



**HETEROJEN DURUM ALTINDA LOG-NORMAL DAĞILIMA SAHİP
YIĞINLARIN ORTAK ORTALAMASI HAKKINDA ÇIKARIMLAR**

Hatice GÜNGÖR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hatice GÜNGÖR

05/06/2024

HETEROJEN DURUM ALTINDA LOG-NORMAL DAĞILIMA SAHİP YIĞINLARIN ORTAK ORTALAMASI HAKKINDA ÇIKARIMLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Hatice GÜNGÖR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Birçok alanda, log-normal dağılım pozitif sağa çarpık verileri tanımlamak için yaygın olarak kullanılmaktadır. Uygulamalı araştırmaların çoğunda birden fazla heterojen log-normal dağılıma sahip yığınların ortalama eşitliğini test etmek oldukça önemlidir. Bu hipotez reddedilemediğinde, ortaya çıkan diğer bir problem de yığınların ortak ortalaması hakkında çıkarımlar yapmaktır.

Bu konuyla ilgili çıkarım prosedürleri pratik ve teorik öneme sahip olmasına rağmen, literatürü incelediğimizde bu konuyla ilgili çalışmaların sınırlı olduğu görülmektedir. Bu nedenle çalışmanın amacı, birden fazla heterojen log-normal dağılımın ortak ortalaması için güven aralığı tahmininde kullanılan metotların incelenmesidir. Buna göre çalışmamızda Parametrik Bootstrap Yöntemi, Varyans Tahminlerinin Geri Kazanımı Yöntemi, Genelleştirilmiş Değişken Yaklaşımı ve Behboodian ve Jafari'nin Testi hakkında bilgi verilmiş, daha sonra söz konusu yöntemler kullanılarak farklı senaryolar ile kapsamlı bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Söz konusu simülasyon çalışması ile bu yöntemlere ilişkin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunluklar hesaplanmıştır. Elde ettiğimiz simülasyon sonuçlarına göre düşünülen tüm durumlarda, Parametrik Bootstrap, Varyans Tahminlerinin Geri Kazanımı yöntemlerinin güven aralığının kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları açısından genel olarak tercih edilebileceğini göstermektedir.

Bilim Kodu : 20513
Anahtar Kelimeler : Kapsama olasılığı, aralık uzunluğu, log-normal dağılım, heterojenlik
Sayfa Adedi : 57
Danışman : Doç. Dr. Esra GÖKPINAR

THE INFERENCES ON THE COMMON AVERAGE OF AGGREGATES WITH LOG-NORMAL DISTRIBUTION UNDER HETEROGENEOUS CONDITIONS

(M. Sc. Thesis)

Hatice GÜNGÖR

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2024

ABSTRACT

In many fields, the log-normal distribution is commonly used to describe positively right-skewed data. In most applied research, it is crucial to test the equality of means of several heterogeneous log-normal distributions. When this hypothesis cannot be rejected, another problem that arises is making inferences about the common mean of these distributions. Although inference procedures for common mean of the log-normal distributions are of practical and theoretical importance, a review of the literature reveals limited studies on this topic. Therefore, the aim of this study is to examine the methods used in confidence interval estimation for the common mean of several heterogeneous log-normal distributions. Accordingly, in our study, information about the Parametric Bootstrap Method, Method of Variance Estimation Recovery, Generalized Variable Approach, and Behboodian and Jafari's Test is provided, and then it is followed by a comprehensive simulation study with different scenarios using these methods. Coverage probabilities and average lengths of the these methods were calculated with this simulation study. The simulation results indicate that the Parametric Bootstrap and Method of Variance Estimation Recovery methods are generally preferable in terms of coverage probabilities and mean lengths. Our study suggests that Parametric Bootstrap and Method of Variance Estimation Recovery methods can generally be recommended for most considered situations.

