

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**FINDIĞIN OPTİMUM SATIŞ SÜRESİNİN BELİRLENMESİ:
OYUN TEORİSİ VE KARAR KRİTERLERİ YAKLAŞIMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melike MUNTAŞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2023

**FINDIĞIN OPTİMUM SATIŞ SÜRESİNİN BELİRLENMESİ:
OYUN TEORİSİ VE KARAR KRİTERLERİ YAKLAŞIMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Melike MUNTAŞ
(509181214)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Burhaneddin İZGİ

HAZİRAN 2023

ISTANBUL TECHNICAL UNIVERSITY ★ GRADUATE SCHOOL

**DETERMINING THE OPTIMAL SELLING TIME OF NUT:
GAME THEORY AND DECISION CRITERIA APPROACHES**

M.Sc. THESIS

**Melike MUNTAŞ
(509181214)**

Department of Mathematical Engineering

Mathematical Engineering Programme

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Burhaneddin İZGİ

JUNE 2023

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 509181214 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Melike MUNTAŞ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “FINDIĞIN OPTİMUM SATIŞ SÜRESİNİN BELİRLENMESİ: OYUN TEORİSİ VE KARAR KRİTERLERİ YAKLAŞIMLARI” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Burhaneddin İZGİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

.....
Doç. Dr. Hale KÖÇKEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **26 Mayıs 2023**
Savunma Tarihi : **23 Haziran 2023**



ÖNSÖZ

Tezin yazımı boyunca, her adımda, büyük bir sabır ve özveriyle bana yol gösteren danışmanım Doç. Dr. Burhaneddin İZGİ'ye, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili anneme teşekkür ederim.

Haziran, 2023

Melike MUNTAŞ





İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ	xv
ŞEKİL LİSTESİ	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Oyun Teorisi	4
1.1.1 İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar	5
1.2 Çözüm Yöntemleri	8
1.2.1 Oyun teorisi ile doğrusal programlama arasındaki ilişki	8
1.2.2 Oyun teorisinde matris normlarının rolü: MN yöntemi	10
2. BELİRSİZLİK ALTINDA KARAR VERME KRİTERLERİ	17
2.1 Laplace Kriteri	18
2.2 Maximax Kriteri	19
2.3 Wald (Maximin) Kriteri	20
2.4 Savage (Pişmanlık) Kriteri	21
2.5 Hurwicz Kriteri	23
3. UYGULAMA: FİNİDİĞİN OPTİMUM SATIŞ DÖNEMİNİN BELİR- LENMESİ	25
3.1 Doğrusal Programlama ile Çözüm	26
3.2 MN yöntemi ile Çözüm	32
3.3 Karar Kriterleri Açısından Problemin İrdelenmesi	33
4. SONUÇLAR	37
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	45

KISALTMALAR

MN-Yöntemi: Matris Norm Yöntemi

3D : 3-boyutlu

TÜİK : Türkiye İstatistik Kurumu





SEMBOLLER

v	: Oyunun değeri
P, Q	: Karma stratejiler kümesinin oyuncularını
p_i, q_i	: Oyuncuların karma strateji kümesinin elemanları
$\rho(A)$	: A matrisinin spectral yarıçapı
$\lambda(A)$	: A matrisinin özdeğeri





ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 : Karar matrisi.....	18
Çizelge 2.2 : Laplace kriteri: karar matrisi.	19
Çizelge 2.3 : Maximax kriteri: karar matrisi.	20
Çizelge 2.4 : Wald kriteri: karar matrisi.	21
Çizelge 2.5 : Savage kriteri: karar matrisi.	22
Çizelge 2.6 : Savage kriteri: karar matrisi oluşturma.	22
Çizelge 2.7 : Savage kriteri ile oluşan karar matrisi.....	23
Çizelge 2.8 : Savage kriteri: karar matrisi- I.....	23
Çizelge 2.9 : Hurwicz kriteri: karar matrisi.....	24
Çizelge 2.10 : Hurwicz kriteri: karar matrisi- I.	24
Çizelge 3.1 : 2010-2021 yılları arasındaki aylık cari fındık fiyatları (tl/kg).....	27
Çizelge 3.2 : Yurt içi üretici fiyat endeksi bir önceki yılın aynı ayına göre değişim (yıllık değişim) (%).	27
Çizelge 3.3 : 2010-2021 yılları arasındaki aylık reel fındık fiyatları (tl/kg).....	28
Çizelge 3.4 : Fındık fiyatlarının oyun matrisi (tl/kg).	28
Çizelge 3.5 : Fındık fiyatları getiri matrisi- maximax kriteri.	34
Çizelge 3.6 : Fındık fiyatları getiri matrisi- wald kriteri.	35
Çizelge 3.7 : Fındık fiyatları getiri matrisi- savage kriteri- I.....	35
Çizelge 3.8 : Fındık fiyatları getiri matrisi- savage kriteri- II.....	36
Çizelge 3.9 : Fındık fiyatları getiri matrisi- hurwicz kriteri.....	36



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Sekil 3.1 : Fındık fiyatları oyun matrisinin oyun değeri ve çözüm vektörleri.....	29
Sekil 3.2 : Maksimize doğrusal program modelin slack ve surplus değerleri.....	30
Sekil 3.3 : Fındık fiyatları oyun matrisinin oyun değeri ve çözüm vektörleri	31
Sekil 3.4 : Minimize doğrusal program modelin slack ve surplus değerleri	32





FINDIĞIN OPTİMUM SATIŞ SÜRESİNİN BELİRLENMESİ: OYUN TEORİSİ VE KARAR KRİTERLERİ YAKLAŞIMLARI

ÖZET

Tarım alanında üretim ve pazarlama sürecinde risk koşullarında faaliyet gösterilmekte, karar vericiler kararlarını belirsizlik ortamında vermektedir. Üreticilerin geleceğe yönelik planlama yaparken doğanın yapısından kaynaklanan riskleri analiz etmesi ile tarımda bir ürünün üretimi ve satışa sunulması için doğru zamana ve satış fiyatına karar vermesi gerekmektedir. En uygun satış fiyatı ve en uygun satış yapılacak dönemin seçiminde yaşanan belirsizliklere karşı oyun teorisi ve karar teorisinden yararlanmak mümkündür.

Bir ürünün piyasa satışı için uygun zamanın ve dolayısıyla satış fiyatının belirlenmesini temel aldığımız problemin çözümüne yönelik dinamik programlama, oyun teorisi ve karar kriterleri kapsamında uygulamayı hedeflediğimiz problem olan fındık satışı için uygun satış zamanı ve fiyatını bularak satıcının karını arttırması planlanmış ve bu çalışmada hem ülkemiz hem de dünya için fındık üreticisinin satış planlanmasına yardımcı olacak bir yaklaşım sunulması hedeflenmiştir.

2020 yılı FAO verilerine göre dünyada toplam fındık üretiminin % 59,61'ini karşılayan Türkiye, dünya fındık üretiminde birinci sıradadır. Fındık ve fındıktan üretilen ürünlerin ihracatının dünya üzerinde son 5 yıldaki kabuklu fındık olarak karşılığı ortalama 711 bin ton olup bunun %71'i Türkiye tarafından karşılanmaktadır. FAO verilerinin sonucuna göre dünyada fındık ihtiyacının büyük bir kısmını karşılayan Türkiye'de üretim ve ihracatın yanı sıra iç piyasalarda da fındık önem arz etmektedir.

Birinci bölümde fındığın en uygun satış fiyatı ve en uygun satış yapılacak döneminin seçiminde kullanılacak oyun teorisi ve doğrusal programlamanın kavram ve uygulama yöntemlerine ihtiyaç olduğu ölçüde yer verilmesi amaçlanmıştır. Bu bölümde ilk olarak oyun teorisinin tarihsel gelişimi ve literatürde oyun teorisi ile uygulama yapılan bazı çalışmalar incelenmiştir. Ardından oyun teorisinin temel kavramları ve iki kişilik sıfır toplamli oyunlar sunulmuştur. Sonra oyun teorisi ile bağlantısı olan doğrusal programlamanın tanımı, tarihsel gelişimi ve çalışmaya konu olan uygulama problemine benzer geçmişte yapılan bazı çalışmalardaki kullanımı gösterilmiştir. Ardından strateji sayısı arttıkça çözümü zorlaşan oyunların çözümünde sıklıkla kullanılan doğrusal programlamanın oyun teorisi ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Sonra matris oyunlarında hiçbir denklem çözülmeden yaklaşık çözümün bulunduğu MN yöntemi incelenmiştir. MN yönteminin teorik alt yapısı sunulmuş ve birkaç örnekle uygulaması yapılmıştır.

İkinci bölümde, belirsizlik altında karar alma kriterleri tanımlarına yer verilmiş ve örneklerle incelenmiştir. İlk olarak tüm olası alternatiflerin gerçekleşme olasılıklarının eşit kabul edildiği Laplace kriteri tanımlanmıştır. Sonra iyimser karar vericinin

alternatif seçenekler arasından en büyük getiriye sağlayan stratejiyi seçtiği Maximax kriteri incelenmiştir. Ardından kötümser karar vericinin en küçük getiri değerinin en yüksek olduğu seçeneği seçtiği Wald kriteri tanımlanmıştır. Sonra şüpheli olan karar vericinin en büyük getiriler içinden en küçükleri hedeflediği Savage kriteri gösterilmiştir. Son olarak Hurwicz karar kriteri ile karar vericinin iyimser ve kötümser yaklaşımının bir olasılık değeri ile belirlendiği gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, TÜİK'ten alınan fındık fiyatları ile oyun matrisi oluşturulmuştur. Ardından doğrusal programlama yöntemi ile fındık fiyatları matrisinde analizler yapılmıştır. Sonra MN yöntemi ile hiçbir denklem çözmeden fındık fiyatları oyun matrisinin yöntem sonucunda bulunan aralıktan yaklaşık oyun değeri ve seçilen yaklaşık oyun değerine göre örnek bir strateji kümesi seçilmiştir. Ardından her iki yöntemin birbirleriyle karşılaştırması yapılmıştır. Fındık fiyatları getiri matrisi için çözüm yapılan MN yönteminde bulunan değerler ile doğrusal programlamada bulunan değerler karşılaştırıldığında, yaklaşık oyun değeri ile gerçek oyun değerinin birbirine yakın olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca MN yönteminin yakınsadığı bilindiğinden bir matris oyunun oyun değeri için daha iyi bir aralık bulunarak gerçek oyun değeri ile yaklaşık oyun değeri arasındaki hatanın daha da küçültülebileceği ifade edilmiştir. Ardından Türkiye'de 2010-2021 yılları arasındaki fındık fiyatlarının TÜİK'ten alınan verileriyle oluşturulan getiri matrisi ile karar kriterleri tek tek incelenmiştir.

Çalışmanın son bölümünde karar verici olan fındık üreticisinin en çok kar sağlayacağı stratejiyi seçmesi için uygulanan üç farklı yöntemin sonuçları sunulmuştur. Literatüre yeni kazandırılan ve sıfır toplamli oyunların çözümleri için hiç bir denklem sistemi çözmeksizin tamamen matris normlarına bağlı yaklaşık oyun değerinin bulunmasını sağlayan MN yöntemiyle bulunan değerler ve doğrusal programlamada bulunan değerler karşılaştırıldığında, yaklaşık oyun değeri ile gerçek oyun değerinin birbirine çok yakın olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca MN yöntemi ile elde edilen sonuçların karar kriterleri uygulanarak elde edilen sonuçlarla tutarlı olduğu açık bir şekilde gözlemlenmiştir.

DETERMINING THE OPTIMAL SELLING TIME OF NUT: GAME THEORY AND DECISION CRITERIA APPROACHES

SUMMARY

The production and marketing processes in agriculture involve risk, and decision-makers must act in the face of uncertainty. Therefore producers must evaluate the hazards associated with the natural world's structure when making long-term plans. They also want to determine the best period of time and price at which to produce and sell an agricultural product. At this point, it is possible to utilize game theory and decision theory against the uncertainties experienced in the selection of the most appropriate sales price and the most appropriate sales period.

This study aims to provide a solution strategy to the problem of choosing the most suitable selling price that will increase the profit of the hazelnut producer at the right time under certain conditions through linear programming, game theory, and decision-making under uncertainty criteria.

Moreover, according to FAO data, Turkey, the world's top producer of hazelnuts, produced 59.61% of all hazelnuts in 2020. As a result, the hazelnut issue is significant for domestic markets in our nation, which produces and exports enough hazelnuts to supply a sizable portion of the world's hazelnut needs. A strategy problem to aiding hazelnut growers plan their sales for both our nation and the rest of the world is considered in this study.

In the first chapter of this thesis, studies from the literature as well as the historical evolution of game theory, a branch of study that uses mathematics to analyze the decision-making processes of competing players, are presented. Additionally, it is demonstrated through a few studies in the literature that game theory has a wide range of applications in the agriculture sector, which will serve as the focus of our study. Thus, it is demonstrated that game theory may be used to resolve agricultural decision problems such as when an agricultural product should be sold, determining the best selling price, and scheduling output. Then, the necessary background to examine the problem we will discuss in our study is presented. Concepts from game theory, including game, players, strategies, and payoff matrices, are defined. It is assumed as one of the players is nature while the other is a farmer in the problem examined in this thesis. Then, the MN method, which has recently been presented in the literature by İzgi and Özkaya, and the simplex method from linear programming methods are displayed that is used to evaluate the solution for two-player zero-sum matrix games. Such that, the linear programming which is defined as a computational method used to determine optimal behavior, the objective is profit maximization or loss minimization. Furthermore, the MN method which provides convenience by reaching an approximate solution more quickly with the matrix norms of the payoff matrix, is examined and

used in the solution approach phase of the study's problem. Before defining matrix norms, matrices are briefly explained. Then, matrix norms are introduced and the basic theorems of the MN method are presented and a few examples with the MN method are analyzed.

On the other hand, producers must consider the risks associated with nature's inherent laws when determining the best timing and selling price for the production and sale of an agricultural product. There are various criteria devised to examine the decision problem because the probability distributions of alternatives cannot be estimated or known in decision making under uncertainty. Since to this fact, in the second chapter, it is demonstrated how to create a matrix of potential outcomes while taking into account the decision criteria applied in uncertain scenarios and the pairs of strategies in all action and natural settings. Five different decision criteria are defined and illustrated with examples. The Laplace criterion is first defined, where all possible alternatives are given equal chances of realization. The Maximax criterion is then considered, where the confident decision-maker selects the course of action that produces the highest return among the available options. The Wald criterion is then described, according to which the pessimistic decision-maker selects the strategy with the highest minimal payoff. The skeptical decision-maker then uses the Savage criterion, which focuses on the least of the largest payoffs. Finally, the Hurwicz criterion is employed to demonstrate that the probability value determines the decision-maker's optimistic and pessimistic perspective.

The hazelnut problem solution's implementation steps are briefly illustrated in the third chapter. TUIK data are used to obtain the monthly current prices for hazelnuts in Turkey between 2010 and 2021. A table that converts current pricing into real prices based on 2021 is shown. Then, since the matrix size generated by the simplex approach to solve the problem is enormous, the LINGO package program is used to find the right sales price and time. Then, for the MN method solution, first the $1 - norm$ and $\infty - norm$ matrix norms of the payoff matrix are found. Then, by applying the method, any dummy game value v_{dummy} is chosen from the solution interval. Using this dummy game value, the largest and smallest elements of the set of mixed strategies, p_{max} and p_{min} , respectively, are found. Then, a sample set of mixed strategies is created such that the sum of 12 strategies, namely p_{max} , p_{min} and the remaining 10 strategies, is 1. With this set of mixed strategies, the approximated game value is determined. Finally, the appropriate sales period and price are analyzed by MN method. The values obtained from both methods are compared with each other. Comparing our result with the actual game value reveals that the approximated game value is very close to the actual value. The matrix game is examined using the Laplace criterion as the first of the five criteria. Since there are 12 requirements entirely and the likelihood of realizing every given option is presumed to be equal, the Laplace criterion assumes that the probability of realizing each condition is $\frac{1}{12}$. Then, using The Maximax criterion as the second choice criterion, it is determined that the maximum value for each row (maximum) was the condition that was best. The largest maxima among those detected have then been identified because it is necessary to identify the best realized condition for each method. Then, as the third decision criterion, the seller is pessimistic in the Wald (maximin) criterion is used. In this criterion, it is preferred to choose the option with the highest minimum yield. The fourth decision criterion, the Savage (regret) criterion,

is used when the decision-maker feels that foregoing other options will cost them more than the method they ultimately select. With this criterion, the decision-maker actually aims to reduce regret. The greatest value of each row of the reward matrix is found by subtracting the largest value of each column from each element in the column. The regret matrix is then created by choosing the least of these largest values. With the last decision criterion, Hurwicz, the decision maker weights the maximum payoffs by a measure of optimism between 0 and 1. The best options for optimistic and pessimistic decision makers are found and it is observed that the highest return is achieved by choosing August when the Hurwicz optimism criterion is 20%, 40%, 60% and 80% optimistic, respectively.

