\right) - f(x) \right) \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\
&\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1}| \\
&\leq (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\
&\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \left| f\left(\frac{v}{m}\right) - f(x) \right|
\end{aligned}$$

bulunur.

Süreklilik modülünün tanımından ve $\left| \frac{v}{m} - x \right| < \delta$ için

$$\begin{aligned}
|Q_m(f; x) - f(x)| &= (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\
&\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \omega\left(f, \left| \frac{v}{m} - x \right| \right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\omega(f, \lambda\delta) \leq (1 + \lambda\delta)\omega(f, \delta)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|Q_m(f; x) - f(x)| &= (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \\
&\quad \times [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \omega\left(f, \left| \frac{v}{m} - x \right| \right) \\
&\leq (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \\
&\quad \times \omega(f, \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{v}{m} - x \right| \right) \\
&= (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \\
&\quad \times \omega(f, \delta) \\
&\quad + (1 + m\beta)^{1-n} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \\
&\quad \times \omega(f, \delta) \frac{1}{\delta} \left| \frac{v}{m} - x \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} (1 + m\beta)^{1-n} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} x(x + v\beta)^{v-1} (1-x) \right. \\
&\quad \times \left. [1 - x + (m - v)\beta]^{m-v-1} \left| \frac{v}{m} - x \right| \right] \\
&= \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} Q_m \left(\left| \frac{v}{m} - x \right|; x \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} Q_m \left(\left| \frac{v}{m} - x \right|; x \right) \right] &\leq \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} Q_m \left(\left(\frac{v}{m} - x \right)^2; x \right)^{\frac{1}{2}} Q_m(1^2; x)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} Q_m \left(\left(\frac{v}{m} \right)^2 - \frac{2vx}{m} + x^2; x \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(Q_m \left(\left(\frac{v}{m} \right)^2; x \right) + Q_m \left(-2x \frac{v}{m}; x \right) + Q_m(x^2; x) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} (Q_m(e_2; x) - 2xQ_m(e_1; x) + x^2Q_m(e_0; x))^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.21)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.18, 3.19 ve 3.20 Eş. 3.21’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} Q_m \left(\left| \frac{v}{m} - x \right|; x \right) \right] \\
&\leq \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(x(x + 2\beta)(1 + m\beta) + xm(1 + m\beta)\beta^2 + x(x + 2\beta)m\beta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + xm^2\beta^3 + \frac{x}{m} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada δ ile verilen moment

$$\delta_m = \left(x(x + 2\beta)(1 + m\beta) + xm(1 + m\beta)\beta^2 + x(x + 2\beta)m\beta + xm^2\beta^3 + \frac{x}{m} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak seçilirse

$$|Q_m(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f, \delta_m)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. İki Değişkenli Cheney Sharma Operatörleri

Bu kısımda Cheney Sharma operatörlerinin iki değişkenli genelleştirmelerine yer verilmiştir. İki değişkenli Cheney Sharma operatörleri iki bölümde incelenebilir. Bunlardan ilki non-tensör çarpım kullanılan operatörler iken ikincisi tensör çarpım kullanılan operatörlerdir. Burada yine birinci ve ikinci tip Cheney Sharma operatörleri ayrı ayrı incelenecektir.

3.2.1. Non-tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri

Burada incelenecek olan iki değişkenli operatörlerden ikinci tip Cheney Sharma operatörü [10]'da tanımlanmıştır. Aynı çalışmada yazarlar bu operatörün süreklilik modülü fonksiyonu özelliklerini ve Lipschitz sürekli fonksiyonlar sınıfından fonksiyonları koruduğunu göstermişlerdir.

İkinci tip operatör [10] çalışmasından alıntılanarak aşağıdaki şekliyle verilmiştir:

$$Q_m^\beta(f; \mathbf{x}) = (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{k}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\mathbf{e}} (\mathbf{x} + \mathbf{k}\beta)^{\mathbf{k}-\mathbf{e}} \\ \times (1 - |\mathbf{x}|)[1 - |\mathbf{x}| + (m - |\mathbf{k}|)\beta]^{m-|\mathbf{k}|-1}. \quad (3.22)$$

Burada notasyon olarak;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{e} = (1,1), \mathbf{0} = (0,0), 0 < \beta_m \in \mathbb{N}, \beta\mathbf{x} := (\beta x_1, \beta x_2),$
 $|\mathbf{x}| := x_1 + x_2, \mathbf{x}^{\mathbf{k}} := x_1^{k_1} x_2^{k_2}, \mathbf{k}! := k_1! k_2!$ kullanılmıştır. Ayrıca

$$\binom{m}{\mathbf{k}} := \frac{m!}{\mathbf{k}! (m - |\mathbf{k}|)!}, \sum_{|\mathbf{k}| \leq m} := \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1}$$

olarak alınmıştır. Buradan esinlenerek birinci tip Cheney Sharma operatörünün iki değişkenli bir genelleştirmesi aşağıdaki şekilde yazılmıştır.

Eş. 3.1'de x yerine x_1 , y yerine $1 - x_1$ yazıldığında

$$(1+m\beta)^m = \sum_{k_1=0}^m \binom{m}{k_1} x_1 (x_1 + k_1\beta)^{k_1-1} [1 - x_1 + (m - k_1)\beta]^{m-k_1} \quad (3.23)$$

elde edilir. Eş. 3.1'de x yerine x_2 , y yerine $1 - x_1 - x_2$ ve m yerine $m - k_1$ yazıldığında

$$\begin{aligned} & [1 - x_1 + (m - k_1)\beta]^{m-k_1} \\ &= \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \binom{m-k_1}{k_2} x_2 (x_2 + k_2\beta)^{k_2-1} [1 - x_1 - x_2 + (m - k_1 - k_2)\beta]^{m-k_1-k_2} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik Eş. 3.23'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (1+m\beta)^m &= \sum_{k_1=0}^m \binom{m}{k_1} x_1 (x_1 + k_1\beta)^{k_1-1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \binom{m-k_1}{k_2} x_2 (x_2 + k_2\beta)^{k_2-1} \\ &\quad \times [1 - x_1 - x_2 + (m - k_1 - k_2)\beta]^{m-k_1-k_2} \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı $(1+m\beta)^{-m}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 1 &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \binom{m}{k_1} \binom{m-k_1}{k_2} x_1 x_2 (x_1 + k_1\beta)^{k_1-1} (x_2 + k_2\beta)^{k_2-1} \\ &\quad \times [1 - x_1 - x_2 + (m - k_1 - k_2)\beta]^{m-k_1-k_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{K} = (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{E} = (1, 1)$, $\mathbf{0} = (0, 0)$,

$0 < \beta_m$, $m \in \mathbb{N}$, $\beta_m \in \mathbb{R}$, $\beta \mathbf{X} := (\beta x_1, \beta x_2)$, $|\mathbf{X}| := x_1 + x_2$, $\mathbf{X}^{\mathbf{K}} := x_1^{k_1} x_2^{k_2}$, $\mathbf{K}! := k_1! k_2!$

$$\binom{m}{k_1} \binom{m-k_1}{k_2} = \frac{m!}{k_1! k_2! (m-k_1-k_2)!} \text{ için } \binom{m}{\mathbf{k}} := \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{K}|)!},$$

$$\sum_{|\mathbf{K}| \leq m} := \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1}$$

olarak alınıp yerine yazılırsa

$$1 = (1+m\beta)^{-m} \sum_{|\mathbf{K}| \leq m} \binom{m}{\mathbf{K}} \mathbf{X}^{\mathbf{E}} (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} [1 - |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{K}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|} \quad (3.24)$$

elde edilir. $S = \{\mathbf{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: (x_1, x_2) \geq 0, |\mathbf{X}| \leq 1\}$ bölgesinde tanımlı sürekli bir f fonksiyonu olmak üzere Eş. 3.24'den

$$P_m^\beta(f; \mathbf{X}) = (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \mathbf{X}^{\mathbf{E}} (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \times [1 - |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{K}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|} \quad (3.25)$$

yazılır. Eş. 3.25 eşitliği tensör çarpım iki değişkenli birinci tip Cheney Sharma operatörüdür.

Yukarıda yazılan birinci tip iki değişkenli Cheney Sharma operatörünün yine [10] çalışmasından hareketle süreklilik modülü fonksiyonu özelliklerini ve Lipschitz sürekli sınıfından fonksiyonları koruduğu gösterilecektir. İkinci bölümde verilen süreklilik modülü fonksiyonu ve Lipschitz sürekli fonksiyon tanımları bu kez iki değişkenli olarak [10,27,28] çalışmalarından alıntılanarak aşağıda verilmiştir.

3.2.1. Tanım

$f, A \subseteq \mathbb{R}^2$ de tanımlı, reel değerli, sürekli bir fonksiyon olsun. $M > 0$, $\mu \in A$ ve $0 < \mu \leq 1$ olacak şekilde $\forall x, y \in A$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq M \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|^\mu$$

koşulu sağlanırsa f fonksiyonuna Lipschitz sürekli denir.

3.2.2. Tanım

$\omega(u)$, iki değişkenli, negatif olmayan bir sürekli fonksiyon olsun. Şayet $\omega(u)$ fonksiyonu;

i) $\omega(0) = 0$,

ii) Tüm $u_1 \leq u_2$ için $\omega(u_1) \leq \omega(u_2)$,

$$\text{iii) } \omega(u_1 + u_2) \leq \omega(u_1) + \omega(u_2),$$

şartlarını sağlarsa bir süreklilik modülü fonksiyonudur denir.

3.2.1. Teorem

f , Lipschitz sürekli bir fonksiyon ise tüm n doğal sayıları için $P_m^\beta(f)$ fonksiyonu da Lipschitz sürekli bir fonksiyondur.

İspat

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T$, $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ yani $x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ olsun. Eş. 3.25 için;

$$\begin{aligned} P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \mathbf{Y}^{\mathbf{E}} (\mathbf{Y} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} [1 - |\mathbf{Y}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\ &= (1+m\beta)^{-n} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{L}} y_1(y_1 + l_1\beta)^{l_1-1} y_2(y_2 + l_2\beta)^{l_2-1} \\ &\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Eş. 3.2 ile verilen Jensen eşitliğinde $x \rightarrow x_1, y \rightarrow y_1 - x_1, m \rightarrow l_1$ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} y_1(y_1 + l_1\beta)^{l_1-1} &= \sum_{k_1=0}^{l_1} \binom{l_1}{k_1} x_1(x_1 + k_1\beta)^{k_1-1} (y_1 - x_1) \\ &\quad \times [y_1 - x_1 + (l_1 - k_1)\beta]^{l_1-k_1-1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aynı şekilde $x \rightarrow y_1, y \rightarrow y_2 - x_2, m \rightarrow l_2$ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} y_2(y_2 + l_2\beta)^{l_2-1} &= \sum_{k_2=0}^{l_2} \binom{l_2}{k_2} x_2(x_2 + k_2\beta)^{k_2-1} (y_2 - x_2) \\ &\quad \times [y_2 - x_2 + (l_2 - k_2)\beta]^{l_2-k_2-1} \end{aligned} \quad (3.28)$$

elde edilir.

Eş. 3.27 ve Eş. 3.28, Eş. 3.26'da kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{L}} y_1(y_1 + i_1\beta)^{l_1-1} y_2(y_2 + i_2\beta)^{l_2-1} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{n-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \sum_{k_1=0}^{l_1} \binom{l_1}{k_1} x_1(x_1 + k_1\beta)^{k_1-1} (y_1 - x_1) \\
&\quad \times [y_1 - x_1 + (l_1 - k_1)\beta]^{l_1-k_1-1} \\
&\quad \times \sum_{k_2=0}^{l_2} \binom{l_2}{k_2} x_2(x_2 + k_2\beta)^{k_2-1} (y_2 - x_2) \times [y_2 - x_2 + (l_2 - k_2)\beta]^{l_2-k_2-1} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{L}|)! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!} \\
&\quad \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{K-E} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E [\mathbf{Y} - \mathbf{X} + (\mathbf{L} - \mathbf{K})\beta]^{L-K-E} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + (n - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{L}|)! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!} \\
&\quad \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{K-E} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E [\mathbf{Y} - \mathbf{X} + (\mathbf{L} - \mathbf{K})\beta]^{L-K-E} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=k_1}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{m-l_1} \sum_{l_2=k_2}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{L}|)! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!} \\
&\quad \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{K-E} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E [\mathbf{Y} - \mathbf{X} + (\mathbf{L} - \mathbf{K})\beta]^{L-K-E} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

$\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K} + \mathbf{L}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{i_2=k_2}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K} + \mathbf{L}}{m}\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \\
&\quad \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{K-E} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E [\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta]^{L-E} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$P_m^\beta(f; \mathbf{X}) = (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-E} \\ \times [1 - |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{K}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|}$$

Eş. 3.1 ile verilen Jensen eşitliğinde $x \rightarrow y_1 - x_1, y \rightarrow 1 - y_1 - x_2, m \rightarrow m - k_1 - k_2$ yerine yazılırsa;

$$[1 - |\mathbf{X}| + (n - |\mathbf{K}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|} \\ = \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} (y_1 - x_1)(y_1 - x_1 + l_1\beta)^{l_1-1} \\ \times [1 - y_1 - x_2 + (m - |\mathbf{K}| - l_1)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \quad (3.30)$$

elde edilir.

Eş. 3.1'de $x \rightarrow y_2 - x_2, y \rightarrow 1 - y_1 - y_2, m \rightarrow m - k_1 - k_2 - l_1$ yerine yazılırsa;

$$[1 - y_1 - x_2 + (m - |\mathbf{K}| - l_1)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \\ = \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} (y_2 - x_2)(y_2 - x_2 + l_2\beta)^{l_2-1} \\ \times [1 - y_2 - y_1 + (n - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \quad (3.31)$$

bulunur.

Eş. 3.31, Eş. 3.30'da yerine yazılırsa

$$[1 - |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{K}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|} \\ = \sum_{l_1=0}^{n-|\mathbf{K}|} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} (y_1 - x_1)(y_1 - x_1 + l_1\beta)^{l_1-1} \\ \times \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} (y_2 - x_2)(y_2 - x_2 + l_2\beta)^{l_2-1} \\ \times [1 - y_2 - y_1 + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \\
&\quad \times (y_1 - x_1 + l_1\beta)^{l_1-1} (y_2 - x_2 + l_2\beta)^{l_2-1} \\
&\quad \times [1 - y_2 - y_1 + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&[1 - |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{K}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{y}| + (n - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{n-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Eş. 3.32, Eş.3.25'te yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(f; \mathbf{X}) &= (1 + m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \\
&\quad \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \\
&\quad \times \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} [1 - |\mathbf{y}| \\
&\quad + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \\
&\quad \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Eş. 3.29 ve Eş. 3.33 kullanılarak $P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X})$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \\
&\times \frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)!\mathbf{L}!} \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\times [1 - |\mathbf{y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{k_1=0}^{m-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \\
&\times \frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)!\mathbf{L}!} \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\times [1 - |\mathbf{y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \\
&\times \frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)!\mathbf{L}!} \times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\times [1 - |\mathbf{y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

Son eşitlikte yer alan $\frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)!\mathbf{L}!}$ ifadesi için

$$\frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)!\mathbf{L}!} = \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \text{ eşitliği kullanılırsa,}$$

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \\
&\times \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \\
&\times \mathbf{X}^E (\mathbf{X} + \mathbf{K}\beta)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\times [1 - |\mathbf{y}| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X})^E (\mathbf{Y}-\mathbf{X}+\mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-E} \\
&\times \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} x_1 (x_1+k_1\beta)^{k_1-1} \\
&\times \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} x_2 (x_2+k_2\beta)^{k_2-1} \\
&\times [1-|\mathbf{y}| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

bulunur. Eş. 3.1’de $x \rightarrow x_2$, $y \rightarrow 1 - y_1 - y_2$, $m \rightarrow m - k_1 - l_2 - l_1$ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&[1-|\mathbf{Y}| + x_2 + (m-k_1-|\mathbf{L}|)\beta]^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \\
&= \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} x_2 (x_2+k_2\beta)^{k_2-1} \\
&\times [1-|\mathbf{Y}| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olur. Eş. 3.34, Eş. 3.35’te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \\
&\times \binom{m}{\mathbf{L}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X})^E (\mathbf{Y}-\mathbf{X}+\mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-E} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} x_1 (x_1+k_1\beta)^{k_1-1} \\
&\times [1-|\mathbf{Y}| + x_2 + (m-k_1-|\mathbf{L}|)\beta]^{m-k_1-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Eş. 3.1’de $x \rightarrow x_1$, $y \rightarrow 1 + x_2 - y_1 - y_2$, $m \rightarrow m - l_2 - l_1$ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&[1-|\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m-|\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} x_1 (x_1+k_1\beta)^{k_1-1} \\
&\times [1-|\mathbf{Y}| + x_2 + (m-k_1-|\mathbf{L}|)\beta]^{m-k_1-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Eş. 3.36, Eş.3.37’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X})^E (\mathbf{Y}-\mathbf{X}+\mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-E} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

bulunur. Ayrıca f , Lipschitz sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left| P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) \right| \\
&\leq M(1+n\beta)^{-n} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[\left(\frac{l_1}{m}\right)^\mu - \left(\frac{l_1}{m}\right)^\mu \right] \binom{m}{\mathbf{L}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X})^E (\mathbf{Y}-\mathbf{X}+\mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-E} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= M \left[P_m^\beta(t_1^\mu; \mathbf{Y}-\mathbf{X}) - P_m^\beta(t_2^\mu; \mathbf{Y}-\mathbf{X}) \right]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_m^\beta(t_1^\mu; \mathbf{Y}-\mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left(\frac{l_1}{m}\right)^\mu \binom{m}{\mathbf{L}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X})^E (\mathbf{Y}-\mathbf{X}+\mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-E} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \left(\frac{l_1}{n}\right)^\mu \binom{m}{l_1} (y_1 - x_1)(y_1 - x_1 + l_1\beta)^{l_1-1} \\
&\quad \times \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \binom{m-l_1}{l_2} (y_2 - x_2)(y_2 - x_2 + l_2\beta)^{l_2-1} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Eş. 3.1'de $x \rightarrow y_2 - x_2, y \rightarrow 1 + x_1 + x_2 - y_1 - y_2, m \rightarrow m - l_1$ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&[1 - y_1 + x_1 + (m - l_1)\beta]^{m-l_1} \\
&= \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \binom{m-l_1}{l_2} (y_2 - x_2)(y_2 - x_2 + l_2\beta)^{l_2-1} \\
&\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

bulunur. Eş. 3.41, Eş. 3.40'ta yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} P_m^\beta(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) &= (1 + m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \left(\frac{l_1}{m}\right)^\mu \binom{m}{l_1} (y_1 - x_1)(y_1 - x_1 + l_1\beta)^{l_1-1} \\ &\quad \times [1 - y_1 + x_1 + (m - l_1)\beta]^{m-l_1} \\ &= P_m(t_1^\mu; y_1 - x_1) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $p = \frac{1}{\mu}$, $q = \frac{1}{1-\mu}$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$P_m^\beta(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) = P_m(t_1^\mu; y_1 - x_1) \leq [P_m(t_1^\mu; y_1 - x_1)]^\mu [P_m(t_1^\mu; y_1 - x_1)]^{1-\mu}$$

ve Eş. 3.16'dan

$$P_m^\beta(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \leq (y_1 - x_1)^\mu \quad (3.42)$$

olur. Benzer yöntemle

$$P_m^\beta(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \leq (y_2 - x_2)^\mu \quad (3.43)$$

olduğu görülebilir.

Eş. 3.39, Eş. 3.42 ve Eş. 3.43 ifadelerinden

$$\begin{aligned} \left| P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) \right| &\leq M \left[P_m^\beta(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) - P_m^\beta(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \right] \\ &\leq M[(y_1 - x_1)^\mu + (y_2 - x_2)^\mu] \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde $\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}$ yani $y_1 \leq x_1, y_2 \leq x_2$ için yukarıdaki ifade aynı sonuca ulaşılabilir. Ayrıca $y_1 \leq x_1, x_2 \leq y_2$ olduğunda ise

$$\begin{aligned} \left| P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) \right| &\leq \left| P_m^\beta(f; (x_1, x_2)) - P_m^\beta(f; (y_1, x_2)) \right| + \left| P_m^\beta(f; (y_1, y_2)) - P_m^\beta(f; (y_1, x_2)) \right| \\ &\leq M[(y_1 - x_1)^\mu + (y_2 - x_2)^\mu] \end{aligned}$$

sağlanır.

