ERKEN CEBİR DÖNEMİNDEKİ ÖĞRENCİLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİLERİ: 5. SINIF ÖRNEĞİ

Berkay KÖSEOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı

Danışman: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Mayıs 2024

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Berkay K ÖSEOĞLU'nun "Erken Cebir Dönemindeki Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Becerileri: 5. Sınıf Örneği" başlıklı tezi 16/04/2024 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında, Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı-Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI	. . . .
Üye	: Dr.Öğr.Üy. Deniz ÇELİKSOY	. . . .
Üye	: Dr.Öğr.Üy. Osman BAĞDAT	. . . .

Prof. Dr. Saime ÖNCE

Anadolu Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

ERKEN CEBİR DÖNEMİNDEKİ ÖĞRENCİLERİN CEBİRSEL DÜŞÜNME BECERİLERİ: 5. SINIF ÖRNEĞİ

Berkay KÖSEOĞLU

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Mart 2024
Danışman: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

Matematik eğitiminin temel bileşenlerinden bir tanesi de cebirsel düşünmedir. Cebirsel düşünme, üst düzey düşünmeye olanak sağlayan matematiğin tüm alanlarında yer alan bir düşünme biçimidir. Bu nedenle bu araştırmada; ortaokul beşinci sınıf öğrencilerinin erken cebir bağlamında aritmetiği genelleme ve fonksiyonel düşünme becerileri ele alınmıştır. Temel nitel araştırma modelini benimseyen araştırmanın verileri, literatürde yer alan çalışmaların incelenmesiyle oluşturulan klinik görüşme formu yardımıyla toplanmıştır. Çalışmanın katılımcılarını 2021-2022 eğitim öğretim yılında, Iğdır ilinde devlet okulunda öğrenim gören 5. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Öğretmen görüşünün yanında öğrencilerin akademik başarı düzeyleri göz önüne alınarak iki düşük düzeyli, iki orta düzeyli ve iki yüksek düzeyli performans gösteren olmak üzere toplam altı öğrenci ile klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Toplanan veriler tematik analiz yöntemi ile incelenerek, tema alt tema ve kodlar yardımıyla araştırma bulguları olarak sunulmuştur. Araştırmada öğrencilerin genelleme becerilerinin beklenen düzeyde olmadığı görülmüştür. Bazı bölümlerde öğrencilerin akademik başarı düzeyinden bağımsız olarak genelleme becerilerinde farklılıklar görüldüğü gibi bazı bölümlerde de akademik başarıları ile orantılı olarak becerilerinin geliştiği ön plana çıkmaktadır. Aritmetiği genelleme bağlamında özel durumlara dayalı genelleme yapmaya çalıştıkları, fonksiyonel düşünme bağlamında, örüntülerde yakın ve uzak adımları temsil yoluyla göstermekte güçlük yaşadıkları ve gelişmiş fonksiyonel düşünme becerileri sergilemedikleri sonuçlarına ulaşılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Cebirsel düşünme, Erken cebir, Aritmetiği genelleme, Fonksiyonel düşünme, Örüntüler

ABSTRACT

ALGEBRAIC THINKING SKILLS OF STUDENTS IN THE EARLY ALGEBRA PERIOD: 5TH GRADE EXAMPLE

Berkay KÖSEOĞLU

Department of Mathematics Education
Anadolu University, Graduate School , March 2024
Supervisor: Prof. Dr. Dilek TANIŞLI

One of the basic components of mathematics education is algebraic thinking. Algebraic thinking is a way of thinking that enables high-level thinking in all areas of mathematics. Therefore, in this research; Arithmetic, generalization and functional thinking skills of middle school fifth grade students in the context of early algebra were discussed. The data of the study, which adopted the basic qualitative research model, were collected with the help of a clinical interview form developed by reviewing the studies in the literature. The participants of the study involve 5th grade students studying at a public school in Iğdır province in the 2021-2022 academic year. In addition to the teacher's opinion, clinical interviews were conducted with a total of six students, two low-level, two medium-level and two high-level performers, taking into account the academic achievement levels of the students. The collected data were analyzed by thematic analysis method and presented as research findings with the help of themes, sub-themes and codes. In the study, it was observed that student’s generalization skills were not at the expected level. In some sections, differences in students' generalization skills are sometimes observed independently of their academic achievement level, while in some sections, it comes to the fore that their skills improve in proportion to their academic achievement. It has been concluded that they try to generalize arithmetic based on special situations in the context of generalization, in the context of functional thinking, they have difficulty in showing close and distant steps in patterns through representation, and they do not exhibit advanced functional thinking skills.

Keywords: Algebraic thinking, Early algebra, Generalization of arithmetic, Functional thinking, Patterns

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında bana yol gösteren, bilgi ve deneyimlerini paylaşan, onu tanıdığım için şanslı olduğumu hissettiğim değerli danışmanım Prof. D r. Dilek TANIŞLI'ya, çalışmanın her aşamasında beni daima motive ederek cesaretlendirdiği, her koşulda bilgi ve tecrübelerini aktararak rehber olduğu ve akademik yaşantımda beni desteklediği için sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez savunma jürimde yer almayı kabul ederek tezimin gelişimine katkı sağlayıp, iyi bir araştırmacı olabilmem için önemli dönütler vererek destek olan; değerli hocam Dr.Öğr.Üy. Deniz ÇELİKSOY'a ve değerli hocam Dr.Öğr.Üy. Osman BAĞDAT'a ayırdıkları kıymetli zaman ve tezimi değerlendirirken gösterdikleri özen için minnettarım.

Araştırmanın yapılabilmesine katkı sağlayan özveri ile görüşmelere katılan ve çalışmaya konu olarak bilime katkı sağlayan öğrencilerimize teşekkür ederim.

Akademik yaşantımda ayrı bir parantez açmama yardımcı olan değerli arkadaşlarım Murat -Ayşe Nur DUMLUPINAR'a ve Ali KILIÇ'a teşekkür ederim.

Çocukluk hayallerimizi gerçekleştirdiğimiz, akademik kariyerimize birlikte başladığımız arkadaşım Ergün DUMAN'a ve çalışmada bana destek olup mücadeleyi bırakmadan devam etmemi sağlayan Şeyma ÇAKIR'a teşekkürlerimi sunarım.

Her koşulda beni destekleyen ve emeklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım annem Nuray KÖSEOĞLU'na, sevgili babam Metin KÖSEOĞLU'na ve değerli kardeşlerim Sıla ve Buğlem KÖSEOĞLU'na sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

TEŞEKKÜR VE İTHAF

Bu tez öncelikle, Türkiye Cumhuriyeti'nin kurucusu Mustafa Kemal Atatürk'ün önderliğinde bilimin ve eğitimin ülkemizde gelişmesine adanmıştır. Atatürk'ün "Biz, ilmin ve fennin yolundan gitmekten başka kurtuluş çaresi göremeyiz." *sözünü* rehber alan bu *çalışmanın Türkiye'de bilimin ilerlemesine katkı sağlaması ümidiyle...*

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı" ile tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Berkay KÖSEOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

<u>**Sayfa**</u>

ŞEKİLLER DİZİNİ

GÖRSELLER DİZİNİ

KISALTMALAR DİZİNİ

ANOSPS	: Verilerin sayı, işlem, sembol ve örüntülerin değerlendirilmesi
ATDA	: Cebirsel düşünmenin tanılanması ve değerlendirilmesi
ATLAS.ti	: Yapay zekâ destekli nitel analiz platformu
BÖVBİD	: Bir Özelliğe veya Bir İşleme Dayalı
DDP	: Düşük Düzeyli Performans
ICMI	: Uluslararası Matematiksel Yaratıcılık Konferansı
İYD	: İşlem Yapmaya Dayalı
MEB	: Millî Eğitim Bakanlığı
NCTM	: Ulusal Matematik Konseyi
ODP	: Orta Düzeyli Performans
ÖÖD	: Özel örneğe dayalı
PME	: Uluslararası Matematik Eğitimi Psikolojisi Grubu
RÖD	: Rastgele örneğe dayalı
STAR	: Standart Test ve Raporlama
TDD	: Tüm Durumlara Dayalı
YDP	: Yüksek Düzeyli Performans

1. GİRİŞ

Bu bölümde problem durumu, araştırmanın amacı, kavramsal çerçeve, sınırlılıklar, tanımlar yer almaktadır.

1.1. Problem Durumu

İnsanların en değer verdiği doğayı anlamak için bir araç olarak gördüğü alanlardan bir tanesi matematiktir. Matematik, bütüncül yapılı kültürel bir eserdir, bu nedenle matematiği belirli düzeyde kültürel mirasımızın bir parçası olarak alırız (Kaput, Carraher ve Blanton, 2008). Bir bilim dalı olma özelliği de gösteren bu kültürel eser, beraberinde getirdiği cebirin, diğer matematiksel konularla bütünleşmesiyle eğitim sistemlerine çok farklı şekillerde yerleştirilmiş ve birçok araştırmaya konu olmuştur (Baş, Erbaş ve Çetinkaya, 2011; Kaput,1999; Kaput, Carraher ve Blanton, 2008; Radford, 2018). Zamanla gerçekleştirilen farklı çalışmalar cebir ile matematiğin uygulama alanını genişletmiş, farklı anlayış ve bakış açılarının oluşmasına katkı sağlamıştır. Bu bağlamda cebire dair çalışmalar giderek artmıştır.

Usiskin (1997)'e göre, günlük yaşamda cebir, aritmetik kadar göz önünde olmadığından cebirin değeri aritmetiğin değeri kadar net görülmemektedir; çünkü bireyler matematiğe aritmetik ile başlar ve aritmetiğin somut örneklerini deneyimler. Aritmetik çok pratik ve işlevsel gibi görünse de cebir aritmetiğe göre daha pratik ve alternatifler içerdiği söylenebilir (Radford, 2002, s.13). Ancak aritmetiğin gelişmesi de cebirin gelişmesine yardımcı olmaktadır (Radford, 1996, s.39).

Najma ve Masduki (2023) cebiri, matematiğin problemleri temsil etmeye yarayan kısmı olarak ifade etmiştir. Genel anlamda cebir bir dil, problem çözme aracı, okul dersidir ve bu tanımlar cebirin ne olarak kullanıldığına bağlı olarak gelişmekte ve çeşitlilik göstermektedir (Dede ve Argün, 2003, s. 180). Cebirin kullanım alanlarının çeşitliliği, aynı zamanda birçok alanda kritik bir öneme sahip olması, cebir öğretimi ve öğreniminin önemini artırmıştır. Ancak Kaput (1999)'un da ifade ettiği gibi, cebirin semboller ve kurallardan oluştuğu ve bu kuralların öğrenilmesi gerektiği yönündeki algılar öğrencilerin cebire karşı olumsuz tutum geliştirmesine yol açmaktadır. Bu olumsuz tutumları aşmanın yolu da cebirin yapısını tanımak ve anlamaktan geçmektedir.

Cebir, tanımlanmaya çalışıldığında tekil bir tanımın olmadığı, birçok anlayışın mevcut olduğu görülmektedir. Bazı araştırmacılar, cebirin sembolik dilinden dolayı öğrenilmesinin zor olduğunu, bunun ise sembollerin anlamlarıyla ilişkilendirilmesinin yetersizliğinden kaynaklandığını belirtmiştir (Arzarello, Bazzini ve Chiappini, 2002, s. 61). Geleneksel öğretim programlarında cebirin sadece harflerden ve notasyondan ibaret olduğu düşünülmektedir (Stacey ve Macgregor, 2007, s. 141); ancak cebirsel notasyonun amaçlarından bir tanesi genellemeler yardımıyla üst düzey düşünme gerçekleştirebilmek için bir yol haritası oluşturmaktır. Kaput (2000), notasyon ve anlam arasındaki ilişkinin kurulmasıyla daha kompleks düşünmelere ulaşılabileceğini ifade eder. Bu ne denle matematik eğitiminde cebirin anlam ve notasyon arasındaki ilişkiye diğer bir değişle cebirin yapısının anlaşılmasına yönelik öğretimi ve öğrenimi çok önemli bir yere sahiptir.

Benzer şekilde aritmetik öğretimi ve öğrenimi de matematik eğitiminde çok büyük bir yer kaplamaktadır. Bu bağlamda öğrencilerin aritmetiksel becerilerini kullanarak, yeterli bilişsel becerilere sahip olup beraberinde cebirsel becerilerini, yapısını ve anlamını da yapılandırdıkları bilinmektedir. Bu noktada cebirin zamanlamasına ilişkin bazı sorular ortaya çıkmaktadır; bunlardan ilki "Cebir ne zaman ve nasıl başlamalıdır?" (Kaput, Carraher ve Blanton, 2008, s 17). Diğer önemli bir soru ise nasıl öğretilmelidir? Bu sorulara ilişkin aranan yanıtlar sonucunda erken cebir (early a lgebra) görüşü ortaya atılarak cebirsel düşünmenin temellerinin ilkokulda hatta anasınıfından atılmasını gerektiği savunulmuştur (Kaput, 1998; N CTM, 2000). Erken cebir yaklaşımı savunucuları cebirde yaşanan güçlüklerin kaynağını öğrencilerin aritmetiksel deneyimlerinin yetersizliğine dayandırmaktadır. Bu bağlamda da cebirin aritmetiğin uzantısı olduğu, hatta okul matematiğini sarmalaması gerektiği tezinden yola çıkılarak, cebirsel düşünmenin gelişiminin erken yaşlardan itibaren başlaması önerilmektedir (Kaput, 1998) . Bunun yanında cebirsel düşünme için temel bileşenlerden olan fonksiyonel düşünme, öğrencilerin soyut ilişkileri anlama becerilerini geliştirerek cebirsel düşünme bağlamında önemli bir role sahiptir (Blanton, 2008; Blanton vd, 2018; Smith, 200 8; Wilkie, 2016). Fonksiyonel düşünme değişen nicelikler arasındaki ilişkilerin tanımlanıp, bu ilişkilerin genellenmesiyle ortaya çıkacağı için matematiksel genellemenin önünü açıp akıl yürütme becerisini geliştirirken cebirsel düşünmenin de gelişimine de katkı sağlar (Blanton, 2015). Yapılan çalışmalarda ilkokul öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme, temsil etme gibi becerileri kazanması gerektiğini belirtilirken, bunun a ritmetik ile sistematik ve etkili bir şekilde tanıtarak fonksiyonel düşünmenin geliştirilmesi; bireylerin formal cebirsel süreçlere cebir öncesi dönemden hazırlanması gerektiği öne sürülmektedir (Blanton ve Kaput, 2011; Carraher vd, 2008, Ding, Huang, Deng, 2023).

Ülkemizde 2018 yılında güncellenen matematik öğretim programıyla birlikte erken cebire örüntüler alt öğrenme alanının küçük bir parçası olacak şekilde 1-5. sınıflarda girilmektedir (MEB, 2018). Formal cebire geçişin ilk dersleri 6. sınıf düzeyinde gerçekleşmektedir. Bu sınıf düzeyine kadar cebirsel düşünceyi erken cebir dönemde etkin destekleyecek istenilen kazanımların yeterli olmaması öğrencilerin cebirsel düşünme anlayışlarının nasıl olduğunun araştırılmasını gerekli kılmıştır. Diğer yandan matematik öğretim programlarına paralel hazırlanan hem öğrencilere hem de öğretmenlere kılavuzluk yapacak ders kitaplarının cebirsel düşünmeyi nasıl desteklendiğinin araştırıldığı bir çalışmada ise kitapların bu yönde yetersiz olduğu görülmektedir (Soycan, 2023). Bu bağlamda öncelikle cebirin, matematikte her alanda kullanılan bir araç olduğu, gerçek yaşamdaki durumları ifade edip anlamlandırabilmeyi mümkün kıldığı hem öğretim programlarına hem de ders kitaplarına yansıtılmalıdır (Van de Walle vd., 2021). Buradan hareketle cebirin ne zaman öğretilmesi gerektiğine yönelik ipuçlarını da gözden kaçırılmamış olur.

Bu çalışmanın, öğrencilerin cebirde yaşadıkları problemlerin erken dönemde önüne geçilmesine yardımcı olacağı ve ülkemizde son dönemde incelenmeye başlanan erken cebir çalışmalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada 5. sınıf öğrencilerinin erken cebir bağlamında cebirsel düşünmede öne çıkan aritmetiğin genellenmesi ve fonksiyonel düşünme becerilerinin akademik başarıları da göz önünde bulundurularak incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu genel amaç kapsamında aşağıdaki sorulara yanıt aranmaktadır.

1. 5. sınıf öğrencilerinin aritmetiğin genellenmesi bağlamında becerileri nasıldır?

2. 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünme bağlamında nasıldır?

3. 5.sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerileri akademik başarıları bağlamında değişmekte midir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Cebir kendine özgü kurallarla ortaya çıkan ve kendine özgü yapısıyla öğrencilerin anlamakta zorlandıkları bir alandır (Kieran,1992; 2007). Birçok çalışma, öğretim programları ya da standartlarda cebirin önemi vurgulanırken, beraberinde öğrencilerin cebirde yaşadıkları zorluklar ön plana çıkmaktadır. Cebir öğreniminde yaşanan güçlüklerin giderilmesi, erken yaşlardan itibaren cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesi ile mümkün olabilir (Kaput, 2008). NCTM (2000, s. 20) standartlarında öğrencilerin matematiği anlayarak öğrenmeleri gerektiğini, önceki bilgileri ve deneyimleri aktif olarak inşa ederek yeni bilgilerin oluşturulması gerektiğini ifade ederken cebirsel düşünmenin de bu şekilde geliştirileceğini belirtmektedir. Kaput (2008) çalışmasında, öğretim programlarında bir dönem cebirin sadece ortaokul ve lise için gerekli olan bir konu gibi ele alınmasının öğrencilerin lisedeki cebir derslerinde başarısızlıklar yaşamasına neden olduğunu vurgulamaktadır. Bu noktada erken yaşlarda gerçekleşen öğrenmelerde formal cebire geçiş için destek nitelikli çalışmaların yapılması gerektiği aşikardır. Ancak doğrudan formal cebir derslerine başlamaktan ziyade daha iyi bir temel oluşturmak için ilk sınıflardan itibaren sayısal niceliklerin durumlara göre değişkenlik gösterebileceğini vurgulamak ve dolayısıyla temsil durumunu keşfetmek cebirin özü olan değişken kavramına doğru ilerlemek birçok öğrenmeyi kolaylaştıracaktır (Kilpatrick, Swafford ve Findell, 2001, s. 280).

Bu bağlamda cebire bakış açısında gerçekleşen bu değişiklikle beraber, birçok öğretim programı, anasınıfından sekizinci sınıfa kadar cebire yönelik içeriklerde güncelleme yaparak cebirin temel fikirlerinin ilköğretimde önemli bir noktada yer aldığını göstermiştir. Akkan (2009)'a göre, öğrencilerin dört işlem becerilerini geliştirdikleri, sayılarla deneyim yaşadıkları aritmetikten cebire geçişte iyi hazırlanmış programlara ihtiyaç duyulmaktadır. Cebiri, anasınıfından itibaren okul matematiğinin bir parçası olarak gören öğretmenler öğrencilerin ortaokulda ve ilerleyen cebir yaşantılarında daha karmaşık çalışmalara hazırlıklı olmasına yardımcı olacaklardır (NCTM, 2000; Blanton vd, 2011). Bu noktada öğretim programlarında yer alan cebirsel düşünmeye yönelik kazanımların öğrencilerin, formal cebire geçmeden önce cebirsel düşünme becerilerini ne kadar desteklediğini ortaya çıkarılması önemlidir. Bu çalışma ile öğrencilerin erken dönemde cebire yönelik formal olmayan çalışmalarda ulaştıkları genellemeler üzerinde durularak, ortaokul düzeyinde gerçekleştirilecek olan formal cebir derslerinin planlanmasına daha etkili olmasını sağlayacak bilgilere ulaşılması planlanmaktadır. Aynı zamanda bu çalışma, öğretim programlarının cebirsel düşünmeye desteğini ortaya çıkarmaya yardımcı olurken ülkemizde, erken cebir öncesi dönemde öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin gelişme düzeyini de ortaya çıkarabilecek niteliktedir.

1.4. Kavramsal Çerçeve

Cebirin öğretilmesi ve öğrenilmesi üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde cebirde ortaya çıkan başarısızlıkların nedeni aritmetikten cebire geçişte yer alan bağlantıların kurulamaması veya yeterli düzeye ulaştırılamaması olarak belirtilmektedir. Bu anlamda cebirin öğretilmesini temel alan detaylı çalışmaların gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Özellikle ortaokul cebir dersleri öğrencilerin cebir ile formal manada ilk kez karşılaştıkları ortamdır; fakat günümüz cebir anlayışında formal cebir derslerinden öncesinde gerçekleştirilen çalışmalar ön plandadır. Ortaokul cebir derslerinden önce gerçekleştirilen çalışmalar cebir öncesi dönemde, erken cebir kapsamında değerlendirilebilir. Bu kapsamda yapılan araştırmanın kavramsal çerçevesini cebirsel düşünme: erken cebir fikrinin ortaya çıkışı, cebirsel düşünmenin çok yönlülüğü, aritmetiğin genellenmesi ve fonksiyonel düşünme oluşturmaktadır.

1.4.1. Cebirsel Düşünme: Erken Cebir Fikrinin Doğuşu

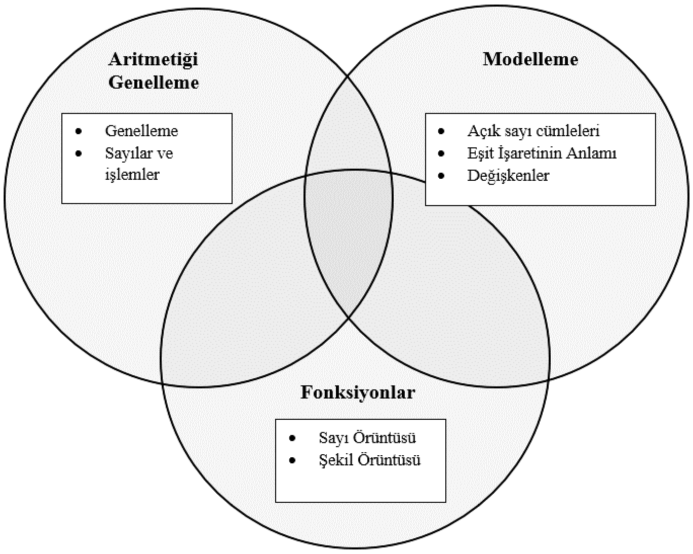
Okul cebirinin öğretilmesi ve öğrenilmesi 1980'lerde önemli araştırma konularından biri olmuş ve tam olarak tanımlanmasa da cebirsel düşünme fikrinin ortaya çıkmasına yol açmıştır. 1987'de Georgia Üniversitesi'nde düzenlenen Cebir Üzerine Araştırma Gündemi Konferansı'nda cebirsel düşünmenin ciddi bir şekilde araştırılması gerektiği tartışılmıştır (Kieran, 2022). Takip eden yıllarda konuya ilişkin önemli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin ortaokul düzeyinde ilk cebir dersine başlayan 13 ile 15 yaşındaki öğrenciler ile yapılan çalışmalarda öğrencilerin çeşitli güçlüklerle karşılaştıkları ortaya koyulmuştur (örn., Booth, 1984; Kieran, 1992; Küchemann, 1981; Sutherland ve diğerleri, 2001; Wagner ve Kieran, 1989). Bu çalışmalar önemli katkılar sağlasa da cebirsel düşünmeyi karakterize eden fikrin erken yaşlardan itibaren başlaması gerektiği tartışılmaya başlanmış ve böylece erken cebir görüşü ortaya çıkmıştır. Hatta Davis (1985; 1995), cebir çalışmasının ilkokul programına yayılıp yayılmaması gerektiği fikrini ilk düşünenlerden biri olmuş, ancak erken cebir tartışmalarının başlangıcını Kaput (1998) yapmıştır. Erken cebir fikrinin ilerlemesi ise 2001 yılında ilk kez PME (Uluslararası Matematik Eğitimi Psikolojisi Grubu) erken cebir üzerine bir çalışması ile gerçekleştirilmiştir (Ainley, 2001). Aynı zamanda cebir üzerine 12. ICMI (Uluslararası Matematiksel Yaratıcılık Konferansı) çalışma konferansında tematik çalışma gruplarından biri erken cebir olarak belirlenmiştir (Lins ve Kaput, 2004). Böylece küçük çocuklar ile başlayan süreç büyük yaşlardaki öğrencileri de içerecek şekilde cebir araştırmaları geniş bir yelpazede ele alınmaya başlamıştır (örn., Zazkis ve Liljedahl, 2002). Kieran (2004, s.149) yaptığı çalışmada erken cebirsel düşünme tanımı için şunu önermiştir: "Erken sınıflarda cebirsel düşünme, harfin bir araç olarak kullanılabileceği etkinliklerde veya alternatif olarak harf kullanılmadan gerçekleştirilebilecek etkinliklerde, nicelikler arasındaki ilişkileri analiz etme, yapıyı fark etme, değişimi inceleme, genelleme, problem çözme, gerekçelendirme, doğrulama ve tahmin etme gibi düşünme biçimlerinin gelişimini içerir". Kieran (2018; 2022) sonraki yıllarda er ken cebirsel düşünmeyi "5-12 yaşındaki çocukların, ortaokul derslerinde karşılaşacakları nesneler ve düşünme yolları için anlam oluştururken kullandıkları akıl yürütmedir" şeklinde ifade etmiştir.

Erken cebirde dikkat edilmesi gereken hususlardan bir tanesi erken cebir fikri ile cebirin erken yaşlarda öğretilmesi konusunda yaşanan farklılıktır. Çünkü erken cebir, cebirin erken yaşlarda öğretilmesi anlamını taşımamaktadır (Carraher, Schliman ve Schwartz, 2008, s.235). Erken cebir, formal cebirden farklıdır. Bu nedenle erken cebire giriş için ek çalışmalara ihtiyaç vardır (Hohensee, 2015, s.232). Bu düşünce alanda birçok çalışmanın yapılmasını sağlamış ve erken cebiri diğer bir anlamda cebirsel düşünmenin belirli özelliklerinin tartışılmasını sağlamıştır (örn., Carpenter vd., 2000; Carraher, 2008; Warren, 2003). Nitekim 2000'li yılların başında Radford (2006)'un "Cebirsel düşünmeyi ayırt edici kılan nedir?" sorusunu sorarak diğer tartışmalar gibi cebirsel düşünmenin daha geniş bir perspektiften ele alınmasına yol açmıştır.

1.4.2. Cebirsel Düşünmenin Çok Yönlülüğü

Cebirsel düşünme farklı temsil biçimlerinin dikkate alınması ve kullanılmasını temel alır ve farklı temsil biçimlerini kullanmak ise bir problemi somutlaştırarak anlaşılmasını kolaylaştırır (Brizuela ve Earnest, s. 276). Benzer şekilde aritmetik de birçok problemi çözmemize yardımcı olur, bu anlamda cebir ile aynı işlevde gibi görünebilir. Aritmetikte, sayıları kullanarak başka sayılara varır ve bir cevaba ulaşırız. Cebirde de durum benzer şekildedir. Ancak bu bizim için yeterli değildir. Örneğin bir problemde toplama veya çıkarma işlemini kullanmak gerektiğinde özel kısa yollar olarak düşünebileceğimiz çarpma ve bölme işlemlerine başvururuz. Buna rağmen sadece sonuca ulaşmak daha kapsamlı bir kanıya varmamızı sağlamayacaktır. Bu durum daha derin kestirmelere varabileceğimiz, kendine özel tanımları, işlemleri, sembolleri olan cebirin anlaşılması ihtiyacı doğmuştur. Bu nedenle aritmetikte zorlanılan birçok problemi cebir yardımıyla çözüme ulaştırmak mümkündür (Carnahan, 1946, s.7). Bu bağlamda cebirin çok yönlü oluşu kendine has notasyonları ve temsil biçimleri, beraberinde alanyazında yer alan farklı düşünme biçimleri ile olan ilişkisi cebirsel düşünmenin de çok yönlü gelişmesine katkı sağlamıştır. Hatta çok geniş bir yelpazede yer alması cebirsel düşünmenin tek bir bakış açısı ve herkes tarafından bilinen özgül bir tanımının olmasını da engellemektedir. Bu nedenle cebirsel düşünme beraberinde birçok anlayış sunmuş ve nasıl öğretilmesi gerektiği tartışılmıştır (Kieran, 2018, s. 428; Kieran, 2022).

Araştırmacıların ortak fikirlerinden bir tanesi, formal cebirin erken öğretilmesinden ziyade aritmetiği genelleme, eşit işaretinin ilişkisel yorumu ve niceliksel ilişkilerin ifade edilmesi yönünde olmuştur. Bunun yanında Kieran (1992; 2007), Radford (2001; 2012) gibi araştırmacılar cebirden önce formal olmayan yani informal şekilde sembol öncesi veya sembolik olmayan cebirsel düşünme becerilerinin kazandırılması gerekliliğini öne sürmüştür. Hohensee (2015, s.233) ise tanımladığı kavramsal çerçevede aritmetikten cebire geçişin önemli kavramlarını aritmetiğin genellenmesi, fonksiyonel ilişkiler ve eşit işareti gibi üç başlıkta açıklamıştır. Bundan önce Kaput (2008) ise, Şekil 1'de görüldüğü gibi K -12 sınıflarından cebirin çoklu yönlerini detaylandırarak cebirsel düşünmenin aritmetiği genelleme, fonksiyonel düşünme ve m odelleme şeklinde üç bileşenini öne çıkarmıştır.



Şekil 1.1. *Ralston (2013) çalışmasında Kaput' un (2008) modelini uyarlamıştır.*

Carraher ve Schlieman (2016) ise aritmetiği, fonksiyonel ilişkileri, nicel ilişkileri, denklem ve eşitsizlik sistemlerini matematiğin anlaşılmasını, öğrenilmesini, öğretilmesini sağlayan uzun vadeli gelişimi destekleyen dört güçlü fikir olarak tanımlamıştır. Cebirsel düşünmeyi destekleyen bu fi kirler Tablo 1.1 ile gösterilmiştir (Carraher ve Schliemann, 2016, s.192).

Tablo 1.1. *Matematiğin anlaşılmasını sağlayan dört güçlü fikir*

1. Aritmetik to plama, çıkarma, çarpma ve bölmeden oluşan dört temel fonksiyona sahiptir.
2. Matematiksel g enellemeler fonksiyonları belirgin hale getirerek değişkenler yardımıyla desteklenebilir.
3. Fonksiyonel ilişkiler cebir ve geometrinin bütünleşmesine yardımcı olur.
4. Denklemler ve eşitsizlikler iki fonksiyonun eşitliği/karşılaştırılması olarak yorumlanabilir.

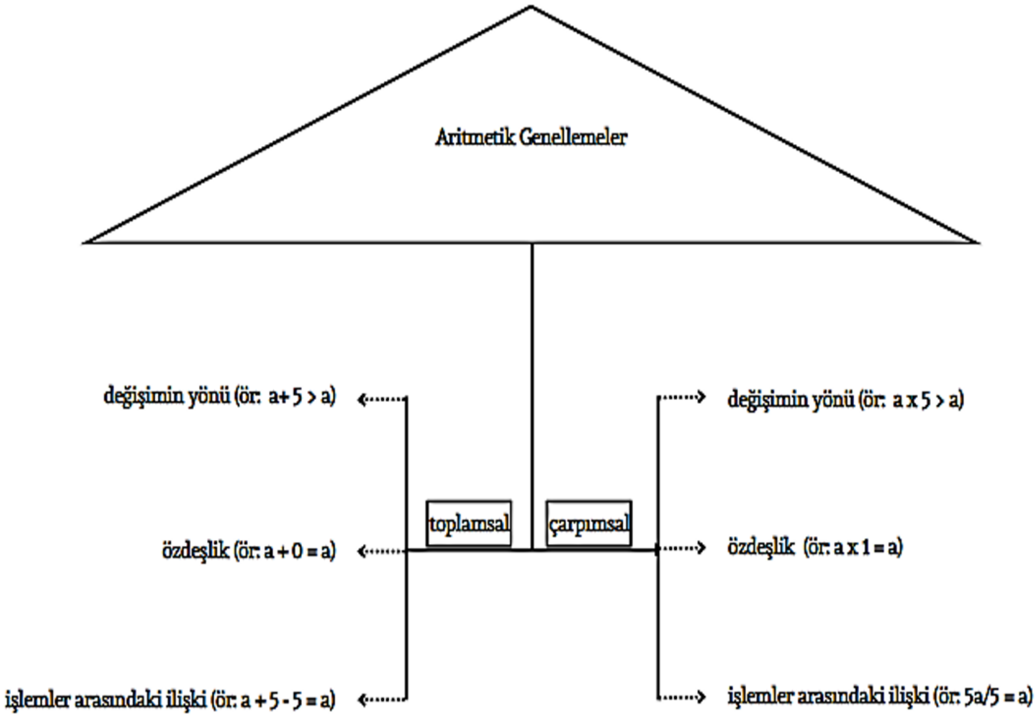
Tablo 1 .1 ile belirtilen ilk fikir aritmetiğin sahip olduğu dört temel işlemdir. Aritmetikteki dört işlem, matematik içerisindeki yapıları karakterize etmeyi ve cebirsel düşünmenin gelişiminin amaç olduğu bir çalışmada, çalışmanın boyutlarını önemli ölçüde genişletmeyi sağlar (Kieran, 2018, s.82). Bu işlemler öğrencilerin matematikte karşılaştıkları ilk fonksiyon örnekleridir. İkinci fikir ilkokul öğrencilerinin sayı kavramının ötesine geçmesine, yer tutucu olarak değişkenlerin tanıtılması açısından kritik öneme sahiptir. Üçüncü fikir aritmetik, cebir ve geometrinin birleşiminde fonksiyonların rolünü gösterir, fonksiyonların çok çeşitli biçimlerde (kartezyen düzlemde grafikler, doğru üzerindeki noktalar, veri tabloları vb.) temsili aritmetik ve cebirsel temsile izin veren soyut yapılardır. Benzer şekilde iki fonksiyonun belirli girdi için aynı çıktıyı sağladığı koşulları gösteren ifadeler denklem olarak kabul edilebilir. Denklemler ve eşitsizlikler cebirsel temsili kullanarak çeşitli biçimleri içerir (Carraher ve Schliemann, 2016, s.193).

Yapılan tartışmalar ve araştırmalar sonucunda genel olarak cebirsel düşünmenin bileşenleri olarak açığa çıkan üç bileşen aşağıda açıklanmıştır.

1.4.2.1. Aritmetiğin Genellenmesi

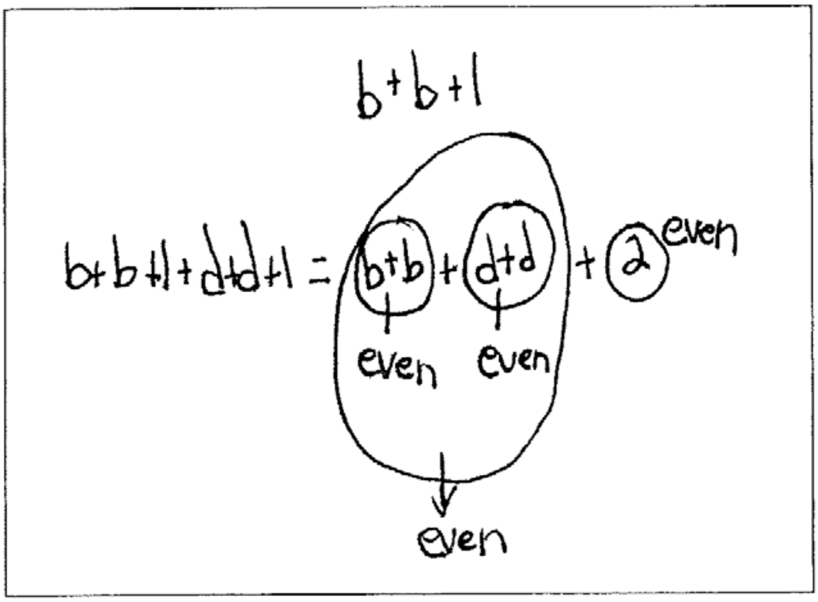
Günümüzde cebir öğrenimi ve öğretimi için yaygın olarak bilinen yöntemler aritmetikten geçer. Aritmetikte yaşanılan deneyimler cebir öğrenmenin vazgeçilmezidir. Bu anlayış öğrencilerin aritmetikte yeterince deneyim kazanmalarını öngörmektedir. Aritmetik günlük yaşamda karşılan durumları niceliksel olarak ifade edebilmek için kullanılan alanlardan biridir. Aritmetik temel işlemlerde deneyim sağlayıp bilinmeyeni bulma yolunda ilerlemeyi sağlar ve cebirin köklerini oluşturur (Akkan ve Öztürk, 2019; ; Kieran, 1992; NCTM,1991).

