

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ÇEVİRİMİÇİ SOSYAL AĞLARDA BİLGİ YAYILIMINI
MODELLEYEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
DÜZ VE TERS BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YASİN TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

HAZİRAN 2024

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ÇEVİRİMİÇİ SOSYAL AĞLARDA BİLGİ YAYILIMINI
MODELLEYEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER
İÇİN DÜZ VE TERS BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER
PROBLEMLERİ

YASİN TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. MANSUR İSGENDER OĞLU

HAZİRAN 2024

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL

**DIRECT AND INVERSE INITIAL BOUNDARY VALUE
PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS MODELING INFORMATION
DISTRIBUTION IN ONLINE SOCIAL NETWORKS**

YASİN TURAN

A THESIS OF MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ADVISOR: PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

JUNE 2024

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun 03/06/2024 tarih ve 2024/30 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 12/06/2024 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Yasin Turan'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Prof. Dr. Mustafa Taylan ŞENGÜL

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu tez çalışması, sosyal ağları temsil eden dinamik sistemler için hayati öneme sahip olan lineer ve lineer olmayan ısı denklemlerine odaklanmaktadır. Araştırmanın merkezinde, Neumann sınır koşullarının geçerli olduğu durumlarda, zamana bağlı değişen katsayının belirlenmesiyle ilgili bir ters problem yer almaktadır. Bu katsayı, sosyal ağlardaki kullanıcı yoğunluğunun zamansal ve mekansal dağılımını belirleyerek, ağın genel davranışını etkileyen kritik bir parametre olarak karşımıza çıkmaktadır.

Özellikle, bu çalışmada ele alınan model, Fisher-KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov) modeli ile uyumlu olup, yayılım ve büyüme süreçlerinin matematiksel analizini kapsamaktadır. Fisher-KPP modeli, genellikle biyolojik popülasyonların dinamiklerini incelemek için kullanılır ve bu bağlamda sosyal ağlarda kullanıcıların etkileşimleri ve yayılımlarını modellemek için de uygun bir bilgi sunar. Modelin daha da genişletilmesi, popülasyon genetiği, Ginzburg-Landau teorisi ve Allen-Cahn eşitliği gibi alanlarda kullanılan kare veya kübik dereceden lineer olmayan modellerin incelenmesini mümkün kılar. Bu tür modeller, sadece biyoloji ve fizik alanlarında değil, aynı zamanda sosyal bilimler ve ekonomi gibi disiplinlerde de uygulama alanı bulur.

Ters problemin çözümü, özellikle Fourier yönteminin etkin kullanımı ve küçük zaman aralıklarında Banach sabit nokta prensibinin uygulanmasıyla sağlanmaktadır. İntegral operatör denkleminin sabit noktasının varlığı, problemin çözümlerine dair önemli bilgiler sunmaktadır. Fourier yöntemi, bu çalışmada incelenen lineer ve lineer olmayan sistemler için kritik öneme sahiptir.

Ayrıca, lokal kan akışının zaman ve konuma bağlı perfüzyon katsayısını modelleyen lineer ısı denklemi, yani Pennes modeli üzerinde de durulmaktadır. Pennes modeli, biyolojik dokularda ısı transferini modellemek için yaygın olarak kullanılan bir yaklaşımdır ve bu çalışmada, ilgili denklemlerin çözümleri Fourier yöntemi ve Carleman kestirimiyle elde edilmektedir. Bu teknikler, dokuda ısı transferi dinamiklerini anlamak ve modellemek için hayati öneme sahip olup, tıbbi uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Sonuç olarak, sosyal ağlardaki kullanıcı yayılım süreçlerini anlamak için yeni bir perspektif sunmakta ve bu tür dinamik sistemlerin modellenmesinde matematiksel yöntemlerin etkinliğini vurgulamaktadır. Bu çalışma, özellikle tıbbi görüntüleme ve ısı transferi gibi uygulamalarda, sistem dinamiklerini daha iyi anlamak ve optimize etmek için güçlü araçlar sunmaktadır ve karmaşık sistemlerin modellenmesi ve analiz edilmesinde klasik matematiksel yöntemlerin etkinliğini vurgulamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Neumann Sınır Koşulları, Sosyal Ağ Modeli, Fisher-KPP Modeli, Pennes Modeli, Fourier Yöntemi, Carleman Kestirimi.

ABSTRACT

This thesis focuses on linear and nonlinear heat equations that are vital for dynamic systems representing social networks. At the center of the research is an inverse problem concerning the determination of a time-varying coefficient under Neumann boundary conditions. This coefficient is a critical parameter that influences the overall behavior of the network by determining the temporal and spatial distribution of user density in social networks.

In particular, the model considered in this study is consistent with the Fisher-KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov) model, encompassing the mathematical analysis of spreading and growth processes. The Fisher-KPP model is typically used to examine the dynamics of biological populations, and in this context, it provides valuable insights for modeling user interactions and spreads in social networks. Further expansion of the model allows for the examination of nonlinear models of quadratic or cubic degree used in fields such as population genetics, Ginzburg-Landau theory, and Allen-Cahn equation. Such models find applications not only in biology and physics but also in social sciences and economics.

The solution of the inverse problem is achieved through the effective use of the Fourier method and the application of the Banach fixed-point theorem over small time intervals. The existence of a fixed point of the integral operator equation provides significant insights into the solutions of the problem. The Fourier method is crucial for the linear and nonlinear systems studied in this research.

Additionally, the study also focuses on the linear heat equation, known as the Pennes model, which models the perfusion coefficient dependent on time and location for local blood flow. The Pennes model is a widely used approach for modeling heat transfer in biological tissues, and in this study, the solutions to the relevant equations are obtained using the Fourier method and Carleman estimates. These techniques are vital for understanding and modeling heat transfer dynamics in tissues and are commonly used in medical applications.

In conclusion, this study offers a new perspective for understanding user spreading processes in social networks and emphasizes the effectiveness of mathematical methods in modeling such dynamic systems. It provides powerful tools for better understanding and optimizing system dynamics, particularly in applications such as medical imaging and heat transfer, and highlights the effectiveness of classical mathematical methods in the modeling and analysis of complex systems.

Keywords: Neumann Boundary Conditions, Social Network Model, Fisher-Kpp Model, Pennes Model, Fourier Method, Carleman Estimation.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda bana yön gösteren, desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, bilgisiyle çalışmalarına ufuk açan saygıdeğer danışmanım Gebze Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU'na; tezimi değerlendirerek bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, değerli öneri ve katkılarıyla çalışmamın kalitesini artıran kıymetli jüri üyelerim Prof. Dr. Coşkun YAKAR, Prof. Dr. Mustafa Taylan ŞENGÜL, Doç. Dr. Gülden GÜN POLAT ve Doç. Dr. Burhan TIRKAYİOĞLU'na; lisans ve yüksek lisans eğitimimde bana katkıları olan kıymetli hocalarıma; matematiği sevmemde ana etken olan babam İrfan TURAN'a, fedakarlıktan ödün vermeyen kıymetli annem Zübeyde TURAN'a ve aileme; yüksek lisans eğitimim boyunca bana katkıları olan TÜBİTAK'a; iş hayatımda birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum, destekleğiyle her zaman yanımda olan değerli iş arkadaşlarım Şeyma YAŞAR, Aslıhan GÜR, Muhammed ERGEN ve Fatih YETGİN'e; en içten teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	8
3. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ISI DENKLEM MODELLERİ	16
3.1. Lineer Isı Modelleri	16
3.1.1. Pennes Modeli	16
3.2. Kuadratik Lineer Olmayan Isı Modelleri	18
3.2.1. Fisher-Kpp Modeli	18
3.2.2. Sosyal Ağ Modeli	19
3.3. Kübik Lineer Olmayan Isı Modelleri	21
3.3.1. Popülasyon Genetik Modeli	21
3.3.2. Ginzburg Landau Modeli	22
3.3.3. Allen Chan Modeli	24
4. LİNEER ISI DENKLEMİNDE SADECE KONUM VE SADECE ZAMANA BAĞLI POTANSİYEL KATSAYININ BULUNMASI	25
4.1. Fourier Yöntemi ile Zamana Bağlı Potansiyelin Bulunması	25
4.1.1. Ters Problemin Çözümün Varlığı ve Tekliği	29
4.1.1.1. Ağırlık Fonksiyonunun Özel Durumları	36
4.2. Carleman Kestirimi ile Konuma Bağlı Potansiyelin Bulunması	38
5. LİNEER OLMAYAN ISI DENKLEMİNİN SADECE ZAMANA BAĞLI POTANSİYELİN BULUNMASI	47
5.1. Problemin İntegral Denklem Sistemine Dönüştürülmesi	47
5.2. Çözümün Varlık ve Tekliği	48
6. MODELLERİN KONTROLÜ	61
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- $\mathbf{L}_2(0, 1)$: $(0, 1)$ aralığında ölçülebilir ve karesi Lebesgue anlamında integralle-
nebilen fonksiyonlar uzayı.
- $\mathbf{C}[a, b]$: $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı.
- $\mathbf{C}^n[a, b]$: $[a, b]$ aralığında $(n \geq 1)$ n. mertebeye kadar sürekli türeve sahip fonk-
siyonlar uzayı.
- $\mathbf{Q}_T$: $\mathbb{R}^2$ üzerinde $\{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ şeklinde bir dikdörtgen-
sel bölge.
- $\mathbf{C}^{k,l}(\mathbf{Q}_T)$: $\mathbf{Q}_T$ dikdörtgensel bölgede sürekli ve k, l negatif olmayan tam sayılar
olmak üzere, x 'e göre k mertebeye kadar, t 'ye göre l mertebeye kadar
sürekli kısmi türevlere sahip olan fonksiyonlar uzayı.



1. GİRİŞ

Ters problem kavramı, özellikle jeofizik alanında bilinmeyen terimlerin, giriş-çıkış veya neden-sonuç ilişkilerini belirleme ihtiyacını ifade etmek için ortaya çıkmıştır. Günümüzde, ters problem terimi, eksik veriyi daha iyi belirlemek veya oluşturmak amacıyla kullanılır. Başka bir deyişle, bu terim, problemlerin kaynaklarını veya nedenlerini tanımlama, hatta belirlenmiş denklemlerdeki parametreleri tahmin etme amacını taşır. Uzay çalışmalarında ortaya atılan tahminlerin, ters problem kullanılarak bulunan verilerle nasıl desteklendiğini örnek olarak gösterebiliriz [1]. Benzer şekilde, ters problemler astronomi ve jeofizik gibi bilimin farklı alanlarında da kullanılmaktadır [2],[3].

Matematiksel modellerde, bir denklemin parametrelerine veya terimlerine doğrudan erişebildiği problemlere "direkt problem" denir. Ancak birçok durumda, parametreler veya terimler doğrudan ölçülemez ve bu durumda karşımıza ters problemler çıkar. Ters problemlerde elde edeceğimiz bilgi, diğer ölçülebilir değerlere bağlı fiziksel bir değer alır. Bu problemde zor olan kısım, ölçülebilir verilerin fiziksel değerlere bağlayan modellerin karmaşıklığıdır. Genellikle bu tür problemlerde integral denklemleri veya kısmi diferansiyel denklemler kullanılır. Dolayısıyla, direkt problemlerin çözümü, ters problemlerin çözümüne göre daha basittir, çünkü ters problemler elde edilen verilerden bilinmeyen değerleri hesaplayan problemlerdir.

Matematiksel fizik problemleri gerçek fiziksel süreçleri tanımladığından, bu problemlerin matematiksel formülasyonu aşağıdaki Hadamard'ın iyi tanımlı problemleri için önerdiği üç doğal gereksinimleri karşılamalıdır:

- a) Çözüm, belirli bir M_1 sınıfı içinde var olmalıdır.
- b) Çözüm, belirli bir M_2 fonksiyon sınıfında tek olmalıdır.
- c) Çözüm, problem verilerine (başlangıç ve sınır verileri, homojen olmayan terim, denklemin katsayıları, vb.) sürekli bağımlı olmalıdır.

Yukarıda belirtilen (a)-(c) gereksinimlerini sağlayan bir problem iyi tanımlı olarak adlandırılır ve karşılık gelen $M_1 \cap M_2$ fonksiyon kümesine iyi tanımlılık sınıfı denir. Matematiksel fizik problemleri için doğru formülasyonları bulmak ve çözümlerini (kesin

veya yaklaşık) oluşturma yöntemleri, matematiksel fizik denklemlerinin incelenmesinin ana içeriğidir. Ters problemlerde matematiksel modeller için parametre sayısı, ölçülen verilerden daha az olduğundan, ek koşullar eklemek gerekir. Bu durumda, düzenleme yöntemi kullanılabilir. Bu yöntem, çözüm üzerine olabilecek en az varsayımlar getirerek ve gereğinden fazla koşulları önleyerek problemin düzeltilmesini sağlar.

Bu tez çalışmasında, Neumann sınır koşulları ve ağırlık fonksiyonlu integral ek koşulu altında ısı denklemi için katsayı ve çözüm belirleme problemi incelenmiştir. Ayrıca, uygun koşullar altında lineer olmayan terimlerin modellerinin varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Bu tezde, daha önceden yapılan çalışmalara [4],[5] benzer örnekler sunulmuştur. Çalışma, aşağıdaki matematiksel denklem ve koşullar altında incelenmiştir:

$$Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}, \quad (1.1)$$

$$u_t = u_{xx} - \alpha(t)g(u) + f(x, t), (x, t) \in Q_T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.3)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$\int_0^1 \omega(x)u(x, t) dx = h(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.5)$$

(1.1)-(1.5) denklemlerinden $u(x, t)$ bulunması problemine düz problem ve (1.1)-(1.5) denklemlerinden $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ çiftinin bulunması problemine ters problem denir. Problemimiz (1.1) bölgesinde (1.2) denkleminin (1.3) başlangıç koşulu, (1.4) Neumann sınır koşullu ve (1.5) integral ek koşulu altında $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ çiftinin bulunması problemi olduğundan ters problemidir. Burada $\psi(x)$ ve $h(t)$ fonksiyonları verilmiştir. $h(t)$, belirli bir zamandaki toplam enerjinin veya kütlenin matematiksel bir ifadesidir. Bu fonksiyon, enerji veya kütle miktarının zaman içinde nasıl değiştiğini tanımlar. Fizikte genellikle enerji veya kütle, E veya m gibi sembollerle gösterilir, ancak burada $h(t)$ kullanılmaktadır. Bu fonksiyon, genel görelilik veya klasik mekanik gibi fiziksel sistemlerde zamanla değişen enerji veya kütle durumunu ifade etmek için kullanılabilir. (1.5) integral ek koşulu, enerjinin spesifikasyonu olarak adlandırılır. Ayrıca ısı transferi, termoelastisite, kontrol teorisi, yaşam bilimleri gibi birçok önemli uygulamada kullanılmıştır. Örnek olarak bir ısı transfer sürecinde, u sıcaklık dağılımını temsil ederse (1.1)-(1.5) kontrol problemi olur. Eğer $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu $\delta(x - x_0)$, $x_0 \in (0, 1)$ olursa (1.5) integrali

aşağıdaki şekilde olur:

$$\int_0^1 \delta(x - x_0)u(x, t)dx = u(x_0, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.6)$$

Burada x_0 noktasına gözlem noktası denir ve ısı bu noktada bilinir ve diğer noktalarda kontrol edilir.

Bu ifade, tez çalışmasının ana hatlarını ve inceleme yapılan matematiksel problemin temel bileşenlerini açıklar. Bu tezde, lineer ve lineer olmayan parabolik başlangıç sınır değer problemlerinde bilinmeyen bir sabit veya bilinmeyen fonksiyonu tanımlama sorunu ele alınmıştır. Parametrelerin fiziksel anlamları ve günlük hayattaki karşılıklarından söz edilmiştir.

Kısmi diferansiyel denklemlerde, ek koşullar veya ek sınır verileri aracılığıyla bilinmeyen katsayıları belirleme problemi üzerine yapılmış bazı çalışmalar bulunmaktadır [6–9]. Bu bilinmeyen parametreler, genellikle kaynak terimleri, u , u_x veya lineer olmayan terimin katsayıları ve sınır koşullarındaki katsayılar gibi değişkenlik göstermektedir. Bu parametreler, zaman ve uzaya (konuma) bağlı olabilir veya sadece zaman veya sadece uzayla ilişkilendirilebilir.

Özellikle ısı transferi problemlerinde, difüzyon katsayısı zamanla değişebilir veya uzayla değişkenlik gösterebilir. Difüzyon katsayısı, ısı transferini belirleyen önemli bir parametredir ve zaman veya uzayla nasıl değiştiği, sistemdeki ısı dağılımını etkileyebilir.

Aynı şekilde, ısı denklemindeki potansiyel ve kaynak terimleri de zaman veya konumla ilişkilendirilebilir. Bu terimler, sisteme eklenen veya çıkarılan ısı miktarını temsil eder ve bu miktarın zamanla veya uzayla nasıl değiştiği, ısı transferi probleminin çözümünü etkiler. Isı iletkenliğinde en sık karşılaşılan ters problemler, ısı kaynağı tanımlama problemleridir. Bu problemler, çeşitli bilimsel ve mühendislik uygulamalarındaki önemleri nedeniyle birkaç on yıldır araştırılmaktadır [10–12].

Sonuç olarak ısı denklemi parametrelerine göre değişkenlikler gösterebilir. Genel olarak ısı denklemi

$$u_t = Du_{xx} + \alpha(x, t)g(u) + F(x, t) \quad (1.7)$$

olarak tanımlayabiliriz. Burada D , α , ve F fonksiyonları sabit, zaman ve/veya konuma bağlı olabilir. D parametresi difüzyon ya da iletken katsayısı olarak, α fonksiyonu

genellikle potansiyel katsayı ve F fonksiyonu kaynak terim olarak adlandırılır.

Parametrelerdeki değişkenlere göre ısı denklemin uygulama alanlarına göz atalım.

1. **Uzaya(Konuma) Bağlı Kaynak Problemi:** Ters kaynak problemleri, genellikle bir sistemden kaynaklanan bir etkinin nedenini, kökenini belirleme problemlerini ifade eder ve konuma bağlı kaynak terimi zamana bağlı üst sınıra bağlı ek koşuluna dayalı olarak yeniden oluşturulur [13, 14]. Bu tür problemler genellikle gözlemler veya deneylerin sonuçlarını gözlemleyerek veya ölçerek, bu sonuçlardan geriye doğru kaynağın özelliklerini çıkarmayı amaçlar [15]. Örneğin, çevresel kirlilikle ilgili bir ters kaynak problemi, su kaynaklarındaki kirliliğin nedenini belirlemeye çalışabilir. Bu tür problemler, matematiksel modelleme, istatistiksel analiz ve benzeri teknikleri içeren alanın parçasıdır. Başka bir uygulama alanı da foto-akustik ve floresans tomografide [16, 17] ortaya çıkmaktadır.
2. **Zamana Bağlı Kaynak Problemi:** Bu bölüm, çeşitli geçici ölçümlerden zamana bağlı kaynakların yeniden oluşturulmasıyla ilgilidir [18, 19]. Bilinmeyen, zamana bağlı bir nicelik olduğundan, genel kural, aynı zamana bağlı anlamı taşıyan bir niceliği ölçmeye çalışmaktır; örneğin, sabit bir uzay noktasında sıcaklık ölçümü, bir sınır ısı akısı veya termal sistemdeki kütle/enerji gibi.
3. **Zaman ve Uzaya(Konuma) Bağlı Kaynak Problemi:** Bir tarladan gelen gübre yağışının bir akarsuya sürüklenerek sucul yaşamı etkilediği pratik bir durumu düşünün. Ardından, su kirliliği uygulamasında, yönetici modeldeki heterojen kaynak terimi bilinmeyen ve belirlenmesi gereken bir durumdur. Bu nedenle, son yıllarda ısı (difüzyon) denklem için ters kaynak problemleri önemli ölçüde ilgi çekmiştir [19, 20]. Bu çalışmalar katsayı kaynak fonksiyonunu ya uzay ya da zamana bağlı değişkenlere bağlı olarak belirlemeye çalışmıştır. Bunun yanı sıra, hem uzay hem de zamana bağlı değişkenlere bağlı olarak bir kaynağın bir sonlu ölçü veri setinden yeniden oluşturulması denendi [21, 22]. Bu bölümde hem uzaya hem de zamana bağlı olan, ancak ya toplam ya da çarpan olarak ayrılabilen ters ısı kaynağı fonksiyonları ele alınmaktadır [23–25].