Son olarak $x_1 \leq y_1$ ve $y_2 \leq x_2$ olduğunda da yukarıdaki biçimde sonuç elde edilir. Dolayısıyla

$$\left| P_m^\beta(f; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(f; \mathbf{X}) \right| \leq M[|y_1 - x_1|^\mu + |y_2 - x_2|^\mu]$$

yazılabilir. Bu ise Tanım 3.2.1'i sağladığından ispat tamamlanır.

3.2.2. Teorem

ω , bir süreklilik modülü fonksiyonu ise $\forall m \in \mathbb{N}; P_m^\beta(\omega)$ da süreklilik modülü fonksiyonudur.

İspat

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T, \mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ yani $x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ olsun. ω , Eş. 3.38'de f yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_m^\beta(\omega; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(\omega; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[\omega\left(\frac{\mathbf{K} + \mathbf{L}}{m}\right) - \omega\left(\frac{\mathbf{K}}{m}\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \\ &\quad \times (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-E} [1 - |\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$ olduğunda $P_m^\beta(\omega; \mathbf{Y}) \geq P_m^\beta(\omega; \mathbf{X})$ olmasını gerektirir. Yani Tanım 3.2.2 ii) koşulu sağlanır. Ayrıca Tanım 3.2.2 iii) den

$$\begin{aligned} P_m^\beta(\omega; \mathbf{Y}) - P_m^\beta(\omega; \mathbf{X}) &\leq (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \omega\left(\frac{\mathbf{L}}{m}\right) \binom{m}{\mathbf{L}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^E (\mathbf{Y} - \mathbf{X} + \mathbf{L}\beta)^{\mathbf{L}-E} \\ &\quad \times [1 - |\mathbf{Y}| + |\mathbf{X}| + (m - |\mathbf{L}|)\beta]^{m-|\mathbf{L}|} \\ &= P_m^\beta(\omega; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \end{aligned}$$

yazılır. Bu da $P_m^\beta(\omega)$ 'nın iii)'yi sağladığını gösterir. Ayrıca Cheney Sharma operatörünün özelliğinden $P_m^\beta(\omega; \mathbf{0}) = 0$ olduğu biliniyor. Öyleyse $P_m^\beta(\omega; \mathbf{0}) = \omega(\mathbf{0}) = 0$ denilebilir. Bu durum da i) nin sağlandığını gösterir. O halde i), ii), iii) sağlandığından ispat tamamlanır.

3.2.2. Tensör çarpım iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri

İki değişkenli operatörler için ikinci bir alternatif ise tensör çarpım kullanmaktır. İki değişkenli tensör çarpım ikinci tip Cheney Sharma operatörü [11, 28] çalışmalarında sunulmuştur:

$$Q_{n,m}(f; x_1, x_2; \beta, \alpha) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha),$$

$$p_{n,k}(x_1; \beta) = (1 + n\beta)^{1-n} \binom{n}{k} x_1 (x_1 + k\beta)^{k-1} (1 - x_1) [1 - x_1 + (n - k)\beta]^{n-k-1},$$

$$q_{m,l}(x_2; \alpha) = (1 + m\alpha)^{1-m} \binom{m}{l} x_2 (x_2 + l\alpha)^{l-1} (1 - x_2) [1 - x_2 + (m - l)\alpha]^{m-l-1}.$$

Buradan hareketle birinci tip Cheney Sharma operatör dizisi için iki değişkenli bir genelleştirmesi aşağıda verilmiştir:

$\mathcal{A} = [0,1] \times [0,1]$ ve $\forall f \in C(\mathcal{A})$ olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$, α, β , sırasıyla n ve m 'ye bağlı birer pozitif reel sayı dizisi; $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n\beta_n = 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} m\alpha_m = 0$ olsun.

$$P_{n,m}(f; x_1, y; \beta, \alpha) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(y; \alpha).$$

ifadesi iki değişkenli tensör çarpım birinci tip Cheney Sharma operatörüdür. Burada

$$t_{n,k}(x_1; \beta) = (1 + n\beta)^{-n} \binom{n}{k} x_1 (x_1 + k\beta)^{k-1} [1 - x_1 + (n - k)\beta]^{n-k}.$$

$$u_{m,l}(x_2; \alpha) = (1 + m\alpha)^{-m} \binom{m}{l} x_2 (x_2 + l\alpha)^{l-1} [1 - x_2 + (m - l)\alpha]^{m-l}.$$

3.2.5. Theorem

$\mathcal{A} = [0,1] \times [0,1]$ ve $\forall f \in C(\mathcal{A})$ olmak üzere

$$P_{n,m}(f; x_1, x_2; \beta, \alpha) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(x_2; \alpha)$$

ile verilen iki değişkenli birinci tip Cheney Sharma operatörler dizisi için

$P_{n,m}(f; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow f, (n, m \rightarrow \infty)$ olur.

İspat

Teorem 2.2.2’de verilen Volkov teoremi gereğince

$$P_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow 1$$

$$P_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow x_1$$

$$P_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow x_2$$

$$P_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow x_1^2 + x_2^2$$

ifadelerinin sağlandığını göstermek ispat için yeterlidir.

$$\begin{aligned} P_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n t_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m u_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} P_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{k}{n} t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} t_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m u_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= P_n(e_1; x_1) \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
P_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{l}{m} t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(x_2; \alpha) \\
&= \sum_{k=0}^n t_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \frac{l}{m} u_{m,l}(x_2; \alpha) \\
&= P_m(e_1, x_2)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
P_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left[\left(\frac{k}{n} \right)^2 + \left(\frac{l}{m} \right)^2 \right] t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(x_2; \alpha) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{k}{n} \right)^2 t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(x_2; \alpha) + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} \right)^2 t_{n,k}(x_1; \beta) u_{m,l}(x_2; \alpha) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 t_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m u_{m,l}(x_2; \alpha) + \sum_{k=0}^n t_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} \right)^2 u_{m,l}(x_2; \alpha) \\
&= P_n(e_2, x_1) + P_m(e_2, x_2)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\|P_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) - 1\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) - 1|$$

Eş. 3.44 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\|P_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) - 1\|_{C(\mathcal{A})} \\
&= |1 - 1| \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\|P_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1|$$

Eş. 3.45 yerine yazılırsa

$$\|P_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_n(e_1; x_1) - x_1|$$

olur. Burada limit alınıp sonrasında Eş. 3.16 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1\|_{C(\mathcal{A})} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(e_1; x_1) - x_1| \\
&= |x_1 - x_1|
\end{aligned}$$

$$= 0 \quad (3.49)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\|P_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2|$$

Eş. 3.46 yerine yazılırsa

$$\|P_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_m(e_1; x_2) - x_2|$$

olur. Son eşitlikte limit alınıp sonrasında Eş. 3.16 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2\|_{C(\mathcal{A})} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} |P_m(e_2; x_2) - x_2| \\ &= |x_2 - x_2| \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &\|P_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)\|_{C(\mathcal{A})} \\ &= \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)| \end{aligned}$$

Eş. 3.47 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\|P_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)\|_{C(\mathcal{A})} \\ &= \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_n(e_2; x_1) + P_m(e_2; x_2) - (x_1^2 + x_2^2)| \\ &= \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |P_n(e_2; x_1) - x_1^2 + P_m(e_2; x_2) - x_2^2| \end{aligned}$$

olur. Burada limit alınır

$$\begin{aligned} &\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|P_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)\|_{C(\mathcal{A})} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(e_2; x_1) - x_1^2| + \lim_{m \rightarrow \infty} |P_m(e_2; x_2) - x_2^2| \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.17'den

$$\begin{aligned}
 \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|P_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)\|_{C(\mathcal{A})} \\
 \leq |x_1^2 - x_1^2| + |x_2^2 - x_2^2| \\
 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

bulunur. Eş. 3.48, Eş. 3.49, Eş. 3.50, Eş. 3.51 ifadelerinden Volkov teoremi sağlanır ve $P_{n,m}(f; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow f$ olduğu ispatlanmış olur.

3.2.6. Teorem

$\mathcal{A} = [0,1] \times [0,1]$ ve $\forall f \in C(\mathcal{A})$ olmak üzere

$$Q_{n,m}(f; x_1, x_2; \beta, \alpha) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{m}\right) p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha)$$

$$p_{n,k}(x_1; \beta) = (1 + n\beta)^{1-n} \binom{n}{k} x_1 (x_1 + k\beta)^{k-1} (1 - x_1) [1 - x_1 + (n - k)\beta]^{n-k-1}$$

$$q_{m,l}(x_2; \alpha) = (1 + m\alpha)^{1-m} \binom{m}{l} x_2 (x_2 + l\alpha)^{l-1} (1 - x_2) [1 - x_2 + (m - l)\alpha]^{m-l-1}$$

ile verilen iki değişkenli ikinci tip Cheney Sharma operatörler dizisi için

$$Q_{n,m}(f; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow f, (n, m \rightarrow \infty)$$

olur.

İspat

Teorem 2.2.2 ile verilen Volkov teoremi gereğince

$$Q_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow 1$$

$$Q_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow x_1$$

$$Q_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow x_2$$

$$Q_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow x_1^2 + x_2^2$$

ifadelerinin sağlandığını göstermek ispat için yeterlidir.

$$\begin{aligned} Q_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} Q_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{k}{n} p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= Q_n(e_1; x_1) \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} Q_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \frac{l}{m} p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \frac{l}{m} q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= Q_m(e_1; x_2) \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} Q_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left[\left(\frac{k}{n} \right)^2 + \left(\frac{l}{m} \right)^2 \right] p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{k}{n} \right)^2 p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha) + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} \right)^2 p_{n,k}(x_1; \beta) q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 p_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m q_{m,l}(x_2; \alpha) + \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} \right)^2 q_{m,l}(x_2; \alpha) \\ &= Q_m(e_2; x_1) + Q_n(e_2; x_2) \end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir.

$$\|Q_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) - 1\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) - 1|$$

olup Eş. 3.52 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|Q_{n,m}(1; x_1, x_2; \beta, \alpha) - 1\|_{C(\mathcal{A})} \\ &= |1 - 1| \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\|Q_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1|$$

Eş. 3.53 yerine yazılırsa

$$\|Q_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_n(e_1; x_1) - x_1|$$

olur. Eş. 3.19 dan

$$\begin{aligned} \|Q_{n,m}(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_1\|_{C(\mathcal{A})} \\ &= |x_1 - x_1| \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\|Q_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2|$$

Eş. 3.54 yerine yazılırsa

$$\|Q_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2\|_{C(\mathcal{A})} = \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_m(e_1; x_2) - x_2|$$

olur. Eş. 3.19'dan

$$\begin{aligned} \|Q_{n,m}(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \alpha) - x_2\|_{C(\mathcal{A})} \\ &= |x_2 - x_2| \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} & \|Q_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)\|_{C(\mathcal{A})} \\ &= \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)| \end{aligned}$$

Eş. 3.55 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \|Q_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)\|_{C(\mathcal{A})} \\ &= \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_n(e_2; x_1) + Q_m(e_2; x_2) - (x_1^2 + x_2^2)| \\ &= \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{A}} |Q_n(e_2; x_1) - x_1^2 + Q_m(e_2; x_2) - x_2^2| \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın limiti alınır ve sonra Eş. 3.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|Q_{n,m}(f_2; x_1, x_2; \beta, \alpha) - (x_1^2 + x_2^2)\|_{C(\mathcal{A})} \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n(e_2; x_1) - x_1^2| + \lim_{m \rightarrow \infty} |Q_m(e_2; x_2) - x_2^2| \\ & = |x_1^2 - x_1^2| + |x_2^2 - x_2^2| \\ & = 0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Eş. 3.56, Eş. 3.57 Eş. 3.58, Eş. 3.59'den Volkov Teoremi sağlanır ve böylece $Q_{n,m}(f; x_1, x_2; \beta, \alpha) \Rightarrow f$ olduğu ispatlanmış olur.



4. CHENEY SHARMA CHLODOVSKY OPERATÖRLERİ

Bu bölümde daha önce özellikleri incelenmiş olan Cheney Sharma operatörlerinin Chlodowsky tip genelleştirmeleri üzerinde durulacaktır.

4.1. Tek Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri

Bilindiği gibi Cheney Sharma operatörlerinin sınırlı bir aralık üzerinde yaklaşım özellikleri incelenebilmektedir. Söylemez ve Taşdelen [16] çalışmalarında ikinci tip Cheney Sharma operatörünün Chlodowsky tip genelleştirmesini ortaya koymuşlardır. Böylelikle ağırlıklı uzaylarda çalışılabilme imkânı doğmuştur. İkinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörü için yapılan tanımlama aşağıdaki gibidir.

4.1.1. Tanım

$m \in \mathbb{N}$, (b_m) ve (β_m) dizileri $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ özelliklerini sağlayan birer pozitif sayı dizisi olsun. $0 \leq x \leq b_m$ için

$$Q_m^*(f, x) = (1 + m\beta)^{1-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} f\left(\frac{v}{m} b_m\right) \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left(1 - \frac{x}{b_m}\right) \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v-1} \quad (4.1)$$

$b_m < x$ için $Q_m^*(f, x) = f(x)$ şeklinde tanımlı dönüşüm, Cheney Sharma Chlodowsky operatörler dizisidir. Buradan hareketle bu tezde birinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörler dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$m \in \mathbb{N}$, (b_m) ve (β_m) dizileri $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ özelliklerini sağlayan birer pozitif sayı dizisi olmak üzere,

$$P_m^*(f; x) = \begin{cases} (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} f\left(\frac{v}{m} b_m\right) \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v}, & x \leq b_m \\ f(x) & , x > b_m \end{cases} \quad (4.2)$$

biçiminde tanımlı dönüşüm birinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörler dizisidir.

[16,17] çalışmalarında ikinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörünün yaklaşım özellikleri verilmiştir. Benzer şekilde mevcut tezde de birinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörü için yaklaşım özellikleri incelenecektir.

Teorem 2.2.1 ile verilen Korovkin teoremi sınırlı aralıklar için verilmiştir. Gadjiev [13,14], Hacısalihoğlu ve Hacıyev [15] çalışmalarında ağırlıklı uzaylarda Korovkin teoreminin geçerli olmadığını göstermiş ve yaklaşım koşullarının neler olması gerektiğini ortaya koymuşlardır. Bununla ilgili teoremler aşağıdaki verilmiştir.

4.1.1. Teorem

A_n lineer pozitif operatör dizilerinin C_ρ uzayından B_ρ uzayına bir dönüşüm olması için gerek ve yeter şart,

$$A_n(\rho; x) \leq K_n \rho(x)$$

olacak şekilde K_n pozitif sayısının var olmasıdır.

4.1.2. Teorem

$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ için A_n lineer pozitif operatörler dizisi C_ρ uzayından B_ρ uzayına bir dönüşüm olsun.

Eğer A_n dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t^\vartheta; x) - x^\vartheta\|_\rho = 0, (\vartheta = 0, 1, 2)$$

koşulu sağlanırsa $\forall f \in C_\rho^k(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_\rho = 0$$

olur.

4.1.1. Lemma

$e_i(t) = t^i$, ($i = 0, 1, 2$) olmak üzere $P_m^*(f, x)$ operatörü için aşağıdaki koşullar sağlanır.

i) $P_m^*(e_0, x) = 1$

ii) $\frac{x}{1+\beta} - x(m-1) \frac{2\beta^2}{(1+\beta)^3} \leq P_m^*(e_1, x) \leq \frac{x}{1+\beta}$

iii) $P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + \frac{xb_m(m-1)}{m} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] \leq P_m^*(e_2, x) \leq$

$P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + \frac{xb_m(m-1)}{m} \left\{ \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 + \frac{(m-2)\beta^2}{(1+3\beta)^3} \right\}$

İspat

i) $i = 0, e_0 = 1$ için

$$\begin{aligned} P_m^*(e_0, x) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \\ &= (1+m\beta)^{-m} (1+m\beta)^m \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

ii) $i = 1, e_1 = t$ için

$$\begin{aligned} P_m^*(e_1, x) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=1}^m \binom{m}{v} \left(\frac{v}{m} b_m \right) \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \\ &= (1+m\beta)^{-m} x \sum_{v=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-v)!(v-1)!} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \end{aligned}$$

$v \rightarrow v+1$

$$\begin{aligned} P_m^*(e_1, x) &= (1+m\beta)^{-m} x \sum_{v=0}^m \frac{(m-1)!}{(m-1-v)! v!} \left(\frac{x}{b_m} + \beta + v\beta \right)^v \\ &\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-1-v)\beta \right]^{m-1-v} \\ &= (1+m\beta)^{-m} x \sum_{v=0}^m \binom{m-1}{v} \left(\frac{x}{b_m} + \beta + v\beta \right)^v \\ &\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-1-v)\beta \right]^{m-1-v} \end{aligned} \quad (4.4)$$

olup üçüncü bölümde kullanılan yardımcı fonksiyon Eş. 3.11 düzenlenip Eş. 4.4'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^*(e_1, x) &= (1 + m\beta)^{-m} x S^* \left(1, m-1, \frac{x}{b_m} + \beta, 1 - \frac{x}{b_m} \right) \\
&= (1 + m\beta)^{-m} x \int_0^\infty e^{-t} (1 + m\beta + t\beta)^{m-1} dt \\
&= (1 + m\beta)^{-1} x \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t\beta}{1 + m\beta} \right)^{m-1} dt
\end{aligned} \tag{4.5}$$

bulunur. $t = u \frac{1+m\beta}{\beta}$ dönüşümü yapıp $e^{mu}(1 - mu^2) \leq (1 + u)^m \leq e^{mu}$ eşitsizliği düzenlenirse

$$e^{(m-1)u}(1 - (m-1)u^2) \leq (1 + u)^{m-1} \leq e^{(m-1)u}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\beta} \int_0^\infty e^{(m-1)u} (1 - (m-1)u^2) e^{\frac{-u(1+m\beta)}{\beta}} du &\leq \frac{x}{\beta} \int_0^\infty e^{\frac{-u(1+m\beta)}{\beta}} (1 + u)^{m-1} du \\
&\leq \frac{x}{\beta} \int_0^\infty e^{(m-1)u} e^{\frac{-u(1+m\beta)}{\beta}} du \\
\frac{x}{\beta} \int_0^\infty e^{\frac{-u(1+\beta)}{\beta}} (1 - (m-1)u^2) du &\leq \frac{x}{\beta} \int_0^\infty e^{\frac{-u(1+m\beta)}{\beta}} (1 + u)^{m-1} du \leq \frac{x}{\beta} \int_0^\infty e^{\frac{-u(1+\beta)}{\beta}} du
\end{aligned}$$

$$\frac{x}{1 + \beta} - x(m-1) \frac{2\beta^2}{(1 + \beta)^3} \leq P_m^*(e_1, x) \leq \frac{x}{1 + \beta} \tag{4.6}$$

iii) $i = 2, e_2 = t^2$ için

$$\begin{aligned}
P_m^*(e_2, x) &= (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=1}^m \binom{m}{v} \left(\frac{v}{m} b_m \right)^2 \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \\
&= (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-v)!(v-1)!} \frac{v}{m} \frac{x(b_m)^2}{m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v}
\end{aligned}$$

olup v yerine $v + 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^*(e_2, x) &= (1+m\beta)^{-m} \frac{x b_m}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-v)! v!} (v+1) \left(\frac{x}{b_m} + \beta + v\beta \right)^v \\
&\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-1-v)\beta \right]^{m-1-v} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \frac{x b_m}{m} \sum_{v=0}^{m-1} \binom{m-1}{v} \left(\frac{x}{b_m} + \beta + v\beta \right)^v \\
&\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-1-v)\beta \right]^{m-1-v} \\
&\quad + (1+m\beta)^{-m} \frac{x b_m}{m} \sum_{v=1}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-v)! (v-1)!} \left(\frac{x}{b_m} + \beta + v\beta \right)^v \\
&\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-1-v)\beta \right]^{m-1-v} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 4.4, Eş. 4.7'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^*(e_2, x) &= P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + (1+m\beta)^{-m} \frac{x b_m}{m} \sum_{v=0}^{m-2} \frac{(m-1)!}{(m-2-v)! v!} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta + v\beta \right)^{v+2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-2-v)\beta \right]^{m-2-v} \\
&= P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + (1+m\beta)^{-m} \frac{x b_m (m-1)}{m} \sum_{v=0}^{m-2} \binom{m-2}{v} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta + v\beta \right)^{v+2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-2-v)\beta \right]^{m-2-v}
\end{aligned}$$