Aritmetikten cebire geçiş kolay gibi görünse de birçok zorluğu içinde barındırır, çünkü aritmetikte belli sayılarla çalışılırken, cebirde birçok sayıyı; hatta sayı kümelerini kullanmayı gerektiren bir soyutlama vardır (Palabıyık ve Akkuş İspir, 2011, s.112). Bu nedenle nicel durumlardan akıl yürütmeler yaparak genellemeler oluşturmak, cebir öğrenmenin birincil yolu olarak kabul edilir (Kaput, Carraher ve Blanton, 2008, s 31). Yaşanılan deneyimlerin sürekliliği, etkililiği için gereklidir. Aritmetikten cebire geçiş üzerine düşünüldüğünde, aritmetikten cebire giden doğrusal bir yol olduğu düşünülse de aslında birbirine destek olan iki farklı grup olarak düşünmek gerekir (Haldar, 2014, s.10). Kaput ve Blanton (2005) yaptıkları çalışmada cebirsel muhakemenin gelişimi için öğrencilerin matematik deneyimlerinin, erken dönemde başlayıp farklı konularla ilişkilendirilerek oluşturulması gerektiğini belirtir. Haldar (2014) çalışmasında aritmetiğin genellenmesi bağlamında eşit ve eşit olmama durumlarının genellenmesi, birim eleman gibi işlem özelliklerini ve işlemler arası ilişkilerini incelerken Şekil 1.2'deki çerçeveyi kullanmıştır



Şekil 1.2. *Haldar (2014) aritmetiğin genellemeye yönelik anlayışlar*

Bu bağlamda aritmetikte yer alan sayıların, işlem özelliklerinin ve bunları genellemeye yönelik düşüncelerin yer aldığı cebir öncesi dönemde yapılan çalışmalar araştırmacıların odak noktası olmaktadır. Özellikle ilkokul öğrencilerinin cebir öğrenmeleri üzerine yapılan araştırmalar incelendiğinde erken cebir sürecinde aritmetiğin genellenmesi dikkat çekmektedir. Bunun yanında sayı ve işlem özellikleri de dahil olmak üzere aritmetiksel ilişkileri keşfetme, bu ilişkileri çeşitli şekillerde temsil etme (örneğin, sözel, s embolik y a d a g örsel/resim k ullanarak) v e g enelleme, b u g enellemeleri d e gerekçelendirme ve doğrulama şeklinde eylemler ele alınmaktadır. Örneğin, yapılan bir araştırmada bir öğrencinin bir tek sayı ile bir tek sayının toplamının birkaç özel durumdan sonra çift bir sayı olduğunu fark edip bu durumu genellediği ve genellediği düşüncesini doğruladığı Şekil 1.3'te de görülmektedir (Blanton vd., 2011).



Şekil 1.3. *Gabriella'nin "bir tek sayı ile bir tek sayının toplamı çifttir" genellemesine ilişkin doğrulama süreci*

Şekil 1.3' te görüldüğü gibi öğrencinin çift sayıları ikili grupladığı, tek sayıları ise çift sayının bir fazlası olarak ele aldığı ve toplamının çift olduğunu sembolik temsil ve görsel temsil kullanarak ifade ettiği görülmektedir.

1.4.2.2. Fonksiyonel Düşünme

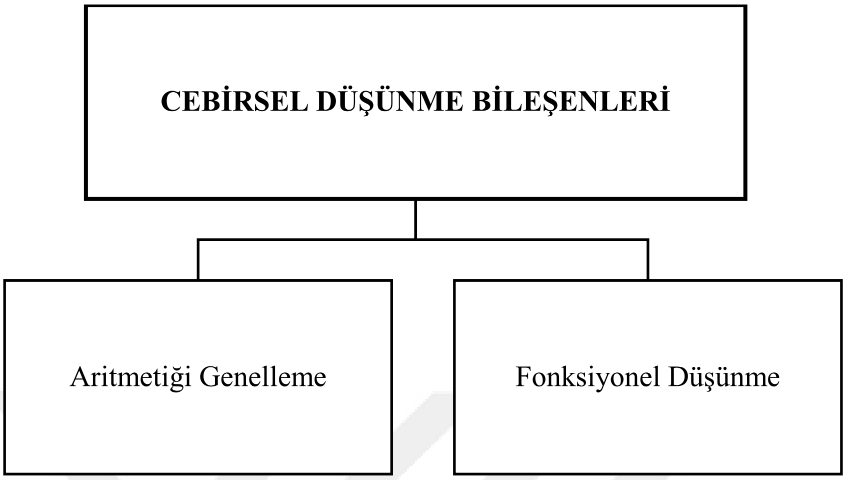
Cebirsel düşünme üzerine yapılan araştırmalar temelinde, cebirsel düşünmenin bileşenlerinden bir tanesi de fonksiyonel düşünmedir. Fonksiyonel düşünme cebirsel düşünme sürecinde yer alan ve önemli bir yere sahip olan ana bileşenlerdendir. Ancak NCTM (1998; 2000; 2002) içerik standartları incelendiğinde fonksiyonel düşünme kavramı açıkça ifade edilmese bile nicelikler arasındaki ilişkinin yani fonksiyonel ilişkinin ön plana çıktığı görülmektedir. Bu nedenle günümüzde cebirsel düşünme açısından çok değerli olan fonksiyonel düşünmenin temelinde fonksiyonel ilişkilerin ve bu ilişkilerin ifade edilmesinde çeşitli temsillerin kullanımının bulunduğu söylenebilir.

Blanton vd. (2015, s.33), değişen nicelikler arasındaki ilişkileri genellemeyi, bu genellemeleri de değişkenler yardımıyla temsil ederek akıl yürütmeyi içeren çizim, tablo ve grafik gibi temsilleri fonksiyonel düşünme bağlamında değerlendirmiştir. Fonksiyonel düşünme içeriğinde örnek olarak öğrencilerden herhangi bir örüntüdeki yapıyı algılayıp, herhangi bir terimin herhangi bir özelliğini, işlevini keşfetmesi veya ifade etmesi beklenebilir (Twohill, 2018, s.213). Blanton vd. (2015) cebirsel düşünmenin gelişiminde, fonksiyonel düşünmenin önemini vurgularken; fonksiyonel düşünmenin, değişen nicelikler arasındaki ilişkileri genellerken akıl yürütmeyi sağladığı ve eşzamanlı olarak çok yönlü düşünmeyi geliştirdiğine dikkat çeker. Öte yandan Smith (2008, s.143) fonksiyonel düşünmeyi, cebirsel düşünmenin anahtar kollarından biri olarak açıklayıp; iki veya daha fazla değişen nicelik arasındaki ilişkinin temsil edilmesine yönelik anlayışların etrafında inşa eder. Ek olarak fonksiyonel düşünmeyi, bir fiziksel ya da kavramsal durumun içindeki değişen niceliklerin belirlenmesi, farklı durumlardaki değerlerinin tablo vb. temsilleri kullanılarak kayıt altına alınması, içerisindeki örüntünün belirlenmesi ve ilerleyen süreçleri temsiller yardımıyla ifade edilip tahmin edilmesi olarak belirtmiştir.

Wilkie ve Hopkins (2024), cebirsel düşünmenin fonksiyonel bir perspektifi olan, değişen nicelikler arasındaki ilişkileri genelleştirmeyi öğrenmeye odaklanır. Örneğin, büyüyen şekil örüntülerinde bir değişken adım sayısı ve diğer değişken ise her bir şekli oluşturan şekillerin sayısıdır (ölçülebilir özellik). Çocuklar, belirli şekillerin özelliklerinin adım sayısıyla nasıl ilişkili olduğuna ve değişkenler arasındaki ilişkinin (denklem veya kural) o örüntüdeki tüm şekiller için nasıl geçerli olduğuna dikkat ederek ve bu konudaki genelliği ifade eder ve cebirsel düşünebildiğini gösterir. Fonksiyonel ilişkinin sözlü açıklamalarını desteklemek için adım sayısı ile şeklin yapısı arasında veya bir şekilden diğerine geçişteki değişimleri kullanırlar. Araştırmacılar, çocukların fonksiyonel düşünmesine ilişkin farklı düşünme biçimlerini tanımladılar. Örneğin, Radford'un (2010) çerçevesi, her biri fonksiyonel ilişki hakkında bir tür düşünmeyi kanıtlayan aritmetik genelleme, olgusal genelleme, bağlamsal genelleme ve sembolik genelleme şeklinde dört tür genelleme eyleminden oluşur.

Üst bölümde de belirtildiği üzere fonksiyonel düşünme ile cebirsel düşünme arasındaki bağın nicelikler arasındaki durumların belirlenip temsil edilmesine dayandığı görülmektedir. Yurt dışında ve ülkemizde öğrencilerin fonksiyonel düşünme düzeylerinin belirlenmesi amacıyla örüntü ve niceliksel ilişkileri temele alan birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya devam edilmektedir (Blanton ve Kaput, 2011; Kabael ve Tanışlı, 2010; Türkmen ve Tanışlı, 2019; Smith, 2008).

Araştırmamız kapsamında alanyazında bulunan çalışmalar incelenerek Şekil 4’te görüldüğü gibi erken cebir sürecinde cebirsel düşünme bileşenleri iki başlık altında ele alınmıştır.



Şekil 1.4. *Cebirsel düşünme bileşenleri*

Şekil 1.4’te görüldüğü gibi temel bileşenler erken cebir ve cebirsel düşünme bağlamında aritmetiği genelleme, fonksiyonel düşünme şeklinde iki bileşenden etkilenmektedir. Bu bileşenlerin süreç bileşenleri ise alanyazında çeşitli çalışmalar incelenerek oluşturulmuştur (Carraher, Schliemann ve Schwartz, 2017; Haldar 2014; Ralston,2013; Van de Walle vd., 2021) . Bu bağlamda aritmetiğin genellenmesi bağlamında Tablo 1.2.’de görüldüğü gibi cebirsel düşünme gelişimi için önemli görülen sayı kavramı ve sayı sisteminin özellikleri, sembollerin anlamı ile nicel ilişkiler ve nicel muhakemeye süreç bileşenleri olarak ele alınmıştır.

Tablo 1.2. *Aritmetiği genelleme bağlamında temel bileşenler*

ARİTMETİĞİ GENELLEME		
Sayı Kavramı ve Sayı Sisteminin Özellikleri	**Sembollerin Anlamı**	**Nicel İlişkiler ve Muhakeme**
•Sayıların kavrama ve farklı kombinasyonlarını anlama •Basamak Değeri İlişkileri •İşlemlerin anlam ve etkilerini anlama •Temel işlemleri keşfetme ve anlama Toplama ve çıkarma, çarpma ve bölme arasındaki ilişki) •Temel işlem özelliklerini anlama ve temel özelliklerden elde edilen varsayımlar •Tek ve çift sayılara ilişkin bağıntılar	→**Eşit İşaretinin Anlamı ve İlişkisel Düşünme** •Eşit işaretini denge olarak kavramsallaştırma •Eşitlik aksiyomları •Doğru/yanlış cümleleri, açık sayı cümleleri •İlişkisel düşünme stratejileri →**Değişkenin anlamı** •Değişkenin bilinmeyen anlamı •Değişkenin değişen nicelik anlamı	•İki niceliğin birbiriyle ilişkisini kurma •Çoklu nicelikler arasında muhakeme yapama

Aritmetiği genelleme bağlamında geliştirilen temel bileşenler kapsamında, ilk aşamada öğrencilerin sayı sistemi özelliklerini ve sayı kavramını nasıl yapılandırdıkları incelenirken ardından temel işlemler ve işlem özellikleri (birleşme, değişme, etkisiz eleman, ters eleman) incelenmeye çalışılmıştır. İkinci aşamada öğrencilerin sembollere yönelik anlayışlarını incelerken öncelikle eşit işaretinin yapılandırılması ve değişken olarak sembollerin anlamları incelenmiştir. Üçüncü aşamada öğrencilerin nicel ilişki ve muhakeme becerileri sorgulanmıştır. Bu bağlamda iki veya daha fazla nicelik arasındaki ilişkiyi arama esas alınmıştır.

Fonksiyonel düşünme bağlamında ise örüntüler ve genellenmesi ön plana çıkmaktadır. Bu bağlamda bazı araştırmalarda Stephens vd. (2017); Blanton vd. (2015); Türkmen ve Tanışlı, (2019) fonksiyonel düşünme düzeyleri ortaya konulmuştur. Bu çalışmalarda düzeylere ilişkin temel bileşenler Tablo 1.3.'te sunulmuştur.

Tablo 1.3. *Fonksiyonel düşünme bağlamında temel bileşenler*

FONKSİYONEL DÜŞÜNME	
Fonksiyonel Düşünme Kanıtı Yok	
Varyasyonel Düşünme	
Kovaryans Düşünme	Birebir Eşleyerek Düşünme

Tablo 1.3'te görüldüğü gibi, fonksiyonel düşünmenin temel bileşenleri bağlamında varyasyonel düşünme, kovaryans düşünme ve birebir eşleyerek düşünme şeklinde anlayışlar ele alınmıştır. Örneğin, Stephens vd. (2017) ilkokul 3-5. Sınıf düzeyindeki öğrencilerle gerçekleştirdikleri örüntülere yönelik bir çalışmada y=mx, $y=x^2$ gibi fonksiyon türlerine yönelik anlayışlar incelenmiş ve fonksiyonel ilişkiyi temsil etme düzeyleri Tablo 1.4 ile verilen yapı ortaya çıkmıştır

.

Tablo 1.4. *Fonksiyonel ilişkiyi genelleme ve temsil etme düzeyleri*

Fonksiyonel Düşünme	
Varyasyonel Düşünme	
Kovaryans Düşünme Kovaryans İlişki	**Birebir Eşleme** Tek Örnekleme Fonksiyonel Temel Gelişmiş Fonksiyonel Yoğun Fonksiyonel

Blanton vd. (2015) tarafından yapılan çalışmada ise genel kuralı y= mx + n formundaki bir ifade üzerine örüntülerde ortaya çıkan fonksiyonel ilişkiyi anlama ve genelleme düzeylerinden yararlanılarak öğrenci cevapları incelenmiştir. Blanton vd.

(2015) ile yaptıkları çalışmada öne çıkan fonksiyonel ilişkiyi anlama ve genelleme düzeyleri Blanton ve arkadaşları (2015' ten aktaran Türkmen ve Tanışlı, 2019, s.347) Tablo 1.5 ile verilmiştir.

Tablo 1.5. *Fonksiyonel ilişkileri temsil etme düzeyleri*

Ön Yapısal	Problem durumunda herhangi bir matematiksel ilişki tanımlanamaz.
Yinelemeli- Özel	Bu düzeyde yalnızca bazı özel durumlara yönelik yinelemeli örüntü kavramsallaştırılır.
Yinelemeli Genel	Belirli örneklere kalmadan, keyfi ardışık değerler kullanarak yinelemeli örüntüyü kavramsallaştırır.
Fonksiyonel Özel	Özel durumlar için ilişikiyi tanımlayabilir fakat genelleştirilmiş bir ilişki tanımlayamaz.
Basit Fonksiyonel Genel	İki nicelik arasındaki ilişki kavramsallaştırılır. Nicelikler karşılaştırılabilir.
Gelişmiş Fonksiyonel Genel	Bu düzeyde öğrenciler nicelikleri tanır, karşılaştırır, bazı sözcükleri ve temsilleri kullanarak durumları analiz edebilir ancak dönüşümler yapamaz ve sınırlı kalır.
Yoğun Fonksiyonel Genel	Problemdeki iki veya daha fazla niceliği, sözcükler ve değişkenler arasındaki dönüşümü açıkça ifade eder.
Nesne Olarak Fonksiyon	Fonksiyonel ilişkiyi yapısal olarak kendi içinde yapılandırır ve yeni süreçlerin gerçekleştirilebileceği bir nesne olarak kavramsallaştırır.

Türkmen ve Tanışlı (2019)'nın yaptıkları çalışmada ise verilerin analizi ile elde edilen fonksiyonel ilişkileri temsil etme düzeyleri Tablo 1.6 ile verilmiştir.

Tablo 1.6. *Fonksiyonel ilişkileri temsil etme düzeyleri*

F.D KANITI YOK	D.0 Ön Yapısal	
VARYASYONEL DÜŞÜNME	D1. Yinelemeli Özel	
	D2. Yinelemeli Genel	
KOVARYANS DÜŞÜNME	D3. Karşılıklı Değişim	
	BİREBİR EŞLEYEREK DÜŞÜNME	
	D.4 Fonksiyonel Özel	D4.1 Toplamsal İlişki
		D4.2 Çarpımsal İlişki
	D5. Temel Fonksiyonel	D51. Kelimelerle Ortaya Çıkan
		D5.2 Değişkenlerle Ortaya Çıkan

Araştırma kapsamında ise Türkmen ve Tanışlı (2019) tarafından ele alınan ve Tablo 1.6'da sunulan fonksiyonel düşünme düzeyleri benimsenmiş ve veriler bu çerçevede ortaya konulan bileşenler doğrultusunda analiz edilmiştir.

1.5. İlgili Alanyazın

Bu bölümde ilköğretim öğrencilerinin cebir öğrenmeleri ile ilgili yapılan ulusal ve uluslararası araştırmalardan bazıları özetlenmiştir.

Akkan (2009)'ın İlköğretim 5-8.sınıf öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerini incelediği çalışmada: Öğrencilerin süreçte genelleme yapma, problem çözme, sembollerin kullanımı ve harflerin anlamını yorumlama durumlarını incelemiştir. Enlemesine yaptığı çalışmada araştırmacı farklı öğrenim seviyesindeki 285 öğrenciye yazılı sınavlar uygulamış, 24 öğrenciyle klinik mülakatlar yürütmüştür. Verileri toplamak amacıyla aritmetikten cebire geçişin incelendiği dört boyutu içeren 14 soru hazırlamıştır. Araştırmanın bulgularına göre farklı öğrenim düzeyindeki öğrenciler, çalışmanın problem çözme boyutundaki yazılı sınav sorularında aritmetik çözümlerin kullanıldığı ifade edilmektedir. Aritmetik çözümleri kullanan 5. sınıf düzeyindeki öğrencilerin değerleri %71-80 aralığında değişirken 6. sınıf öğrencilerinde %68-%75, 7. Sınıf öğrencilerinde %57-68, 8.sınıf öğrencilerinin %48-55 aralığında olup, diğer sınıflara göre daha düşük düzeydedir; fakat araştırmaya göre 8. Sınıf öğrencilerinin matematik deneyimleri ve bilişsel gelişimleri dikkate alındığında, değerlerin oldukça yüksek olduğu belirtilmektedir. Özelikle cebir öğrenme alanını bulunduran kazanımlara sahip olmayan 5. sınıf öğrencilerinin aritmetik çözümleri kullanmaları beklenen bir sonuç olmasına rağmen, 6,7 ve 8. sınıf öğrencilerinin aritmetik çözümlere fazlaca ağırlık verip cebirden kaçınmaları dikkate değer bir bulgudur. Genelleme yapma ile ilgili olarak, 5. sınıf öğrencilerinin genel olarak aritmetik özellikleri içeren çözümler yaparken, çok az sayıda öğrencinin cebir öncesi ve cebirsel çözümleri kullandığı belirtilmektedir. Sembollerin kullanımında, özellikle eşit işaretinin öğrenciler tarafından işlemsel sonuç anlamının yaygın olarak bilindiği; bununla beraber öğrenci sınıf düzeyi arttıkça sembolün ilişkisel yönünün algılandığı görülmektedir. Sonuç olarak farklı öğrenim seviyesindeki öğrencilerin problem çözme süreçlerinin çok farklılaşmadığı, tüm soru çeşitlerinde genel olarak aritmetiği kullandıkları, cebir öncesi ve cebirsel çözümleri kullanmadıkları, genelleme y apma süreçlerinin yeterince artmadığı, harflerin anlamlarına yönelik yorumlarının yeterince farklılaşmadığı, sembollere yüklenen sembollerin çok az farklılaştığı ve aritmetikten cebire geçen öğrenci sayının öğrenim seviyesine göre artışın çok az olduğu ifade edilmiştir.

Ralston (2013) İlköğretim öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin tanısal değerlendirilmesinin geliştirilmesi ve doğrulanması için yaptığı çalışmada Washington'dan altı okul 81 öğretmen ve 1765 öğrenci ve Singapur' dan dört farklı okuldan 1619 öğrenci ile çalıştı. Nicel bir çalışma yapan araştırmacı, ilkokul öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin araştırılmasını ve Singapur'daki öğrencilerle tanısal değerlendirme aracını kültürler arası doğrulamayı amaçlamıştır. Çalışmada cebirsel düşünmenin on farklı versiyonunu içeren bir tanılayıcı değerlendirme ölçeği geliştirilmiş 1,2,3,4,5. Sınıflarda uygulanmak üzere 2 düzeyli olarak hazırlanmıştır (1A, 1B). Değerlendirme soruları cebirin üç alt konusuna bölünmüştür: 1) Modelleme, açık sayı cümleleri çözme, denkliği anlama ve değişkenlerle çalışmayı; 2) Aritmetiği genelleme, sayı ilişkileri, değişme özelliği, sıfırın özelliklerini; 3) Fonksiyonlar, örüntüleri tanıma, tanımlama, genişletme ve oluşturma becerilerine sahip olmayı içermektedir. A raştırma kapsamlı bir çalışma olduğu için birçok farklı bulgu yer almaktadır. Öncelikle çalışmada yer alan bulgular incelendiğinde Amerika'daki öğrencilerin cebirsel görevlerde (değişkenlerle çalışma, örüntülerle çalışma, modelleme vs.) Singapur'daki öğrencilere göre istatistiksel olarak daha kötü performans gösterdiği görülmektedir. Bu bağlamda uluslararası test sonuçlarının büyük ölçüde doğrulandığı ifade edilmektedir. Öğrencilerin denklik kavramı, eşitlik kavramı, değişkenlerle çalışma sorularında özellikle alt sınıflarda aşina olmadıkları kavramları kendi deneyimleri yardımıyla çalışmış ve alınan bulgular literatürdeki diğer bulgulara benzer nitelikte olmuştur. Çalışmanın diğer bir bölümünde de öğretmenler ile yapılan çalışmalardan elde edilen veriler paylaşılmıştır. Öğretmenlerin görüşlerine göre şekillenen bölümde birçok öğretmen çalışmayı verimli ve faydalı bulmuştur.

Turgut ve Temur (2017)'un İlkokul dördüncü sınıf öğrencileri üzerinde yaptıkları erken cebir öğretim etkinliklerinin öğrencilerin akademik başarılarına etkisi incelenmiştir. Çalışmada karma yöntem benimsenmiştir. Nitel yöntemler arasında yer alan gözlem tekniği ve nicel araştırma yöntemlerinden tek grup ön test- son test modeli bir arada kullanılmıştır. Araştırmacıların hazırladığı erken cebir öğretim etkinlikleri, 15 ders boyunca sınıf öğretmenleri tarafından uygulanmıştır. Uygulama boyunca ders içerisindeki öğretmen öğrenci etkileşimleri, derste sergilenen performanslar kamera ile kayıt altına alınmıştır. Ders gözlemine dair analizler çalışmada yer bulmuştur. Araştırmanın veri toplama aracının geliştirilmesi ve etkinliklerin uygulanması olarak iki aşaması olduğu için iki farklı grup ile çalışılmıştır. Çalışmada verilerin toplanması Erken Cebir Başarı Testi ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Test geliştirilirken 2009 yılında MEB tarafından yayımlanan 1-5. Sınıf öğretim programındaki kazanımlar esas alınmıştır. 2009 öğretim programından 16 kazanım ve diğer ülkelerin programlarımdan 4 kazanım seçilerek testler hazırlanmıştır. Verilerin analizinde betimsel analiz tekniğinden yararlanılmıştır. Çalışmada ortaya çıkan veriler incelendiğinde, erken cebir öğretim etkinliklerinin öğrencilerde keşif yapma, muhakeme yapma, ilişkisel düşünme ve genellemelere ulaşma gibi yönelimler gerçekleştirdiği belirtilmektedir. Yapılan ön test, ve son test değerlendirmesine göre hazırlanan erken cebir öğretim etkinliklerinin öğrencilerin akademik başarılarını artırdığı görülmektedir. Araştırmacılar son bölümde farklı ülkelerdeki öğretim programlarının incelenerek benzer kazanımların ilkokul 1,2,3 ve 4. Sınıflar için matematik öğretim programına eklenmesini önermektedir.

Özden ve Tanışlı (2019) ilkokul altıncı sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanına ilişkin öğrenme süreçlerini inceledikleri çalışmada bir öğretim deneyi planlanarak öğrencilerin aritmetik ve cebir görevlerini gerçekleştirirken öğrenme süreçlerinin gelişimini ortaya koymak amaçlanmaktadır. Çalışmada nitel araştırmalardan olan öğretim deneyi çalışması gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilip, çalışma önce tüm sınıfta uygulanmış, öğrenci başarı düzeyleri öğrenci karne notları ve öğretmen görüşleri dikkate alınarak belirlenmiştir. Çalışmada veriler klinik görüşmeler yardımıyla toplanmıştır. Verilerin analizinde sürekli analiz ve geriye dönük analiz yöntemleri kullanılmıştır. Araştırmadan elde edilen veriler incelendiğinde gerçekleştirilen öğretim deneylerinde öğrencilerin kavram yanılgılarında ve cebire yönelik anlayışlarında olumlu değişimin hem odak öğrencilerde hem de sınıf düzeyinde olduğu görülmüştür. Süreçte kullanılan açık sayı cümleleri sonuç odaklı düşünmeden uzaklaştırıp, ilişkisel düşünme yönünü kuvvetlendirmiştir. Benzer şekilde cebirsel ifadelere ve cebirsel ifadelerle yapılan işlemlere beraberinde örüntü ve genellemelere yönelik gerçekleştirilen öğretim deneylerinde öğrencilerin olumlu yönde anlayışlar gerçekleştirdikleri çalışmanın sonuçları arasında yer almaktadır

Haldar (2014)'ın ilkokul dördüncü sınıf öğrencilerin aritmetikteki genelleme anlayışlarını incelemek amacıyla yaptığı çalışmada üç tür genelleme çalışmanın odak noktasını oluşturmaktadır. Bunlar "değişimin yönü (örneğin herhangi bir sayıya bir doğal sayının eklenmesi veya çıkarılması durumu), özdeşlik durumu (herhangi bir sayının birim eleman ile işleme girmesi), işlemler arasındaki ilişkiler (toplama veya çıkarma arasındaki ilişki)." olarak ifade edilmektedir. Öğrencilerin zihinlerinde nasıl yapılandırdığını anlamak için öğrencilerle görüşmeler yapılmıştır. Çalışmanın katılımcıları San Francisco Körfez Bölgesi'nden 15' i erkek, 9' u kız olmak üzere toplam 24 öğrencidir. Öğrenciler Kaliforniya S TAR (Standart T est ve R aporlama) t estinden 150 -160 pua n a lan öğrencilerdir. İki aşamalı olarak öğrencilere sunulan toplamsal ilişkiler çalışması ve çarpımsal ilişkiler çalışmasında öğrencilerin çoğunun yeterli ve ileri düzeyde performans gösterdiği belirtilmektedir. Nitel olarak yapılan analiz sonucunda ortaya çıkan kod şeması incelendiğinde dört düzeyden oluştuğu görülmektedir. Çalışmanın sonuçlarında öğrencilerin toplamaya yönelik genellemelerinin, çarpma görevlerine yönelik genellemelerine göre daha ileri olduğu belirtilmektedir.

Somasundram (2018) 5. Sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmesinin bilişsel bir modelini incelediği doktora tezi çalışmasında beşinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmelerine katkı sağlayabilecek bilişsel yapıların artırılması ve bu yapılar arasındaki bağlantı ağının ortaya çıkarılması amaçlamıştır. Bu bağlamda öğrencilerin sayı, işlem sembol ve örüntüler bağlamında yapılandırmalarını incelemeye çalışmıştır. Çalışmada, kırsal ve kentsel bölgelerde bulunan erkek ve kız öğrencilerden oluşan 720 kişinin çalışmanın örneklemini oluşturduğu belirtilmektedir. Veriler sayı, işlem, sembol ve örüntülerin değerlendirilmesi (ANOSPS) ve cebirsel düşünmenin tanılanması ve değerlendirilmesi (ATDA) olmak üzere iki araç yardımıyla toplanmıştır. ANOSPS 15 çoktan seçmeli sorudan oluşan; ATDA ise 17 kısa cevaplı sorudan oluşan araçlardır. Veriler beşinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünmelerini tahin edebilecek bir model oluşturmak için yapısal eşitlik modeli kullanılarak analiz edilmiştir. Çalışmada sayı, işlem, sembol ve örüntülerin cebirsel düşünmelerini önemli ölçüde etkilediği görülmüştür. Bunun yanında beşinci sınıf öğrencilerinde kız ve erkek öğrenciler arasında cebirsel düşünme bağlamında herhangi bir anlamlı farklılık olmadığı gibi, kentsel okullardaki öğrencilerin, kırsal kesimdeki beşinci sınıf öğrencilerine göre daha etkili performans gösterdiği belirtilmiştir.

Strachota (2018) doktora tezi çalışmasında, öğretim programlarında veya öğretim uygulamalarında ilkokul öğrencilerinin erken cebir bağlamında genellemelerini teşvik eden eylemlerin neler olduğunu incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmanın temelinde cebir, cebirsel düşünme, genellemeler, erken cebir araştırmalarının yer aldığı görülmektedir. Çalışmanın katılımcılarını Amerika Orta Atlantik bölgesinden 46 okul oluşturmaktadır. Bu okullarda öğrencileri genelleme yapmaya sevk eden derslerde alınan ders kayıtları yazıya dökülmüş, öğrencilerin bağlamından ders içerisinde gösterdikleri jest- mimik hareketlerine kadar incelenmeye çalışılmıştır. Verilerin analizinde Ellis (2011) in genelleme taksonomisinin kullanıldığı belirtilmektedir. Taksonomi bağlamında incelemeler yapılırken öğrencilerin dikkat çekici olan matematiksel düşünmelerini belirlemek ve matematiksel anlayışlarını nasıl yapılandırdıklarını anlama çalışmaları yapılmıştır. Ayrıca öğrencilerin, içeriğin ve öğretmenin rolünü anlamak için öğretim üçgeninin kullanıldığı ifade edilmektedir. Bulgular incelendiğinde öğrencilerin karmaşık problemlerden ziyade genellemeye teşvik eden çalışmalarla erken cebire yönelik genellemelerini daha rahat gösterebildikleri, benzer şekilde çalışmada y er alan öğretmenlerin erken cebir bağlamındaki genellemeleri teşvik edebilecek genellemeleri yapabildikleri belirtilmektedir. Sonuç olarak çalışmada yer alan verilerin ve bulguların erken cebir ve genelleme bağlamında yapılan çalışmalarla örtüştüğü ve literatürü destekleyecek şekilde olduğu vurgulanmaktadır.

Starr vd. (2023) yılında yaptıkları çalışmada, ilişkisel düşünme ve matematik başarısı arasındaki ilişkiyi incelemeyi amaçlamışlardır. Kaliforniya'da dokuz okuldan, 1280 öğrencinin katıldığı araştırmada, 288 dördüncü sınıf, 336 altıncı sınıf ve 482 sekizinci sınıf öğrencisi ile iki yıl boyunca çalışma gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların, iki akademik yıl boyunca farklı zamanlarda kesirleri karşılaştırma, akıl yürütme ve ilişkisel düşünme becerilerini gerektiren soruların yer aldığı görevleri tamamlamaları beklendi. İlişkisel düşünme görevlerinin değerlendirilmesinin ardından öğrencilerde ilişkisel düşünmenin ilkokul ve ortaokul boyunca gelişmeye devam ettiği belirtilmektedir. Bunun yanında yapılan testlerdeki korelasyona bakılarak ilişkisel düşünmenin matematiksel akıl yürütmenin eşsiz bir yordayıcısı olduğu ifade edilmektedir. Benzer şekilde kesirlerin ilişkisel düşünme üzerine anlamlı bir farklılık oluşturduğu da çalışmada öne çıkan sonuçlardandır.

Torres, vd. (2023), yaptıkları çalışmada ilkokulda cebir bağlamında 7-8 yaşındaki bireylerin genelleme becerilerini ve cebire geçiş sürecini incelemeyi amaçlamışlardır. Bu kapsamda 24 öğrenciye anket uygulanmış, sonuçlara bağlı olarak yarı yapılandırılmış görüşme yapılmak üzere 6 öğrenci seçilmiştir. Çalışmada öğrencilerin $y = x + 3$ fonksiyonu ile ilgili genelleme sürecini incelenirken, fonksiyonu ifade edecek şekilde tasarlanmış bir makine bağlamında bir görev tasarlanmıştır. Video kaydı alarak gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmelerde tümevarımsal akıl yürütme mo deli kullanılarak gözlemlenmiştir. Verilerin analizinde oluşturulan kodlar Radford (2010) tarafından yapılan cebirsel düşünme ve öğrencilerin genelleme türlerini içeren çalışmasını temel almaktadır. Diğer çalışmalardan farklı olarak aritmetiksel genelleme ve cebirsel genelleme arasındaki farkı ifade ettiklerini belirtilen çalışmada, aritmetik genellemeden cebirsel genellemeye geçiş ve mevcut olan değişkenler açısından bir farkındalık oluşturduğu ifade edilmiştir.

Centella (2023) üçüncü sınıf öğrencilerinin fonksiyonel düşünme becerilerini erken cebir yaklaşımıyla incelediği çalışmasında, ilkokul üçüncü sınıf öğrencilerinin $i(m)= 3m+2$ gibi bir ifadeye yönelik çözüm stratejilerini, değişkenlerin kullanımını ve ilişkilerin fark edilirliğini fonksiyonel düşünme bağlamında incelemiştir. Çalışmada nitel araştırma deseni kullanılmıştır. Katılımcıları İspanya'da bir devlet okulunda okuyan 11 üç üncü sınıf (8-9) yaşında olan öğrencilerdir. Çalışmada öğrencilerin aritmetik becerilerinin yüksek olduğu vurgulanmaktadır. Örneğin 48x25 işlemini hızlıca yapabilecek durumda oldukları belirtilmektedir. Veri analizinde öğrencilerin oturumlar boyunca doldurdukları cevap kağıtları ve bu sırada araştırmacıların aldıkları notlar incelenmiştir. Öğrencilerin problem çözme sürecinde genelleme düzeylerinin ön plana çıktığı çalışmada öğrencilerin genellemelerinin sayısal, sözel ve görsel açıdan incelendiği görülmektedir. Elde edilen sonuçlar ışığında genelleme probleminin fonksiyonel ilişkisinin resim temsillerinin büyük önem taşıdığı görülmekte bunun cebirsel düşünme bağlamında dinamizm oluşturduğu ifade edilmektedir. Bu noktada cebirsel düşünmenin ön plana çıkması ve fonksiyonel ilişkilerin tanımlanabilmesi için öğrencilere basit ve tanıdık formlar kullanılarak yakın ve belirli adımlardan uzak ve belirsiz adımlara doğru fonksiyonel ilişkileri yapılandırılması gerektiği önerilmektedir.