Science Code : 20513
Key Words : Coverage probability, range length, log-normal distribution, heterogeneity
Page Number : 57
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Esra GÖKPINAR

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezimin her aşamasında yardımcı olan, bilgi birikimini paylaşan, her zaman sorularıma sabırla cevap veren, rehberliğiyle tezimi tamamlamada yol rehberi olan saygı değer danışmanım Doç. Dr. Esra GÖKPINAR ile bu süreçte desteğini hiç eksik etmeyen aileme ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ	1
2. k TANE LOG-NORMAL DAĞILIMA SAHİP YIĞINLARIN ORTAK ORTALAMASI İÇİN KULLANILAN YÖNTEMLER	9
2.1. Parametrik Bootstrap Yöntemi (PB)	14
2.2. Varyans Tahminlerinin Geri Kazanımı Yöntemi ile Güven Aralığı Tahmini (MOVER)	17
2.3. Genelleştirilmiş Değişken (GV) Yaklaşımı	21
2.4. Behboodian ve Jafari'nin Testi (BJ)	25
3. UYGULAMA	27
4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI	35
5. SONUÇ	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	57

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Dört anatomik TAPRV alt tipinin derin hipotermik dolaşım süresi (dakika cinsinden); SC. suprakardiyak; C. kardiyak; M. karışık tip; IC. İnfrakardiyak	27
Çizelge 3.2. Dört anatomik TAPRV alt tipinin derin hipotermik dolaşım sürelerinin (dakika cinsinden) logaritması alınmış hali	28
Çizelge 3.3. Dört anatomik TAPRV alt tipinin derin hipotermik dolaşım sürelerinin (logaritması alınmış) normallik testi sonuçları	30
Çizelge 3.4. Dört anatomik TAPRV alt tipinin derin hipotermik dolaşım sürelerine ait ortak ortalama için %95 güven aralıkları ve uzunlukları	30
Çizelge 3.5. Logaritması alınmış Farmakokinetik verilerin özet istatistikleri	31
Çizelge 3.6. Farmakokinetik verilerin ortak ortalaması için %95 güven aralıkları ve uzunlukları	31
Çizelge 3.7. Kreatin fosfo kinaz (CPK) verisinin özet istatistikleri	32
Çizelge 3.8. Kreatin fosfo kinaz (CPK) verisinde yer alan ortak ortalama için %95 güven aralık ve uzunlukları	33
Çizelge 4.1. Simülasyon çalışmasında dikkate alınan senaryolar	36
Çizelge 4.2. $k=2$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları	38
Çizelge 4.3. $k=3$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları	40
Çizelge 4.4. $k=5$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları	42
Çizelge 4.5. $k=7$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları	44
Çizelge 4.6. Ortak θ parametresi için farklı değerler alındığında dikkate alınan senaryolar	46
Çizelge 4.7. $k=3$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları	47
Çizelge 4.8. $k=5$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları	48

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Olasılık yoğunluk fonksiyonu	2
Şekil 3.1. SC grubu için histogram grafiği	29
Şekil 3.2. C grubu için histogram grafiği	29
Şekil 3.3. IC grubu için histogram grafiği	29



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklamalar
GV	Genelleştirilmiş Değişken Yaklaşımı
BJ	Behboodian ve Jafari'nin Testi
MOVER - MV	Varyans Tahminlerinin Geri Kazanımı Yöntemi ile Güven Aralığı Tahmini
PB	Parametrik Bootstrap Yöntemi

1. GİRİŞ

Log-normal dağılımın kökeni 20. yüzyılın başlarına kadar gitmektedir. Bu dağılımın ismi, normal dağılıma (Gaussian dağılım) benzerlik göstermesinden kaynaklanır. Log-normal dağılım, normal dağılımın logaritması alındığında elde edilen bir dağılımdır. Yani, bir X rassal değişkeninin normal olarak dağıldığı düşünülürse, $Y = e^{(X)}$ rassal değişkeni log-normal bir dağılım gösterir. Ayrıca bu dağılım pozitif değerlere odaklanır. Konuyla ilgili klasik çalışma Aitchison ve Brown (1957) tarafından yapılmıştır. Ancak log-normal dağılımın temel özellikleri ve matematiksel özellikleri daha öncede birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Log-normal dağılımın daha derinlemesine matematiksel incelemeleri ve istatistiksel özellikleri daha sonraki dönemlerde birçok istatistikçi ve bilim insanı tarafından incelenmiştir. Bu dağılım, pozitif ve sağa çarpık verilerin durumlarını modellemek için kullanılan bir yöntem haline gelmiştir.