Eş. 3.12 uygun koşullarda yazılırsa

$$P_m^*(e_2, x) = P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + (1+m\beta)^{-m} \frac{x b_m (m-1)}{m} S^* \left(2, m-2, \frac{x}{b_m} + 2\beta, 1 - \frac{x}{b_m} \right)$$

elde edilir. Eş. 3.14 son denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^*(e_2, x) &= P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + (1+m\beta)^{-m} \frac{x b_m (m-1)}{m} \left[(1+m\beta)^{-m} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \right. \\
&\quad \times (1+m\beta + s\beta + t\beta)^{m-2} dt ds \\
&\quad \left. + (1+m\beta)^{-m} (m-2)\beta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} s(1+m\beta + s\beta + t\beta)^{m-3} dt ds \right] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

bulunur. Kolaylık sağlaması açısından son eşitlikteki toplamlar ayrı ayrı incelenebilir.

$$\psi_1^*\left(m, \frac{x}{b_m}\right) = (1 + m\beta)^{-m} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta\right) (1 + m\beta + s\beta + t\beta)^{m-2} dt ds$$

$$\psi_2^*\left(m, \frac{x}{b_m}\right) = (1 + m\beta)^{-m} (m-2)\beta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} s (1 + m\beta + s\beta + t\beta)^{m-3} dt ds$$

olarak yazılsın.

$$\psi_1^*\left(m, \frac{x}{b_m}\right) = (1 + m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} \left(1 + \frac{s\beta + t\beta}{1 + m\beta}\right)^{m-2} dt ds.$$

elde edilir. Son eşitlik için $e^{mu}(1 - mu^2) \leq (1 + u)^m \leq e^{mu}$ eşitsizliği düzenlenirse

$$e^{(m-2)u}(1 - (m-2)u^2) \leq (1 + u)^{m-2} \leq e^{(m-2)u}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} (1 + m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} e^{(m-2)\left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta}\right)} \left(1 - (m-2)\left(\frac{s\beta + t\beta}{1 + m\beta}\right)^2\right) dt ds \\ \leq \psi_1^*\left(m, \frac{x}{b_m}\right) \\ \leq (1 + m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} e^{(m-2)\left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta}\right)} dt ds \end{aligned} \quad (4.9)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada eşitsizliğin sol ve sağ tarafları ayrı ayrı hesaplanabilir.

$$\psi_1^{1*}\left(m, \frac{x}{b_m}\right) = (1 + m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} e^{(m-2)\left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta}\right)} dt ds$$

$$\begin{aligned} \psi_1^{2*}\left(m, \frac{x}{b_m}\right) &= (1 + m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} e^{(m-2)\left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta}\right)} \\ &\quad \times \left(1 - (m-2)\left(\frac{s\beta + t\beta}{1 + m\beta}\right)^2\right) dt ds \end{aligned}$$

olarak yazılsın.

$$\psi_1^{1*}\left(m, \frac{x}{b_m}\right) = (1 + m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} e^{(m-2)\left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta}\right)} dt ds$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \int_0^\infty e^{\left(\frac{-s(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} ds \int_0^\infty e^{\left(\frac{-t(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} dt \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^2 \\
&= \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1^{2*} \left(m, \frac{x}{b_m} \right) &= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} e^{(m-2) \left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta} \right)} \\
&\quad \times \left(1 - (m-2) \left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta} \right)^2 \right) dt ds \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} dt ds \right. \\
&\quad \left. - (m-2) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} \left(\frac{s\beta+t\beta}{1+m\beta} \right)^2 dt ds \right] \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} dt ds \right. \\
&\quad \left. - (m-2) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} \left(\frac{\beta(s+t)}{1+m\beta} \right)^2 dt ds \right] \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - (m-2) \left(\frac{\beta}{1+m\beta} \right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} (s^2 + 2st + t^2) dt ds \right] \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - (m-2) \left(\frac{\beta}{1+m\beta} \right)^2 \left[\int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} s^2 dt ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} st dt ds + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} t^2 dt ds \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^2 \right. \\
&\quad - (m-2) \left(\frac{\beta}{1+m\beta} \right)^2 \left[\int_0^\infty e^{\left(\frac{-s(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} s^2 ds \int_0^\infty e^{\left(\frac{-t(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} dt \right. \\
&\quad + 2 \int_0^\infty e^{\left(\frac{-s(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} s ds \int_0^\infty e^{\left(\frac{-t(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} t dt \\
&\quad \left. \left. + \int_0^\infty e^{\left(\frac{-s(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} ds \int_0^\infty e^{\left(\frac{-t(1+2\beta)}{1+m\beta} \right)} t^2 dt \right] \right] \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - (m-2) \left(\frac{\beta}{1+m\beta} \right)^2 \left[2 \left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^4 + 2 \left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^4 + 2 \left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^4 \right] \right] \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^2 - (m-2) \left(\frac{\beta}{1+m\beta} \right)^2 6 \left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^4 \right] \\
&= (1+m\beta)^{-2} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1+m\beta}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] \\
&= \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] \tag{4.11}
\end{aligned}$$

olup Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 ifadeleri Eş. 4.9 eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] \leq \psi_1^* \left(m, \frac{x}{b_m} \right) \\
&\leq \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \tag{4.12}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\psi_2^* \left(m, \frac{x}{b_m} \right) = (1+m\beta)^{-m} (m-2) \beta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} s (1+m\beta + s\beta + t\beta)^{m-3} dt ds$$

$$= (1 + m\beta)^{-3}(m - 2)\beta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} s \left(1 + \frac{s\beta + t\beta}{1 + m\beta}\right)^{m-3} dt ds \quad (4.13)$$

$(1 + u)^m \leq e^{mu}$ eşitsizliği Eş. 4.13'e göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} (1 + m\beta)^{-3}(m - 2)\beta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} s \left(1 + \frac{s\beta + t\beta}{1 + m\beta}\right)^{m-3} dt ds \\ \leq (1 + m\beta)^{-3}(m - 2)\beta^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s-t} s e^{(m-3)\left(\frac{s\beta + t\beta}{1 + m\beta}\right)} dt ds \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Eşitsizliğin sağ tarafı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \psi_2^{1*}\left(m, \frac{x}{b_m}\right) &= (1 + m\beta)^{-3}(m - 2)\beta^2 \iint_0^\infty e^{\left(\frac{-(s+t)(1+3\beta)}{1+m\beta}\right)} s dt ds \\ &= (1 + m\beta)^{-3}(m - 2)\beta^2 \int_0^\infty e^{\left(\frac{-s(1+3\beta)}{1+m\beta}\right)} s ds \int_0^\infty e^{\left(\frac{-t(1+3\beta)}{1+m\beta}\right)} dt \\ &= (1 + m\beta)^{-3}(m - 2)\beta^2 \left(\frac{1 + m\beta}{1 + 3\beta}\right)^3 \\ &= \frac{(m - 2)\beta^2}{(1 + 3\beta)^3} \end{aligned}$$

Bu ifade Eş. 4.14'de yerine yazılırsa

$$\psi_2^*\left(m, \frac{x}{b_m}\right) \leq \frac{(m - 2)\beta^2}{(1 + 3\beta)^3} \quad (4.15)$$

elde edilir. Eş. 4.12 ve Eş. 4.15 ifadeleri Eş. 4.8 de yazılırsa

$$P_m^*(e_2, x) = P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + \frac{x b_m (m - 1)}{m} \left[\psi_1^*\left(m, \frac{x}{b_m}\right) + \psi_2^*\left(m, \frac{x}{b_m}\right) \right]$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + \frac{x b_m (m-1)}{m} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] &\leq P_m^*(e_2, x) \\
&\leq P_m^*(e_1, x) \frac{b_m}{m} + \frac{x b_m (m-1)}{m} \left\{ \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 + \frac{(m-2)\beta^2}{(1+3\beta)^3} \right\} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

olur. Eş. 4.3, Eş. 4.6 ve Eş. 4.16'dan ispat tamamlanır.

4.1.2. Lemma

$m \in \mathbb{N}$, (b_m) ve (β_m) dizileri $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ özelliklerini sağlayan birer pozitif sayı dizisi olsun. (P_m^*) lineer pozitif operatör dizisi C_ρ uzayından B_ρ uzayına dönüşüm yapar.

İspat

Ağırlık fonksiyonu olarak $\rho(x) = 1 + x^2$ alınsın. Eş. 4.3 ve Eş. 4.16 göz önünde bulundurulursa

$$|P_m^*(\rho; x)| \leq (1 + x^2) K_m$$

koşulunu sağlayan K_m pozitif sayısı bulunabileceği açıktır. Bu ise Teorem 4.1.1 gereğince ispatı tamamlar.

4.1.3. Teorem

$m \in \mathbb{N}$, (b_m) ve (β_m) dizileri $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ özelliklerini sağlayan birer pozitif sayı dizisi olsun. Ayrıca $\forall f \in C_\rho^k(\mathbb{R}^+)$ olacak şekilde

$$P_m^*(f, x) = (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} f\left(\frac{v}{m} b_m\right) \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v}$$

operatörler dizisi için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(f, x) - f\|_\rho = 0 \text{ olur.}$$

İspat

Lemma 4.1.1 ile (P_m^*) 'ın C_ρ uzayından B_ρ uzayına bir dönüşüm olduğu gösterildi. Bundan sonra Teorem 4.1.2 ile verilen üç koşulu göstermek ispatı tamamlayacaktır. Yani;

- i) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_0, x) - 1\|_\rho = 0$
- ii) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_1, x) - x\|_\rho = 0$
- iii) $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_2, x^2) - x^2\|_\rho = 0$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$i) \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_0, x) - 1\|_\rho = 0 \quad (4.17)$$

ii) Eş. 4.6 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \sup_{[0, \infty)} \left\{ \left| \frac{x}{1+\beta} \frac{1}{1+x^2} - \frac{x(m-1)2\beta^2}{(1+x^2)(1+\beta)^3} - \frac{x}{1+x^2} \right| \right\} &\leq \|P_m^*(e_1) - x\|_\rho \\ &\leq \sup_{[0, \infty)} \left\{ \left| \frac{x}{1+\beta} \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right| \right\} \\ \sup_{[0, \infty)} \left\{ \left| \frac{x\beta(1+\beta)^2 + x(m-1)2\beta^2}{(1+x^2)(1+\beta)^3} \right| \right\} &\leq \|P_m^*(e_1) - x\|_\rho \leq \sup_{[0, \infty)} \left\{ \left| \frac{-x\beta}{(1+\beta)(1+x^2)} \right| \right\} \end{aligned}$$

olup iki tarafın da limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{[0, \infty)} \left\{ \left| \frac{x\beta(1+\beta)^2 + x(m-1)2\beta^2}{(1+x^2)(1+\beta)^3} \right| \right\} &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_1, x) - x\|_\rho \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{[0, \infty)} \left\{ \left| \frac{-x\beta}{(1+\beta)(1+x^2)} \right| \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Sıkıştırma teoreminden,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_1, x) - x\|_\rho = 0. \quad (4.18)$$

iii) Eş. 4.16 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}
& \sup_{[0,\infty)} \left\{ \left| \left(\frac{x}{1+\beta} - \frac{x(m-1)2\beta^2}{(1+\beta)^3} \right) \frac{b_m}{m} \frac{1}{1+x^2} \right. \right. \\
& \quad + \left(\frac{x b_m (m-1)}{m} \left(\frac{x}{b_m} + 2\beta \right) \left[\left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] \right) \frac{1}{1+x^2} \\
& \quad \left. \left. - \frac{x^2}{1+x^2} \right| \right\} \leq \|P_m^*(e_2) - x^2\|_\rho \\
& \leq \sup_{[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{x b_m}{(1+\beta)m} \frac{1}{1+x^2} \right. \right. \\
& \quad + \frac{x b_m (m-1)}{m} \left[\frac{x+2\beta b_m}{(1+2\beta)^2 b_m} + \frac{(m-2)\beta^2}{(1+3\beta)^3} \right] \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} \left| \right\} \\
& \sup_{[0,\infty)} \left\{ \left| \left(\frac{x}{1+\beta} - \frac{x(m-1)2\beta^2}{(1+\beta)^3} \right) \frac{b_m}{m} \frac{1}{1+x^2} \right. \right. \\
& \quad + \left(\frac{x^2(m-1) + 2x\beta b_m(m-1)}{m} \left[\left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] \right) \frac{1}{1+x^2} \\
& \quad \left. \left. - \frac{x^2}{1+x^2} \right| \right\} \leq \|P_m^*(e_2) - x^2\|_\rho \\
& \leq \sup_{[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{x b_m}{(1+\beta)m} \frac{1}{1+x^2} \right| + \left| \frac{x^2(m-1) - m(1+2\beta)^2 x^2}{m(1+2\beta)^2(1+x^2)} \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{2x b_m (m-1)\beta}{m(1+2\beta)^2(1+x^2)} \right| + \left| \frac{x b_m (m-1)(m-2)\beta^2}{m(1+3\beta)^3(1+x^2)} \right| \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Her taraf için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
& \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{[0,\infty)} \left\{ \left| \left(\frac{x}{1+\beta} - \frac{x(m-1)2\beta^2}{(1+\beta)^3} \right) \frac{b_m}{m} \frac{1}{1+x^2} + \left(\left(\frac{x^2(m-1)}{m} + \frac{2x\beta b_m(m-1)}{m} \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times \left[\left(\frac{1}{1+2\beta} \right)^2 \left(1 - 6 \frac{(m-2)\beta^2}{(1+2\beta)^2} \right) \right] \right) \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} \right| \right\} \\
& \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_2) - x^2\|_\rho \\
& \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{[0,\infty)} \left\{ \left| \frac{x b_m}{(1+\beta)m(1+x^2)} \right| + \left| \frac{x^2(m-1)}{m(1+2\beta)^2(1+x^2)} - \frac{x^2}{1+x^2} \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{2x b_m (m-1)\beta}{m(1+2\beta)^2(1+x^2)} \right| + \left| \frac{x b_m (m-1)(m-2)\beta^2}{m(1+3\beta)^3(1+x^2)} \right| \right\}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(e_2, x^2) - x^2\|_\rho = 0 \quad (4.19)$$

olur. Eş. 4.17, Eş. 4.18 ve Eş. 4.19'dan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m^*(f, x) - f\|_\rho = 0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.4. Teorem

$E := \left\{ f: x \in [0, \infty), x \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{f(x)}{1+x^2} \text{ yakınsak} \right\}$ kompakt kümesi verilsin. $f \in C[0, \infty) \cap E$ özelliğini sağlayan fonksiyon ve $P_m^*(f, x)$ operatörler dizisi için $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m^*(f, x) = f(x)$ düzgün olarak sağlanır.

İspat

Teoremden istenilen düzgün yakınsaklık için [23,24] çalışmalarında yer alan genel Korovkin teoremi gereğince $[0, \infty)$ aralığının kompakt bir altkümesinde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_m^*(e_i; x) = x^i \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.20)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Lemma 4.1.1 de bulunan Eş. 4.3, Eş. 4.6 ve Eş. 4.16 ifadeleri Eş. 4.20'yi doğruladığından ispat tamamlanır.

4.1.5. Teorem

$m \in \mathbb{N}$, (b_m) ve (β_m) dizileri $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ özelliklerini sağlayan birer pozitif sayı dizisi olsun. Ayrıca $\forall f \in C[0, \infty) \cap E$ olacak şekilde

$$P_m^*(f, x) = (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} f\left(\frac{v}{m} b_m\right) \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v}$$

operatörler dizisi için

$$|P_m^*(f, x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta) \text{ olur.}$$

$$\text{Burada } \delta = \delta_m(x) = \frac{x(m-1)(x+2b_m\beta)}{m(1+2\beta)} + \frac{x(m-1)(m-2)b_m\beta^2}{m(1+3\beta)^3} + \frac{xb_m}{m(1+\beta)} - \frac{2x^2}{(1+\beta)} + x^2 \text{ dir.}$$

İspat

$$\begin{aligned} P_m^*(f, x) - f(x) &= (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} f\left(\frac{v}{m}b_m\right) \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\ &\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v} - f(x) \\ &= (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v} \\ &\quad \times \left(f\left(\frac{v}{m}b_m\right) - f(x)\right) \end{aligned}$$

Eşitliğin her tarafında mutlak değer alınırsa,

$$\begin{aligned} |P_m^*(f, x) - f(x)| &= \left| (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v} \right. \\ &\quad \times \left. \left(f\left(\frac{v}{m}b_m\right) - f(x)\right) \right| \\ &\leq \sup \left| (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v} \right. \\ &\quad \times \left. \left(f\left(\frac{v}{m}b_m\right) - f(x)\right) \right| \\ &\leq (1 + m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v} \\ &\quad \times \sup \left| \left(f\left(\frac{v}{m}b_m\right) - f(x)\right) \right| \end{aligned}$$

$$\left| \frac{v}{m}b_m - x \right| < \delta \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
& (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \\
& \quad \times \sup \left| \left(f\left(\frac{v}{m}b_m\right) - f(x) \right) \right| \\
& = (1+m\beta)^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \\
& \quad \times \omega\left(f, \left| \frac{v}{m}b_m - x \right| \right)
\end{aligned}$$

$\omega(f, \lambda\delta) \leq (1 + \lambda\delta)\omega(f, \delta)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \omega\left(f, \left| \frac{v}{m}b_m - x \right| \right) \\
& \leq (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \\
& \quad \times \omega(f, \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \left| \frac{v}{m}b_m - x \right| \right) \\
& = \omega(f, \delta) \left[(1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \right. \\
& \quad \left. + (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \right. \\
& \quad \left. \times \frac{1}{\delta} \left| \frac{v}{m}b_m - x \right| \right] \\
& = \omega(f, \delta(x)) \left[1 + \frac{1}{\delta_m(x)} (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \right. \\
& \quad \left. \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta \right]^{m-v} \left| \frac{v}{m}b_m - x \right| \right] \\
& = \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} P_m^* \left(\left| \frac{v}{m}b_m - x \right|, x \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$P_m^*(fg, x) \leq (P_m^*(f^2; x))^{\frac{1}{2}}(P_m^*(g^2; x))^{\frac{1}{2}}$ olarak yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}
& \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} P_m^* \left(\left| \frac{\nu}{m} b_m - x \right|; x \right) \right] \\
& \leq \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} P_m^* \left(\left(\frac{\nu}{m} b_m - x \right)^2; x \right)^{\frac{1}{2}} P_m^*(1^2; x)^{\frac{1}{2}} \right] \\
& = \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} P_m^* \left(\left(\frac{\nu}{m} b_m \right)^2 - 2x \frac{\nu}{m} b_m + x^2; x \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
& = \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(P_m^* \left(\left(\frac{\nu}{m} b_m \right)^2; x \right) + P_m^* \left(-2x \frac{\nu}{m} b_m; x \right) + P_m^*(x^2; x) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
& = \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} (P_m^*(e_2; x) - 2x P_m^*(e_1; x) + x^2 P_m^*(e_0; x))^{\frac{1}{2}} \right] \\
& = \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(P_m^*(e_1; x) \frac{b_m}{m} + \frac{x b_m (m-1)}{m} [A_m + B_m] - 2x P_m^*(e_1; x) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
& \leq \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(\left(\frac{b_m}{m} - 2x \right) \frac{x}{1+\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{x b_m (m-1)}{m} \left[\frac{x + 2b_m \beta}{b_m (1+2\beta)} + \frac{(m-2)\beta^2}{(1+3\beta)^3} \right] + x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
& = \omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} \left(\frac{x(m-1)(x + 2b_m \beta)}{m(1+2\beta)} + \frac{x(m-1)(m-2)b_m \beta^2}{m(1+3\beta)^3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{x b_m}{m(1+\beta)} - \frac{2x^2}{(1+\beta)} + x^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

$\delta_m(x) = \frac{x(m-1)(x+2b_m\beta)}{m(1+2\beta)} + \frac{x(m-1)(m-2)b_m\beta^2}{m(1+3\beta)^3} + \frac{x b_m}{m(1+\beta)} - \frac{2x^2}{(1+\beta)} + x^2$ olarak seçilirse

$$\omega(f, \delta) \left[1 + \frac{1}{\delta} P_m^* \left(\left| \frac{k}{m} b_m - x \right|; x \right) \right] \leq \omega(f, \delta_m(x)) \left(1 + \frac{1}{\delta} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|P_m^*(f, x) - f(x)| \leq 2\omega(f, \delta) \text{ olur.}$$

4.1.6. Teorem

ω eğer bir süreklilik modülü fonksiyonu ise $P_m^*(\omega, x)$ de bir süreklilik modülü fonksiyonudur.