Utami, Prabawanto ve Suryadi (2023) tarafından yapılan çalışmada, ortaokul öğrencilerinin örüntüleri incelerken fonksiyonel düşünmeyi nasıl kullandıkları örnek matematiksel problemler yardımıyla incelenirken ve öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri kullanarak genellemeyi sembolize etme becerilerinin nasıl olduğu araştırılmıştır. Araştırma kapsamında Endonezya'da bulunan 39 dokuzuncu sınıf öğrencisi (13-14 yaş) ile görüşme ve test çalışmaları yapılmıştır. Verilerin analizinde nitel bir veri analiz yazılımı olan ATLAS.ti kullanılarak bir analiz süreci gerçekleştirmiştir. Çalışmanın sonuçlarında öğrencilerin bağımlı değişkendeki değişime odaklanmadıkları, bağımlı değişkeni öz yinelemeli olarak bir önceki değeri ile toplamaları gibi farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanında bazı öğrencilerin örüntüyü tanımasına rağmen oluşturdukları kuralın örüntü ile bağdaşmaması gibi sonuçlar da dikkat çekmektedir.

1.6. Sınırlılıklar

Bu araştırma, 2021-2022 eğitim-öğretim yılı bahar dönemi, araştırma okulları ve bu okullarda öğrenim gören bazı beşinci sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.

1.7. Tanımlar

Cebir: Karmaşık matematiksel fikirlerin kısa -öz biçimde ifade edilip ilişkilerin analiz edilmesini sağlayan sembolik notasyonların kullanıldığı bir araçtır (NTCM,2000).

Cebirsel Düşünme: Cebirsel düşünme semboller vb. cebirsel araçları kullanarak sistematik genellemeler yapabilme ve anlamlandırabilmedir (Kaput, 2008, s.29)

Erken Cebir: Araştırmacıların ilkokul ve anaokulu öğrencilerinin aritmetikteki deneyimleri yardımıyla cebire temel oluşturmaları ve cebirsel düşünmelerini yapılandırmalarıdır (Kieran,1991; Blanton vd, 2016).

2. YÖNTEM

2.1. Araştırma Modeli

Bu çalışmada 5. sınıf öğrencilerinin cebir öncesi dönemde cebirsel düşünme bileşenlerine ait düşünme süreçlerini incelemek amacıyla verilerin toplanması, analiz edilmesi ve yorumlanmasında temel nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Temel nitel araştırmalarda amaç, bireylerin öğrenmelerini nasıl inşa ettiklerini ve deneyimlerine bağlı olarak nasıl yapılandırdıklarını anlamaktır (Merriam ve Tisdell, 2015, s .24). Bunun yanında veriler analiz edilirken tematik analiz yöntemi kullanılmış, elde edilen veriler kodlara ayrılmıştır. Araştırmada formal cebir öncesi dönemde yer alan öğrencilerin görüşme sorularına verecekleri yanıtlar incelenerek cebirsel düşünme süreçleri araştırmanın kavramsal çerçevesi doğrultusunda ortaya çıkarılmıştır

2.2. Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını Iğdır ilinin Tuzluca İlçesinde bulunan devlet okullarında öğrenim gören 5. sınıf düzeylerinde okuyan öğrencilerden oluşturmaktadır. Katılımcıların seçiminde, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır. Ölçüt örnekleme, araştırmacı tarafından önceden belirlenen ölçütleri karşılayan tüm durumların araştırılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Katılımcıların seçiminde kullanılacak ölçüt ise öğrencilerin düşük, orta ve yüksek başarı düzeylerine sahip olmalarıdır. Bu bağlamda araştırma için akademik başarı düzeylerine göre öğretmen görüşü ve ders notları dikkate alınarak düşük-orta-yüksek başarı durumlarına göre ikişer öğrenci seçilerek toplamda altı öğrenci ile çalışılmıştır. Akademik performans düzeyi yüksek öğrencilerin not ortalaması 85'ten büyük, akademik performans düzeyi orta olan öğrencilerin not ortalaması 70-85 aralığında ve akademik performans düzeyi düşük öğrenciler ise 70 puana kadar olmak üzere belirlenmiştir. Öğrencilerin seçiminde matematik öğretmenlerinden de destek alınmıştır. Ayrıca katılımcıların seçiminde gönüllülük esas alınmış, öğrencilerin kendilerinden ve ailelerinden gerekli izinler alınmıştır.

Öğrencilerin akademik performans düzeyi ve cinsiyet dağılımları Tablo 2.1 ile aşağıda belirtilmiştir:

Tablo 2.1. *Araştırmaya katılan öğrencilerin akademik performans düzeyi ve cinsiyetlerinin dağılımı ile çalışmada kullanılan kodları*

Cinsiyet/ Akademik Performans Düzeyi	Yüksek (85^+ p)	Orta (85-70 p)	Düşük (70^- p)
Kız	K1(YDP)	K2 (ODP)	K3 (DDP)
Erkek	E1 (YDP)	E2 (ODP)	E3 (DDP)

2.3. Verilerin Toplanması ve Veri Toplama Aracı

Araştırmada 5. sınıf düzeyindeki öğrencilerin cebirsel düşünme bileşenlerine sahip olup olmadıkları ya da nasıl sahip oldukları inceleneceğinden, araştırma verileri klinik görüşmeler aracılığıyla toplanmıştır. Klinik görüşme, bir konu veya soru üzerine derinlemesine bilgi elde etmek amacıyla belirli çerçevede ilgili kişilerden veri elde etme olarak nitelendirilebilir (Büyüköztürk vd, 2019, 158). Klinik görüşmeler gerçekleştirilmeden önce klinik görüşme sorularından oluşan veri toplama aracı hazırlanmıştır. Klinik görüşmeler yapılandırılırken Goldin (2000)' in klinik görüşmelere dair belirttiği ilkeler göz önünde bulundurulmuştur. Klinik görüşme soruları hazırlanırken ise araştırmanın kavramsal çerçevesi kapsamında yer alan bileşenler dikkate alınarak, çeşitli araştırmalar ve ders kitaplarından da yararlanılmıştır. Bu kapsamda Ralston (2013); Strachota, (2018); Tanışlı (2008); Van de Walle vd, (2021)'nin çalışmalarından yararlanılarak sorular hazırlanmıştır. Hazırlanacak veri toplama aracı alanında uzman matematik eğitimcisine sunulmuş, daha sonra uzman görüşü alınan sorularla orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci üzerinde pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma kapsamında seçilecek öğrenciler için de izin süreci diğer katılımcılarda olduğu gibi işletilmiştir. Pilot çalışma incelendikten sonra ortaya çıkan veriler analiz edilerek, asıl çalışma yapılandırılmıştır. Klinik görüşme soruları Ek 2 ile sunulmuştur. Klinik görüşme soruları kategorilerine göre Tablo 2.2 ile verilmiştir.

Tablo 2.2 *Klinik görüşme soruları ve kategorileri*

Aritmetiğin Genellenmesi	Temel İşlem Özellikleri	İşlem Özellikleri	1-2. Soru
		Temel Özelliklerden Elde Edilen Varsayımlar	2-6. Soru
		Tek ve Çift Sayılar	7. Soru
	Sembollerin Anlamı	Eşit İşaretinin Anlamı	8-9. Soru
		Bilinmeyen ve Değişen Nicelik	10-13. Soru
		İlişkisel Düşünme	14. Soru
	Nicel İlişkiler	Niceliksel Muhakeme	15-16-19. Soru
Fonksiyonel Düşünme	Örüntü Genelleme ve Fonksiyonel İlişki		17-18. Soru

2.3.1. Klinik Görüşme

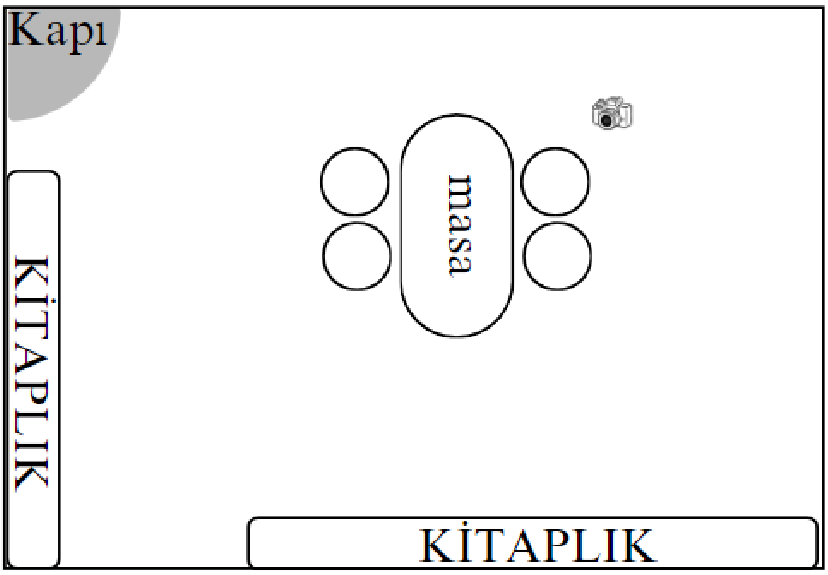
Çocuklar öz ellikle 11 -12 yaşlarına ulaşmaya başladıklarında iletişimsel yeterlilikleri, bilişsel becerileri ve sosyal duygusal işlevleri belirgin bir şekilde gelişmeye başlar; bu ilerlemeler klinik görüşmelere katılma becerisini büyük ölçüde geliştirir (McConaughy, 2013, s .21). Özellikle matematik dersi bağlamında düşünüldüğünde bu dönemde öğrencilerin Piaget'in "somut işlemlerden soyut döneme geçişi" öğrencilerin eşitliğin korunumu, ters işlem vb. gibi durumları kavramasını ve bu durumların sorgulanabilirliğini sağlar.

Klinik görüşmeler nitel araştırmalarda bireyin düşüncelerini derinlemesine analiz edilebilmesi için en sık kullanılan yöntemlerden bir tanesidir. Sattler (1998) e göre klinik görüşme aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Klinik görüşmenin belirli bir amacı vardır.

- Görüşmeyi yapan kişi tartışmanın konularını veya kapsamını belirlemektedir.
- Görüşmeyi yapan ve görüşülen kişinin belirli görevleri vardır, görüşmeyi yapan kişi sorular sorar, görüşülen kişi ise sorulara yanıt verir.
- Görüşmeci, konuşmanın akışını yönlendirmek için soru sorma tekniklerini ve diğer stratejileri aktif kullanır.
- Görüşmeci, görüşülen kişinin duygu ifadelerini ve gerçek bilgileri, yargılamadan kabul eder.
- Görüşmeyi yapan kişi bazen sıradan bir konuşmada belirtilmeden bırakılabilecek şeyleri açıkça ifade etmelidir, bu görüşmedeki en ince noktaları bile aydınlatabilmek için önemlidir.
- Görüşmeyi yapan kişi bilgilerin gizliliğine dikkat eder klinik görüşmeler resmi süreçlerden geçer.

Araştırmada erken cebir döneminde öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin nasıl olduğu, problem durumlarında düşünme biçimlerinin ortaya çıkarıp derinlemesine inceleme yapılabilmesi için klinik görüşme yapılmıştır. Klinik görüşmeler kayıt altına alınarak okul yöneticileri ile belirlenen zamanlarda gerçekleştirilmiştir. Şekil 2.1 ile klinik görüşme ortamı verilmiştir.



Şekil 2.1. *Klinik görüşme ortamı*

2.3.2. Video Kayıtları ve araştırmacı notları

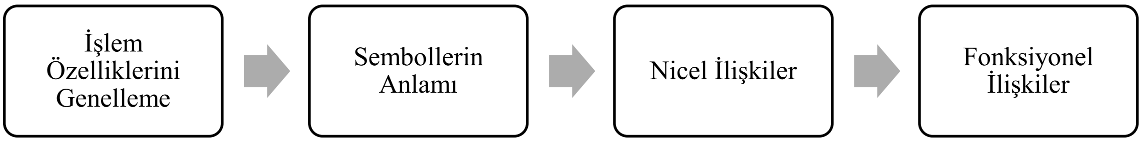
Araştırmada katılımcılar ile yapılan görüşmelerde gerekli izinler alınarak, görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Video kayıtları araştırmacının daha çalışmadaki verileri yeniden gözden geçirmesine yardımcı olan hatta bazen görüşme esnasında dikkat edilemeyen verileri ortaya çıkarmaya yardımcı olur. Çalışmada yer alan kayıtlar deşifre edilirken defalarca incelenmiş ulaşılabilecek maksimum veriye ulaşılmaya çalışılmıştır. Araştırma süresince yapılan görüşmeler pilot çalışma kapsamında görüşmeler dahil toplamda 648 dakika 32 saniye sürmüştür.

Araştırmada görüşmeler esnasında veya daha farklı zamanlarda araştırmacının çalışma ile alakalı durumları planladığı ya da görüşme esnasında var olan sorulara ek olarak görüşme akışında olmak suretiyle araştırmacının aldığı notlar bulunmaktadır. Bu notlar öğrencinin verdiği yanıtları analiz etmede kullanılırken aynı zamanda yarı yapılandırılmış görüşmenin derinleştirilmesine yardımcı olacak şekilde organize edilmiştir.

2.3.3. Pilot çalışma

Klinik görüşmelerin etkili olabilmesinin için önemli unsurlardan bir tanesi de pilot çalışmadır; pilot çalışmanın dikkatli uygulanması, araştırmacının konu ile ilgili eğitimi ve yanıtların uygun şekilde kodlanması gerekir (Cohen, Manion, Morrison, 2002, s.138) Buradan hareketle çalışmanın amacına ulaşması için pilot çalışmanın etkili bir şekilde yapılması gerektiği sonucuna varılabilir. Bu çalışmada da klinik görüşme ön görüşme formunda yer alan sorular, katılımcılardan bir tanesi ile birkaç oturum olacak şekilde incelenmiştir. Yapılan çalışmada ilk aşamada soruların sıralamasının değiştirilmesi gerektiği görülmüştür. Bunun yanında sorularda yer alan ifadelerin öğrencilerde görüşme sorularından bağımsız olarak bir önyargı oluşturduğu fark edilmiş bu nedenle soru ifadeleri sadeleştirilmiş ve araştırmacının formunda yer almıştır. Görüşme esnasında öğrencilere sorular araştırmacı tarafından sunulmuştur. Bazı sorularda yer alan sembol ve işaretlerin öğrencide kafa karışıklığı oluşturduğu görülmüş, semboller ve işaretler daha net ifadelerle belirtilerek sadeleştirilmiş şekilde görüşme formuna eklenmiştir. Ortalama çalışma süreleri yapılan pilot görüşme sonrasında iki oturum olacak şekilde planlanmıştır.

Oturumlar 25-40 dakika arasında planlanmıştır. Pilot çalışma yapıldıktan sonra görüşme formunda yer alan soruların sıralaması Şekil 2.2 ile verilmiştir.



Şekil 2.2. *Pilot çalışmadan sonra görüşme formundaki soruların sıralanışı*

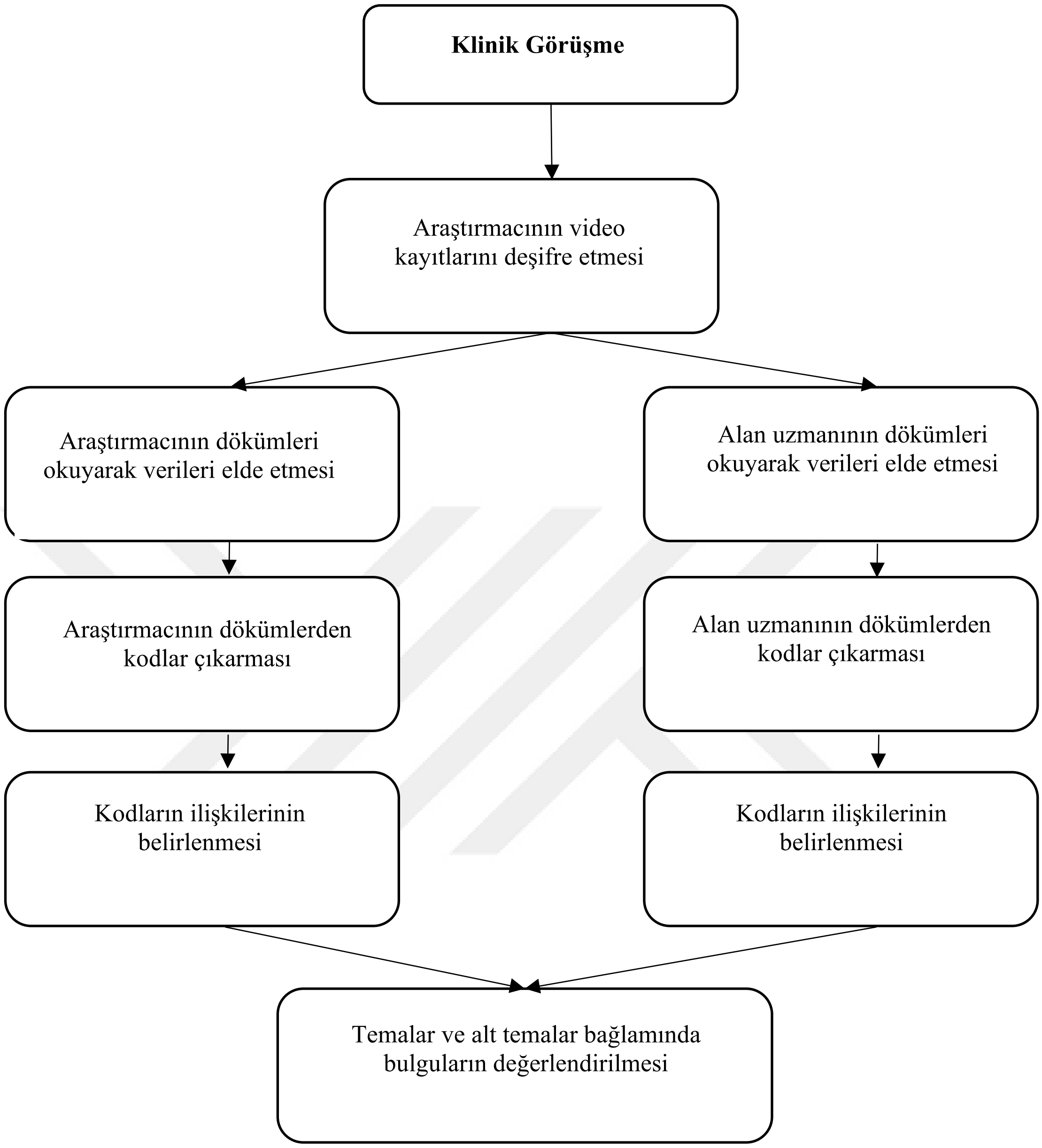
Pilot çalışmadan sonra son halini alan görüşme formu kullanılarak öğrencilerle görüşmeler yapılmıştır.

2.4. Verilerin Analizi ve Kodlama Güvenirliği

Verilerin analizinde tematik analiz kullanılmıştır. Tematik analizde temel amaç konu alınan durumun tanımlanması, analiz edilmesi bu tanımları oluşturan grupların algı, deneyim ve tutumlarının grubun bakış açısıyla aktarılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s.69). Şekil 2.3 ile verilerin toplanması, analiz edilmesi ve temalara ayrılarak analiz edilme aşamalarına yer verilmiştir.

Analiz sürecinde araştırma kapsamında alanyazın incelemesiyle oluşturulan cebirsel düşünme bileşenlerinin yer aldığı kavramsal çerçeve dikkate alınmıştır. Cebirsel düşünme bileşenlerine ait tema, alt tema ve kodlar Tablo 1.2, 1.3 ve 1.4'te sunulan temel bileşenler ve süreç bileşenlerine göre yapılandırılmıştır.

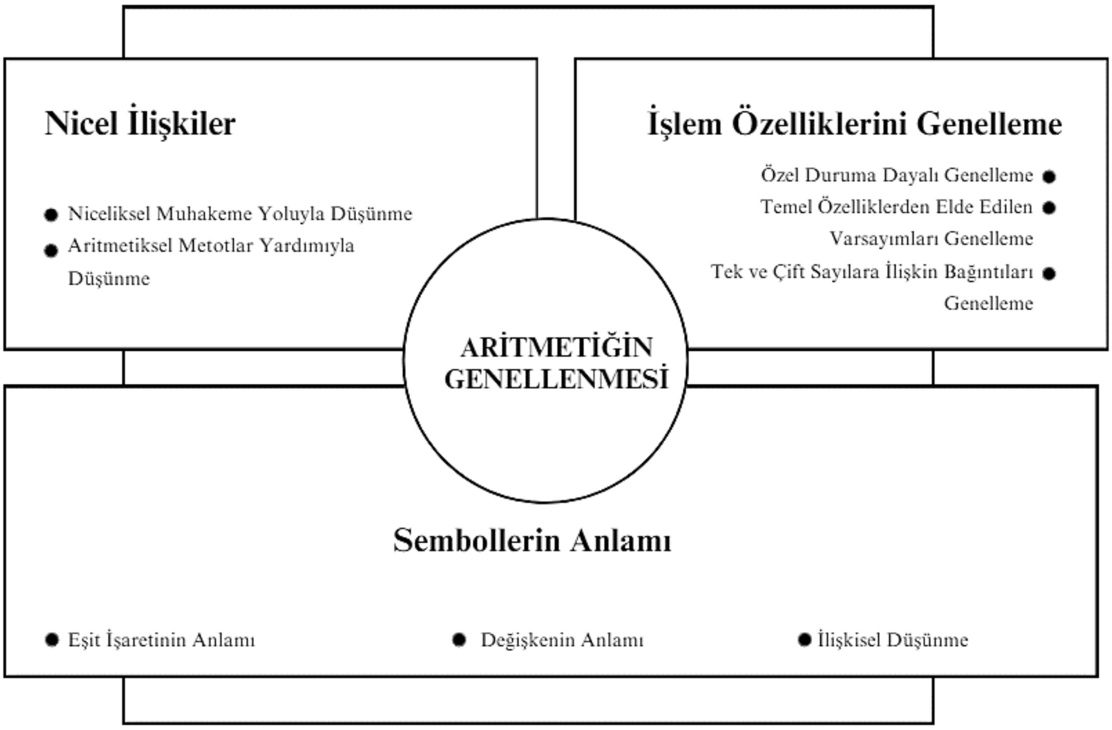
Araştırmanın analiz süreci bir matematik eğitimci ile araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Bağımsız olarak kodlama yapan araştırmacılar, bir araya gelerek tartışmış ve kodlar üzerinde uzlaşmıştır.



Şekil 2.3 *Araştırma verilerinin ortaya çıkarılması ve çözümlenmesi şeması*

Araştırmanın analiz süreci bir matematik eğitimci ile araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Bağımsız olarak kodlama yapan araştırmacılar, bir a raya g elerek tartışmış ve kodlar üzerinde uzlaşmıştır.

Bulgular aritmetiğin genellenmesi ve fonksiyonel düşünme olmak üzere iki ana tema üzerine düzenlenmiştir. Aritmetiği genelleme bağlamında işlem özelliklerini genelleme, sembollerin anlamı ve nicel ilişkiler olmak üzere üç alt temaya ayrılmıştır.



Şekil 2.4 *Aritmetiğin genellenmesi bağlamında oluşturulan alt temalar*

Şekil 2.4 ile aritmetiğin genellenmesine yönelik temalar verilmiştir. Verilen temaların alt temalarına ve alt temalarda yer alan kodlara Şekil 2.5 ile değinilmektedir.

ARİTMETİĞİ GENELLENMESİ	**İşlem Özelliklerini Genelleme**	Özel Duruma Dayalı Genelleme	Tüm Durumlara Dayalı İşlem Yapmaya Dayalı Bir Özelliğe veya Bir işleme Dayalı
		Temel Özelliklerden Elde Edilen Varsayımları Genelleme	İşlem Yapmaya Dayalı Bir Özelliğe veya Bir İşleme Dayalı Tüm Durumlara Dayalı
		Tek ve Çift Sayılara İlişkin Bağıntıları Genelleme	Rastgele Örnek Verme Özel Örnek Verme
	Sembollerin Anlamı	Eşit İşaretinin Anlamı	Sembolü Tanıma ve Eşitlik Korunumu •İşlem Sonucu •Eş Değerlik
		Değişkenin Anlamı	Değişen Nicelik Anlamlandıramama Bilinmeyen
		İlişkisel Düşünme	Belirli İşlemlerde Sayılar Arası ilişki Kurma İşlem Yapma İşlem Özelliklerini Kullanma
	Nicel İlişkiler	Niceliksel Muhakeme Yoluyla Düşünme	Nicelikleri Toplamsal Olarak Karşılaştırma
		Aritmetiksel Metotlar Yardımıyla Düşünme	Çizim Yapma Sözel İfade Etme Sayı Değerleri Atama
FONKSİYONEL DÜŞÜNME	**Varyasyonel Düşünme**	Yinelemeli Özel	
	Kovaryasyans Düşünme	Karşılıklı Değişim	
		Fonksiyonel İlişki	Sayısal •Toplamsal İlişki •Çarpımsal İlişki
			Sözel Görsel •Kelimelerle Ortaya Çıkan

Şekil 2.5. *Temalar, alt temalar ve kodlar*

Tablo 2.3 ile aritmetiği genelleme bağlamında sorulan sorulardan bir tanesi örnek olarak sunulmuş ve verilerin nasıl analiz edildiği bu örnek üzerinden açıklanmıştır.

Tablo 2.3. *Aritmetiği genelleme bağlamında sorulan örnek soru*

63□48=48□63
a) Yukarıda verilen ifadede □ sembolü yerine dört işlemden (+, −, · ,÷) hangisi veya hangileri gelebilir? Neden? Açıklayınız.
b) Yukarıdaki ifadede doğru olarak düşündüğünüz işlem/işlemler için benzer yapıda iki örnek yazınız.
c) Yukarıdaki örnekleri inceleyiniz. Keşfettiğiniz ilişkiyi ifade ediniz.

Öğrencilerle yapılan görüşmeler yazıya geçirilmiş ve verdikleri cevaplar incelenmiştir. Örneğin K2 (ODP)'nin verdiği cevaplar incelendiğinde

K2: Mesela bunları toplasam? Toplayayım mı?

K2: 124 olur. Burası da 124 olur.

A: Peki çıkarırsan?

K2: Bir saniye kafam karıştı.

K2: 24 olmaz mı?

K2: Çıkmaz ki.

K2: 48'den 76 çıkmaz.

A: Ama sanki az önce olabilir demiştin. Çıkarmada da aynı şey olabilir demiştin.

K2: Çıkarmada da aynı şey … aaa evet. Şimdi fark ettim çıkarmada olmaz o zaman.

A: Neden olmuyor sence?

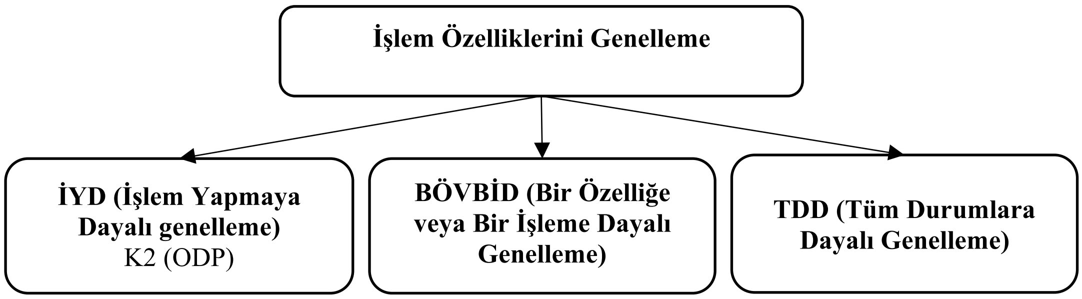
K2: Yani bu sayı bu sayıdan büyük olduğu için.

A: Peki diğer işlemlerde olur mu?

K2: Evet.

…

K2'nin verdiği yanıtlar göz önüne alındığında verilen ifadede yer alan boşluğa tüm işlemleri yerleştirdikten sonra sonuçlarını hesapladığı görülmektedir. Karşılaştığı soruda önce toplama yaparak eşitliğin sağlandığını kontrol etmekte, çıkarma için sorulduğunda yine emin olamayıp tekrar işlem yapmayı seçmektedir. Bu süreç tüm işlemler için aynı şekilde devam etmektedir. Bu nedenle K2'nin verdiği cevaplar neticesinde K2'nin bir varsayımda bulunabilmek için işlem yapma gereksinimi duyduğu sonucuna varılmıştır. Şekil 2. 6. ile öğrenci cevaplarının analiz edilmesi sonucu temel işlem özelliklerini genelleme bağlamında ortaya çıkan kodlar belirtilmiştir.



Şekil 2.6. *K2 (ODP)'nin cevabının kategorize edilmesi*

Şekil 2.6. ile öğrencilerden akademik düzey olarak öğretmen görüşüne ve okul not ortalamalarına göre ortalama performans gösteren K2'nin işlem yapmayı temele alarak genellemelere ulaşmaya çalışmasının kategorize edilmiş hali yer almaktadır.

Benzer şekilde fonksiyonel düşünme bağlamında sorulan sorulardan bir tanesi de Tablo 2.4 ile aşağıda verilmiştir.

Tablo 2.4 *Fonksiyonel düşünme bağlamında sorulan örnek soru*

Ahmet usta bir sitenin bahçesine bir yürüyüş alanı yapmayı planlamaktadır. Tasarımını yaparken şekilde görüldüğü gibi yürüyüş alanına kare şeklinde fayanslar döşeyecektir. Ahmet usta yürüyüş alanı büyüdükçe kullanılacak fayans sayılarını hesaplamak istemektedir. Ahmet ustaya yardımcı olalım ve istenilen soruları yanıtlayalım.

a) Şekilde verilen fayanslar her adımda nasıl büyüyor? Açıklar mısınız?

b) 5. Adımı nasıl çizmek istersen nasıl çizebilirsiniz?

c) Aşağıdaki tabloyu doldurarak 10. ve 37. Adımlardaki fayans sayıları nasıl bulabilirsiniz? Açıklar mısınız?

Adım sayısı	**Fayans sayısı**
1	
2	
3	
4	
5	
10	
37	

d) Herhangi bir adımda fayans sayısını bulmak için bir kural söyleyebilir misiniz?

e) Kural her zaman işe yarar mı?

f) Örüntünün nasıl büyüdüğünün açıklanmasının farklı yolları var mı?

Tablo 2.4 öğrenciye sunulduktan sonra öğrencilerin verdikleri yanıtlar incelenmiştir. Yapılan pilot görüşmelerde sorulardaki alt soru bölümleri sorunun çok uzun olmasına neden olduğu ve öğrencinin bir ön yargı geliştirmesine neden olduğu gerekçesiyle kaldırıldıktan sonra çalışma içinde araştırmacı tarafından sorulan alt sorular olarak araştırmacının formunda yer almıştır. Öğrencilerden K1 (YDP) ile yapılan görüşmeden bir kesit aşağıda verilmiştir.

> K1: Önce 10. Adımda kaç tane olduğunu, kaç tanesinin dikey kaç tanesinin yatay olduğunu bulurdum.
>
> A: Peki 10. Adımda kaç tane olduğunu nasıl bulursun?
>
> K1: 4. Adım 14 tane olduğuna göre ona göre eklerdim.
>
> A: Peki önce 10. Adımı çizmeni isteselerdi?
>
> K1: Öyle de yaparım. Adımları belli zaten.
>
> A: Belli bir kuralı var mı bu çizimin? Yani şu anda sen ilk 4 adımı biliyorsun. 5, 6, 76 8'i bulmadan doğrudan 10. Adımı bulabilir misin?
>
> K1: Aynı 4. Adıma 18 tane fazla eklerim.
>
> A: Neden 18?
>
> K1: 3 tane arttığı için… 3 kere 6.

K1(YDP)'in verdiği cevaplar incelendiğinde öğrencinin öncelikle örüntüyü fark ettiği herhangi adımı özel olarak örnekleyebildiği için özel yinelemeli düzeyinde görüşünü ifade ettiği görülmüştür. Ardından K1 soruda adımlar arasındaki değişimi tüm örüntüye genelleyerek ifade ettiğinde K1' in aynı zamanda yinelemeli genel düzeyinde olduğunu gösterir. İlerleyen bölümde K1 tablo ve temsilleri doldurmaya başlar. Bu noktada nicelikleri tanıyıp karşılıklı değişim düzeyine ulaşma durumu gözlenmiştir. Tablo temsillerini başarılı bir şekilde ifade ettikten sonra öğrenciden nicelikleri anlamlandırması ve uzak adımlara yönelik düşünceleri sorularak öğrencinin kovaryans düşünme düzeyine dair ipuçları aranmıştır. Öğrenci tablo temsillerin verdikten sonra toplamsal ve çarpımsal ilişkileri kullanarak uzak adımlarda olduğunu verdiği cevaplar ile ifade etmiştir. Ancak öğrenciden bu örüntüye dair bir kural istendiğinde veya araştırmacı tarafından "*Peki, adım sayısıyla fayans sayısı arasında bir ilişki görüyor musun?"* sorusu sorulduğunda bir ilişki ifade edemediği için gelişmiş fonksiyonel düşünme düzeylerine ulaşamadığı gözlenmiştir. Bu noktada öğrencinin soruyu incelerken sözel görsel veya sayısal olarak gösterdiği yaklaşım incelenmiştir. Öğrencinin sözel olarak anlamlandırması, sözel olarak ifade etmesi, görsel olarak anlamlandırması, görsel olarak ifade etmesi, sözel kural tanımlaması veya sözel olarak ifade edebildiği durumu semboller veya şekiller yardımıyla ifade etmesi fonksiyonel düşünme bağlamında alanyazında da yer alan ifadeler doğrultusunda incelenmiş ve öğrencinin düzeyi bu şekilde tespit edilmiştir.

2.5. Araştırmacının Rolü

Araştırmacılar, nitel araştırma sürecinde aktif rol alarak katılımcıların görüşme esnasındaki tüm hareketlerini gözlemler. Verileri ortaya çıkarıp analiz etme aşamasında ise görüşmeler esnasında elde ettiği bilgileri görüşme esnasındaki gözlemleriyle birleştirir ve analizinde kullanır (Yıldırım ve Şimşek, 2006).

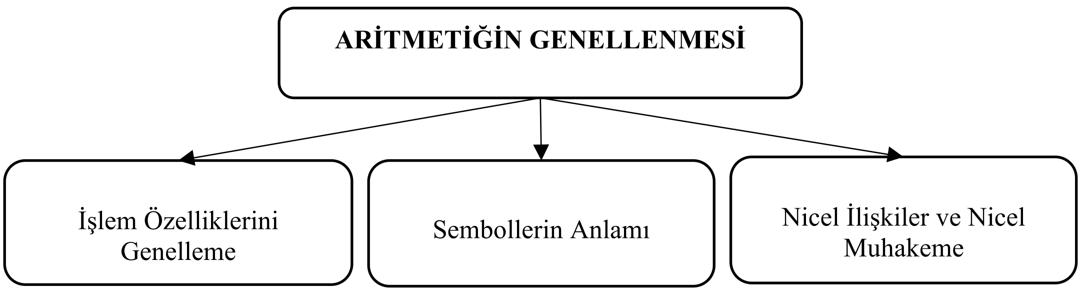
Araştırmacı, çalışma sırasında katılımcıları öğretmen görüşüne ve öğrenci başarısına göre belirledikten sonra görüşmeler esnasında, tarafsız bir şekilde katılımcıları gözlemleyerek, katılımcılardan veri elde etmeye çalışmış ve bunları bulgularda sunmuştur. Araştırmacının Bilimsel Araştırma Yöntemleri, İstatistik ve Bilim Etiği dersleri araştırma sürecinde klinik görüşme gerçekleştirebilmesine, verileri ortaya çıkarmasına ve uzman desteği ile verileri analiz edebilmesine olanak tanımıştır.