4. **Zamana Bağlı Difüzyon Katsayısı:** Son dönemlerde, ısı denklemlerindeki zamana bağlı difüzyon katsayısını belirleme ciddi bir ilgi odağı olmuştur [26–32]. Zamanla değişen difüzyon katsayıları, radyoaktif bozunma veya hasara uğrayan dokularda bozunma derecesi ve hücre içindeki protein taşımada olduğu gibi birçok biyolojik ve fiziksel sistemde karşılaşılan anormal difüzyondan kaynaklanmaktadır. Isı denklemindeki öncü katsayısının veya en yüksek dereceden türevin katsayısının belirlenmesi geniş bir şekilde araştırılmıştır [33, 34]. Isı iletim denklemindeki zamanla değişen iletkenliğin tanımlanması, [35, 36] tarafından geliştirilen çeşitli teknikler kullanılarak açıklanmaktadır.
5. **Uzaya(Konuma) Bağlı Difüzyon Katsayısı:** Önceki bölümde, bilinmeyen iletkenlik zamanla değişken iken, bu bölümde iletkenlik genellikle uzayla ilişkilendirilen fonksiyonel bir sınıflandırılmış veya heterojen bir ortamı tanımlayacak şekilde düşünülmektedir. Konuma bağlı difüzyon katsayı hidroloji, malzeme bilimleri, ısı transferi ve taşıma problemleri çeşitli fiziksel ve mühendislik alanlarında ortaya çıkmıştır [2, 37, 38]. İlk olarak bir boyutlu rezervuardaki birkaç konumdaki geçirgenlik ölçümleri ile birlikte basınç verilerinden bir uzaysal geçirgenlik belirlenmesi ele alınmaktadır [39]. İkinci olarak bir kesikli anizotropik iletkenliğin yeniden elde edilmesi analiz edilmektedir. Üçüncü olarak belirli bir tip katmanlı ve zamanla değişen ortotropik iletkenlik sınır verilerinden yeniden elde edilmektedir. Heterojen sistemlerdeki moleküler taşımanın analizi, malzeme kimyasından biyofiziğe kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Özellikle konum bağımlı difüzyon sabiti üzerinde durarak, moleküler dinamik simülasyonları ve moleküler hareketin nasıl değerlendirdiği incelenmiştir [40].
6. **Zamana Bağlı Potansiyel Katsayısı:** Canlı dokuların biyoısı transfer modeli, vasküler sistem boyunca kan perfüzyonunu ve metabolik ısı üretimini dikkate alan ve ilk kez Pennes tarafından tanıtılmıştır [41]. O zamandan beri, termal dokuların özellikleri üzerine yapılan çalışmalara yeniden ilgi olmuş ve farklı senaryolarda kullanılan çeşitli biyoısı transfer denklemleri önerilmiştir. Bu yüzden zamana bağlı potansiyel katsayısının belirlenmesi biyoısı için önemlidir [42]. Ayrıca, bu katsayıya Pennes modelinde perfüzyon katsayısı olarak da adlandırılır. Bu tez çalışmasında çalışılan konulardan biri de zamana bağlı potansiyel katsayının bulunmasıdır.

7. **Konuma Bağlı Potansiyel Katsayısı:** 1948’de Pennes tarafından tanıtılan biyoısı denklemi, insan fizyolojisinde ortaya çıkan iki önemli bileşen arasında matematiksel bir bağlantı kurar: sıcaklık ve kan perfüzyonu. Yaşam süreçleri için gerekli olan oksijen ve besin maddelerini sağlama konusundaki doğal fizyolojik önemi, kan perfüzyonuna insan vücudunun farklı bölgeleri üzerinde herhangi bir karmaşık tıbbi uzmanlıkta merkezi bir rol verir. Kan perfüzyonu, zaman içinde doku başına değişen kan hacmi olarak tanımlanır [43],[44]. Mikroskobik olarak, insan vücut dokusu içindeki yerel, çok yönlü akışa atıfta bulunurken, makroskobik düzeyde, kan perfüzyonu, keyfi karmaşık yollar boyunca evrilebileceği için yönsüz bir miktar olarak kabul edilir. Benzer şekilde konuma bağlı perfüzyon katsayısı hakkında araştırmalar yapılmıştır [45].
8. **İntegral Ek koşulu:** İntegral ek koşulunun ısı denklemlerinde belirlenmesi mühendislik ve fizik alanlarında önemi vardır [31, 46–50]. Bu tür koşullar, ısının transferinde, termoelastisitede, kontrol teorisinde, yaşam bilimlerinde vb. birçok önemli uygulamadan kaynaklanır. Örneğin, [51]’de belirtilen ince bir çubuktaki ısının yayılmasında, çubuktaki toplam ısı miktarının değişim yasası ele alınmıştır. Buna ek olarak ağırlık fonksiyonu içeren integral ek koşulları termoelastisite, kimya mühendisliği, ısı iletimi ve plazma fiziği gibi alanlarda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır [30, 52–56].

Bu tür parametrelerin zaman ve uzay bağlamında nasıl değiştiğini anlamak, bir ters problemi çözerken karşılaşılan zorlukları ve çözüm stratejilerini anlamak açısından kritiktir. Ters problemler, genellikle gerçek dünya uygulamalarında, sistemin iç yapısını veya davranışını daha iyi anlamak amacıyla ortaya çıkar ve matematiksel modellemenin karmaşıklığını ortaya koyar.

Birinci bölüm, tezin giriş kısmını içermektedir. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel tanımlar, teoremler ve uzaylar hakkında bilgiler sunulacaktır. Üçüncü bölümde lineer ve lineer olmayan ısı denklem modellerinin fiziksel ve biyolojik modellerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, konuma bağlı potansiyel katsayılı lineer ısı denkleminin carleman kestirimi yardımıyla tekliği göstermiştir ve zamana bağlı potansiyel katsayılı lineer ısı denkleminde çözümünün varlığı ve tekliği, genelleştirilmiş Fourier yöntemi ile ikinci türden bir Volterra integral denkleminin tek çözülebilirliği ile birleştirilerek kanıtlanmış ve ağırlık fonksiyonun özel durumlarda gerekli koşullardan

bahsedilmiştir. Beşinci bölümde, lineer olmayan ısı denkleminde bir önceki bölümde ele alınan yardımcı problemin özdeğerleri ve ortonormal özfonksiyonları kullanılarak, özfonksiyonlar bakımından yapılan seri genişletme yöntemi, ters problemin uygun Banach uzayındaki sabit nokta problemine dönüşümünü gerçekleştirir. Başlangıç ve sınır verileri üzerindeki tutarlılık ve düzenlilik koşulları, ayrıca lineer olmayan terim üzerindeki Lipschitz koşulu altında, ters problemin varlığı ve tekliği, Banach-sabit nokta teoremini kullanarak küçük T için tek çözümün var olduğu gösterilmiştir. Altıncı bölümde, üçüncü bölümde bahsedilen modellerin beşinci bölümdeki koşulları sağladığı gösterilmiştir. Yedinci bölümde, tezde yapılan çalışmalardan ve yapılan çalışmalardan faydalananak yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremlerden bahsedilecektir.

Teorem 2.1 (Weierstrass-M Testi): Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde, $\{f_n\}$ gerçel veya karmaşık değerli bir fonksiyonel dizi olsun. Her $n \geq 1$ ve $x \in A$ için

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

eşitsizliğini sağlayan M_n pozitif katsayıları olsun. Ayrıca,

$$\sum_{i=1}^{\infty} M_n$$

serisi yakınsak olsun. O zaman

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$$

serisi A kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

Weierstrass M testinin daha genel bir versiyonu ise $\{f_n\}$ fonksiyonlarının hedef kümesinin Banach uzayı olduğu durumdur. Bu durumda,

$$|f_n| \leq M_n$$

ifadesi

$$||f_n|| \leq M_n$$

haline gelir. Burada $||\cdot||$ Banach uzayındaki normdur.

Tanım 2.1 (Sıkıştırıcı Tasvir): (M, d) metrik uzay ve $0 \leq q < 1$ olmak üzere q bir sabit olsun, öyle ki her $x, y \in M$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlansın:

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y).$$

Bu durumda $T : M \rightarrow M$ fonksiyonuna sıkıştırıcı tasvir ve q değerine sıkıştırıcı sabit denir.

Teorem 2.2 (Banach Sabit Nokta Teoremi): M , boş olmayan tam metrik uzay ve

$T : M \rightarrow M$ sıkıştırıcı tasvir olsun. Bu durumda $T(x^*) = x^*$ eşitliğini sağlayan tek sabit $x^* \in X$ noktası vardır. Ayrıca herhangi $x_0 \in X$ için $x_{n+1} = T(x_n)$ şeklinde tanımlanan iteratif dizisi d metriğine göre x^* sabit noktasına yakınsar.

Tanım 2.2 (Lipschitz Sürekliliği): d_x ve d_y sırasıyla X ve Y uzayında metrik olmak üzere (M, d_x) ve (M, d_y) , sırasıyla X ve Y uzaylarında metrik uzaylar olsun. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa:

$$d_y(f(x_1), f(x_2)) \leq K \cdot d_x(x_1, x_2)$$

şeklinde bir $K \geq 0$ pozitif reel sabiti varsa, f fonksiyonuna Lipschitz sürekli fonksiyonu denir.

Tanım 2.3 (Gronwall Eşitsizliği): $I, [a, \infty), [a, b]$ veya $[a, b]$ (burada $a < b$) biçiminde gerçel doğru üzerinde bir aralığı temsil etsin. α, β ve u gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere, bunlar I üzerinde tanımlı olsun. β ve u sürekli fonksiyonlar olduğunu ve α 'nın negatif kısmının I 'nin her kapalı ve sınırlı alt-aralığında integrallenebilir olduğunu varsayalım.

1. Eğer β pozitif ise ve u , aşağıdaki integral eşitsizliğini sağlıyorsa

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s) ds, \quad \forall t \in I,$$

o zaman

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r) dr\right) ds, \quad t \in I.$$

2. Ek olarak, α fonksiyonu artan ise,

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s) ds\right), \quad t \in I.$$

Tanım 2.4 (Dirac Delta Fonksiyonu): Dirac delta fonksiyonu $\delta(x)$, gerçel doğru üzerinde, her yerde sıfır olan ve sadece kökünde sonsuz olan bir fonksiyon olarak kabaca düşünülebilir,

$$\delta(x) \simeq \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

ve aynı zamanda aşağıdaki kimliği sağlamak üzere sınırlanmıştır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Dirac delta fonksiyonunun temel özelliği şudur:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

ve aslında,

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (\epsilon > 0 \text{ için}).$$

Tanım 2.5 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): H iç çarpım uzayı olsun. $u, v \in H$ için

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

eşitsizliği doğrudur. Burada:

- $|\langle u, v \rangle|$: u ve v vektörlerinin iç çarpımının mutlak değerini temsil eder.
- $\|u\|$: u vektörünün normunu (uzunluğunu) temsil eder.
- $\|v\|$: v vektörünün normunu (uzunluğunu) temsil eder.

Tanım 2.6 (Bessel Eşitsizliği): H bir Hilbert uzayı ve $e_1, e_2, \dots$ H uzayında bir ortonormal dizi olsun. Herhangi bir $x \in H$ için $\langle \cdot, \cdot \rangle$, H Hilbert uzayında bir iç çarpım olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.7 (Sturm-Liouville Problemi):

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right] + q(x) u(x) = -\lambda \omega(x) u(x)$$

Bu denklemde, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu temsil eder ve x bağımsız değişkenini ifade eder. $p(x)$, $q(x)$, ve $w(x)$ verilen fonksiyonlardır ve $p(x)$ genellikle sıfırdan farklı bir pozitif fonksiyon olarak kabul edilir. λ , parametresi özdeğer (eigenvalue) olarak adlandırılır.

Sturm-Louville operatörünü

$$L[u] = \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u$$

olarak tanıtırız ve Sturm-Louville denkleminde $p > 0$, $r \geq 0$ ve p, q sürekli fonksiyonlar olmak üzere:

$$L[u] + \lambda u = 0 \quad (2.1)$$

$$B_a[u] = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 p(a) u'(a) = 0 \quad (2.2)$$

$$B_b[u] = \beta_1 u(b) + \beta_2 p(b) u'(b) = 0 \quad (2.3)$$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ koşullarının sağlandığını düşünelim. Başlangıç değer problem-inin çözümü olan $\lambda = \mu$ kompleks bir sayıyı bulma problemine Sturm-Louville Problemi denir. $\lambda = \mu$ değeri bir özdeğer ve buna karşılık gelen çözüm y_λ özfonksiyondur.

Teorem 2.3: u ve v , (2.1)-(2.3) denkleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen öz-fonksiyonları olsun. O zaman u ve v fonksiyonuna göre $[a, b]$ aralığında ortogonaldır, yani

$$\int_a^b u(x)v(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

Teorem 2.4: (2.1)-(2.3) denkleminin tüm özfonksiyonları ‘esaslı’ reel değerlidir.

Teorem 2.5: (2.1)-(2.3) denkleminin tüm özdeğerleri basittir, yani her özdeğerle ilişkilendirilmiş yalnızca bir bağımsız özfonksiyon bulunmaktadır.

Teorem 2.6: $L[u] = -\lambda u$, $B_\alpha[u] = B_\beta[u] = 0$ olan $L[u]$ probleminin özfonksiyonları $\{u_n(x)\}$, $\lambda = 0$ özdeğeri değilse, $[\alpha, \beta]$ üzerinde tam ortogonal küme oluşturur.

Teorem 2.7 (Hilbert-Schmidt 1): Öz eşlenik L diferansiyel operatörü verilmiş olsun. Her $u \in D(L)$ için

$$L : \begin{cases} l(u), \\ B_a[u] = B_b[u] = 0, \end{cases}$$

burada $D(L) = \{u \in C^2[a, b] : B_a[u] = B_b[u] = 0\}$. Bu durumda, her $u \in D(L)$ için

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (u, X_k) X_k(x)$$

düzgün yakınsak ayrışımı doğrudur. Burada $X_k = X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ L 'nin ortonormal özfonksiyonlarıdır.

Sonuç 2.1: Hilbert-Schmidt teoreminin koşulları altında

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(u, X_k)|^2$$

Parseval eşitliği sağlanır. Şimdi teorem 2.7'yi (ayrışım teoremini) $L_2[a, b]$ 'de tamlığa genişletelim.

Teorem 2.8 (Hilbert-Schmidt 2): Her $u \in L_2[a, b]$ fonksiyonu için

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (u, X_k) X_k(x)$$

ayrışımı doğrudur, burada yakınsaklık L_2 'deki yakınsama anlamındadır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{k=1}^n (u, X_k) X_k(x) \right\| = 0$$

burada X_k , $k = 1, 2, \dots$ bir özeşlenik diferansiyel operatörünün ortonormalleştirilmiş özfonksiyonlarıdır.

Sonuç 2.2: Her özeşlenik L diferansiyel operatörü için, ortonormal $X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ özfonksiyonlar sistemi $L_2[a, b]$ 'de tam ortonormal sistem (ortonormal baz) oluşturur.

Örnekler:

1.

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Dirichlet sınır koşullu Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri ve ortonormal

özfonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) = \sqrt{2} \sin(\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots$$

2.

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 \leq x \leq 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Neumann sınır koşullu Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri ve ortonormal özfonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

$$X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \sqrt{2} \cos(\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Özfonksiyonlar sistemi $L_2[0, 1]$ 'de ortonormal bazdır.

3.

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 \leq x \leq 1 \\ u'(0) = u(1) \end{cases}$$

Neumann-Dirichlet sınır koşullu Sturm-Liouville problemi özdeğer ve ortonormal özfonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

4.

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\{1, \sqrt{2} \cos(2\pi nx), \sqrt{2} \sin(2\pi nx)\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Özfonksiyonlar dizisi $L_2[0, 1]$ 'de ortonormal bazdır.

Tanım 2.8 (Ortogonalleştirme): H Hilbert uzayında lineer bağımsız $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$ vektörler sistemi

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad e_n = \frac{h_n}{\|h_n\|}, \quad n = 2, 3, \dots$$

ve

$$h_n = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} (f_n, e_k) e_k$$

şeklinde $e_n, n = 1, 2, \dots$ vektörler sistemi düzenlemek mümkündür ki,

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n = m \\ 0, & \text{eğer } n \neq m \end{cases}$$

ortonormaldir ve $\text{span}\{f_n, n = 1, 2, \dots\} = \text{span}\{e_n, n = 1, 2, \dots\}$.

Tanım 2.9 (Schauder Bazı): H Hilbert uzayında $f_k, k = 1, 2, \dots$ vektörler dizisi verilsin. Eğer her $h \in H$ vektörü için

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k f_k$$

doğru olursa ve bu gösterim tekse, o halde $f_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi H 'da bir bazdır.

Sonuç 2.3: Yukarıdaki tanımdan şu sonuçları elde edebiliriz:

- H ayrılabilir.
- $f_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi tamdır.
- $f_k, k = 1, 2, \dots$ lineer bağımsızdır.

Tanım 2.10: Ayrılabilir Hilbert uzayında tam ortonormal sistem mevcuttur ve bu sistem baz oluşturur.

Tanım 2.11 (Volterra İntegral Denklemi): $F(t)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu ve r çözülmesi gereken bilinmeyen fonksiyon olmak üzere 1. tür lineer

Volterra integral denklemi

$$F(t) = \int_0^t K(t, \tau)r(\tau)d\tau,$$

2. tür Volterra integral denklemi

$$r(t) = F(t) + \int_0^t K(t, \tau)r(\tau)d\tau$$

şeklinde ifade edilir.

Not 2.1: Birinci tür volterra integral denklemini düşünelim:

$$F(t) = \int_0^t K(t, \tau)r(\tau)d\tau.$$

Yukarıdaki ifadenin her tarafını t 'ye göre türevini alalım:

$$F'(t) = K(t, t)r(t) + \int_0^t K_t(t, \tau)r(\tau)d\tau.$$

Her tarafı $K(t, t) \neq 0$ ile bölelim:

$$r(t) = \frac{F'(t)}{K(t, t)} - \int_0^t \frac{K_t(t, \tau)}{K(t, t)}r(\tau)d\tau,$$

$$\frac{F'(t)}{K(t, t)} = F_1(t) \quad ve \quad - \frac{K_t(t, \tau)}{K(t, t)} = K_1(t, \tau)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki 2. tür volterra integral denklemi elde ederiz:

$$r(t) = F_1(t) + \int_0^t K_1(t, \tau)r(\tau)d\tau.$$

3. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ISI DENKLEM MODELLERİ

Isı denklemleri, kimya ve biyoloji gibi çeşitli bilim dallarında gözlemlenen karmaşık olayları yakalayan temel matematiksel yapılar olarak önem taşır. Temelde, bu denklemler maddelerin mekansal difüzyonu ile bir ortamda reaktif etkileşimlerini açıklar. Bu etkileşimler, sıklıkla karmaşık ve ilgi çekici desenler, yapılar ve davranışlar oluşturur.