İspat

$x, y \in [0, b_m), x \leq y$ olsun. $P_m^*(y, x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P_m^*(\omega, y) = (1 + m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \omega \left(\frac{l}{m} b_m \right) \binom{m}{l} \frac{y}{b_m} \left(\frac{y}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \times \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-l)\beta \right]^{m-l} \quad (4.21)$$

Eş. 3.2 ile verilen Jensen eşitliğinde $x \rightarrow \frac{x}{b_m}, y \rightarrow \frac{y-x}{b_m}, m \rightarrow l$ yazılırsa;

$$\frac{y}{b_m} \left(\frac{y}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} = \sum_{v=0}^l \binom{l}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left[\frac{y-x}{b_m} + (l-v)\beta \right]^{l-v-1} \quad (4.22)$$

elde edilir.

Eş. 4.22, Eş. 4.21'de yerine yazılırsa

$$P_m^*(\omega, y) = (1 + m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \omega \left(\frac{l}{m} b_m \right) \binom{m}{l} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-l)\beta \right]^{m-l} \times \sum_{v=0}^l \binom{l}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left[\frac{y-x}{b_m} + (l-v)\beta \right]^{l-v-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^l \sum_{l=0}^m \omega\left(\frac{l}{m} b_m\right) \binom{m}{l} \binom{l}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \frac{y-x}{b_m} \left[\frac{y-x}{b_m} + (l-v)\beta\right]^{l-v-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-l)\beta\right]^{m-l} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=v}^m \omega\left(\frac{l}{m} b_m\right) \frac{m!}{(m-l)! (l-v)! v!} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \frac{y-x}{b_m} \left[\frac{y-x}{b_m} + (l-v)\beta\right]^{l-v-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-l)\beta\right]^{m-l}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son ifadede $l \rightarrow v + l$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^*(\omega, y) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \omega\left(\frac{v+l}{m} b_m\right) \frac{m!}{(m-v-l)! l! v!} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \frac{y-x}{b_m} \left[\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right]^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_m^*(\omega, x) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \omega\left(\frac{v}{m} b_m\right) \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right]^{m-v}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Eş. 3.1 eşitliğinde $x \rightarrow \frac{y-x}{b_m}$, $y \rightarrow 1 - \frac{y}{b_m}$, $m \rightarrow m - v$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{x}{b_m} + (m-v)\beta\right)^{m-v} &= \sum_{l=0}^{m-v} \binom{m-v}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

bulunur.

Eş. 4.25, Eş. 4.24'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
P_m^*(\omega, x) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \omega\left(\frac{v}{m}b_m\right) \binom{m}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{m-v} \binom{m-v}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \omega\left(\frac{v}{m}b_m\right) \binom{m}{v} \binom{m-v}{l} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \omega\left(\frac{v}{m}b_m\right) \frac{m!}{v! l! (m-v-l)!} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l} \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Eş. 4.23 ve Eş. 4.26'dan

$$\begin{aligned}
P_m^*(\omega, y) - P_m^*(\omega, x) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \left(\omega\left(\frac{v+l}{m}b_m\right) - \omega\left(\frac{v}{m}b_m\right) \right) \\
&\quad \times \frac{m!}{v! l! (m-v-l)!} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$\omega\left(\frac{v+l}{m}b_m\right) - \omega\left(\frac{v}{m}b_m\right) \leq \omega\left(\frac{l}{m}b_m\right)$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
P_m^*(\omega, y) - P_m^*(\omega, x) &\leq (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \omega\left(\frac{l}{m}b_m\right) \frac{m!}{v! l! (m-v-l)!} \\
&\quad \times \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \sum_{v=0}^{m-l} \omega\left(\frac{l}{m}b_m\right) \frac{m!}{l! (m-l)!} \frac{(m-l)!}{v! (m-v-l)!} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \\
&\quad \times \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \omega \left(\frac{l}{m} b_m \right) \binom{m}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \\
&\quad \times \sum_{v=0}^{m-l} \binom{m-l}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta \right]^{m-v-l} \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Eş. 3.1’de $x \rightarrow \frac{x}{b_m}, y \rightarrow 1 - \frac{y}{b_m}, m \rightarrow m-l$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{y-x}{b_m} + (m-l)\beta \right)^{m-l} &= \sum_{v=0}^{m-l} \binom{m-l}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta \right]^{m-v-l} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 4.29, Eş. 4.28’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^*(\omega, y) - P_m^*(\omega, x) &\leq (1+m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \omega \left(\frac{l}{m} b_m \right) \binom{m}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{y-x}{b_m} + (m-l)\beta \right]^{m-l} \\
&= P_m^*(\omega, (y-x))
\end{aligned}$$

Böylece Tanım 3.2.2 ile verilen iii) koşulu sağlanır. Eş. 4.27’den ii) sağlandığı açıktır.

Ayrıca $\lim_{x \rightarrow 0} P_m^*(\omega, x) = 0$ olacağından ispat tamamlanır.

4.1.7. Teorem

Eğer $f \in Lip_M^\alpha$ ise $P_m^*(f, x) \in Lip_M^\alpha$ olur.

İspat

$x, y \in [0, b_m), x \leq y$ olsun. Eş. 4.27 eşitliğinde ω fonksiyonu yerine f fonksiyonu yazılırsa aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x) = (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \left(f\left(\frac{v+l}{m}b_m\right) - f\left(\frac{v}{m}b_m\right) \right) \frac{m!}{v! l! (m-v-l)!} \\ \times \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta \right]^{m-v-l}.$$

Eşitliğin iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x)| = (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \left| f\left(\frac{v+l}{m}b_m\right) - f\left(\frac{v}{m}b_m\right) \right| \frac{m!}{v! l! (m-v-l)!} \\ \times \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \\ \times \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta \right]^{m-v-l} \quad (4.30)$$

eşitliği elde edilir.

$f \in Lip_M^\alpha$ olduğundan son eşitlik yerine

$$|P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x)| \leq (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} M \left(\frac{l}{m}b_m \right)^\alpha \frac{m!}{v! l! (m-v-l)!} \\ \times \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta \right]^{m-v-l} \\ = M(1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \left(\frac{l}{m}b_m \right)^\alpha \frac{m!}{v! l! (m-v-l)!} \\ \times \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \\ \times \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta \right]^{m-v-l} \quad (4.31)$$

yazılabilir.

$$|P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x)| \leq M (1+m\beta)^{-m} \sum_{v=0}^m \sum_{l=0}^{m-v} \left(\frac{l}{m}b_m \right)^\alpha \frac{m! (m-l)!}{v! l! (m-v-l)! (m-l)!} \\ \times \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta \right)^{v-1} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta \right)^{l-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta \right]^{m-v-l}$$

$$\begin{aligned}
&= M (1+m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m\right)^\alpha \binom{m}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \\
&\quad \times \sum_{v=0}^{m-l} \binom{m-l}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l} \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Eş. 3.1'de $m \rightarrow m-l, y \rightarrow 1 - \frac{y}{b_m}, x \rightarrow \frac{x}{b_m}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{y-x}{b_m} + (m-l)\beta\right)^{m-l} \\
&= \sum_{v=0}^{m-l} \binom{m-l}{v} \frac{x}{b_m} \left(\frac{x}{b_m} + v\beta\right)^{v-1} \left[1 - \frac{y}{b_m} + (m-v-l)\beta\right]^{m-v-l} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eş. 4.33, Eş. 4.32 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x)| &\leq M (1+m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m\right)^\alpha \binom{m}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \\
&\quad \times \left(1 - \frac{y-x}{b_m} + (m-l)\beta\right)^{m-l} \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Eş. 4.34'e $p = \frac{1}{\alpha}, q = \frac{1}{1-\alpha}$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&|P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x)| \\
&\leq M \left\{ (1+m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m\right)^\alpha \binom{m}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \left(1 - \frac{y-x}{b_m} + (m-l)\beta\right)^{m-l} \right\}^\alpha \\
&\quad \left\{ (1+m\beta)^{-m} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \frac{y-x}{b_m} \left(\frac{y-x}{b_m} + l\beta\right)^{l-1} \left(1 - \frac{y-x}{b_m} + (m-l)\beta\right)^{m-l} \right\}^{1-\alpha} \\
&= M \{P_m^*(e_1; y-x)\}^\alpha \{P_m^*(e_0; y-x)\}^{1-\alpha} \\
&= M \{P_m^*(e_1; y-x)\}^\alpha
\end{aligned}$$

olur.

Eş. 4.6 eşitsizliğinin sağ tarafı kullanılırsa

$$|P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x)| \leq M\{P_m^*(e_1; y - x)\}^\alpha \leq M\left(\frac{y - x}{1 + \beta}\right)^\alpha$$

elde edilir.

$$\Omega = M\left(\frac{1}{1 + \beta}\right)^\alpha \text{ seçilirse}$$

$$|P_m^*(f, y) - P_m^*(f, x)| \leq \Omega |y - x|^\alpha$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Aşağıda yazılı teorem ve lemmalar [16,17]'de verilmiştir.

4.1.2. Lemma

$e_i(t) = t^i$, ($i = 0, 1, 2$) olmak üzere $Q_m^*(f, x)$ operatörü için aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$\text{i) } Q_m^*(e_0, x) = 1,$$

$$\text{ii) } Q_m^*(e_1, x) = x,$$

$$\text{iii) } Q_m^*(e_2, x) \leq x(x + 2b_m\beta)(1 + m\beta) + \frac{xb_m}{m}(m\beta)^2(1 + m\beta) + x(x + 2b_m\beta)m\beta + \frac{xb_m}{m}(m\beta)^3 + \frac{xb_m}{m}.$$

4.1.8. Teorem

$m \in \mathbb{N}$, (b_m) ve (β_m) dizileri $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ özelliklerini sağlayan birer pozitif sayı dizisi olsun. Ayrıca $\forall f \in C_\rho^k(\mathbb{R}^+)$ olacak şekilde $Q_m^*(f, x)$ operatörü için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|Q_m^*(f, x) - f\|_\rho = 0 \text{ olur.}$$

4.1.9. Teorem

$m \in \mathbb{N}$, (b_m) ve (β_m) dizileri $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\beta_m = 0$ özelliklerini sağlayan birer pozitif sayı dizisi olsun. Ayrıca $\forall f \in C[0, \infty) \cap E$ olacak şekilde $Q_m^*(f, x)$ operatörü için

$$|P_m^*(f, x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_m(x)) \text{ olur.}$$

Burada $\delta = \delta_m(x) = x^2(2b_m\beta) + 2xb_m\beta(1 + m\beta) + x\frac{b_m}{m}(m\beta)^2(1 + 2m\beta) + x\frac{b_m}{m}$ dir.

4.1.10. Teorem

ω eğer bir süreklilik modülü fonksiyonu ise $Q_m^*(\omega, x)$ de bir süreklilik modülü fonksiyonudur.

4.1.11. Teorem

Eğer $f \in Lip_M^\alpha$ ise $Q_m^*(f, x) \in Lip_M^\alpha$ olur.

4.2. İki Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri

Bu kısımda dördüncü bölümde verilen Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri ve üçüncü bölümde verilen iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri yardımıyla iki değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri tanımlanacaktır. Üçüncü bölümde olduğu gibi tensör çarpımla ve non-tensör çarpımla elde edilen iki değişkenli operatörler ayrı ayrı incelenecektir.

4.2.1. Tensör çarpım Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri

$\mathbb{R}^{++} = [0, \infty) \times [0, \infty)$ ve $\forall f \in C_\rho(\mathbb{R}^{++})$ olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$, α, β , sırasıyla n ve m ye bağlı birer pozitif reel sayı dizisi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n\beta_n = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} m\sigma_m = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \infty$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m}{m} = 0$ sağlansın.

$$P_{n,m}^*(f; x_1, x_2; \beta, \sigma) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f\left(\frac{k}{n}b_n, \frac{l}{m}b_m\right) t_{n,k}^*(x_1; \beta) u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \quad (4.35)$$

ifadesi iki değişkenli tensör çarpım birinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörüdür. Burada,

$$t_{n,k}^*(x_1; \beta) = (1 + n\beta)^{-n} \binom{n}{k} \frac{x_1}{b_n} \left(\frac{x_1}{b_n} + k\beta\right)^{k-1} \left[1 - \frac{x_1}{b_n} + (n-k)\beta\right]^{n-k}$$

$$u_{m,l}^*(x_2; \sigma) = (1 + m\sigma)^{-m} \binom{m}{l} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + l\sigma\right)^{l-1} \left[1 - \frac{x_2}{b_m} + (m-l)\sigma\right]^{m-l}$$

Aynı koşullarda iki değişkenli tensör çarpım ikinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörü;

$$Q_{n,m}^*(f; x_1, x_2; \beta, \sigma) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m f\left(\frac{k}{n}b_n, \frac{l}{m}b_m\right) p_{n,k}^*(x_1; \beta) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \quad (4.36)$$

$$p_{n,k}^*(x_1; \beta) = (1 + n\beta)^{1-n} \binom{n}{k} \frac{x_1}{b_n} \left(\frac{x_1}{b_n} + k\beta\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x_1}{b_n}\right) \left[1 - \frac{x_1}{b_n} + (n-k)\beta\right]^{n-k-1}$$

$$q_{m,l}^*(x_2; \sigma) = (1 + m\sigma)^{1-m} \binom{m}{l} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + l\sigma\right)^{l-1} \left(1 - \frac{x_2}{b_m}\right) \left[1 - \frac{x_2}{b_m} + (m-l)\sigma\right]^{m-l-1}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 2.2.2 ile verilen Volkov teoremi iki değişkenli fonksiyonların yaklaşımında kullanılmaktadır ancak Korovkin teoreminde olduğu gibi ağırlıklı uzaylarda çalışmamaktadır. Hacısalihoğlu ve Hacıyev tarafından [15]'te verilmiş olan teorem aşığıdaki gibidir.

4.2.1. Teorem

$\rho(x)$, ağırlık fonksiyonu, $A_n, C_\rho(\mathbb{R}^m)$ 'den $B_\rho(\mathbb{R}^m)$ 'e dönüşüm yapan lineer pozitif operatör dizisi olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $f \in C_\rho(\mathbb{R}^m)$ fonksiyonu için

$$\|A_n(f; x) - f(x)\|_\rho \rightarrow 0$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$F_0(x) = \frac{1}{1 + |x|^2} \rho(x)$$

$$F_j(x) = \frac{x_j}{1 + |x|^2} \rho(x); j = 1, 2, \dots, m$$

$$F_{m+1}(x) = \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \rho(x)$$

fonksiyonları için $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|A_n(F_j; x) - F_j(x)\|_\rho \rightarrow 0; (j = 0, 1, 2, \dots, m + 1)$$

olmasıdır.

4.2.2. Teorem

$\mathbb{R}^{++} = [0, \infty] \times [0, \infty]$ ve $\forall f \in C_\rho(\mathbb{R}^{++})$ olmak üzere Eş. 4.35 ile verilen iki değişkenli tensör çarpım birinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörü için

$$P_{n,m}^*(f; x_1, x_2; \beta, \sigma) \rightrightarrows f, (n, m \rightarrow \infty) \text{ olur.}$$

İspat:

$$\begin{aligned} P_{n,m}^*(1; x_1, x_2; \beta, \sigma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m t_{n,k}^*(x_1; \beta) u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\ &= \sum_{k=0}^n t_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$P_{n,m}^*(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \sigma) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{k}{n} b_n\right) t_{n,k}^*(x_1; \beta) u_{m,l}^*(x_2; \sigma)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n\right) t_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= P_n^*(e_1, x_1)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
P_{n,m}^*(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \sigma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m\right) t_{n,k}^*(x_1; \beta) u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n t_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m\right) u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= P_m^*(e_1, x_2)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
P_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 + \left(\frac{l}{m} b_m\right)^2 \right) t_{n,k}^*(x_1; \beta) u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 t_{n,k}^*(x_1; \beta) u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m\right)^2 t_{n,k}^*(x_1; \beta) u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n\right)^2 t_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n t_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m\right)^2 u_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= P_n^*(e_2, x_1) + P_m^*(e_2, x_2)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\|P_{n,m}^*(1; x_1, x_2; \beta, \sigma) - 1\|_\rho = 0 \tag{4.41}$$

$$\|P_{n,m}^*(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \sigma) - x_1\|_\rho = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{P_{n,m}^*(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \sigma)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right|$$

Eş. 4.38'den

$$\begin{aligned}
\|P_{n,m}^*(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \sigma) - x_1\|_\rho &= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{P_n^*(e_1, x_1)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)(1 + \beta)} - \frac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_1 - x_1 - x_1 \beta}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_1 \beta}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right|
\end{aligned}$$

bulunur. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_1 \beta}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| = 0 \quad (4.42)$$

elde edilir.

$$\|P_{n,m}^*(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \sigma) - x\|_\rho = \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{P_{n,m}^*(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \sigma)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right|$$

Eş. 4.39'dan

$$\begin{aligned}
\|P_{n,m}^*(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \sigma) - x_1\|_\rho &= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{P_m^*(e_1, x_2)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)(1 + \sigma)} - \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_2 - x_2 - x_2 \sigma}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_2 \sigma}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right|
\end{aligned}$$

bulunur. $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{x_2 \sigma}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| = 0 \quad (4.43)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\|P_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma) - (x_1^2 + x_2^2)\|_\rho \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{P_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{P_n^*(e_2, x_2) + P_m^*(e_2, x_2)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{P_n^*(e_2, x_1) - x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \frac{P_m^*(e_2, x_2) - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left\{ \left| \frac{P_n^*(e_2, x_1) - x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| + \left| \frac{P_m^*(e_2, x_2) - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right\} \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left\{ \left| \frac{x_2 b_n}{(1 + \beta)n(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right. \right. \\
&\quad + \frac{x_1 b_n(n-1)}{n(1 + x_1^2 + x_2^2)} \left[\frac{x_1 + 2\beta b_n}{(1 + 2\beta)^2 b_n} + \frac{(n-2)\beta^2}{(1 + 3\beta)^3} \right] - \frac{x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \left. \right| \\
&\quad + \left| \frac{x_2 b_m}{(1 + \sigma)m(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right. \\
&\quad + \frac{x_2 b_m(n-1)}{m(1 + x_1^2 + x_2^2)} \left[\frac{x_2 + 2\sigma b_m}{(1 + 2\sigma)^2 b_m} + \frac{(n-2)\sigma^2}{(1 + 3\sigma)^3} \right] - \frac{x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \left. \right\} \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left\{ \left| \frac{x_1 b_n}{(1 + \beta)n(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_1^2(n-1) - n(1 + 2\beta)^2 x_1^2}{n(1 + 2\beta)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right. \\
&\quad + \left| \frac{2x_1 \beta b_n(n-1)}{n(1 + 2\beta)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_1 \beta^2 b_n(n-1)(n-2)}{n(1 + 3\beta)^3(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \left. \right| \\
&\quad + \left| \frac{x_2 b_m}{(1 + \sigma)m(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_2^2(m-1) - m(1 + 2\sigma)^2 x_2^2}{m(1 + 2\sigma)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \\
&\quad + \left| \frac{2x_2 \sigma b_m(m-1)}{m(1 + 2\sigma)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_2 \sigma^2 b_m(m-1)(m-2)}{m(1 + 3\sigma)^3(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \left. \right\} \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left[\left| \frac{x_1 b_n}{(1 + \beta)n(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_1^2(n-1) - n(1 + 2\beta)^2 x_1^2}{n(1 + 2\beta)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right. \\
&\quad + \left| \frac{2x_1 \beta b_n(n-1)}{n(1 + 2\beta)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_1 \beta^2 b_n(n-1)(n-2)}{n(1 + 3\beta)^3(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \left. \right] \\
&\quad + \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left[\left| \frac{x_2 b_m}{(1 + \sigma)m(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_2^2(m-1) - m(1 + 2\sigma)^2 x_2^2}{m(1 + 2\sigma)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right. \\
&\quad + \left| \frac{2x_2 \sigma b_m(m-1)}{m(1 + 2\sigma)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_2 \sigma^2 b_m(m-1)(m-2)}{m(1 + 3\sigma)^3(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \left. \right]
\end{aligned}$$

son durumda eşitsizliğin her iki tarafında $n \rightarrow \infty$ ve $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|P_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma) - (x_1^2 + x_2^2)\|_\rho$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left[\left| \frac{x_1 b_n}{(1 + \beta)n(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_1^2(n-1) - n(1 + 2\beta)^2 x_1^2}{n(1 + 2\beta)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{2x_1 \beta b_n(n-1)}{n(1 + 2\beta)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{x_1 \beta^2 b_n(n-1)(n-2)}{n(1 + 3\beta)^3(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right] \\
&\quad + \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left[\left| \frac{x_2 b_m}{(1 + \sigma)m(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{x_2^2(m-1) - m(1 + 2\sigma)^2 x_2^2}{m(1 + 2\sigma)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| + \left| \frac{2x_2 \sigma b_m(m-1)}{m(1 + 2\sigma)^2(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{x_2 \sigma^2 b_m(m-1)(m-2)}{m(1 + 3\sigma)^3(1 + x_1^2 + x_2^2)} \right| \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Eş. 4.41, Eş. 4.42, Eş. 4.43 ve Eş. 4.44'den ispat tamamlanır.