3. BULGULAR

Araştırmanın bu bölümünde bulgular erken cebir dönemde bulunan ortaokul 5. sınıf öğrencilerin cebirsel düşünmenin temel bileşenleri olan aritmetiğin genellenmesi ve fonksiyonel düşünme başlıkları altında sunulmuştur.

3.1. Aritmetiğin Genellenmesi

Aritmetiğin genellenmesine ilişkin bulgular Şekil 3.1 ile sunulmuştur.



Şekil 3.1. *Aritmetiğin genellemesi ve alt kategoriler*

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi aritmetiğin genellenmesi; işlem özelliklerini genelleme, sembollerin anlamı, nicel ilişkiler ve nicel muhakeme olmak üzere üç başlık altında incelenmiştir.

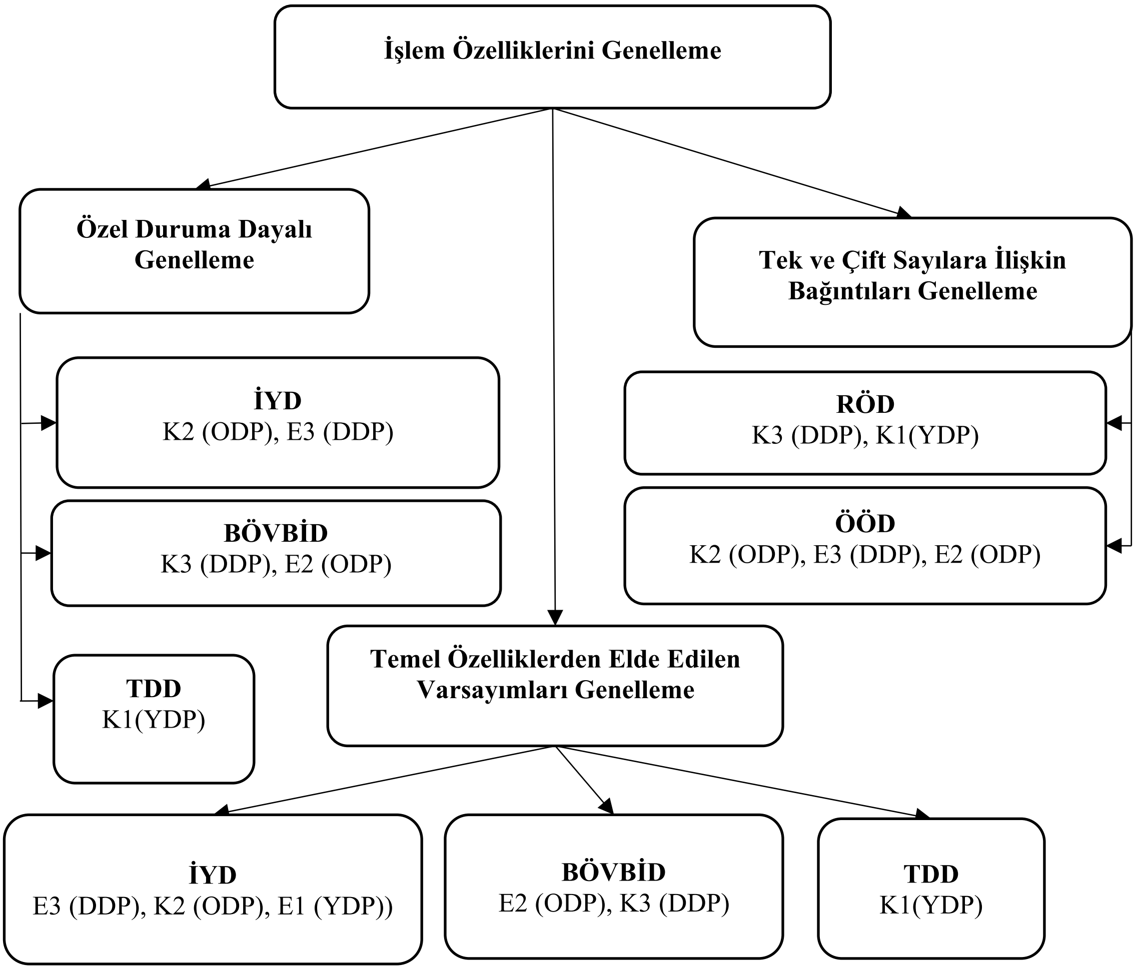
3.2. İşlem Özelliklerini Genelleme

İşlem özelliklerini genelleme sürecinde öğrencilerin Şekil 3.2.'de sunulduğu gibi özel durumlara dayalı genelleme, temel özelliklerden elde edilen varsayımları genelleme ve tek-çift sayılara ilişkin bağıntıları genelleme gibi üç farklı anlayış sergiledikleri görülmüştür.

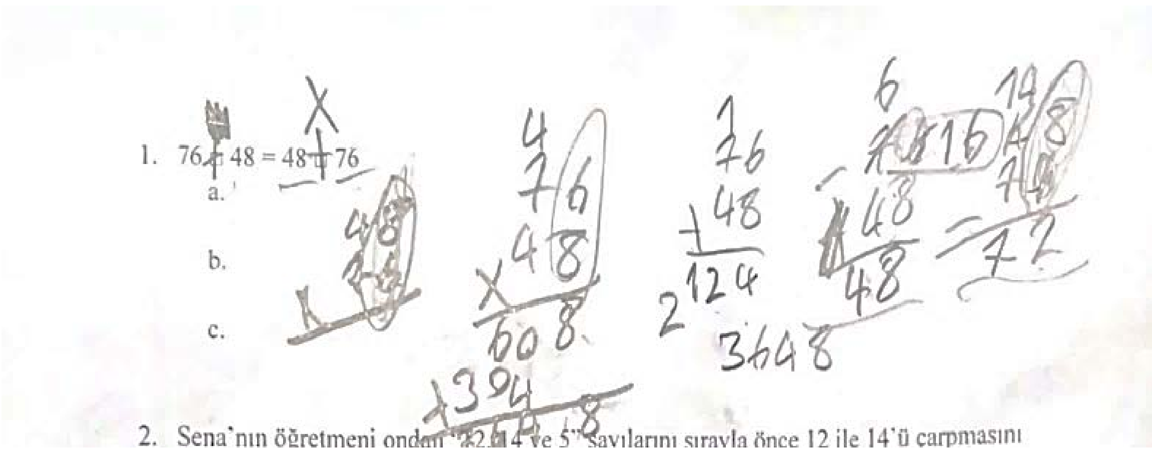
Temel özelliklerden elde edilen varsayımları genelleme bölümünde öğrencilerin işlem yaparak (İYD), bir özelliğe veya sadece bir işleme dayalı (BÖVBİD) ve tüm durumlara dayalı (TDD) karar verdikleri görülmüştür.

Şekil 3.2.'de görüldüğü gibi okul ortalamaları, öğrenci başarıları ve öğretmen görüşüne göre yüksek düzeyli performans gösteren öğrenciler (YDP), orta düzeyli performans gösteren öğrenciler (ODP), düşük düzeyli performans gösteren öğrenciler (DDP) olarak belirtilmiştir.

İşlem özelliklerini genelleme bağlamında sorulan sorularda ilk aşamada temel işlem özelliklerinden olan değişme, birleşme, ters eleman, etkisiz eleman gibi özelliklere yönelik öğrenci anlayışlarını göstermeyi amaçlayan sorular sorulmuştur. Değişme ve birleşme özelliğine yönelik anlayışları irdeleyen birinci soruya verilen cevaplar incelendiğinde özel durumlara dayalı genelleme yaparken öğrencilerden E3 (DDP) ve K2 (ODP)'nin işlem yaparak karar verdiği, K3 (DDP) ve E2 (ODP)'nin bir özelliğe dayalı karar verdiği görülmüştür. Öğrencilerden yüksek düzeyli performans gösteren K1(YDP)'in ise işlemlere göre özellikleri dikkate alarak tüm durumlara dayalı genellemeye vardığı ve yüksek düzeyli performans gösteren E1 (YDP)'in bir işleme dayalı genelleme yaptığı görülmüştür. Öğrencilerden E3 (DDP)'ün çalışma yaprağından örnek aşağıda Görsel 3.1.'de verilmiştir.



Şekil 3.2. *İşlem özelliklerini genelleme alt kategorisi ve oluşturulan kodların dağılımı*



Görsel 3.1. *E3 (DDP)'ün cevap kağıdı*

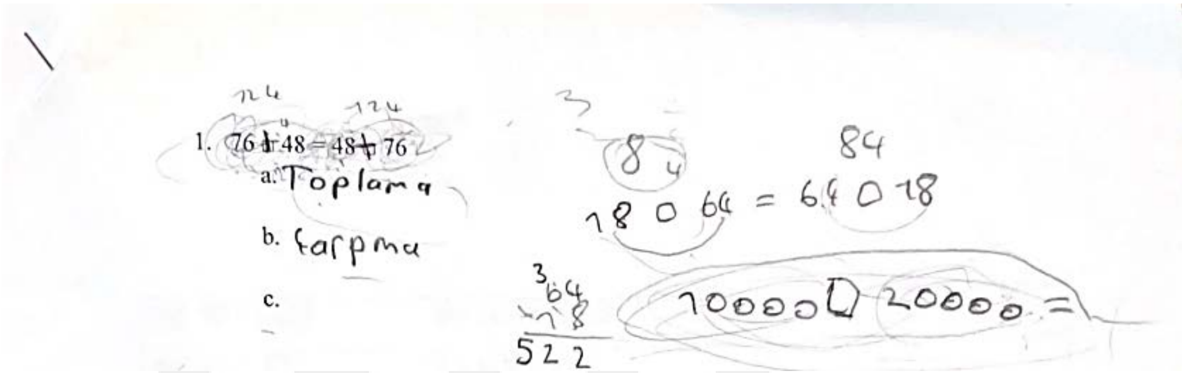
E3 (DDP)'ya 76 ☐ 48 = 48 ☐ 76 şeklinde verilen ifadede kutucuk ile gösterilen bölüme hangi işlem veya işlemlerin geleceği sorulduğunda akışta verilen diyalog ortaya çıkmıştır.

> E3: Toplama işlemi yapsak mesela. 76+48 (alt alta toplama yapıyor) 124. Diğer tarafı da yapsak aynı sonuç çıkacak.
>
> A: Neden?
>
> E3: Bu tarafta da sayıların yeri değişiyor sayılar aynı bir şey fark etmiyor.
>
> A: Başka hangi semboller gelebilir?
>
> E3: Çıkarma gelebilir sanırım. (Alt alta çıkarma yaparak deniyor) Az önce dediğim gibi burada da bir şey fark etmiyor ikisinin yerleri değişirse sonuç yine aynı olur.
>
> A: Neden?
>
> E3: Göstereyim mesela. Haa! Bu farklı oluyor mu! (İşlemlere devam ediyor) 78 olur çıkarmada olmuyormuş.
>
> A: Neden çıkarmada olmadı?
>
> E3: Çıkarmada çünkü, az önce elde almıştık yerleri değişti. 6, 8'den küçük olduğundan çıkarırken elde almıştım. Yerleri değişince 8, 6'dan büyük olduğundan değişti. Burada sonuç ondan dolayı farklı çıktı. Bir de çarpmaya bakalım. (İşlem yapıyor.) Diğer taraf için de yapalım. Bunda da farklı çıkar sanırım. Yapalım ama yine de.

E3 (DDP)'ün verdiği yanıt işlem yaparak karar verdiğini göstermektedir. Benzer şekilde K2 (ODP)'nin de çalışma kâğıdı incelendiğinde genellemelerini yaparken özel durumlardan yararlanarak genelleme yapmakta ve işleme bağlı kalarak genellemeye ulaşabilmektedir. Bu duruma ilişkin öğrenci ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda sunulmuştur.

> K2: Çıkarmada da aynı şey … aaa evet. Şimdi fark ettim çıkartma olmaz o zaman.
>
> K2: Neden olmuyor sence?
>
> K2: Yani bu sayı bu sayıdan büyük olduğu için.
>
> A: Peki diğer işlemlerde olur mu?
>
> K2: Evet.
>
> A: Mesela bölmede falan?
>
> K2: Bölmede de olmaz ama çarpma ile toplamada olur.

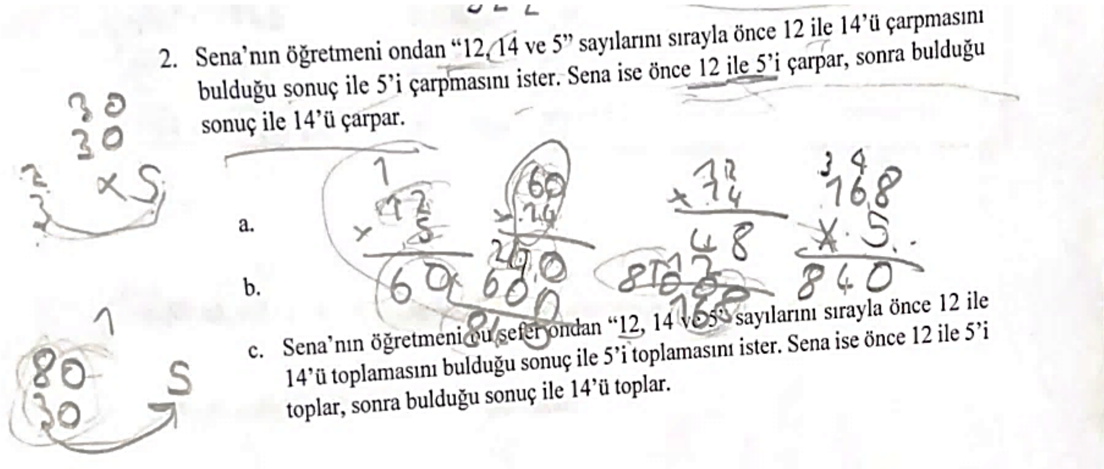
Ortalama performans gösteren E2 (ODP)'e neden sorusu sorulduğunda ise; "*Çünkü sayılar aynı. 48 ile 76; 76 ile 48.*" şeklinde ifade etmiştir. Her iki öğrencinin bu yanıtları değişme özelliğine dair birtakım bilgilerinin olduğunu ancak işlemden bağımsız sadece özelliğe dayalı genelleme yaptığını düşündürmektedir. K1(YDP)’e aynı soru sorulduğunda K1öncelikle sayıları incelemiş, ardından işlemler ile bağlantı kurmuş ve sonra farklı sayılar olduğunda nasıl bir durumla karşılaşacağına yönelik genellemede bulunmuştur. E1 (YDP)’in cevap kağıdında birinci soru ile ilgili verdiği cevap Görsel 3.2. ile verilmiştir.



Görsel 3.2. *E1 (YDP)’in cevap kağıdı*

Benzer şekilde E3 (DDP)’ün yaptığı işlemler sonucunda vardığı genellemenin bir benzerini d e E1 (YDP) gerçekleştirmiştir. E1 başlangıçta toplama işlemi ve çarpma işlemlerini denedikten sonra “*Diğer işlem sembolleri gelebilir mi?*” sorusuna “*Çıkarma gelebilir. Ha! Çıkarma gelemez çünkü 76 daha büyük.*” dedikten sonra sadece toplama ve çarpmada bu durumun geçerli olduğu sonucuna varmıştır.

Öğrencilere işlem özelliklerini genelleme bağlamında birleşme özelliğinin sorgulandığı bir diğer soruda verilen cevaplar incelendiğinde ise E3 (DDP), E1 ve K2 (ODP)’nin işlem yaparak karar verdiği, E2 (ODP)’nin diğer sorudan farklı olarak burada bir işleme dayalı karar verdiği, K3 (DDP)’ün bir özelliğe dayalı karar verdiği ancak; E1 (YDP)’in işlem yapmaya dayalı genellemeye ilerlerken bir işlem hatası yapması sonucunda herhangi bir genellemeye ulaşamadığı hatta bunun bir tesadüf olabileceğine dair düşüncelerinin olduğu görülmüştür. E1 (YDP)’in çalışma kağıdından bir örnek ve diyalog aşağıda sunulmuştur.



Görsel 3.3. *E1 (YDP)'in cevap kağıdı*

A: Sena da aynı sonucu bulmuş muhtemelen. Sence yöntemi doğru mu?

E1: Yanlış.

A: Her zaman böyle olmaz mı?

E1: Evet.

A: Sena'nın rastgele aynı sonucu bulduğunu mu düşünüyorsun?

E1: Evet çünkü olmaz öyle şey.

E1 (YDP) soru sorulduktan sonra Sena'nın yönteminin yanlış olduğunu belirtmiş ardından Görsel 3.3.'te görülen işlemleri yaptıktan sonra da bunun tesadüfen gerçekleşmiş olabileceği üzerine durmuştur. Herhangi bir genellemeye varmamıştır. E2 (ODP)'de birinci soruda özelliğe dayalı genelleme yaparken, aşağıdaki diyalogda görüldüğü gibi bu soruda sadece bir işleme dayalı genelleme yapmıştır.

A: Sena' nın yöntemi doğru mu yanlış mı?

E2: Yanlış.

…

A: Sena'nın öğretmeni 12, 14 ve 5'i sırayla toplamasını istiyor.

E2: AA hocam toplamada doğru oluyor. Her türlü doğru oluyor. Buraya 5 yazsam sonra 14 sonra 12 yazsam gene aynı olur. Tersten de yapsan düzden de yapsan olur.

Birinci soruda değişme özelliğinin farkında olan ve işlemlere göre doğru yorumlarda bulunan, akademik anlamda okul ortamında yüksek performans sergileyen

K1(YDP) ise, aşağıda sunulan diyalogda görüldüğü gibi birleşme özelliğini değişme özelliği ile ilişkilendirerek genellemeye varmıştır.

A: Neden?

K1: Çünkü çarpıyor ve sırası değiştiği için yine de bir şey fark etmez.

12 ile 14 ü çarptıktan sonra 5 ile çarpmak, yazarak mı yapsam acaba?

A: Söylediğinden emin değil misin?

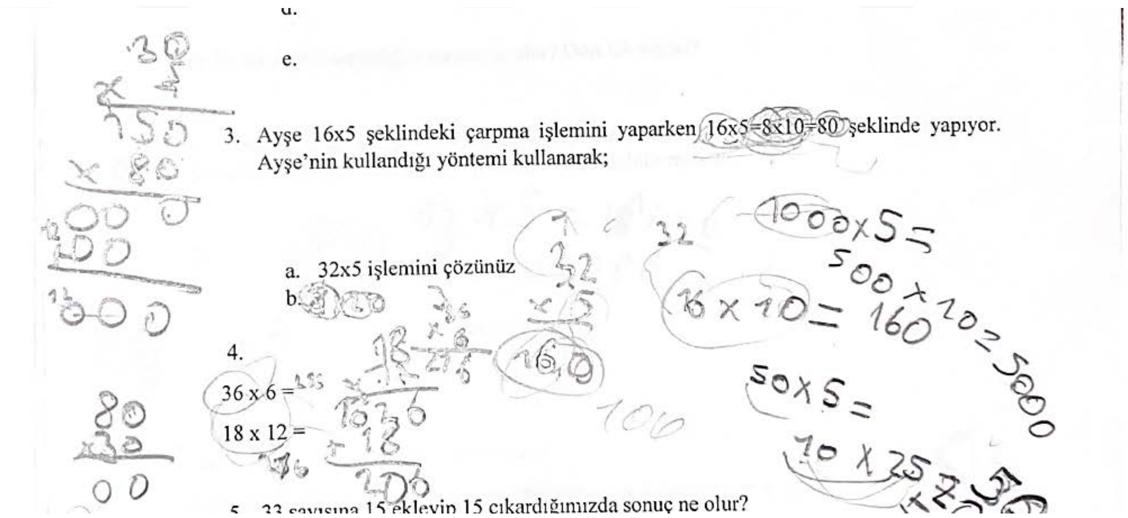
K1: Pek değilim ama… yazarak yapabilir miyim?

Benzer şekilde K3 (DDP) bu soruyu bir önceki soru ile bağdaştırıp *"Yani 12 ile 14'ü çarptıktan sonra 5'le çarpıyor. Bence doğru. Her türlü aynı sonuç çıkıyor."* cevabını vererek sonuçların aynı çıkacağını düşünmesine rağmen, *"Bilmiyorum. Belki olmayabilir şu an düşünemedim."* diyerek kararsızlığını yansıtmakta ve araştırmacının genelleme yapmasına yönelik sorduğu "*her zaman doğru olur mu, her sayı için geçerli olur mu?"* gibi sorularına "*İşlem yapayım mı?"* sorusunu sorarak cevap vermiştir.

Buna ek olarak birinci soruda işleme dayalı genelleme yapan öğrencilerden olan E3 (DDP) bu soruda bir önceki soruyu örnek göstererek zihninde sayıları çarptıktan sonra "*Burada çarpma ve toplamada yerleri değiştiği zaman yine aynı sonuç çıkıyor."* cevabını vermiştir. Bu noktada görüşme sürecinde değişme ve birleşme özelliklerini biraya getirerek ayırt etmeksizin salt bir özellik olduğu düşüncesini ortaya koymuştur. Cevabına binaen araştırmacı tarafından sorulan *"Sence burada yerleri mi değişti?"* sorusuna doğrudan *"evet yerleri değişti."* cevabını vermiştir.

Öğrencilere temel işlem özelliklerden elde ettikleri varsayımları genelleme bağlamında ilk iki soruya ek olarak dört adet soru (3., 4., 5., 6. sorular) sorulmuştur. Bu sorularda öğrencilerden işlemlere özgü olan özellikler ve işlemlerde sayılar arası ilişkiler ile ilgili cevaplar beklenmiştir. Verilen cevaplar incelendiğinde Şekil 3.2'de görüldüğü gibi, öğrencilerden işlem yapmaya dayalı (İYD), bir özelliğe veya bir işleme dayalı (BÖVBİD) ve tüm durumlara dayalı (TDD) karar verme gibi anlayışlarının olduğu görülmüştür. Bu sorularda farklı olarak dikkat çeken husus, bir önceki soruda tüm durumlara dayalı genelleme yapabilen K1(YDP)'in b u soruda tam anlamıyla tüm durumlara dayalı genelleme yapamaması olmuştur. K1(YDP), işlem yaparak bulduğu sonucu i ncelerken s orulan *"Neden sonuçlar aynı çıktı?"* sorusuna *"Sonuçların aynı olduğunu yeni fark ettim, sebebi burada yarısı fazla verilmiş yarısı eksik verilmiş"* cevabını vermiştir. Bu noktaya kadar olan kısımda öğrencinin işlem yapması dikkat çekerken, diğer yandan *“Her zaman doğru olur mu?”* sorusuna “*Eğer yarı yarıyaysa olabilir.*” cevabını vermesi, öğrencinin sadece ikinin katları ile olan ilişkiyi gözettiğini göstermektedir.

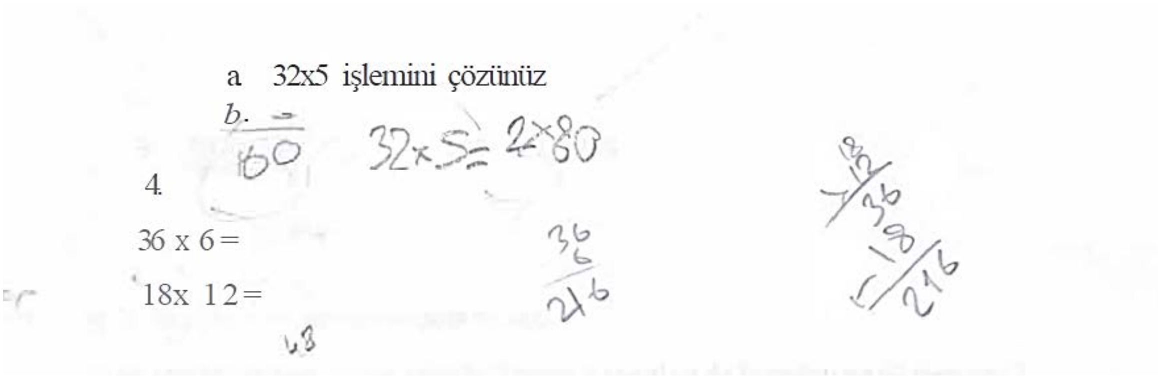
Sayılar arası ilişkileri kullanarak, ilişkisel düşünmeyi de içeren ifadelerin bulunduğu klinik görüşme formu üçüncü sorusunda E1 (YDP) soruyu gördükten sonra soruda kendisine verilen sayıları çarpmıştır. Verilen ifadede yer alan 32 x 5 ifadesinin sonucunu 160 olarak hesapladıktan sonra *“Hangi sayıları çarparsam, aynı sonuca ulaşırım?”* sorusuna cevap aramıştır.



Görsel 3.4. *E1 (YDP)’in cevap kağıdı*

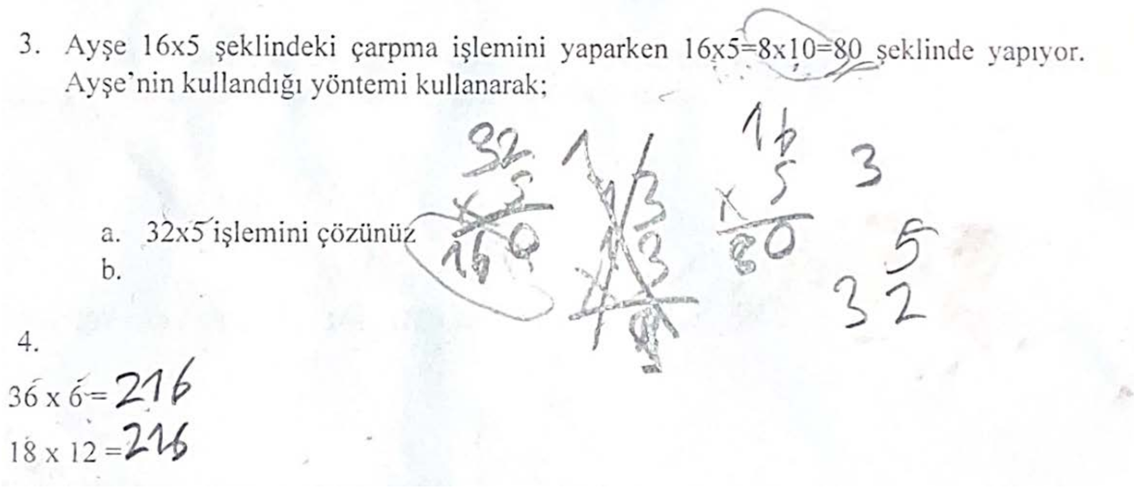
E1 (YDP) cevap kağıdında da görüldüğü üzere ifadenin sonucunu hesapladıktan sonra bu sonuca götüren sayı kombinasyonlarını hesaplamaya çalışmıştır; ancak bir müddet sonra *“(Sorudaki işlemi göstererek.) O bir tarafı 2’ye bölmüş, bir tarafı 2 ile çarpmış.”* diyerek sayılar arasındaki ilişkiyi fark ettiğini belirtmiştir. “*Peki sen de benzer bir örnek yapabilir misin?*” sorusuna “*500 x 10 = 1000 x 5*” örneğini vermiştir. Bunun üzerine araştırmacı “*her sayıda geçerli olur mu*?” sorusuna cevap olarak “*Hayır, olmaz. Çünkü bölünmeyen sayılar da var.*” diyerek her zaman bu durumun geçerli olmadığı belirtmiştir.

Aynı soruda K2 (ODP)’nin cevap kâğıdı incelendiğinde E1 (YDP) ile benzer şekilde verilen ifadenin sonucunu hesapladığı görülmektedir. K2 (ODP)’ye düşüncesi sorulduğunda; “ *Kaç ile kaçı çarparsam 160 olur? Diye düşünüyorum.”* cevabını vermiştir. K2 (ODP), E1’ten farklı olarak sayılar arasındaki ilişkiden bahsetmemiştir.


a 32x5 işlemini çözünüz
b. 160 32x5= 2x80
4.
36 x 6=
18x 12=

Görsel 3.5. *K2 (ODP)’nin cevap kâğıdı*

Diğer yandan önceki bölümlerde verilen sorularda işlem yapmaya dayalı (İYD) genelleme yapan E3 (DDP); “*Burada 16x5 e eşit bir şey bulmuş ben de çarparak 160’ a eşit bir sayı bulmaya çalıştım*” sözleri ile verilen ifadeyi çarptığını belirtmiştir. Diğer yandan K1(YDP) ve E1 (YDP)’in yöntemlerinden farklı olarak sayı kombinasyonlarını denemiştir. Örneğin K1(YDP) ifadenin sonucunu 160 bulduktan sonra *“10 ile kısa yoldan bölme”* yaptığını belirtmiştir. E3 (D DP)’ün düşüncesi bu anlamda farklılık göstermektedir.


3. Ayşe 16x5 şeklindeki çarpma işlemini yaparken 16x5=8x10=80 şeklinde yapıyor. Ayşe’nin kullandığı yöntemi kullanarak;
a. 32x5 işlemini çözünüz
b.
4.
36 x 6= 216
18 x 12 = 216

Görsel 3.6. *E3 (DDP)’ün cevap kâğıdı*

Benzer şekilde diğer sorularından farklı olarak K3 (DDP) bu soruda herhangi bir yöntem kullanarak çözüme ulaşmamış veya bir genellemeye varamamıştır. K3 (DDP)’ye düşüncesi sorulduğunda K3 (DDP); "*Şu an zihinden bunları çarpıyorum ki Ayşe'nin yaptığı gibi diğer sonucu bulayım*." şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir. Bu bölümde araştırmacı tarafından dikkat edilen diğer bir unsur öğrencinin "*zihnimden çarpma yapıyorum*" dedikten sonra işlemi yaparken, tıpkı kâğıt üzerinde yapar gibi herhangi bir kısayol kullanmadan, alt alta çarparak bulmaya çalışmasıdır.

Tablo 3.1. *Ters işlem özelliğine yönelik hazırlanmış klinik görüşme formu 5. sorusu*

5.soru 33 sayısına 15 ekleyip 15 çıkardığımızda sonuç ne olur?
a) 567 sayısına 113 ekleyip, 113 çıkardığımızda sonuç ne olur?
b) Merve'nin kumbarasında 73 lira vardır. Kumbarasındaki paralara 155 lira daha eklemiş, yaz tatilinde 155 lira harcamıştır. Son durumda Merve' nin paraları hakkında ne söylenebilir?

Tablo 3.1. ile verilen ters işlem özelliğine yönelik sorulan klinik görüşme formunda beşinci sırada yer alan soruda öğrencilerin önce belirli bir sayıya belirli bir miktar eklemeleri ve ardından çıkarmaları daha sonra bir sayıya belirli bir miktar eklemeleri çıkarmaları ve son olarak bir miktara, bir miktar eklemeleri çıkarmaları istenmiştir. Diğer sorulardan farklı olarak, bu soruda öğrencilerin ters eleman özelliğine dair net bir bilgiye sahip olmamalarına karşın, soruda yer alan ifadeye göre ters eleman özelliğinin gereğini yerine getirdikleri görülmüştür. Öğrencilerden E2 (ODP) s oruda ve rilen i fadeye "*15 ekleyip 15 çıkarırsak yine aynı sonuç çıkar.*" şeklinde cevap verdikten sonra "Neden?" sorusu sorulduğunda; "*Çarpma olsa değişirdi ama bu toplama çıkarma. 15 ekledik, sonra 15 çıkardık, aynı. Ama bunlar farklı olsa olmazdı*." diyerek sadece belirli işlemlerde bu durumun geçerli olacağını belirtmiştir.

Benzer şekilde E2 ile aynı performans düzeyinde bulunan ve ilk dört soruda işlem yapmaya dayalı genelleme yapmayı tercih eden K2 (ODP), bu soruda da başlangıçta işlem yaparak ilerlemeyi tercih etmiş, ilerleyen bölümde toplama ve çıkarmaya özgü bir durum olarak ifade etmiştir. "*Burada işlem yapmadın, nasıl buldun?*" s orusu sorulduğunda; "*Toplama çıkarma. Aslında hiçbirinde gerektirmiyor*." cevabını vermiştir. Ancak ilerleyen bölümde *"Neden?"* sorusuna verdiği; "*Bu iki sayı aynı olduktan sonra gerektirmiyor bence. Çünkü bunu ekleyip aynı sayıyı çıkarıyorsun*." cevabı K2 (ODP)'nin işlem özelliğine dayalı bir genellemeye varmadığını göstermektedir.

Klinik görüşme formu altıncı sırada yer alan soruda öğrencilerin birim (etkisiz) elemana yönelik anlayışları incelenmiştir. Bu bağlamda özellik olarak incelendiğinde, öğrencilerin diğer özelliklere göre en aşina oldukları özellik olduğu öne sürülebilir; buna karşın bazı öğrencilerin birim elemana yönelik farklı genellemelerinin olduğu da görülmüştür. Örneğin öğrencilerden K1(YDP) "etkisiz eleman" ifadesini kullanabilirken diğer öğrencilerin "etkisiz sayı, yutan sayı" gibi ifadeler kullandığı dikkat çekmiştir. E2 (ODP) ile gerçekleştirilen diyalog aşağıda verilmiştir.

> E2: Buradaki işlemler hakkında ne düşünüyorsun?
>
> E2: 0'la toplasak yine aynı sayı çıkar. Çünkü 0, 1 değil. 0 eklenemiyor.
>
> A: Nasıl?
>
> E2: Yani o ilk sayı. Toplanabilir ama sonuç diğer topladığımız sayı çıkar. Bir etkisi yok gibi. Ama çarpmada canavar gibi. Çarpmada ne sayı çıkarsa çıksın yok eder.

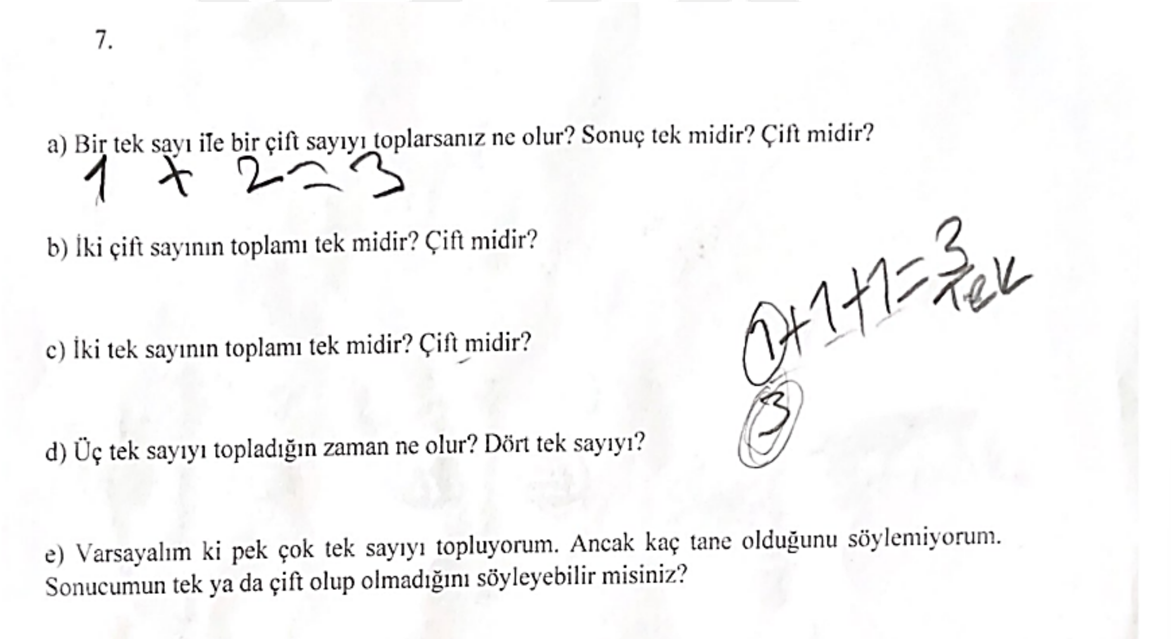
Öğrencilerden E1 (YDP)'in etkisiz elemana yönelik cevapları aşağıdaki diyalogda verilmiştir.