Lineer olmayan ısı denklem modelinin temeli, maddelerin sadece mekansal olarak hareket etmekle kalmayıp birbirleriyle etkileşime girerek dönüşümlere uğradığı prensibine dayanır. Bu karmaşık difüzyon ve reaksiyon etkileşiminin matematiksel olarak ifadesi kısmi diferansiyel denklemler (KDD) ile gerçekleştirilir. Bu denklemler, tipik olarak maddelerin konsantrasyonlarının difüzyon ve reaksiyon mekanizmaları nedeniyle zamanla ve mekansal olarak nasıl evrildiğini tanımlar.

Turing desen oluşumu gibi en ikonik örnekler, Lineer olmayan ısı denklem dinamiklerinin önemini ve güzelliklerini ortaya koymaktadır. Bu desenler, zebra çizgilerinden karmaşık biyolojik morfolojilere kadar çeşitli şekillerde kendini gösterir ve doğal olayları açıklamada bu matematiksel modellerin gücünü sergiler.

Isı denklemleri için matematiksel modelin bu incelemesinde, temel prensiplere, hükmeden denklemlere ve çeşitli alanlarda uygulamalara dalmayı amaçlıyoruz. Bu yolculukta, bu denklemlerin içsel zarafetini ve karmaşıklığını ortaya çıkararak, gerçek dünya olaylarını anlama ve öngörme konusundaki vazgeçilmez rollerini vurgulamayı hedefliyoruz.

3.1. Lineer Isı Modelleri

3.1.1. Pennes Modeli

Harry H. Pennes, insan vücudundaki ısı üretimi ile bölgesel kan akışı arasındaki bağlantı hakkında çeşitli araştırmalar yapmıştır. Bu araştırmalar sonucunda matematiksel bir model ortaya çıkarmıştır. Kendi ismini verdiği Pennes denklemi sayesinde biyoısı transferi üzerine birçok makale yazılmıştır. Pennes'in biyoısı denklemi, dokudaki ısı

transferini, lokal kan akışı, metabolizma ve ısı iletkenliği gibi faktörleri içeren bir dizi parametre ile açıklar. 1948 yılında yayınlanan [41] makale doku ve kan sıcaklığının analizi hakkında yazılmış en etkili makalelerden biri olmuştur. Bu denklem ile birçok bilim alanında da etkili sonuçlar ortaya çıkmıştır. Bunlardan bazıları, radyofrekans tümör ablasyonu sırasında ısı transferini modellemek, giyilebilir cihazlardan elde edilen termoelektrik enerji ve vücut sıcaklığından elektronik sistemlere yönelik enerji transferi üzerine yapılan çalışmalar, dış etkenlerle hedeflenmiş olarak kanser hücrelerini ısıtmak için manyetik alanları kullanmak, termografik çalışmalarla birlikte, kızılötesi termografi aracılığıyla yakalanan termal desenleri yorumlamak ve bölgesel perfüze yaşayan dokuda biyoyısı transfer sürecini açıklamak amacıyla, söz konusu doku sıcaklığı için Pennes denklemi olarak adlandırılan bir denklemi kullanmaktadır. Bu modelde

$$pc \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V p_b c_b (T - T_a) + h_m \quad (3.1)$$

şeklinde denklem ortaya çıkar, burada V , doku birimi hacmi başına perfüzyon hızıdır; p_b kanın yoğunluğudur; c_b kanın özgül ısısıdır; k , dokunun termal iletkenliğidir; p ve c dokuya atıfta bulunur. T_a arteriyel kanın sıcaklığıdır; T , yerel doku sıcaklığıdır, h_m , birim doku hacmi başına metabolik ısı üretim hızıdır. Her tarafını pc ile bölerek

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{pc} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{V p_b c_b}{pc} (T - T_a) + \frac{h_m}{pc} \quad (3.2)$$

ifadesini elde ederiz. Sınırlarda ısı akışını sabit varsayalım:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= q_0, \quad t > 0, \\ -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0, \quad t > 0, \end{aligned}$$

ve başlangıç koşulunu

$$T(x, 0) = T_a, \quad x \in (0, L)$$

olarak alalım. Burada q_0 vücut yüzeyindeki ısı akışıdır. Bu şekilde, $x = 0$ noktasında sabit ısı akışı olduğunu ve bu bölgeden "uzakta", sıfır sıcaklık gradyanının geçerli olduğunu varsayıyoruz. Sabit ısı akışının yanı sıra, ayrıca periyodik sınırlama koşullarını

da dikkate alıyoruz:

$$-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0 \cos(\omega t), \quad t > 0.$$

Burada ω ısıtma frekansdır. Bu tür sınırlama koşullarının bir olası uygulaması, sırasıyla soğutma ve ısıtma ile tümör tedavisidir [57].

Eğer $k/pc = D = \text{const}$, $V(p_b c_b)/pc = \mu(t)$, $h_m/bc = f(x, t)$ ve $y = x/\sqrt{D}$ ve $T - T_a = u$ olarak dönüşümlerini yaparsak, denklemimizi

$$u_t = u_{yy} + \mu(t)u + f(x, t), \quad (3.3)$$

$$u_x(0, y) = -\frac{q_0}{k}, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

$$u_x(L, y) = 0, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$u(x, 0) = T_a \quad (3.6)$$

olarak elde ederiz. Burada $\mu(t)$ *perfüzyon* katsayısıdır.

3.2. Kuadratik Lineer Olmayan Isı Modelleri

3.2.1. Fisher-Kpp Modeli

Fisher, 1937 yılında yayımladığı makale [58] ile avantajlı genlerin mekansal yayılımını ele almıştır. Bu çalışma, avantajlı genlerin popülasyonlar üzerindeki etkilerini incelemek adına önemli bir kaynak olmuş ve aynı yıl içinde bağımsız olarak çalışan (Kolmogorov, Petrovsky ve Piskunov) diğer bilim insanları da benzer araştırmalar yapmıştır [59]. Bu nedenle, matematikte Fisher denklemi aynı zamanda KPP (Kolmogorov, Petrovsky ve Piskunov) denklemi olarak da bilinir. Bu denklem, popülasyon büyümesi ve dalga yayılımını modellemek için kullanılan lineer olmayan ısı denklemi olarak da tanınır. Bu kısmi diferansiyel denklemlerin uygulama alanları, ekoloji, fizyoloji, pazarlama ve birçok alanda yaygın olarak bulunmaktadır.

Ülkenin nüfusundaki büyüme hızını, buna bağlı olarak doğum ve ölüm oranlarını dikkate alarak gelecek yıllarda nüfus hakkında düşük hata paylı tahminler yapmak

mümkündür. Ayrıca, şirketler için satış büyümesini, büyüme hızını ve satış hedefinin ne zaman gerçekleşeceği konusunda tahminler elde etmek de mümkündür. Bu yöntem aynı zamanda çeşitli popülasyon dinamiklerini tanımlamak ve zaman içinde parazitler, bakteriler ve tümör gibi organizmaların büyüme hızlarını tahmin etmek için de kullanılmıştır. Görüldüğü gibi, bu yöntem birçok farklı alanda uygulanabilir ve örnekler çeşitlendirilebilir.

Bir uzayda Fisher-KPP Denklemini [58] aşağıdaki gibi ortaya çıkar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu u \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (3.7)$$

Burada $u(x, t)$ popülasyon yoğunluğudur. $D > 0$ yayılımıdır, μ çoğalma oranıdır, ve K taşıma kapasitesi yoğunluğudur. $y = x/\sqrt{D}$ ve $v = u/K$ dönüşümleri yapılırsa,

$$u_t = u_{xx} + \mu(t)u(1 - u). \quad (3.8)$$

denklemini elde edilir.

3.2.2. Sosyal Ağ Modeli

Son yıllarda çevrimiçi sosyal ağlar, bilgi yayılımı için önemli bir platform haline gelmiştir. Dünya genelinde milyonlarca insan, bu sosyal ağlar aracılığıyla milyonlarca kilometre uzaklıktaki bilgilere kolaylıkla erişebilmektedir. Bu bağlamda, bilgi yayılımını daha iyi anlamak amacıyla çeşitli deneysel çalışmalar gerçekleştirilmiş ve modellemeler üzerinde araştırmalar yapılmıştır. İlk başlarda bu çalışmalar mekâna bağlı bilgi yayılımı üzerine odaklanmış olsa da, zaman ve mekâna bağlı yayılım konusunda da araştırmalar yapılmıştır. Bu modellemelerde, kısmi diferansiyel denklemlerden, özellikle difüzyon lojistik denklemlerinden faydalanılmıştır. Yani, bir bilgi kaynağından belli bir zaman ve mekânda etkilenen kullanıcıların yoğunluğunu belirlemek için kısmi diferansiyel denklemler kullanılmıştır. Zaman ve mekân faktörleri, bilgiden etkilenen kullanıcıların yoğunluğunu tahmin etmek için gerçek modellemelerde kritik öneme sahiptir. Son yıllarda ortaya çıkan platformlar arasında Facebook, Twitter, Instagram gibi sosyal medya platformları ve dünya genelinde tanınmış haber siteleri, milyonlarca insana ulaşabilmektedir. Bu sayede, film önerileri, doğal afetler, magazin haberleri

gibi konular etkili bir şekilde sosyal medya üzerinden yayılmaktadır. Bu süreci, “bilgi yayılımı” olarak adlandırabiliriz. Bu nedenle, bilgi yayılımını anlamak ve modellemek günümüzde büyük bir öneme sahiptir. Özetle, [60] çevrimiçi sosyal ağlarda zaman ve mekâna bağlı olarak bilgi yayılımını inceleyen ve bu süreçleri modellemek için kısmi diferansiyel denklemler kullanan ilk çalışmalardan biridir.

Bilgi ve kullanıcı etkileşimini modellemek için bu süreci iki ana bölümde ele alabiliriz. İlk olarak, ‘*büyüme süreci*’ adını verdiğimiz bir aşamadan bahsedebiliriz. Bu aşamada, bilginin yayıldığı bir noktada aynı mesafede olan farklı kullanıcılar, bu bilgi aracılığıyla birbiriyle tanışabilir ve böylece kümeleşme oluşabilir. Dolayısıyla büyüme süreci aşağıdaki şekilde modellenir:

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = rI(x, t)\left(1 - \frac{I(x, t)}{K}\right).$$

İkinci olarak, ‘*yayılma süreci*’ dediğimiz bir diğer aşamada, farklı mesafelerdeki bilgiden etkilenen kullanıcılar, doğrudan veya dolaylı arkadaşlık bağlantıları yoluyla veya diğer yollarla birbirleriyle etkileşimde bulunabilirler. Bu süreci Adolf Fick tarafından 1855’te önerilen “Fick’in Difüzyon Yasası” olarak da bilinen yasa ile gıdalarda, nöronlarda, biyopolimerlerde, ilaçlarda, gözenekli topraklarda, nüfus dinamiklerinde, nükleer malzemelerde, plazma fiziğinde ve yarı iletken doping süreçlerinde taşıma süreçlerini modellemek için yaygın bir şekilde kullanılan Fick yasası ile açıklamak mümkündür. Bu yasadan hareketle, farklı mesafelerdeki bilgiden etkilenen kullanıcıların yayılmasını d difüzyon hızı olarak kabul ederek, $d\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ şeklinde ölçülebilir. Bir uzayda yayılma süreci ve büyüme sürecini birleştirirsek, aşağıdaki yaygın lojistik denklemi ortaya çıkar:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = d\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + rI\left(1 - \frac{I}{K}\right), \quad (3.9)$$

$$I(x, 1) = \phi(x), \quad l \leq x \leq L, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial I}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t \geq 1. \quad (3.11)$$

Burada, I , t zamanında ve x konumunda etkilenen kullanıcıların yoğunluğunu; d , sosyal medyada bilginin hızını ölçen difüzyonu; r , aynı konumdaki kullanıcılar arasındaki bilgi hızını ve büyüme hızını; K , maksimum kullanıcı sayısını, yani belirli bir mesafedeki bilgi sahibi kullanıcıların maksimum yoğunluğunu; l ve L , bilginin kaynağı ile sosyal

medya kullanıcısı arasındaki alt ve üst sınırlarını; $\phi(x)$, başlangıç zamanındaki yoğunluğunu temsil eder. $I_x(l, t) = I_x(L, t) = 0$, Neumann sınır koşullu olması, alt ve üst sınırlarda bilgi akışı olmadığı anlamına gelmektedir. Bu fonksiyon sıfırdan farklı ve negatif değer almaz. Ayrıca, her bilgi için başlangıçtaki yoğunluk farklılık gösterir. Dolayısıyla, bu fonksiyon tektir.

3.3. Kübik Lineer Olmayan Isı Modelleri

3.3.1. Popülasyon Genetik Modeli

Diploid bireylerin bir popülasyonunu ele alalım. Gen, a ve A olarak iki farklı formda mevcutsa, bu formları allel olarak adlandırılır ve her bireyin taşıdığı allellere bağlı olarak popülasyon aa , aA ve AA olmak üzere üç farklı genotipe ayrılır [61],[62]. Popülasyonun bir habitat n içerisinde dağıldığını ve $\rho_i = u_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3$ olmak üzere aa , aA ve AA genotipleri için ilgili popülasyon yoğunluklarını temsil ettiğini varsayalım. Popülasyonun rastgele eşleştiğini, doğum oranının r_0 olduğunu ve habitat içinde bir difüzyon sabiti D ile yayıldığını varsayalım. D fonksiyonu, kimyasal difüzyon süreçlerinde difüzyon katsayısı veya ısı iletimi problemlerinde termal difüzyivite olarak da adlandırılır. $\nabla(D\nabla u)$ terimi, difüzyona bağlı değişim hızını temsil eder. Ayrıca, ölüm oranlarının sadece a ve A allellere göre genotiplere bağlı olduğunu ve bu oranların sırasıyla γ_i , $i = 1, 2, 3$ ile belirtildiğini varsayalım. Problemin iki veya daha fazla yoğunluk fonksiyonunu içerdiği durumlarda, $u_1, \dots, u_N$ gibi, aynı türev, bağlantılı bir lineer olmayan ısı denklemleri sistemi oluşturur. Bu koşullar altında, u_i popülasyon yoğunlukları, $N = 3$ olan

$$(u_i)_t = \nabla \cdot (D_i \nabla u_i) + f(t, x, u_1, \dots, u_N), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

formundaki bağlantılı denklemler sistemi tarafından sağlanır. $\gamma_0 = |\gamma_1 - \gamma_2| + |\gamma_3 - \gamma_2|$ miktarı yeterince küçük ve r_0 çok büyükse, küçük türevlere sahip başlangıç verileri için göreceli yoğunluk $u \equiv (u_3 + u_2/2)/(u_1 + u_2 + u_3)$ ve

$$f(u) = \sigma u(u - \theta)(1 - u) \quad (0 < \theta < 1) \quad (3.12)$$

ile verilen

$$u_t - \nabla(D\nabla u) = f(t, x, u) \quad (3.13)$$

denklemini sağlar. Burada σ, θ pozitif sabitlerdir ve γ_i ile ilgili *ölüm oranına* bağlıdır. f ile belirtilen (3.12) ile (3.13) denklemi genellikle Fisher'ın modeli olarak adlandırılır ve genetik süreç için idealize bir modeldir. Bu model aynı zamanda elektrik devre teorisinde bistabil iletim hatlarını da tanımlar.

$$D = k(\text{sabit}), \quad \xi = x, \quad \tau = kt$$

dönüşümleri ile

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \sigma g(u) \quad (3.14)$$

elde ederiz. Burada $g(u) = u(u - \theta)(1 - u)$, $(0 < \theta < 1)$.

3.3.2. Ginzburg Landau Modeli

Ginzburg-Landau denklemi, süperiletkenlerin kritik sıcaklık yakınındaki makroskobik davranışını tanımlayan [63] bir modeldir. Fizikte, süperiletkenlik üzerine yapılan çalışmalarda, Meissner etkisi ve manyetik alanın nüfuz derinliği gibi olayları açıklar, yoğun madde sistemlerindeki çeşitli faz geçişlerini incelemek için de kullanılır, süperiletkenlerdeki vortekslerin davranışını tanımlayabilir, bu da süperiletken malzemelerin kritik akım ve diğer özelliklerini belirlemede önemli bir rol oynar. Yoğun madde fiziği dışında, Ginzburg-Landau denkleminin değişkenleri erken evrenin faz geçişlerini tanımlamak için kozmolojide ve Higgs mekanizmasında kuantum alan teorisinde ortaya çıkar. Sonuç olarak, Ginzburg-Landau denklemi, süperiletkenlik, faz geçişleri ve fizikteki çeşitli diğer olaylar hakkında derinlemesine anlayış sağlamak için temel bir araç olarak hizmet eder. Boyutsuz, zaman bağımlı Ginzburg-Landau denklemleri süperiletkenlik için aşağıdaki formu alır [63]:

$$-\alpha \xi^2 \partial_t \varphi - i\alpha \frac{\xi}{\lambda} \varphi \phi + (\xi \nabla - \frac{i}{\lambda} A)^2 \varphi = \varphi(|\varphi|^2 - 1).$$

Burada, φ karmaşık bir sıralama parametresidir, karesinin modülü süperiletken elektronların yoğunluğunu ölçer, A manyetik vektör potansiyelidir ve ϕ elektriksel skaler

potanstir. α , λ ve ξ katsayıları pozitif malzeme sabitleridir. λ parametresi, nüfuz derinliği olarak adlandırılırken, ξ parametresi koherans uzunluğudur ve her iki parametre de küçüktür. Bu uzunluk ölçeklerinin oranı $\chi = \lambda/\xi$ Ginzburg-Landau parametresi olarak adlandırılır. Maxwell denklemlerinden elde edilen sonuca göre, potansiyeller manyetik alan H ve elektrik alanı E 'yi aşağıdaki gibi belirler:

$$H = \text{curl}A, \quad E = -A_t - \nabla\phi$$

ve

$$A \rightarrow A + \nabla\omega, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial\omega}{\partial t}, \quad \varphi \rightarrow \varphi e^{i\omega/(\xi\lambda)}$$

dönüşümlerini kullanarak ve $\varphi = f e^{i\chi}$ olmak üzere

$$Q = A - \xi\lambda\nabla\chi, \quad \Phi = \phi + \xi\lambda\frac{\partial\chi}{\partial t}.$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde sadece f ve Q için

$$-\alpha\xi^2\frac{\partial f}{\partial t} + \xi^2\nabla^2 f = f^3 - f + \frac{f|Q|^2}{\lambda^2}$$

yukarıdaki denkleme ulaşabiliriz. $A = \xi\lambda\nabla\chi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $Q = 0$ parametresini elde ederiz ve her iki tarafı $-\alpha\xi^2$ ile böldüğümüzde, elde edilen denklem şu şekildedir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\alpha}\nabla^2 f - \frac{1}{\alpha\xi^2}f(1 - f^2).$$

$\zeta = x$ ve $\eta = \eta/\alpha$ dönüşümleri kullanarak

$$f_\eta = f_{\zeta\zeta} - \mu f(1 - f^2)$$

elde ederiz. Burada μ katsayısı pozitif metaryal katsayısının tutarlılık uzunluğunun karesi ile çarpımının 1'e oranıdır.