4.2.3. Teorem

$\mathbb{R}^{++} = [0, \infty] \times [0, \infty]$ ve $\forall f \in C_\rho(\mathbb{R}^{++})$ olmak üzere Eş. 4.36 ile verilen iki değişkenli tensör çarpım ikinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörü için

$Q_{n,m}^*(f; x_1, x_2; \beta, \sigma) \Rightarrow f, (n, m \rightarrow \infty)$ olur.

İspat

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}^*(1; x_1, x_2; \beta, \sigma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m p_{n,k}^*(x_1; \beta) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n p_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}^*(f_{1,0}; x_1, y; \beta, \sigma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{k}{n} b_n \right) p_{n,k}^*(x_1; \beta) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n \right) p_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m q_{m,l}^*(y; \sigma) \\
&= Q_n^*(e_1, x_1) \\
&= x_1
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}^*(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \sigma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m \right) p_{n,k}^*(x_1; \beta) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n p_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m \right) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= Q_m^*(e_1, x_2) \\
&= x_2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\left(\frac{k}{n} b_n \right)^2 + \left(\frac{l}{m} b_m \right)^2 \right) p_{n,k}^*(x_1; \beta) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{k}{n} b_n \right)^2 p_{n,k}^*(x_1; \beta) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m \right)^2 p_{n,k}^*(x_1; \beta) q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} b_n \right)^2 p_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n p_{n,k}^*(x_1; \beta) \sum_{l=0}^m \left(\frac{l}{m} b_m \right)^2 q_{m,l}^*(x_2; \sigma) \\
&= Q_n^*(e_2, x_1) + Q_m^*(e_2, x_2)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\|Q_{n,m}^*(1; x_1, x_2; \beta, \sigma) - 1\|_\rho = 0 \tag{4.49}$$

$$\|Q_{n,m}^*(f_{1,0}; x_1, x_2; \beta, \sigma) - x_1\|_\rho = 0 \tag{4.50}$$

$$\|Q_{n,m}^*(f_{0,1}; x_1, x_2; \beta, \sigma) - x_2\|_\rho = 0 \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
&\|Q_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma) - (x_1^2 + x_2^2)\|_\rho \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{Q_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{Q_n^*(e_2, x_1) + Q_m^*(e_2, x_2)}{1 + x_1^2 + x_2^2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \\
&= \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left| \frac{Q_n^*(e_2, x_1) - x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \frac{Q_m^*(e_2, x_2) - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left\{ \left| \frac{Q_n^*(e_2, x_1) - x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| + \left| \frac{Q_m^*(e_2, x_2) - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right\} \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left\{ \left| \frac{x_1(x_1 + 2\beta b_n)(1 + 2n\beta) + x_1 b_n n \beta^2 (1 + n\beta) + x_1 b_n n^2 \beta^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{x_1 b_n}{n(1 + x_1^2 + x_2^2)} - \frac{x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{x_2(x_2 + 2\sigma b_m)(1 + 2m\sigma) + x_2 b_m m \sigma^2 (1 + m\sigma) + x_2 b_m m^2 \sigma^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{x_2 b_m}{m(1 + x_1^2 + x_2^2)} - \frac{x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right\} \\
&\leq \sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left\{ \left| \frac{2x_1 \beta b_n (1 + 2n\beta) + x_1 b_n n \beta^2 (1 + n\beta) + x_1 b_n n^2 \beta^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{x_1 b_n}{n(1 + x_1^2 + x_2^2)} + \frac{2n\beta x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{2x_2 \sigma b_m (1 + 2m\sigma) + x_2 b_m m \sigma^2 (1 + m\sigma) + x_2 b_m m^2 \sigma^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{x_2 b_m}{m(1 + x_1^2 + x_2^2)} + \frac{2m\sigma x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right\} \tag{4.52}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eşitsizliğin her tarafında $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ için limit hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|Q_{n,m}^*(f_2; x_1, x_2; \beta, \sigma) - (x_1^2 + x_2^2)\|_\rho \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{++}} \left\{ \left| \frac{2x_1 \beta b_n (1 + 2n\beta) + x_1 b_n n \beta^2 (1 + n\beta) + x_1 b_n n^2 \beta^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right. \right. \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{x_1 b_n}{n(1 + x_1^2 + x_2^2)} + \frac{2n\beta x_1^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{2x_2 \sigma b_m (1 + 2m\sigma) + x_2 b_m m \sigma^2 (1 + m\sigma) + x_2 b_m m^2 \sigma^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left| \frac{x_2 b_m}{m(1 + x_1^2 + x_2^2)} + \frac{2m\sigma x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right| \right\} \Bigg] \\
&= 0 \tag{4.53}
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 4.49, Eş. 4.50, Eş. 4.51 ve Eş. 4.53'ten ispat tamamlanır.

4.2.2. Non-tensör çarpım Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri

Üçüncü bölümde $[0,1]$ aralığında iki değişkenli non-tensör çarpım Cheney Sharma operatörleri ve dördüncü bölümün ilk kısmında sınırsız aralıkta Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri verilmişti. Buradan hareketle üçüncü bölüm ile aynı notasyon kullanılarak iki değişkenli non-tensör çarpım Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) = (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \binom{n}{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{X}^E}{b_m} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-E} \\ \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|} \quad (4.54)$$

$$Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) = (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{X}^E}{b_m} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-E} \\ \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-1} \quad (4.55)$$

Burada Eş. 4.54 ve Eş. 4.55. sırasıyla birinci ve ikinci tip operatörlerdir.

4.2.4. Teorem

$T = \{x_i: x_i \in [0, \infty), i \in \{1,2\}, x_i \in \mathbb{R}\}$ olsun. $f \in Lip_M(\mu, T)$ ise $P_m^{\beta*}(f) \in Lip_M(\mu, T)$ olur.

İspat

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T$ ve $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ yani $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$ olsun.

$$P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) = (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \frac{\mathbf{Y}^E}{b_m} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \\ \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \frac{y_1}{b_m} \left(\frac{y_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \frac{y_2}{b_m} \left(\frac{y_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Eş. 3.2’de $x \rightarrow \frac{x_1}{b_m}, y \rightarrow \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}, m \rightarrow l_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{y_1}{b_m} \left(\frac{y_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} &= \sum_{k_1=0}^{l_1} \binom{l_1}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta\right)^{k_1-1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \\
&\quad \times \left[\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + (l_1 - k_1)\beta\right]^{l_1-k_1-1}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

elde edilir.

Eş. 3.2’de $x \rightarrow \frac{x_2}{b_m}, y \rightarrow \frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}, m \rightarrow l_2$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{y_2}{b_m} \left(\frac{y_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} &= \sum_{k_2=0}^{l_2} \binom{l_2}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2\beta\right)^{k_2-1} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \\
&\quad \times \left[\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (l_2 - k_2)\beta\right]^{l_2-k_2-1}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

elde edilir. Eş. 4.57. ve Eş. 4.58 ifadeleri Eş. 4.56’da yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \\
&\quad \times \sum_{k_1=0}^{l_1} \binom{l_1}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta\right)^{k_1-1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left[\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + (l_1 - k_1)\beta\right]^{l_1-k_1-1} \\
&\quad \times \sum_{k_2=0}^{l_2} \binom{l_2}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2\beta\right)^{k_2-1} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left[\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (l_2 - k_2)\beta\right]^{l_2-k_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{L}|)! (l_1-k_1)! (l_2-k_2)!} \\
&\quad \times \frac{x_1}{b_m} \frac{x_2}{b_m} \times \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta\right)^{k_1-1} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2\beta\right)^{k_2-1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \\
&\quad \times \left[\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + (l_1-k_1)\beta\right]^{l_1-k_1-1} \left[\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (l_2-k_2)\beta\right]^{l_2-k_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{n-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{L}|)! (l_1-k_1)! (l_2-k_2)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L}-\mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte sınırlar değiştirilirse

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{L}|)! (l_1-k_1)! (l_2-k_2)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L}-\mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=k_1}^m \sum_{k_2=0}^{m-l_1} \sum_{l_2=k_2}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{L}|)! (l_1-k_1)! (l_2-k_2)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L}-\mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son denklemde $\mathbf{L}$ yerine $\mathbf{K} + \mathbf{L}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L}-\mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{X}^{\mathbf{E}}}{b_m} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

bulunur.

Eş. 3.1 de $x \rightarrow \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}$, $y \rightarrow 1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}$, $m \rightarrow k_1 - k_2$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left[1 - \frac{x_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m - k_1 - k_2)\beta\right]^{m-k_1-k_2} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-k_1-k_2} \binom{m-k_1-k_2}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m - k_1 - k_2 - l_1)\beta\right]^{m-k_1-k_2-l_1} \\
&\left[1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m-|\mathbf{K}|-l_1)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-l_1}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

elde edilir.

Eş. 3.1’de $x \rightarrow \frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}$, $y \rightarrow 1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow k_1 - k_2 - l_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (n - k_1 - k_2 - l_1)\beta \right]^{m-k_1-k_2-l_1} \\
&= \sum_{l_2=0}^{m-k_1-k_2-l_1} \binom{m-k_1-k_2-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta \right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \frac{y_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m - k_1 - k_2 - l_1 - l_2)\beta \right]^{m-k_1-k_2-l_1-l_2} \\
& \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m - |\mathbf{K}| - l_1)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \\
&= \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta \right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Eş. 4.62, Eş. 4.61’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \left| \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{K}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|} = \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta \right)^{l_1-1} \\
&\quad \times \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta \right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta \right)^{l_1-1} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta \right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Eş. 4.63, Eş. 4.61’de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \frac{\mathbf{X}^E}{b_m} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-E} \\
&\quad \times \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \frac{\mathbf{X}^E}{b_m} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-E} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \tag{4.64}
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 4.59 ve Eş. 4.64 kullanılarak $P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X})$ hesaplanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-n} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \\
&\quad \times \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-E} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^E \\
&\quad \times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-E} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{k_1=0}^{m-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \\
&\quad \times \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-E} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^E \\
&\quad \times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-E} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{m-|L|} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|L|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \\
&\times \frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

son eşitlikte yer alan $\frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!}$ yerine $\frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} = \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2}$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{m-|L|} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|L|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \\
&\times \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta\right)^{k_1-1} \\
&\times \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_1\beta\right)^{k_1-1} \\
&\times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \tag{4.65}
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 3.1'de $x \rightarrow \frac{x_2}{b_m}$, $y \rightarrow 1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - k_1 - l_2 - l_1$ yazılırsa

$$\left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m - k_1 - l_1 - l_2)\beta\right]^{m-k_1-l_1-l_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1-l_2} \binom{m-k_1-l_1-l_2}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2 \beta \right)^{k_2-1} \\
&\times \left[1 - \frac{y_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m-k_1-k_2-l_1-l_2)\beta \right]^{m-k_1-k_2-l_1-l_2} \\
&\left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m-k_1-|\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \\
&= \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2 \beta \right)^{k_2-1} \\
&\times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|} \tag{4.66}
\end{aligned}$$

olur.

Eş. 4.66, Eş. 4.65'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1 \beta \right)^{k_1-1} \\
&\times \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m-k_1-|\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \tag{4.67}
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 3.1'de $x \rightarrow \frac{x_1}{b_m}$, $y \rightarrow 1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - l_2 - l_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \frac{x_1}{b_m} + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m-l_1-l_2)\beta \right]^{m-l_1-l_2} \\
&= \sum_{k_1=0}^{m-l_1-l_2} \binom{m-l_1-l_2}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1 \beta \right)^{k_1-1} \\
&\times \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m-k_1-l_1-l_2)\beta \right]^{m-k_1-l_1-l_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[1 + \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|} &= \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta\right)^{k_1-1} \\
&\times \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - k_1 - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-k_1-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Eş. 4.68 Eş. 4.67’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K} + \mathbf{L}}{m} b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^E \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{L-E} \\
&\times \left[1 + \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

elde edilir.

$f \in Lip_M(\mu, T)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X})| &\leq M(1+m\beta)^{-n} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[\left(\frac{l_1}{m} b_m\right)^\mu - \left(\frac{l_2}{m} b_m\right)^\mu \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^E \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{L-E} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= M \left[P_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) + P_m^{\beta*}(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \right]
\end{aligned} \tag{4.70}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left(\frac{l_1}{m} b_m\right)^\mu \binom{m}{\mathbf{L}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^E \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{L-E} \\
&\times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{n-|\mathbf{L}|}
\end{aligned}$$

son eşitlikte $\binom{m}{\mathbf{L}} = \binom{m}{l_1} \binom{m-l_1}{l_2}$ olarak yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left(\frac{l_1}{m} b_m\right)^\mu \binom{m}{l_1} \binom{m-l_1}{l_2} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^E \\
&\quad \times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|} \\
&= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \left(\frac{l_1}{m} b_m\right)^\mu \binom{m}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \\
&\quad \times \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \binom{m-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|} \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Eş. 3.1’de $x \rightarrow \frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}$, $y \rightarrow 1 + \frac{x_1}{b_m} + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - l_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left[1 + \frac{x_1}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m - l_1)\beta\right]^{m-l_1} &= \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \binom{m-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{x_1}{b_m} + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m - l_1 - l_2)\beta\right]^{m-l_1-l_2} \\
\left[1 + \frac{x_1}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m - l_1)\beta\right]^{m-l_1} &= \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \binom{m-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|} \tag{4.72}
\end{aligned}$$

Eş. 4.72, Eş. 4.71’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \left(\frac{l_1}{m} b_m\right)^\mu \binom{m}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{x_1}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m - l_1)\beta\right]^{m-l_1} \\
&= P_m^*(t_1^\mu; y_1 - x_1) \tag{4.73}
\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 4.73'te $p = \frac{1}{\mu}, q = \frac{1}{1-\mu}$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$P_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) = P_m^*(t_1^\mu; y_1 - x_1) \leq [P_m^*(t_1; y_1 - x_1)]^\mu [P_m^*(1; y_1 - x_1)]^{1-\mu}$$

bulunur.

Ayrıca $P_m^*(e_1, x) \leq \frac{x}{1+\beta}$ olduğundan

$$P_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \leq \left(\left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right) \frac{1}{1+\beta} \right)^\mu \quad (4.74)$$

yazılır.

Benzer şekilde

$$P_m^{\beta*}(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \leq \left(\left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right) \frac{1}{1+\beta} \right)^\mu \quad (4.75)$$

eşitsizliğine de ulaşılabilir.

Eş. 4.70, Eş. 4.74 ve Eş. 4.75'ten aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} |P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X})| &\leq M [P_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) + P_m^{\beta*}(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X})] \\ &\leq M \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^\mu \left[\left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right)^\mu + \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right)^\mu \right] \end{aligned}$$

$\Omega = M \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^\mu$ alınırsa

$$|P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X})| \leq \Omega \left[\left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right)^\mu + \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right)^\mu \right]$$

olur. Aynı şekilde $\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}$ yani $y_1 \leq x_1, y_2 \leq x_2$ için yukarıdaki ifade aynı sonuca ulaşılabilir.

Ayrıca $y_1 \leq x_1, x_2 \leq y_2$ olduğunda ise

$$\begin{aligned} & \left| P_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) \right| \\ & \leq \left| P_m^{\beta*}\left(f; \left(\frac{x_1}{b_m}, \frac{x_2}{b_m}\right)\right) - P_m^{\beta*}\left(f; \frac{y_1}{b_m}, \frac{x_2}{b_m}\right) \right| \\ & \quad + \left| P_m^{\beta*}\left(f; \left(\frac{y_1}{b_m}, \frac{y_2}{b_m}\right)\right) - P_m^{\beta*}\left(f; \frac{y_1}{b_m}, \frac{x_2}{b_m}\right) \right| \leq \Omega \left[\left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right)^\mu + \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right)^\mu \right] \end{aligned}$$

sağlandığı görülür. Son olarak $x_1 \leq y_1, y_2 \leq x_2$ olduğunda da yukarıdaki biçimde sonuç elde edilir.

Dolayısıyla

$$\left| P_m^{\beta}(f; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta}(f; \mathbf{X}) \right| \leq \Omega[|y_1 - x_1|^\mu + |y_2 - x_2|^\mu]$$

yazılabilir. Böylece Tanım 3.2.1 sağlandığından ispat tamamlanır.

4.2.5. Teorem

ω , bir süreklilik modülü fonksiyonu ise $\forall n \in \mathbb{N}; P_m^{\beta*}(\omega)$ da süreklilik modülü fonksiyonudur.

İspat

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T, \mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ olsun. Eş. 4.69'da f yerine ω yazılırsa

$$\begin{aligned} & P_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{X}) \\ & = (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[\omega\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) - \omega\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \\ & \quad \times \binom{m}{\mathbf{L}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|} \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$ olduğunda $P_m^{\beta}(\omega; \mathbf{Y}) \geq P_m^{\beta}(\omega; \mathbf{X})$ olmasını gerektirir. Yani Tanım 3.2.2 ii) sağlanır.

Ayrıca $\omega(u + v) \leq \omega(u) + \omega(v)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 P_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{Y}) - P_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \omega\left(\frac{\mathbf{L}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \\
 &\times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|} \\
 &= P_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{Y} - \mathbf{X})
 \end{aligned}$$

yazılır. Bu da $P_m^{\beta*}(\omega)$ 'nin Tanım 3.2.2 iii)'yi sağladığını gösterir. Ayrıca Cheney Sharma Chlodowsky operatörünün özelliğinden $P_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{0}) = 0$ olur. Öyleyse $P_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{0}) = \omega(\mathbf{0}) = 0$ denilebilir. Bu durum da Tanım 3.2.2'de i) nin sağlandığını gösterir. O halde i), ii), iii) sağlandığından ispat tamamlanır.

4.2.6. Teorem

$T = \{x_i: x_i \in [0, \infty), i \in \{1, 2\}, x_i \in \mathbb{R}\}$ olsun. Eğer $f \in Lip_M(\mu, T)$ ise $Q_m^{\beta*}(f) \in Lip_M(\mu, T)$ olur.

İspat

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T$ ve $\mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ yani $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2$ olsun.

$$\begin{aligned}
 Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \frac{\mathbf{Y}^E}{b_m} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \\
 &\times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (n - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{n-|\mathbf{L}|-1} \\
 Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \frac{y_1}{b_m} \left(\frac{y_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \frac{y_2}{b_m} \left(\frac{y_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
 &\times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \tag{4.76}
 \end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 3.1'de $x \rightarrow \frac{x_1}{b_m}, y \rightarrow \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}, m \rightarrow l_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{b_m} \left(\frac{y_1}{b_m} + l_1 \beta \right)^{l_1-1} &= \sum_{k_1=0}^{l_1} \binom{l_1}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1 \beta \right)^{k_1-1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right) \\ &\times \left[\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + (l_1 - k_1) \beta \right]^{l_1-k_1-1} \end{aligned} \quad (4.77)$$

elde edilir.