> E1: (İlk örneği çözer.) Aynı çıkar çünkü 0 etkisiz eleman.
>
> A: Etkisiz eleman ne demek?
>
> E1: Yani bir etkisi yok.
>
> A: 0 her zaman etkisiz eleman mı?
>
> E1: Hayır, çarpma işleminde yutan elemandır. Ne ile çarparsan çarp yutuyor.
>
> A: Çıkarmada?
>
> E1: Etkisiz eleman.
>
> A: Örneğin 0'dan 10 çıkarmak istesem, cevap nedir.
>
> E1: -10.
>
> A: O ne demek?
>
> E1: Olmayan, borç gibi bir şey.
>
> …
>
> E1: 0 çarpma ve çıkarmada etkili.
>
> A: Bölmede böyle bir durum var mı?
>
> E1: Yok. (Diğer işlemlere devam eder.)
>
> A: 1 ile ilgili ne söylersin.
>
> E1: Toplamada etkili, çıkarmada etkili, çarpma ve bölmede etkisiz.

E1 (YDP)'in verdiği cevaplar incelendiğinde etkisiz elemana dair ön bilgilerinin olduğu fark edilmekte, ancak genelleme yaparken tüm işlemler üzerine genelleme yapmaya çalışması ve bu noktada işlem yaparak doğrulama yapmaya çalışması da dikkat çekmektedir.

İşlem özelliklerini genellemeyle alakalı olarak tek ve çift sayılara ilişkin bağıntıları içeren sorular sorulmuştur. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen bulgularda, özel duruma dayalı genelleme yapan öğrencilerin örnek verme yoluyla genelleme yapmaya çalıştıkları görülmektedir. Öğrencilerin örnek verirken iki farklı yöntem benimsedikleri ortaya çıkmıştır. Bu yöntemler: Rastgele örnek verme (RÖD), özel örnek (ÖÖD) vermedir. Rastgele örnek veren öğrenciler sayıları rastgele tek ve çift seçip, birçok sayı kombinasyonunu deneyerek ifadenin tek veya çift olduğuna karar vermeye çalışmaktadır. Öğrencilerden K1(YDP), bu soruda örnek verme yöntemi kullanmıştır. K1(YDP)'e *"Nasıl düşündün?"* sorusu sorulduğunda, "*Mesela iki ile biri toplayınca üç çıkıyor*." şeklinde cevap vermiştir. İlerleyen bölümde farklı bir soruda ise; "*üç, beş, yediyi toplarım. Tek sayı bulurum*." cevabını vermiştir.

Aynı soruda öğretmen görüşü ve okul not ortalamasına göre düşük performans gösteren E3 (DDP) "*Mesela bir olsun üç defa biri topladım üç olur. Üç de bir tek sayı olduğuna göre*." cevabını vermiştir. E3'nın verdiği cevaba ilişkin örnek Görsel 3.7'de sunulmuştur.


7.

a) Bir tek sayı ile bir çift sayıyı toplarsanız ne olur? Sonuç tek midir? Çift midir?

1 + 2 = 3

b) İki çift sayının toplamı tek midir? Çift midir?

c) İki tek sayının toplamı tek midir? Çift midir?

1+1+1=3 tek

3

d) Üç tek sayıyı topladığın zaman ne olur? Dört tek sayıyı?

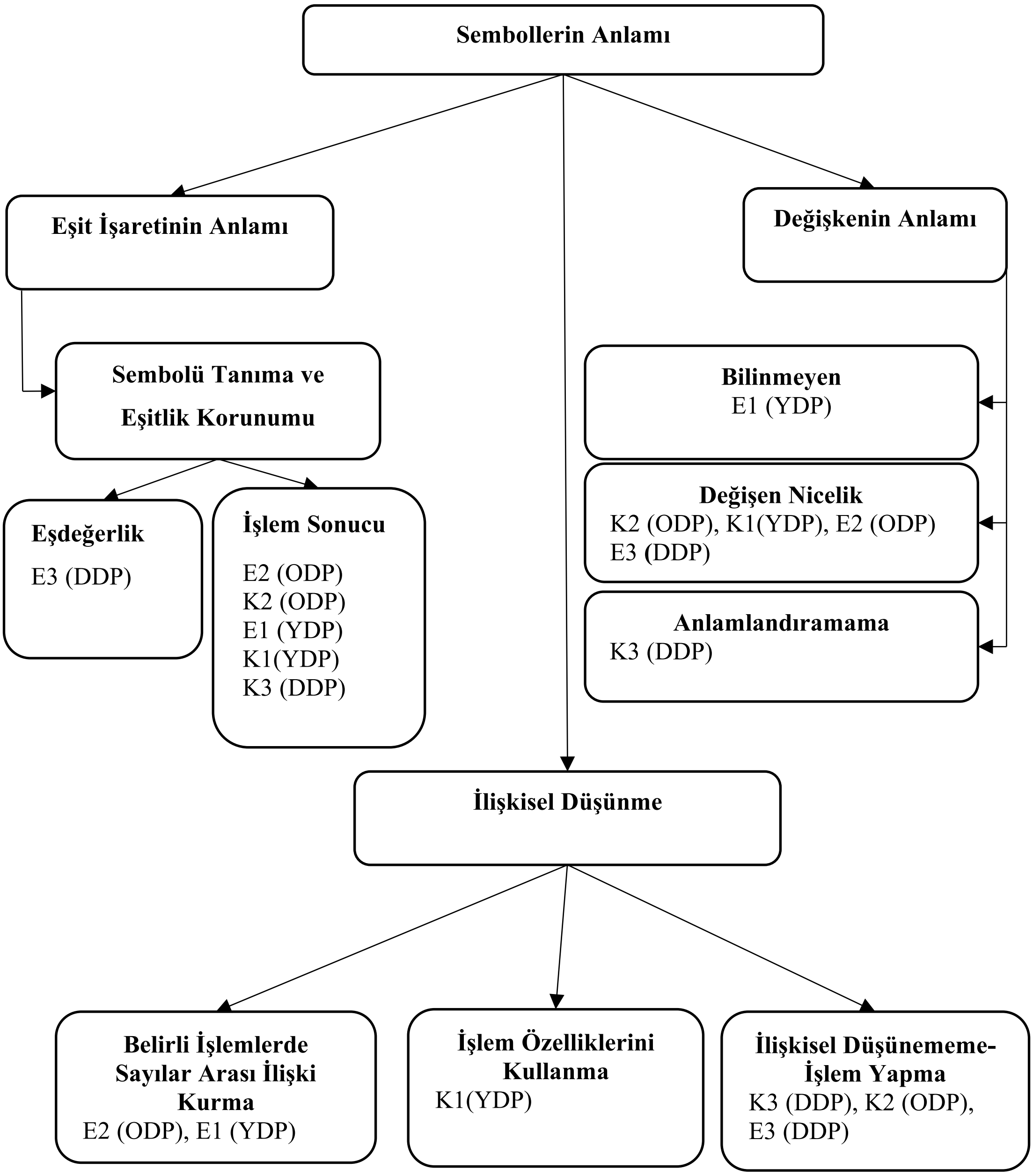
e) Varsayalım ki pek çok tek sayıyı topluyorum. Ancak kaç tane olduğunu söylemiyorum. Sonucumun tek ya da çift olup olmadığını söyleyebilir misiniz?

Görsel 3.7. *E3 (DDP)'ün cevap kâğıdı*

Görsel 3.7'de görüldüğü gibi, E3 (DDP)'ün verdiği cevapta özel örnek seçerek ilerlediği görülmektedir. Bu soruda öğrenciler diğer soruların aksine tüm durumlara dayalı genelleme yapamamıştır.

3.3. Sembollerin Anlamı

Öğrencilerin sembollere yönelik anlayışlarını incelemek amacıyla öğrencilere birtakım sorular sorulmuştur. Bu sorularda eşit işaretinin anlamı, değişkenin anlamları ve ilişkisel düşünme üzerinde durulmuştur. Sembollerin anlamı ve ilişkisel düşünmeye yönelik oluşturulan kodlar Şekil 3.3. ile verilmiştir.



Şekil 3.3. *Sembollerin anlamı ile ilişkisel düşünme kategorileri ve oluşturulan kodlar*

Eşit işaretinin anlamına yönelik sorulan sorularda öğrencilerden beklenen, sembolü tanıması ve eşdeğerlik veya işlem sonucu şeklinde anlamlandırmasıdır. Bunun yanında öğrencilerin eşitliğin korunumuyla ilgili düşünceleri de incelenmiştir.

İlk olarak 8. soru ile öğrencilerin eşit işaretinin anlamlarına yönelik düşünceleri incelenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerden K2 (ODP) soruda verilen "237 + 18 = 255" ifadesine bakarak gösterilen sembolün eşit işaretini belirttikten sonra, eşitliğin kontrolünü işlem yaparak teyit etme ihtiyacı duymuştur. Öğrencilerden K1(YDP) ise verilen eşitliğin, her zaman sayı eşitliği olmayacağını düşünerek, ifadede sayı eşitliği olduğunu belirtmiştir.

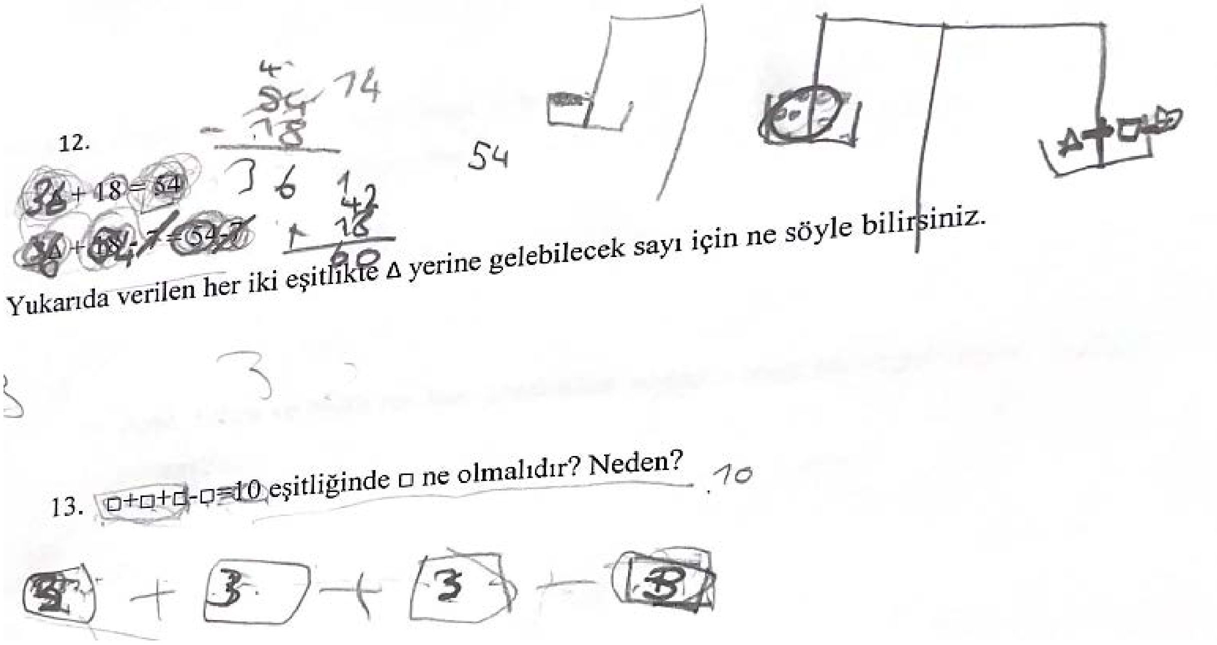
E3 (DDP) eşit işaretinin anlamı sorulduğunda "*Evet sayı olmak zorunda değil, şekil ve başka bir şey de olabilir aklıma şekil geldi.*" şeklinde cevap vererek sembollerin de yer alabileceği ifadelerde denklik belirtebileceğini ifade etmiştir. K3 (DDP) sembolü tanıdıktan sonra anlamına yönelik sorular sorulduğunda iki tane sayının toplamını veya sonucunu gösterdiğini belirtmiştir. Sembol ve benzeri ifadelerin eşitlikte yer alıp alamayacağı sorulduğunda; "*aklıma gelmiyor yani yıldızlar eşittir, yıldızlar olur mu, yıldızlar aynı çünkü?*" şeklinde cevap vermiştir. Öte yandan E2 (ODP), başlangıçta eşittir, sembolünü tanıdıktan sonra; anlamı sorulduğunda "*sonucu gösteriyor bazen. bazen de onların eşit olduğunu gösteriyor.*" cevabını vermiş ancak ilerleyen bölümde "*Sayı olmazsa olmaz. Nasıl eşit diyeceğiz?*" ifadesini kullanarak eşit işaretinin yalnızca işlem sonucu belirteceğini düşünmüştür.

Klinik görüşme formunun 9. ve 10. sorularında yer alan eşitliğin korunumuna yönelik sorulan soruda öğrencilerin birbirinden farklı stratejiler kullanarak eşitliği sağlamaya çalıştıkları görülmüştür. Önceki bölümlerde çoğunlukla işlem yaparak karar veren K2 (ODP) ve E3 (DDP) bu bölümde de şekillere ağırlık değerleri vererek eşitliği sağlamaya çalışırlarken K3 (DDP) topu geri alabileceğini ya da dengeye gelene kadar rastgele semboller ekleyebileceğini belirtmiştir. Bu bağlamda K3 (DDP)'ün şekillerin birer ağırlık değerini temsil ettiğini düşünmediğini ve eşitlik durumunu sağlamakta güçlük yaşadığı gözlenmiştir.

Sembollerin bilinmeyen anlamını araştıran 11 ve 12. sorularda öğrencilerin tümünün özellikle ilkokulda sıkça kullanılan "tersten gitme stratejisi"ni uyguladığı görülürken, K2 (ODP)'nin diğer sorulardan farklı olarak bu soruda eşitliğin korunumunu sağlamak için işlem yapmaya gerek duymadığı gözlenmiştir. K2'nin diyalogundan örnek aşağıda sunulmuştur.

> A: Bu soruda sembol yerine gelebilecek sayı için ne söyleyebilirsin?
> K2: 54'ten 18'i çıkarırım. Burayı bulabilirim. (İşlem yapmaya başlıyor. Tersten gitme metodunu uyguluyor.) 36 oluyor burası. (Alt kısma geçiyor.) aslında az önceki sorudaki gibi 7 ler ortak mı acaba. Burada üst tarafta toplamada toplam 54. Bu alt tarafta da 54. Burada 54 ten 7 çıkarıyor. Eşitliğin diğer tarafında da 54'ten 7 çıkarıyor.

E1 (YDP)'in 12. Soruya verdiği cevaba ilişkin çalışma kâğıdı Görsel 3.8^de sunulmuştur.



Görsel 3.8. *E1 (YDP)' in cevap kâğıdı*

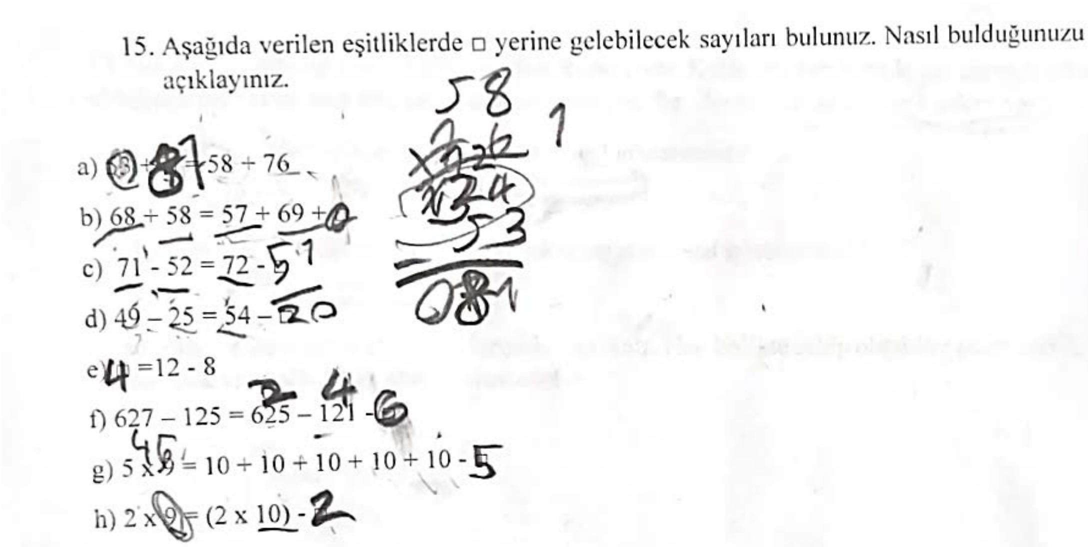
E1 (YDP)'in 12. soruda eşitliğin korunumunu sağlayabilmek amacıyla her iki taraftaki çıkan durumunda bulunan yedileri tıpkı eşit kollu terazilerdeki gibi iki taraftan da silerek, iki eşitlik bildiren ifadenin de aslında birbirine denk olduğunu ifade etmiştir. "*Peki 7'ler ne ifade etti burada?*" sorusu sorulduğunda *"Burada 7'lerin bir anlamı yok."* diyerek eşitliğin korunumunun farkında olduğunu göstermiştir.

Değişkenin bilinmeyen anlamına yönelik öğrenci düşünüşleri incelendiğinde öğrencilerin gördükleri sembollerin yerine sayı değerlerini yazmaya çalıştıkları, eşit kollu terazi modelleri üzerinde yaptıkları operasyonları, eşitlik sembolü ile verildiğinde gerçekleştirmedikleri gözlenmiştir. Bu noktada değişkenin değişen nicelik olarak algılandığı düşünülmektedir. E1 (YDP)'in 13. soruda yapmış olduğu işlemler de bunu açıkça göstermektedir. Sembole rastgele değerler atayıp sonuca ilerlemeye çalışmaktadır. Bunun yanında diğer öğrencilerin de nispeten sayıların daha az olduğu sembollerin daha fazla olduğu ifadelerde doğrudan değer vermeye çalıştıkları gözlenmiştir.

İlişkisel düşünme bağlamında sorulan sorularda öğrencilerin sayı ilişkilerini kullanmaktan ziyade doğrudan işlemlere yönelmesi dikkat çekmektedir. Öğrencilerin belirli işlemlerde sayılar arası ilişkiler kurduğu gibi bazı işlem özelliklerini kullanmayıp ve ilişkisel düşünemeyip, işlem yaparak karar verme gibi prosedürler gerçekleştirdikleri görülmektedir.

Öğrenciler, düzeylerinden bağımsız olarak sayılar arasında işlem gördüklerinde ilk etapta bu işlemi yapmayı sonucuna ulaşmayı denemişlerdir; ancak *"neden, işlem yapmadan bulamaz mıydık, nasıl?"* gibi sorularla öğrencilerin düşüncelerini daha detaylı ifade etmelerine olanak sağlanmaya çalışılmıştır. Örneğin sonuca ulaştıktan sonra K2 (ODP)' ye *"İşlemsiz yapmak istesen nasıl yapardın sence?"* sorusu sorulduğunda K2 (ODP), *"(Eşitliğin sağ tarafı) bu zaten 420 direkt. (Sol tarafı göstererek) Bununla bunu çarpardım sadece."* şeklinde cevap vermiştir. Diğer yandan, K3 (DDP)'ye *"Neden?"* sorusu sorulduğunda *"Ben yine işlem yaptım sanırım. 6'dan 3 çıkınca 3 kalmaz mı?"* cevabını vererek ifadelerde ilişkiler aramadığını doğrulamıştır.

Benzer şekilde işlem özelliklerini, sembolleri-şekilleri ve ilişkisel düşünmeyi içeren açık sayı cümlelerinin bulunduğu görüşme formunun 15. sorusunda, E2 (ODP)'nin verdiği cevaplar Görsel 3.9' da görülmektedir. E2 (ODP)'nin toplamalardaki ve çarpmaların bulunduğu işlemlerde toplananlar ve çarpanlar aralarındaki ilişkiyi eşitliğin diğer tarafını da düşünerek değerlendirebilirken, çıkarma ve bölmede aynı değerlendirmeleri yapamadığı görülmüştür. Bu noktada öğrencinin, toplamadaki toplananlardan biri artınca diğerinin de azaltması sonucu oluşturduğu dengelemeyi çıkarmada eksilen artınca çıkanı azaltarak sağlamaya çalışması dikkat çekmiştir.

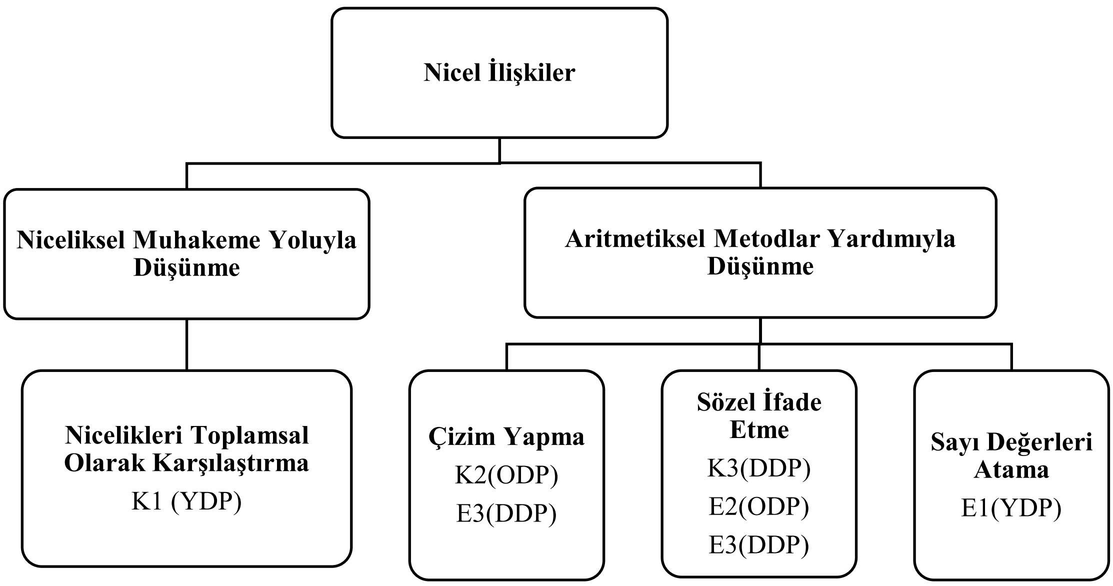

15. Aşağıda verilen eşitliklerde □ yerine gelebilecek sayıları bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

a) □ + □ = 58 + 76
b) 68 + 58 = 57 + 69 + 0
c) 71 - 52 = 72 - 51
d) 49 – 25 = 54 – 20
e) 4 = 12 - 8
f) 627 – 125 = 625 – 121 - 6
g) 5 x 45 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 - 5
h) 2 x 9 = (2 x 10) - 2

Görsel 3.9. *E2 (ODP)' nin cevap kağıdı*

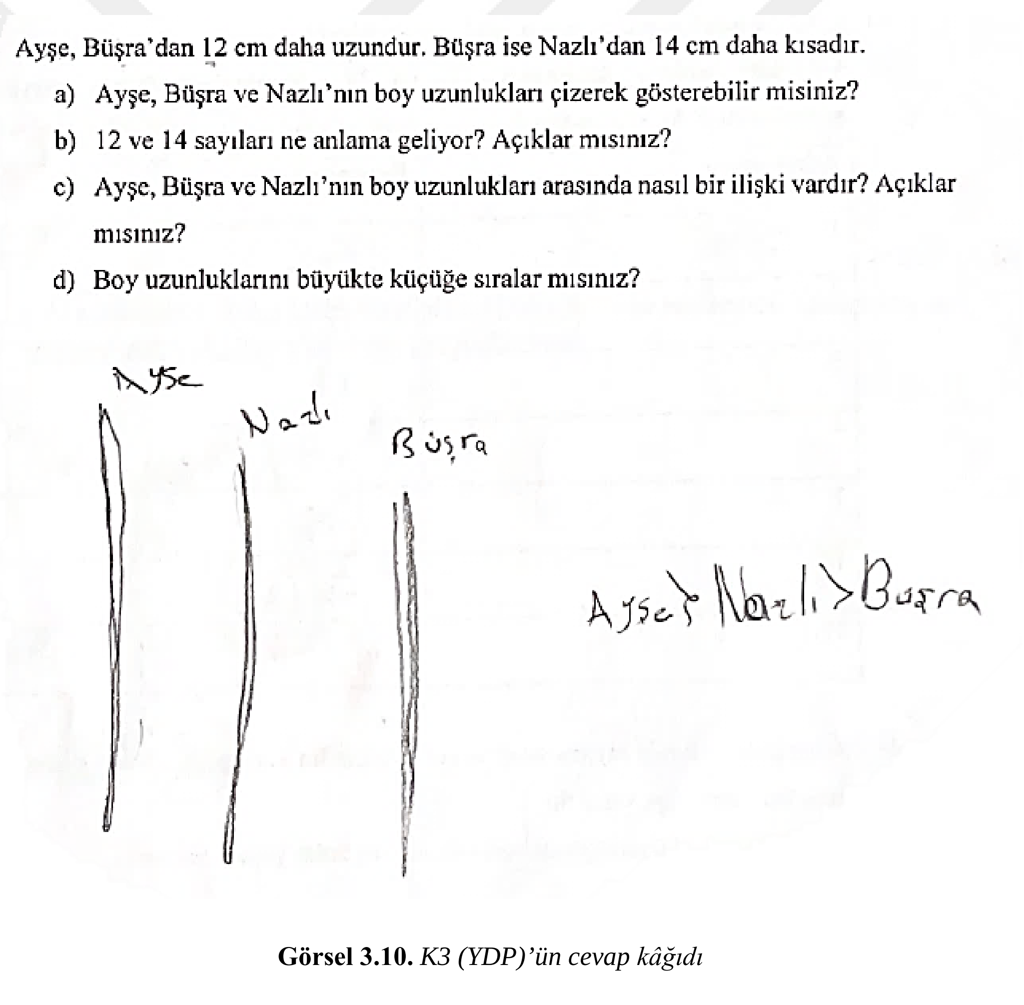
3.4. Nicel İlişkiler ve Nicel Muhakeme

Nicel ilişkiler bağlamında öğrencilere sorulan sorularda öğrencilerin niceliksel muhakeme yoluyla düşünme gerçekleştirirken iki niceliği toplamsal olarak karşılaştırdıkları; aritmetiksel düşünme yoluyla düşünme gerçekleştirirken de çizim yapma, sözel ifade etme ve sayı değerleri atama gibi yöntemler kullandıkları belirlenmiştir. Ortaya çıkan bulgular Şekil 3.4 ile verilmiştir.



Şekil 3.4. *Nicel ilişkiler bağlamında oluşturulan kategoriler ve kodlar*

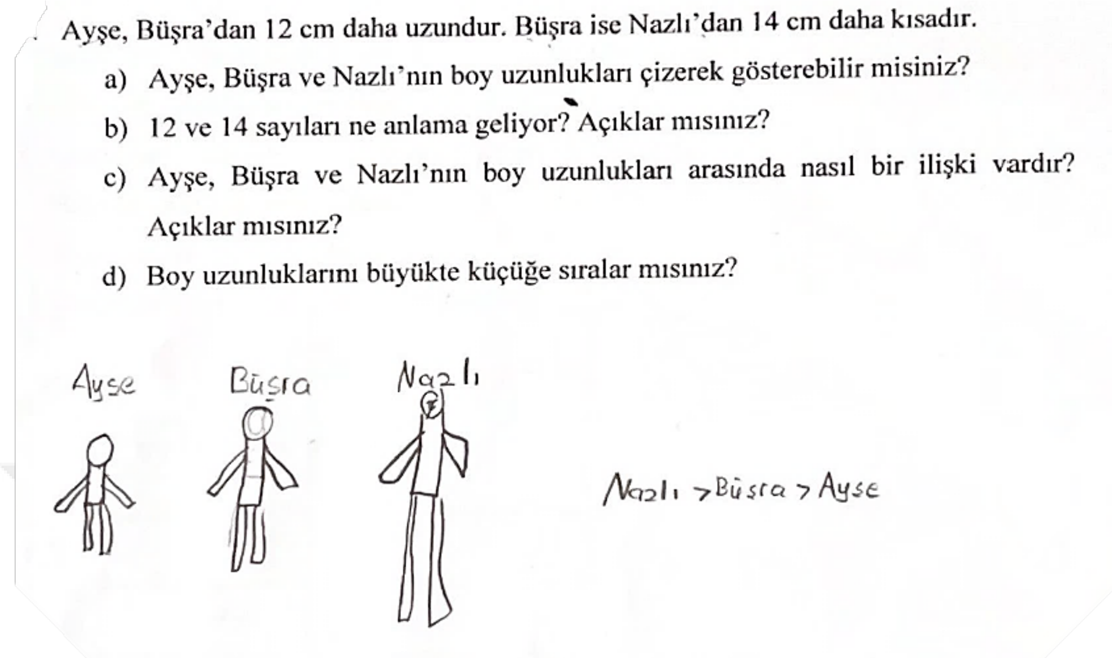
Nicel ilişkilerin sorgulandığı sorulara yönelik ortaya çıkan bulgular incelendiğinde öğrencilerin birbirinden farklı süreçler yürüttüğü görülmüştür. Aritmetiksel yöntemleri ön planda tutan öğrencilerin verileri daha çok ayrı ayrı düşündükleri görülürken, niceliksel muhakeme yoluyla düşünen öğrencilerin verileri bir araya getirerek karşılaştırma yaptıkları dikkat çekmektedir. Pilot uygulama da dahil olmak üzere öğrencilerin çizim yapma ve sözel ifade etmeyi daha çok kullandıkları görülmektedir. Görsel 3.10, 3.11, 3.12 ile verilen cevaplar incelendiğinde üç öğrencinin de farklı şekillerde cevap verdiği görülmektedir. Temel yapısı itibariyle ilk izlenim olarak öğrencilere kolay gelen bu sorunun birbirinden çok farklı cevapları içermesi de dikkat çekmiştir. Görsel 3.10.'da K3 (YDP)'ün çalışma kağıdından örnek sunulmuştur.


Ayşe, Büşra'dan 12 cm daha uzundur. Büşra ise Nazlı'dan 14 cm daha kısadır.

a) Ayşe, Büşra ve Nazlı'nın boy uzunlukları çizerek gösterebilir misiniz?
b) 12 ve 14 sayıları ne anlama geliyor? Açıklar mısınız?
c) Ayşe, Büşra ve Nazlı'nın boy uzunlukları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklar mısınız?
d) Boy uzunluklarını büyükte küçüğe sıralar mısınız?

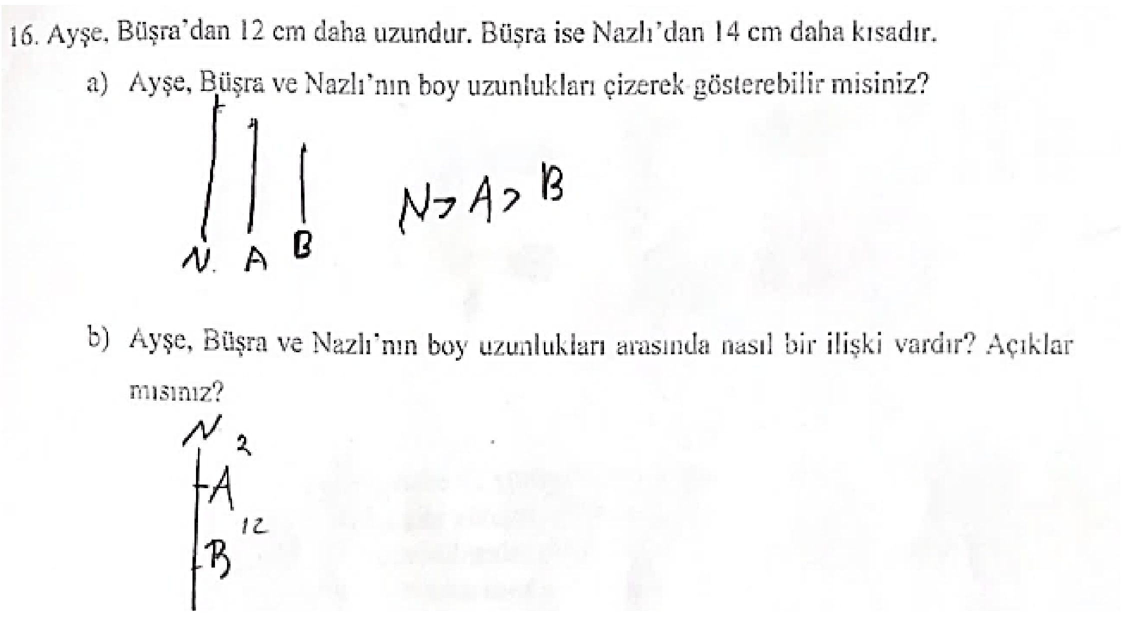
Görsel 3.10. *K3 (YDP)'ün cevap kâğıdı*

Görsel 3.10.'da görüldüğü gibi, K3 üç kişinin boy uzunluklarını karşılaştırırken sayısal ilişkileri kullanmadan niceliklere odaklanmış ve bu süreçte niceliksel muhakeme yoluyla üç nicelik arasında ilişkiyi görsel temsil kullanarak göstermiştir. Daha sonra boy uzunlukları arasındaki ilişkiyi gösterirken bu kez eşitsizlik sembolünü kullanmıştır. Görsel 3.11'de K2 (ODP)'nin çalışma kâğıdı örnek olarak sunulmuştur.



Görsel 3.11. *K2 (ODP)' nin cevap kâğıdı*

Görsel 3.11'de görüldüğü gibi K2'de K3 gibi sayısal ilişkilerden ziyade niceliklere odaklanmış, ancak K3'ten farklı olarak önce resim temsili kullanmış daha sonra üç boy uzunluğunu eşitsizlik sembolünü kullanarak göstermiştir. Görsel 3.12'de ise K1 (YDP)'in çalışma kağıdından örnek sunulmuştur.



Görsel 3.12. *K1(YDP)'in cevap kâğıdı*

Görsel 3.12’de görüldüğü gibi Elif’te öncelikle görsel temsil kullanarak niceliksel muhakeme yoluyla karşılaştırma yapmış, diğer öğrencilerden farklı olarak şekli tek bir bütün halinde düşünerek nicelikleri toplamsal olarak karşılaştırmıştır.

Öğrencilerden E3 (DDP)’dan model, sembol, çizim vb. yapılması istendiğinde herhangi bir çözüm gerçekleştiremezken, soruyu birkaç kez okuduktan sonra durumu sözel olarak ifade etmiştir. Boy uzunlukları arasındaki ilişki sorulduğunda “*Ayşe Büşra’dan 12 cm daha uzun. O zaman Ayşe Büşra’dan uzun olacak. Büşra ise Nazlı’dan 14 cm daha kısadır. O zaman yani Büşra en kısası olacak. Nazlı ortadaki olabilir mi? Ayşe, Nazlı, Büşra olabilir mi?”* şeklinde düşünmeye başlamış ve ardından Nazlı’nın daha uzun olduğunu sayısal niceliğin fazla olmasına dayandırarak “*Çünkü Büşra Nazlı’dan 12 cm daha uzundur diyor. Diğer tarafta 14 cm diyor. Nazlı daha uzun oluyor.”* şeklinde ifade etmiştir.

Diğer yandan E1 (YDP) soruyu inceledikten sonra bireylerin boy uzunluklarını verilmediği için “*hepsi birer metre olsa!”* şeklinde bir yorumda bulunarak sayı değerleri atayarak boy uzunluklarını karşılaştırmıştır.