In the last chapter of the thesis, when the results of the recently developed MN method, which allows for the approximate game value to be determined entirely based on matrix norms without having to solve any equation systems for the solutions of zero-sum games, are compared to those of linear programming, it becomes clear that the approximate game value and the actual game value are very similar. Additionally, it is evident that the MN method's outcomes and those acquired by using decision criteria are consistent. As a result, it is demonstrated that the MN method will speed up the process of solving the problem and that the hazelnut producer should prefer it since it generates a good approximate solution at least as the others when compared to other ways in the literature.



1. GİRİŞ

Oyun teorisi rekabet halindeki tarafların karar verme süreçlerini matematiksel bir yaklaşımla inceleyen bir bilim dalı olarak tanımlanabilir [1]. Bu teori, İkinci Dünya Savaşı'ndaki bazı durumlara matematiksel yaklaşımlar uygulanmasının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır [2]. Geçtiğimiz yüzyılın başlarında başlayan II. Dünya Savaşı'ndaki bazı durumların anlaşılabilirliği modellerinin kurulmasıyla oyun teorisi önemli bir araç olmuştur. Oyun teorisi ilk olarak askeri alanda uygulanmaya başlasa da günümüzde birçok farklı alanda uygulama alanı bulmuştur. Ekonomi, sosyoloji, davranış bilimleri, biyoloji, sigortacılık, hukuk gibi alanlarda oyun teorisinin kullanım alanı giderek gelişmiştir. Borch 1962 yılında, bir sigorta kolektifinin alt grupları için doğru prim oranlarını belirleme sorununu ele alırken oyun teorisini kullanmıştır [3]. Lee ve ark. 1979 yılında, 1951'de Fransa'da yapılan seçimlerde koalisyonu işbirlikçi bir n-kişilik oyunu olarak incelemişlerdir [4].

Olasılık teorisi, şans oyunlarının uzun süre matematiksel olarak çalışılmasıyla gelişmiştir ve 1921'de Emile Borel tarafından stratejik durumlar da matematiksel bir strateji teorisi olarak ele alınmıştır [5]. Borel, minimax çözümün karma ve tam stratejik çözümlerini ilk kez matematiksel tanımlanmasını gerçekleştirmiştir [6]. Geçen yüzyılın başlarında oyun teorisine ilk değinen matematikçi Emile Borel, yaptığı çalışmalarla minimaks prensibini bulmuş fakat ve prensibin ispatı birkaç yıl sonra John von Neumann tarafından yapılmıştır [7].

Oyun teorisi, 1944 yılında John von Neumann ve Morgenstern'in teorisinin temellerini attığı "Theory of Games and Economic Behavior" adlı kitaplarıyla ilk kez kavramsallaştırılmıştır [8]. John von Neumann ve Morgenstern kitaplarında iki kişilik sıfır toplamli oyunlar için optimal çözümleri tanımlamıştır [8]. Bu yıllarda oyun teorisinde kullanılacak hemen hemen tüm kavramlar geliştirilmiştir [9]. Daha sonra 1950'li yıllarda John Nash'in bu çalışmaları genişleterek "İş Birliği Yapılmayan Oyunlar" isimli doktora teziyle bu teoriye önemli katkılar sağlanmıştır. John Nash,

1950 yılında “Equilibrium Points in N-Person” ve 1951 yılındaki “Non-Cooperative Games” adlı iki çalışması ile, anlaşmasız oyunlarda Nash dengeyi sağlayan bir stratejinin varlığını kanıtlamıştır. Nash dengesi kavramı, oyun teori çalışan Flood ve Dresher tarafından en bilinen oyunlardan olan mahkumlar ikilemi adlı oyunda incelenmiştir [10]. Nash, "The Bargaining Problem" adlı çalışması ile pazarlık teorisini oluşturmuştur. Nash, 1994 yılında ekonomi alanında Nobel ödülü almıştır [11]. John Nash'in eserleriyle de sıfır toplamli oyunlar üzerine uygulanabilen bir alan olmanın dışına çıkarak çok çeşitli alanlarda uygulanabilir bir hale gelmiştir. Ekonomi alanının yanında sosyal bilimler, istatistik, mühendislik, bilgisayar bilimleri gibi birçok farklı alanda da kullanılmaktadır.

Reinhard Selten tarafından 1965-1975 yıllarında yayınlanan iki makaleyle John Nash ile ekonomi alanındaki Nobel ödülünü paylaşmıştır [12]. Selten, makalelerinde Nash dengesi fikrini dinamik oyunlara genelleştirmiştir. John Harsanyi 1967-1968 yıllarında yaptığı çalışmayla Bayesyen bir düşünce vurgulamış ve yetersiz bilgi koşullarındaki oyunların tam bilginin söz konusu olduğu oyunlardan farklı olmadığı düşüncesi ortaya çıkmıştır.

Harold W. Kuhn 1950-1953 yılında yaptığı çalışmalar ile oyun teorisi alanına önemli katkılarda bulunmuş bir bilim adamıdır. Kuhn, mükemmel bilgili oyunlarda alt oyun kavramını geliştirmiş ve yaygın oyun formunu mükemmel olmayan bilgi ile tanıştırmıştır [10]. Nobel ödüllü ekonomist Jean Tirole ve Drew Fudenberg 1991 yılında, eksik bilgili dinamik oyunlar için mükemmel Bayesian Nash Dengesi kavramını geliştirmiştir [10].

1945 yılında Kaplansky, kare bir getiri matrisi için, oyunculardan biri, mesela oyuncu I, bir sütunu atlayabilir ve yine de en iyi şekilde oynayabilirse, oyuncu II de bir satırı atlayabilir ve en iyi şekilde oynayabilir şeklinde teorem bulmuştur [13]. 1961 yılında Blackwell tarafından minimax teoremleri, Perron-Frobenius teoreminin alternatif kanıtlarını ve pozitif operatörler teorisine uzantılarını vermek için kullanılmıştır [14]. 1978 yılında Raghavan, tekil olmayan M-matrisi, pozitif değere sahip tam karma bir matris oyunu olduğunu ve bu özelliği, bu tür matrislerin iyi bilinen birkaç karakterizasyonunun oyun teorik kanıtlarını vermek için kullanmıştır [15]. 1985

yılında Cohen tarafından geliştirilen bir yöntemde, spectral yarıçapın kullanıldığı negatif olmayan kare matrisin özdeğeri ile oyun değeri arasındaki bağıntıyı veren sonuç bulunmuştur [16]. 2019 yılında İzgi ve Özkaya tarafından geliştirilen yöntemde 1-norm ve ∞ -norm matris normlarını kullanarak matris oyunlarının yaklaşık değeri ve karma stratejilerin en büyük ve en küçük elemanlarını gösteren min-max teoremi bulunmuştur [17].

Oyun teorisi, çalışmamızın temel konusunu oluşturacak olan tarım alanında da yaygın bir kullanım olanağı bulabilmektedir. Tarımsal bir ürünün ne zaman satılması gerektiği, en uygun satış fiyatının bulunması, üretimin planlanması gibi tarımsal karar problemleri oyun teorisi yardımıyla çözülebilmektedir [18]. Miran ve Dizdaroğlu'nun çalışmalarında, tarım ürünleri üretimi planlaması oyun teorisiyle incelenmiş ardından doğrusal programlama ile yapılan işletme planlaması sonuçları ile karşılaştırılmıştır [19]. Şahin'in 2008 yılındaki doktora çalışmasında, İzmir'in Bayındır ilçesinde yetişen 18 ürün için optimum satış dönemi ve satış fiyatı doğrusal programlama ve oyun teorisi ile analiz edilmiştir. Ayrıca satış dönemi ve fiyatın belirlenmesinde karar kriterleri de kullanılmıştır [20]. Özer'in 2009 yılındaki doktora çalışmasında, Aydın ilinde yer alan pamuk üreticilerinin, pamuğun hasatı sonrası oyun teorisi yardımıyla en uygun satış zamanı belirlenmiş ve pamuk piyasasının gelecekteki durumu GTAP modeli ile analiz edilmiştir [21]. Rehman, T. ve Romero C. tarafından 2005 yılında yapılan çalışmayla, belirsizlik altında karar verme sürecini oyun kuramsal yaklaşımla, doğaya karşı oyunları hedef programlama ile tek bir çerçevede sentezleyerek elde edilebileceği önerilmiştir [22]. İzgi ve Özkaya, 2020 yılında çalışmalarında, belirsizlikler altında çiftçilerin tarım sigortası yaptırıp yaptırmaması gerektiği problemini oyun teorisi ve karar teorisi açısından incelemişlerdir [23]. Özcan ve Özer, 2021 yılında çalışmalarında, Tekirdağ'ın Şarköy ilçesinde tarım işleri ile uğraşan çiftçinin arazisinde yapacağı faaliyete karar verme aşamasında karar analizi çalışması yapmış ve çalışmada yer alan durumlar belirsizlik ve risk altında değerlendirilmiş ve karar ağacı çizilerek sonuçlar yorumlanmıştır [24].

Üç bölümden oluşan bu çalışmada oyun teorisi kullanılarak tarımsal bir ürünün satışı için uygun zamanın ve dolayısıyla satış fiyatının belirlenmesini temel aldığımız problemin çözümüne yönelik doğrusal programlama, oyun teorisi ve karar kriterleri

kapsamında uygulama yapılması hedeflenmektedir. Ardından incelediğimiz çözüm yöntemlerinin arasında karşılaştırma yapılması amaçlanmaktadır. Birinci bölümde ilk olarak oyun teorisinin tarihsel gelişimi ve ilgili alanda önceden yapılan bazı çalışmaların özetlerine yer verilmiş ve literatürde uygulamalarında oyun teorisinin kullanıldığı çalışmalar incelenmiştir. Ardından oyun teorisinin temel kavramları ve iki kişilik sıfır toplamlı oyunlar sunulmuştur. Sonra oyun teorisi ile bağlantısı olan doğrusal programlamanın tanımı, tarihsel gelişimi ve çalışmaya konu olan uygulama problemine benzer geçmişte yapılan çalışmalardaki kullanımı gösterilmiştir. Ardından strateji sayısı arttıkça çözümü zorlaşan oyunların çözümünde sıklıkla kullanılan doğrusal programlamanın oyun teorisi ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra matris oyunlarında matrisin spectral yarıçapının kullanıldığı yöntem sunulmuş fakat bu yöntem ile uygulama bölümünde çalışmanın problemi çözülmemiştir. Matris oyunlarında hiçbir denklem çözülmeden yaklaşık çözümün bulunduğu MN yöntemi de incelenmiştir. İkinci bölümde, belirsizlik altında karar alma kriterlerinin tanımları verilmiş ve örneklerle incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise, TÜİK'ten alınan fındık fiyatları ile matris oyunu oluşturulmuştur. Ardından giriş bölümünde sunulan iki yöntemle tek tek matris oyununda analizler yapılmıştır. Sonra iki yöntemin birbiriyle karşılaştırması yapılmıştır. Yapılan bu karşılaştırma sonucunda, literatüre yeni kazandırılan MN yöntemi ile oyun değeri için bulunan alt ve üst sınırlar ile yaklaşık oyun değeri bulunmuş ve gerçek oyun değerine yakın olduğu gözlenmiştir. Böylece MN yöntemi ile oyun çözümüne daha kısa sürede ulaşıldığı görülmüştür. Ardından Türkiye'de 2010-2021 yılları arasındaki fındık fiyatlarının TÜİK'ten alınan verileri ile oluşturulan matris ile karar kriterleri tek tek incelenmiştir. Çalışmanın son bölümünde araştırmada elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

1.1 Oyun Teorisi

Bu bölümde çalışmamızda ele alacağımız problemi incelemek için gerekli olan alt yapıyı sunacağız. Oyun, oyuncular, stratejiler, getiri matrisi gibi oyun teorisi kavramlarının tanımları yapılacaktır. Tezde incelenen problemde taraflardan biri doğa iken diğeri çiftçi olacak ve oyun işbirliksiz bir etkileşim içinde olacaktır. Doğaya karşı oyun, gerçek oyunlardan, doğal durumun mutlaka bilinçli bir rakip olmaması

bakımından farklıdır. Doğanın, oyunu nasıl oynadığını etkileyen belirli arzuları veya hedefleri olmadığı aşikardır.

1.1.1 İki kişilik sıfır toplamlı oyunlar

Birbirleriyle rekabet halinde olan ve kazanmayı hedefleyen kişilerin bulunduğu yarışmacı ortama oyun denilmektedir. Oyun ortamına katılan rasyonel karar vericilere de oyuncu denilmektedir. Oyuncular; kişiler, kuruluşlar veya bazı durumlarda doğanın kendisi olabilir [25]. Kazancını maksimum yapmak isteyen her oyuncunun oyun boyunca ortaya çıkabilecek durumlar için tercihlerini belirten kararlar bütününe stratejiler kümesi denilmektedir [26]. Oyunun sonunda, her oyuncu uyguladığı stratejiler karşılığında bir getiri (kazanç veya kayıp) elde eder. Bu kazanç veya kayıpları gösteren gerçel sayılara oyuncunun getirisi denir. Getiri pozitif, negatif ve sıfır olmak üzere oyuncunun rakibine karşı kazanç, kayıp veya berabere durumu gösterir. Yukarıda sözel olarak ifade edilen kavramlar matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Tanım 1.1 (Matris Oyunu): İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun stratejik formu, başka bir ifadeyle normal formu [7];

1. P boş olmayan ve I. oyuncunun stratejilerini içeren küme,
2. Q boş olmayan ve II. oyuncunun stratejilerini içeren küme,
3. $A, P \times Q$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere, (A, P, Q) üçlüsü ile tanımlanır.

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ ve $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ strateji kümeleri sırasıyla I. ve II. oyuncuların strateji kümeleridir. I. oyuncunun i tane ve II. oyuncunun j tane stratejileri vardır.

Bir oyuncu istenen oyun sonucunu elde etmek için hangi strateji seçimini yapmalıdır diye sorulacak olunursa oyun teorisi ne yapması gerektiğini söylemeye çalışmamaktadır [27]. Yalnızca bir oyuncunun en yüksek kesin getiriyi veya en düşük kesin kaybı elde etmek için kullanabileceği strateji olan "güvenlik seviyesi"ni sunmaktadır. [27,28]. Oyun teorisi, güvenlik seviyesini elde eden stratejiyi belirlemek için kurallar vermektedir. Strateji, yalnızca bir alternatif hareket tarzının kullanılmasını

gerektiren bir "saf strateji" olabilmekte veya belirli sıklıkta iki veya daha fazla eylem planı kullanmayı gerektiren "karma strateji" olabilmektedir [29].