Eş. 3.1'de $x \rightarrow \frac{x_2}{b_m}, y \rightarrow \frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}, m \rightarrow l_2$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{b_m} \left(\frac{y_2}{b_m} + l_2 \beta \right)^{l_2-1} &= \sum_{k_2=0}^{l_2} \binom{l_2}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2 \beta \right)^{k_2-1} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right) \\ &\times \left[\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (l_2 - k_2) \beta \right]^{l_2-k_2-1} \end{aligned} \quad (4.78)$$

elde edilir.

Eş. 4.77 ve Eş. 4.78 ifadeleri Eş. 4.76'da yerine yazıldığında.

$$\begin{aligned} Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \sum_{k_1=0}^{l_1} \binom{l_1}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1 \beta \right)^{k_1-1} \\ &\times \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right) \left[\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + (l_1 - k_1) \beta \right]^{l_1-k_1-1} \\ &\times \sum_{k_2=0}^{l_2} \binom{l_2}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2 \beta \right)^{k_2-1} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right) \left[\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (l_2 - k_2) \beta \right]^{l_2-k_2-1} \\ &\times \left(1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{L}|) \beta \right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Burada sınırlar değiştirilip ifade düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta_*}(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{l_1}{k_1} \binom{l_2}{k_2} \frac{x_1}{b_m} \frac{x_2}{b_m} \\
&\quad \times \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta\right)^{k_1-1} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2\beta\right)^{k_2-1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \\
&\quad \times \left[\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + (l_1 - k_1)\beta\right]^{l_1-k_1-1} \left[\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (l_2 - k_2)\beta\right]^{l_2-k_2-1} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \\
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{l_1}{k_1} \binom{l_2}{k_2} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L} - \mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \\
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{L}|)! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L} - \mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \\
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{k_1=0}^{l_1} \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_2=0}^{l_2} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{L}|)! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L} - \mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \\
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=k_1}^m \sum_{k_2=0}^{m-l_1} \sum_{l_2=k_2}^{m-l_1} f\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m - |\mathbf{L}|)! (l_1 - k_1)! (l_2 - k_2)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + (\mathbf{L} - \mathbf{K})\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son denklemde $\mathbf{L}$ yerine $\mathbf{K} + \mathbf{L}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \\
 &\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
 &\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
 Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
 &\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right|\right)^{\mathbf{E}} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-1}
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Eş. 3.1’de $x \rightarrow \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}$, $y \rightarrow 1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - |\mathbf{K}|$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \frac{x_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left[1 - \frac{x_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m-|\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-1} \\
 &= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \left(1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \\
 &\quad \times \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m-|\mathbf{K}|-l_1)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-l_1-1}
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Eş. 3.1’de $x \rightarrow \frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}$, $y \rightarrow 1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - |\mathbf{K}| - l_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m-|\mathbf{K}|-l_1)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-l_1-1} \\
 &= \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}\right) \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m-|\mathbf{K}|-l_1-l_2)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-l_1-l_2-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m - |\mathbf{K}| - l_1)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-l_1-1} \\
&= \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \tag{4.82}
\end{aligned}$$

Eş. 4.82, Eş. 4.81’de yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{x_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left[1 - \frac{x_1}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + (m - |\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-1} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \\
&\quad \times \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \\
&\quad \times \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right|\right)^{\mathbf{E}} \left[1 - \left|\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-1} \\
&= \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \\
&\quad \times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \tag{4.83}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Eş. 4.83, Eş. 4.80’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} f\left(\frac{k}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \\
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \\
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \binom{m}{\mathbf{K}} \binom{m-|\mathbf{K}|}{l_1} \\
&\quad \times \binom{m-|\mathbf{K}|-l_1}{l_2} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \\
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{k_2=0}^{m-k_1} \sum_{l_1=0}^{m-|\mathbf{K}|} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \frac{m!}{\mathbf{K}! (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \tag{4.84}
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 4.79 ve Eş. 4.84 birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{k_1=0}^m \sum_{l_1=0}^{m-k_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-|\mathbf{K}|-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \\
&\times \frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \\
&\times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (n - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \\
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{k_1=0}^{m-l_1} \sum_{l_2=0}^{m-k_1-l_1} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \\
&\times \frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \\
&\times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1} \\
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \\
&\times \frac{m!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned}$$

son eşitlikte $\frac{n!}{\mathbf{K}!(m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|)! \mathbf{L}!} = \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2}$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \\
&\times \binom{m}{\mathbf{L}} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^{\mathbf{E}} \left(\frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{K}\beta\right)^{\mathbf{K}-\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right]^{\mathbf{E}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned}$$

olur. Burada toplamalar düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^E \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \frac{x_1}{b_n} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta \right)^{k_1-1} \\
&\times \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_n} + k_2\beta \right)^{k_2-1} \left(1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \\
&\times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

bulunur.

Eş. 3.1’de $x \rightarrow \frac{x_2}{b_m}$, $y \rightarrow 1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - k_1 - l_1 - l_2$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} \right) \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m - k_1 - l_1 - l_2)\beta \right]^{m-k_1-l_1-l_2-1} \\
&= \sum_{k_2=0}^{m-k_1-l_1-l_2} \binom{m-k_1-l_1-l_2}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2\beta \right)^{k_2-1} \left(1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} \right) \\
&\times \left[1 - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m - k_1 - k_2 - l_1 - l_2)\beta \right]^{m-k_1-k_2-l_1-l_2-1} \\
&\left(1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - k_1 - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-k_1-|\mathbf{L}|-1} \\
&= \sum_{k_2=0}^{m-k_1-|\mathbf{L}|} \binom{m-k_1-|\mathbf{L}|}{k_2} \frac{x_2}{b_m} \left(\frac{x_2}{b_m} + k_2\beta \right)^{k_2-1} \\
&\times \left(1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{K}| - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{K}|-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

eşitliği elde edilir.

Eş. 4.86 Eş. 4.85’te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \\
&\times \binom{m}{\mathbf{L}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^E \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{L-E} \\
&\times \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_1} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta \right)^{k_1-1} \left(1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \\
&\times \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - k_1 - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-k_1-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Eş. 3.1’de $x \rightarrow \frac{x_1}{b_m}$, $y \rightarrow 1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - l_1 - l_2$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{x_1}{b_m} + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} \right) \left[1 + \frac{x_1}{b_m} + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m - l_1 - l_2)\beta \right]^{m-l_1-l_2-1} \\
&= \sum_{k_1=0}^{m-l_1-l_2} \binom{m-l_1-l_2}{k_2} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta \right)^{k_1-1} \left(1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} \right) \\
&\times \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m} + (m - k_1 - l_1 - l_2)\beta \right]^{m-k_1-l_1-l_2-1} \\
&\left(1 + \left| \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \left[1 + \left| \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \\
&= \sum_{k_1=0}^{m-|\mathbf{L}|} \binom{m-|\mathbf{L}|}{k_2} \frac{x_1}{b_m} \left(\frac{x_1}{b_m} + k_1\beta \right)^{k_1-1} \times \left(1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \\
&\times \left[1 + \frac{x_2}{b_m} - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - k_1 - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-k_1-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Eş. 4.88, Eş. 4.87’de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m}b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m}b_m\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^E \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{L-E} \left(1 + \left| \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| \right) \\
&\times \left[1 + \left| \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[f\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) - f\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| \right) \\
&\times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$f \in Lip_M(\mu, T)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X})| &\leq M(1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[\left(\frac{l_1}{n} b_m \right)^\mu - \left(\frac{l_2}{m} b_m \right)^\mu \right] \binom{n}{\mathbf{L}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| \right) \\
&\times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \\
&= M \left[Q_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) + Q_m^{\beta*}(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \right]
\end{aligned} \tag{4.90}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left(\frac{l_1}{m} b_m \right)^\mu \binom{m}{\mathbf{L}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^{\mathbf{E}} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \\
&\times \left(1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| \right) \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned}$$

son eşitlikte $\binom{m}{\mathbf{L}} = \binom{m}{l_1} \binom{m-l_1}{l_2}$ olarak yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left(\frac{l_1}{m} b_m \right)^\mu \binom{m}{l_1} \binom{m-l_1}{l_2} \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right]^{\mathbf{E}} \\
&\times \left[\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta \right]^{\mathbf{L}-\mathbf{E}} \left(1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| \right) \\
&\times \left[1 - \left| \frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} \right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta \right]^{m-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \left(\frac{l_1}{m} b_m\right)^\mu \binom{m}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \\
&\times \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \binom{m-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right|\right) \\
&\times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned} \tag{4.91}$$

(3.1.1) de $x \rightarrow \frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}$, $y \rightarrow 1 + \frac{x_1}{b_m} + \frac{x_2}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} - \frac{y_2}{b_m}$, $m \rightarrow m - l_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{x_1}{b_m} - \frac{y_1}{b_m}\right) \left[1 + \frac{x_1}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m - l_1)\beta\right]^{m-l_1-1} \\
&= \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \binom{m-l_1}{l_2} \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m}\right) \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} + l_2\beta\right)^{l_2-1} \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right|\right) \\
&\times \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1}
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Eş. 4.91, Eş. 4.92’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
Q_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \left(\frac{l_1}{n} b_m\right)^\mu \binom{m}{l_1} \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right) \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} + l_1\beta\right)^{l_1-1} \\
&\times \left(1 + \frac{x_1}{b_m} - \frac{y_1}{b_m}\right) \left[1 + \frac{x_1}{b_m} - \frac{y_1}{b_m} + (m - l_1)\beta\right]^{m-l_1-1} \\
&= Q_m^*(t_1^\mu; y_1 - x_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $p = \frac{1}{\mu}$, $q = \frac{1}{1-\mu}$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$Q_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) = Q_m^*(t_1^\mu; y_1 - x_1) \leq [Q_m^*(t_1; y_1 - x_1)]^\mu [Q_m^*(1; y_1 - x_1)]^{1-\mu}$$

yazılabilir. Ayrıca $Q_m^*(e_1; x) = x$ olduğundan.

$$Q_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \leq \left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m}\right)^\mu \tag{4.93}$$

Benzer şekilde

$$Q_m^{\beta*}(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \leq \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right)^\mu \quad (4.94)$$

eşitsizliğine de ulaşılabilir.

Eş .4.90, Eş. 4.93 ve Eş.4.94'ten aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} |Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X})| &\leq M[Q_m^{\beta*}(t_1^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) + Q_m^{\beta*}(t_2^\mu; \mathbf{Y} - \mathbf{X})] \\ &\leq M \left[\left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right)^\mu + \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right)^\mu \right] \end{aligned}$$

Aynı şekilde $\mathbf{Y} \leq \mathbf{X}$ yani $y_1 \leq x_1, y_2 \leq x_2$ için yukarıdaki ifade aynı sonuca ulaşılabilir.

Ayrıca $y_1 \leq x_1, x_2 \leq y_2$ olduğunda ise

$$\begin{aligned} |Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(f; \mathbf{X})| &\leq \left| Q_m^{\beta*} \left(f; \left(\frac{x_1}{b_m}, \frac{x_2}{b_m} \right) \right) - Q_m^{\beta*} \left(f; \frac{y_1}{b_m}, \frac{x_2}{b_m} \right) \right| \\ &\quad + \left| Q_m^{\beta*} \left(f; \left(\frac{y_1}{b_m}, \frac{y_2}{b_m} \right) \right) - Q_m^{\beta*} \left(f; \frac{y_1}{b_m}, \frac{x_2}{b_m} \right) \right| \leq M \left[\left(\frac{y_1}{b_m} - \frac{x_1}{b_m} \right)^\mu + \left(\frac{y_2}{b_m} - \frac{x_2}{b_m} \right)^\mu \right] \end{aligned}$$

sağlandığı görülür. Son olarak $x_1 \leq y_1, y_2 \leq x_2$ olduğunda da yukarıdaki biçimde sonuç elde edilir. Dolayısıyla

$$|Q_m^{\beta}(f; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta}(f; \mathbf{X})| \leq M[|y_1 - x_1|^\mu + |y_2 - x_2|^\mu]$$

yazılabilir. Bu ise Tanım 3.2.1 ile verilen koşulu sağladığından ispat tamamlanır.

4.2.7. Teorem

ω , bir süreklilik modülü fonksiyonu ise $\forall n \in \mathbb{N}; Q_m^{\beta*}(\omega)$ da süreklilik modülü fonksiyonudur.

İspat

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T, \mathbf{X} \leq \mathbf{Y}$ olsun. Eş. 4.89'da f yerine ω yazılırsa

$$\begin{aligned} Q_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \left[\omega\left(\frac{\mathbf{K}+\mathbf{L}}{m} b_m\right) \right. \\ &\quad \left. - \omega\left(\frac{\mathbf{K}}{m} b_m\right) \right] \binom{m}{\mathbf{L}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \\ &\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\mathbf{Y} \geq \mathbf{X}$ olduğunda $Q_m^{\beta}(\omega; \mathbf{Y}) \geq Q_m^{\beta}(\omega; \mathbf{X})$ olmasını gerektirir. Yani Tanım 3.2.2 ii) sağlanır. Ayrıca $\omega(u+v) \leq \omega(u) + \omega(v)$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{Y}) - Q_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{X}) &= (1+m\beta)^{1-m} \sum_{l_1=0}^m \sum_{l_2=0}^{m-l_1} \omega\left(\frac{\mathbf{L}}{m} b_m\right) \binom{m}{\mathbf{L}} \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right)^E \left(\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m} + \mathbf{L}\beta\right)^{\mathbf{L}-E} \\ &\quad \times \left(1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right|\right) \left[1 - \left|\frac{\mathbf{Y}}{b_m} - \frac{\mathbf{X}}{b_m}\right| + (m - |\mathbf{L}|)\beta\right]^{m-|\mathbf{L}|-1} \\ &= Q_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{Y} - \mathbf{X}) \end{aligned}$$

yazılır. Bu da $Q_n^{\beta*}(\omega)$ 'nın Tanım 3.2.2'de yer alan iii)'yi sağladığını gösterir. Son olarak i) koşulu incelenirse Cheney Sharma Chlodowsky operatörünün özelliğinden $Q_m^{\beta*}(\omega; \mathbf{0}) = 0$ olur. Öyleyse $Q_n^{\beta*}(\omega; \mathbf{0}) = \omega(\mathbf{0}) = 0$ denilebilir. Böylece i) nin de sağlandığı görülür. O halde i), ii), iii) sağlandığından ispat tamamlanır.



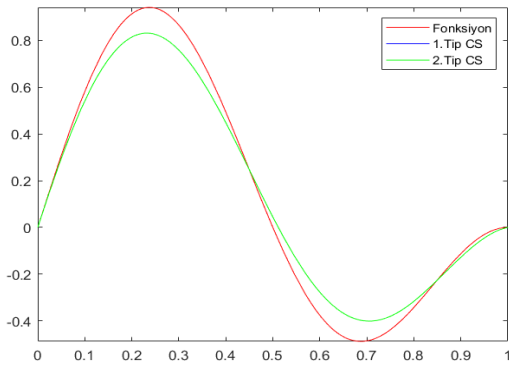
5. UYGULAMALAR

Bu bölümde örnek olarak seçilmiş bazı fonksiyonlar ile önceki bölümlerde bahsi geçen Cheney Sharma (CS) operatörleri ve Cheney Sharma Chlodowsky (CSC) operatörlerine ait yaklaşımları bilgisayar programı vasıtasıyla çizilen grafikler üzerinde incelenmiştir.

5.1. Tek Değişkenli Cheney Sharma Operatörleri

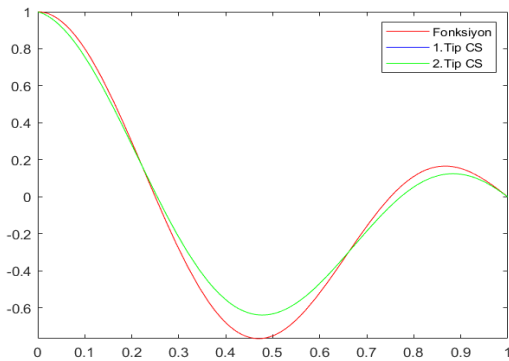
Aşağıda verilen örneklerde fonksiyon ve her iki tip operatör aynı grafik içerisinde gösterilmiştir.

Şekil 5.1'de $f_1(x) = (1 - x^2) \sin(2x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleri $m = 30, \beta_m = m^{-4}$ alınarak çizilmiştir.



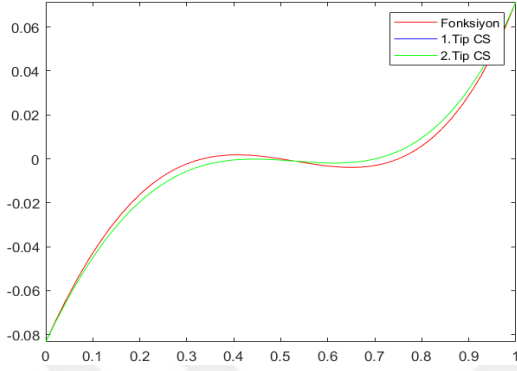
Şekil 5.1. f_1 ve CS operatörleri.

Şekil 5.2'de $f_2(x) = (1 - x^2) \cos(2x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleri $m = 30, \beta_m = m^{-4}$ alınarak çizilmiştir.



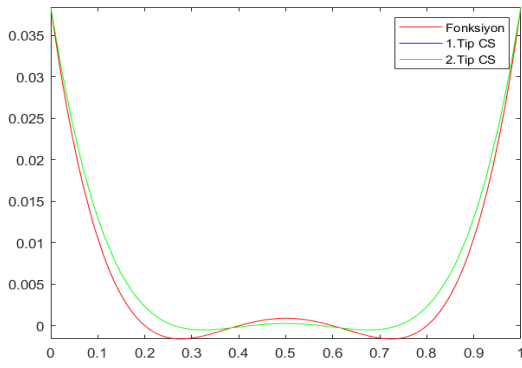
Şekil 5.2. f_2 ve CS operatörleri.

Şekil 5.3 ile $f_3(x) = \frac{\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]}{\left[\left(\frac{3}{4}+x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]}$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleri $m = 30, \beta_m = m^{-4}$ alınarak çizilmiştir.



Şekil 5.3. f_3 ve CS operatörleri.

Aşağıdaki grafikte $f_4(x) = \left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleri $m = 30, \beta_m = m^{-4}$ alınarak çizilmiştir.



Şekil 5.4. f_4 ve CS operatörleri.

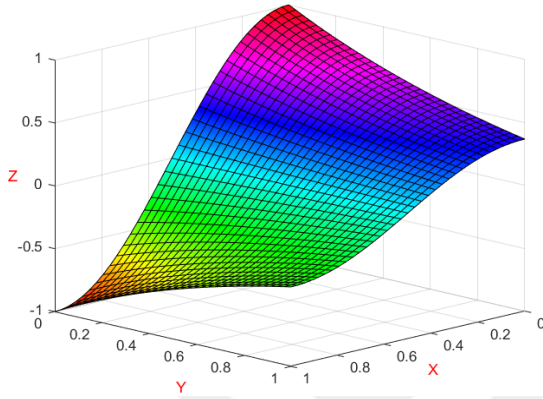
Grafikler incelendiğinde birinci ve ikinci tip operatörler aynı noktalardan geçtiği için tek bir grafik gibi görünmektedir.

5.2. İki Değişkenli Cheney Sharma Operatörleri

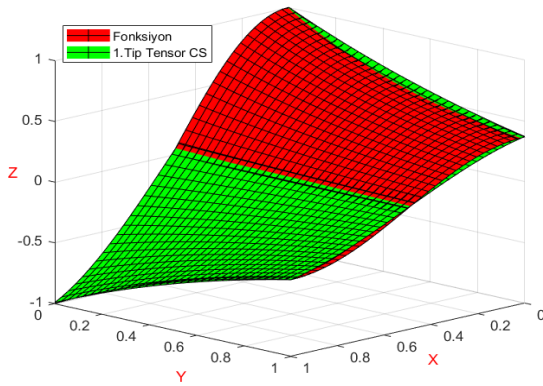
Önceki bölümlerde olduğu gibi bu bölümde de tensör çarpım ve non-tensör çarpım operatörler ayrı ayrı incelenmiştir. Bu kısımda operatörler ve fonksiyonlara ait grafikler bilgisayarların kapasiteleri ölçüsünde $m = 4, n = 4$ değerleri ile sınırlandırılarak çizilmiştir.