Nicel ilişkiler bağlamında sorulan 19. soruda E1 (YDP)’in de önceki sorularda kullandığı stratejilere/yöntemlere bağlı kaldığı görülmektedir. E1 (YDP) soruda şeker miktarı bilinmemesine karşın önceki sorularda yaptığı gibi şeker sayısının herhangi bir değer olması şeklinde varsayımsal bir şekilde ilerlediği görülmüştür. Buna karşın E1 (YDP)’in iki nicelik arasında ilişki kurarak Zeynep’in daha fazla sayıda şekere sahip olduğunun farkında olduğunu göstermiştir. Örneğin E1 (YDP) bu soruda “*Her zaman Zeynep in daha fazla şekeri olacak. Mesela kutunun 1 tanesine 15 desek diğerine de 15 desek 8 ekliyoruz 15, 8 daha 23 olacak.”* şeklinde rastgele bir sayı değeri kullanarak açıklama yapmıştır. Öğrenci ve araştırmacı arasında geçen diyalogdan bir kesit örnek olarak sunulmuştur.

A: Nazlı ve Zeynep in tüm şekerlerini birleştirsek 2 sinin toplam sahip olduğu şeker sayısını sembolle gösterebilir misin?

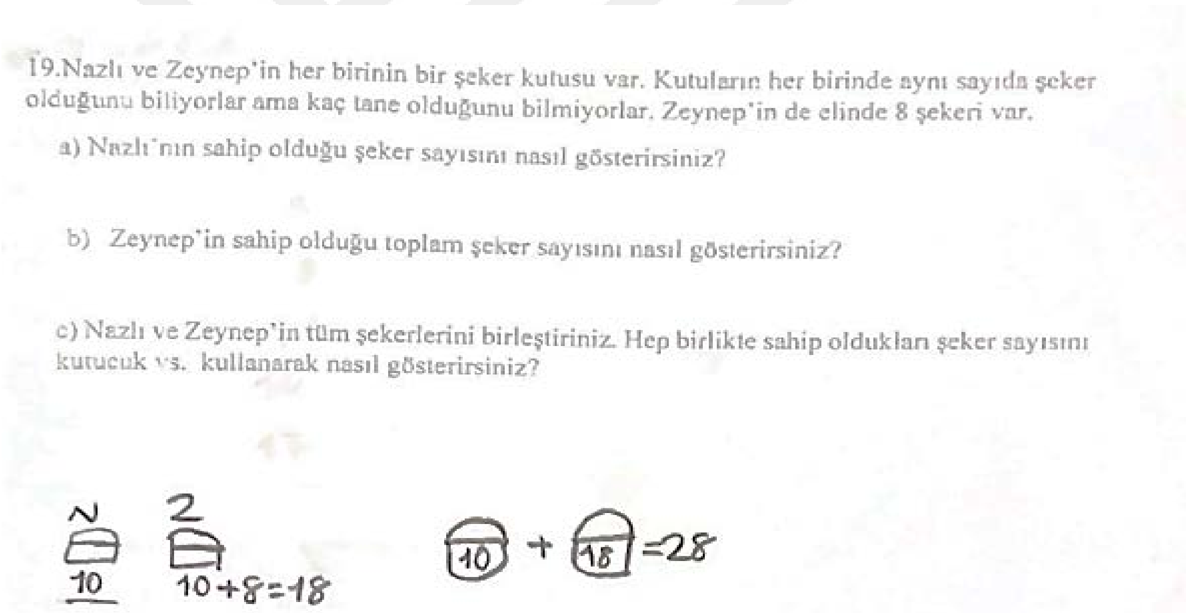
E1: Çok kolay iki tane kutucuk artı sekiz (☐ + ☐ + 8) oldu.

A: Bu kareler senin için neyi temsil ediyor?

E1: İkisi de aynı olduğu için bilmediğimiz bir sayıyı temsil ediyor.

Diyalogda görüldüğü gibi, öğrencinin Nazlı ve Zeynep'in eşit sayıda olan ve bilinmeyen şekerlerini kutu sembolü ile gösterdiği ve ayrıca Zeynep'in şeker sayısı ile iki kişinin toplam şeker sayısını açıkça ifade ettiği görülmektedir. Öğrencinin iki kişinin şeker miktarlarını bir sembol ile göstermesi, bu sembollerin yerine gelecek şeker sayılarının değişebileceğinin farkında olduğu izlenimi vermektedir.

K3 (DDP)'ün yaptığı çözüm göz önünde bulundurulduğunda, var olan bir miktar şekerin belirli bir sayı adedince olduğunu, on tane olduğunu, düşündüğü görülmektedir. Soru açıklandıktan sonra K3 (DDP) "*Diyelim ki ikisinin kutusunda da 10 tane şeker var. Bir de elinde 8 tane var. Onları eklersek 18. Başka bir şey aklıma gelmiyor.*" şeklinde düşüncelerini ifade etmiştir. Bir sembol, şekil gibi temsiller ile ifade etmesi istendiğinde ise şeker kutusuna benzer bir figür oluşturup içerisine başlangıçta da belirttiği gibi sayı değeri atamıştır. Görsel 3.18. ile K3 (DDP)'ün cevap kâğıdı örnek olarak verilmiştir.


19.Nazlı ve Zeynep'in her birinin bir şeker kutusu var. Kutuların her birinde aynı sayıda şeker olduğunu biliyorlar ama kaç tane olduğunu bilmiyorlar. Zeynep'in de elinde 8 şekeri var.

a) Nazlı'nın sahip olduğu şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

b) Zeynep'in sahip olduğu toplam şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

c) Nazlı ve Zeynep'in tüm şekerlerini birleştiriniz. Hep birlikte sahip oldukları şeker sayısını kutucuk vs. kullanarak nasıl gösterirsiniz?

N Z

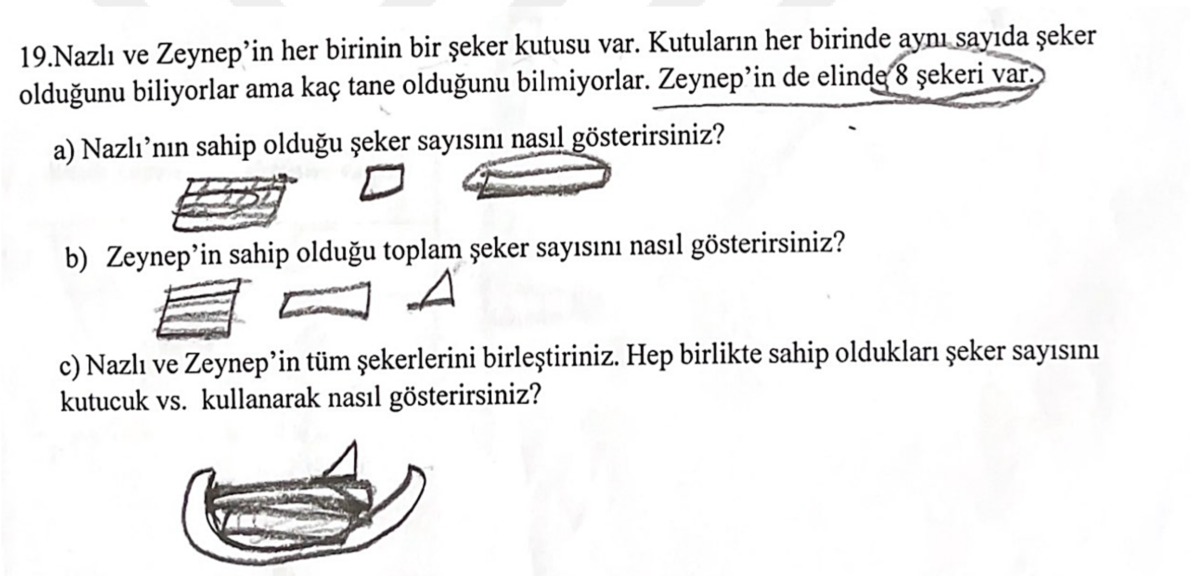
10 10+8=18

10 + 18 =28

Görsel 3.13. *K3 (DDP)'ün cevap kağıdı*

Görsel 3.13'te görüldüğü gibi K3 (DDP) Nazlı ve Zeynep'in kutuda yer alan şeker miktarlarını eşit almaktadır. Buna karşın kutu yerine gelebilecek bir sayı değeri belirleyerek soruyu çözmeye çalışmıştır. K3'nin Nazlı ve Zeynep'in kutudaki şeker sayılarının ve toplam şeker sayılarının değişebileceğinin farkında olmadığı görülmektedir.

Aynı soruya E3 (DDP)’ün verdiği yanıt biraz daha farklılık içermektedir. E3 (DDP) diğer öğrencilerden farklı olarak şeker miktarlarını belirten sayı değerlerinin tamamını bir sembol kullanarak ifade etmeye çalışmıştır. Örneğin soruda belirtilen Zeynep’in elindeki 8 şekeri üçgen sembolü ile göstermeyi düşünmüş ve bunu “*Şimdi şeker kutusu diye düşünelim bunu. İçinde de şeker olsun. Bu şekerlerin sayısını nasıl gösterebiliriz? Mesela bu küp şeker olsun. Bir sıra şeker olsun. Zeynep’in ekstra 8 şekeri daha varmış. Bunu da üçgenle gösterelim.*” Şeklinde ifade etmiştir. İlerleyen bölümde sorunun son seçeneğine gelindiğinde E3 (DDP) yaptığı semboller ile çizimlerini bir araya getirmiş ve bu noktada net bir genellemeye varamamıştır. E3 (DDP)’ün cevap kâğıdı Görsel 3.14 ile verilmiştir. E3 (DDP)’ ün cevap kağıdına bakıldığında çizimler yaptığı görülürken, görüşme diyalogları incelendiğinde sözel olarak ifade ettiği görülmektedir.


19.Nazlı ve Zeynep’in her birinin bir şeker kutusu var. Kutuların her birinde aynı sayıda şeker olduğunu biliyorlar ama kaç tane olduğunu bilmiyorlar. Zeynep’in de elinde 8 şekeri var.

a) Nazlı’nın sahip olduğu şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

b) Zeynep’in sahip olduğu toplam şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

c) Nazlı ve Zeynep’in tüm şekerlerini birleştiriniz. Hep birlikte sahip oldukları şeker sayısını kutucuk vs. kullanarak nasıl gösterirsiniz?

Görsel 3.14. *E3 (DDP)’ün cevap kâğıdı*

3.5. Fonksiyonel Düşünme

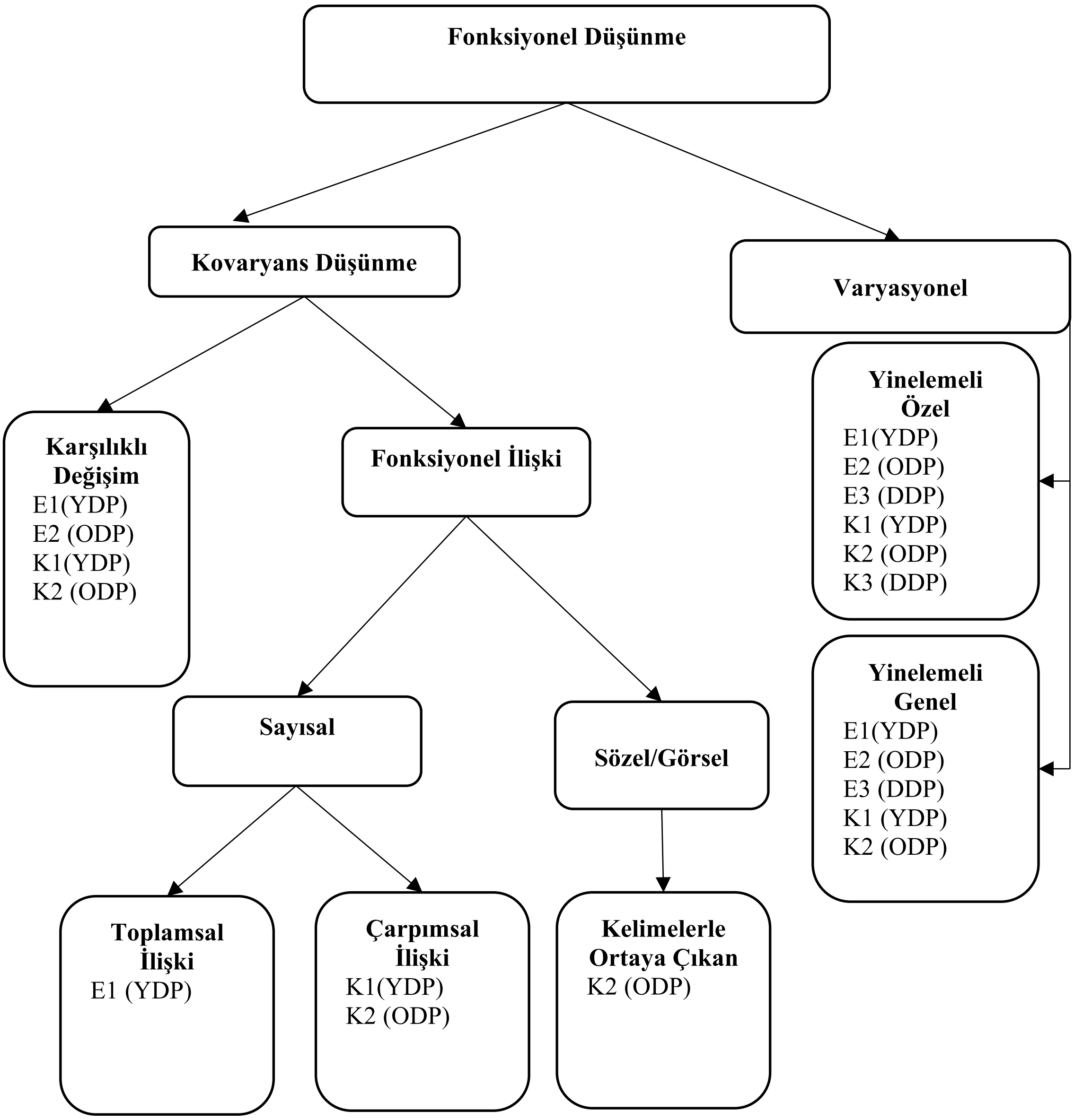
Bu bölümde öğrencilerin cebirsel düşünmenin en temel bileşenlerinden olan fonksiyonel düşünme ve bir anlamda nicelikler, şekiller ve semboller arasında ilişki aramalarına yönelik anlayışları incelenmiştir. Şekil 3.5 ile fonksiyonel düşünme bağlamında oluşturulan kategoriler ve kodlar verilmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin varyasyonel düşünme ve kovaryans düşünme gibi yaklaşımlar sergiledikleri dikkat çekmektedir. Şekil 3.4 ile fonksiyonel düşünme bağlamında ortaya çıkan bulgular verilmiştir. Yapılan görüşmelerde öğrencilerin varyasyonel düşünme, kovaryans düşünme gibi düşünme biçimlerini gösterdikleri görülmüştür.

Varyasyonel düşünme düzeyinde, yinelemeli özel düşünme sergiliyor ise öğrenci örüntüdeki yinelemeli ilişkiyi fark etmesine rağmen sadece belirli örnekler üzerinden bu tanımlamayı yapabilir ve uzak adımlara genelleme yapmakta zorlanır. Kovaryans düşünme düzeyindeki öğrenciler bu çalışma bağlamında fonksiyonel temel ve fonksiyonel özel durumları sergilemişler gelişmiş fonksiyonel düşünme becerilerini göstermemişlerdir.

Fonksiyonel özel düşünme biçiminde öğrenci, fonksiyonel ilişkinin olabileceğini özel durumlar yardımıyla ifade etmeye çalışırken fonksiyonel ilişkiyi genelleyemez. Bu bağlamda çarpımsal ve toplamsal olarak iki ilişki söz konusu olmaktadır. Toplamsal ilişkide öğrenci, niceliklerin toplamsal ilişkisinden yola çıkarak örüntüyü incelemektedir. Çarpımsal ilişkide ise; niceliklerin çarpımsal ilişkisinden yola çıkılarak uzak adımlara ilerleme ön plana çıkmaktadır.

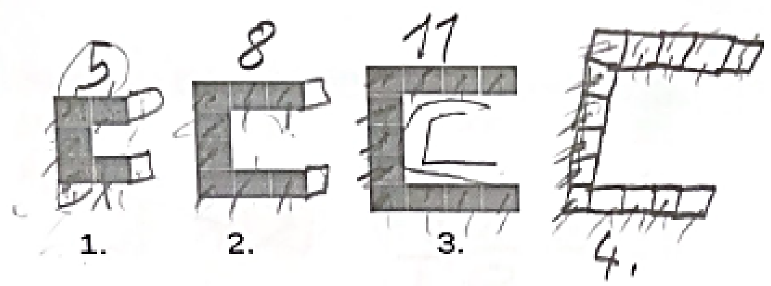
Çalışmada fonksiyonel ilişkinin temel düzeyde gösterildiği bölüm, temel fonksiyonel ilişkinin sözel olarak ifade edilebilmesinden yola çıkılarak belirlenmiştir. Bu bölümde, öğrencide fonksiyonel ilişkinin temel özelliklerinin oluşmaya başladığı görülmüş; ancak nicelikler arası dönüşümün tam anlamıyla ifade edilemediği belirlenmiştir. Örneğin bir örüntüde adım sayısı ile ilişki kurulmaya çalışılmış fakat net bir kural tanımlanamamış olabilir.

Kovaryans düşünme düzeyi bağlamında ele alınan bir diğer başlık ise karşılıklı değişimdir. Bu bölümde öğrencinin nicelikler arasındaki ilişkiyi fark etmesi söz konusudur. Bunu ayrı ayrı koordine edilmiş bir şekilde ifade edebilmiştir. Buna rağmen nicelikler arasında matematiksel bir ilişki kuramamıştır.



Şekil 3.5. *Fonksiyonel düşünme bağlamında oluşturulan kategoriler ve kodlar*

Fonksiyonel ilişkilerin genellenme ve temsil edilme düzeyleri incelendiğinde tüm öğrencilerin varyasyonel düşünme düzeyinde yinelemeli özel ilişkileri algılayabildikleri temel anlamda bu düzeyin gerekliliklerini yerine getirdikleri görülmüştür. Bu noktada her öğrencinin örüntüdeki değişimi görüp özel örnek verdiği görülmektedir. Örneğin E3 (DDP) soru ile ilk karşılaştığında, verilen fayans sayılarını belirleyerek şekli sayı örüntüsüne dönüştürmeye çalışmıştır. E3 (DDP) bu bölümde doğrudan ekleme olduğunu ifade ederken herhangi adımlar arasında özel örnekler kullanmıştır. Örüntüdeki artışın farkında olduğu için yinelemeli ilişkinin farkında olduğu söylenebilir. Ancak E3 (DDP) fark ettiği ilişkiyi sadece belirli örnekler seçerek ifade edebilmiştir. E3'nın verdiği cevapları içeren cevap kâğıdı Görsel 3.15 ile verilmiştir.



17.

Ahmet usta bir sitenin bahçesine bir yürüyüş alanı yapmayı planlamaktadır. Tasarımını yaparken şekilde görüldüğü gibi yürüyüş alanına kare şeklinde fayanslar döşeyecektir. Ahmet usta yürüyüş alanı büyüdükçe kullanılacak fayans sayılarını hesaplamak istemektedir. Ahmet ustaya yardımcı olalım ve istenilen soruları yanıtlayalım:

a)

b)

c)

37
x3

Adım sayısı	Fayans sayısı
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
10	32
37	

Görsel 3.15. *E3 (DDP)'ün cevap kâğıdı*

Görsel 3.15 ile verilen yanıtlar incelendiğinde ve E3'nın şekli nasıl algıladığını öğrenmek amacıyla sorulan sorularda, E3 (DDP)'ün artış miktarını göz önünde bulundurarak önce belirlenen adımdaki fayans sayısını bulduğu ardından uygun şekli çizmeye çalıştığı ortaya çıkmıştır; ancak araştırmacı "*Hangi bölümlere fayans eklemiş?"* şeklinde soru yöneltince şekli yatay ve dikey algıladığını belirtmiştir. Bunun üzerine 5. adımdaki fayans sayısı sorulunca "*Şimdi dikey olarak 7 tane çizeceğiz. Yanlara da 5 tane yapacağız*." diyerek sayı örüntüsüne çevirmeyi bırakmıştır. İlerleyen bölümde 37. adım sorulduğunda başlangıç metodundan farklı olarak öğrencinin belirttiği kolları tek tek sayması dikkat çekmiştir. Bu şekilde ilerlemesi öğrencinin farklı bir düşünce biçimine doğru ilerlediğini düşündürse de öğrencinin "Ben direkt sayarak yapmıştım." ve çalışmanın son bölümünde araştırmacının "Başka bir yolu olabilir mi?" sorusunun üzerine "Fayansları tek tek artırabiliriz" cevabını vermesi ilk aşamada gösterdiği gibi yinelemeli özel düşünce biçimi sergilediğini gösterdiğini düşündürse de öğrencinin şeklin bütününe yönelik vurgusu şekildeki değişimi görebildiğini ve bunu bütünün herhangi adımını ifade ederken kullanabildiğini göstermekte ve bu nedenle yinelemeli genel ilişkiyi sergilediğini öne çıkarmaktadır. Ancak öğrencinin adım sayısı ve fayans sayısını tablo temsili yapması istendiğinde ilişkilendirmemesi karşılıklı değişim düzeyine ulaşamadığını ortaya çıkarmaktadır.

K3 (DDP) verilen soruda "*Aynı. Buradan da hep bir artmış. Hepsi bir artarak gitmiş*." cevabını vermiştir. K3'nin bu noktada E3 (DDP) ile benzer bir yaklaşım izleyerek yol katettiği görülmektedir. Yinelemeli ilişkiyi fark ederek fayansları artırma düşüncesinde olduğunu ifade etmiştir. Ancak K3 (DDP) tablo temsili bölümünde nicelikleri tablo ile ifade edememiş ve sadece belirli adımlardan örnekler verebilmiştir. Tablo temsilinde artışı ifade edip diğer yakın adımlarda aynı düşünceyi yansıtmaması yinelemeli genel düzeyine ulaşamadığını göstermiştir. Örneği ilerleyen bölümde yakın adıma yönelik sorular sorulduğunda da "*Kafamda birer artırıyorum.*" şeklinde cevap vermiştir. Uzak adımları bulmaya yönelik bir soru sorulduğunda ise "*Çok değişik oldu, kafam karıştı şimdi."* Cevabını vererek ilişki kuramadığını göstermiştir.

E2 (ODP) örüntüyü ritmik saymaya benzeterek soruya başladıktan sonra şekildeki artış miktarını belirlemiştir. Ardından şekilde nasıl bir değişim olduğunu ifade etmesi istenildiğinde şekli dikey ve yatay şekilde iki parça halinde algıladığı görülmektedir. E2 bu bölümde örüntüdeki fayans sayısını ifade etmeyi başarırken aynı zamanda fayans sayısındaki değişiminde de farkındadır. Ancak adım sayısı ile ilişkisini ifade edebilecek herhangi bir genellemeye sahip değildir. Hatta adım sayısı ile fayans sayısı arasında da ilişki kuramamıştır. Ancak E 2 (ODP) d iğer öğrencilerden farklı olarak bir ilişkinin olduğunu fark etmesine rağmen anlamlandıramamıştır. Bu nedenle E2 (ODP)'nin karşılıklı değilim düzeyinde olduğu görülmektedir.

Aynı soruda E1 (YDP) "*Uzunlukların hepsine bir kare fazla koyuyor. En baştaki figürün üstteki iki tane yerin yanına bir tane daha koyuyor. Ondan sonra alttakinin yanına bir tane koyuyor ortadakinin de bir tane altına koyuyor yani iki oluyor sonra aynısını tekrarlıyor*." diyerek şekli gövde ve kollar olarak 3 parça şeklinde değerlendirdiğini ifade etmiştir. Bunu yanında tablo temsillerini artırarak ilerletmiştir. İlerleyen adımlara yönelik sorular sorulduğunda ise aşağıda verilen diyalog gerçekleşmiştir.

A: 37. Adımı bulabilir miyiz?

E1: Buldum.

A: Kaç buldun?

E1: 111

A: Nasıl buldun?

E1: Bir yerden 3 ekliyoruz o yüzden 3 ekledim, 37 ile 3'ü çarptım 11 oldu, 2. adımda da 3 ekledim 10 oldu, 3. adımda 6 ekledim 7'ye 13 oldu, 4. adımda 9 ekledim 16 oldu, 5. adımda 12 ekledim 19 oldu, 10. adımda 30 ekledim 37 oldu, 111. adımda da 74 ekledim 111 oldu.

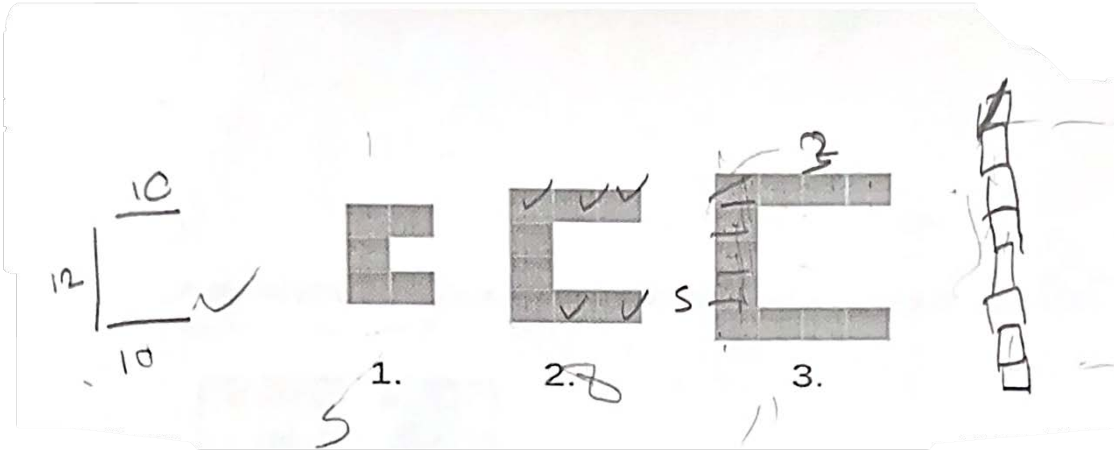
E1 (YDP)' in verdiği cevaplar incelendiğinde uzak adımlardaki fayans sayılarını belirlemesi istendiğinde toplamsal ilişki kullanarak ilerlemesi dikkat çekmektedir. Bu nedenle E1 (YDP) diğer düzeylerdeki ifadelerin de üzerine çıkarak kovaryans düşünme düzeyine ulaşmıştır. Ayrıca sayısal temsiller yardımıyla toplamsal ilişkinin farkındadır. Ancak bu noktada öğrencinin yaptığı işlemlerde nicelikler arasındaki ilişkinin net olarak ifade edilememesi, örneğin "*Bir yerden üç ekliyoruz o yüzden 3 ekledim*" şeklindeki açıklaması öğrencinin hem sonuca yanlış ulaşmasına neden olmuş hem de niceliklerin farkında olup ilişkiyi ifade edemediğini göstermiştir.

Diğer öğrencilerden farklı kovaryans düşünme düzeyine ulaşarak, çarpımsal ilişkiyi gözeten K1(YDP)'in verdiği cevaplar incelendiğinde başlangıçta şekli yatay ve dikey olarak düşündüğü "*Önce 10. Adımda kaç tane olduğunu, kaç tanesinin dikey kaç tanesinin yatay olduğunu bulurdum.*" cevabından görülmektedir. Uzak adımlara ilerlemesi istendiğinde ise çarpımsal ifadelerle uzak adımlara ilerlemesi diğer öğrencilerden farklı olarak çarpımsal ilişkiyi gözettiğini ön plana çıkarmıştır. K1 (YDP)'in verdiği cevaplardan bir bölüm aşağıda verilmiştir.

> K1: Önce 10. Adımda kaç tane olduğunu, kaç tanesinin dikey kaç tanesinin yatay olduğunu bulurdum.
> A: Peki 10. Adımda kaç tane olduğunu nasıl bulursun?
> K1: 4. Adım 14 tane olduğuna göre ona göre eklerdim.
> A: Peki önce 10. Adımı çizmeni isteselerdi?
> K1: Öyle de yaparım. Adımları belli zaten.
> A: Belli bir kuralı var mı bu çizimin? Yani şu anda sen ilk 4 adımı biliyorsun. 5, 6, 76 8'i bulmadan doğrudan 10. Adımı bulabilir misin?
> K1: Aynı 4. Adıma 18 tane fazla eklerim.
> A: Neden 18?
> K1: 3 tane arttığı için… 3 kere 6.

K1 (ODP)'in verdiği yanıtlar incelendiğinde diğer düzeylerden farklı olarak çarpımsal olarak adım sayısı ile artış kurarak ilerlediği görülmektedir. Bu noktada kovaryans düşünme düzeyine ulaştığını göstermektedir. Ancak ilerleyen bölümde öğrencinin uzak adımlarda da adım sayısı ile ilişki kurması beklendiğinde bunu anlamlandıramadığı ve nicelikler arası ilişkiyi ifade edemediği görülmüştür. Bu noktada basit fonksiyonel düşünme becerilerine sahip olduğu ön plana çıkmaktadır.

K2 (ODP) soru ile ilk karşılaşmasından sonra şekli iki parça halinde düşünüp şeklin yakın adımlarına çizerek ilerletmiştir. Görsel 3.16 ile K2'nin cevap kâğıdı örnek olarak verilmiştir.



Görsel 3.16. *K2 (ODP)'nin cevap kâğıdı*

K2 (ODP)'ye uzak adımlar sorulduğunda gövde ve kollarda çizim yaparak cevaplamıştır. Örneğin "*10. adımı isteseydim kaç tane olurdu?*" sorusuna *"Gövdede 12 tane olurdu. Kollarda 10 ar tane olurdu.*" şeklinde cevap vermiştir. Bu cevabını, gövde ve kollar için yaptığı temsili çizimlere dayandırarak göstermiştir. Bunun yanında K2 tablo temsilinde adımları belirlemiş yaptığı çizimler yardımıyla adımlara karşılık gelen fayans sayılarını da bulmuştur ancak söz konusu bir kural oluşturamamıştır. Nicelikleri ifade etmeyi görseller yardımıyla başaran öğrenci fonksiyonel ilişkinin görsel temsil boyutunu sergilemiştir. Bu bağlamda değerlendirildiğinde algıladığı durumu sözel olarak ifade ederken gerekli temsilleri yapıp nicelikler arası ilişkileri temsil olarak ifade edememiş fakat adım sayısı ile fayans sayısı arasında bir ilişki olduğunu sözel olarak ifade edebilmiştir.

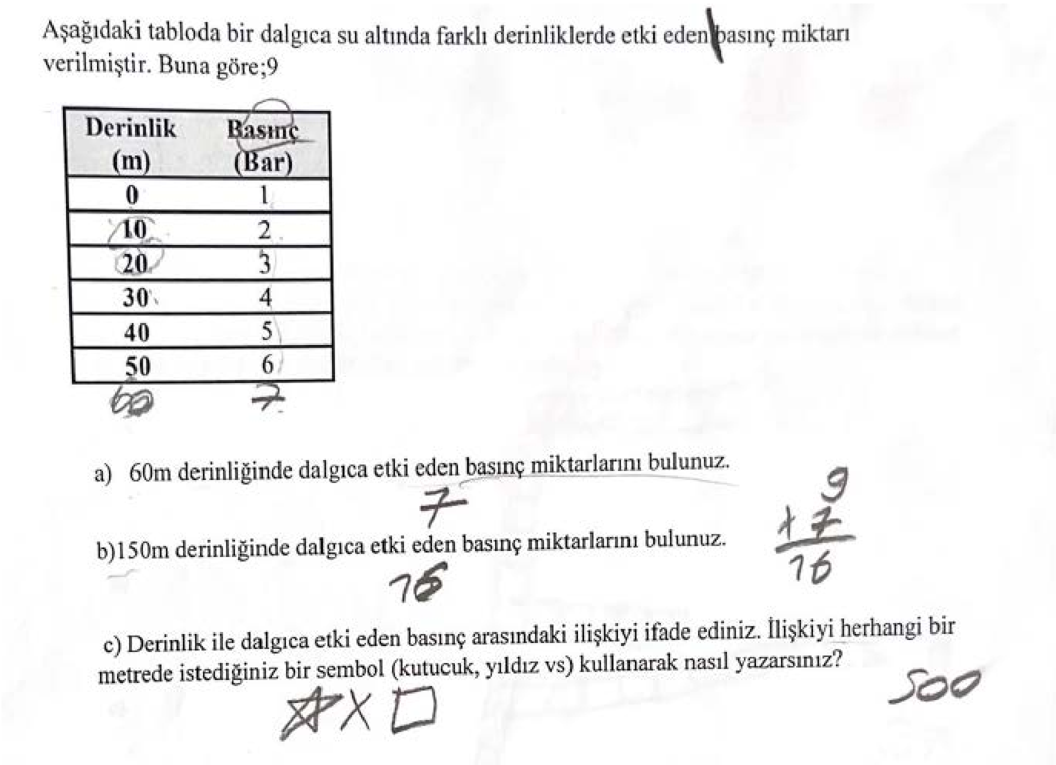
Görüşme sorularından 18. Soruda fonksiyonel düşünme becerilerini ön plana çıkaran bir gerçek yaşam problemi öğrencilere sunulmuştur. Soruda bir dalgıca belirli derinliklerde etki eden basınç miktarlarını gösteren bir tablo verilmiş ve öğrencilerden derinlik ile basınç arasında bir ilişki kurması beklenmektedir.

17. soruda yinelemeli özel düşünme düzeyinde olduğunu gösterir nitelikte cevaplar veren K3 bu soruda da sadece artışı görerek 10 arttığını ifade edebilmiş genele yayamamıştır.

Benzer şekilde 18. soruda E3 (DDP)'ün 17. soruya verdiği cevapların benzerlerini bu soru içinde ifade ettiği görülmüştür. Bu aşamada öğrencinin derinlik ile basınç arasındaki ilişkiyi belirlerken istenen derinlikteki basınç sorulduğunda parmaklarını kullanarak teker teker sayması dikkat çekmiştir. Özellikle 60 m etre v e 150 m etre derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarı sorulduğunda öğrenci bu anlayışını daha net bir şekilde dile getirmiştir. E3 ve araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

> E3: (Soruyu ve tabloyu inceler.) Hepsinde on on artmış. Demek ki bunda da bir bir artmış. O zaman basıncı 7 olur.
> A: Peki 150 metrede?
> E3: Yine on on artacak. 15 mi?
> A: Nasıl düşündün?
> E3: Şimdi hepsinde on on artmış. 79-80-90-100-110-120-130-140-150.. Yani 9 olur basıncı.

E3 (DDP)'ün doğrudan tablo temsili ile verilen soruda buradaki artışı anlamlandırmayıp sadece artışa odaklanarak bütüne bir genelleme yapması yinelemeli genel ilişkinin farkında olduğunu göstermektedir. Ancak bu aşamada öğrencinin bar, derinlik gibi ifadeler kullanmaması öğrencinin nicelikleri anlamlandırmadığını doğrular niteliktedir. Aşağıda E3 (DDP)'nin cevap kâğıdı Görsel 3.15 ile verilmiştir.


Aşağıdaki tabloda bir dalgıca su altında farklı derinliklerde etki eden basınç miktarı verilmiştir. Buna göre;9

Derinlik (m)	Basınç (Bar)
0	1
10	2
20	3
30	4
40	5
50	6
60	7

a) 60m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz.

7

b)150m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz.