3.3.3. Allen Chan Modeli

1979 yılında Allen ve Cahn tarafından ilk defa sunulan bu denklem, izotropik yüzey gerilimi tarafından etkilenen faz sınırlarının evrimini modellemeyi amaçlamaktadır [64]. Bu matematiksel ifade, matematiksel fizik ve özellikle malzeme bilimi alanlarında etkili bir şekilde kullanılan bir kısmi diferansiyel denklemler modelidir. Malzeme bilimi bağlamında, matematiksel durumları açıklamak için faz geçişleri ve desen oluşumları gibi konularda kullanılmıştır. Başka benzer modellere sahip denklemlerle birlikte çalışılarak, malzeme tasarımı, fiziksel sistemlerin davranışlarını anlama ve matematiksel fizik uygulamaları gibi birçok alanda kullanılabilir. Özel olarak Allen-Cahn Denklemi [65]

$$u_t = u_{xx} - \frac{1}{\epsilon^2}u(1-u)(1+u) \quad (3.15)$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (3.16)$$

olarak tanıtılmıştır. Burada u fonksiyonu, alaşımın iki metal bileşeninden birinin konsantrasyonunu temsil eder. ϵ parametresi, laboratuvar ölçeğindeki karakteristik boyutlara kıyasla küçük olan bir “etkileşim uzunluğu”dur. (3.16) Neumann sınır koşulu, bölgenin sınır boyunca hiçbir kütle kaybının olmadığı anlamına gelir. Allen-Cahn denklemi ve türevlerinin fiziksel anlamları hakkında daha fazla bilgi sahibi olmak isteyenler [66]-[67]-[68, 69] kaynaklarına göz atabilirler.

4. LİNEER ISI DENKLEMİNDE SADECE KONUM VE SADECE ZAMANA BAĞLI POTANSİYEL KATSAYININ BULUNMASI

4.1. Fourier Yöntemi ile Zamana Bağlı Potansiyelin Bulunması

(1.1)-(1.5) problemine karşılık gelen yardımcı spektral problem ve buna karşılık gelen özdeğer ve ortonormal özfonksiyonlar sırasıyla (2.5)-(2.6) olarak belirlenmiştir. Bu spektral problem, özeşlenik diferansiyel denklem olduğundan, $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ ortonormal özfonksiyonları $L_2(0, 1)$ 'de bir ortonormal baz oluşturur. Bu sayede problemin çözümünü seri toplamı şeklinde arayabiliriz:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos(\mu_n x). \quad (4.1)$$

Başlangıç sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$u'_n(t) + \mu_n^2 u_n(t) = E_n(t, u, \alpha), \quad (4.2)$$

$$u_n(0) = \psi_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

Burada,

$$E_n(t, u, \alpha) = \alpha(t)u_n(t) + f_n(t), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \sqrt{2}, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.4)$$

olmak üzere

$$\psi_n = m_n \begin{cases} \int_0^1 \psi(x) dx, & n = 0, \\ \int_0^1 \psi(x) \cos(\mu_n x) dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.5)$$

$$u_n(t) = m_n \begin{cases} \int_0^1 u(x, t) dx, & n = 0, \\ \int_0^1 u(x, t) \cos(\mu_n x) dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.6)$$

$$f_n(t) = m_n \begin{cases} \int_0^1 f(x, t) dx, & n = 0, \\ \int_0^1 f(x, t) \cos(\mu_n x) dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.7)$$

dir. Dolayısıyla, (4.2)-(4.3) probleminin çözümü şu şekildedir:

$$u_0(t) = \psi_0 e^{-\int_0^t \alpha(s) ds} + \int_0^t f_0(\tau) e^{\int_\tau^t \alpha(s) ds} d\tau, \quad (4.8)$$

$$u_n(t) = \psi_n e^{-\int_0^t (\mu_n^2 - \alpha(s)) ds} + \int_0^t f_n(\tau) e^{\int_\tau^t (\mu_n^2 - \alpha(s)) ds} d\tau, \quad (4.9)$$

ortonormal özfonksiyonlar ve (4.8)-(4.9) eşitliklerini (4.1) serisinde yazarsak:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\psi_n e^{-\int_0^t (\mu_n^2 - \alpha(s)) ds} + \int_0^t f_n(\tau) e^{\int_\tau^t (\mu_n^2 - \alpha(s)) ds} d\tau \right] X_n(x) \quad (4.10)$$

elde ederiz. Şimdi özel durumlar için gereken koşulları belirtelim.

Lemma 4.1: Eğer $\psi \in C^3[0, 1]$ ve $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$ koşulları sağlanırsa, pozitif $c = (\sum_{n=0}^{\infty} 1/\mu_n^2)$ sabiti için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\psi_n| \leq c \|\psi\|_{C^3[0,1]} \quad (4.11)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Verilen koşulların ψ üzerinde sağlandığını varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \psi_n &= \int_0^1 \psi(x) X_n(x) dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \psi(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n \sqrt{\lambda_n}} \int_0^1 \psi''' \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx. \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Cauchy-Schwartz ve Bessel eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\psi_n| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \psi''' \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_n} x) dx \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c \|\psi'''\|_{L_2(0,1)} \leq c \|\psi\|_{C^3[0,1]}. \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 4.2: Eğer $f(x, t) \in C(\overline{Q_T})$, $f(\cdot, t) \in C^3[0, 1]$ ve $f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0$ koşulları sağlanırsa, pozitif $c = (\sum_{n=0}^{\infty} 1/\mu_n^2)$ sabiti için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f_n| \leq c \|f(x, t)\|_{C^3[0,1]}.$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Bir önceki ispata benzer şekilde yapılır.

Lemma 4.3: $k \in \mathbb{N}$, $\omega(x) \in C[0, 1]$ ve $\omega(x) = x^k$ olsun. Öyleyse

$$\int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \leq \frac{c}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde c sabiti bulunur.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanacağız.

$k = 1$ için gösterelim.

$$\int_0^1 x \cos(\mu_n x) dx = \frac{1}{\mu_n^2} (1 - (-1)^n).$$

Buradan kolayca görülür ki, hipotezimiz sağlanır.

$n = k - 1$ için doğru olduğu varsayalım. $n = k$ için doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\left| \int_0^1 x^{k-1} \cos(\mu_n x) dx \right| < \frac{c}{\mu_n^2}$$

olduğu varsayalım.

$$\left| \int_0^1 x^k \cos(\mu_n x) dx \right| = \left| -\frac{k}{\mu_n^2} (-1)^n + (k-1) \int_0^1 x^{k-2} \cos(\mu_n x) dx \right|$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\left| \int_0^1 x^k \cos(\mu_n x) dx \right| \leq \frac{c}{\mu_n^2}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece tümevarım gereği herhangi $k \in \mathbb{N}$ için eşitsizlik sağlanır.

Lemma 4.4: $n, k \in \mathbb{N}$ ve $\omega(x) \in C[0, 1]$ olmak üzere, $\omega(x) = x^k$ olsun. Öyleyse,

$$\int_0^1 \omega(x) X_{2n}(x) dx \geq 0$$

ve

$$\int_0^1 \omega(x) X_{2n+1}(x) dx \leq 0$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lemma 4.5: Eğer $\omega(x) \in C^3[0, 1]$ ve $\omega'(0) = \omega'(1) = 0$ koşulu sağlanırsa, o zaman

$$\left| (\omega(x), X_n(x))_{L_2(0,1)} \right| \leq \frac{1}{n^3} \left| (\omega'''(x), X'_n(x))_{L_2(0,1)} \right|$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $(\omega(x), X_n(x))_{L_2(0,1)} = \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx = \sqrt{2} \int_0^1 \omega(x) \cos(\pi n x) dx$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \left(\left. \frac{\omega(x) \sin(\pi n x)}{\pi n} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \omega'(x) dx \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{\pi n} \left(\frac{\omega'(x) \cos(\pi n x)}{\pi n} - \int_0^1 \cos(\pi n x) \omega''(x) dx \right) = I. \end{aligned}$$

Eğer $\omega'(0) = \omega'(1) = 0$ ise

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^2} \int_0^1 \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n} \omega''(x) dx \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^2} \left(\left. \frac{\omega''(x) \sin(\pi n x)}{\pi n} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\omega'''(x) \sin(\pi n x)}{\pi n} dx \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^3} (\omega'''(x), X'_n(x))_{L_2(0,1)}. \end{aligned}$$

Böylece

$$\left| (\omega(x), X_n(x))_{L_2(0,1)} \right| \leq \frac{1}{n^3} \left| (\omega'''(x), X'_n(x))_{L_2(0,1)} \right|$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4.1.1. Ters Problemin Çözümün Varlığı ve Tekliği

Aşağıdaki koşulları $\psi, h(t), \omega(x)$ ve $f(x, t)$ için kabul edilsin:

$$(A_1) \begin{cases} (A_1)_1 & \psi(x) \in C^3[0, T], \psi'(0) = \psi'(1) = 0 \\ (A_1)_2 & \psi_0 > 0, \psi_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.12)$$

$$(A_2) \begin{cases} (A_2)_1 & h(t) \in C^1[0, 1], h(0) = \int_0^1 \omega(x)\psi(x) dx \\ (A_2)_2 & h(t) > 0, \quad t \in C[0, T] \end{cases} \quad (4.13)$$

$$(A_3) \begin{cases} (A_3)_1 & \omega(x) \in C[0, 1] \\ (A_3)_2 & \int_0^1 \omega(x) dx > 0, \int_0^1 \omega(x)X_n(x) dx \geq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$(A_4) \begin{cases} (A_4)_1 & f(x, t) \in C(\overline{Q_T}), f(., t) \in C^3[0, 1], t \in [0, T], \\ & f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0 \\ (A_4)_2 & f_0(t) > 0, f_n(t) \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.15)$$

Teorem 4.1 (Ters Problemin Varlığı ve Tekliği): $(A_1) - (A_4)$ koşullarının sağlandığını varsayalım. O zaman, (1.2) – (1.5) tarafından verilen ters problem için tek klasik çözüm çifti $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ mevcuttur.

İspat: Herhangi $\alpha(t)$ için, Fourier metodunu kullanarak (1.1) – (1.5) probleminin formal çözümünü inşa edeceğiz. Bu metoda göre, bilinmeyen $u(x, t)$ fonksiyonu özfonksiyon ve yardımcı spektral problemin ortonormal özfonksiyonları $\{X_n(x), n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ türünden Fourier serisi olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u(x, t) = u_0(t)X_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x). \quad (4.16)$$

Burada $u_0(t)$ ve $u_n(t)$ sistemleri aşağıdaki eşitlikleri sırasıyla sağlar:

$$\begin{aligned} u'_0(t) &= \alpha(t)u_0(t) + f_0(t), \quad u_0(0) = \psi_0, \\ u'_n(t) &= -\lambda_n u_n(t) + \alpha(t)u_n(t) + f_n(t), \quad u_n(0) = \psi_n. \end{aligned}$$

Bu problemin çözümünden

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \psi_0 + \int_0^t F_0(\tau, u, \alpha) d\tau, \\ u_n(t) &= \psi_n e^{-\lambda_n t + \int_0^t \alpha(s) ds} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau) + \int_\tau^t \alpha(s) ds} d\tau \end{aligned}$$

bulunur. $(A_1)_1$ ve $(A_4)_1$ koşullarının altında, (4.16) serisi, onun t 'ye göre kısmi türevi ve x 'e göre ikinci mertebeden kısmi türevli serileri, $\overline{Q_T}$ 'de düzgün yakınsaktır. Çünkü Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 kullanarak majorant toplamalarının mutlak yakınsak olduğu açıktır. Bu yüzden, $u(x, t)$, $u_t(x, t)$ ve $u_{xx}(x, t)$ toplam ifadeleri $\overline{Q_T}$ 'de süreklidir. Dolayısıyla, $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ ve herhangi $\alpha(t) \in C[0, T]$ için (1.3)-(1.4) koşulları sağlanır. Ayrıca (4.16) serisi terim terime integrallenebilir ve onun tekliğini $X_n(x)$ 'in $L_2(0, 1)$ 'de baz özelliğinden gösterebiliriz.

$$r(t) = \exp \left(- \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \quad (4.17)$$

olmak üzere (1.5) integral koşulunu uygulayarak $r(t)$ için aşağıdaki 2. Tür Volterra integral denklemini elde ederiz:

$$r(t) = F(t) + \int_0^t K(t, \tau) r(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (4.18)$$

Burada

$$F(t) = \frac{1}{h(t)} \left[\psi_0 \int_0^1 \omega(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\lambda_n t} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right], \quad (4.19)$$

$$K(t, \tau) = \frac{1}{h(t)} \left[f_0(\tau) \int_0^1 \omega(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right], \quad (4.20)$$

$\alpha(t) = -r'(t)/r(t)$, $r(t)$ 'nin pozitif ve $[0, T]$ 'de sürekli diferansiyellenebilir çözüm

olması durumunda $\alpha(t)$ fonksiyonu (4.17) ile belirlenebilir. Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 kullanarak, $(A_1)_1, (A_2)_1, (A_3)_1$ ve $(A_4)_1$ varsayımları ile $F(t)$ ve çekirdek $K(t, \tau)$ 'nin sağ tarafları sırasıyla $[0, T]$ ve $[0, T] \times [0, T]$ 'de sürekli diferansiyellenebilir. Buna ek olarak, $(A_1)_2, (A_2)_2, (A_3)_2$ ve $(A_4)_1$ varsayımlarına göre $F(t) > 0$ ve $K(t, \tau) \geq 0$ koşulları sırasıyla $[0, T]$ ve $[0, T] \times [0, T]$ 'de sağlanır. Dolayısıyla, 2. tür Volterra integral denklemi teorisinden pozitif ve $[0, T]$ 'de sürekli diferansiyellenebilir tek $r(t)$ çözümünü elde ederiz. (4.16)'deki Fourier serisi tarafından verilen (1.1) – (1.4) probleminin çözümü ile (4.18) fonksiyonu (1.1) – (1.5)'de verilen ters probleminin tek çözümü şekillendirir. Böylece Teorem 4.1 kanıtlanmıştır.

(4.18) denkleminin çözümünü

$$B(t) = \frac{E'(t) - F'(t)}{K(t, t)}, \quad Q(t, \tau) = -\frac{K_t(t, \tau)}{K(t, t)}$$

olmak üzere $(KB)(t) := \int_0^t Q(t, \tau)B(\tau)d\tau$ ifade ederek

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n B)(t)$$

serisi ile temsil edilebilir.

$$|(K^n B)(t)| \leq \|B\|_{C[0, T]} \frac{(t\|Q\|_{C([0, T] \times [0, T])})^n}{n!}, \quad t \in [0, T], n = 0, 1, \dots$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\|r\|_{C[0, T]} \leq \|B\|_{C[0, T]} e^{T\|Q\|_{C([0, T] \times [0, T])}} \quad (4.21)$$

varsayımı elde edilir.

Teorem 4.2: $\mathcal{I}, \{f, \psi, E\}$ formundaki üçlüklerin $(A_1) - (A_4)$ varsayımlarını sağladığı sınıfı temsil etsin ve bazı $N_i, i = 0, 1, 2, 3$ pozitif sabitleri için

$$\|f\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)} \leq N_0, \quad \|\psi\|_{C^3[0,1]} \leq N_1, \quad \|h\|_{C^1[0,T]} \leq N_2, \\ 0 < N_3 \leq \min_{t \in [0, T]} |h(t)|,$$

olsun. O zaman (1.1)–(1.5) ters problemin (α, u) çözüm çifti, sürekli olarak $\mathcal{I}$ 'da verilere bağlıdır.

İspat: Normu $\|\Phi\| = \|f\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)} + \|\psi\|_{C^3[0,1]} + \|h\|_{C^1[0,T]}$ olarak alalım. İki veri kümesi $\Phi = \{f, \psi, h\}$, $\bar{\Phi} = \{\bar{f}, \bar{\psi}, \bar{h}\} \in \mathcal{I}$ olmak üzere ve (α, u) ve $(\bar{\alpha}, \bar{u})$ sırasıyla Φ ve $\bar{\Phi}$ verilerine karşılık gelen (1.1)–(1.5) ters problemin çözümleri olsun, (4.16) ve (4.18)’a göre,

$$r(t) = F(t) + \int_0^t K(t, \tau) r(\tau) d\tau, \quad \text{ve} \quad \bar{r}(t) = \bar{F}(t) + \int_0^t \bar{K}(t, \tau) \bar{r}(\tau) d\tau, \quad (4.22)$$

yazabiliriz. Burada

$$r(t) = e^{-\int_0^t \alpha(s) ds}, \quad \bar{r}(t) = e^{-\int_0^t \bar{\alpha}(s) ds}, \quad (4.23)$$

$$F(t) = \frac{1}{h(t)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n e^{-\lambda_n t} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right), \quad (4.24)$$

$$K(t, \tau) = \frac{1}{h(t)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right), \quad (4.25)$$

$$\bar{F}(t) = \frac{1}{\bar{h}(t)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\psi}_n e^{-\lambda_n t} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right), \quad (4.26)$$

$$\bar{K}(t, \tau) = \frac{1}{\bar{h}(t)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right). \quad (4.27)$$

Cauchy-Schwartz ve Bessel eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leq \frac{1}{|h(t)|} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \psi_n \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right| \\ &\leq \frac{M}{N_3} C_1 \|\psi\|_{C^3[0,T]} \leq \frac{M}{N_3} C N_1, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} |K(t, \tau)| &\leq \frac{1}{|h(t)|} \sum_{n=0}^{\infty} \left| f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right| \\ &\leq \frac{M}{N_3} C_1 \max_{t \in [0,T]} \|f(\cdot, t)\|_{C^3[0,1]} \leq \frac{M}{N_3} C_1 N_0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

elde ederiz. Burada $M, \left| \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right| < M$ eşitsizliğini sağlayan sabittir. C_1 ve C_2 sayısı sırasıyla Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 de bahsedilen sabitlerdir ve birbirine eşittir.

İlk olarak $r - \bar{r}$ farkına göz atalım. (4.24)-(4.27) kullanarak

$$\begin{aligned} r(t) - \bar{r}(t) &= F(t) - \bar{F}(t) + \int_0^t [K(t, \tau) - \bar{K}(t, \tau)] q(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \bar{K}(t, \tau) [r(\tau) - \bar{r}(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde ederiz. $\beta = \|F - \bar{F}\|_{C[0,T]} + T\|K - \bar{K}\|_{C([0,T] \times [0,T])}\|r\|_{C[0,T]}$ ve $Q(t) = |r(t) - \bar{r}(t)|$ olsun. (4.30) eşitliğinden

$$Q(t) \leq \beta + \int_0^t |\bar{K}(t, \tau)| Q(\tau) d\tau \quad (4.31)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.31) ifadesine Gronwall eşitsizliğini [70] uygulayarak

$$Q(t) \leq \beta e^{\int_0^t \sup_{s \in [\tau, t]} |\bar{K}(s, \tau)| d\tau}$$

elde ederiz. Böylece, (4.21), (4.28) ve (4.29) kullanarak ve $C_2 = e^{(4C_1/N_3)N_0T}$ ve $C_3 = (4C_1T/N_3)N_1C_2$ olmak üzere

$$\|r - \bar{r}\|_{C[0,T]} \leq C_1(\|F - \bar{F}\|_{C[0,T]} + C_2\|K - \bar{K}\|_{C([0,T] \times [0,T])})$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece r , F ve K 'ya sürekli olarak bağlı olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi, F ve K ifadelerinin veriye sürekli bağımlı olduğunu gösterelim. Lemma 4.1 kullanarak

$$\begin{aligned} |F(t) - \bar{F}(t)| &= \left| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\psi_n}{h(t)} - \frac{\bar{\psi}_n}{\bar{h}(t)} \right) e^{-\lambda_n t} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right) \right| \\ &\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\psi_n}{h(t)} - \frac{\bar{\psi}_n}{\bar{h}(t)} \right| \\ &= M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{\psi}{h(t)} - \frac{\bar{\psi}}{\bar{h}(t)}, \mu_n \right) \right| \\ &\leq \frac{M\bar{C}N_1}{N_3^2} \|h - \bar{h}\|_{C[0,T]} + \frac{M\bar{C}}{N_3} \|\psi - \bar{\psi}\|_{C^3[0,1]}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
|K(t, \tau) - \bar{K}(t, \tau)| &= \left| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f_n}{h(t)} - \frac{\bar{f}_n}{\bar{h}(t)} \right) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \right) \right| \\
&\leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f_n}{h(t)} - \frac{\bar{f}_n}{\bar{h}(t)} \right| = M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{f_n}{h(t)} - \frac{\bar{f}_n}{\bar{h}(t)} \right), \mu_n \right| \\
&\leq \frac{M\bar{C}N_0}{N_3^2} \|h - \bar{h}\|_{C[0,T]} + \frac{M\bar{C}}{N_3} \|f - \bar{f}\|_{C^{3,0}(\bar{Q}_T)} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.32) ve (4.33) kullanarak

$$\begin{aligned}
\|F - \bar{F}\|_{C[0,T]} &\leq M_1(\|h - \bar{h}\|_{C[0,T]} + \|\psi - \bar{\psi}\|_{C^3[0,1]} + \|f - \bar{f}\|_{C^{3,0}(\bar{Q}_T)}) \\
&\leq M_1\|T - \bar{T}\|
\end{aligned}$$

$$\|K - \bar{K}\|_{C([0,T] \times [0,T])} \leq M_2\|T - \bar{T}\|$$

eşitsizliğine ulaşırız. Burada M_1 ve M_2 sayıları $N_k, k = 0, \dots, 3, M$ ve $\bar{C}$ sayıları tarafından belirlenir. Böylece F ve K ifadelerinin veriye sürekli bağımlı olduğunu göstermiş oluruz. Sonuç olarak, (4.19)-(4.20) kullanarak r ifadesi de veriye sürekli bağımlı olur. Şimdi de r' veriye sürekli bağımlı olduğunu gösterelim. (4.22) ifadelerinin türevlerini alarak

$$\begin{aligned}
r'(t) &= F'(t) + K(t, t)q(t) + \int_0^t K_t(t, \tau)r(\tau)d\tau, \\
\bar{r}'(t) &= \bar{F}'(t) + \bar{K}(t, t)\bar{r}(t) + \int_0^t \bar{K}_t(t, \tau)\bar{r}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}
\|r - \bar{r}\|_{C[0,T]} &\leq \|F' - \bar{F}'\|_{C[0,T]} \\
&\quad + (\|K - \bar{K}\|_{C([0,T] \times [0,T])} + T\|K_t - \bar{K}_t\|_{C([0,T] \times [0,T])})\|r\|_{C[0,T]} \\
&\quad + (\|\bar{K}\|_{C([0,T] \times [0,T])} + T\|\bar{K}_t\|_{C([0,T] \times [0,T])})\|r - \bar{r}\|_{C[0,T]} \quad (4.34)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. r, F ve K 'nın sürekli olarak verilere bağlı olduğunu gerçeğini dikkate alarak, (4.21) ve

$$|\bar{K}_t(t, \tau)| \leq \frac{N_2}{N_3^2} C \|\bar{f}\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)} + \frac{C}{N_3} \|\bar{f}\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)} \leq \left(\frac{N_2}{N_3^2} + \frac{1}{N_3} \right) C N_0,$$

eşitsizliği kullanarak r' 'nin F' ve K_t 'ye sürekli olarak bağlı olduğu görülecektir. (4.11) kullanarak, $\|F' - \bar{F}'\|_{C[0,T]}$ ve $\|K_t - \bar{K}_t\|_{C([0,T] \times [0,T])}$ için benzer tahminler elde edebiliriz, çünkü

$$\|F' - \bar{F}'\|_{C[0,T]} \leq \frac{2MCN_1}{N_3^2} \|h - \bar{h}\|_{C^1[0,T]} + \frac{MC}{N_3} \|\psi - \bar{\psi}\|_{C^3[0,1]}, \quad (4.35)$$

$$\|K_t - \bar{K}_t\|_{C([0,T] \times [0,T])} \leq \frac{2MCN_0}{N_3^2} \|h - \bar{h}\|_{C^1[0,T]} + \frac{MC}{N_3} \|f - \bar{f}\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)}. \quad (4.36)$$

Bu nedenle, (4.34) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} \|r' - \bar{r}'\|_{C[0,T]} &\leq M_3 \left(\|h - \bar{h}\|_{C^1[0,T]} + \|\psi - \bar{\psi}\|_{C^3[0,1]} + \|f - \bar{f}\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)} \right) \\ &\leq M_3 \|\Phi - \bar{\Phi}\|, \end{aligned} \quad (4.37)$$

burada M_3 , sabit $N_k, k = 0, \dots, 3, M$ ve C tarafından belirlenen bir sabittir. Bu, r' ifadesinin de verilere sürekli olarak bağlı olduğu anlamına gelir.

$$\alpha(t) = \frac{r'(t)}{r(t)}$$

eşitliğinden α 'nin verilere sürekli olarak bağımlı olduğu anlamı ortaya çıkar. Yukarıda gösterildiği gibi benzer bir şekilde, (4.16) 'de verilen u 'nun verilere sürekli olarak bağlı olduğunu kanıtlayabiliriz. Sonuç olarak Teorem 4.2 kanıtlanmıştır.

4.1.1.1. Ağırlık Fonksiyonunun Özel Durumları

Özel Durum 1: $\omega(x) = 1$ olsun ve $\psi, h(t), f(x, t)$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar varsayılınsın:

$$(B_1) \begin{cases} (B_1)_1 : & \psi(x) \in C[0, 1], \\ (B_1)_2 : & \psi_0 > 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

$$(B_2) \begin{cases} (B_2)_1 : & h(t) \in C^1[0, 1], \quad h(0) = \int_0^1 \omega(x)\psi(x) dx, \\ (B_2)_2 : & h(t) > 0, \quad t \in C[0, T] \end{cases} \quad (4.39)$$

$$(B_3) \begin{cases} (B_3)_1 : & f(x, t) \in C(\overline{Q}_T), \\ (B_3)_2 : & f_0(t) > 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Teorem 4.3: $(B_1) - (B_3)$ varsayımları sağlansın. O zaman, (1.2) – (1.5) tarafından verilen ters problem için tek klasik çözüm çifti $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ mevcuttur.

Özel Durum 2: $\omega(x) = x^k$ olsun ve $\psi, h(t), f(x, t)$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar varsayılınsın.

$$(C_1) \begin{cases} (C_1)_1 : & \psi(x) \in C^2[0, 1] \quad \psi'(0) = \psi'(1) = 0 \\ (C_1)_2 : & \psi_0 > 0, \quad \psi_{2n} \geq 0, \quad \psi_{2n-1} \leq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.41)$$

$$(C_2) \begin{cases} (C_2)_1 : & h(t) \in C^1[0, 1], \quad h(0) = \int_0^1 \omega(x)\psi(x) dx \\ (C_2)_2 : & h(t) > 0, \quad t \in C[0, T] \end{cases} \quad (4.42)$$

$$(C_3) \begin{cases} (C_3)_1 : & f(x, t) \in C(\overline{Q}_T), f(., t) \in C^2[0, 1], t \in [0, T], \\ & f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0 \\ (C_3)_2 : & f_0(t) > 0, \quad f_{2n}(t) \geq 0, \quad f_{2n-1}(t) \leq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.43)$$

Teorem 4.4: $(C_1) - (C_3)$ varsayımları sağlansın. O zaman, (1.2) – (1.5) tarafından verilen ters problem için tek klasik çözüm çifti $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ mevcuttur.

Özel Durum 3: $x_0 \in (0, 1)$ 'de sabit nokta olmak üzere $\omega(x) = \delta(x - x_0)$ ve

$\psi, h(t), f(x, t)$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar varsayılınsın.

$$(D_1) \begin{cases} (D_1)_1 : & \psi(x) \in C^3[0, 1], \quad \psi'(0) = \psi'(1) = 0 \\ (D_1)_2 : & \psi_0 > 0, \quad \psi_n X_n(x_0) \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.44)$$

$$(D_2) \begin{cases} (D_2)_1 : & h(t) \in C^1[0, 1], \quad h(0) = \int_0^1 \omega(x) \psi(x) dx \\ (D_2)_2 : & h(t) > 0, \quad t \in C[0, T] \end{cases} \quad (4.45)$$

$$(D_3) \begin{cases} (D_3)_1 : & f(x, t) \in C(\overline{Q_T}), f(., t) \in C^3[0, 1], t \in [0, T], \\ & f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0 \\ (D_3)_2 : & f_0(t) > 0, \quad f_n(t) X_n(x_0) \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.46)$$

Teorem 4.5: $(D_1) - (D_4)$ varsayımları sağlansın. O zaman, (1.2) – (1.5) tarafından verilen ters problem için tek klasik çözüm çifti $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ mevcuttur.

Özel Durum 4: $\psi, h(t)$ ve $f(x, t)$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar varsayılınsın:

$$(E_1) \begin{cases} (E_1)_1 : & \psi(x) \in C[0, 1] \\ (E_1)_2 : & \psi_0 > 0, \quad \psi_n X_n(x_0) \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.47)$$

$$(E_2) \begin{cases} (E_2)_1 : & h(t) \in C^1[0, 1]; \quad h(0) = \int_0^1 \omega(x) \psi(x) dx \\ (E_2)_2 : & h(t) > 0, \quad t \in C[0, T] \end{cases} \quad (4.48)$$

$$(E_3) \begin{cases} (E_3)_1 : & \omega(x) \in C^3[0, 1]; \quad \omega'(0) = \omega'(1) = 0 \\ (E_3)_2 : & \int_0^1 \omega(x) dx > 0, \quad \int_0^1 \omega(x) X_n(x) dx \geq 0, \quad t \in C[0, T] \end{cases} \quad (4.49)$$

$$(E_4) \begin{cases} (E_4)_1 : & f(x, t) \in C(\overline{Q_T}) \\ (E_4)_2 : & f_0(t) > 0, \quad f_n(t) \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.50)$$

Teorem 4.6: $(E_1) - (E_4)$ varsayımları sağlansın. O zaman, (1.2) – (1.5) tarafından verilen ters problem için tek klasik çözüm çifti $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ mevcuttur.

4.2. Carleman Kestirimi ile Konuma Bağlı Potansiyelin Bulunması

Lineer ısı denkleminin konuma bağlı potansiyel katsayı ve çözümün bulunması için Fourier yöntemi kullanılamaz. Bu tür konuma bağlı parametre problemlerinde genelde Carleman kestirimleri kullanılır.

Kabul edelim ki $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, gerçel değişkenler x ve t için açık bir küme ve $P, \alpha(x, t) \in L_\infty(\Omega)$ potansiyeli ile diferansiyel ısı operatör olsun.

$$Pu = \partial_t u + \partial^2 u + \alpha(x, t)u \quad (4.51)$$

olmak üzere gerçek $\gamma \in C^\infty(\Omega)$ fonksiyonu ve $s \geq 0$ sayısı için, ağırlık L^2 -normlar kümesini tanıtıyoruz:

$$\|u\|_s^2 = \int e^{2s\gamma(x,t)} |u(x, t)|^2 dx dt. \quad (4.52)$$

Her $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $s \geq s_0$ için

$$s^3 \|u\|_s^2 + s \|\partial u\|_s^2 \leq c \|Pu\|_s^2 \quad (4.53)$$

eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sabiti vardır. Şimdi, $a, d \in L_\infty(\Omega)$, $b \in C^3(\Omega)$ durumunda

$$P = \partial_t + b(x)\partial^2 + d(x, t)\partial - \alpha(x, t) \quad (4.54)$$

operatörü için bir tahmin elde ederiz.

Lemma 4.6: $b \in C^3(\overline{\Omega})$, $a, d \in L_\infty(\Omega)$ ve her $(x, t) \in \overline{\Omega}$ için

$$s\gamma_{xx}b^2 + \gamma_x b_x b \geq \epsilon \quad \gamma_x^2 \geq \epsilon \quad (4.55)$$

geçerli olsun. O zaman, (4.54) formunda bir operatör için (4.53) tahmininin geçerli olduğu s_0 ve $c > 0$ sayıları vardır.

Şimdi, sadece konumsal değişken x 'e bağlı olduğunu varsayarak, (4.54) eşitliğindeki operatörün katsayılarından birini belirleme ters problemi çözümünün tekliği ile (4.53)

eşitsizliği arasındaki bağlantıyı göstermek için basit bir örnek sunacağız.

$u(x, t)$, ısı denklemi için aşağıdaki sınır değer problemi sağlayan düzgün bir çözüm olsun.

$$u_t - u_{xx} + \alpha(x)u = 0, \quad x \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.56)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (4.57)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t \in [-T, T]. \quad (4.58)$$

$x = 0$ için $u(x, t)$, $u(0, t) = g(t)$, $t \in [-T, T]$ ve f ve g fonksiyonları verildiğinde, potansiyel $\alpha(x)$ 'ın yeniden inşa edilmesi gerekmektedir. Bu ters problem çözümünün tekliğinin, $x = 0$ 'da verilen verilere sahip olan Cauchy problemi çözümünün tekliğinden kaynaklandığını gösteriyoruz. Bu Cauchy problemi, ana kısmı ısı denklemi olan integro-diferansiyel denklem içindir. Bu amaçla, (4.56) – (4.58) problemine aynı sınır koşullarını sağlayan iki çözüm çiftinin $u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2$ olduğu varsayalım. u_1, α_1 için yazılan denklem (4.56)'ten u_2, α_2 için yazılan denklem (4.56) çıkarılacak şekilde işlem yapalım. $u_1 - u_2 = u$ ve $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ olarak adlandırıldığında,

$$u_t - u_{xx} + \alpha_1 u = \alpha(x)u_2(x, t), \quad x \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.59)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (4.60)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (4.61)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in [-T, T]. \quad (4.62)$$

elde edilir. Kısaltma için, $P = \partial_t - \partial_{xx} - \alpha_1$ ve $h(x, t) = \alpha(x)u_2(x, t)$ olarak belirleyelim. Sonra denklem (4.59) şu şekli alır:

$$Pu = h. \quad (4.63)$$

Böylece, (4.63) diferansiyel denkleminin çözümü u ve sağ tarafı h , $x = 0$ ve $t = 0$ çizgilerindeki çözüm u ve u_x 'in verilen izleri kullanılarak bulunmalıdır. $h(x, t)$ için sınır koşulları olmadığından, onu (4.63) denkleminden çıkarmak doğaldır. h fonksiyonunun aşağıdaki birinci dereceden bir diferansiyel denklemi sağladığını gözlemleyerek bunu

yapmak mümkündür:

$$u_2(x, t)h_t - (\partial_t u_2)h = 0.$$

$u_2(x, t) \neq 0$ olduğu varsayalım. Bu durumda bu denklem, Q operatörünün terimleri kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$Qh = (\partial_t - b(x, t))h = 0; \quad (4.64)$$

$$b(x, t) = \frac{\partial_t u_2}{u_2}. \quad (4.65)$$

(4.63) denklemine Q operatörü uygulayarak ve P operatörü ile yer değiştirerek,

$$PQu = [P, Q]u. \quad (4.66)$$

elde ederiz. (4.66) denklemini, yeni bilinmeyen fonksiyonu $v = Qu$ olarak tanıttığımızda, aşağıdaki denklem sistemi olarak yazılabilir:

$$Pv = [P, Q]u, \quad (4.67)$$

$$Qu = v. \quad (4.68)$$

Bu form, Q operatörünün u fonksiyonu için sıfır Cauchy verilerini (4.61) – (4.62) v fonksiyonu için sıfır Cauchy verilerine dönüştürdüğü için daha uygun bir formdur. Gerçekten de $u_{tx}(0, t) = 0$ ve (4.61)-(4.62) ikinci koşulunu t 'ye göre diferansiyelleyerek

$$v(0, t) = (Qu)(0, t) = u_t(0, t) - b(0, t)u(0, t) = 0 \quad (4.69)$$

$$v_x(0, t) = (u_{tx} - b_x u - b u_x) \Big|_{(x=0)} = 0 \quad (4.70)$$

olur. Böylece, (4.67), (4.68) sistemi, $x = 0$ ve $t = 0$ noktalarında sırasıyla Cauchy verileri ile ilişkilendirilmiş v ve u fonksiyonları için iki Cauchy problemi temsil eder. Bu iki problem, $[P, Q]$ komütatörü ile birbirine bağlıdır. $u(x, 0) = 0$ sınır koşulu kullanılarak, $Qu = v$ denklemi için Cauchy problemi açıkça çözülebilir:

$$Qu = u_2(x, t)\partial_t \left(\frac{u}{u_2} \right) = v, \quad (4.71)$$

$$u(x, t) = (Q^{-1})v = \int_0^1 K(x, t, \tau)v(x, \tau)d\tau, \quad (4.72)$$

burada

$$K(x, t, \tau) = \frac{u_2(x, t)}{u_2(x, \tau)}. \quad (4.73)$$

Böylece, (4.67), (4.69) sisteminden u fonksiyonunu çıkarıyoruz:

$$Pv = [P, Q]Q^{-1}v, \quad (4.74)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v_x(0, t) = 0. \quad (4.75)$$

P ve Q operatörlerinin ana kısımları (yani, maksimum mertebenin türevlerini içeren terimler) bizim durumumuzda komütatöre sahip olduklarından,

$$[P, Q] = [\partial_t - \partial^2 - \alpha_1, \alpha_t - b] = b_1\partial_t + b_0 \quad (4.76)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu nedenle, (4.74) denklemini detaylı olarak aşağıdaki gibi integro-diferansiyel denklem formunda yazabiliriz:

$$v_t - v_{xx} = \alpha_1 + \int_0^t \{b_1K_x + b_0K\} v(x, \tau) + b_1K v_x(x, \tau) d\tau. \quad (4.77)$$

(4.75), (4.77) cauchy problemlerimin çözümlerinin tekliğini ispatlamak için

$$\|u\|_s^2 = \int_0^T e^{2s\gamma(t)} |u(t)|^2 dt, \quad s \geq 0$$

ağırlık normundaki

$$(Ju)(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

integral operatörü tahminine ihtiyaç duyarız.

Lemma 4.7: Her $t \in [0, T]$ için $\gamma \in C^2[0, T]$ ve $-\gamma'(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\|Ju\|_s^2 \leq T^2 \|u\|_s^2 \quad (4.78)$$

eşitsizliği sağlanır. Ek olarak, eğer her $t \in [0, T]$ için $-\gamma''(t) \geq \mu \geq 0$ varsayarsak, bu

durumda

$$s||Ju||_s^2 \leq c||u||_s^2, \quad c = \frac{\pi}{4\mu} \quad (4.79)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $v = e^s \gamma u$ ve $\omega = e^s \gamma Ju$ olsun. Bu durumda

$$\omega(t) = \int_0^t \exp(s(\gamma(t) - \gamma(\tau)))v(\tau)d\tau.$$

$\gamma(t)$ artan bir fonksiyon olduğundan, $t \geq \tau$ için $\gamma(t) - \gamma(\tau) \leq 0$ ve

$$||\omega(t)|| \leq (J|v|)(t).$$

$L_2(0, T)$ uzayında J integral operatörünün normu T 'yi geçmediğinden, $||\omega||^2 \leq T^2||v||^2$. Dolayısıyla, u fonksiyonuna dönerek, (4.78) tahminini elde ederiz. Ek koşul $-\gamma''(t) \geq \mu \geq 0$ koşulu ile birlikte $t \geq \tau$ için

$$\gamma(t) - \gamma(\tau) \leq -\frac{\mu(t - \tau)^2}{2}.$$

Dolayısıyla,

$$|\omega(t)| \leq \int_0^t k(t - \tau)|v(\tau)| d\tau, \quad (4.80)$$

$$k(t) = \exp\left(-\frac{\mu st^2}{2}\right).$$

(4.80) tahmininin sağ tarafı çekirdek k ile v fonksiyonunun konvolüsyonudur. Young eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik ortaya çıkar:

$$||k * v|| \leq ||k||_{L_1(0,T)}||v||.$$

Bu durumda,

$$||k||_{L_1(0,T)} \leq \int_0^\infty \exp(-\mu st^2)dt = \frac{1}{\sqrt{\mu s}} \int_0^\infty e^{x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu s}}$$

ve dolayısıyla

$$||\omega||^2 \leq \frac{\pi}{4\mu s}||v||^2.$$

Eşitsizliğin her iki tarafını da s ile çarparak ve u fonksiyonuna dönerek (4.79) tahminini

elde ederiz. Lemma ispatlandı.

Lemma 4.8: $\gamma \in C^2[-T, T]$ olsun,

$$\|u\|_s^2 = \int_{-T}^T e^{2s\gamma(t)} |u(t)|^2 dt, \quad s \geq 0$$

ve her $t \in [-T, T]$ için

$$\text{sign} t = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

olduğu durumda $-\gamma'(t) \text{sign} t \geq 0$. Öyleyse J operatörü için (4.78) tahmini sağlanır.

Her $t \in [-T, T]$ için $-\gamma''(t) \geq 0$ ek varsayımı altında (4.79) tahmini geçerlidir.

Bu Lemma'yı kanıtlamak için, uzayı $L_2(-T, T)$ 'yi doğrudan $L_2(-T, 0) \oplus L_2(0, T)$ toplamı olarak genişletmek yeterlidir. Ardından, $L_2(-T, T)$ durumunda $t \rightarrow -t$ değişken değişikliğini yaparak her iki uzaya da Lemma 4.7'i uygulamak yeterlidir.

Şimdi, Cauchy probleminin (4.75), (4.77) teklik kanıtına dönüyoruz. İlk olarak, (4.77) ifadesinden aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$|v_t - v_{xx}| \leq c(|v(x, t)| + |(J|v|)^2 + |(J|v_x|)^2). \quad (4.81)$$

Sonradan göreceğimiz gibi, Cauchy probleminin teklik kanıtında Lemma 4.7 ve Lemma 4.8'ün tahminlerini uygulamamıza izin veren temel gerçek, ağırlık fonksiyonunun bir uzay noktasından Cauchy verilerinin destek bölgesine giderek artan uzaklıkla azalmasıdır. Ayrıca, denklem (4.77) ve eşitsizlik (4.81) türetirken $u_2(x, t) \neq 0$ olduğu gerçeğini kullandık. Başlangıç verileri açısından, bu koşul, $f(x) \neq 0$ olacak şekilde R üzerindeki tüm x 'ler için geçerli olacaktır. Ardından, Ω için x -ekseninin $[0, \eta]$ segmentinin küçük bir komşulukta yoğunlaştığı bir bölgeyi seçersek,

$$u_2(x, t) \neq 0, \quad \forall (x, t) \in \overline{\Omega}. \quad (4.82)$$

olduğunu garanti edebiliriz. Böyle bir bölgenin bir örneği, Yarı eksen boyu b 'nin

yeterince küçük olduğu bir elipsin iç kısmı

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R} \mid \varphi(x, t) > 0, x > 0\}, \quad (4.83)$$

$$\varphi(x, t) = 1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

bölgesi tarafından sağlanır. φ fonksiyonu (x, t) noktasından t -ekseninin $[-T, T]$ segmentine olan uzaklık arttıkça azalır; bu segmentte Cauchy verileri verilmiştir. Ancak, bunu bir ağırlık fonksiyonu olarak alamayız çünkü Lemma 4.7'nin koşullarını sağlamaz. Gerçekten de $\varphi_x = 0, x = 0$ için ve daha da önemlisi, $\varphi_{xx} < 0$ olduğu için koşullar sağlanmaz. Ancak, $\delta > 0$ ve yeterince büyük bir parametre $\lambda > 0$ ile tüm Lemma 4.7 koşullarını sağlayan

$$\gamma(x, t) = \exp(\lambda\varphi(x + \delta, t)) - 1 \quad (4.84)$$

şeklindeki modifikasyonunu alabiliriz.

$$\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R} \mid \gamma(x, t) > 0, x > 0\}. \quad (4.85)$$

kümesi (4.85) eşitsizliği tarafından tanımlanan kümeye, $\delta \rightarrow 0$ olarak dönüştürülür. Aslında, $(x, t) \in \overline{\Omega}$ için, $\delta \in (0, 1)$ olduğunda,

$$-\varphi_x(x + \delta, t) = 2(x + \delta)r^2 \geq 2\delta r^2,$$

$$\varphi_{xx} = -2/r^2, \varphi(x + \delta, t) \geq 0,$$

$$\lambda \geq \lambda_0, \lambda_0 = r^2/\delta$$

için

$$-\gamma_x = -\lambda\varphi_x \exp(\lambda\varphi) \geq 2\delta\lambda/r^2 \geq 2,$$

$$\gamma_{xx} = \exp(\lambda\varphi)(\lambda^2\varphi_x^2 + \lambda\varphi_{xx}) \geq (\lambda^2 4\delta^2/r^4 - 2\lambda/r^2) \geq \delta^{-1}(4 - 2) \geq 2$$

elde ederiz. Ayrıca, $\varphi_t = -2t/b^2$ olduğundan, $-\gamma_t \operatorname{sign} t \geq 2\lambda|t|/b^2 \geq 0$ ve bu nedenle Lemma 4.7'nin ilk tahmini geçerlidir. Ayrıca, $\lambda < 1/2$ için $-\gamma_{tt} \geq \mu > 0$ koşulunu sağlayabiliriz. Bununla birlikte, bu koşulu burada kullanmayacağız. Öyleyse, $\lambda \geq \lambda_0$ ve (4.82) koşulunun sağlandığı bir durumda, fonksiyon γ ve Ω kümesinin tanımları (4.84) ve (4.85) tarafından verildiğini varsayalım. Daha da fazlası, b sayısı

o kadar küçüktür ki (4.82) koşulunu sağlar. O zaman, eşitsizlik (4.81), $v = Qu$ için geçerlidir. Ayrıca, $v(0, t) = v_x(0, t) = 0$, $(0, t) \in \partial\Omega$. $\Omega_\epsilon = \Omega \cap \{\gamma > \epsilon\}$ şeklinde bir Ω_ϵ kümesi tanımlarız ve χ pürüzsüz bir fonksiyon olmak üzere $0 \leq \chi \leq 1$, Ω içindedir. Bu durumda, $(x, t) \in \Omega_\epsilon$ için $\chi = 1$ ve $(x, t) \in \Omega \setminus \Omega_\epsilon$ için $\chi = 0$ olduğunu varsayalım. Açıkça böyle bir fonksiyon mevcuttur. Süreklilik nedeniyle, Lemma 4.7'nin (4.53) tahmini, u ve u_x 'in Ω kümesinin sınırında sıfır olduğu herhangi bir fonksiyon için geçerlidir. Bu nedenle, böyle bir fonksiyon için χv alabiliriz. Gerçekten de Ω kümesinin sınırında $x = 0$ olduğu için $(\chi v)_x$ ile sıfırlanır, çünkü Cauchy verileri sıfırdır. $\psi = 0$ sınırının yakınında bu fonksiyonun inşası gereği, bu fonksiyonun sıfır olduğu görülür. χv fonksiyonunu (4.53) fonksiyonunda yerine koyarsak, $s \geq \max(1, s_0)$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & s \int_{\Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} (|v(x, t)|^2 + |v_x(x, t)|^2) dx dt \\ & \leq s \int_{\Omega} e^{2s\gamma} (|\chi v|^2 + |(\chi v)_x|^2) dx dt \leq c \int_{\Omega} e^{2s\gamma} (|\chi v|^2 + |(\chi v)_x|^2) dx dt, \\ & = c \int_{\Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} |v_t - v_{xx}|^2 dx dt + c \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} |(\chi v)_t - (\chi v)_{xx}|^2 dx dt. \end{aligned}$$

(4.81) eşitsizliği ve toplamalar için Cauchy-Schwarz-Bunyakovski eşitsizliği

$$\int_{\Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} |v_t - v_{xx}| dx dt \leq 3c^2 \int_{\Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} (|v|^2 + |J|v|^2 + |J|v_x|^2) dx dt. \quad (4.86)$$

sonucunu verir. Lemma 4.7'nin ilk tahminini t 'ye göre $|J|v|^2$ ve $|J|v_x|^2$ integrallerine uygulayarak, (4.86) eşitsizliğinin sağ tarafını

$$c \int_{\Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} (|v|^2 + |v_x|^2) dx dt$$

başka bir sabit c ile üstten tahmin edebiliriz. Sonuç olarak,

$$(s - c^2) \int_{\Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} (|v|^2 + |v_x|^2) dx dt \leq c \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon} e^{2s\gamma} |(\chi v)_t - (\chi v)_{xx}|^2 dx dt. \quad (4.87)$$

$s \geq s_0$ için, $1 - c^2/s_0 \geq 1/2$ olacak şekilde s_0 seçilirse $s - c^2 \geq s/2$ sonucuna ulaşırız. Ayrıca Ω_ϵ bölgesinde γ fonksiyonunun minimumu, $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ bölgesindeki maksimumu ile çakışır ve ϵ 'a eşittir. Ω_ϵ üzerindeki integral dışından $\min \exp(2s\gamma) = \exp(2s\epsilon)$ ve

$\Omega \setminus \Omega_\epsilon$ üzerindeki integral dışından $\exp(2s\epsilon)$ ağırlığının maksimumunu alırsak, (4.87) denkleminde ihlal edebiliriz. Her iki tarafı da $\exp(2s\epsilon)$ çarpanı ile bölersek ve $s \geq s_0$ için $s - c^2 \geq s/2$ alırsak,

$$s \int_{\Omega_\epsilon} (|v|^2 + |v_x|^2) dx dt \leq c \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon} |(\chi v)_t - (\chi v)_{xx}|^2 dx dt.$$

Eşitsizliğin her iki tarafını da s ile bölersek ve $s \rightarrow \infty$ limitine geçerse,

$$\int_{\Omega_\epsilon} (|v|^2 + |v_x|^2) dx dt = 0$$

sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla, Ω_ϵ bölgesinde $v = 0$ olarak bulunur. $\epsilon \rightarrow 0$ limitine geçerek, Ω bölgesinde $v = 0$ sonucuna ulaşırız. Eğer (4.72) denklemini ele alırsak, $u = Q^{-1}v$ elde ederiz ve sonuç olarak $u = 0$ olur. Bu nedenle $Pu = h = u_2(x, t)\alpha(x) = 0$ olur. (4.82) koşulu her $(x, t) \in \overline{\Omega}$ için geçerli olduğundan, $u_2 \neq 0$ ve böylece $\alpha(x) = 0$ olur. Bu da her $x \in [0, r - \delta]$ için, $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ olduğu anlamına gelir. r ve δ herhangi bir sayı olabilir, bu nedenle her $x \geq 0$ için $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ olur. Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış oluruz.

Teorem 4.7: $u(x, t)$, $x \geq 0$ yarı düzlem uzayında üç kere sürekli diferansiyellenebilen (4.56), (4.57) sınır değer probleminin çözümü olsun. Ayrıca her $x \geq 0$ için $f(x) = u(x, 0) \neq 0$ ve katsayı $\alpha \in C[0, \infty]$ olarak varsayalım. Öyleyse, $\alpha(x)$ potansiyeli $g(t) = u(0, t)$, $t \in (-T, T)$ fonksiyonu tarafından tek olarak belirlenir.

5. LİNEER OLMAYAN ISI DENKLEMİNİN SADECE ZAMANA BAĞLI POTANSİYELİN BULUNMASI

5.1. Problemin İntegral Denklem Sistemine Dönüştürülmesi

$C[0, T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ çözüm sınıfından olan, (1.1)-(1.2) içinde bulunan ve (1.3)-(1.4) koşullarını sağlayan ters problemde $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ çözüm çifti klasik çözüm olarak adlandırılır. $\alpha(t)$ zamanla değişen bir fonksiyon olduğundan ve sınır şartları lineer ve homojen olduğundan, ters problem (1.1)-(1.4) için Fourier yöntemini uygulayabiliriz. Buradan elde edilen yardımcı spektral problemin özdeğer ve ortonormal özfonksiyonları sırasıyla (2.5)-(2.6) olarak belirlenmiştir.

Bu spektral problem özeşlenik olduğundan, ortonormal öz fonksiyonlar $X_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, L_2(0, 1)$ uzayında bir baz oluşturur.

Başlangıç sınır değer problemi (1.1)-(1.4)'in çözümünü aşağıdaki gibi seri olarak ifade edilir:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \quad (5.1)$$

burada, başlangıç sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki diferansiyel denklem ile verilir:

$$u'_n(t) + \mu_n^2 u_n(t) = F_n(t, u, \alpha), \quad (5.2)$$

$$u_n(0) = \psi_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.3)$$

$$F_n(t, u, \alpha) = f_n(t) + \alpha(t)g_n(u).$$

Ayrıca,

$$m_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \sqrt{2}, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.4)$$

olmak üzere

$$\psi_n = m_n \begin{cases} \int_0^1 \psi(x) dx, & n = 0, \\ \int_0^1 \psi(x) \cos(\mu_n x) dx, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$g_n(u) = m_n \begin{cases} \int_0^1 g(u) dx, & n = 0, \\ \int_0^1 g(u) \cos(\mu_n x) dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.5)$$

$$f_n(t) = m_n \begin{cases} \int_0^1 f(x, t) dx, & n = 0, \\ \int_0^1 f(x, t) \cos(\mu_n x) dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.6)$$

olarak ifade edilir. Bu nedenle, (5.2)-(5.3)'ü sağlayan çözümü aşağıdaki gibi belirtilir:

$$u_n(t) = \psi_n e^{-\mu_n^2 t} + \int_0^t F_n(\tau, u, \alpha) e^{-\mu_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Şimdi, (1.6) denklemindeki integral ek koşulu kullanılarak, $\alpha(t)$ fonksiyonu problem verileriyle ifade edilir:

$$\alpha(t) = \frac{1}{g(h(t))} \left[h'(t) - f(x_0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 u_n(t) X_n(x_0) \right]. \quad (5.8)$$

Eşitlik (5.7)'yi (5.1)'de yerine koyarak

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\psi_n e^{-\mu_n^2 t} + \int_0^t F_n(\tau, u, \alpha) e^{-\mu_n^2(t-\tau)} d\tau \right] X_n(x) \quad (5.9)$$

elde ederiz. Bu denklemler, verilen sınır değer problemine çözümü tanımlar.

5.2. Çözümün Varlık ve Tekliği

(1.1)-(1.6) probleminin (5.8)-(5.9) denklem sistemine dönüştürülmesi ve $\{\alpha(t), u(x, t)\}$ çözüm çiftinin bir operatöre bağlanarak, Banach sabit nokta teoremi yardımıyla varlık ve tekliğinin gösterilmesi mümkündür. Böylece, (5.8)-(5.9) denklem sisteminin çözümü operatör ile ifade edilebilir:

$$z = \Phi(z). \quad (5.10)$$

Burada, $z = \{\alpha(t), u(x, t)\}$ ve (5.8)-(5.9) sistemi operatör denklemini ifade eder:

$$\Phi(z) = \Phi(u, \alpha) = \{\Phi_1, \Phi_2\}.$$

Bu, (5.8)-(5.9) denklemlerinin sağ tarafına karşılık gelir, öyle ki

$$\Phi_1 = \frac{1}{g(h(t))} \left[h'(t) - f(x_0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 u_n(t) X_n(x_0) \right], \quad (5.11)$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\psi_n e^{-\mu_n^2 t} + \int_0^t F_n(\tau, u, \alpha) e^{-\mu_n^2(t-\tau)} d\tau \right] X_n(x). \quad (5.12)$$

Bu noktada, [71] makalesinde bahsedilen fonksiyonel uzayı tanıtalım:

$$B_{2,T}^3 = \left\{ u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos(\mu_n x) : u_n(t) \in C[0, T], \right. \\ \left. J_T(u) = \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|u_n(t)\|_{C[0,T]})^2 \right]^{1/2} < \infty \right\}. \quad (5.13)$$

$u(x, t)$ fonksiyonu Fourier katsayıları ve ortonormal öz fonksiyonları kullanılarak temsil edilir. Bu temsil, $\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J_T(u)$ olarak ifade edilir. Açıkthat ki $B_{2,T}^3$ bir Banach uzayıdır. Ayrıca, uzay $E_T^3 = B_{2,T}^3 \times C[0, T]$ olarak tanımlanabilir ve normu $\|z\|_{E_T} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\alpha(t)\|_{C[0,T]}$ ile belirlenir, bu uzay da bir Banach uzayıdır. Şimdi, Φ 'nin E_T^3 üzerinde kendisiyle sürekli olduğunu gösterelim. Kısacası, $\Phi_1 \in C[0, T]$ ve $\Phi_2 \in B_{2,T}^3$ olduğunu gösterelim. Verilen (1.1)-(1.6) probleminde aşağıdaki varsayımlar kullanılır:

- (K_1) $\psi(x) \in C^3[0, 1]$, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$;
- (K_2) $h(t) \in C^1[0, 1]$, $h(0) = u(x_0, 0)$;
- (K_3) $f(x, t) \in C(\overline{Q_T})$, $\forall t \in [0, T]$ $f(\cdot, t) \in C^3[0, 1]$, $f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0$;
- (K_4)
 - $(K_4)_1$ $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$, $\forall t \in [0, T]$ $g(h(t)) \neq 0$;
 - $(K_4)_2$ $g^{(i)}(u)$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\mathbb{R}$ 'de en az bir sıfır noktasına sahip olsun¹;
 - $(K_4)_3$ Her sınırlı $I \subset \mathbb{R}$ aralığında Lipschitz koşulu sağlansın:

$$|g^{(3)}(u^{(1)}) - g^{(3)}(u^{(2)})| \leq d_3 |u^{(1)} - u^{(2)}|, \quad d_3 \in \mathbb{R}^+, \quad \forall u^{(1)}, u^{(2)} \in \mathbb{R}.$$

¹Eğer $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ fonksiyonu belli bir j ($j \leq 3$) türevi sabit olursa bu durumda $(K_4)_2$ koşulu şöyle uygulanacaktır.

$(K_4)_2$: $g^{(i)}(u)$, $i = 0, \dots, j - 1$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}$ 'de en az bir sıfırı mevcuttur.

İlk olarak, $\Phi_1 \in C[0, T]$ olduğunu gösterelim.

$$\psi_n = \frac{\sqrt{2}}{\mu_n^3} \int_0^1 \psi'''(x) \sin(\mu_n x) dx, \quad (5.14)$$

$$f_n = \frac{\sqrt{2}}{\mu_n^3} \int_0^1 f_{xxx}(x, t) \sin(\mu_n x) dx, \quad (5.15)$$

$$g_n = \frac{\sqrt{2}}{\mu_n^3} \int_0^1 [g'''(u)u_x^3 + 3g''(u)u_{xx}u_x + g'(u)u_{xxx}] \sin(\mu_n x) dx \quad (5.16)$$

(5.14)-(5.16) eşitliklerini (5.11) denkleminde kullanarak

$$|\Phi_1| \leq \frac{1}{|g(h(t))|} \left[|h'(t) - f(x_0, t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left| \alpha_n + \int_0^T [|\alpha(t)| |\eta_n(t)| + |\gamma_n(t)|] dt \right| \right] \quad (5.17)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada,

$$\alpha_n = \sqrt{2} \int_0^1 \psi'''(x) \sin(\mu_n x) dx \quad (5.18)$$

$$\eta_n = \sqrt{2} \int_0^1 [g'''(u)u_x^3 + 3g''(u)u_{xx}u_x + g'(u)u_{xxx}] \sin(\mu_n x) dx \quad (5.19)$$

$$\gamma_n = \sqrt{2} \int_0^1 f_{xxx}(x, t) \sin(\mu_n x) dx \quad (5.20)$$

olmak üzere Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Bessel eşitliklerini uygulayarak, (5.17) denklemindeki eşitsizlik aşağıdaki gibi türetilebilir:

$$|\Phi_1| \leq \frac{1}{|g(h(t))|} \left[|h'(t) - f(x_0, t)| + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_n} \right)^2 \right)^{1/2} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} + \int_0^T \left(\alpha(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n(t)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(t)|^2 \right)^{1/2} dt \right) \right\} \right]. \quad (5.21)$$

Bessel eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 &\leq \|\psi'''\|_{L_2(0,1)}^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2 &\leq \|g'''(u)u_x^3 + 3g''(u)u_{xx}u_x + g'(u)u_{xxx}\|_{L_2(0,1)}^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^2 &\leq \|f_{xxx}(\cdot, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu varsayımlarla, (5.21) denklemindeki seri, Weierstrass M-testine göre $[0, T]$ zaman aralığında düzgün yakınsar. Böylece, $\Phi_1 \in C[0, T]$ olduğunu kanıtlarız. Şimdi, $\Phi_2 \in B_{2,T}^3$ olduğunu gösterelim. İlk olarak, şunu göstermeliyiz:

$$J_T(u) = \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^3 \max_{0 \leq t \leq T} |u_n(t)| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (5.22)$$

Burada, $u_n(t) = \psi_n e^{-\mu_n^2 t} + \int_0^t F_n(s, u, \alpha) e^{\mu_n^2(s-t)} ds$ olarak alınmıştır.

$(K_1) - (K_4)$ varsayımları altında, $u_n(t)$ için kısmi integrasyon uygulayarak ve elde edilen eşitliği μ_n^3 ile çarparak

$$\mu_n^3 |u_n(t)| \leq \int_0^t [|\alpha(t)| |\eta_n(t)| + |\gamma_n(t)|] dt + |\alpha_n|, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Bu eşitsizlikten aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^3 \max_{t \in [0, T]} |u_n(t)| \right)^2 &\leq 4T^2 \left[\max_{t \in [0, T]} |\alpha(t)| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in [0, T]} |\eta_n(t)| \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in [0, T]} |\gamma_n(t)| \right)^2 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Bessel eşitsizliğini kullanarak, (5.23) denkleminin sağ tarafı yakınsar. Böylece, $J_T(\Phi) < \infty$ ve $\Phi_2 \in B_{2,T}^3$. Sonuç olarak, Φ 'nin E_T^3 üzerinde kendisiyle sürekli olduğu belirlenmiştir.

(5.1) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|u_x| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n u_n(t) \cos(\mu_n x) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(\mu_n^3 \max_{t \in [0, T]} |u_n(t)| \right) \leq c \|u\|_{B_{2,T}^3}. \quad (5.24)$$

Benzer şekilde,

$$|u_{xx}| = \left| - \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 u_n(t) \sin(\mu_n x) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left(\mu_n^3 \max_{t \in [0, T]} |u_n(t)| \right) \leq c \|u\|_{B_{2,T}^3} \quad (5.25)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u_{xxx}|^2 dx &= - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^3 u_n(t) \cos(\mu_n x), - \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^3 u_n(t) \cos(\mu_n x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n^3 \max_{t \in [0, T]} |u_n(t)|) \leq c \|u\|_{B_{2,T}^3} \end{aligned} \quad (5.26)$$

dir. Burada, $(\cdot, \cdot)_{L_2(0,1)}$ ifadesi $L_2(0,1)$ uzayındaki iç çarpımı temsil eder ve $c = (\sum_{n=0}^{\infty} 1/\mu_n^2)^{1/2}$ olarak tanımlanır. Bu durumda, aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leq c_0 \|u\|_{B_{2,T}^3}, \quad (5.27)$$

$$\|u_x\|_{L_2(0,1)} \leq c_1 \|u\|_{B_{2,T}^3}, \quad (5.28)$$

$$\|u_{xx}\|_{L_2(0,1)} \leq c_2 \|u\|_{B_{2,T}^3}, \quad (5.29)$$

$$\|u_{xxx}\|_{L_2(0,1)} \leq c_3 \|u\|_{B_{2,T}^3}. \quad (5.30)$$

Bu ilişkileri göz önüne alarak, basit dönüşümlerle aşağıdaki eşitsizliklere ulaşılır:

$$\begin{aligned} |u_0(t)| &\leq |\psi_0| + \sqrt{T} \left(\int_0^t |f_0(s)|^2 ds \right)^{1/2} + T \|\alpha(t)\|_{C[0,T]} \|g_0(u)\|_{C[0,T]}, \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|u_n(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 |\psi_n|^2) \right)^{1/2} \\ &+ 2\sqrt{T} \left(\int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 |f_n(s)|)^2 \right) ds \right)^{1/2} + 2T \|\alpha(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|g_n(u)\|)^2 \right)^{1/2}, \\ \|\alpha(t)\|_{C[0,T]} &\leq \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \times \left\{ \|h'(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} \right. \\ &+ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} + \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 |f_n(s)|)^2 ds \right)^{1/2} \right. \\ &\left. \left. + T \|\alpha(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|g_n(u)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ayrıca, tanım gereği

$$\|g(u)\|_{B_{2,T}^3} = \|g_0(u)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|g_n(u)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}$$

yazılabilir. K_4 varsayımı kullanılarak şu sonuçlara ulaşılabilir:

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |g_0(u)| &< \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^1 g(u) dx \right| < \max_{t \in [0, T]} \int_0^1 d_0 |u| dx \leq d_0 \|u\|_{C[0, T]} \\ |g_n(u)| &= \left| \int_0^1 g(u) \cos(\mu_n x) dx \right| \leq \int_0^1 |g(u)| \cos(\mu_n x) dx \leq \int_0^1 d_0 |u| \cos(\mu_n x) dx \\ &\Rightarrow \mu_n^3 \|g_n(u)\|_{C[0, T]} < d_0 \mu_n^3 \|u_n(t)\|_{C[0, T]} \end{aligned}$$

Bu bilgiler ışığında

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|g_n(u)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2} \leq d_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|u_n(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ilişkilerle aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\|g(u)\|_{B_{2,T}^3} \leq d_0 \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3},$$

$$d_0 B^*(T) = B(T),$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{E_T^3} &\leq A(T) + B^*(T) \|\alpha(t)\|_{C[0, T]} \|g(u)\|_{B_{2,T}^3} \\ &\leq A(T) + B(T) \|\alpha(t)\|_{C[0, T]} \|u\|_{B_{2,T}^3}. \end{aligned}$$

Basit dönüşümlerle aşağıdaki eşitsizlikler yazılır:

$$\|u_0(t)\|_{C[0, T]} \leq \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)} + T \|\alpha(t)\|_{C[0, T]} \|g_0(u)\|_{C[0, T]}, \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|u_n(t)\|_{C[0, T]})^2 \right) &\leq \sqrt{2} \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2T \|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q_T)} \\ &\quad + 2T \|\alpha(t)\|_{C[0, T]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|g_n(u)\|_{C[0, T]})^2 \right), \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
\|\alpha(t)\|_{C[0,T]} &\leq \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|h'(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \times [\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q_T)} + T\|\alpha(t)\|_{C[0,T]} \\
&\quad \times \left. \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^3 \|g_n(u)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right\}. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

(5.31)-(5.33) ifadelerinden $\{u(x, t), \alpha(t)\}$ çiftinin fonksiyonel uzaylardaki normları için aşağıdaki eşitsizliklere ulaşılır:

$$\|u\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T)\|\alpha(t)\|_{C[0,T]}\|g(u)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{5.34}$$

$$\|\alpha(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T)\|\alpha(t)\|_{C[0,T]}\|g(u)\|_{B_{2,T}^3}. \tag{5.35}$$

Burada

$$A_1(T) = \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f(x, t)\|_{L_2(Q_T)} + \sqrt{2}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2T\|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q_T)}$$

$$B_1(T) = 3Td_0$$

$$\begin{aligned}
A_2(T) &= \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|h'(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} \right. \\
&\quad \left. \left[\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f_{xxx}(x, t)\|_{L_2(Q_T)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$B_2(T) = \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} Td_0 \right\}$$

(5.34)-(5.35) eşitsizliklerinden, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\|\Phi_1(z)\|_{B_{2,T}^3} + \|\Phi_2(z)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)\|\alpha(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}. \tag{5.36}$$

Burada,

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T),$$

$$B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Yani,

$$\begin{aligned}
A(T) = & \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{2}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f(x,t)\|_{L_2(Q_T)} \\
& + 2T\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(Q_T)} + \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|h'(t) - f(x_0,t)\|_{C[0,T]} \right. \\
& \left. + \left(\sum_{n=a}^b \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} [\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(Q_T)}] \right\}
\end{aligned}$$

$$B(T) = 2Td_0 + \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left(\sum_{n=a}^b \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} Td_0 \right\}.$$

Bu çalışmada, verilen denklem seti üzerinden bir analiz yapılmıştır:

$$\begin{aligned}
A(T) = & \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{2}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f(x,t)\|_{L_2(Q_T)} \\
& + 2T\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(Q_T)} + \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \\
& \left\{ \|h'(t) - f(x_0,t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{n=a}^b \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} \right. \quad (5.37)
\end{aligned}$$

$$\left. \left[\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(Q_T)} \right] \right\}. \quad (5.38)$$

$$B(T) = 3Td_0 + \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left(\sum_{n=a}^b \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} Td_0 \right\}$$

$$C = \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{2}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}$$

$$D(T) = T(\|f(x,t)\|_{L_2(Q_T)} + 2\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(Q_T)})$$

$$\begin{aligned}
E(T) = & \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|h'(t) - f(x_0,t)\|_{C[0,T]} \right. \\
& \left. + \left(\sum_{n=a}^b \frac{1}{\mu_n^2} \right)^{1/2} \left[\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(Q_T)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Bu durumda aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz: $A(T)=C + D(T) + E(T)$ ve böylece,

$$\|\Phi(z)\|_{E_T^3} \leq C + D(T) + E(T) + B(T)R^2.$$

Önemli bir not, $E(T)$ fonksiyonunun sınırlı olduğudur, çünkü K_4 tarafından sürekli kapalı aralıkta sağlanmaktadır. Başka bir önemli not ise, T sıfıra yaklaştıkça, $D(T)$ sıfıra yaklaşır, $E(T)$, $E(0)$ değerine $B(T)$ sıfıra yaklaşır. Eğer $C + E(0) < R$ koşulu sağlanırsa öyle T_0 değeri bulabiliriz ki, her $T \in [0, T_0]$ için $\Phi(z)$, E_T^3 uzayındaki normu R 'yi aşmaz. Böylece aşağıdaki Lemma 5.1 ispatlanmış olur.

Lemma 5.1: $(K_1) - (K_4)$ koşulları altında, öyle bir T_0 pozitif sayısı vardır ki probleme $[0, T]$, $T \leq T_0$ zaman aralığında bakıldığında $\Phi(z)$ fonksiyonu B_R 'yi B_R 'ye sürekli dönüştürür. Burada $C + E(0) < R$ 'dir. Öyle ki,

$$C = \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{2}\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}$$

$$E(0) = \lim_{T \rightarrow 0} E(T)$$

olarak belirlenmiştir.

Şimdi, z_1 ve z_2 , E_T^3 uzayındaki herhangi iki elemanı olsun. İki farklı eleman z_1 ve z_2 için fonksiyonel uzayın tanımı gereği

$$\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\|_{E_T^3} = \|\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2)\|_{B_{2,T}^3} + \|\Phi_1(z_1) - \Phi_1(z_2)\|_{C[0,T]}$$

yazılır. Burada, $z_i = [\alpha^{(i)}, u^{(i)}(x, t)]^T$, $i = 1, 2$ ve (5.11) ve (5.12) denklemleri kullanılarak $\Phi_1(z)$ ve $\Phi_2(z)$ farkları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) - \Phi_1(z_2) = \frac{1}{g(h(t))} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \left(\int_0^t (F_n(s, u^{(1)}, \alpha^{(1)}) \right. \right. \\ \left. \left. - F_n(s, u^{(2)}, \alpha^{(2)})\right) e^{\mu_n^2(s-t)} ds \right) X_n(x_0) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2) &= \int_0^t [F_0(s, u^{(1)}, \alpha^{(1)}) - F_0(s, u^{(2)}, \alpha^{(2)})] ds \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t [F_n(s, u^{(1)}, \alpha^{(1)}) - F_n(s, u^{(2)}, \alpha^{(2)})] e^{\mu_n^2(s-t)} ds \right) X_n(x).\end{aligned}$$

$(K_1) - (K_3)$ varsayımları altında ve kısmi integrasyon kullanarak, ve $(K_4)_1$ varsayımından faydalanarak yukarıdaki denklemleri şu şekilde türetilir:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1) - \Phi_1(z_2) &= \frac{1}{g(h(t))} \\ &\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left(\int_0^t M(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(2)}) e^{\mu_n^2(s-t)} ds \right) X_n(x_0) \right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2) &= \left[\int_0^t [\alpha^1(g_0(u^{(1)}) - g_0(u^{(2)})) - (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})g_0(u^{(2)})] ds \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{\sqrt{2}}{\mu_n^3} M(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(2)}) e^{\mu_n^2(s-t)} ds \right) \cos(\mu_n x).\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}M(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(2)}) &= \int_0^1 \left[\alpha^{(1)}(g'''(u^{(1)})(u_x^{(1)})^3 + 3g''(u^{(1)})(u_{xx}^{(1)})(u_x^{(1)}) + g'(u^{(1)})(u_{xxx}^{(1)})) \right. \\ &\left. - \alpha^{(2)}(g'''(u^{(2)})(u_x^{(2)})^3 + 3g''(u^{(2)})(u_{xx}^{(2)})(u_x^{(2)}) + g'(u^{(2)})(u_{xxx}^{(2)})) \right] \sin(\mu_n x) dx.\end{aligned}$$

olarak ortaya çıkar. Bu denklemde bazı terimleri ekleyip çıkartarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1) - \Phi_1(z_2) &= \frac{1}{g(h(t))} \\ &\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\mu_n} \left(\int_0^t N(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(2)}) e^{\mu_n^2(s-t)} ds \right) \cos(\mu_n x_0) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2) &= \left[\int_0^t [\alpha^1(g_0(u^{(1)}) - g_0(u^{(2)})) - (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)})g_0(u^{(2)})] ds \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{\sqrt{2}}{\mu_n^3} N(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(2)}) e^{\mu_n^2(s-t)} ds \right) \cos(\mu_n x).\end{aligned}$$

Ayrıca $N(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(2)})$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$N(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, u^{(2)}, \alpha^{(2)}) = \int_0^1 \left[\alpha^{(1)} \left[g'''(u^{(1)}) \left((u_x^{(1)})^2 + u_x^{(1)} u_x^{(2)} + (u_x^{(2)})^2 \right) (u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) + (u_x^{(2)})^3 (g'''(u^{(1)}) - g'''(u^{(2)})) + g''(u^{(1)}) (u_{xx}^{(1)}) (u_x^{(1)} - u_x^{(2)}) + u_x^{(2)} g''(u^{(1)}) (u_{xx}^{(1)} - u_{xx}^{(2)}) + u_x^{(2)} (g''(u^{(1)}) - g''(u^{(2)})) u_{xx}^{(2)} + g'(u^{(1)}) (u_{xxx}^{(1)} - u_{xxx}^{(2)}) + (g'(u^{(1)}) - g'(u^{(2)})) u_{xxx}^{(2)} \right] + (\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}) \left[g'''(u^{(2)}) (u_x^{(2)})^3 + g''(u^{(2)}) u_{xx}^{(2)} u_x^{(2)} + g'(u^{(2)}) (u_{xxx}^{(2)}) \right] \sin(\mu_n x) dx \right].$$

Son denklemlere bazı modifikasyon yaparak, (K_4) 'ün yardımıyla ve $\alpha^{(i)}, u^{(i)}(x, t)$, $i = 1, 2$ ifadeleri Φ_1, Φ_2 elemanları olduğundan ve Φ_1, Φ_2 normları R 'yi aşmadığından $\alpha^{(i)}, u^{(i)}(x, t)$ normları da R 'yi aşmaz. Yani,

$$\|\alpha^{(i)}\|, \|u^{(i)}(x, t)\| < R$$

eşitsizliği doğrudur.

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2)\|_{C[0,T]} &\leq TC \left[(4R^4 + 3R^3 + 2R^2 + R) \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{B_{2,T}^3} \right. \\ &\quad \left. + (R^4 + R^3 + R^2 + R) \|\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}\|_{C[0,T]} \right] \\ \|\Phi_1(z_1) - \Phi_1(z_2)\|_{B_{2,T}^3} &\leq 2TC\sqrt{2} \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \\ &\quad \left[(4R^4 + 3R^3 + 2R^2) \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{B_{2,T}^3} + (R^4 + R^3 + R^2) \|\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}\|_{C[0,T]} \right] \end{aligned}$$

Burada C sayısı $(K_4)_3$ varsayımı ve (5.27)-(5.30) eşitsizliklerinden gelen sabitlerin maksimumunu temsil eder ve sonuç olarak, yukarıdaki eşitsizliklerden elde edilen sonuçları kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)\|_{E_T^3} \leq A(T) R^* C \|z_1 - z_2\|_{E_T^3}. \quad (5.39)$$

Burada $A(T)$ ve R^* şu şekilde tanımlanır:

$$A(T) = T \left(1 + 2\sqrt{2} \left\| \frac{1}{g(h(t))} \right\|_{C[0,T]} \right), \quad (5.40)$$

$$R^* = \max\{4R^4 + 3R^3 + 2R^2 + R, R^4 + R^3 + R^2 + R\}. \quad (5.41)$$

Verilen koşullar altında, $g(h(t))$ fonksiyonunun $[0, T]$ zaman aralığında C^3 (üçüncü dereceden sürekli) fonksiyonlar kümesine ait olduğu ve her t için sıfır olmadığı kabul edilmektedir. Ayrıca, C sayısı sonlu sabitlerden oluştuğundan üst sınırı vardır.

Bu koşullar altında, $1/g(h(t))$ fonksiyonunun $C[0, T]$ uzayındaki normu üst sınırlıdır. T değeri sıfıra yaklaştıkça, $A(T)R^*C$ ifadesi sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, yeterince küçük T için $0 < A(T)R^*C < 1$ geçerlidir.

Lemma 5.2: $\Phi(z)$ fonksiyonu, $0 < A(T)R^*C < 1$ koşulu altında B_R 'de sıkıştıran tasvirdir.

Teorem 5.1: $(K_1) - (K_4)$ koşulları ve $0 < A(T)R^*C < 1$ koşulu sağlansın. O halde (1.1)-(1.6) ters probleminin B_R yuvarında tek çözümü vardır. Burada $C + E(0) < R$ olmak üzere, C sonlu sabitlerden oluşan üst sınır, $E(0) = \lim_{T \rightarrow 0} E(T)$, $A(T)$ ve R^* sırasıyla (5.40) ve (5.41) olarak belirlenmiştir.

İspat: Başlangıç sınır değer problemi (1.1)-(1.4)'nin çözümünü (5.1) seri toplamı olarak ifade edebiliriz. (1.2) denkleminde, (5.1) serisi, (1.6) koşulu kullanılarak (5.8)-(5.9) ifadelerini elde ederiz. Verilen sınır değer probleminin çözümü olarak tanımlanan (5.8)-(5.9) denklem sistemine Banach sabit nokta teoremini kullanarak, çözümlerin (5.10) operatörü ile temsil edildiğinde varlık ve tekliğini gösterebiliriz. Operatör dönüşümü sayesinde (5.8)-(5.9) ifadelerini sırasıyla (5.11)-(5.12) olarak ifade ederiz. (1.1)-(1.4), (1.6) probleminin çözümü Fourier katsayıları ve özfonksiyonları kullanılarak temsil edilir. Çözümün normu (5.13) uzayında ifade edilir. Ayrıca $E_T^3 = B_{2,T}^3 \times C[0, T]$ olarak tanımlanır. Bu uzayda elemanın normu $\|z\|_{E_T} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\alpha(t)\|_{C[0,T]}$ ile belirlenir. Şimdi, Φ 'nin E_T^3 üzerinde kendisiyle sürekli eşleştiğini gösterelim. Kısacası, $\Phi_1 \in C[0, T]$ ve $\Phi_2 \in B_{2,T}^3$ olduğunu gösterelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Bessel eşitsizliği ve Weierstrass M-testi uygulayarak $\Phi_1 \in C[0, T]$ olduğunu ve $(K_1) - (K_4)$ varsayımları, kısmi integrasyon ve Bessel eşitsizliği uygulayarak da $\Phi_2 \in B_{2,T}^3$ olduğunu gösterebiliriz. (5.11)-(5.12) ifadelerinin birbirinden farklı z_1 ve z_2 ifadeleri için yazılarak $E_T^3 = B_{2,T}^3 \times C[0, T]$ uzayındaki normu hesaplanarak elde edilen eşitsizlikten (5.39) eşitsizliğinde yeterince küçük T seçilmesi durumunda $0 < A(T)R^*C < 1$ koşulu sağlanır ve Banach sabit nokta teoremi gereğince çözüm tektir.

Yorum 5.2.1: Teorem 5.1'in eksik tarafları varlık ve teklik sonucu T 'nin küçük değerleri için ve ayrıca tüm E_T^3 uzayında değilde bu uzayda bir $B_R, R > C + E(0)$ yuvarında doğru olmasıdır. Isı iletim sürecinin küçük zaman zarfında baş vermesi anlaşılabilir olmakla birçok sürecin gerçekten büyük zaman aralığına taşınabilmemesi olağan bir durumdur. Fakat ısı yayılım ile birlikte potansiyel zamana bağlı potansiyel katsayısının daha geniş uzayda varlık ve teklik durumu düzenlenebiliyor. Öyleki her $R > C + E(0)$ için B_R 'de çözümün tekliği tüm E_T^3 'de çözümün tekliğini gerektiriyor. Yani küçük zaman aralıkları için tüm E_T^3 'de ters problemin çözüm vardır ve bu çözüm tektir.



6. MODELLERİN KONTROLÜ

Lineer ve lineer olmayan ısı denklemlerinin, 2. bölümde belirtilen modellerin verilen koşullar altında sağlandığını gösterelim.

$$u_t = u_{xx} + \alpha g(u) + f(x, t)$$

- $g(u) = u$ olsun.
 - $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olmak üzere $g(u)$ fonksiyonu $(K_4)_1$ varsayımı sağlar.
 - $g(0) = 0, g'(u) = 1$ ve her u için $g''(u) = g'''(u) = 0$ olmak üzere $(K_4)_2$ varsayımını sağlar.
 - $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olduğuna göre $(K_4)_3$ varsayımı sağlanır.

Böylece Pennes modelinin varlık ve teklik koşulları sağlanmış olduğu görülmektedir.

- $g(u) = u(1 - u)$ olsun.
 - $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olmak üzere $g(u)$ fonksiyonu $(K_4)_1$ varsayımı sağlar.
 - $g(0) = 0, g'(1/2) = 0$ ve her u için $g''(u) = -2, g'''(u) = 0$ olmak üzere $(K_4)_2$ varsayımını sağlar.
 - $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olduğuna göre $(K_4)_3$ varsayımı sağlanır.

olmak üzere $(K_4)_3$ varsayımını sağlar. Fisher-Kpp ve Sosyal ağ modelinin varlık ve teklik koşullarının sağlanmış olduğu görülmektedir.

- $g(u) = u(1 - u^2)$ olsun.
 - $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olmak üzere $g(u)$ fonksiyonu $(K_4)_1$ varsayımı sağlar.
 - $g(0) = 0, g'(\pm 1/\sqrt{3}) = 0, g''(0) = 0$ ve her u için $g'''(u) = -6$ olmak üzere $(K_4)_2$ varsayımını sağlar.
 - $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olduğuna göre $(K_4)_3$ varsayımı sağlanır. Ginzburg Landau modeli, Allen Chan modeli ve Chaffe-Infante modelinin varlık ve teklik koşullarının sağlanmış olduğu görülmektedir.

- $g(u) = u(1 - u)(u - \theta)$ olsun.

- $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olmak üzere $g(u)$ fonksiyonu $(K_4)_1$ varsayımı sağlar.
- $g(0) = 0, g'(u) = 0, g''(2(1 + \theta)/2) = 0$ ve her u için $g'''(u) = -6$ ve $\theta \in [0.8, 1)$ olmak üzere $(K_4)_2$ varsayımını sağlar.
- $g(u) \in C^3(\mathbb{R})$ olduğuna göre $(K_4)_3$ varsayımı sağlanır. Popülasyon genetik modelinin varlık ve teklik koşullarının sağlanmış olduğu görülmektedir.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın temel amacı, Neumann sınır koşullu ve integral ek koşullu ısı denkleminin katsayılarını belirlemektir. Yapılan bu çalışmanın sonucunda aşağıdaki bulgular elde edilmiştir:

- Lineer ısı denkleminde, Carleman kestirimi problemin çözümünü ve konuma bağlı potansiyel katsayısının varlık ve tekliği gösterilmiştir.
- Lineer ısı denkleminde, Fourier yöntemi problemin çözümünü ve zamana bağımlı potansiyel katsayısının varlık ve tekliği gösterilmiştir.
- Ayrıca, lineer olmayan ısı denkleminin potansiyel katsayısı ile çözümün varlık ve tekliği, ek koşul kullanılarak gösterilmiştir. Parametreler, Fourier yöntemiyle belirlenmiş ve operatöre bağlanarak küçük zaman aralıklarında Banach sabit nokta prensibi ile gösterilmiştir.

Öneriler şu şekildedir:

- Hiperbolik denklemler için varlık ve teklik incelenebilir.
- Koşulları sağlamayan terimler için yeni çalışmalar yapılabilir.
- Lineer olmayan terimin stabilitesi incelenebilir.
- Katsayı bulma probleminin nümerik çözümü, sonlu farklar yöntemiyle incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Ozisik M. N., (2018), “Inverse heat transfer: fundamentals and applications”, Routledge.
- [2] Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. S., (1985), “Inverse heat conduction: Ill-posed problems”, James Beck.
- [3] Alifanov O. M., (2012), “Inverse heat transfer problems”, Springer Science & Business Media.
- [4] Ismailov M. I., Tekin I., Erkovan S., (2019), “An inverse problem for finding the lowest term of a heat equation with wentzell–neumann boundary condition”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 27(11), 1608–1634.
- [5] Tekin I., Mehraliyev Y. T., Ismailov M. I., (2019), “Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear klein-gordon equation”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(10), 3739–3753.
- [6] Ismailov M., Kanca F., Lesnic D., (2011), “Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions”, *Applied Mathematics and Computation*, 218(8), 4138–4146.
- [7] Kamynin V. L., (2005), “On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition”, *Mathematical notes*, 77(3-4), 482–493.
- [8] Ashyralyev A., Sazaklioglu A. U., (2017), “Investigation of a time-dependent source identification inverse problem with integral overdetermination”, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1276–1294.
- [9] Baglan I., Kanca F., (2015), “An inverse coefficient problem for a quasilinear parabolic equation with periodic boundary and integral overdetermination condition”, *Mathematical methods in the applied sciences*, 38(5), 851–867.
- [10] Yang L., Deng Z.-C., Yu J.-N., Luo G.-W., (2009), “Optimization method for the inverse problem of reconstructing the source term in a parabolic equation”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 80(2), 314–326.
- [11] Cannon J. R., DuChateau P., (1998), “Structural identification of an unknown source term in a heat equation”, *Inverse problems*, 14(3), 535.
- [12] Savateev E. G., (1995), “On problems of determining the source function in a parabolic equation”, 83–102.
- [13] Slodička M., Šišková K., Van Bockstal K., (2019), “Uniqueness for an inverse source problem of determining a space dependent source in a time-fractional diffusion equation”, *Applied Mathematics Letters*, 91, 15–21.
- [14] Wei T., Sun L., Li Y., (2016), “Uniqueness for an inverse space-dependent source term in a multi-dimensional time-fractional diffusion equation”, *Applied Mathematics Letters*, 61, 108–113.

- [15] Wang J.-G., Zhou Y.-B., Wei T., (2013), “Two regularization methods to identify a space-dependent source for the time-fractional diffusion equation”, *Applied Numerical Mathematics*, 68, 39–57.
- [16] Anastasio M. A., Zhang J., Modgil D., La Rivière P. J., (2007), “Application of inverse source concepts to photoacoustic tomography”, *Inverse Problems*, 23(6), S21.
- [17] Chow S. N., Yin K., Zhou H. M., Behrooz A., (2014), “Solving inverse source problems by the orthogonal solution and kernel correction algorithm (oskca) with applications in fluorescence tomography”, *Inverse Problems Imaging*, 8, 79–102.
- [18] Ismailov M. I., Cicek M., (2016), “Inverse source problem for a time-fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions”, *Applied Mathematical Modelling*, 40(7-8), 4891–4899.
- [19] Ismailov M. I., Kanca F., Lesnic D., (2011*a*), “Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions”, *Applied Mathematics and Computation*, 218(8), 4138–4146.
- [20] Ismailov M. I., Kanca F., Lesnic D., (2011*b*), “Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions”, *Applied Mathematics and Computation*, 218(8), 4138–4146.
- [21] Hào D. N., Huong B. V., Oanh N. T. N., Thanh P. X., (2017), “Determination of a term in the right-hand side of parabolic equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309, 28–43.
- [22] Yang L., Yu J. N., Luo G. W., Deng Z. C., (2012), “Reconstruction of a space and time dependent heat source from finite measurement data”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(23-24), 6573–6581.
- [23] Hao D. N., Thanh P. X., Lesnic D., Ivanchov M., (2014), “Determination of a source in the heat equation from integral observations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 82–98.
- [24] Hazanee A., Lesnic D., (2013), “Reconstruction of an additive space-and time-dependent heat source”, *European Journal of Computational Mechanics*, 22(5-6), 304–329.
- [25] Hazanee A., Lesnic D., (2016), “Reconstruction of multiplicative space-and time-dependent sources”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 24(9), 1528–1549.
- [26] Cannon J. R., Rundell W., (1991), “Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation”, *Journal of mathematical analysis and applications*, 160(2), 572–582.
- [27] Shamsi M., Dehghan M., (2007), “Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic equation from overspecified boundary data using the pseudospectral legendre method”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 23(1), 196–210.
- [28] Namazov G., (1984), “Inverse problems of the theory of the equations of mathematical physics”, Baku, Azerbaijan.

- [29] Lesnic D., Yousefi S., Ivanchov M., (2013), “Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 41, 301–320.
- [30] Kamynin V., Kostin A., (2010), “Two inverse problems of finding a coefficient in a parabolic equation”, *Differential Equations*, 46, 375–386.
- [31] Ivanchov N., (1993), “Inverse problems for the heat-conduction equation with non-local boundary conditions”, *Ukrainian Mathematical Journal*, 45(8), 1186–1192.
- [32] Ismailov M. I., Oğur B., (2016), “An inverse diffusion problem with nonlocal boundary conditions”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 32(2), 564–590.
- [33] Lesnic D., Yousefi S. A., Ivanchov M., (2013), “Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions”, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 41, 301–320.
- [34] Johansson T., Lesnic D., (2007), “Determination of a spacewise dependent heat source”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209, 66–80.
- [35] Kanca F., Ismailov M. I., (2012), “The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 20(4), 463–476.
- [36] Hussein M. S., Lesnic D., (2014), “Determination of a time-dependent thermal diffusivity and free boundary in heat conduction”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 53, 154–163.
- [37] Bear J., (2013), “Dynamics of fluids in porous media”, Courier Corporation.
- [38] Zheng C., Bennett G., (1995), “Applied Contaminant Transport Modelling: Theory and Practice”, Van Nostrand Reinhold, New York.
- [39] Lesnic D., (2005), The determination of a permeability function from core measurements and pressure data, in “Inverse Problems, Design and Optimization Symposium”, 143–150.
- [40] Nagai T., Tsurumaki S., Urano R., Fujimoto K., Shinoda W., Okazaki S., (2020), “Position-dependent diffusion constant of molecules in heterogeneous systems as evaluated by the local mean squared displacement”, *Journal of Chemical Theory and Computation*, 16(12), 7239–7254.
- [41] Pennes H. H., (1948), “Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm”, *Journal of Applied Physiology*, 1, 93–122.
- [42] Ismailov M. I., Bazán F. S., Bedin L., (2018), “Time-dependent perfusion coefficient estimation in a bioheat transfer problem”, *Computer Physics Communications*, 230, 50–58.
- [43] Cardinali A. V., Diller T. E., Lanz O., Scott E. P., (2002), Validation of a noninvasive thermal perfusion system using a canine medial saphenous fasciocutaneous free tissue flap model, in “ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition”, Vol. 36509, 9–16.

- [44] Scott E., Robinson P., Diller T., (1998), "Development of methodologies for the estimation of blood perfusion using a minimally invasive thermal probe", *Measurement Science and Technology*, 9(6), 888.
- [45] Trucu D., Ingham D. B., Lesnic D., (2010), "Space-dependent perfusion coefficient identification in the transient bio-heat equation", *Journal of Engineering Mathematics*, 67, 307–315.
- [46] Cannon J., Lin Y., Wang S., (1991), "Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation", *The ANZIAM Journal*, 33(2), 149–163.
- [47] Cannon J., Lin Y., Wang S., (1992), "Determination of source parameter in parabolic equations", *Meccanica*, 27, 85–94.
- [48] Fatullayev A. G., Gasilov N., Yusubov I., (2008), "Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation", *Applicable Analysis*, 87(10-11), 1167–1177.
- [49] Ivanchov M., Pabyrivs' ka N., (2001), "Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions", *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(5), 674–684.
- [50] Kamynin L., (1964), "Inverse problem for a parabolic equation with integral overdetermination", *USSR Computational Mathematics and mathematical Physics*.
- [51] Ionkin N. I., (1977), "The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition", *Differentsial'nye Uravneniya*, 13(2), 294–304.
- [52] Pul'kina L. S., Savenkova A. E., (2016), "A problem with a nonlocal, with respect to time, condition for multidimensional hyperbolic equations", *Russian Mathematics*, 60, 33–43.
- [53] Kirichenko S. V., Pul'kina L. S., (2014), "A problem with nonlocal initial data for one-dimensional hyperbolic equation", *Russian Mathematics*, 58, 13–21.
- [54] Cannon J., Lin Y., (1990), "An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 145(2), 470–484.
- [55] Prilepko A., Kostin A., (1993), "On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation", *Sbornik: Mathematics*, 75(2), 473.
- [56] Bukhgeim A. L., (2000), "Introduction to the theory of inverse problems", (No Title).
- [57] Sun J., Zhang A., Xu L. X., (2008), "Evaluation of alternate cooling and heating for tumor treatment", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(23-24), 5478–5485.
- [58] Fisher R. A., (1937), "The wave of advance of advantageous genes", *Annals of Eugenics*, 7(4), 355–369.
- [59] Kolmogorov A., Petrovskii I., Piscunov N., (1937), "A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem", *Byul. Moskovskogo Gos. Univ.*, 1(6), 1–25.

- [60] Wang F., Wang H., Xu K., (2012), Diffusive logistic model towards predicting information diffusion in online social networks, in “2012 32nd international conference on distributed computing systems workshops”, IEEE, 133–139.
- [61] Pao C.-V., (2012), “Nonlinear parabolic and elliptic equations”, Springer Science & Business Media.
- [62] Aronson D. G., Weinberger H. F., (1975), “Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation”, Lecture Notes in Mathematics, 446, 5–49.
- [63] Bronsard L., Stoth B., (1998), The ginzburg-landau equations of superconductivity and the one-phase stefan problem, in “Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire”, Vol. 15, Elsevier, 371–397.
- [64] Allen S. M., Cahn J. W., (1979), “A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening”, Acta Metallurgica, 27(6), 1085–1095.
- [65] Feng X., Prohl A., (2003), “Numerical analysis of the allen-cahn equation and approximation for mean curvature flows”, Numerische Mathematik, 94, 33–65.
- [66] Novick-Cohen A., (2000), “Triple-junction motion for an allen-cahn/cahn-hilliard system”, Physica D: Nonlinear Phenomena, 137(1-2), 1–24.
- [67] De Mottoni P., Schatzman M., (1995), “Geometrical evolution of developed interfaces”, Transactions of the American Mathematical Society, 347(5), 1533–1589.
- [68] Cahn J., Novick-Cohen A., (1996), “Limiting motion for an allen-cahn/cahn-hilliard system”, Free boundary problems, theory and applications (Zakopane, 1995), 363, 89–97.
- [69] Cahn J. W., Hilliard J. E., (1958), “Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy”, The Journal of chemical physics, 28(2), 258–267.
- [70] Dragomir S. S., (2003), “Some gronwall type inequalities and applications”, Science Direct Working Paper,(S1574-0358), 04.
- [71] Khudaverdiyev K., Alieva A., (2010), “On the global existence of solution to one-dimensional fourth order nonlinear sobolev type equations”, Applied mathematics and computation, 217(1), 347–354.

ÖZGEÇMİŞ

İlk ve ortaokulu Bağcılar'da, lise yıllarını ise Esenler'de tamamladı. 2015 yılında Bilgi Üniversitesi Matematik bölümüne başladı. 2017 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi'ne geçiş yaparak, 2021 yılında derece ile mezun oldu. Yüksek lisans eğitimine 2021 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi'nde başladı. Araştırma görevlisi kadrosunu kazandıktan sonra, 2022 yılında Gebze Teknik Üniversitesi'nde yüksek lisans eğitimine devam etmektedir. Halen eğitime aktif olarak devam etmektedir.