5.2.1. Tensör çarpım Cheney Sharma operatörleri

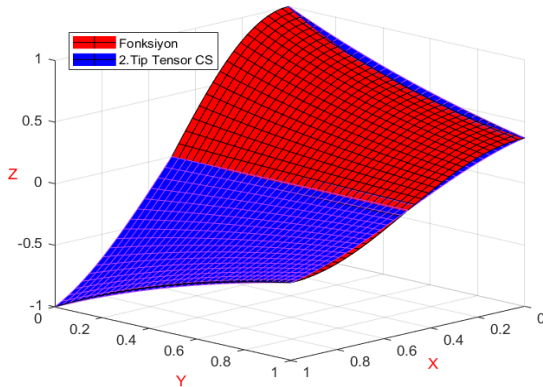
Şekil 5.5 $f_5(x,y) = e^{-y}\cos(x)$ fonksiyonun grafiğidir. Şekil 5.6 ve Şekil 5.7 ise bu fonksiyonun $m = 5, n = 5$ ve $\alpha_n = n^{-3}, \beta_m = m^{-3}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip tensör çarpım CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.



Şekil 5.5. f_5 grafiği

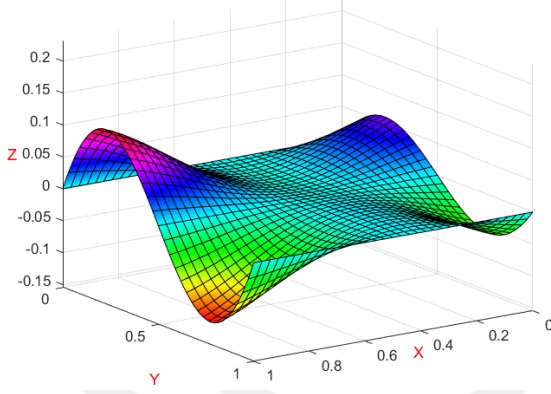


Şekil 5.6. f_5 ve 1.tip tensör CS operatörü

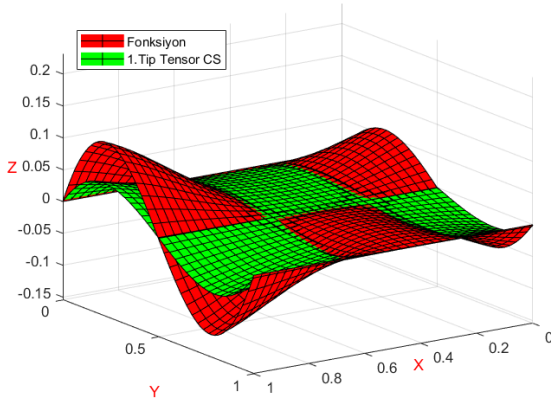


Şekil 5.7. f_5 ve 2.tip tensör CS operatörü

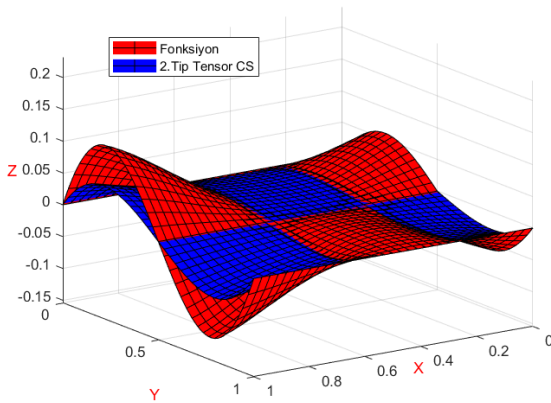
Şekil 5.8 $f_6(x,y) = \sin(y)\cos(x)(x - 1/3)(y - 1/2)$ fonksiyonun grafiğidir. Şekil 5.9 ve Şekil 5.10 ise bu fonksiyonun $m = 5, n = 5$ ve $\alpha_n = n^{-3}, \beta_m = m^{-3}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip tensör çarpım CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.



Şekil 5.8. f_6 grafiği

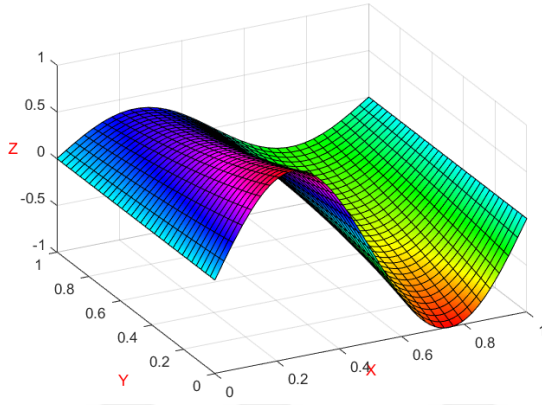


Şekil 5.9. f_6 ve 1.tip tensör CS operatörü

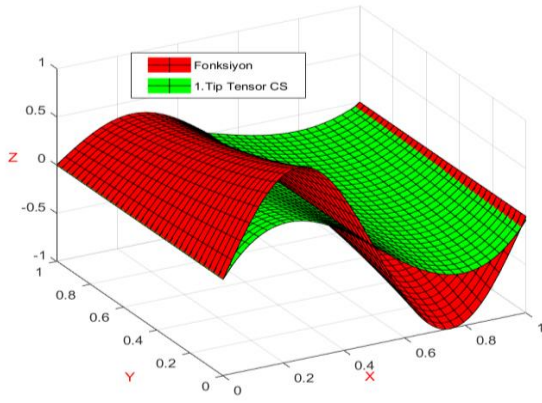


Şekil 5.10. f_6 ve 2.tip tensör CS operatörü

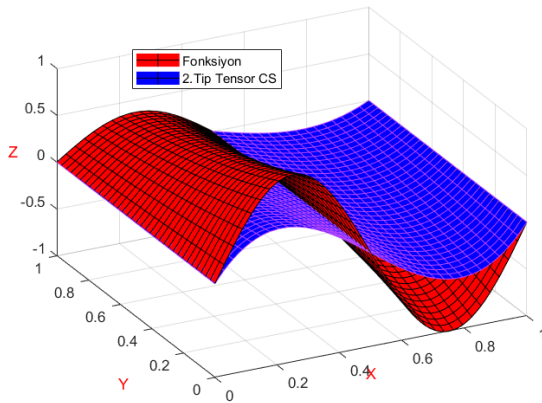
Şekil 5.11 $f_7(x, y) = e^{-y} \sin(2x)$ fonksiyonunun grafiğidir. Şekil 5.12 ve Şekil 5.13 ise bu fonksiyonun $m = 5, n = 5$ ve $\alpha_n = n^{-3}, \beta_m = m^{-3}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip tensör çarpım CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.



Şekil 5.11. f_7 grafiği



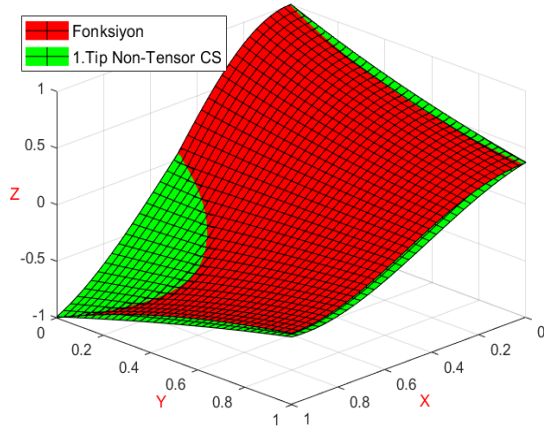
Şekil 5.12. f_7 ve 1.tip tensör CS operatörü



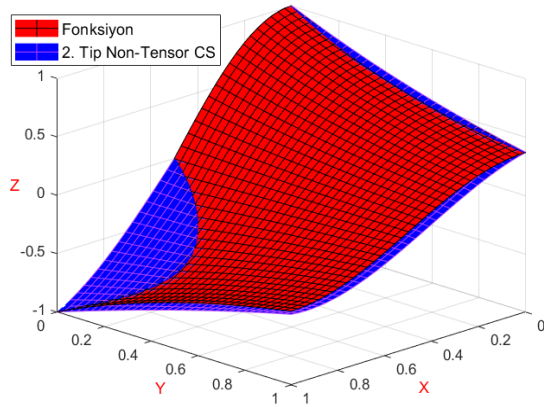
Şekil 5.13. f_7 ve 2.tip tensör CS operatörü

5.2.2. Non-tensör çarpım Cheney Sharma operatörleri

Şekil 5.14 ve Şekil 5.15 $f_4(x,y) = e^{-y}\cos(x)$ fonksiyonunun $m = 5, \beta_m = m^{-3}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip non-tensör çarpım CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.

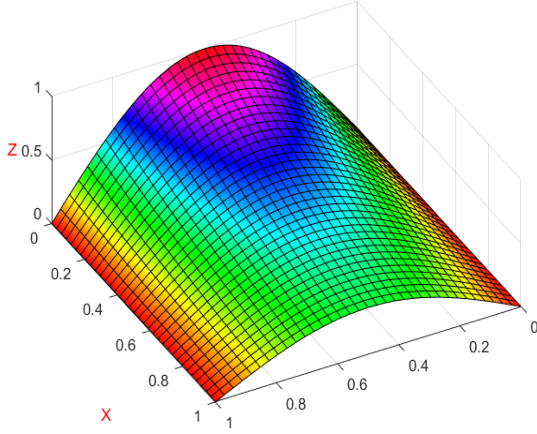


Şekil 5.14. f_4 ve 1.tip non-tensör CS operatörü

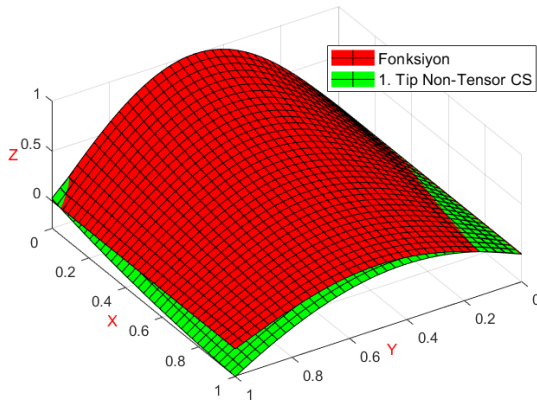


Şekil 5.15. f_4 ve 2.tip non-tensör CS operatörü

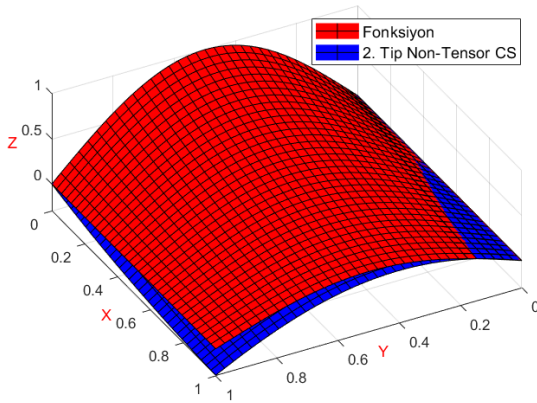
Şekil 5.16 $f_8(x,y) = e^{-y}\sin(x)$ fonksiyonunun, Şekil 5.17 ve Şekil 5.18 ise bu fonksiyonun $m = 5, \beta_m = m^{-3}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip non-tensör çarpım CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.



Şekil 5.16. f_8 grafiği

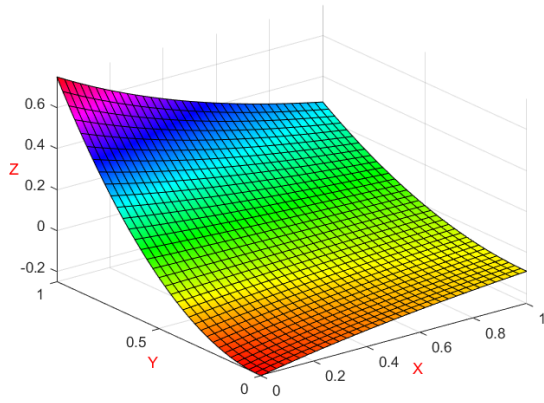


Şekil 5.17. f_8 ve 1.tip non-tensör CS operatörü

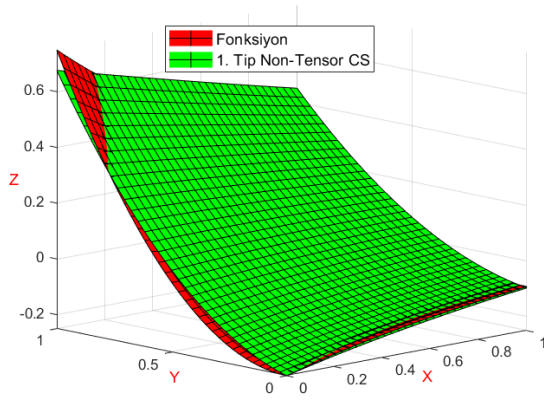


Şekil 5.18. f_8 ve 2.tip non-tensör CS operatörü

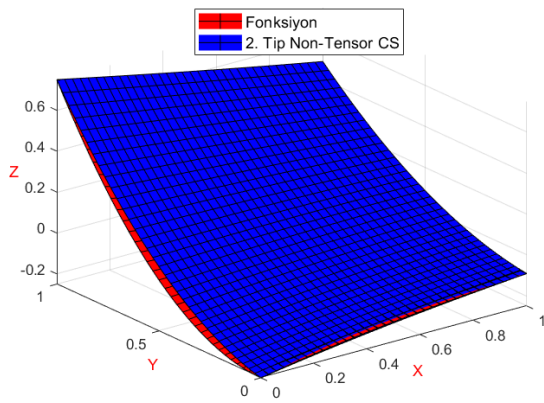
Şekil 5.19 $f_9(x, y) = (y^2 - 1/4)e^{-x}$ fonksiyonun grafiğidir. Şekil 5.20 ve Şekil 5.21 ise bu fonksiyonun $m = 5, \beta_m = m^{-2}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip non-tensör çarpım CS operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.



Şekil 5.19. f_9 grafiği



Şekil 5.20. f_9 ve 1.tip non-tensör CS operatörü

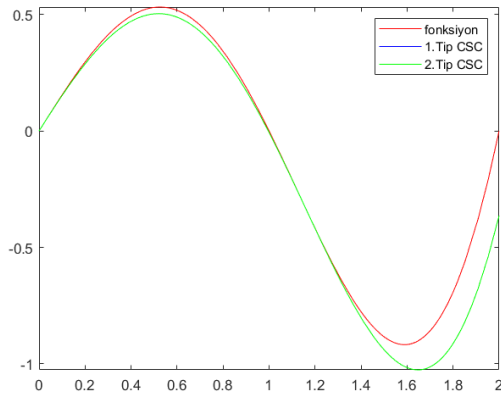


Şekil 5.21. f_9 ve 2.tip non-tensör CS operatörü

5.3. Tek Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri

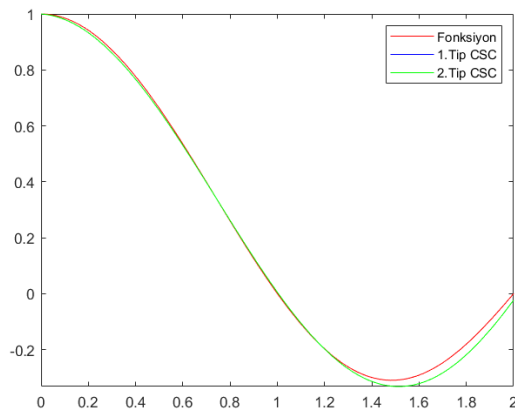
Aşağıda verilen örneklerde $[0,2]$ aralığında fonksiyon ve birinci ve ikinci tip tek değişkenli CSC operatörleri bir grafik içerisinde verilmiştir. Aynı grafik içerisinde her iki tip operatörün tamamen aynı eğriyi oluşturduğu gözlemlenmiştir.

Aşağıda yer alan şekilde $g_1(x) = (1 - x^2) \sin(x/2)$ fonksiyonunun grafiği ve bu fonksiyonun $m = 30, \beta_m = m^{-6}$ ve $b_m = m^{0,05}$ için CSC operatörleri altındaki dönüşümüne ait grafik verilmiştir.



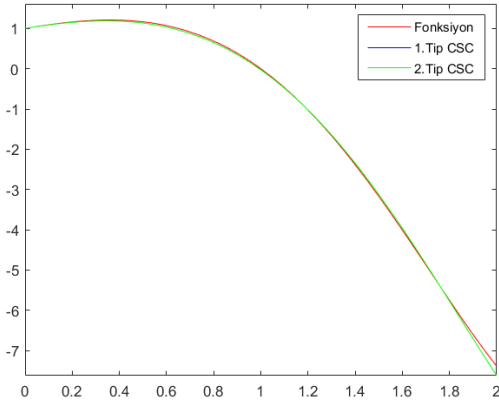
Şekil 5.22. g_1 ve CSC operatörleri

Şekil 5.23'te $g_2(x) = (1 - x^2/4) \cos(x/2)$ fonksiyonunun grafiği ile bu fonksiyona ait $m = 30, \beta_m = m^{-6}$ ve $b_m = m^{0,05}$ için CSC operatörleri altındaki dönüşümünün grafiği yer almaktadır.



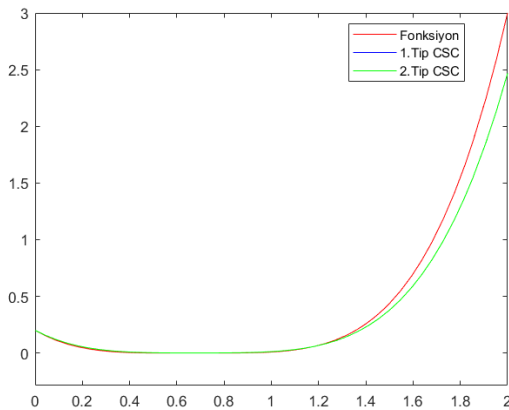
Şekil 5.23. g_2 ve CSC operatörleri

Aşağıda verilen Şekil 5.24'te $g_3(x) = e^x \cos(x/2)$ fonksiyonunun grafiği ve bu fonksiyona ait $m = 30, \beta_m = m^{-6}$ ve $b_m = m^{0,05}$ için CSC operatörleri altındaki dönüşümünün grafiği yer almaktadır.



Şekil 5.24. g_3 ve CSC operatörleri

Aşağıdaki şekilde $g_4(x) = (x - 1/2)(x - 2/3)(x - 3/4)(x - 4/5)$ fonksiyonunun grafiği ve bu fonksiyonun $m = 30, \beta_m = m^{-6}$ ve $b_m = m^{0,05}$ için CSC operatörleri altındaki dönüşümünün grafiği yer almaktadır.



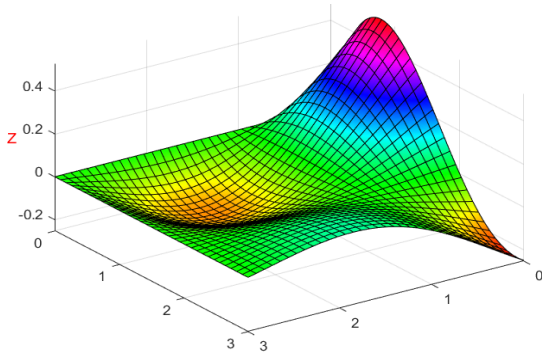
Şekil 5.25. g_4 ve CSC operatörleri

5.4. İki Değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky Operatörleri

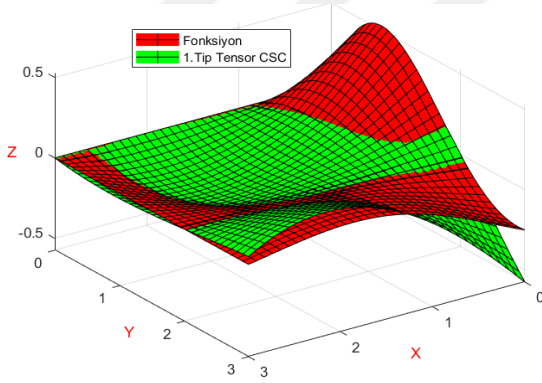
Bu kısımda operatörler ve fonksiyonlara ait grafikler bilgisayarların kapasiteleri ölçüsünde $[0,3]$ aralığında $m = 4, n = 4$ değerleri ile sınırlandırılarak çizilmiştir.