16

9 + 7 = 16

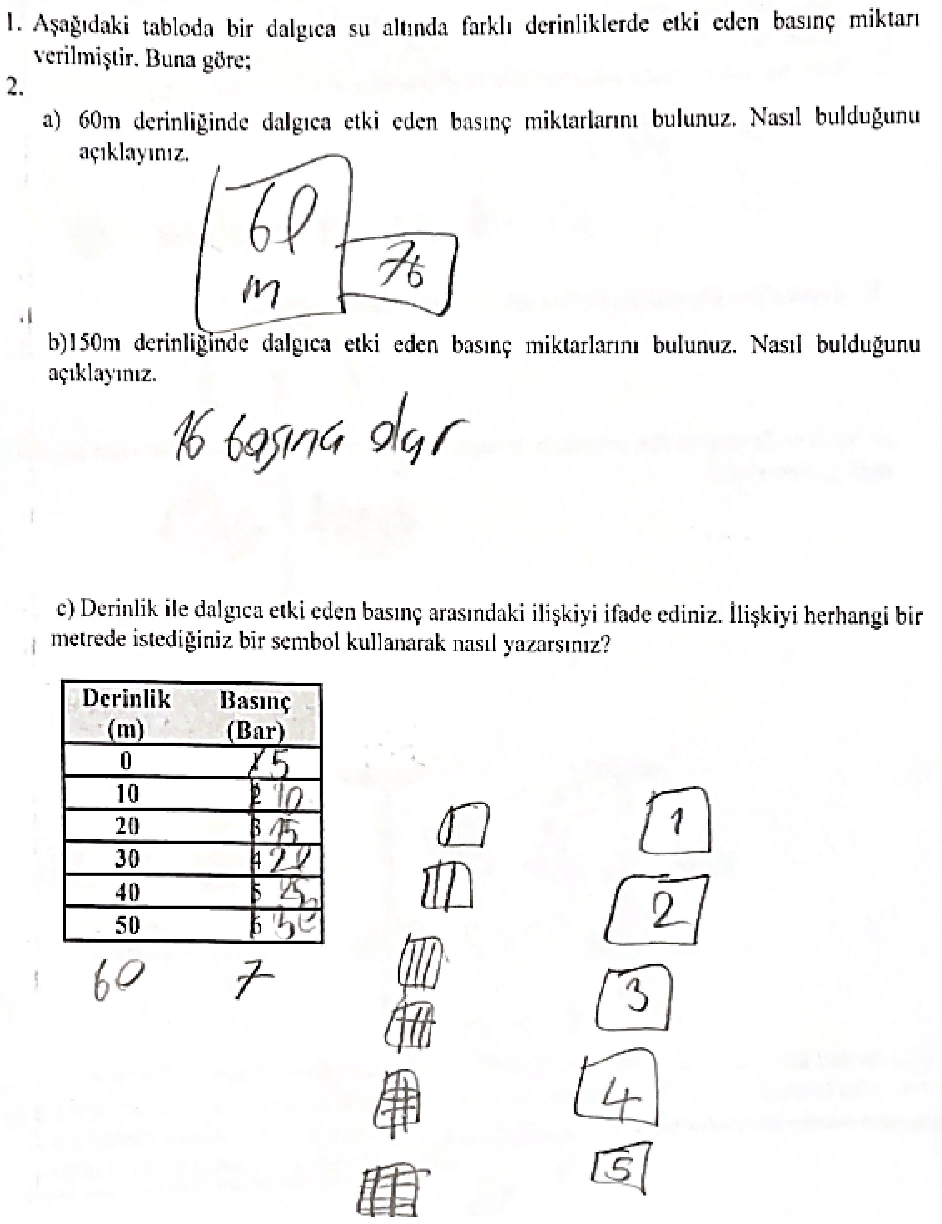
c) Derinlik ile dalgıca etki eden basınç arasındaki ilişkiyi ifade ediniz. İlişkiyi herhangi bir metrede istediğiniz bir sembol (kutucuk, yıldız vs) kullanarak nasıl yazarsınız?

★ X □

500

Görsel 3. 17. *E3 (DDP)'ün cevap kâğıdı*

E2 (O DP) soruda nicelikleri fark etmiş, artışa göre alması gerektiği değerleri belirlemiştir. Nicelikler arasında koordineli bir bağlantı kurarak sorulan soruları cevaplamıştır. Ancak verilenler arasında herhangi matematiksel bir ifade kullanmaması öğrencinin gelişmiş fonksiyonel düşünme düzeylerine tam anlamıyla ulaşamadığını göstermiştir. E2 (ODP)'nin Görsel 3.17 ile verilen cevap kâğıdı incelendiğinde, basınç ile kat ilişkisi kurmaya çalıştığı görülmektedir. Ulaştığı sonucundan sonra E2 (ODP)'e sorulan *"Nasıl buldun?"* sorusuna E2 (ODP) "*Buradaki ilişkiye göre. 0, 10, 20…. diye gidiyor. O zaman katı olur.*" şeklinde cevap vermiştir.



1. Aşağıdaki tabloda bir dalgıca su altında farklı derinliklerde etki eden basınç miktarı verilmiştir. Buna göre;
2.
   a) 60m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz. Nasıl bulduğunu açıklayınız.

   60 m 7

   b)150m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz. Nasıl bulduğunu açıklayınız.

   16 basınç olur

   c) Derinlik ile dalgıca etki eden basınç arasındaki ilişkiyi ifade ediniz. İlişkiyi herhangi bir metrede istediğiniz bir sembol kullanarak nasıl yazarsınız?

Derinlik (m)	Basınç (Bar)
0	~~1~~ 5
10	2 10
20	3 15
30	4 20
40	5 25
50	6 30
60	7

1 2 3 4 5

Görsel 3.18. *E2 (ODP)'nin cevap kâğıdı*

Benzer şekilde E1 (YDP)'in bu soru için verdiği cevap aşağıda verilmiştir.

A: Nasıl bulursun?

E1: Mesela her 10 metre derinlikte1 basınç etkiliyor. 0 derece de 1 etkiliyor, 10 derece de 2 etkiliyor, 20 derece de 3 etkiliyor, yani 50 ise onu sıfırını atıyoruz 5 kalıyor 5'e de 1 eklesek 6 oluyor. 6 olsa 7 olacak basınç değeri, 70 olsa 8 olacak, 80 olsa 9 olacak.

A: Peki 150 metre derinliğinde ne kadar basınç etki eder?

E1: 16

A: Bunu nasıl buldun?

E1: Aynısını yaptım 10 ekledim sıfır (0) çıkardım.

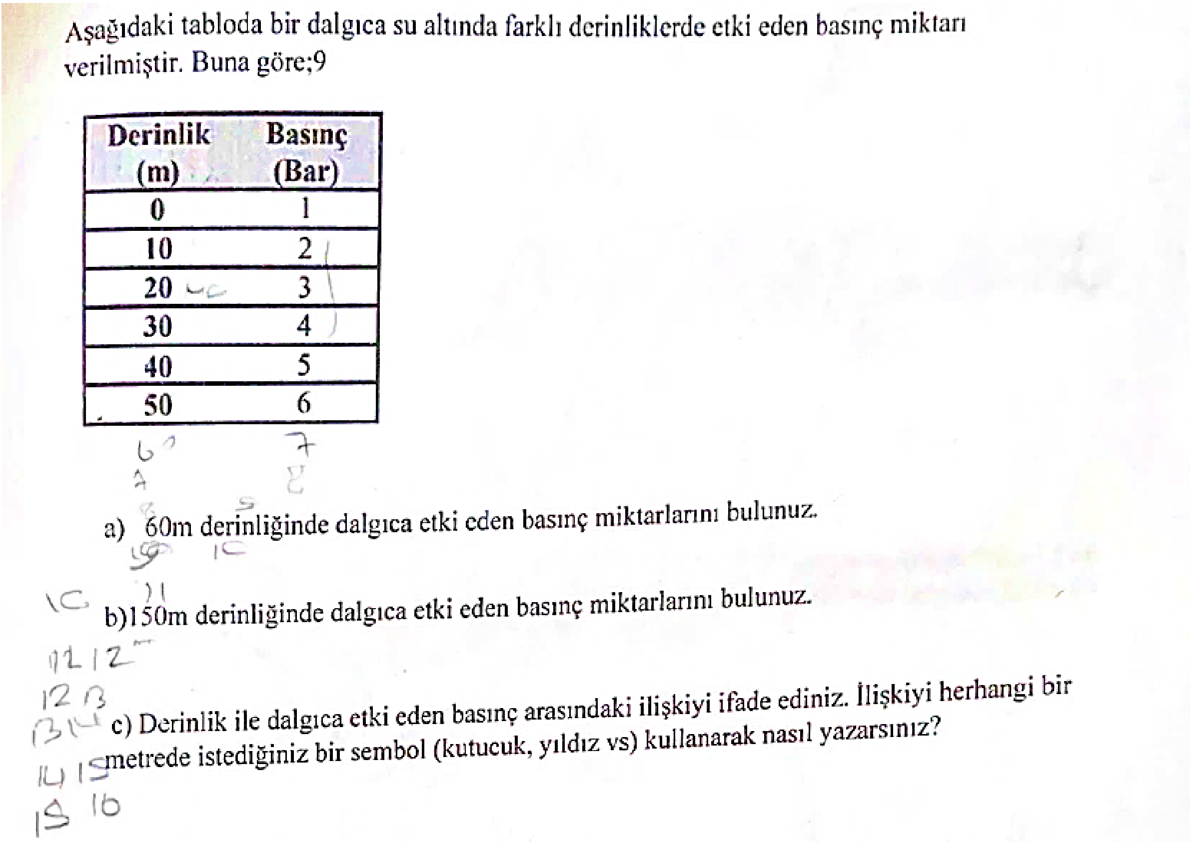
A: Derinlik ile dalgıcı etki eden basınç arasındaki ilişki sence nasıl? Herhangi bir metreyi sorsalar sana yani 1500 metre dese doğrudan bulabilir misin?

E1: Evet bulunur aslında 160 olur.

E1'in verdiği cevap incelendiğinde derinlik ile basıncı anlamlandırdığı açık bir şekilde görülmektedir. E1 (YDP) önceki soruda olduğu gibi toplamsal ilişkinin farkında olduğunu doğrular nitelikte bu soruda da metreye 10 ekleyerek önce toplamsal ilişkiyi gözetmiştir. Ancak ilerleyen bölümde öğrenciden beklenen temsillerin kullanımı aşamasında net bir ifadeye ulaşamamıştır.

K2 (ODP) soru ile karşılaştıktan sonra derinliği onar artırırken beraberinde basıncı da birer artırarak ilerletmiş, kendisine sorulan 150 metre derinlikteki basınç miktarını hesaplamıştır. Daha farklı bir yolu sorulduğunda "*Çarpma yapabilirim, sanırım*." diyerek cevap vermiştir. Araştırmacı "Sence arada bir ilişki var mı?" diye sorduğunda K2 (YDP) "*Var. Burası 10 iken burası 40 olabilirdi. Nasıl anlatacağımı bilmiyorum*." Şeklinde cevaplamıştır. Bu noktada K2'nin var olan ilişkinin farkında olduğu ancak bu ilişkinin nasıl ifade edileceğine dair bir görüşünün olmadığı, kelimelerle ifade edebildiği ilişkiyi temsiller ile gösteremediği görülmektedir. Görsel 3.1 9 ile K2'nin 18. soruda verdiği cevaplar aşağıda sunulmuştur.

.


Aşağıdaki tabloda bir dalgıca su altında farklı derinliklerde etki eden basınç miktarı verilmiştir. Buna göre;9

Derinlik (m)	Basınç (Bar)
0	1
10	2
20	3
30	4
40	5
50	6

a) 60m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz.

b)150m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz.

c) Derinlik ile dalgıca etki eden basınç arasındaki ilişkiyi ifade ediniz. İlişkiyi herhangi bir metrede istediğiniz bir sembol (kutucuk, yıldız vs) kullanarak nasıl yazarsınız?

Görsel 3.19. *K2 (ODP)'nin cevap kâğıdı*

K2 (ODP)'nin diğer sorudan farklı olarak bu soruda çarpımsal ilişkiyi öne çıkarmıştır. Bu noktada temel fonksiyonel düşünme düzeyinde cevaplar verdiği dikkat çekmiştir.

K1 (YDP), 17. Soruda olduğu gibi bu soruda da başlangıçta adımların sıra ile gittiğini ifade ettikten sonra, farklı derinliklerde dalgıca etki eden basıncı çarpımsal olarak ifade etmeye çalıştığını aşağıdaki diyalogda belirtmiştir.

A: Neden?

K1: Çünkü her 50'de 6 oluyor. 6 kere 3 18.

A: Peki derinlikle, dalgıca etki eden basıncı açıklayabilir misin? Sembol kullanabilirsin. Öyle bir şey kullan ki ama mesela 200 metre dediklerinde onu bulabil.

K1: 200 metrede 24 basınç oluyor.

A: Nasıl buluyorsun bunu? Onu ifade etmen de yeterli.

K1: 50'de 6 olduğu için onun üstüne çarpıyorum.

K1(YDP)'in verdiği yanıt incelendiğinde aslında aradaki ilişkiyi net olarak doğru genelleyemediği fakat nicelikleri tanıyıp, nicelikler arası çarpımsal bir ilişki oluşturmaya çalıştığı görülmektedir.

Fonksiyonel düşünme bağlamında bulgularda da açıkça görüleceği üzere öğrenciler herhangi bir adımı öngörmeyi sağlayacak temsilleri gerçekleştirebilecek kuralları oluşturamamaktadırlar. Bu nedenle öğrencilerin temel fonksiyonel düşünmeleri gerçekleştirmeye yakın olabildikleri ancak gelişmiş fonksiyonel düşünme becerilerine sahip olmadıklarını ön plana çıkmıştır.

3.6. Cebirsel Düşünme Becerileri ile Akademik Başarı Arasındaki İlişki

Araştırmadan elde edilen bulgularda bazı bölümlerde yüksek düzeyli akademik performansı olduğu bilinen K1 -E1 gibi öğrencilerin başarı düzeyinden bağımsız bir şekilde işlem yapmaya dayalı sonuçlara ulaşmaya çalıştığı tüm durumları her durumda analiz edemediği ve genellemelerini yapılandırırken temel işlem özelliklerine ve sayılar arasındaki ilişkilere tam olarak hâkim olamadığı için düzeyinden farklı bir performans sergilediği görülmüştür. Ancak bu nokt ada K 3- E3 gibi öğrencilerden daha iyi genellemeler yaptığı görülmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin cebir öncesi dönemde cebire geçiş için gerekli genellemeleri yapmalarına olanak tanıyan deneyimleri tam anlamıyla gerçekleştiremedikleri sorularda v erdikleri " *Biz bunu daha önce yapmamıştık."*, "*Okulda bu tarz sorular sorulmuyor.*", *"Böyle soruları ilk kez görüyorum."* "*Anlamadım*", " *Kafa karıştırıcı*", " *Nasıl yapmam gerektiğinden emin değilim.*" Şeklinde verdikleri cevaplar göz önüne alındığında ortaya çıkmaktadır. B u bağlamda araştırmada yer alan üç farklı düzey grubunda öğrencilerin düz ey fark etmeksizin tam anlamıyla yeterli genellemelere ulaşamamış olması cebir öncesi dönemde birtakım eksikliklerin olabileceği ihtimalini göstermiştir.

Fonksiyonel düşünme bağlamında değerlendirildiğinde öğrencilerin akademik başarı düzeylerindeki artışın fonksiyonel düşünmelerini olumlu yönde desteklediği ifade edilebilir. Örneğin E1 ve K1 fonksiyonel düşünme bağlamında değerlendirildiğinde kovaryans düşünme düzeyinde ilişkiler kurabildiklerini göstermiştir. Bu noktada bu yeterli bir gösterge değildir. Ancak okulda düşük performans gösteren K3'ün araştırmada net genellemelere ulaşamaması dikkat çeken diğer bir husus olarak ön plana çıkmaktadır.

4. SONUÇ TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Araştırmanın bu bölümünde bulgulardan elde edilen sonuçlara, alanyazında yer alan bulgu ve sonuçlar ile araştırmadakilerin tartışılmasına ve bu çalışmadan sonra yapılabilecek olası çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

4.1. Sonuç

- Aritmetiği genelleme bağlamında sorulan sorularda yer alan temel işlem özelliklerine yönelik bulgular incelendiğinde birçok sınıf düzeyinde yer alan en temel özelliklerden olan birleşme, değişme, etkisiz eleman ve ters eleman özelliklerini öğrencilerin kavramsal yönleriyle bilmedikleri bu ne denle kendilerine has yöntemlerle sıradan rutin sorular gibi hareket ettikleri görülmüştür. Bazı öğrencilerin salt işlem yaparken, bazı öğrencilerin sadece bir özelliğe dayalı genelleme yaptığı ve bazı öğrencilerin de sadece bir işleme dayalı genelleme yaptıkları saptanmıştır. Genel anlamda öğretmen görüşü ve ders başarısı yönünden yüksek düzeyli performans gösteren öğrencilerin genellemelerini uygun şekilde yapılandırmadıkları sonucu ortaya çıkmıştır.

- Araştırmada yer alan sorulara yönelik öğrenci cevaplarından elde edilen bulgularda ve öğrencilerin temel işlem özellikleri (değişme, birleşme, ters eleman, birim eleman) bilmedikleri sonucuna ulaşılmıştır.

- Öğrencilerin temel işlemleri anlamlandırmakta güçlük çektikleri herhangi bir problemde sayıları kullanarak çözümü gerçekleştirme düşüncesinde oldukları sonucu ortaya çıkmıştır.

- Çalışmada öğrencilerin aritmetiği genelleme becerileri incelenirken öğrencilerin işlem özelliklerini ve sayı sisteminin özelliklerini genellemeyi, işlem yapmaya dayalı, bir özelliğe veya bir işleme dayalı ya da tüm durumları göz önünde bulundurarak genelleme süreçlerine girmeye çalıştığı sonucu ortaya çıkmaktadır. Ancak tüm durumları göz önünde bulunduran, akademik anlamda yüksek düzeyli performans gösteren öğrencinin bile doğrudan ve eksiksiz bir genelleme yapamadığı ortaya çıkmıştır. Bunun yanında akademik anlamda düşük ve orta düzeyli performans gösteren öğrencilerin daha çok işlem yapma ihtiyacı duyduğu sonucuna ulaşılmıştır.

- Benzer şekilde temel özelliklerden elde edilen varsayımları genellemeye çalışan öğrencilerin verdiği cevaplar göz önünde bulundurulduğunda, bulguların paralellik gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır. Ancak bu noktada dikkat çeken akademik anlamda yüksek performans gösteren öğrencilerden birinin, sayı sitemi ve işlem özelliklerine yönelik karşılaştığı problemlerin tamamını işlem yapmaya dayalı çözüme ulaştığı ve net bir genellemeye sahip olmamasına rağmen yüksek düzeyli performans gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır.

- Aritmetiği genelleme bağlamında tek ve çift sayılara ilişkin bağıntıları göz önünde bulundurma durumlarının incelendiği sorularda, öğrencilerin verdiği cevaplardan hareketle rastgele örnek vermeye ve özel örnek vermeye dayalı süreçler izledikleri ortaya çıkmıştır. Ortaya çıkan bulgular değerlendirildiğinde tek ve çift sayılara ilişkin bağıntıları tüm durumlara dayalı olarak değerlendiren öğrencinin bulunmadığı öğrencilerin kendilerine sunulan sorularda sayı değerlerini kullanarak doğrudan örnek verme yolunu tercih ettikleri, dolayısıyla öğrencilerin tek ve çift sayılara ilişkin bağıntıları yapılandıramadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

- Sembollerin anlamına yönelik anlayışlar eşit işareti, ilişkisel düşünme ve değişkenin anlamına yönelik temalarda incelenirken tüm öğrencilerin eşittir sembolünü isim olarak bildiği sonucu ortaya çıkmıştır. Bunun yanında sembolün daha çok işlem sonucu anlamıyla ortaya çıktığı, bir öğrencinin eşdeğerlik anlamına çıkabilecek bir cevap verdiği ve bir öğrencinin de herhangi net bir genellemesinin olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

- Verilen cevaplar ilişkisel düşünme bağlamında değerlendirildiğinde akademik anlamda orta düzey ve yüksek düzeyli performans gösteren iki öğrencinin belirli işlemlerde sayılar arasında ilişkiler kurabildiği, akademik anlamda orta ve düşük düzeyli pe rformans gösteren üç öğrencinin ilişkisel düşünemediği ve yüksek düzeyli performans gösteren öğrencilerden birinin işlem özelliklerini kullanarak ilişkisel düşünmeye yönelik anlayışlar geliştirme aşamasında olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

- Değişkenin anlamı bağlamında öğrencilerden bilinmeyen anlamını ön plana çıkaran bir öğrenci olduğu sonucuna varılırken, üç öğrencinin değişen nicelik anlamıyla bağdaştırdığı ve akademik anlamda düşük düzeyli performans gösteren bir öğrencinin bilinmeyenleri anlamlandıramadığı sonucu ortaya çıkmıştır.

- Nicel ilişkiler bağlamında, akademik olarak yüksek düzeyli performans gösterdiği belirtilen öğrencilerden birinin niceliksel ilişkileri toplamsal olarak karşılaştırdığı diğer öğrencilerin aritmetiksel metotları kullanarak düşünme gerçekleştirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Özellikle akademik açıdan düşük düzeyli performans gösteren öğrencilerin durumu sözel olarak ifade etmekle yetindikleri ve sonraki aşamalara geçemedikleri, ortalama performans düzeyinde bulunan öğrencilerin ise el de ed ilen bulgular hiyerarşik düzendeymiş gibi düşünüldüğünde nispeten daha üst düzey düşünmeler gerçekleştirdiği sonucu görülmüştür.

- Cebirsel düşünmenin en temel bileşenlerinden olan fonksiyonel düşünme bağlamında örüntülerle çalışıldığı için sayısal ve görsel yaklaşımı ön plana çıkaran öğrencilerin olduğu ortaya çıkmıştır. Akademik açıdan düşük düzeyli performans gösteren öğrencilerin örüntüleri teker teker sayarak sayı örüntüsüne dönüştürdüğünden dolayı örüntülerde oluşan yapının ve bu noktada fonksiyonel ilişkinin farkına varılmadığı örüntülerin saymadan ibaret olarak görüldüğü sonucuna ulaşılırken, iki öğrencinin görsel yaklaşıma bağlı kalarak yorumladıkları sonucuna ulaşılmıştır.

- Fonksiyonel düşünme bağlamında öğrencilerin varyasyonel ve kovaryans düşünme düzeyleri s ergiledikleri ve öğrencilerin akademik düzeylerinin kovaryans düşünme düzeyine ulaşmasını olumlu yönde desteklediği sonuçlarına ulaşılmıştır.

- Öğrencilerin fonksiyonel düşünmede temel anlamda sayı örüntüsü haricinde örüntünün anlamını bilmemelerinden dolayı zorlandıkları dikkat çekmektedir. Öğrencilerden elde edilen bulgular değerlendirildiğinde formal örüntü tanımına yönelik bilgiler elde edilemezken özellikle uzak adımlarda tüm öğrencilerin hatalar yaparak ilerlemesi ve bu süreçte yapının farkına varmadan işlem temelli metotlardan geçen çözümler üretmeleri daha çok sayı örüntüleri ile çalışmalarından kaynaklı bir sonuç olarak ortaya çıkmaktadır.

- Nicelikleri anlama, nicelikler arasında ilişki kurarak anlamlandırma ve belirli bir kurala bağlı olarak ifade etme gibi stratejilerin bilinmediği ortaya çıkmıştır.
- Akademik düzeyleri göz önünde bulundurularak yapılan karşılaştırmalarda fonksiyonel düşünme bağlamında değerlendirildiğinde akademik performansı yüksek olan öğrencilerin nispeten daha etkili genellemeler yapabildiği ama her soruda aynı durumun geçerli olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

4.2. Tartışma

Bu çalışmada erken cebir sürecinde öğrencilerin temel bileşenlere yönelik becerileri aritmetiği genelleme ve fonksiyonel düşünme olmak üzere iki ana tema ile incelenmiştir. Ortaya çıkan sonuçlar yine aritmetiği genelleme ve fonksiyonel düşünme olmak üzere iki başlık altında tartışılmıştır.

4.2.1. Aritmetiği genelleme

Çalışmada aritmetiği genelleme üç başlık altında ele alındığı için ortaya çıkan sonuçlara yön elik tartışma bölümünde de işlem özelliklerini genelleme, sembollerin anlamı, nicel ilişkiler ve muhakeme olmak üzere üç başlık altında incelenmiştir.

İşlem özelliklerini genelleme

İlkokul döneminde ilk yıllardan itibaren öğretim programlarında yer alan temel işlemler, aritmetik deneyimlerin en üst düzeyde sergilendiği bölümler olduğundan dolayı sorgulanan ilk kavramlardandır. İşlemlerin kendi özelliklerinin ne düzeyde farkında olunduğu fikrinden yola çıkılmış, ancak öğrencilerin akademik performans düzeyi hangi düzeyde olursa olsun karşılarına çıkan ifadelerde işlem yapmaya yoluna gittiği dikkat çekmiştir. Bu durum öğrencilerin aritmetik çalışmalarından kalan bir alışkanlık olarak kabul edilebilir (Kaput, 2000). Düşük ve orta performans düzeyine sahip öğrencilerin ya herhangi bir genellemede bulunamadığı ya da doğrudan verilen ifadede deneme yanılma metodu ile hareket ettiği görülürken yüksek düzeyli performans gösteren öğrencilerin genellemelerinden emin olmak için sayıları, işlemleri ve işlem özelliklerini ön planda tutmaya çalışarak genellemeler yapmaya çalıştığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum değerlendirildiğinde öğrencilerin akademik performans düzeylerinin artması ile genelleme yapabilme becerilerinin artması Ataş (2019) ile tam anlamıyla benzerlik göstermemektedir. Bunun ne deni iki araştırmadaki öğrencilerin farklılaşması ya da Covid- 19 nedeniyle öğrenim yaşantılarından uzak olan öğrencilerin yeterli becerileri edinememiş olması olabilir.

İşlem özelliklerini genellemeye ilişkin bulgular incelendiğinde öğrencilerin işlemler ve sayılar arası ilişkileri kullanmaktan uzak oldukları sonucu ortaya çıkmıştır. Oysaki Blanton (2008) genelleme yapma sürecinde sayıların ve sayılar arasındaki ilişkilerin keşfedilerek ilerlenmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Bu noktada sayılar, sayılar arasındaki ilişkileri keşfederek varsayımlar oluşturabilmesi sembolik yapıya geçiş açısından önemlidir (Kieran, 2004). Dolayısıyla öğrencilerin sayılar ve işlemler arasındaki ilişkileri kullanamamalarının daha sonra formal cebire geçişlerini olumsuz etkileceği söylenebilir.

Sayılar ve sayılar arasındaki ilişkilerin görülerek sayı sisteminin farkına varılması ve varsayımlara dayalı genellemeler yapılabilmesi için etkili bir temel oluşturmaktadır. Bu nedenle sayıların teklik çiftlik bağıntılarına yönelik varsayımlar için gerekli çalışmalar formal matematik eğitimi bağlamında değerlendirildiğinde ders kitaplarında yer almaktadır. Ancak Soycan (2023) ilkokul ve ortaokul ders kitaplarında yer alan içeriklerin sayılar ve sayıların özelliklerini keşfetmeye yetecek kadar olmadığını belirtmektedir. Buradan hareketle öğrencilerin sayılar, sayı ilişkileri ve işlemler arasındaki keşiflerini gerçekleştirememelerinin ve sonuç olarak yeterli genellemelere ulaşamamalarının sebeplerinden biri de ders kitaplarında sayı ilişkilerini ve işlem özelliklerini içeren çalışmalara yeterince yer verilmemesi olarak nitelendirilebilir.

Sembollerin anlamı

Araştırmada sembollerin anlamına yönelik bulgular incelendiğinde öğrencilerin eşit işaretini tanımlarken doğrudan işlem sonucu olarak ifade ettiği görülmektedir. Bu anlayış akademik performans düzeyi fark etmeksizin tüm öğrencilerde bu şekilde görülmüştür. Bu noktada dikkat çekici olan husus ise tüm öğrencilerin eşit işaretinin anlamının bir işlem sonucu olabileceğinden öte gitmekte zorlanmasıdır. Bu noktada Blanton vd. (2018) öğrencilerin eşit işaretinin anlamını yorumlarken sırayla gerçekleşen işlemlerin bir eylem olarak gerçekleştiğini gösteren sembol olarak yorumlamasının eşit işaretinin devamında bir sonucu getirdiğini düşünmelerine neden olduğunu vurgulamaktadır.

Sembollerin anlamına yönelik yapılan incelemelerde değişkenin bilinmeyen ve değişen nicelik gibi anlamlarda algılanabildiği görülmektedir. Bu noktada öğrencilere sorulan soruya verdikleri yanıtlar incelendiğine ters işlem yöntemi ile karşılaşılabilmektedir. Kieran (2004) cebirsel düşünme becerilerinin geliştirilmesi bağlamında sadece işlemlerin kendisi ile ilgilenilmesinin yeterli olmadığını işlemlerin tersinin de cebirsel düşünme becerilerinin gelişimine katkı sağlarken sembolleri algılamayı kolaylaştıracağını belirtirken, öğrencilerin sadece sayılara değil sayıların yanında harflere de odaklanılması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu nedenle erken cebir döneminde bulunan bir öğrencinin doğrudan değişkene yönelik anlamlar geliştirememesi ilk aşamada kabul edilebilir gibi görünürken, ters işlem vb. yöntemler ile problem çözümüne yönelik çalışmalar yapılması erken dönemde cebirsel düşünmenin gelişebilmesi için elle tutulur somut çalışmalardandır denilebilir. Ayrıca NTCM (2000) cebirdeki sembolik ve yapısal vurgunun, öğrencilerin sayılarla ilgili kapsamlı deneyimleri yardımıyla anlaşılabileceğini ifade etmektedir. Çünkü aynı çalışmada NTCM (2000) cebirsel sembollerin anlaşılmasının matematik eğitimindeki önemine vurgu yaparken, cebirin kritik rolünün bu noktada başlayıp derin öğrenmelerin yolunu açan temel noktalardan biri olduğunu öne sürmektedir.

İlişkisel düşünmeye yönelik bulgular incelendiğinde, Köse ve Tanışlı (2011)'nın çalışmalarında standart sayı cümlesi, doğru/ yanlış cümlesi ve açık sayı cümlesi olarak işlem- eşitlik- yanıt biçiminde üç alt kategoride sınıflandırmasının ilişkisel düşünmeyi daha etkin bir şekilde ortaya çıkarmasıyla paralel olarak sorulan sorular, öğrencilerin sadece belirli işlemler arasında ilişkiler kurma, işlem özelliklerini kullanma ve herhangi bir özelliği kullanama gibi durumlarla karşılaşılması gibi sonuçları ortaya çıkarmıştır. Örneğin "_ +15 = 36 – 14" gibi bir ifadede öğrenci doğru yanıtı bulmakta zorlanırken, " _ + 11 = 12 + 8" şeklinde verilen bir ifadede net bir şekilde sonuca ulaşabilmektedir. Özel olarak bölme ve çıkarmaya yönelik sorulan sorularda öğrencilerin ilişkisel düşünmeden giderek uzaklaştıkları sonucuna varılmıştır. Toplama ve çarpmada ilişkilerin daha rahat görülmesi, çıkarma ve bölmede aynı düzeyde ilişkisel düşünülememesi dikkate alınması gereken önemli noktalardandır. Bu noktada öğretim programlarının da detaylı bir şekilde incelenip güncellenmesi söz konusudur.

Fonksiyonel düşünme

Fonksiyonel düşünme becerileri incelenirken öğrencilerin nicelikleri nasıl değerlendirdikleri, nicelikler arasında nasıl ilişki kurdukları, örüntüleri nasıl algıladıkları ve fonksiyonel ilişkinin nasıl gerçekleştirildiği incelenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin varyasyonel düşünme ve kovaryans düşünme yaklaşımlarını sergiledikleri cevapları incelenmiş ve bu yapılandırmaları zihinlerinde nasıl inşa ettikleri analiz edilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin örüntü ve genellemelerdeki yöntemlerine yönelik bulgular alanyazında yer alan Akkan (2021); Ataş, (2019); Cantella (2023); Kabael Tanışlı, (2010); Pang ve Sunwoo, (2022); Soycan, (2023); Tanışlı, Köse, (2011); Türkmen ve Tanışlı (2019)'nın yaptıkları çalışmalardan da destek alarak yorumlanmıştır.

Araştırmanın fonksiyonel düşünme becerilerine yönelik bulguları incelendiğinde öğrencilerin örüntüleri incelerken en dikkat çekici yöntemleri, akademik düzey fark etmeksizin, örüntüyü gördükleri anda sayı örüntüsüne çevirme ihtiyacı hissetmeleri olurken Türkmen ve Tanışlı (2019)'nın belirttiği gibi bu öğrencilerin yinelemeli örüntüye odaklanmasına neden olup daha üst düzeylere çıkmasına engel olmaktadır. Bu noktada sayı örüntüleri ile daha çok karşılaşmalarının etkisi olabileceği gibi; örüntülerin yapısını analiz etmekte zorlanmaları da söz konusudur. Bu nedenle çalışmada fonksiyonel düşünme bağlamında elde edilen bulguların alanyazında belirtilen görüşleri destekler nitelikte sonuçlara ulaşılmıştır. Çalışmada öne çıkan bir diğer durum ise $y = mx+n$ formunda ilkokul öğrencileri ile yapılan çalışmalarda (Centella, (2023); Starr vd., (2023) Stephens vd.,(2017); Torres, (2023); Türkmen ve Tanışlı (2019)) ortaya çıkan sonuçların bir benzerinin ortaokul düzeyine ulaşmış öğrencilerde ortaya çıkmasıdır. Bu noktada ortaokul düzeyindeki öğrencilerin kovaryans düşünme düzeylerinde farklı yapılandırmalar gerçekleştirmeleri beklenmektedir. Bu nedenle ortaokul düzeyinde oluşturulmayan farklı temsil biçimlerinin olumsuz etkilerini, ilerleyen öğretim süreçlerinde görmenin mümkün olması beklenmektedir.

Ataş, (2019); Pang ve Sunwoo, (2022); Soycan (2023) çalışmalarında da belirtildiği gibi örüntülerin analiz edilmesine yardımcı olacak nitelikte, özellikle yakın adım ve uzak adımlara yönelik çalışmaların gerçek yaşam bağlamında öğretim materyalleri ile öğrencilere sunulması gerekmektedir. Bunun yanında fonksiyonel ilişkinin ön planda tutulduğu çalışmaların öğrencilerin karşısına daha erken yaşlarda çıkarılması fonksiyonel düşünmenin gelişmesine katkı sağladığı bu çalışmanın sonuçlarını doğrular niteliktedir. Fonksiyonel ilişkinin genellenmesi ve temsil edilebilme becerileri incelendiğinde öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri temel düzeyde algılayabildiklerini göstermektedir. Bu noktada varyasyonel düşünmenin ön planda olduğu, kovaryans düşünmenin ve gelişmiş fonksiyonel üst düzey becerilere ulaşılabilmesi için (Türkmen, Tanışlı, 2019)'nın belirttiği gibi çoklu ni celiklerin ön pl ana taşınması gerekir. Özellikle n iceliklerin anlaşılması, tanımlanması ve birbirleri ile ilişkilerinin analiz edilebilmesi öğrencilerin fonksiyonel düşünme bağlamında öne çıkmalarına katkı sağlamaktadır. Benzer şekilde Starr ve arkadaşları (2023) çalışmalarında ilişkisel ve fonksiyonel düşünmenin ilkokul ve ortaokul boyunca geliştiğini ifade eder ve matematiksel akıl yürütmenin bu beceriler ile doğrudan bağlantılı olduğunu belirtir. Cantella (2023)'nın çalışmasında belirttiği gibi fonksiyonel ilişkilerin basit tanıdık formdan başlanılarak, belirli-bilinen adımdan uzak-belirsiz adıma doğru hareket edilmesi fonksiyonel ilişkinin fark edilebilmesi ve ifade edilebilmesi açısından önemlidir.

4.3. Öneriler

Bu böl ümde cebirsel düşünme bileşenlerinin temel varsayımlarını içeren aritmetiğin genellenmesi ve fonksiyonel düşünme becerilerinin incelenmesiyle ortaya çıkan bulguların ve sonuçlarının yorumlanması sonucunda gelecek araştırmalarda kullanılabilecek öneriler yer almaktadır.

4.3.1. Araştırmaya ve araştırma sonuçlarına yönelik öneriler

- Çalışma sonuçlarına göre matematiğin tüm alanları ile ilişkili olan cebirsel düşünmenin küçük yaşlardan itibaren formal cebir derslerini beklemeden aritmetik ve fonksiyonel düşünme gibi bileşenlerinin ön planda olduğu işlem özelliklerini, sembollerin anlamını ve nicel ilişkileri kavratmaya yönelik etkinliklerin okul öğrenme ortamlarında yer alması gerektiği öğrencilerin gösterdikleri performansalar neticesinde görülmüştür. Bu nedenle cebirsel düşünme bileşenlerinin daha net bir şekilde yapılandırılabilmesi için matematik dersi öğretim programlarının, ders materyallerinin ve ders kitaplarının uygun bir şekilde hazırlanması önerilmektedir.

- Araştırmada öğrencilerin "aslında bir özellik olduğunu bilmiyordum", "işlem yaparak sonuca hep ulaşabilirim", "bu tarz sorular çözmüyoruz" gibi açıklamalar yaptıkları dikkat çekmiştir. Bu noktada öğrencilerin karşılaştıkları problemlerin çözümünde matematiksel yöntemleri ve temsilleri birer araç gibi kullanmayıp kalıplaşmış durumlarla tekrarlı olarak karşılaşmayı bekledikleri düşüncesi görülmektedir. Bu da pratiklikten uzak, ezbere yakın bir anlayışın hâkim olduğunun göstergesi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda anlayışın değiştirilmesi için öğrencilerin cebirsel yapıları süreçleri zihinlerinde inşa edebilecekleri içerikleri ön plana çıkarmak gerektiği; çalışmada yer alan çok temel düzeyde olan sorularda öğrencilerin gerçekleştirdikleri akıl yürütmelerine dayanılarak ifade edilmektedir. Anlayışın değiştirilebilmesi için çok daha temel olan kavramların öneminin açık ve net bir şekilde rutin tekrar soruları yerine akıl yürütme çalışmaları yapılması önerilmektedir.

- Araştırmada aritmetiğin genellenmesi kapsamında ortaya çıkan kavram yanılgıları, ilkokul matematik derslerinde ders kitaplarında da yer alan işlem özellikleri bağlamında çalışmalar yapıldığı ancak bu çalışmaların daha etkili bir şekilde gerçekleştirilmesi gerektiği gerçeğini ortaya çıkarmıştır. Çalışmanın sonuçlarında işlemlerin ve işlem özelliklerinin birer matematiksel araç takımı şeklinde öğretilmesinin (örneğin, 0+4, 0+0, 0-0, 0x0, 4-0, 0:4, 1:1, k:k, k:1, kx1) formunda ifadelerin sözler olarak ifade edilebilir nitelikte yapılacak çalışmaların hem anlamayı kolaylaştıracağı hem de ilerleyen süreçlerde daha etkili varsayımlarda bulunulabileceği fikri önerilmektedir.

- Araştırmada fonksiyonel düşünme ve örüntüleri genelleme becerileri bağlamında verdikleri cevaplarda sayma sayıya dönüştürme, doğrudan anlam içermeyen rastgele çizimler yapma ve benzeri birçok metot kullanması temsil becerilerinin geliştirilmesi gerektiği, bu noktada eğitim öğretim sürecinde eksikliklerin olabileceği hususlarında dikkat çekmektedir. Bu nedenle bu becerilerin geliştirilmesini ön planda tutularak sınıf içi içeriklerin düzenlenmesi önerilmektedir.

- Temel düzeyde yapılan çalışmalarda fonksiyonel düşünme düzeylerinin göz önünde bulundurulup, varyasyonel düşünmenin üzerine çıkabilen, gelişmiş fonksiyonel düşünme becerilerini kazandırabilecek ilişkilerin informal biçimde sunulması önerilmektedir.

- Örüntülerin anlaşılıp, fonksiyonel düşünmenin temelinin oluşturulabilmesi için tablo temsillerinin işe koşulduğu yakın ve uzak adımların yer aldığı çalışmalara yer verilmesi önerilmektedir.

- Niceliklerin anlaşılması ve karşılaştırılması, cebirsel düşünme bağlamında gelişimi sağlayacağı için ilkokul düzeyindeki öğrencilerin farklı çokluklar arasında karşılaştırma yapabileceği "Metin'in bir miktar şekeri var, Buğlem'in Metin'den 12 fazla; Nuray'ın ise Buğlem'den 2 eksik şekeri vardır. Buradan hareketle Metin, Buğlem ve Nuray'ın şeker sayılarını belirleyelim." (örneğin, K>L L>M ise K ve L ya da K=L ve L=M İSE K ile M arasındaki ilişkinin belirlenmesi) formunda çalışmalara yer verilmesi önerilmektedir.

- Sembollerin anlamına yönelik, çalışmaların cebirsel düşünmenin gelişiminde etkin rolünden dolayı eşit işaretinin anlamıyla başlayan, bir yer tutucu olarak sembol kullanımı yapılan çalışmaların yapılması önerilmektedir.

4.4. Gelecekte yapılacak ileri çalışmalara yönelik öneriler

- 3.-5. sınıf düzeyinde aritmetiğin genellenmesi, fonksiyonel düşünme ve örüntüleri ge nelleme becerilerini ayrı ayrı inceleyen yapılandırma ve inşa süreçlerini konu alan çalışmalar yapılabileceği gibi bu noktada öğretmenlerin erken cebir sürecinde yaptıkları çalışmaların incelemesi yapılabilir.

- Araştırma kapsamında çalışılan öğrenci sayısı altı ile sınırlandırılmıştır. Bu sayı artırılarak daha geniş bir kitle ile çalışma yapılabileceği gibi çalışmanın özel durumları göz önünde bulundurularak nicel bir çalışma sürecine girilerek öğrenci düşünüşleri hakkında genellemelerin yapılabileceği çalışmalar yapılabilir.

- Erken cebir bağlamında öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerini geliştirmeyi amaçlayan özellikle fonksiyonel düşünme ve örüntüleri g enelleme üzerine yoğunlaşmış öğretim deneyi çalışmaları yapılabilir.

- Öğrencilerin erken cebir sürecinde öğrenmelerini ve anlamlandırmalarını kolaylaştırabilmek için materyallerin geliştirildiği çalışmalar yapılabilir.
- Öğrencilerin erken cebir döneminde cebirsel düşünme düzeylerini literatürde yer alan çerçeveler ve bileşenler bağlamında ölçmeyi hedefleyen tanılayıcı, biçimlendirici ya da değerlendirici araçların oluşturulduğu çalışmalar gerçekleştirilebilir.
- Erken c ebir döneminde ç oklu-disipliner çalışmalar gerçekleştirilerek bir araç olan cebirin kullanımı yaygınlaştırılarak, geçiş süreci kolaylaştırılabilir.
- Yapılan çalışmanın COVİD-19 pandemi döneminde erken cebir bağlamında eksik öğrenmelerinin gerçekleştirildiği göz önünde bulundurularak çalışma yenilenip farklı illerde, farklı gruplar üzerine uygulanabilir.
- Farklı ülkeler ile aynı yaş dönemindeki öğrencilerin erken cebir dönemindeki becerilerini incelemeye yönelik çalışmalar yapılabilir.
- Formal cebir anlayışının erken cebir anlayışının devamı olarak gerçekleştirilebileceği oryantasyon içerikli çalışmalara yer verilebilir.

KAYNAKÇA

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2002). A model for analysing algebraic processes of thinking. *Perspectives on school algebra*, 61-81.

Akkan, Y. (2009). İlköğretim öğrencilerinin aritmetikten cebire geçiş süreçlerinin incelenmesi. *Yayınlanmamış doktora tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon*.

Akkan, Y., Adnan, Baki., & ÇAKIROĞLU, Ü. (2011). Aritmetik ile cebir arasındaki farklılıklar: Cebir öncesinin önemi. *İlköğretim Online*, *10*(3), 812-823.

Baş, S., Çetinkaya, B., & Erbaş, A. K. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. *Eğitim ve Bilim*, *36*(159).

Baykul, Y., & Turgut, M. F. (2001). Eğitimde ölçme ve değerlendirme. *Ankara: MEB yayınları*.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 3-12). *Dordrecht: Springer Netherlands.*

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *International Group For The Psychology Of Mathematics Education*.

Blanton, M. L. (2008). Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice. *Heinemann Educational Books.*

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlin, *Heidelberg: Springer* Berlin Heidelberg.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 *Association Drive*, Reston, VA 20191-1502.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2017). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “best deal” problem. In Algebra in the early grades (pp. 273-302). *Routledge.*

Booth, L. (1984). Misconceptions leading to error in elementary algebra. *Journal of structural learning*.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç-Çakmak, E., Akgün, Ö., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2008). Bilimsel araştırma yöntemleri.

Centella, E. L. (2019, August). Functıonal Thınkıng Of Thırd Grade Students: A Study From Early Algebra Framework. *In International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (p. 251).

Carnahan, W. H. (1946). History of Algebra. *School Science and Mathematics*, *46*(1), 7-12.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*, 3-22.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191-218). Routledge.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2017). Early algebra is not the same as algebra early. In *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Routledge.

Carpenter, T. P., Levi, L., & Farnsworth, V. (2000). Building a Foundation for Learning Algebra in the Elementary Grades. *In Brief*, *1*(2), n2.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. routledge.

Dede, Y., & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(24), 180-185.

Ding, R., Huang, R., & Deng, X. (2023). Multiple pathways for developing functional thinking in elementary mathematics textbooks: A case study in China. Educational Studies in Mathematics, 114(2), 223-248.

Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers, Grades 6-10*. Heinemann, 361 Hanover Street, Portsmouth, NH 03801-3912.

Findell, B., Swafford, J., & Kilpatrick, J. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press.

Haldar, L. C. (2014). *Students' Understandings of Arithmetic Generalizations*. University of California, Berkeley.

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*, 231-257.

İspir, O. A., & Palabıyık, U. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(30), 111-123.

Kabael, T. ve Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, *9*(1), 213-228.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra1. In *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Routledge.

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2000). Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable on a Massive Scale.

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2005). A teacher-centered approach to algebrafying elementary mathematics. In *Understanding mathematics and science matters* (pp. 99-125). Routledge.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2017). *Algebra in the early grades*. Routledge.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-49). Brill.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 79-105.

Kieran, C. (2018). The early learning of algebra: A structural perspective. In *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Routledge.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1131-1150.

Küchemann, D. (1981). Cognitive demand of secondary school mathematics items. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 301-316.

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12 th ICMI Study*, 45-70.

McConaughy, S. H., & Whitcomb, S. A. (2022). *Clinical interviews for children and adolescents: Assessment to intervention*. Guilford Publications.

MacGregor, M., & Stacey, K. (2007). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. In *Stepping stones for the 21st century* (pp. 63-81). Brill.

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2009). *İlköğretim* Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2013). *Ortaokul*

Matematik Dersi 5-8. Sınıflar Öğretim Programı. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Najma, Laughina A'yun Zahrotu & Masduki, M. (2023). Exploration of Student Algebraic Thinking In Terms Of Implusive Reflective Cognitive Style. *Journal of Medives: Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, *7*(2), 219-231.

National Research Council. (1998). *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium*. National Academies Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics: A guide for mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, *47*(8).

National Research Council, Center for Education, Committee on Science, & Mathematics Teacher Preparation. (2001). *Educating teachers of science, mathematics, and technology: New practices for the new millennium*. National Academies Press.

Köse, N. Y., Tanışlı, D., & Tanışlı, D. (2011). İlköğretim Matematik Ders Kitaplarında Eşit İşareti ve İlişkisel Düşünme. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen Ve Matematik Eğitimi* Dergisi, 5(2), 251-277.

Pang, J., & Sunwoo, J. (2022). Design of a pattern and correspondence unit to foster functional thinking in an elementary mathematics textbook. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1315-1331.

Radford, L. G. (2002). The historical origins of algebraic thinking. *Perspectives on school algebra*, 13-36.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 3-25.

Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(6), 1151-1167.

Radford, L. (2001, July). Factual, Contextual and symbolic generalizations in algebra. In *Pme Conference* (Vol. 4, pp. 4-81).

Ralston, N. (2013). The development and validation of a diagnostic assessment of algebraic thinking skills for students in the elementary grades (Doctoral dissertation).

Sattler, J. M. (1998). *Clinical and forensic interviewing of children and families: Guidelines for the mental health, education, pediatric, and child maltreatment fields*. Jerome M Sattler Publisher.

Piriya, S. (2018). *A cognitive model of year five pupils' algebraic thinking/Piriya Somasundram* (Doctoral dissertation, University of Malaya).

Starr, A., Leib, E. R., Younger, J. W., Project iLead Consortium, Uncapher, M. R., & Bunge, S. A. (2023). Relational thinking: An overlooked component of executive functioning. Developmental Science, 26(3), e13320.

Strachota, S. (2020). Generalizing in the context of an early algebra intervention (La generalización en el contexto de una intervención algebraica temprana). *Journal for the Study of Education and Development*, *43*(2), 347-394.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166.

Sutherland, R. (Ed.). (2001). *Perspectives on school algebra*. Springer Science & Business Media.

Tanışlı, D., & Ataş, Y. (2019). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri ve ölçme problemlerini çözme süreçlerindeki cebirsel düşünme becerileri* (Master's thesis, Tez (yüksek lisans)-Anadolu Üniversitesi).

Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R., & Cañadas, M. C. (2023). The Evolution from "I think it plus three" Towards "I think it is always plus three." Transition from Arithmetic Generalization to Algebraic Generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21.

Turgut, S., & DOĞAN, Ö. (2017). Erken cebir öğretim etkinliklerinin ilkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin akademik başarılarına etkisi. *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *6*(1), 1-31.

Türkmen, H., & TANIŞLI, D. (2019). Cebir öncesi: 3, 4 ve 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonel ilişkileri genelleme düzeyleri. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *7*(1), 344-372.

Twohill, A . (2018). Observations of s tructure within s hape pa tterns. *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 213-235.

Utami, N. S., Prabawanto, S., & Suryadi, D. (2023). How Students Generate Patterns in Learning A lgebra? A Focus on Functional Thinking i n S econdary S chool Students. *European Journal of Educational Research*, *12*(2).

Usiskin, Z. (1995). Why Is Algebra Important to Learn? *American Educator*, *19*(1), 30-37.

Yenilmez, K ., & M elike, T . E . K. E . (2008). Y enilenen M atematik P rogramının Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Düzeylerine Etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *9*(15), 229-246.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2021). *Elementary and middle school mathematics (10th edt)*. Pearson Education UK.

Wagner, S., & Kieran, C. (Eds.). (1989). Research issues in the learning and teaching of algebra.

Wilkie, K. J. (2016). Learning to teach upper primary school algebra: changes to teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *28*, 245-275.

Wilkie, K. J., & Hopkins, S. (2024). Generalizing actions with the subtraction-compensation property: primary students' algebraic thinking with tasks involving vertical towers of blocks. *Educational Studies in Mathematics*, 1-26.

EKLER

EK-1 KLİNİK GÖRÜŞME ÖĞRENCİ CEVAP FORMU

76 □ 48 = 48 □ 76

a.

b.

c.

1. Sena'nın öğretmeni ondan "12, 14 ve 5" sayılarını sırayla önce 12 ile 14'ü çarpmasını bulduğu sonuç ile 5'i çarpmasını ister. Sena ise önce 12 ile 5'i çarpar, sonra bulduğu sonuç ile 14'ü çarpar.

a.

b.

c. Sena'nın öğretmeni bu sefer ondan "12, 14 ve 5" sayılarını sırayla önce 12 ile 14'ü toplamasını bulduğu sonuç ile 5'i toplamasını ister. Sena ise önce 12 ile 5'i toplar, sonra bulduğu sonuç ile 14'ü toplar.

d.

e.

2. Ayşe 16x5 şeklindeki çarpma işlemini yaparken 16x5=8x10=80 şeklinde yapıyor. Ayşe'nin kullandığı yöntemi kullanarak;
a. 32x5 işlemini çözünüz

b.

3.

36 x 6 =
18 x 12 =

4. 33 sayısına 15 ekleyip 15 çıkardığımızda sonuç ne olur?
a. 567 sayısına 113 ekleyip, 113 çıkardığımızda sonuç ne olur?
b. Merve'nin kumbarasında 73 lira vardır. Kumbarasındaki paralara 155 lira daha eklemiş, yaz tatilinde 155 lira harcamıştır. Son durumda Merve' nin paraları hakkında ne söylenebilir?

5.

345 + 0=? 0 + 345=?

345 x 0=? 0 x 345=?

1024 x 1=? 234 - 234=?

6.

a) Bir tek sayı ile bir çift sayıyı toplarsanız ne olur? Sonuç tek midir? Çift midir?
b) İki çift sayının toplamı tek midir? Çift midir?

c) İki tek sayının toplamı tek midir? Çift midir?
d) Üç tek sayıyı topladığın zaman ne olur? Dört tek sayıyı?
e) Varsayalım ki pek çok tek sayıyı topluyorum. Ancak kaç tane olduğunu söylemiyorum. Sonucumun tek ya da çift olup olmadığını söyleyebilir misiniz?

f)

7. 237 + 18 = 255 144+ 121 = 265
a) Ok ile gösterilen sembolün anlamı nedir?
b)Bu sembol ile ilgili olarak aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri en iyi tanımdır?
i) İşlemin sonucunu ifade eder.
ii) İki şeyin birbirine eşit olduğunu gösterir.

8. Aşağıda verilen terazi dengededir. Terazinin sol kefesine 1 tane ● ekleniyor. Teraziyi tekrar denge konumuna getirmek için ne yapılmalıdır?

9.

Yukarıda verilen teraziler dengededir. Birinci terazinin sol kefesinde 2 elma, sağ kefesinde ise 10 ceviz; ikinci terazinin ise sol kefesinde 5 ceviz, sağ kefesinde 10 fındık bulunmaktadır. Buna göre üçüncü terazinin sol kefesinde 3 elma olduğuna göre terazinin dengede olması için, sağ kefede kaç tane fındık olmalıdır?

10. 3x □ = 78 3 x Δ x 8 = 78 x 8

Yukarıda verilen eşitliklerde □ ve Δ yerine gelebilecek sayıları bulunuz. Bu sayılar için ne söyleyebilirsiniz?

11.

Δ + 18 = 54
Δ + 18 - 7 = 54-7

Yukarıda verilen her iki eşitlikte Δ yerine gelebilecek sayı için ne söyle bilirsiniz.

12. □+□+□-□=10 eşitliğinde □ ne olmalıdır? Neden?

13. Aşağıda verilen işlemler doğru mu yoksa yanlış mı?

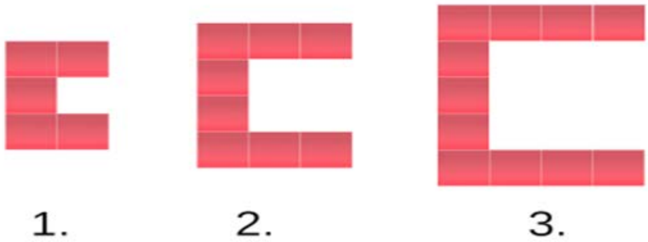
674 - 389 = 664 - 379	4 x 5 = 5 + 5 +5 + 4
37 + 54 = 38 + 53	4 x 10 - 4 = 4 x 8
5 x 84= 10 x 42	4+3 x 8=4 x 8 - 4
42 : 16 = 84 : 32	

14. Aşağıda verilen eşitliklerde □ yerine gelebilecek sayıları bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

a) 53 + □ = 58 + 76
b) 68 + 58 = 57 + 69 + □
c) 71 - 52 = 72 - □
d) 49 – 25 = 54 – □
e) □ =12 - 8
f) 627 – 125 = 625 – 121 - □
g) 5 x 9 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 - □
h) 2 x 9 = (2 x 10) - □

Ayşe, Büşra'dan 12 cm daha uzundur. Büşra ise Nazlı'dan 14 cm daha kısadır.
a) Ayşe, Büşra ve Nazlı'nın boy uzunlukları çizerek gösterebilir misiniz?
b) Ayşe, Büşra ve Nazlı'nın boy uzunlukları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklar mısınız?
c) Boy uzunluklarını büyükte küçüğe sıralar mısınız?

17.



Ahmet usta bir sitenin bahçesine bir yürüyüş alanı yapmayı planlamaktadır. Tasarımını yaparken şekilde görüldüğü gibi yürüyüş alanına kare şeklinde fayanslar döşeyecektir. Ahmet usta yürüyüş alanı büyüdükçe kullanılacak fayans sayılarını hesaplamak istemektedir. Ahmet ustaya yardımcı olalım ve istenilen soruları yanıtlayalım:

a)

b)

c)

Adım sayısı	**Fayans sayısı**
1	
2	
3	
4	
5	
10	
37	

18.

Aşağıdaki tabloda bir dalgıca su altında farklı derinliklerde etki eden basınç miktarı verilmiştir. Buna göre;

Derinlik (m)	**Basınç (Bar)**
0	1
10	2
20	3
30	4
40	5
50	6

a) 60m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz.
b)150m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz.
c) Derinlik ile dalgıca etki eden basınç arasındaki ilişkiyi ifade ediniz. İlişkiyi herhangi bir metrede istediğiniz bir sembol (kutucuk, yıldız vs) kullanarak nasıl yazarsınız?

19.Nazlı ve Zeynep'in her birinin bir şeker kutusu var. Kutuların her birinde aynı sayıda şeker olduğunu biliyorlar ama kaç tane olduğunu bilmiyorlar. Zeynep'in de elinde 8 şekeri var.
a) Nazlı'nın sahip olduğu şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?
b) Zeynep'in sahip olduğu toplam şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

c) Nazlı ve Zeynep'in tüm şekerlerini birleştiriniz. Hep birlikte sahip oldukları şeker sayısını kutucuk vs. kullanarak nasıl gösterirsiniz?

EK-2 KLİNİK GÖRÜŞME ARAŞTIRMACI FORMU

ARİTMETİĞİN GENELLENMESİ

Sayı Sisteminin Özellikleri

İşlem Özellikleri

1. 63□48=48□63

a) Yukarıda verilen ifadede □ sembolü yerine dört işlemden (+, −, · ,÷) hangisi veya hangileri gelebilir? Neden? Açıklayınız.

b) Yukarıdaki ifadede doğru olarak düşündüğünüz işlem/işlemler için benzer yapıda iki örnek yazınız.

c) Yukarıdaki örnekleri inceleyiniz. Keşfettiğiniz ilişkiyi ifade ediniz.

2. Sena'nın öğretmeni ondan "12, 14 ve 5" sayılarını sırayla önce 12 ile 14'ü çarpmasını bulduğu sonuç ile 5'i çarpmasını ister. Sena ise önce 12 ile 5'i çarpar, sonra bulduğu sonuç ile 14'ü çarpar.

a) Sena'nın yöntemi doğru mudur yanlış mıdır?

b) Sena'nın bu yöntemi her zaman işe yarar mı? Neden?

c) Sena'nın öğretmeni bu sefer ondan "12, 14 ve 5" sayılarını sırayla önce 12 ile 14'ü toplamasını bulduğu sonuç ile 5'i toplamasını ister. Sena ise önce 12 ile 5'i toplar, sonra bulduğu sonuç ile 14'ü toplar.

e) Sena'nın yöntemi doğru mudur yanlış mıdır?

f) Sena'nın bu yöntemi her zaman işe yarar mı? Neden?

Temel özelliklerden elde edilen varsayımlar

3. Ayşe 16x5 şeklindeki çarpma işlemini yaparken 16x5=8x10=80 şeklinde yapıyor. Ayşe'nin kullandığı yöntemi kullanarak;

a) 32x5 işlemini çözünüz

b) Yukarıda çözmüş olduğunuz örnekleri inceleyiniz. Keşfettiğiniz ilişkiyi ifade eder misiniz?

4.

1x8= 2x4=

Yukarıdaki çarpma işlemlerini çözünüz. Çözmüş olduğunuz örnekleri inceleyiniz. Keşfettiğiniz ilişkiyi ifade eder misiniz?

5.33 sayısına 15 ekleyip 15 çıkardığımızda sonuç ne olur? Yaptığınız bu işlemlerde ne fark ediyorsun? Açıklar mısın? Bu her zaman doğru mudur?

345+0=? 0+345=?

345x0=? 0X345=?

1024x1=?

234-234=?

Tek-Çift Sayılar

6.

a) Bir tek sayı ile bir çift sayıyı toplarsanız ne olur? Sonuç tek midir? Çift midir? Neden?

b) İki çift sayının toplamı tek midir? Çift midir? Neden?

c) İki tek sayının toplamı tek midir? Çift midir? Neden?

d) Üç tek sayıyı topladığın zaman ne olur? Dört tek sayıyı? Neden?

e) Varsayalım ki pek çok tek sayıyı topluyorum. Ancak kaç tane olduğunu söylemiyorum. Sonucumun tek ya da çift olup olmadığını söyleyebilir misiniz? Neden?

f) Bu düşüncenin doğru olduğunu nasıl biliyorsunuz? Bu düşüncen her zaman geçerli midir? Neden?

Sembollerin Anlamı

Eşit İşaretinin Anlamı

7.

12+23 = 35   **25− 8 = 11+6**

a) Ok ile gösterilen sembolün anlamı nedir?
b) Bu sembol ile ilgili olarak aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri en iyi tanımdır?

i) İşlemin sonucunu ifade eder.

ii) Her iki tarafındaki matematiksel ifadelerin denkliğini belirtir.

iii) İki şeyin birbirine eşit olduğunu gösterir.

8. Aşağıda verilen terazi dengededir. Terazinin sol kefesine 1 tane ●ekleniyor. Teraziyi tekrar denge konumuna getirmek için ne yapılmalıdır? Açıklayınız.

9. 3x □ = 78;   3x Δ x8=78x8

Yukarıda verilen eşitliklerde □ ve Δ yerine gelebilecek sayıları bulunuz. Bu sayılar için ne söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

10.

Δ +18=54

Δ +18-7=54-7

Yukarıda verilen her iki eşitlikte ∆ yerine gelebilecek sayı için ne söyle bilirsiniz? Nedenini açıklayınız.

11.□+□+□-□=10 eşitliğinde □ ne olmalıdır? Neden?

12.Aşağıda verilen terazi dengededir. Buna göre, terazinin denge durumunu gösteren eşitliği yazarak, bilinmeyen kütlenin ağırlığını bulunuz.

I II III

a)Yukarıda verilen teraziler dengededir. Birinci terazinin sol kefesinde 2 elma, sağ kefesinde ise 10 ceviz; ikinci terazinin ise sol kefesinde 5 ceviz, sağ kefesinde 10 fındık bulunmaktadır. Buna göre üçüncü terazinin sol kefesinde 3 elma olduğuna göre terazinin dengede olması için, sağ kefede kaç tane fındık olmalıdır?

İlişkisel Düşünme

Doğru-Yanlış Cümleleri

13. Aşağıda verilen işlemler doğru mu yoksa yanlış mı? Neden?

674-389=664-379	4x5=5+5+5+4
37+54=38+53	4x10-4=4x8
5x84=10x42	4+3x8=4x8-4
42:16=84:32	

14.Aşağıda verilen boşluklara uygun sayıları yerleştiriniz. Nasıl yaptığınızı açıklayınız.

___+___=___+___

___ - ___ = ___ - ___

___+___=___ - ___

Açık Sayı Cümleleri

15. Aşağıda verilen eşitliklerde □ yerine gelebilecek sayıları bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

a) 53 + □ = 58 + 76

b) 68+58=57+69+□

c) 71-52=72-□

d) 49 – 25 = 54 – □

e) □ =12-8

f) 627-125=625-121-□

g) 5x9=10+10+10+10+10-□

h) 2x9=(2x10)- □

Nicel İlişkiler

16.Ayşe, Büşra'dan 12 cm daha uzundur. Büşra ise Nazlı'dan 14 cm daha kısadır.

d) Ayşe, Büşra ve Nazlı'nın boy uzunlukları çizerek gösterebilir misiniz?

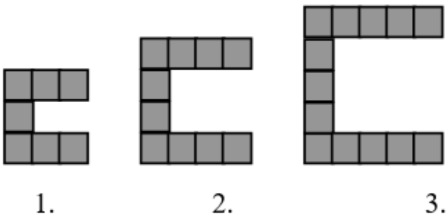
e) 12 ve 14 sayıları ne anlama geliyor? Açıklar mısınız?

f) Ayşe, Büşra ve Nazlı'nın boy uzunlukları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklar mısınız?

g) Boy uzunluklarını büyükte küçüğe sıralar mısınız?

FONKSİYONEL DÜŞÜNME

Örüntü ve Genelleme



17.Ahmet usta bir sitenin bahçesine bir yürüyüş alanı yapmayı planlamaktadır. Tasarımını yaparken şekilde görüldüğü gibi yürüyüş alanına kare şeklinde fayanslar döşeyecektir. Ahmet usta yürüyüş alanı büyüdükçe kullanılacak fayans sayılarını hesaplamak istemektedir. Ahmet ustaya yardımcı olalım ve istenilen soruları yanıtlayalım:

a) Şekilde verilen fayanslar her adımda nasıl büyüyor? Açıklar mısınız?

b) 5. Adımı nasıl çizmek istersen nasıl çizebilirsiniz?

c) Aşağıdaki tabloyu doldurarak 10. ve 37. Adımlardaki fayans sayıları nasıl bulabilirsiniz? Açıklar mısınız?

Adım sayısı	**Fayans sayısı**
1	
2	
3	
4	
5	
10	
37	

d) Herhangi bir adımda fayans sayısını bulmak için bir kural söyleyebilir misiniz?

e) Kural her zaman işe yarar mı?

f) Örüntünün nasıl büyüdüğünün açıklanmasının farklı yolları var mı?

18.Aşağıdaki tabloda bir dalgıca su altında farklı derinliklerde etki eden basınç miktarı verilmiştir. Buna göre;

a) 60 m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz. Nasıl bulduğunu açıklayınız.

b)150m derinliğinde dalgıca etki eden basınç miktarlarını bulunuz. Nasıl bulduğunu açıklayınız.

c) Derinlik ile dalgıca etki eden basınç arasındaki ilişkiyi ifade ediniz. İlişkiyi herhangi bir metrede istediğiniz bir sembol kullanarak nasıl yazarsınız?

Derinlik (m)	Basınç (Bar)
0	1
10	2
20	3
30	4
40	5
50	6

19.Nazlı ve Zeynep'in her birinin bir şeker kutusu var. Kutuların her birinde aynı sayıda şeker olduğunu biliyorlar ama kaç tane olduğunu bilmiyorlar. Zeynep'in de elinde 8 şekeri var.

a). Nazlı'nın sahip olduğu şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

b) Zeynep'in sahip olduğu toplam şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

c). Nazlı ve Zeynep'in tüm şekerlerini birleştiriniz. Hep birlikte sahip oldukları şeker sayısını nasıl gösterirsiniz?

EK-3 VELİ İZİN FORMU

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, “5. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Düzeyleri: Cebir Öncesi Dönem” adıyla Ocak 2022- Haziran 2022 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: 5. Sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düz eylerinin cebir öncesi dönemde incelenmesi hedeflenmektedir.

Araştırma Uygulaması: Görüşme /Gözlem şeklindedir.

Araştırma T.C. Millî Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için he rhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : Berkay KÖSEOĞLU

Velisi bulunduğum .... sınıfı .... numaralı öğrencisi .... …………………………….’in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum. (Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).

…./…../…………

EK-4 GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Sayın Katılımcımız

Katılacağınız bu çalışma, "5. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Düzeyleri: Cebir Öncesi Dönem" adıyla, Berkay KÖSEOĞLU tarafından Ocak 2022-Haziran 2022 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: 5. Sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeylerinin cebir öncesi dönemde incelenmesi hedeflenmektedir.

Araştırmanın Nedeni: ○ Bilimsel araştırma ● Tez çalışması

Araştırmanın Yapılacağı Yer(ler):

Araştırma Uygulaması: ● Görüşme ● Gözlem

Araştırma T.C. Millî Eğitim Bakanlığı'nın ve okul/kurum yönetiminin izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çalışmada sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Veriler sadece araştırmada kullanılacak ve üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır.

Uygulamalar, kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden rahatsız hissederseniz cevaplama işini yarıda bırakabilirsiniz.

Katılımı onaylamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : Berkay KÖSEOĞLU

Yukarıda bilgileri bulunan araştırmaya katılmayı kabul ediyorum.

…./…../…………

İsim-Soyisim İmza:

Katılımcı Adı-Soyadı:

EK-5 ETİK KURUL BELGESİ

Ana.Üni.: 04.01.2022-242395

Evrak Kayıt Tarihi: 15.12.2021 | Protokol No: 231484

Tarih: 24.12.2021

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU

KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Yüksek Lisans Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	3-5. Sınıf Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Düzeyleri: Cebir Öncesi Dönem
~~PROJE~~/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ:	Prof. Dr. Dilek TANIŞLI
TEZ YAZARI:	Berkay KÖSEOĞLU
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	-
KARAR:	Olumlu

Prof. Dr. Saime ÖNCE
(Başkan-İkt. ve İdari Bil. Fak.)

Prof. Dr. M. Erkan ÜYÜMEZ *(Başkan Yardımcısı -İkt. ve İdari Bil. Fak.)*	**Prof. Dr. Fatime GÜNEŞ** *(Edebiyat Fak.)*
Prof. Dr. Yıldız UZUNER *(Eğitim Fak.)*	**Prof. Dr. İbrahim Cemil ULUKAN** *(Açıköğretim Fak.)*
Prof. Dr. Handan DEVECİ *(Eğitim Fak.)*	**Prof. Dr. Erkan YÜKSEL** *(İletişim Bil. Fak.)*

EK-6 MİLLİ EĞİTİM İZNİ

Ana.Üni.: 04.01.2022-242655

T.C.
ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Genel Sekreterlik
Yazı İşleri Müdürlüğü

Sayı : E-63784619-605.01-242655 04.01.2022
Konu : Berkay KÖSEOĞLU'nun Yüksek Lisans Tezi Uygulama İzin Talebi

IĞDIR VALİLİĞİNE
(İl Milli Eğitim Müdürlüğü)

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Berkay KÖSEOĞLU, Prof. Dr. Dilek TANIŞLI'nın danışmanlığında "3-5.Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Düşünme Düzeyleri: Cebir Öncesi Dönem" başlıklı Yüksek Lisans tezini hazırlamaktadır. Tez çalışması kapsamında 2021-2022 öğretim yılı Güz ve Bahar dönemlerinde İl Milli Eğitim Müdürlüğüne bağlı ek'te belirtilen okullarda öğrenim gören 3.,4. ve 5. sınıf öğrencileriyle araştırmanın uygulanması planlanmaktadır. Araştırmanın uygulanmasında Üniversitemiz Etik Kurulunca sakınca bulunmamaktadır.

Bilgilerinizi ve gerekli iznin verilmesini arz ederim.

Prof. Dr. Süleyman SÖZEN
Rektör a.
Rektör Yardımcısı

Ek:Yüksek Lisans Tez Önerisi

07/11/2022
MİLLİ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ
VALİ A.

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır

Belge Doğrulama Kodu : Belge Doğrulama Adresi : https://www.turkiye.gov.tr/anadolu-universitesi-ebys

Yunus Emre Kampüsü Tepebaşı/Eskişehir
Telefon No:
e-Posta:gensek@anadolu.edu.tr İnternet Adresi:www.anadolu.edu.tr
Kep Adresi:anadolu.universitesi@hs01.kep.tr
Bilgi için:
Büro Personeli
Telefon No:

Bu belge,güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Evrak sorgulaması https://turkiye.gov.tr/ adresinden yapılabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Berkay Köseoğlu

Yabanci Dil : İngilizce

Doğum Yeri ve Yılı :

E- Posta :

Eğitim Geçmişi:

- 2020-2024, Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı.
- 2016-2020, Balıkesir Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı.

Mesleki Geçmişi:

- 2023-……, İlköğretim Matematik Öğretmeni, Iğdır Tuzluca Hoca Ahmet Yesevi İmam Hatip Ortaokulu.
- 2021-2023, İlköğretim Matematik Öğretmeni, Iğdır Tuzluca Cumhuriyet Yatılı Bölge Ortaokulu.