Tanım 1.2 (Getiri Matrisi): Oyuncuların çeşitli stratejileri için birbirlerine yaptıkları ödemelerin sonuçlarını gösteren matrise getiri matrisi denir. Getiri matrisinin elemanları pozitif, negatif veya sıfıra eşit olabilir. Söz konusu matrisin herhangi bir elemanı pozitif ise sütununda yer alan oyuncu, satırda yer alan oyuncuya, matristeki kesişim noktasındaki eleman miktarında ödeme yapar. Matrisin herhangi bir değeri negatif ise satırdaki oyuncu sütundaki oyuncuya bu negatif elemanın mutlak değerine eşit ödemede bulunur. Matrisin herhangi bir değeri sıfır ise oyunculardan hiçbiri birbirine ödemede bulunmaz. Bu çalışmada oyuncuların ardışık olarak hareket etmediği kabul edildiği için matris yöntemi kullanılarak getiri matrisi oluşturulacaktır. Aşağıda iki kişilik sıfır toplamlı bir oyun, matris formunda gösterilmiştir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A=[a_{ij}]$ matrisinde $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, n$ olmak üzere, $A=[a_{ij}]$ matrisinde I. oyuncu satır oyuncusu ise i . satırını seçer ve p_i stratejini uygular, buna karşılık II. oyuncu da j . sütununu seçer yani q_j stratejisini uygularsa, i . satır ve j . sütunun kesişimindeki a_{ij} elemanı I. oyuncunun getirisini göstermekte iken oyun sıfır toplamlı olduğundan dolayı $-a_{ij}$ II. oyuncunun kaybını göstermektedir. Bundan dolayı matris oyunlarında oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşit olduğu için getiri matrisi olarak çalışma boyunca I. oyuncunun kazançlarına göre düzenlenmiş olan getiri matrisi kullanılacaktır [30].

Tanım 1.3 (Tam ve Karma Stratejiler): Herhangi bir strateji kümesinde, satır oyuncusu için $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ strateji kümesinde, p_i 'den herhangi biri 1'e eşit ise tam strateji olarak tanımlanmaktadır. Aslında tam strateji, bir oyuncunun her zaman aynı eylemi seçtiği karma bir stratejinin özel hali olarak tanımlanabilir [31].

Örneğin iki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda, eğer $p_1 + p_2 = 1$ ve $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ ise, $\{p_1, p_2\}$ bir karma stratejidir. $\{p_1, p_2\}$ karma stratejisinden herhangi biri 1'e eşit ise tam stratejidir.

Tanım 1.4 (Nash Dengesi): John F. Nash'e doktora bitirme tezinde ispatlayarak Ekonomi Nobel Ödülü'nü kazandıran denge kavramı oyun teorisinin önemli bir çözüm yöntemidir. Her bir oyuncunun seçtiği strateji, diğer oyuncuların stratejileri düşünüldüğünde oynanabilecek en iyi getiriyi sağlıyor ve bu özellik tüm oyuncular için geçerli oluyor ise Nash dengesini oluşturur. Denge durumunda oyuncuların davranışını değiştirme eğiliminde olmaması bu kavramın yaygın olarak kullanılır hale gelmesini sağlıyor [10,32].

Normal formda gösterilen N oyunculu bir $G = (N; P_1, \dots, P_n, z_1, \dots, z_n)$ oyununda, eğer her i oyuncusunun p_i^* stratejisi, diğer oyuncuların $(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*)$ stratejilerine en iyi tepkisi ise, $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$ strateji profili oyunun saf strateji Nash dengesidir.

$i \in N$ ve $p_i \in P_i$ ise, $z_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_i^*, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*) \geq z_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*)$
Her bir oyuncunun diğer oyuncuların stratejileri (p_{-i}^*) karşısında en iyi tepkileri (p_i^*) vermesini kısaca aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$z_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq z_i(p_i, p_{-i}^*)$$

Yukarıdaki gösterimlerde p_i^* i oyuncusunun faydasını maksimize eden değerdir.

$$p_i^* = \max z_i(p_1^*, \dots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \dots, p_n^*)$$

Tanım 1.5 (Minimax Teoremi): Oyun teorisi problemlerinin çözümü için geliştirilen minimax teoremi, 1928 yılında von Neumann tarafından bulunmuş ve böylece oyun teorisinin temelleri atılmıştır. Nash dengesinde olan herhangi bir sonlu iki kişilik sıfır toplamlı oyunda, her oyuncu hem maximin değerine hem de minimax değerine eşit bir ödeme alır. İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda minimax teoremi aşağıdaki sonuçlara varmamızı sağlamaktadır [5,7,28]:

1. Her oyuncunun maximin değeri minimax değerine eşittir. Kural olarak, I. oyuncu için maximin değerine oyunun değeri denilmekte;
2. I. oyuncunun öyle bir karma stratejisi vardır ki I. oyuncunun ortalama kazancı, II. oyuncu ne yaparsa yapsın en az v (oyun değeri) olmakta ve;
3. II. oyuncunun öyle bir karma stratejisi vardır ki II. oyuncunun ortalama kaybı, I. oyuncu ne yaparsa yapsın en fazla v (oyun değeri) olmaktadır.

Eğer $v = 0$, sıfır ise, oyunun adil olduğu söylenmektedir. Eğer $v \geq 0$ pozitif ise, oyunun I. oyuncudan yana olduğu söylenmekte, eğer $v \leq 0$ negatif ise, oyunun II. oyuncudan yana olduğu söylenmektedir.

Tanım 1.6 (Eyer (Tepe) Noktası): A getiri matrisinde a_{ij} elemanı aynı anda hem i . satırda minimum hem de j . sütunda maksimum oluyorsa a_{ij} 'ye getiri matrisinin eyer (tepe) noktası denilmektedir. Matris oyunu eyer noktasında dengededir ve dolayısıyla her oyuncu için en iyi sonuç alınmaktadır [7].

1.2 Çözüm Yöntemleri

Bu çalışmada iki kişilik sıfır toplamli matris oyunlarının çözümünde sırasıyla doğrusal proglamlama yöntemlerinden simplex metot ve literatüre İzgi ve Özkaya tarafından yeni kazandırılan MN yöntemi ile analizler yapılmıştır. Analizini yaptığımız yöntemlerin temel kavramlarını ve uygulama şekillerini bu bölümde sunacağız. Böylece çalışmanın son bölümü olan fındık için en uygun satış dönemi ve dolayısıyla satış fiyatının bulunması kısmında aşağıdaki yöntemlerle incelemeler yapılmış olacaktır.

1.2.1 Oyun teorisi ile doğrusal programlama arasındaki ilişki

George Dantzig “doğrusal programlamanın babası” olarak kabul edilmektedir. Dantzig, 1940’larda, savaş çabalarının zorunlulukları nedeniyle, lineer programlar olarak formüle edilen çok büyük boyutlu problemleri hızlı bir şekilde çözecek olan simplex yöntemini geliştirmiştir. Doğrusal programlama, değişkenler üzerindeki doğrusal kısıtlamaların bir denklem sistemine tabi olan birçok değişkenin doğrusal bir fonksiyonunun minimum (veya maksimum) değerini bulmak için kullanılan, II. Dünya Savaşı’ndan bu yana geliştirilen bir optimizasyon teorisi alanı olarak tanımlanabilmektedir. Optimal davranış durumunu belirlemek için kullanılan bir hesaplama yöntemi olarak da tanımlanabilir. Doğrusal programlamada amaç, kar maksimizasyonu ya da kayıp minimizasyonu olmaktadır [33].

Doğrusal programlama üretim planlamasında sıkça kullanılan matematiksel programlama yöntemlerinden birisi olmaktadır. Bir işletmenin karşılaşılabileceği birçok

sorunu modellemek için kullanılması ardından sorunların çözülmesi işletmeler için oldukça önemli olmaktadır. İşletme problemleri dışında birçok alanda doğrusal programlama kullanılmaktadır. Doğrusal programlamanın kullanımı askeri eylemlerin planlanmasından, endüstriler arasındaki mal akışının değerlendirilmesine, gemilerin limanlar arasında rotalanmasına kadar uzanmaktadır [34]. Örneğin, askeri bir karar probleminde sınır hattından geçiş için belirli güzergâhları kullanan düşman unsurların, bu güzergâhların gözetlenmesi ile görevlendirilmiş askeri unsurlar tarafından tespit edilme olasılığını maksimize edecek yerleşim planını bulmak [35] veya gezgin satıcı problemi bir doğrusal programlama problemidir. Bir doğrusal programlama programlama modeli;

$$\text{Minimize } z = c \cdot x \quad (1.1)$$

$$x \cdot A \geq b, \quad x \geq 0, \quad c = (c_1, \dots, c_n) \quad (1.2)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad A_{n \times m} \text{ bir } n \times m \text{ matris ve } b = (b_1, \dots, b_m) \quad (1.3)$$

olarak tanımlanabilir. Doğrusal programlama modelinin uygulanabilmesi için önceden kabul edilmesi gereken şartlar; doğrusallık, toplanabilirlik, süreklilik, sınırlılıktır ve negatif olmamadır. Varsayımlar aşağıdaki gibi tanımlanabilir [36,37]:

- Doğrusallık için gerek ve yeter şart, amaç fonksiyonu ve kısıtlardaki her bir değişkenin kuvvetinin bir olmasıdır. İkinci veya üçüncü dereceden kuvveti olan değişkenler olduğunda problem doğrusal olmayan programlamaya geçer.
- Toplanabilirlik için gerek ve yeter şart ise reel katsayılı değişkenlerin birbirinden bağımsız olmasıdır.
- Süreklilik varsayımına göre değişkenlerin negatif olmamak şartıyla herhangi bir reel sayı değerini alabileceği yani sadece tam sayılı amaç fonksiyonu veya kısıtlar olmak zorunda değildir. Eğer tam sayı olma şartı varsa doğrusal programlama ile değil tam sayılı programlama kullanılır.
- İşlem yapılan süreç içerisinde a_{ij} , c_j katsayılarının ve b_i kısıt sabitlerinin hepsinin bilindiğini, olasılıksal olmadığı ve değişmeyeceği kabul edilir.

- Maksimizasyon veya minimizasyon problemlerinde problem değişkenlerinin sıfır veya daha büyük sayılar olması gerekmektedir.

Doğrusal programlama modeli (1.1)'de minimize yapıldığı gibi probleme göre maksimize de yapılabilir. Doğrusal bir programı çözenin yöntemi, en iyi olanı bulmak için uç noktalardan verimli bir şekilde geçmektir [34]. Bu da aslında simpleks yöntemidir.

1.2.2 Oyun teorisinde matris normlarının rolü: MN yöntemi

Sıfır toplamalı matris oyunlarının çözümlerinin çoğu doğrusal programlama yöntemleriyle çözülür. Aşağıdaki gibi 3×3 sıfır toplamalı bir matris oyununu inceleyelim.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matris oyununun karma strateji kümesi satır ve sütun oyuncularları için sırasıyla $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ ve $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ olsun. Aşağıdaki optimizasyon problemlerinin çözümüyle oyunun değeri bulunmuş olur.

Satır oyuncusu için maksimum oyun değeri:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + a_{31}p_3 - v \geq 0$$

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{32}p_3 - v \geq 0$$

$$a_{13}p_1 + a_{23}p_2 + a_{33}p_3 - v \geq 0$$

eşitsizlikleri ve karma strateji kısıtlamaları altında v oyun değerinin maksimize edilmesiyle veya sütun oyuncusu için minimum oyun değeri ise:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 - v \geq 0$$

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 - v \geq 0$$

$$a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 - v \geq 0$$

eşitsizlikleri ve karma strateji kısıtlamaları altında v oyun değerinin minimize edilmesiyle bulunabilir. Görüldüğü üzere 3×3 bir matris oyunu sadece bir oyuncu için incelendiğinde bile 3 eşitsizlik ve karma stratejilere ait kısıtları içeren bir optimizasyon probleminin çözülmesini gerektirmektedir. Matris oyununun boyutu büyüdükçe çözümlük olan optimizasyon problemlerinin boyutu da artacaktır. Bu nedenle, 2019

yılında yayınlanan çalışmalarında İzgi ve Özkaya, getiri matrisinin matris normları ile daha hızlı bir şekilde yaklaşık çözüme ulaşarak kolaylık sağlayan MN yöntemini geliştirmişlerdir. Bu çalışmada MN yöntemi incelenecek ve çalışmanın probleminde çözüm yaklaşımı aşamasında kullanılacaktır.

Matris normları ile yapılan bir diğer çalışma incelendiğinde, İzgi 2015 yılında doktora tezinde 3D matris normlarını açıkça tanımlamış ve detaylarıyla ispatlamış ayrıca, 3D matris normlarının matematiksel finansa uygulamalarını sunmuştur [38]. Matris normları nümerik lineer cebirin temel kavramlarından [39] ve lineer cebir problemlerinin uygulama aşamalarında ve diğer mühendislik alanlarında da kullanılmaktadır.

Bu çalışma için matris oyunlarının çözümünde matris normlarını kullanan MN yöntemini incelemeyi önce matrislerle ilgili temel kavramlar sunulacaktır.

Tanım 1.7 (Matris):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bir matris olmak üzere [40]:

- Eğer A 'nın tüm elemanları $a_{ij} \geq 0$ ise A matrisine negatif olmayan (veya negatif girdisi olmayan) bir matris denir.
- Eğer A 'nın tüm elemanları $a_{ij} > 0$ ise A matrisine pozitif (veya pozitif girdili) bir matris denir.

Tanım 1.8 (Matris Norm): $f : \mathbb{C}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ aşağıdaki dört özelliği sağlarsa bu fonksiyona matris normu denilmektedir [40]–[42]:

- $f(A) \geq 0$
- $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $f(A + B) \leq f(A) + f(B)$
- $f(\alpha A) = \alpha f(A)$

$A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $f(A)$ fonksiyonu literatürde genellikle $\|A\|$ şeklinde gösterilmektedir. Çoğu zaman kullanılması tercih edilen matris normlarının tanımları aşağıda verilmiştir:

- **Frobenius norm**, $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$
- **1-norm**, $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$, A matrisinin mutlak değerli sütun elemanları toplamının en büyüğüdür.
- **2-norm**, $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$ ve $\lambda_{\max}$, A matrisinin en büyük özdeğeridir.
- **∞ -norm**, $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, A matrisinin mutlak değerli satır elemanları toplamının en büyüğüdür.

MN yönteminde $1 - norm$ ve $\infty - norm$ kullanılarak yaklaşık oyun değeri ve karma stratejiler kümesinin en büyük ve en küçük elemanları olan sırasıyla $p_{\max}$ ve $p_{\min}$ bulunur. MN yönteminin teorik alt yapısı sunulacak ardından örnek getiri matrislerinde yöntemin uygulanışı gösterilecektir.

Tanım 1.9 $A \in R^{m \times n}$ bir matris ve $\|A\|_\infty$ ise A 'nın k . satırının girdilerinin mutlak değer toplamı olsun. Bu durumda A matrisinin k . satırının silinmesiyle elde edilen $B \in R^{(m-1) \times n}$ matrisine A matrisinin satırsal olarsak indirgenmiş matrisi denir. Aynı şekilde $A \in R^{m \times n}$ bir matris, $\|A\|_1$ ise A 'nın l . sütununun girdilerinin mutlak değer toplamı olmak üzere A matrisinin l . sütununun girdilerinin mutlak değer toplamı olmak üzere A matrisinin l . sütununun silinmesiyle elde edilen $B \in R^{m \times (n-1)}$ matrisine A matrisinin sütunsal olarak indirgenmiş matrisi denir [43].

Önerme 1.1 $A \in R^{n \times n}$ kare matrisi iki kişilik sıfır toplamı bir matris oyunun getiri matrisi ve v oyun değeri olsun. Ek olarak, $c = |\min(A)|$ ve $d = -|\max(A)|$ olmak üzere, C (ya da D) $\in R^{n \times n}$ bütün girdileri c (ya da d) bir matris olsun. Bu durumda ötelenmiş oyunun pozitif girdili getiri matrisi $A + C$ (negatif girdili getiri matrisi $A + D$) ve bu oyunun değeri $v + c$ (ya da $v + d$) olur [43].