5.4.1. Tensör çarpım Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri

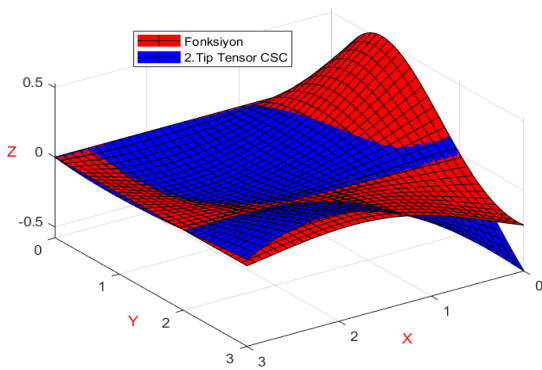
Şekil 5.26 $g_5(x,y) = \sin(y/2)\cos(x/2)/((x+1)(y+1))$ fonksiyonun grafiğidir. Şekil 5.27 ve Şekil 5.28 ise bu fonksiyonun $m=4, n=4, b_m=m^{0,05}, b_n=n^{0,05}$ ve $\alpha_n=n^{-4}, \beta_m=m^{-4}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip tensör çarpım CSC operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir. Şekil 5.29 her iki operatörün karşılaştırılabilmesi için çizilmiştir.



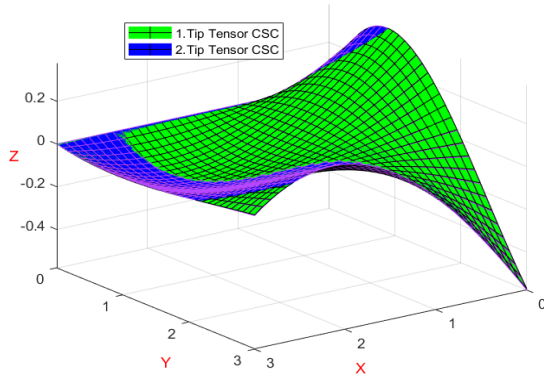
Şekil 5.26. g_5 grafiği



Şekil 5.27. g_5 ve 1.tip tensör CSC operatörü

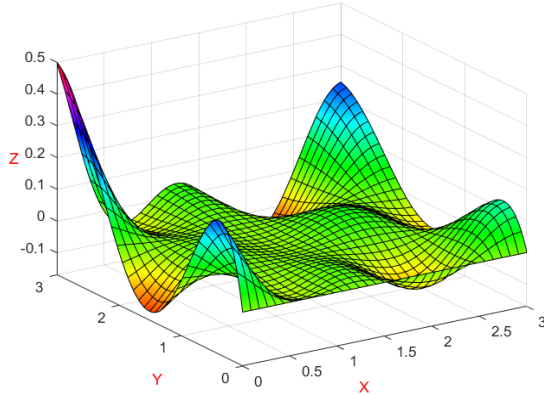


Şekil 5.28. g_5 ve 2.tip tensör CSC operatörü

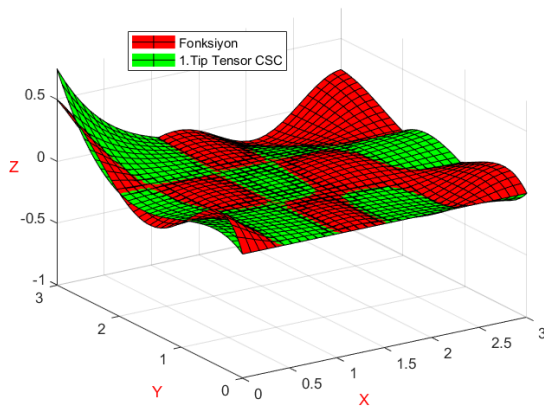


Şekil 5.29. 1. ve 2.tip tensör CSC operatörü

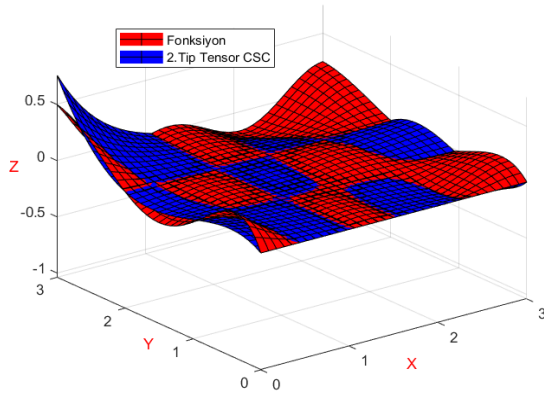
Şekil 5.30 ile, $g_6(x, y) = [\sin(y/2)\cos(x)(x-1)(y-1)]/((x+1)(y+1))$ fonksiyonun grafiği verilmiştir. Şekil 5.31 ve Şekil 5.32 ise bu fonksiyonun sırasıyla birinci ve ikinci tip tensör çarpım CSC operatörleri altındaki dönüşümlerinin $m = 4, n = 4$ değerleri ve $b_m = m^{0,05}, b_n = n^{0,05}$ ve $\alpha_n = n^{-4}, \beta_m = m^{-4}$ için çizilen grafikleridir.



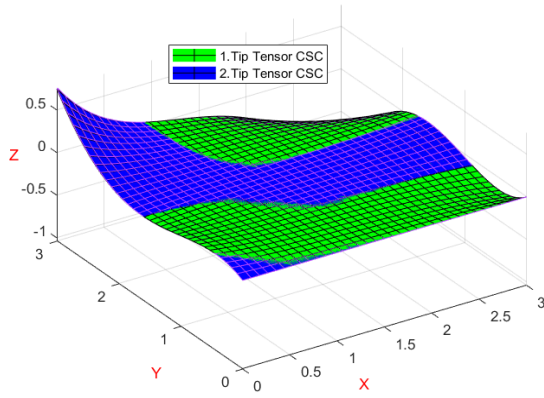
Şekil 5.30. g_6 grafiği



Şekil 5.31. g_6 ve 1.tip tensör CSC operatörü



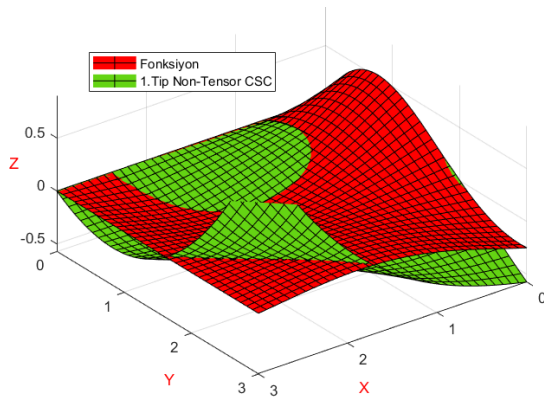
Şekil 5.32. g_6 ve 2.tip tensör CSC operatörü



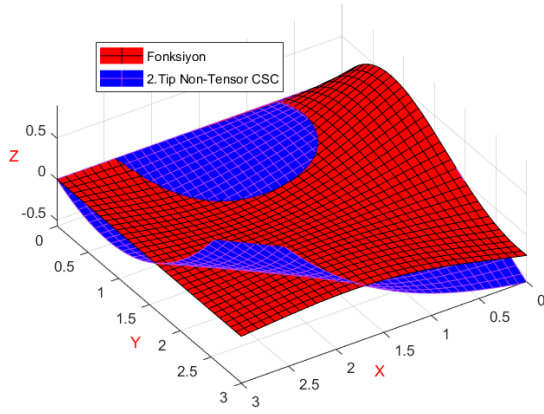
Şekil 5.33. 1. ve 2.tip tensör CSC operatörü

5.4.2. Non-tensör çarpım Cheney Sharma Chlodowsky operatörleri

Şekil 5.34 ve Şekil 5.35 $g_5(x,y) = \sin(y/2)\cos(x/2)/((x+1)(y+1))$ fonksiyonunun $m = 4, b_m = m^{0.5}$ ve $\beta_m = m^{-2}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip non-tensör çarpım CSC operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.

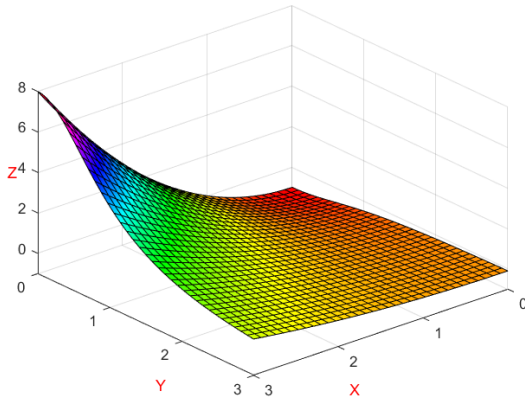


Şekil 5.34. g_5 ve 1.tip non-tensör CSC operatörü

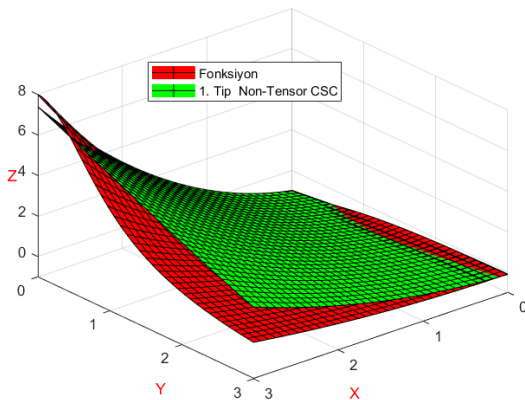


Şekil 35. g_5 ve 2. tip non-tensör CSC operatörü

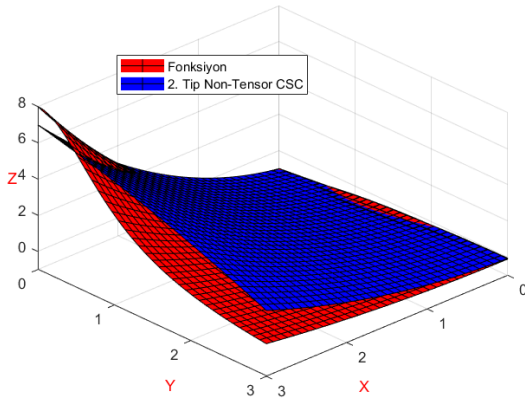
Şekil 5.36 ile verilen $g_7(x,y) = (x^2 - 1)/(y^2 + 1)$ fonksiyonunun grafiği olup Şekil 5.37 ve Şekil 5.38 ise bu fonksiyonun $m = 4$, $b_m = m^{0,5}$ ve $\beta_m = m^{-2}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip non-tensör çarpım CSC operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.



Şekil 5.36. g_7 grafiği

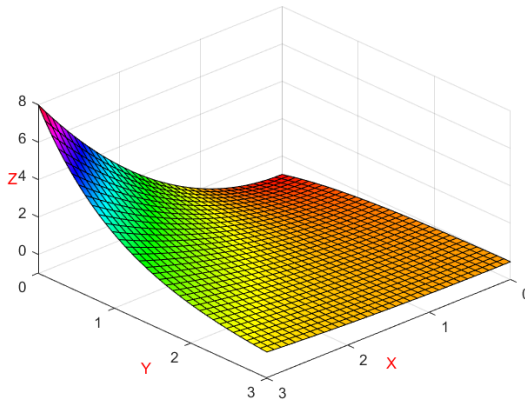


Şekil 5.37. g_7 ve 1.tip non-tensör CSC operatörü

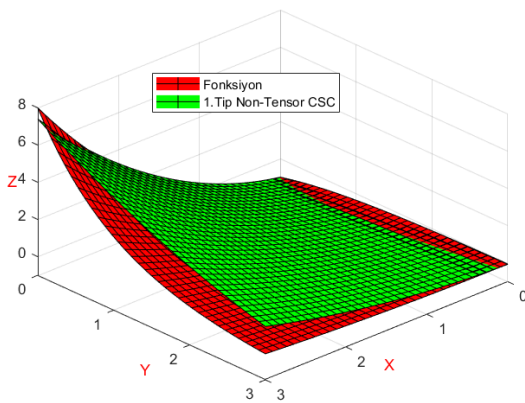


Şekil 5.38. $g_7(x,y) = (x^2 - 1)/(y^2 + 1)$ ve 2.tip non-tensör CSC operatörü

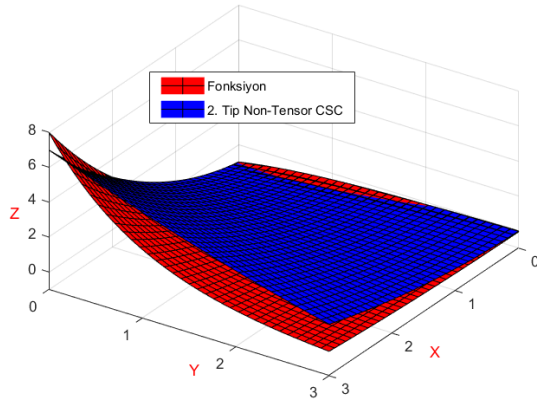
Şekil 5.39 $g_8(x,y) = (x^2 - 1)e^{-y}$ fonksiyonun grafiğidir. Şekil 5.40 ve Şekil 5.41 ise bu fonksiyonun $m = 4, b_m = m^{0,5}$ ve $\beta_m = m^{-2}$ için sırasıyla birinci ve ikinci tip non-tensör çarpım CSC operatörleri altındaki dönüşümlerinin grafikleridir.



Şekil 5.39. g_8 grafiği



Şekil 5.40. g_8 ve 1.tip non-tensör CSC operatörü



Şekil 5.41. g_8 ve 2.tip non-tensör CSC operatörü

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak [5] çalışması ile verilmiş tek değişkenli birinci ve ikinci tip Cheney Sharma operatörlerinin yaklaşım özellikleri, referans alınan çalışmadan alıntılanarak gösterilmiştir. İki değişkenli Cheney Sharma operatörleri alan yazında araştırılmış ve ikinci tip operatörün [10] çalışmasında non-tensör çarpım kullanılarak, [11] çalışmasında ise tensör çarpım kullanılarak gösterildiği tespit edilmiştir. Bu iki çalışmadan hareketle iki değişkenli birinci tip Cheney Sharma operatörünün her iki yöntemle gösterimi yapıp yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Ayrıca yapılan alan yazın taramasında [16,17] çalışmalarında Cheney Sharma Chlodowsky operatörünün yazılıp yakınsaklık özelliklerinin incelendiği fark edilmiştir. Burada genelleştirmesi yapılan operatör, ikinci tip Cheney Sharma operatörüdür. Buradan yola çıkarak bu tezde birinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörü yazılıp yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Son olarak iki değişkenli Cheney Sharma operatörleri üzerine çalışmalar olduğu gibi iki değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky operatörlerinin yazılabileceği düşünülmüştür. Bunun üzerine birinci tip ve ikinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörlerinin hem tensör çarpım hem de non-tensör çarpım yardımıyla iki değişkenli genelleştirmesi yapılmış ve yakınsaklıkları incelenmiştir.

Belirtilen gösterimler yapılırken referans alınan çalışmalardaki notasyonlara mümkün olduğunca sadık kalınmıştır.

Tezin beşinci bölümünde yer alan tek değişkenli Cheney Sharma operatörlerine ait grafikler kolay biçimde çizdirilip yakınsaklıkları grafik üzerinden gözlemlenebilmektedir. Tek değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky operatörüne ait çizim yapılırken sonsuza kadar giden bir aralıkta grafiğin gösterimi imkanı olmadığından $[0,2]$ aralığına yer verilmiştir. İki değişkenli operatörlere ait grafikler oluşturulurken bilgisayarlar sınırlayıcı olmuştur. Bu nedenle operatörlerde yer alan “n”, “m” değerleri sonsuza giderken incelendiği halde grafiklerde $m = 4, m = 5$ gibi küçük değerler ile çalışılmak zorunda kalınmıştır.

Bundan sonraki çalışmalarda birinci tip Cheney Sharma Chlodowsky operatörünün istatistiksel yakınsaklığı incelenebilir. Bunun dışında operatörlerin Durmeyer veya Kantorovich genelleştirmeleri yapılabilir. Parametrik genişletmeleri yapılabilir. Ayrıca iki

değişkenli Cheney Sharma Chlodowsky operatörlerinin üçgensel bölgelerdeki özellikleri araştırılabilir.



KAYNAKLAR

1. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin*, 2, 633-639.
2. Bernstein, S. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Communications de la Société Mathématique de. Charkowsérie*, 13(2), 1-2.
3. Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions, *Arkiv for Mathematik*, 2, 43-56.
4. Korovkin, P.P. (1953). On Convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademiy Nauk SSSR*, 90, 961-964.
5. Cheney, E.W. and Sharma, A. (1964). On a generalization of Bernstein polynomials. *Rivista Matematica Università Parma*, 2 (5), 77-84.
6. Jensen, J.L.W.V. (1902). Sur une identité, Abel et sur d'autres formules analogues. *Acta Mathematica*. 26, 307-318.
7. Cătinaş, T., Buda, I. (2023). An Extension of Cheney-Sharma operator of the first kind. *Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory*, 52(2), 172-181.
8. Türkmenoğlu, A. (2018). *Bernstein Cheney Sharma operatörleri*. Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.
9. Güven, E. (2023). *Cheney-Sharma operatörlerinin kuvvet serisi istatistiksel yakınsaklığı*. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
10. Başcanbaz-Tunca, G., Erençin, A. And İnce-İlarslan, H.G. (2018). Biavriate Cheney and Sharma operators on simplex. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 47(4), 793-804.
11. Cătinaş, T., Otrocol, D. (2013). Iterates of multivariate Cheney-Sharma operator. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 15(7), 1240-1246.
12. Chlodowsky, I. (1937). Sur le development des fonctions de fines dans un interval infini series de polynomes de M.S. Bernstein. *Compositio Mathematica*, 4, 380-392.
13. Gadjiev, A.D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of PP Korovkin. *Doklady Akademiy Nauk SSSR*, 218(5), 1001-1004.
14. Gadjiev, A.D. (1976). Theorems of Korovkin type. *Mathematicheskije Zametki*, 20(5), 781-786.
15. Hacıyev, A., Hacısalıhoğlu, H.H. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. Ankara: Ankara Üniversitesi Yayınları.

16. Söylemez, D. and Taşdelen F. (2020) Approximation by Cheney-Sharma Chlodowsky operators. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49(2), 510-522.
17. Söylemez, D. and Taşdelen F. (2019). On Cheney-Sharma Cholodovsky operators. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 11(1), 36-43.
18. Balcı, M. (1999). *Matematik Analiz II*. Ankara: Balcı Yayınları.
19. Musayev, B., Alp, M., Ekinçioğlu, İ. Ve Mustafayev, N. (2007). *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz-1*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
20. Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Balcı Yayınları.
21. Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Gazi Kitabevi.
22. Altın, A. (2020). *Uygulamalı Matematik*. Ankara: Gazi Kitabevi.
23. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin type approximation theory and its applications*. Berlin; New York: Walter de Gruyter.
24. Altomare, F. (2010). Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators. *Surveys in Approximation Theory*, 6, 92-164.
25. Volkov, V.I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. *Doklady Akademiy Nauk SSSR*, 115(1), 17-19.
26. Timan, A.P. (1963). *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*. Oxford; London; New York; Paris: Pergamon Press.
27. Cao, F. (2004). Modulus of continuity, K-functional and Stancu operator on a simplex. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 35(12), 1343-1364.
28. Cao, F., Ding, C. and Xu, Z. (2005). On multivariate Baskakov operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 307, 274-291.
29. Stancu, D.D., Căbulea, L.A. and Pop, D. (2002). Approximation of bivariate functions by means of the operator $S_{m,n}^{\alpha,\beta;a,b}$. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 47(4), 105-113.
30. İnce-İlarslan, H.G. (2016). On Bivariate Bernstein-Chlodowsky Operators. *Journal of Classical Analysis*, 8(2), 147-153.
31. Steffens, K.G. (2006). *The History of Approximation Theory*. Boston: Birkhäuser.



Gazili olmak ayrıcalıktır