Teorem 1.1 $A \in R^{m \times n}$ iki kişilik sıfır toplamı matris oyunun getiri matrisi ve B , A matrisinin satırsal olarak indirgenmiş matrisi olmak üzere, v oyun değeri için

$|v| \geq 1$, ise $\frac{\|B\|_\infty}{\|A\|_\infty} \leq |v| \leq \|A\|_1$,
 $|v| \leq 1$ ve $v \neq 0$, ise $\frac{1}{\|A\|_1} \leq |v| \leq \frac{\|A\|_\infty}{\|B\|_\infty}$
eşitsizlikleri sağlanır [43].

Teorem 1.2 $A \in R^{m \times n}$ iki kişilik sıfır toplamalı bir matris oyunun pozitif girdili getiri matrisi ve B , A matrisinin sütunsal olarak indirgenmiş matrisi olsun. Karma stratejiler kümesinin en büyük ve en küçük elemanları, sırasıyla p_{max} ve p_{min} için,

$$L = \max \left\{ \frac{1 - \frac{|v|}{\|A\|_1}}{m-1}, \frac{|v|}{\|B\|_1} \right\} \text{ için } p_{max} \geq L,$$

$$U = \min \left\{ \frac{1 - \frac{|v|}{\|B\|_1}}{m-1}, \frac{|v|}{\|A\|_1} \right\} \text{ için } p_{min} \leq U$$

eşitsizlikleri sağlanır [43].

Örnek 1.1 Aşağıda $X \in R^{2 \times 2}$ getiri matrisi verilen sıfır toplamalı matris oyununu ele alalım [43].

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Bu oyunun oyun değeri $v = 5$ ve karma stratejileri $p_1 = p_2 = 0.5$ olarak dinamik programlama yardımıyla bulunabilir [44]. Matris oyununu yukarıda ifade edilen MN yöntemi ile çözelim.

Öncelikle matriste negatif bir girdi olup olmadığı kontrol edilmelidir. Eğer matriste negatif değerli eleman yoksa Teorem 1.1'i analiz etmek için ilk olarak $1 - norm$ ve $\infty - norm$ matris normları hesaplanır.

$\|X\|_1 = 4 + 6 = 10$, $\|X\|_\infty = 4 + 7 = 11$, $\|B\|_1 = 7 + 3 = 10$ ve $\|B\|_\infty = 6 + 3 = 9$ olarak hesaplanmıştır.

Ardından Teorem 1.1'deki ilk eşitsizliği kullanarak oyun değerinin alt ve üst sınırlarını bulunur.

$$|v| \geq 1, \text{ ise } \frac{\|B\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq |v| \leq \|X\|_1 \rightarrow \frac{9}{11} \leq |v| \leq 10 \rightarrow 0.81 \leq |v| \leq 10 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Sonra, örnek olarak aralığın sınır değerlerinin ortalaması olan herhangi bir geçici oyun değerini $w = 5.4$ seçerek, Teorem 1.2 aracılığı ile karma stratejiler kümesinin p_{max} ve p_{min} elemanları için alt ve üst sınırlar belirlenir.

$$L = \max \left\{ \frac{1 - \frac{|w|}{\|X\|_1}}{m-1}, \frac{|w|}{\|B\|_1} \right\} \rightarrow \max \left\{ \frac{1 - \frac{5.4}{10}}{2-1}, \frac{5.4}{10} \right\} \rightarrow \max \{0.46, 0.54\} \rightarrow L = 0.54$$

$$p_{max} \geq 0.54$$

$$U = \min\left\{\frac{1-\frac{|w|}{\|B\|_1}}{m-1}, \frac{|w|}{\|X\|_1}\right\} \rightarrow U = \min\left\{\frac{1-\frac{5.4}{10}}{2-1}, \frac{5.4}{10}\right\} \rightarrow \min\{0.46, 0.54\} \rightarrow U = 0.46$$

$$p_{min} \leq 0.46$$

Toplamları 1 olacak şekilde, p_{max} ve p_{min} için bulunan sınırlar içinde kalacak şekilde, örnek olarak $p_{max} = 0.54$ ve $p_{min} = 0.46$ seçilebilir ve ardından oluşturulan senaryoya göre $\{0.54, 0.46\}$ şeklinde belirlenebilir. Sonra yaklaşık oyun değerini $v_{yaklasik}$ bulmak için getiri matrisi ile bulunan strateji kümesi çarpılır ve çıkan oyun değerlerinin minimumu alınarak oyun değeri belirlenir [43].

$$\rightarrow v_{yaklasik} = 4 \cdot 0.54 + 6 \cdot 0.46 = 4.92$$

$$\rightarrow v_{yaklasik} = 7 \cdot 0.54 + 3 \cdot 0.46 = 5.16$$

Hesaplanan yaklaşık oyun değerlerinden minimum olanı yani $v_{yaklasik} = 4.92$ seçilir. Gerçek oyun değeri ile yaklaşık oyun değerini karşılaştırsak $|v - v_{yaklasik}| = |5 - 4.92| = 0.08$ olarak bulunur. Bu hata değeri, başta örnek olarak seçtiğimiz geçici oyun değeri ve karma strateji kümesinden seçtiğimiz değerleri değiştirerek küçültülebilir ve gerçek oyun değerine daha da yakın bir değer bulunabilir.

Örnek 1.2 Aşağıda $X \in R^{3 \times 3}$ getiri matrisi verilen sıfır toplamlı matris oyununu ele alalım.

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

İki kişilik sıfır toplamlı getiri matrisinin gerçek oyun değeri $v = 2$ ve strateji kümesi $S = \{0, 0, 1\}$ ve $T = \{0, 1, 0\}$ dinamik programlama kullanarak bulunabilir [44].

Teorem 1.1'i analiz etmek için ilk olarak $1 - norm$ ve $\infty - norm$ matris normları hesaplanır.

$$\|X\|_1 = 4 + 7 + 5 = 16, \|X\|_\infty = 5 + 2 + 8 = 15$$

$$\|B\|_1 = 2 + 2 + 8 = 12 \text{ ve } \|B\|_\infty = 7 + 2 + 2 = 11$$

Ardından Teorem 1.1'deki ilk eşitsizliği kullanarak oyun değerinin alt ve üst sınırları bulunur.

$$|v| \geq 1, \text{ ise } \frac{\|B\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq |v| \leq \|X\|_1 \rightarrow \frac{11}{15} \leq |v| \leq 16 \rightarrow 0.73 \leq |v| \leq 16 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Sonra bu aralıktan örnek olarak herhangi bir geçici oyun değerini, $w = 8$ seçerek Teorem 1.2 aracılığı ile karma stratejiler kümesinin p_{max} ve p_{min} elemanları için alt

ve üst sınırlar belirlenir.

$$L = \max\left\{\frac{1 - \frac{|w|}{\|X\|_1}}{m-1}, \frac{|w|}{\|B\|_1}\right\} \rightarrow \max\left\{\frac{1 - \frac{8}{16}}{3-1}, \frac{8}{12}\right\} \rightarrow \max\{0.25, 0.66\} \rightarrow L = 0.66$$

$$p_{\max} \geq 0.66$$

$$U = \min\left\{\frac{1 - \frac{|w|}{\|B\|_1}}{m-1}, \frac{|w|}{\|X\|_1}\right\} \rightarrow U = \min\left\{\frac{1 - \frac{8}{12}}{3-1}, \frac{8}{16}\right\} \rightarrow \min\{0.16, 0.5\} \rightarrow U = 0.16$$

$$p_{\min} \leq 0.16$$

Toplamları 1 olacak şekilde $p_{\max}$ ve $p_{\min}$ için bulunan sınırlar içinde kalacak şekilde, örnek olarak $p_{\max} = 0.96$ ve $p_{\min} = 0$ ve $p_1 = 0.04$ seçilebilir ve ardından oluşturulan senaryoya göre karma strateji kümesi $\{0, 0.04, 0.96\}$ şeklinde belirlenebilir. Sonra yaklaşık oyun değeri $v_{yaklasik}$ bulmak için getiri matrisi ile örnek olarak seçilen strateji kümesi çarpılır ve çıkan oyun değerlerinin minimumu alınarak oyun değeri belirlenir.

$$\rightarrow v_{yaklasik} = 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0.04 + 5 \cdot 0.96 = 5.08$$

$$\rightarrow v_{yaklasik} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0.04 + 2 \cdot 0.96 = 2$$

$$\rightarrow v_{yaklasik} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0.04 + 8 \cdot 0.96 = 7.76$$

Hesaplanan yaklaşık oyun değerlerinden minimum olanı yani $v_{yaklasik} = 2$ seçilir. Gerçek oyun değeri ile yaklaşık oyun değerini karşılaştırsak $|v - v_{yaklasik}| = 2 - 2 = 0$. Gerçek oyun değeri MN yöntemi ile bulunmuştur.

Teorem 1.3 A reel değerli ve $n \times n$ olan bir matris, $V \in P$ olduğunda ve $AV = \lambda V$ $\lambda \geq 0$, $v(A) \leq \lambda$ olmaktadır [16].

Sonuç 1.1 Herhangi bir negatif olmayan $n \times n$ bir A matrisi için, $0 \leq v(A) \leq \rho(A)$ olmaktadır [16].

Teorem 1.3'ü kullanarak oyun değeri bulmak için matrisin determinantı ve özdeğerleri bulunur. Ardından en büyük özdeğer ile spectral yarıçap elde edilir. $\det A = -30$ ve reel değerli özdeğerleri $\lambda_1 = 10$ ve $\lambda_2 = -3$ 'tür ve spectral yarıçap $\rho(A) = \max_i |\lambda_i| = \lambda_1 = 10$ olur. Teorem 1.3'e göre oyun değeri $0 \leq v(A) \leq 10$ arasında olmaktadır.



2. BELİRSİZLİK ALTINDA KARAR VERME KRİTERLERİ

Karar verme, karar verenin mevcut seçenekler arasından bir seçim yaparak bir sorunu çözme süreci olarak tanımlanabilir. Karar veren, verdiği kararların iyi olup olmadıklarını kontrol edebilirse, daha iyi karar verebilme yeteneği gelişebilir. Ancak çalışmanın konusu da olan tarım ürünleri üreticisinin kontrolünde olmayan nedenlerle veya kendi risk anlayışlarından ötürü karar almaları zor olmaktadır. Doğaya karşı oyunlar için bilgi durumu, hangi doğa durumunun oluşacağına dair tam bir belirsizlik olarak alınmaktadır.

Üreticilerin geleceğe yönelik planlama yaparken doğanın yapısından kaynaklanan riskleri analiz etmesi ile tarımda bir ürünün üretimi ve satışa sunulması için doğru zamana ve satış fiyatına karar vermesi gerekmektedir. Tarımsal üretimde, ürün için uygun olan zamanda yağış olmaması ya da çok yağış alarak ürünlere zarar vermesi, hastalık, böcekler, ülkenin ekonomik durumundan kaynaklı ürün satışından sonra fiyatlarda beklenmeyen artış ya da azalışların olması, hükümet politikalarında değişiklik olması, tarımsal araçlarda arızalanma olması gibi tahmin edilemeyen durumlarla karşı karşıya kalınmaktadır. Bu gibi belirsizliklerin etkisiyle tarımsal ürünlerin verim ve fiyatlarında yıldan yıla değişiklik olmaktadır. Bütün bunlara ek olarak belirsizlik karşısında her çiftçi aynı tepkiyi vermemektedir. Kimi çiftçi risk almayı tercih ederken kimisi riskten kaçınan davranışlarda bulunmaktadır. Bu amaçla, tarımsal üretimin doğal yapısından kaynaklanan belirsizlikler göz önüne alınarak analiz yöntemleri belirlenmelidir. Böylece üretici karını arttırabilir ve bu şekilde ülke ekonomisi de olumlu etkilenebilir.

Başka üretim alanlarında olduğu gibi tarımsal bir ürünün üretimi ve satışa sunulması ile ilgili üretim miktarı, fiyat ve maliyet gibi geçmiş bilgileri kullanarak geleceğin tahmini için plan ve programlar yapılabilir. Sadece bu bilgileri kullanarak tahmin yapmakta çok doğru sonuçları vermeyecektir. Ayrıca çiftçinin risk ve belirsizlik karşısındaki tutumlarını da hesaba katarak belirsizlik analizleri yapılmalıdır.

Karar teorisi ile tüm eylem ve doğa durumlarındaki strateji çiftleri göz önünde bulundurularak bir olası sonuçlar matrisinin nasıl oluşturulabileceği gösterilmektedir. Çiftçi mevcut bilgiyi toplamış ve alternatif eylem yollarını belirleyerek karar matrisi oluşturacak aşamaya gelebilmektedir. Son olarak, alternatif planların olası sonuçları tahmin edilmektedir. Geriye ise problem çözme adımları, bir eylem planı seçmek ve planı eyleme geçirmek kalmaktadır.

Çizelge 2.1’de belirsizlik içeren durumlarda karar vermenin çeşitli boyutları ifade edilmiştir [37]:

Çizelge 2.1 : Karar matrisi.

$$\begin{bmatrix} & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \\ P_1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ P_2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

Çizelge 2.1’deki matriste $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ strateji kümesinden, karar verici bir p_i eylemi seçer. Ardından durum uzayı incelenir; q_j olasılığı ile olası durumların $q_j \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ olduğu gözlemlenir. Eğer p_i eylemi seçilmişse ve gerçekleşen durum q_j ise, karar verici r_{ij} getirisini alır. Bu model belirsizlik altında karar verme modeli olarak adlandırılır.

Belirsizlik ortamında karar almada alternatiflere ilişkin olasılık dağılımları hesaplanamıyor veya bilinmiyor olduğundan karar problemini analiz etme amacıyla geliştirilmiş bazı kriterler mevcuttur.

Belirsizlik altında karar verme kriterleri aşağıda tanımlanmış ve örneklerle pekiştirilmiştir [27,37,45,46]:

2.1 Laplace Kriteri

Tüm olası alternatiflerin gerçekleşme olasılıkları eşit kabul edilmektedir. Karar verici her alternatif için getirilerin ortalamasını baz alarak en büyük ortalamaya sahip alternatifi seçmektedir. Laplace’ın tanımlasına göre kriter şu şekilde tanımlanmaktadır,

r_{ij} 'ler Çizelge 2.1'de gösterilen karar matrisinin girdileri olmak üzere

$$r_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

(2.1)'de r_i 'ler en büyük alındığında

$$\max_i r_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.2)$$

elde edilir.

Örnek 2.1: Çizelge 2.2'de karar matrisi K, L, M ve N stratejileri ile bu stratejilerin X, Y, Z ve T koşulları altındaki getirileri yer almaktadır. Bu koşulların gerçekleşme olasılıkları bilinmemektedir. Bu bilgiler doğrultusunda bir işletmecinin Laplace kriterine göre hangi stratejiyi seçmesi gerektiğini inceleyelim.

Çizelge 2.2 : Laplace kriteri: karar matrisi.

	X	Y	Z	T
K	26	48	34	44
L	25	57	23	19
M	21	16	23	52
N	28	25	14	10

Laplace kriterinde, koşullara ilişkin olasılıkların eşit olduğu varsayıldığından ve toplam dört koşul olduğundan her bir koşulun gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{4}$ olarak varsayılmaktadır. Bu bilgiler doğrultusunda her bir stratejinin beklenen getirisi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\text{K stratejisine göre} \rightarrow \frac{26+48+34+44}{4} = 38$$

$$\text{L stratejisine göre} \rightarrow \frac{25+57+23+19}{4} = 31$$

$$\text{M stratejisine göre} \rightarrow \frac{21+16+23+52}{4} = 28$$

$$\text{N stratejisine göre} \rightarrow \frac{28+25+14+10}{4} = 19.25$$

Laplace kriterine göre, işletmeci tarafından en büyük ortalama kazançla sahip olan strateji yani K stratejisi seçilmelidir.

2.2 Maximax Kriteri

Karar verici bu kriterde iyimserdir ve alternatifler içinden en büyük getiriyi

$$W_i = \max_j r_{ij} \quad (2.3)$$

tercih etmektedir. Maximax kriteri karar vericinin en büyük kazancı getiren eylemi seçmesini önermektedir, yani

$$W_{opt} = \max_i W_i \quad (2.4)$$

Örnek 2.2: Çizelge 2.3'te karar matrisi K, L, M, N ve P stratejileri ile bu stratejilerin X, Y, Z ve T koşulları altındaki getirileri göstermektedir. Bu bilgiler doğrultusunda bir yöneticinin Maximax kriterine göre hangi stratejiyi seçmesi gerektiğini inceleyelim.

Çizelge 2.3 : Maximax kriteri: karar matrisi.

	X	Y	Z	T
K	26	48	34	44
L	25	57	23	19
M	21	16	23	52
N	28	25	14	10

Maximax kriterine göre öncelikle her bir strateji için olası en iyi koşul bulunmalıdır. En iyi koşulu bulabilmek için her bir satırın en büyük değeri (maksimumu) bulunmakta ve o değer en iyi koşul olarak adlandırılmaktadır. Daha sonra her bir strateji için gerçekleşen en iyi koşulun en iyisinin bulunması gerekmektedir. Bu işlem de bulunan maksimum değerlerin maksimumunu bularak elde edilmektedir. Çizelge 2.3'te bulunan maksimum değerlerin maksimumu 57 olduğundan beklenen en yüksek getiri Maximax kriterine göre L stratejisi seçilerek elde edilmiştir.

2.3 Wald (Maximin) Kriteri

Karar verici bu kriterde kötümserdir. Her bir alternatif seçimi için en kötü sonuç belirlenmektedir. Maximin kriteri en küçük getiri değeri en yüksek olan seçeneği tercih etmektedir. q_i eylemini seçen karar verici için gelebilecek en kötü sonuç ve W_i 'de q_i eyleminin güvenlik seviyesi olmak üzere aşağıdaki gibidir. r_{ij} 'ler yukarıda gösterilen matrisin girdileri olmak üzere:

$$W_i = \min_j r_{ij} \quad (2.5)$$

Wald kriteri karar vericinin en büyük güvenlik seviyesine sahip eylemi seçmesini önermektedir, yani

$$W_{opt} = \max_i W_i \quad (2.6)$$

Kazanç matrisi verilmiş ise maximin, kayıp matrisi verilmiş ise minimax kriteri uygulanmaktadır.

Örnek 2.3: Çizelge 2.4’te karar matrisi K, L, M, N ve P stratejileri ile bu stratejilerin X, Y, Z ve T koşulları altındaki getirilerini göstermektedir. Bu bilgiler doğrultusunda bir işletmecinin Wald (Maximin) kriterine göre hangi stratejiyi seçmesi gerektiğini inceleyelim.

Çizelge 2.4 : Wald kriteri: karar matrisi.

	X	Y	Z	T
K	26	48	34	44
L	25	57	23	19
M	21	16	23	52
N	28	25	14	10

Wald kriterine göre öncelikle her bir strateji için olası en kötü koşul bulunmalıdır. En kötü koşulu bulabilmek için her bir satırın en küçük değeri bulunmakta ve o değer en kötü koşul olarak adlandırılmaktadır. Daha sonra her bir strateji için gerçekleşen en kötü koşulun en iyisinin bulunması gerekir. Bulunan minimum değerlerin maksimumu olarak elde edilmektedir. Çizelge 2.4’te bulunan minimum değerlerin maksimumu 26 olduğundan, beklenen en yüksek getiri Wald kriterine göre K stratejisi seçilerek elde edilmektedir.

2.4 Savage (Pişmanlık) Kriteri

Karar verici bu yöntemde şüpheli yaklaşır ve en büyük getiriler içerisinde en küçük olanı hedeflemektedir. Ancak karar vericinin bu tercihi bir fırsat kaybı doğurmaktadır. Kriter, karar vericilerin belirsizlik altında nasıl plan yaptıkları hakkında temel bir varsayımı ima etmektedir. Aslında pişmanlığı en aza indirmeye çalıştıklarını varsaymaktadır. V_{ij} girdileri, Q_j doğa durumundaki en iyi eylemden gelen değer ve P_i ’nin Q_j altında getireceği sonuç arasındaki fark olsun, bu halde V_{ij} şu şekilde tanımlanır:

$$V_{ij} = \max_i r_{ij} - r_{ij} \quad (2.7)$$

V_{ij} değerlerinin pişmanlık matrisi ile, her eyleme P_i eyleminden kaynaklanan en kötü pişmanlık endeksi atanmalıdır:

$$A_i = \max_j V_{ij} \quad (2.8)$$

Böylece pişmanlık (savage) kriteri (2.9)'daki şekilde tanımlanır:

$$A_{opt} = \min_i A_i \quad (2.9)$$

Örnek 2.4: Çizelge 2.5'teki karar matrisi K, L, M ve N stratejileri ile bu stratejilerin X, Y, Z ve T koşulları altındaki getirileri yer almaktadır. Bu koşulların gerçekleşme olasılıkları bilinmemektedir. Bu bilgiler doğrultusunda bir yöneticinin pişmanlık kriterine göre, hangi stratejiyi seçmesi gerektiğini inceleyelim.

Çizelge 2.5 : Savage kriteri: karar matrisi.

	X	Y	Z	T
K	26	38	54	23
L	15	27	43	39
M	31	26	43	22
N	28	25	54	11

İlk olarak pişmanlık matrisi oluşturulmalıdır. Bunun için öncelikle Çizelge 2.5'deki karar matrisinin her bir koşuldaki en iyi stratejisinin belirlenmesi gerekir. Örneğin X koşulunda en iyi strateji M, Y koşulunda ise en iyi strateji K'dır. Çizelge 2.6'da gösterilen şekilde en iyi koşuldaki değerden ve en iyi strateji altında getireceği sonucun farkı bulunur.

Çizelge 2.6 : Savage kriteri: karar matrisi oluşturma.

	X	Y	Z	T
K	$31 - 26 = 5$	$38 - 38 = 0$	$54 - 54 = 0$	$39 - 23 = 16$
L	$31 - 25 = 6$	$38 - 27 = 11$	$54 - 43 = 11$	$39 - 39 = 0$
M	$31 - 31 = 0$	$38 - 26 = 12$	$54 - 43 = 11$	$39 - 22 = 17$
N	$31 - 28 = 3$	$38 - 25 = 13$	$54 - 54 = 0$	$39 - 11 = 28$

Getiri matrisinde yapılan hesaplar sonucu Çizelge 2.7'deki pişmanlık matrisi oluşturulur. Çizelge 2.7'de gösterilen pişmanlık matrisinde yer alan sıfırlardan, en iyi seçimin yapıldığı anlaşılmaktadır.

Çizelge 2.7 : Savage kriteri ile oluşan karar matrisi.

	X	Y	Z	T
K	5	0	0	16
L	6	11	11	0
M	0	12	11	17
N	3	13	0	28

Örneğin sadece X sütunu incelenirse, L stratejisi seçilirse en iyi seçim yapılmış olduğu anlaşılmaktadır. Sütundaki diğer sayılar ise pişmanlık derecesini gösterir. Başka ifade ile L stratejisi tercih edilmediyse ondan sonra tercih edilecek ilk seçeneğin K, K'dan sonra N, N'den sonra ise M stratejisi olduğu anlaşılmaktadır.

Çizelge 2.8 : Savage kriteri: karar matrisi- I.

	X	Y	Z	T	Satırların En Küçüğü
K	5	0	0	16	16
L	6	11	11	0	11
M	0	12	11	17	17
N	3	13	0	28	28

Savage (pişmanlık) kriterine göre, Çizelge 2.8'de L stratejisi seçilir.

2.5 Hurwicz Kriteri

Bu yöntem maximax iyimserlik ve maximin kötümserlik ölçütlerinin bir birleşimi şeklindedir. Karar vericinin duruma iyimser veya kötümser yaklaşmasına bağlı olarak bir olasılık değeri belirlenir. Bu olasılık değeri üzerinden alternatifleri inceleyerek en büyük getiriyi sağlayan alternatifi seçmektedir.

$$H_i = \max_j r_{ij} \quad (2.10)$$

Burada H_i , Çizelge 2.1'de verilen matristeki Q_i eyleminden elde edilecek en büyük getiridir. Hurwicz'in maximax getiri kriteri ise

$$H_{opt} = \max_i H_i \quad (2.11)$$

Hurwicz bunlara ek olarak iyimserlik-kötümserlik indeksi olan $0 \leq \alpha \leq 1$, α 'yı en büyük iyimserlik ve kötümserlik arasındaki dengeyi kullanmak için tanımlamıştır.

Hurwicz karar kriterini α 'ya bağılı olarak şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\alpha W_{opt} + (1 - \alpha)H_{opt} = \max_i \{ \alpha W_i + (1 - \alpha)H_i \} \quad (2.12)$$

Örnek 2.5: Çizelge 2.9'daki karar matrisi bilgileri doğrultusunda Hurwicz iyimserlik ölçütünü $\alpha = 0.6$ alınırsa yatırımcının hangi stratejiyi seçmesi gerektiğini inceleyelim.

Çizelge 2.9 : Hurwicz kriteri: karar matrisi.

	X	Y	Z	T
K	19	14	17	18
L	3	9	6	9
M	14	15	17	13
N	18	8	2	3

İyimser bir yatırımcı için en iyi seçenek Çizelge 2.10'da görüldüğü üzere, K seçeneğidir. Kötümser bir yatırımcı için en iyi seçenek Çizelge 2.11'de görüldüğü üzere, K seçeneğidir. İyimserliğin ölçüsü olarak Hurwicz ölçütü 0.6 olarak örnekte verilmiştir. Bu durumda, Çizelge 2.11'de Hurwicz ölçütüne göre aşağıdaki değerler elde edilir.

Çizelge 2.10 : Hurwicz kriteri: karar matrisi- I.

	X	Y	Z	T	İyimser Maximax	Kötümser Maximin	Hurwicz $\alpha = 0.6$
K	19	14	17	18	19	14	$14 \cdot 0.6 + 19 \cdot 0.4 = 16$
L	3	9	6	9	9	3	$3 \cdot 0.6 + 9 \cdot 0.4 = 5.4$
M	14	15	17	13	17	13	$13 \cdot 0.6 + 17 \cdot 0.4 = 14.6$
N	18	8	2	3	18	2	$2 \cdot 0.6 + 18 \cdot 0.4 = 8.4$

%60 iyimser olduğu durumda bir başka ifade ile Hurwicz ölçütüne göre en iyi seçenek ağırlıklı ortalamada en yüksek getiriye sağlayan seçenek, yani K stratejisi olmaktadır.

3. UYGULAMA: FINDIĞIN OPTİMUM SATIŞ DÖNEMİNİN BELİRLENMESİ

Tarımsal bir ürünün satışı için uygun zamanın ve dolayısıyla satış fiyatının belirlenmesini temel aldığımız problemin çözümünü bulmayı amaçlayan bu çalışmada, fındık satışı için uygun satış zamanı ve fiyatını bularak satıcının karını arttırması planlanmıştır.

Dünya genelinde ceviz ve bademden sonra yaygın olarak üretimi yapılan fındık, dünyada en çok yetiştirilen sert kabuklu meyve türleri arasında yer almaktadır [47]. Başlıca üretici ülkeler arasında bulunan Türkiye dışında İtalya, Azerbaycan, Gürcistan, ABD, İspanya'nın yanı sıra Şili, İran ve Fransa'da da fındık önemli ölçüde yetiştirilmektedir [48]. Kış aylarında çiçeklenen ve döllen fındığın yetişmesi için Türkiye'de Karadeniz Bölgesi uygun iklim şartlarını sağlamaktadır. Ağustos ayında olgunlaşıp hasat edilen fındıklar kurutulduktan sonra, sonbaharda pazara getirilip satışa çıkarılmaktadır [47].

2020 yılı FAO verilerine göre dünyada toplam fındık üretiminin % 59,61'ini karşılayan Türkiye, dünya fındık üretiminde birinci sıradadır. Fındık ve fındıktan üretilen ürünlerin ihracatının dünya üzerinde son 5 yıldaki kabuklu fındık olarak karşılığı ortalama 711 bin ton olup bunun %71'i Türkiye tarafından karşılanmaktadır [47]. FAO verilerinin sonucuna göre dünyada fındık ihtiyacının büyük bir kısmını karşılayan Türkiye'de üretim ve ihracatın yanı sıra iç piyasalarda da fındık önem arz etmektedir. Bu çalışmada hem ülkemiz hem de dünya için fındık üreticisinin satış planlanmasına yardımcı olacak bir çözüm yaklaşım önerisi sunulmuştur. Çalışmanın bu bölümünde, ele alınan problemin çözümünde yapılan uygulama aşamaları kısaca şu şekilde gösterilebilir:

1) Türkiye'de 2010-2021 yılları arasında fındığın aylık cari fiyatları TÜİK kayıtlarından sağlanmıştır. Cari fiyatlar 2021 yılı baz alınarak reel fiyatlara dönüştürülmüş ve tablo halinde sunulmuştur.

2) Simplex metodu büyük boyutlu optimizasyon problemlerinin çözümünde uygun bilgisayar programlarının kullanımıyla hızlı cevap vermesi yönüyle de literatürde sıklıkla kullanılmaktadır. Problemin çözümüne yönelik oluşturulan matris 12×12 şekilde elle çözülemeyecek kadar büyük boyutlu olduğundan LINGO paket programı kullanılmış ve uygun satış fiyatı ve zamanı bulunmuştur.

3) MN yöntemiyle çözüm yapabilmek için matrislerle ilgili bazı temel teorik tanımlar verilmiş giriş bölümünde verilmiştir. Uygun satış zamanı ve dolayısıyla satış fiyatını bulmak için MN yönteminde kullanılan $1 - norm$ ve $\infty - norm$ matris normları bulunmuştur. Sonra yöntemin uygulamasıyla bulunan çözüm aralığından herhangi geçici bir oyun değeri v_{gecici} bulunmuştur. Bulunan geçici oyun değeri kullanılarak karma stratejiler kümesinin en büyük ve en küçük elemanları, sırasıyla p_{max} ve p_{min} bulunmuştur. Ardından toplamda 12 tane olan stratejinin, yani p_{max} , p_{min} ve kalan 10 stratejinin toplamı 1 olacak şekilde örnek bir karma stratejiler kümesi oluşturulmuştur. Bulunan karma strateji kümesi ile yaklaşık oyun değeri belirlenmiştir. Son olarak MN yöntemiyle uygun satış dönemi ve fiyatı analiz edilmiştir.

4) Her iki yöntemden bulunan değerler birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Gerçek değere yakın olması ve çözüm yönteminin işlevliliği açısından MN yöntemi irdelenmiştir.

5) Bölümün son aşamasında ise ikinci bölümde tanımları verilen karar kriterleri açısından problem irdelenmiştir.

3.1 Doğrusal Programlama ile Çözüm

İlk olarak doğrusal programlama yöntemi ile çalışmanın problemi olan fındık üreticisi için fındığın en uygun satış dönemi ve dolayısıyla satış fiyatı analiz edilecektir. Çizelge 3.1’de TÜİK’ten alınan 2010-2021 yılları arasında fındığın aylık cari fiyatları (tl/kg) olarak verilmektedir [49].

Çizelge 3.1’de verilen fındığın aylık cari fiyatları (3.1) ile gösterilen formül kullanılarak reel fiyatlara dönüştürülmüştür.

$$Reel Fiyat = \frac{UFE_{2021}}{UFE_{CariYil}} \times Cari Fiyat \quad (3.1)$$

Çizelge 3.1 : 2010-2021 yılları arasındaki aylık cari fındık fiyatları (tl/kg).

	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
2010	4.19	4.3	4.61	4.5	4.55	4.61	4.49	3.98	3.86	3.82	3.82	4.06
2011	4.34	4.71	4.81	4.79	4.75	4.88	4.9	5.06	5.8	6.68	6.76	7.08
2012	7.08	6.93	6.58	6.27	6.17	5.7	5.18	4.49	4.22	4.2	4.25	4.59
2013	4.59	4.58	4.56	4.56	4.6	4.84	5.05	5.31	5.53	5.61	5.78	5.73
2014	6.28	6.32	6.11	6.69	8.44	9.18	9.03	9.37	10.97	12.9	13.62	13.66
2015	13.96	15.23	16.27	16.5	17.29	18.32	16.63	14.99	12.6	12.32	13.04	13.24
2016	11.39	10.6	9.9	9.44	9.18	9.12	8.94	10.18	12.87	12.29	11.53	10.99
2017	10.84	11.26	10.78	10.26	9.83	9.59	9.41	8.99	8.82	9.01	9	8.95
2018	8.85	9.08	9.35	9.67	9.58	9.69	9.65	10.53	11.42	12.17	12.84	13.33
2019	13.5	14.79	15.73	16.14	16.44	16.69	17.16	16.47	15.78	15.94	16.39	17.04
2020	17.77	19.44	19.84	20.61	22.46	22.81	21.27	20.87	21.38	22.44	23.37	21.3
2021	21.44	21.71	20.87	21.29	20.79	20.86	21.08	22.31	23.52	23.76	23.47	24.3

Çizelge 3.2’de yurt içi üretici fiyat endeksinin bir önceki yılın aynı ayına göre değişimi verilmiştir. Çizelge 3.1’deki cari fiyatlar ve Çizelge 3.2’de verilen ÜFE verileri ile (3.1) kullanılarak reel fiyatlar hesaplanmıştır.

Çizelge 3.2 : Yurt içi üretici fiyat endeksi bir önceki yılın aynı ayına göre değişim (yıllık değişim) (%).

	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
2010	7.63	8.1	8.99	9.29	7.62	7.8	8.34	8.07	8.31	7.09	6.34	5.74
2011	6.78	7.59	6.95	6.69	7.65	7.37	7.67	9.4	9.99	11.15	12.19	12.29
2012	10.85	10.03	10.63	10.04	10.4	10.14	9.45	8.62	7.39	6.9	5.93	5.06
2013	4.93	5.37	4.76	5.52	5.07	6.12	5.99	6.91	5.71	5.58	6.63	8.61
2014	11.4	12.63	13.05	15.45	15.88	15.95	17.27	16.9	19.85	19.23	18.57	17.34
2015	16.55	15.47	14.23	13.04	14.56	14.59	13.43	11.65	8.02	7.26	6.06	6.32
2016	5.39	4.16	4.28	3.18	2.75	2.95	2.32	2.37	3.36	3.49	5.6	7.18
2017	8.49	9.09	9.15	9.35	9.53	9.7	10.09	9.86	7.47	7.42	6.61	5.34
2018	3.85	4.58	6.5	8.51	9.33	11.54	12.66	16.12	27.65	29.42	27.3	25.52
2019	26.17	25.81	24.19	25.94	28.21	27.21	24.62	19.41	9.1	7.92	11.24	13.95
2020	15.07	14.79	16.05	12.91	10.2	8.23	8.71	11.25	15.1	19.11	24.88	24.88
2021	26.56	28.64	29.26	29.85	30.14	35.13	38.92	39.2	38	38	39.8	64.84

Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3 incelendiğinde fındık ürünü fiyatlarının enflasyon karşısındaki görünümü ortaya konulmuştur.

Çizelge 3.3 : 2010-2021 yılları arasındaki aylık reel fındık fiyatları (tl/kg).

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Ocak	14.59	17	17.33	24.73	14.63	22.4	56.13	33.91	61.05	13.7	31.32	21.44
Şubat	15.2	17.77	19.79	24.43	14.33	28.2	72.98	35.48	56.78	16.41	37.64	21.71
Mart	15	20.25	18.11	28.03	13.7	33.45	67.68	34.47	42.09	19.03	36.17	20.87
Nisan	14.46	21.37	18.64	24.66	12.93	37.77	88.61	32.76	33.92	18.57	47.65	21.29
Mayıs	18	18.71	17.88	27.35	16.02	35.79	100.61	31.09	30.95	17.56	66.37	20.79
Haziran	20.76	23.26	19.75	27.78	20.22	44.11	108.61	34.73	29.5	21.55	97.37	20.86
Temmuz	20.95	24.86	21.33	32.81	20.35	48.19	149.98	36.3	29.67	27.13	95.04	21.08
Ağustos	19.33	21.1	20.42	30.12	21.73	50.44	168.38	35.74	25.61	33.26	72.72	22.31
Eylül	17.65	22.06	21.7	36.8	21	59.7	145.55	44.87	15.69	65.89	53.8	23.52
Ekim	20.47	22.77	23.13	38.2	25.49	64.48	133.82	46.14	15.72	76.48	44.62	23.76
Kasım	23.98	22.07	28.52	34.7	29.19	85.64	81.95	54.19	18.72	58.04	37.38	23.47
Aralık	45.86	37.35	58.82	43.15	51.08	135.84	99.25	108.67	33.87	79.2	55.51	24.3

En uygun satış dönemini ve dolayısıyla satış fiyatını belirlerken öncelikle oyunun tam stratejili mi yoksa karma stratejili mi olduğuna bakılmıştır. Çizelge 3.4'te minmax ve maxmin değerlerine bakıldığında değerler birbirine eşit olduğu için tam stratejili bir oyun olduğu görülmüştür. Ayrıca oyun matrisi iki kişilik sıfır toplamı, üreticinin kazançlarına göre düzenlenmiş bir matristir.

Çizelge 3.4 : Fındık fiyatlarının oyun matrisi (tl/kg).

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Ocak	14.59	17	17.33	24.73	14.63	22.4	56.13	33.91	61.05	13.7	31.32	21.44
Şubat	15.2	17.77	19.79	24.43	14.33	28.2	72.98	35.48	56.78	16.41	37.64	21.71
Mart	15	20.25	18.11	28.03	13.7	33.45	67.68	34.47	42.09	19.03	36.17	20.87
Nisan	14.46	21.37	18.64	24.66	12.93	37.77	88.61	32.76	33.92	18.57	47.65	21.29
Mayıs	18	18.71	17.88	27.35	16.02	35.79	100.61	31.09	30.95	17.56	66.37	20.79
Haziran	20.76	23.26	19.75	27.78	20.22	44.11	108.61	34.73	29.5	21.55	97.37	20.86
Temmuz	20.95	24.86	21.33	32.81	20.35	48.19	149.98	36.3	29.67	27.13	95.04	21.08
Ağustos	19.33	21.1	20.42	30.12	21.73	50.44	168.38	35.74	25.61	33.26	72.72	22.31
Eylül	17.65	22.06	21.7	36.8	21	59.7	145.55	44.87	15.69	65.89	53.8	23.52
Ekim	20.47	22.77	23.13	38.2	25.49	64.48	133.82	46.14	15.72	76.48	44.62	23.76
Kasım	23.98	22.07	28.52	34.7	29.19	85.64	81.95	54.19	18.72	58.04	37.38	23.47
Aralık	45.86	37.35	58.82	43.15	51.08	135.84	99.25	108.67	33.87	79.2	55.51	24.3

Oyun matrisinin çözüm aşamasına geçildiğinde doğrusal, sürekli, kesin ve negatif olmayan kazanç matrisi yapısı ile doğrusal programlama ile analizi üretici bazlı kurulduğu için üreticinin maksimum kazancı elde etmesi önemlidir.

$$\text{Amac fonksiyonu : } \text{Max } z = v \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m = 1 \quad (3.4)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

Üreticinin kazancını maximize etmek amacıyla yukarıda verilen modelde (3.2) ile amaç fonksiyonu ve (3.3) ile problemin kısıtları verilmiştir. LINGO paket programında analiz edilen ve çözüm vektörleri elde edilen hali;

$$\begin{aligned} \max z = v \\ 14.59 \cdot x_1 + 15.20 \cdot x_2 + 15.00 \cdot x_3 + 14.46 \cdot x_4 + \dots + 23.98 \cdot x_{11} + 45.86 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\ 17.00 \cdot x_1 + 17.77 \cdot x_2 + 20.25 \cdot x_3 + 21.37 \cdot x_4 + \dots + 22.07 \cdot x_{11} + 37.35 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\ 17.33 \cdot x_1 + 19.79 \cdot x_2 + 18.11 \cdot x_3 + 18.64 \cdot x_4 + \dots + 28.52 \cdot x_{11} + 58.82 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\ \vdots \\ 31.32 \cdot x_1 + 37.64 \cdot x_2 + 36.17 \cdot x_3 + 47.65 \cdot x_4 + \dots + 37.38 \cdot x_{11} + 55.51 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\ 21.44 \cdot x_1 + 21.71 \cdot x_2 + 20.87 \cdot x_3 + 21.29 \cdot x_4 + \dots + 23.47 \cdot x_{11} + 24.30 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} &\geq 0 \end{aligned}$$

En iyi çözüm değeri Şekil 3.1’de görüldüğü gibi 6. iterasyon sonucunda bulunmuş ve $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{11} = 0$ ve $x_{12} = 1$ değerini aldığı anda oyun değeri $v = 24.3$ olmaktadır.

Global optimal solution found.		
Objective value:	24.30000	
Infeasibilities:	0.000000	
Total solver iterations:	6	
Elapsed runtime seconds:	0.06	
Model Class: LP		
Total variables:	13	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	26	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	181	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
V	24.30000	0.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	0.000000	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	0.000000	0.000000
X6	0.000000	0.000000
X7	0.000000	0.000000
X8	0.000000	0.000000
X9	0.000000	0.000000
X10	0.000000	0.000000
X11	0.000000	0.000000
X12	1.000000	0.000000

Şekil 3.1 : Fındık fiyatları oyun matrisinin oyun değeri ve çözüm vektörleri.

Şekil 3.1’de $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ değerlerinin reduced cost yani indirgenmiş maliyet değerlerinin 0 olması temel çözümde olduklarını ifade etmektedir. LINGO çözümü ile gelen diğer sonuç Şekil 3.2’de gösterilmiştir. Slack or Surplus değerlerinin ilki amaç fonksiyonu değerini vermekte ve bu değerler amaç fonksiyonuna eklenen artık değişkenlerin değerlerini ifade etmektedir. Şekil 3.2’de 26 tane kısıt fonksiyonu bulunduğundan 26 tane satır bulunmaktadır.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	24.30000	1.000000
2	21.56000	0.000000
3	13.05000	0.000000
4	34.52000	0.000000
5	18.85000	0.000000
6	26.78000	0.000000
7	111.5400	0.000000
8	74.95000	0.000000
9	84.37000	0.000000
10	9.570000	0.000000
11	54.90000	0.000000
12	31.21000	0.000000
13	0.000000	-1.000000
14	0.000000	24.30000
15	0.000000	-2.860000
16	0.000000	-2.590000
17	0.000000	-3.430000
18	0.000000	-3.010000
19	0.000000	-3.510000
20	0.000000	-3.440000
21	0.000000	-3.220000
22	0.000000	-1.990000
23	0.000000	-0.780000
24	0.000000	-0.540000
25	0.000000	-0.830000
26	1.000000	0.000000

Şekil 3.2 : Maksimize doğrusal program modelin slack ve surplus değerleri.

Slack or Surplus değerleri, row değerlerindeki kısıt fonksiyonlarına eklenen artık değişkenlerin değerini verir ve sıfırdan farklı değerler kullanılmadan kalan değerleri ifade etmektedir. Sıfır olan değerler ise tamamının kullanıldığını ifade etmektedir. Örneğin, 2. kısıta eklenen artık değişkenin değeri 21.56 olup kullanılmadan kaldığını ifade etmektedir. Diğer taraftan 13. ve 25. kısıtlar arasındaki kısıtlara eklenen artık değişkenler sıfır olduğu için tamamı kullanılmıştır. Bu durumda, bu kısıtlar eşitlik olarak gerçekleşen sıkı kısıtlardır.

Eğer LINGO çözümde doğrusal programı maximize etmek değil minimize etmek istenirse amaç fonksiyonu $Min z = v$ olur, bu durumda v , oyun değerinin maksimum olması ve $1/v$ ’nin minimum olması demektir. $Z_{enk} = \frac{1}{v}$ minimize amaç fonksiyonunu ve $x_1 = Ocak, x_2 = Subat, \dots, x_{12} = Aralik$ ayları ifade etmektedir. LINGO paket programında analiz edilen ve çözüm vektörleri elde edilen hali;

$$\begin{aligned}
\min z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \\
14.59 \cdot x_1 + 15.20 \cdot x_2 + 15.00 \cdot x_3 + 14.46 \cdot x_4 + \dots + 23.98 \cdot x_{11} + 45.86 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\
17.00 \cdot x_1 + 17.77 \cdot x_2 + 20.25 \cdot x_3 + 21.37 \cdot x_4 + \dots + 22.07 \cdot x_{11} + 37.35 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\
17.33 \cdot x_1 + 19.79 \cdot x_2 + 18.11 \cdot x_3 + 18.64 \cdot x_4 + \dots + 28.52 \cdot x_{11} + 58.82 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\
&\vdots \\
31.32 \cdot x_1 + 37.64 \cdot x_2 + 36.17 \cdot x_3 + 47.65 \cdot x_4 + \dots + 37.38 \cdot x_{11} + 55.51 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\
21.44 \cdot x_1 + 21.71 \cdot x_2 + 20.87 \cdot x_3 + 21.29 \cdot x_4 + \dots + 23.47 \cdot x_{11} + 24.30 \cdot x_{12} - v &\geq 0 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} &\geq 0
\end{aligned}$$

```

Global optimal solution found.
Objective value:                0.4115226E-01
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        2
Elapsed runtime seconds:        0.06

Model Class:                    LP

Total variables:                12
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

Total constraints:              25
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                168
Nonlinear nonzeros:            0

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	0.000000	0.000000
X4	0.000000	0.000000
X5	0.000000	0.000000
X6	0.000000	0.000000
X7	0.000000	0.000000
X8	0.000000	0.000000
X9	0.000000	0.000000
X10	0.000000	0.000000
X11	0.000000	0.000000
X12	0.4115226E-01	0.000000

Şekil 3.3 : Fındık fiyatları oyun matrisinin oyun değeri ve çözüm vektörleri

En iyi çözüm değeri Şekil 3.3'te görüldüğü gibi 2. iterasyon sonucunda bulunmuş ve $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{11} = 0$ ve $x_{12} = 0.04115226$ ve $\frac{1}{v} = 0.04115226$ olmaktadır.

Şekil 3.4'te görüldüğü gibi 25 tane kısıt fonksiyonu bulunduğundan 25 tane satır bulunmaktadır.

Şekil 3.4'te 1.kısıtın gölge fiyat değerinin -1 olması, amaç fonksiyonunu ifade etmektedir. Amaç fonksiyonu minimizasyon olduğu için LINGO programında yorum yapılabilmesi için program özelliğinden dolayı, $(-1) \cdot (-1) = 1$ 'den, bütün değişkenlerde 1 birimlik artış yapılması amaç fonksiyonunu 1 birim azaltacaktır. Dual price'ların ekonomideki ismi gölge maliyettir.

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.4115226E-01	-1.000000
2	0.8872428	0.000000
3	0.5370370	0.000000
4	1.420576	0.000000
5	0.7757202	0.000000
6	1.102058	0.000000
7	4.590123	0.000000
8	3.084362	0.000000
9	3.472016	0.000000
10	0.3938272	0.000000
11	2.259259	0.000000
12	1.284362	0.000000
13	0.000000	-0.4115226E-01
14	0.000000	-0.1176955
15	0.000000	-0.1065844
16	0.000000	-0.1411523
17	0.000000	-0.1238683
18	0.000000	-0.1444444
19	0.000000	-0.1415638
20	0.000000	-0.1325103
21	0.000000	-0.8189300E-01
22	0.000000	-0.3209877E-01
23	0.000000	-0.2222222E-01
24	0.000000	-0.3415638E-01
25	0.4115226E-01	0.000000

Şekil 3.4 : Minimize doğrusal program modelin slack ve surplus değerleri

$Z_{enk} = \frac{1}{v} = 0.04115226$ oyun değeri, $v = 24.31$ bulunur. Strateji vektörü ise; $v \cdot x_{12} = 24.31 \cdot 0.04115226 = 1$ olarak bulunur. Karma strateji kümesi $\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1\}$ olur. Üretici elindeki findığının % 100'ünü Aralık ayında satmalı ki maksimum kazancıyla 24.3 (tl/kg)'yi garantilesin.

3.2 MN yöntemi ile Çözüm

TÜİK verilerinden düzenlediğimiz matris oyununun, MN yönteminde kullanılacak olan 1-norm ve ∞ -normu Çizelge 3.4'teki verilerle aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\rightarrow \|A\|_{\infty} = 772.9, \rightarrow \|A\|_1 = 1273.55 \rightarrow \|B\|_{\infty} = 535.08, \rightarrow \|B\|_1 = 675.59$$

MN yöntemi ile çözüm için gerekli olan eşitsizliklerle matris oyunun yaklaşık oyun değeri v ve karma strateji kümesinin en büyük ve en küçük elemanları olan sırasıyla p_{max} ve p_{min} stratejileri hesaplanacaktır. Teorem 1.1'e göre:

$$|v| \geq 1, \text{ ise } \frac{\|B\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} \leq |v| \leq \|A\|_1 \rightarrow \frac{535.08}{772.9} \leq |v| \leq 1273.55$$

$0.69 \leq |v| \leq 1273.55$ oyun değerinin bulunduğu aralık bulunmuştur. Gerçek oyun değeri 24.3 olduğu biliniyor ve gerçek oyun değeri bu aralığın içindedir. Öncelikle Teorem 1.1'deki eşitsizlik kullanılarak bulunan oyun değerinin de içinde bulunduğu aralıktan geçici bir değer seçilmiştir. Teorem 1.2'ye göre $m = 12$ ve aralığın içinde sınır değerlerinin ortalaması olan $w = 636$ geçici oyun değeri seçilirse:

$$\bullet L = \max\left\{\frac{1-\frac{|w|}{\|A\|_1}}{m-1}, \frac{|w|}{\|B\|_1}\right\} \rightarrow \max\left\{\frac{1-\frac{636}{1273.55}}{12-1}, \frac{636}{675.59}\right\} \rightarrow \max\{0.045, 0.94\} = 0.94$$

Böylece $p_{\max} \geq 0.94$ olur.

$$\bullet U = \min\left\{\frac{1-\frac{|w|}{\|B\|_1}}{m-1}, \frac{|w|}{\|A\|_1}\right\} \rightarrow \min\left\{\frac{1-\frac{636}{675.59}}{12-1}, \frac{636}{1273.55}\right\} \rightarrow \min\{0.005, 0.5\} = 0.005$$

Böylece $p_{\min} \leq 0.005$ olur.

Karma stratejiler kümesinin elemanlarını örnek olarak $p_1 = p_2 = \dots = p_{11} = 0$, $p_8 = 0.03$, $p_{12} = 0.97$ seçerek yaklaşık oyun değeri $v_{yaklasik} = 24.24$ bulunmuştur. Karma stratejiler kümesine göre satıcı bulunduğu %97 Aralık ve %3 Ağustos aylarında satarsa maksimum kazancıyla 24.24(tl/kg) garanti eder.

$Hata = |v_{gercek} - v_{yaklasik}| = |24.3 - 24.24| = 0.06$ olarak yaklaşık oyun değerinin gerçek değere yakın olduğu görülür. Eğer aralıktan daha uygun değerler seçilirse gerçek oyun değerine daha da yakın bir değer bulunabilir.

Yukarıda yapılan analizlerle İzgi ve Özkaya tarafından bulunan MN yöntemi incelenmiştir. Çalışmanın uygulama problemi olan bulunduğu uygun satış dönemi ve dolayısıyla satış fiyatı için elde edilen $v_{yaklasik}$ yaklaşık oyun değeriyle garantilenen satış fiyatı ve karma strateji kümesinde olan uygun satış ayları bulunmuştur. MN yönteminde bulunan değerler ile doğrusal programlamada bulunan değerler karşılaştırıldığında, yaklaşık oyun değeri ile gerçek oyun değerinin birbirine yakın olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca MN yöntemi yakınsadığı bilindiğinden bir matris oyunun oyun değeri için daha iyi bir aralık bulunarak gerçek oyun değeri ile yaklaşık oyun değeri arasındaki hata daha da küçültülebilir [50].

3.3 Karar Kriterleri Açısından Problemin İrdelenmesi

Çalışmanın ikinci bölümünde sunulan karar kriterleri ile uygulama problemi olan uygun dönemde uygun fındık satış fiyatının bulunması incelenecektir. Beş karar kriteri ile tek tek analiz yapıp sonuçları verilmiştir.

- **Laplace Kriteri** Laplace kriterinde, koşullara ilişkin olasılıkların eşit olduğu varsayıldığından ve toplam on iki koşul olduğundan her bir koşulun gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{12}$ olarak varsayılmaktadır.

$$\rightarrow \frac{14.59+17.00+17.33+24.73+\dots+31.32+21.44}{12} = 27.35$$

$$\rightarrow \frac{15.20+17.77+19.79+24.43+\dots+37.64+21.71}{12} = 30.06$$

⋮

⋮

$$\rightarrow \frac{23.98+22.07+28.52+34.70+\dots+37.38+23.47}{12} = 41.48$$

$$\rightarrow \frac{45.86+37.35+58.82+43.14+\dots+55.51+24.30}{12} = 64.40$$

Bu bilgiler doğrultusunda her bir stratejinin beklenen getirisi Çizelge 3.4'deki fındık fiyatları getiri matrisiyle yukarıdaki gibi hesaplanmaktadır. Laplace kriterine göre, en büyük ortalama kazançla sahip olan strateji yani Aralık ayı stratejisi seçilmelidir.

- **Maximax Kriteri**

Maximax kriteri ile getiri matrisinin her satırında elde edilecek olan maksimum kazançlar arasında en büyüğü seçilir. Daha sonra her bir strateji için gerçekleşen en iyi koşulun en iyisinin bulunması gerekmektedir. Bu işlem de Çizelge 3.5'te bulunan maksimum değerlerin maksimumunu bularak elde edilmektedir.

Çizelge 3.5 : Fındık fiyatları getiri matrisi- maximax kriteri.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	Maximax
Ocak	14.59	17	17.33	24.73	14.63	22.4	56.13	33.91	61.05	13.7	31.32	21.44	61.05
Şubat	15.2	17.77	19.79	24.43	14.33	28.2	72.98	35.48	56.78	16.41	37.64	21.71	72.98
Mart	15	20.25	18.11	28.03	13.7	33.45	67.68	34.47	42.09	19.03	36.17	20.87	67.68
Nisan	14.46	21.37	18.64	24.66	12.93	37.77	88.61	32.76	33.92	18.57	47.65	21.29	88.61
Mayıs	18	18.71	17.88	27.35	16.02	35.79	100.61	31.09	30.95	17.56	66.37	20.79	100.61
Haziran	20.76	23.26	19.75	27.78	20.22	44.11	108.61	34.73	29.5	21.55	97.37	20.86	108.61
Temmuz	20.95	24.86	21.33	32.81	20.35	48.19	149.98	36.3	29.67	27.13	95.04	21.08	149.98
Ağustos	19.33	21.1	20.42	30.12	21.73	50.44	168.38	35.74	25.61	33.26	72.72	22.31	168.38
Eylül	17.65	22.06	21.7	36.8	21	59.7	145.55	44.87	15.69	65.89	53.8	23.52	145.55
Ekim	20.47	22.77	23.13	38.2	25.49	64.48	133.82	46.14	15.72	76.48	44.62	23.76	133.82
Kasım	23.98	22.07	28.52	34.7	29.19	85.64	81.95	54.19	18.72	58.04	37.38	23.47	85.64
Aralık	45.86	37.35	58.82	43.15	51.08	135.84	99.25	108.67	33.87	79.2	55.51	24.3	135.84

Maximax kriterine göre iyimser olan üretici için uygun satış dönemi Ağustos ayı stratejisi seçilmelidir.

- **Wald (Maximin) Kriteri**

Bu kriterde en kötü sonuçlar üzerinden bir seçim yapılır. Karar maddesinde her bir seçenek için en kötü sonuç seçilir. Sonra bu değerler arasından en büyük

seçilerek faydanın maksimuma ulaşması sağlanır. Öncelikle Çizelge 3.6'daki getiri matrisinin minimum değerleri bulunur ardından bulunan minimum değerlerin içinden maksimum olan değer seçilir. Wald kriterine göre en uygun satış dönemi için Aralık ayı stratejisi (bu satıştan en az zarar edilen karar) tercih edilir.

Çizelge 3.6 : Fındık fiyatları getiri matrisi- wald kriteri.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	Maximin
Ocak	14.59	17	17.33	24.73	14.63	22.4	56.13	33.91	61.05	13.7	31.32	21.44	13.7
Şubat	15.2	17.77	19.79	24.43	14.33	28.2	72.98	35.48	56.78	16.41	37.64	21.71	14.33
Mart	15	20.25	18.11	28.03	13.7	33.45	67.68	34.47	42.09	19.03	36.17	20.87	13.7
Nisan	14.46	21.37	18.64	24.66	12.93	37.77	88.61	32.76	33.92	18.57	47.65	21.29	12.93
Mayıs	18	18.71	17.88	27.35	16.02	35.79	100.61	31.09	30.95	17.56	66.37	20.79	16.02
Haziran	20.76	23.26	19.75	27.78	20.22	44.11	108.61	34.73	29.5	21.55	97.37	20.86	20.22
Temmuz	20.95	24.86	21.33	32.81	20.35	48.19	149.98	36.3	29.67	27.13	95.04	21.08	20.35
Ağustos	19.33	21.1	20.42	30.12	21.73	50.44	168.38	35.74	25.61	33.26	72.72	22.31	19.33
Eylül	17.65	22.06	21.7	36.8	21	59.7	145.55	44.87	15.69	65.89	53.8	23.52	15.69
Ekim	20.47	22.77	23.13	38.2	25.49	64.48	133.82	46.14	15.72	76.48	44.62	23.76	15.72
Kasım	23.98	22.07	28.52	34.7	29.19	85.64	81.95	54.19	18.72	58.04	37.38	23.47	18.72
Aralık	45.86	37.35	58.82	43.15	51.08	135.84	99.25	108.67	33.87	79.2	55.51	24.3	24.3

• Savage (Pişmanlık) Kriteri

Karar verici seçtiği stratejinin katkısı kadar diğer stratejileri seçmediği için kayıp yaşadığı düşüncesinde olabilir. Böyle düşünen bir işletmeci pişmanlık kriteriyle seçtiği stratejinin ardından diğer stratejilerin pişmanlık derecesini ölçebilir. Öncelikle her bir koşuldaki en iyi stratejinin belirlenmesi gerekir. Ardından Çizelge 3.7'de elde edilen getiri matrisi gibi her sütununun en büyük değeri, bulunduğu sütundaki her elemandan çıkarılır.

Çizelge 3.7 : Fındık fiyatları getiri matrisi- savage kriteri- I.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Ocak	31.27	20.35	41.49	18.42	36.45	113.44	112.25	74.76	0	65.5	66.05	2.86
Şubat	30.66	19.58	39.03	18.72	36.75	107.64	95.4	73.19	4.27	62.79	59.73	2.59
Mart	30.86	17.1	40.71	15.12	37.38	102.39	100.7	74.2	18.96	60.17	61.2	3.43
Nisan	31.4	15.98	40.18	18.49	38.15	98.07	79.77	75.91	27.13	60.63	49.72	3.01
Mayıs	27.86	18.64	40.94	15.8	35.06	100.05	67.77	77.58	30.1	61.64	31	3.51
Haziran	25.1	14.09	39.07	15.37	30.86	91.73	59.77	73.94	31.55	57.65	0	3.44
Temmuz	24.91	12.49	37.49	10.34	30.73	87.65	18.4	72.37	31.38	52.07	2.33	3.22
Ağustos	26.53	16.25	38.4	13.03	29.35	85.4	0	72.93	35.44	45.94	24.65	1.99
Eylül	28.21	15.29	37.12	6.35	30.08	76.14	22.83	63.8	45.36	13.31	43.57	0.78
Ekim	25.39	14.58	35.69	4.95	25.59	71.36	34.56	62.53	45.33	2.72	52.75	0.54
Kasım	21.88	15.28	30.3	8.45	21.89	50.2	86.43	54.48	42.33	21.16	59.99	0.83
Aralık	0	0	0	0	0	0	69.13	0	27.18	0	41.86	0

Pişmanlık matrisi, getiri matrisinin her sütununun en büyük değeri, bulunduğu sütundaki her elemandan çıkarıldıktan sonra her satırın en büyüğü bulunur ve bu en büyüklerin en küçüğü seçilerek Çizelge 3.8 oluşturulmuştur.

Çizelge 3.8 : Fındık fiyatları getiri matrisi- savage kriteri- II.

	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	Minimax
Ocak	31.27	20.35	41.49	18.42	36.45	113.44	112.25	74.76	0	65.5	66.05	2.86	113.44
Şubat	30.66	19.58	39.03	18.72	36.75	107.64	95.4	73.19	4.27	62.79	59.73	2.59	107.64
Mart	30.86	17.1	40.71	15.12	37.38	102.39	100.7	74.2	18.96	60.17	61.2	3.43	102.39
Nisan	31.4	15.98	40.18	18.49	38.15	98.07	79.77	75.91	27.13	60.63	49.72	3.01	98.07
Mayıs	27.86	18.64	40.94	15.8	35.06	100.05	67.77	77.58	30.1	61.64	31	3.51	100.05
Haziran	25.1	14.09	39.07	15.37	30.86	91.73	59.77	73.94	31.55	57.65	0	3.44	91.73
Temmuz	24.91	12.49	37.49	10.34	30.73	87.65	18.4	72.37	31.38	52.07	2.33	3.22	87.65
Ağustos	26.53	16.25	38.4	13.03	29.35	85.4	0	72.93	35.44	45.94	24.65	1.99	85.4
Eylül	28.21	15.29	37.12	6.35	30.08	76.14	22.83	63.8	45.36	13.31	43.57	0.78	76.14
Ekim	25.39	14.58	35.69	4.95	25.59	71.36	34.56	62.53	45.33	2.72	52.75	0.54	71.36
Kasım	21.88	15.28	30.3	8.45	21.89	50.2	86.43	54.48	42.33	21.16	59.99	0.83	86.43
Aralık	0	0	0	0	0	0	69.13	0	27.18	0	41.86	0	69.13

Çizelge 3.8'deki getiri matrisinde her satırın en büyüğü bulunur sonra bu en büyüklerin en küçüğü seçilir. Getiri matrisinde yapılan işlemler sonucunda, işletmeci satış için savage kriterine göre, Aralık ayını seçmelidir.

• Hurwicz Kriteri

Hurwicz kriterine göre karar verici, iyimserliğini $0 \leq \alpha \leq 1$ arasında bir ölçütü maximum kazançlarını ağırlıklandırır. Çizelge 3.9'da $\alpha = 1$ ise karar vericinin tamamen iyimser, $\alpha = 0$ ise tamamen karamsar olduğu ve $\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.6$, $\alpha = 0.8$ yani $0 \leq \alpha \leq 1$ arasında α 'ya 0.2 aralıklarla değerler verilerek iyimserlik ve kötümserlik arasındaki denge kurularak en iyi seçenekler bulunmuştur.

Çizelge 3.9 : Fındık fiyatları getiri matrisi- hurwicz kriteri.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
Ocak	61.05	51.58	42.11	32.64	23.17	13.7
Şubat	72.98	61.25	49.52	37.79	26.06	14.33
Mart	67.68	56.884	46.08	35.292	24.496	13.7
Nisan	88.61	73.474	58.34	43.002	28.066	12.93
Mayıs	100.61	83.692	66.77	49.856	32.938	16.02
Haziran	108.61	90.838	73.04	55.294	37.522	20.22
Temmuz	149.98	124.054	98.13	72.202	46.216	20.35
Ağustos	168.38	138.57	108.76	78.95	49.14	19.33
Eylül	145.55	119.632	93.606	67.634	41.662	15.69
Ekim	133.82	110.2	86.58	62.96	39.34	15.72
Kasım	81.95	72.256	58.87	45.488	32.104	18.72
Aralık	135.84	113.532	91.22	68.916	46.608	24.3

Çizelge 3.9'da Hurwicz iyimserlik ölçütüne $0 \leq \alpha \leq 1$ arasında 0.2 aralıklarla değerler verildiğinde %20, %40, %60 ve %80 iyimser olduğunda Ağustos ayının seçilmesiyle en yüksek getirinin sağlandığı görülmüştür.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, iki kişilik sıfır toplamli matris oyunu formunda bir çözüm yaklaşım önerisi ile fındık üreticisi açısından fındığın piyasa satışı için uygun zamanın ve dolayısıyla satış fiyatının belirlenmesi temel alınmıştır. Tarımsal alanda fiyattan kaynaklanan belirsizlik ortamı incelenmiştir. Fındık üreticisi için doğa/piyasa oyunları oyun teorisine göre oynanmıştır.

Uygulama sonuçları değerlendirilecek olursa öncelikle oyun, piyasa ve fındık üreticisi arasında kurulmuştur. Bunun için ilk olarak TÜİK'ten 2010-2021 yılları arasındaki aylık fındık fiyatlarından derlenen verilerle fındık fiyatları getiri matrisi oluşturulmuştur. Fındığın aylık cari fiyatları, bir önceki yılın aynı ayına göre değişimi verilen UFE verileri ile reel fiyat formülü kullanılarak reel fındık fiyatları hesaplanmıştır. Böylece fındık ürünü fiyatlarının enflasyon karşısındaki görünümü ortaya konulmuştur.

İlk uygulamada doğrusal programlama ile çözüm yapılmıştır. Fındık fiyatları getiri matrisi 12×12 şekilde elle çözülemeyecek kadar büyük olduğundan LINGO paket programı kullanılmıştır. Asıl amacımız uygun satış dönemini bulmak olduğundan satırlara göre doğrusal programlama ile çözüm yapılmıştır. Oyun teorisi kriterlerinden kazancı arttırması düşünülen oyun değerini maksimum yaparak analiz yapılmıştır. Yapılan analiz ile garanti edilmiş fiyatlar için en uygun dönemler aylar itibariyle belirlenmiştir. Doğrusal programlama analizi sonucunda uygun olan garanti edilmiş satış fiyatı 24.3(tl/kg) ve uygun satış dönemi % 100 Aralık ayı olarak bulunmuştur.

İkinci uygulamada MN yöntemi ile çözüm yapılmıştır. Problemin çözümünde fındığın getiri matrisinde tezin birinci bölümünde tanımları verilen 1-norm ve ∞ -normu hesaplanmıştır. Yine ilk bölümde MN yönteminin çözümü için gerekli olan teoremler kullanılarak matris oyunun yaklaşık oyun değeri $v_{yaklasik}$ ve karma strateji kümesinin en büyük ve en küçük elemanları olan sırasıyla p_{max} ve p_{min} stratejileri hesaplanmıştır. Öncelikle MN yöntemi ile ilk elde edilen eşitsizlikte yaklaşık oyun değeri için sınır

değerleri bulunmuştur. Dinamik programlama ile gerçek oyun değerinin 24.3(tl/kg) olduğu ilk uygulamada bulunmuştur. Böylece gerçek oyun değerinin MN yöntemi ile bulunan sınırlar içinde kaldığı görülmüştür. Ardından MN yöntemiyle karma stratejiler kümesinin en büyük ve en küçük elemanları olan sırasıyla p_{max} ve p_{min} bulunmuştur. Bunun için yaklaşık oyun değeri için bulunan aralığın içinden sınır değerlerinin ortalaması olan $w = 386$ geçici oyun değeri seçilmiştir. Geçici değere göre karma stratejiler kümesinin en büyük ve en küçük elemanları için elde edilen sınırlar sırasıyla $p_{max} \geq 0.94$ ve $p_{min} \leq 0.005$ olarak bulunmuştur. Karma stratejiler kümesi için örnek olarak $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_{11} = 0$, $p_8 = 0.03$ ve $p_{12} = 0.97$ seçilmesiyle oluşturulan senaryoya göre uygun satış dönemi %97 Aralık ve %3 Ağustos ayları olmuştur. Örnek oluşturulan karma stratejiler kümesi ile getiri matrisi arasında yapılan hesaplamalar sonucu yaklaşık oyun değeri 24.24 (tl/kg) olarak bulunmuştur. Bu sonuçlardan, ele alınan problem için elde edilen yaklaşık oyun değeri ile gerçek oyun değerinin birbirine çok yakın çıktığı görülmüştür. Böylece MN yöntemi ile fındık üreticisi fındığın %97'sini Aralık ve %3'ünü Ağustos aylarında satarsa maksimum kazancıyla 24.24(tl/kg) garanti eder.

Uygulama bölümünün son aşamasında ise ikinci bölümde tanımları verilen karar kriterleri açısından problem irdelenmiştir. Beş kriterden ilk olarak Laplace kriteri ile oyun matrisi incelenmiştir. Laplace kriterinde tüm olası alternatiflerin gerçekleşme olasılıkları eşit kabul edildiğinden ve toplam 12 koşul olduğundan her bir koşulun gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{12}$ olduğu varsayılmıştır. Laplace kriterine göre, fındık satışında en büyük ortalama kazanca sahip olmak için Aralık ayı stratejisi seçilmesi gerektiği bulunmuştur. İkinci karar kriteri olan Maximax kriterine göre her bir satırın en büyük değeri (maksimumu) bulunmuş ve o değer için koşulu en iyi koşul olarak adlandırılmıştır. Daha sonra her bir strateji için gerçekleşen en iyi koşulun en iyisinin bulunması gerektiğinden bulunan maksimum değerlerin maksimumu bulunmuştur. Böylece iyimser olan üretici için uygun satış dönemi Ağustos ayı stratejisinin seçilmesi gerektiği gözlemlenmiştir. Üçüncü karar kriteri olan Wald (maximin) kriterinde satıcı karamsardır. En küçük getiri değeri en yüksek olan seçenek tercih edilmiştir. Wald kriterine göre en uygun satış dönemi için Aralık ayı stratejisi tercih edilmesiyle bu satıştan en az zarar edilen ay bu kriter yardımıyla tespit edilmiştir. Dördüncü karar

kriteri olan Savage (pişmanlık) kriteri ile karar verici seçtiği stratejinin katkısı kadar diğer stratejileri seçmediği için kayıp yaşadığı düşüncesinde olur. Aslında karar verici bu kriterle pişmanlığı en aza indirmeye çalışır. Getiri matrisinin her sütununun en büyük değeri, bulunduğu sütundaki her elemandan çıkarıldıktan sonra her satırın en büyüğü bulunmuş ve bu en büyüklerin içinden en küçüğü seçilerek pişmanlık matrisi oluşturulmuştur. Pişmanlık kriterine göre, getiri matrisi incelendiğinde Aralık ayı seçilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Son karar kriteri olan Hurwicz ile karar verici, iyimserliğini $0 \leq \alpha \leq 1$ arasında bir ölçütle maksimum kazançlarını ağırlıklandırır. İyimser ve karamsar karar vericiler için en iyi seçenekler bulunmuş ve Hurwicz iyimserlik ölçütü ile sırayla %20, %40, %60 ve %80 iyimser olduğunda Ağustos ayının seçilmesiyle en yüksek getirinin sağlandığı gözlemlenmiştir.

2019 yılında literatüre kazandırılan ve sıfır toplamli oyunların çözümleri için hiç bir denklem sistemi çözmeksizin tamamen matris normlarına bağlı yaklaşık oyun değerinin bulunmasını sağlayan MN yöntemiyle bulunan değerler ile doğrusal programlamada bulunan değerler karşılaştırıldığında, yaklaşık oyun değeri ile gerçek oyun değerinin birbirine çok yakın olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca MN yöntemi ile elde edilen sonuçların karar kriterleri uygulanarak elde edilen sonuçlarla tutarlı olduğu açık bir şekilde gözlemlenmiştir. Böylece karar verecek fındık üreticisine neden bu stratejiyi seçmesi gerektiğini, literatürdeki diğer metotlarla kıyas yaparak daha açık ve problemin çözümü için gerekli sürenin MN yöntemi ile daha kısa olacağı gösterilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] **Guseinov, K.G., Akyar, E. ve Duzce, S.A.** (2010). *Oyun Teorisi Catisma ve Anlasmanin Matematiksel Modelleri*, Seçkin.
- [2] **Haywood, Jr, O.G.** (1954). Military decision and game theory, *Journal of the Operation Research Society of America*, Vol.2, No.4.
- [3] **Borch, K.** (1962). Application of game theory to some problems in automobile insurance, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, Vol.2, Issue.2, 208-221.
- [4] **Lee, M., McKelvey, R. ve Rosenthal, H.** (1979). Game theory and the french apparemements of 1951, *International Journal of Game Theory*, Vol.8, 27-53.
- [5] **Dresher, M.** (1961). *Game of Strategy Theory and Application*, Prentice-Hall, New Jersey, 1st Edition.
- [6] **Myerson, R.B.** (1961). *Game Theory Analysis of Conflict*, Harvard University Press.
- [7] **Ferguson, T.S.** (2014). *Game Theory*, Mathematics Department UCLA, Part III, 2nd Edition.
- [8] **von Neumann, J. ve Morgenstern, O.** (1944). *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton, 1st Edition.
- [9] **Yılmaz, E.** (2009). *Oyun Teorisi*, Literatür Yayıncılık.
- [10] **Karabacak, H.** (2018). *Yeni Başlayanlar İçin Oyun Teorisi*, Seçkin Yayıncılık.
- [11] **Mirowski, P.** (1992). "What Were von Neumann and Morgenstern Trying to Accomplish?", *Toward a history of game theory*, 24(supplement), 113-47.
- [12] **Laraki, R., Renault, J. ve Sorin, S.** (2010). *Mathematical Foundations of Game Theory*, New York: Springer.
- [13] **Kaplansky, I.** (1945). A contribution to Von Neumann's theory of games, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 46, No. 3 , 474-479.
- [14] **Blackwell, D.** (1961). Minimax and Irreducible Matrices, *Mathematical Analysis And Applications*, Vol.3, 37-39.
- [15] **Raghavan, T.** (1978). Completely Mixed Games and M-Matrices, *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 21, 35-45.

- [16] **Cohen, J. E. ve Friedland, S.** (1985). The game-theoretic value and the spectral radius of a nonnegative matrix, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol.93 No.2, 205-211.
- [17] **Özkaya, M.** (2018). *The roles of matrix norms in the game theory*, M.Sc. thesis, Istanbul Technical University, Turkey.
- [18] **Heady, O. E. ve Candler, W.** (1963). *Linear Programming Methods*, Ames, Iowa: Iowa State Univ. Pr.
- [19] **Miran, B. ve Dizdaroğlu, T.** (1994). Tarımsal İşletme Planlamasında Risk: Bir Oyun Teorisi Denemesi, *Türkiye Birinci Tarım Ekonomisi Kongresi, İzmir*.
- [20] **Şahin, A.** (2008). *Risk Koşullarında Tarım İşletmelerinin Planlanması: Oyun Teorisi Yaklaşımı*, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [21] **Özer, O.O.** (2009). *Pamuk Üretimi, Satış Fiyatı Stratejileri ve Piyasanın Gelecekteki Durumu: Aydın İli Örneği*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [22] **Rehman, T. ve Romero, C.** (2005). Formulating generalised goal games against nature: An illustration from decision-making under uncertainty in agriculture, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.175, No.1, 486-496.
- [23] **İzgi, B. ve Özkaya, M.** (2020). Tarım Sigortası Gerekliliğinin Oyun Teorisi Yardımıyla Gösterilmesi: Matris Norm Yaklaşımı, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, Cilt:20, Sayı:5, 824-831.
- [24] **Özcan, B. ve Özer, E.H.** (2021). Karar Teorisinin Tarım Sektöründe Uygulanması, *Uluslararası Doğu Anadolu Fen Mühendislik ve Tasarım Dergisi*, Cilt:3, Sayı:1, 257-281.
- [25] **Kelly, A.** (2003). *Decision Making Using Game Theory: An Introduction for Managers*, Cambridge University Press.
- [26] **Nash, J.F.** (1951). Non-Cooperative Games, *Annals of mathematics*, Vol. 54, No.2, 286-295.
- [27] **Walker, O.L., Heady, O.E., Tweeten, L.G. ve Pesek, J.T.** (1960). Application of game theory models to decisions on farm practices and resource use, *Research Bulletin (Iowa Agriculture and Home Economics Experiment Station): Vol. 33 : No. 488*.
- [28] **Brown, K.L. ve Shoham, Y.** (2022). *Essentials of Game Theory*, Springer Nature.
- [29] **Fudenberg, D. ve J., T.** (1991). *Game Theory*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- [30] **Öztürk, A.** (2021). *Yöneylem Araştırması*, Ekin Yayınevi.

- [31] **Winston, L.W.** (2021). *Yöneylem Araştırması/ Uygulamalar ve Algoritmalar*, Palme Yayınevi.
- [32] **Prisner, E.** (2014). *Game Theory Through Examples*, Mathematical Association of America.
- [33] **Barron, E.N.** (2013). *Game Theory an Introduction*, John Wiles Sons Inc.
- [34] **Dantzing, G.** (2016). *Linear Programming and Extensions*, Springer New York, NY.
- [35] **Erşen, E.** (2013). *Karar Problemlerinin Çözümü İçin Oyun Teorisi ve Coğrafi Bilgi Sistemleri Tabanlı Bütünleşik Bir Yaklaşım*, Yüksek Lisans Tezi, T.C. Kara Harp Okulu Savunma Bilimleri Enstitüsü, Harekat Araştırması Ana Bilim Dalı.
- [36] **Özgüven C.** (2003). *Doğrusal Programlama ve Uzantıları*, Detay Yayınları, Ankara.
- [37] **Hamdy, A.T.** (2000). *Yöneylem Araştırması*, Birinci Basım, İstanbul: Literatür Yayıncılık.
- [38] **İzgi, B.** (2015). *Behavioral Classification of Stochastic Differential Equations in Mathematical Finance*, Ph.D. thesis, Istanbul Technical University, Turkey.
- [39] **Trefethen, L. ve Bau III, D.** (1997). *Numerical Linear Algebra*, SIAM.
- [40] **Horn, R. A. ve Johnson, C.R.** (2013). *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, second edition.
- [41] **Zielke, G.** (1988). Some Remarks on Matrix Norms, Condition Numbers, and Error Estimate for Linear Equations, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 110, 29-41.
- [42] **Meyer, C.** (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM.
- [43] **İzgi, B. ve Özkaya, M.** (2019). A new perspective to the solution and creation of zero sum matrix game with matrix norms, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.341, 148-159.
- [44] **URL-2.** <<https://www.math.ucla.edu/~tom/gamesolve.html>>, erişim tarihi: 24.05.2023.
- [45] **İzgi, B. ve Özkaya, M.** (2022). S400 vs Patriot: Belirsizlik Altında Karar Verme Yöntemleri ile Kısa Bir Analiz, *2st-International Congress on Modern Sciences Tashkent Chemical-Technological Institute*, 792-805, ISBN: 978-625-8254-11-2.
- [46] **Özari, C., Turan, K. ve Ulusoy, V.** (2020). *Oyun Teorisi*, Pegem Akademi, Ankara.

- [47] **URL-1.** <<https://www.ordutb.org.tr/uretim-ve-dis-ticarette-lider-oldugumuz-urunler/>>, erişim tarihi: 24.05.2023.
- [48] **URL-1.** <<https://www.fao.org/home/en>>, erişim tarihi: 24.05.2023.
- [49] **URL-1.** <<https://biruni.tuik.gov.tr/medas/?locale=tr>>, erişim tarihi: 24.05.2023.
- [50] **İzgi, B., Özkaya, M., Üre, N. ve Perc, M.** (2023). Extended matrix norm method: Applications to bimatrix games and convergence results, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 438, 127553.



ÖZGEÇMİŞ

Adı SOYADI: Melike MUNTAŞ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2018, Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik