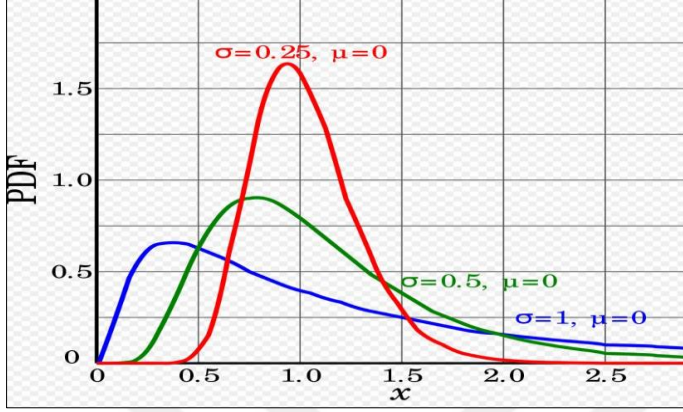
Log-normal dağılımı detaylı tanımlayacak olursak; dağılımının temel özelliklerine sırasıyla aşağıda yer verilmiştir (Limpert vd, 2001).

1. Log-normal dağılım, sağa doğru uzun bir kuyruğa sahiptir. Yani verilerin büyük bir kısmı düşük değerlerde toplanmıştır.
2. Log-normal dağılım, sıfırdan büyük ve pozitif gerçek sayılar üzerinde tanımlıdır. Bu nedenle, verilerin negatif değerler içermediği ve pozitif değerlerin daha yaygın olduğu verileri modellemek ve analiz etmek için kullanılır.
3. Log-normal dağılım, logaritmik ölçekte normal dağılıma benzeyen bir yapıya sahiptir. Yani, rassal değişkenin logaritması normal dağılım gösterir. Bu nedenle, logaritma alındığında, veriler normal bir dağılım sergiler.
4. Log-normal dağılım iki temel parametre μ ve σ ile tanımlanır. Bu parametreler sırasıyla konum (location) ve ölçek (scale) parametreleridir.

Log-normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad 0 < x < \infty$$

Log-normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyon grafiği aşağıdaki gibi gösterilmektedir. Bu grafikte μ ve σ gibi parametreler belirli bir değere ayarlanmıştır. İlgili parametre değerleri değiştirilerek farklı log-normal dağılım grafikleri oluşturulabilir.



Şekil 1.1. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

Log-Normal dağılım hangi alanlarda kullanılır?

Log-normal dağılım çeşitli alanlarda kullanılan bir olasılık dağılımıdır. Log-normal dağılımın sıkça kullanıldığı alanlara sırasıyla aşağıda yer verilmiştir.

Finans: Hisse senedi fiyatları ve getirileri log-normal dağılıma yakınsarlar ve bu dağılım, finansal analiz ve risk yönetimi için önemlidir. Log-normal dağılımının finans alanında kullanılmasına dair çalışmalar genellikle ekonomi, finans ve risk yönetimi alanlarında uzmanlaşmış kişiler tarafından üretilmiştir. Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinin orijinal yazarları olan Fischer Black ve Myron Scholes, finans alanında log-normal dağılımın kullanımının öncülerindedir. Bu model, opsiyonların fiyatlandırılması için log-normal dağılımı temel alır. Nobel ödüllü ekonomist Robert C. Merton, opsiyon fiyatlandırma ve risk yönetimi konularında önemli çalışmalar yapmış ve Merton, Black-Scholes-Merton opsiyon fiyatlama modelinin geliştirilmesine katkıda bulunmuş ve log-normal dağılımı bu modele dahil etmiştir (Black ve Scholes, 1973).

Gelir Dağılımları: Log-normal dağılım, gelir dağılımı analizlerinde kullanılan bir olasılık dağılımıdır. Bu dağılım, ekonomik verilerin bazı yönlerini açıklamak için ve gelir dağılımının belirli yönlerini ve karakteristiklerini incelemek için kullanılır. Aitchison

(1982) Kompozisyon Verilerinin İstatistiksel Analizi çalışmasında, log-normal dağılımın kompozisyon verileri analizinde nasıl kullanılabileceğini inceler.

Sağlık Bilimleri: İlaç dozajları, tedavi süreleri ve biyomedikal veriler log-normal ile ilişkilendirilebilir. İlaç dozajlarının etkisi ve toksisitesitesi üzerine yapılan çalışmalarda log-normal dağılım sıkça kullanılır. Addona, Atherton ve Wolfson (2012) tarafından yapılan çalışma ile takipli yaygın bir kohort çalışmasından elde edilen sağ kalım verilerinin analizi varsayımlarını test etmekte log-normal dağılımı bu çalışmaya dahil etmişlerdir. Baser (2007) Bilinmeyen Heteroskedastisite ile Dönüştürülmüş Sağlık Bakım Maliyetinin Modellenmesi çalışmasında, sağlık harcamalarının modellenmesi için log-normal ve diğer dağılımları değerlendirir.

Çevre Bilimleri: Log-normal dağılımın çevre bilimlerinde kullanımı, çeşitli çevresel verilerin analizi, modellemesi ve çevresel değişkenlerin davranışlarının anlaşılması için önemlidir. Biondini (1976) Bulut Hareketi ve Yağış İstatistikleri çalışmasında, log-normal dağılım ile tohumlanmış ve tohumlanmamış bulutlardan düşen yağmur miktarları arasındaki farklılığı inceler.

Jeoloji ve Madencilik: Log-normal dağılım, jeoloji ve madencilik alanlarında genellikle mineral rezervlerinin tahmin edilmesi, cevher konsantrasyonları, jeokimyasal verilerin analizi ve jeolojik süreçlerin modellenmesi gibi uygulamalarda kullanılır. Glacken ve Snowden (2001) Mineral Kaynak Tahmini çalışmasında, mineral kaynağı tahmininde kullanılan yöntemleri ve log-normal dağılımın önemini inceler. Goovaerts (1997) ise Doğal Kaynaklar Değerlendirmesi için Jeostatistik çalışmasında, jeolojik ve madencilik uygulamalarında jeostatistik ve log-normal dağılımın kullanımını ele alır.

İklim Bilimleri: Yağış miktarları, sıcaklık ve rüzgar hızı verileri log-normal dağılıma yakın bir yapı gösterebilir. İklim değişikliği analizleri ve su kaynakları yönetimi, sıcaklık değişikliklerinin analizi, rüzgar enerjisinin planlanmasına yönelik analizlerde log-normal dağılım yöntemi kullanışlı olabilir. Papalexiou, AghaKouchak ve Fofoula-Georgiou (2018) Amerika Birleşik Devletleri'nde Saatlik Aşırı Yağış Kuyruklarının Klimatolojisini

Anlamak için Tanısal Bir Çerçeve çalışmasında log-normal dağılım ve diğer dağılımları değerlendirir.

Biyoloji: Canlı organizmaların büyüme hızı, yığın büyüklüğü ve biyokimyasal süreçlere bağlı veriler log-normal dağılıma yaklaşabilir. Yığın büyüklüğü, doğum oranları, ölüm oranları gibi değişkenlerde, biyolojik organizmaların boyutları ve büyüme oranlarının analizlerinde, enzim aktivitesi veya gen ifadesi gibi biyolojik süreçlerin analizinde log-normal dağılım kullanılabilir. Hirano, Nordheim, Arny ve Upper (1982) Yaprak Yüzeylerindeki Epifitik Bakteri yığınlarının Log-normal Dağılımı çalışmasında, 24 ila 36 ayrı yapraktan (mısır, çavdar) veya yaprakçıktan (fasulye) oluşan veri seti için, toplam ve bileşen epifitik bakteri yığınlarının normallik testi için Shapiro-Wilk testi ile log-normal dağılımın kullanımını ele alır.

Mühendislik: log-normal dağılım özellikle risk analizi, güvenilirlik analizi, maliyet tahmini ve benzeri konular için sıklıkla kullanılır. Rhayma, Bressolette, Breul, Fogli ve Saussine (2013) Demiryolu Raylarına Yönelik Bakım İşlemlerinin Güvenilirlik Analizi çalışmada, demiryolu hat sistemlerinin güvenilirlik ve bakım analizi konusunu ele alır ve log-normal dağılımı kullanır.

Dil Bilimi: Dil bilimi alanında log-normal dağılım, kelime frekansı analizi, dil yapıları, dil değişimi ve diğer dil özelliklerinin incelenmesinde yaygın olarak kullanılan bir istatistiksel dağılım türüdür. Piantadosi (2014) Zipf'in Doğal Dilde Kelime Sıklığı Yasası çalışmasında, dil biliminde yaygın olarak görülen Zipf'in Kelime Sıklığı Yasası'nın incelenmesine odaklanır ve bu kavramın log-normal dağılım ile nasıl ilişkilendirildiğini ele alır.

Pazarlama ve Satış: Ürün satışları, müşteri davranışları ve reklam etkisi gibi pazarlama ve satış verileri log-normal dağılıma benzer. Meiling (2022) E-Ticaret Platformuna Dayalı Tarımsal Ürünlerin Büyük Veri Madenciliği ve Analizi çalışmasında, tarımsal ürünlerin büyük veri madenciliği ve analizinin teknik açıdan nasıl daha verimli bir şekilde gerçekleştirilebileceğini analiz ederken log-normal dağılımının kullanımını ele alır.

Log-normal dağılım, yukarıda da ifade edildiği gibi birçok alanda verilerin modellenmesi ve analizinde kullanılır. Verilerin bu dağılıma ne kadar uyduğu bu alanlardaki analizler ve tahminler için önemlidir.

Uygulamalı araştırmaların birçok alanında en önemli problemlerden biri, log-normal dağılıma sahip yığınların ortalaması hakkında çıkarım yapmaktır. Örneğin, konsantrasyon-zaman eğrisi altındaki (AUC) ve maksimum konsantrasyon (C-max) gibi farmokokinetik (PK) parametreleri log-normallik varsayımı altında analiz edilmelidir (Lacey, 1997) ve yığın ortalamalarının tahmin edilmesi ilgi çekicidir (Julious ve Debornat, 2000; Shen, Brown ve Zhi, 2006).

Literatüre bakıldığında, ilk olarak log-normal dağılıma sahip bir yığının ortalamasının çıkarımı incelenmiştir. (Zhou, 1998; Zhou ve Gao, 1997; Taylor, Kupper ve Muller, 2002; Shen vd. 2006). Daha sonra Zhou ve diğerleri (1997) iki log-normal dağılıma sahip yığınların ortalamalarının eşitliğini test etmek için Z-skor testi ve parametrik olmayan Bootstrap yaklaşımını önermiştir. Wu, Jiang, Wong ve Sun (2002) ise; Z-skor testinin iyi bir performans göstermediğini, iki bağımsız log-normal dağılımın ortalamalarının oranı hakkında çıkarım yapmak için olabilirlik tabanlı yaklaşımı olan işaret log-olabilirlik oran istatistiği ve modifiye edilmiş işaret log-olabilirlik oran istatistiğini önermiştir.

Gill (2004) makalesinde, log-normal dağılıma sahip yığınların ortalama eşitliğini test etmek için küçük örneklemlilerle çıkarım prosedürleriyle ilgilenmiştir.

k sayıda Log-normal dağılıma sahip yığınların ortalamasını test etmek için son zamanlarda bazı yöntemler geliştirilmiştir. Buna göre;

Birkaç log-normal dağılımın ortalamalarının eşitliğini test etmek için Zhou ve Tu (1999) olabilirlik yaklaşımına dayalı bir test önermiştir. Wu ve diğerleri (2002) olabilirlik yaklaşımına dayalı olarak işaret olabilirlik oran ve modifiye edilmiş işaret olabilirlik oran yöntemleri olarak adlandırılan iki yöntem önermiştir. Jafari ve Abdollahnezhad (2017) birkaç log-normal dağılımın ortalamalarının eşitliğinin test edilmesinde; Bootstrap yaklaşımına dayalı (genelleştirilmiş-p değeri, maksimum olabilirlik tahmini) üç

yöntem sunmuştur. Ayrıca Monte Carlo simülasyon aracılığı ile yöntemleri mevcut yöntemler ile karşılaştırmıştır. Sayısal sonuçlar, örneklem büyüklüğü, yığın sayısı ve gerçek parametrelere bakılmaksızın bu önerdikleri prosedürlerin I. tip hatalarının tatmin edici olduğunu göstermiştir. Krishnamoorthy ve Oral (2017), birkaç log-normal dağılımın ortalamalarının eşitliğini test etmek için standartlaştırılmış olabilirlik oranı testi (SLRT) olarak adlandırılan bir yöntem önermiştir. Bunu modifiye edilmiş olabilirlik oran testi ve genelleştirilmiş değişken (generalized variable, GV) testi ile karşılaştırmışlardır. Simülasyon çalışmaları, SLRT'nin I.tip hata oranlarının ve güçlerinin diğer iki testten daha iyi olduğunu göstermiştir.

Birkaç log-normal dağılımın ortalamalarının eşitliğinin testi için F. Gökpınar ve E. Gökpınar (2017) Bootstrap yönteminin bir türü olan hesaplamalı yaklaşımına dayalı bir test önermiştir. Ayrıca Çakmak, F. Gökpınar, E. Gökpınar ve Ebeğil (2020) birkaç log-normal ortalamasının eşitliğini test etmek için skor istatistiğine dayalı yeni bir test istatistiği önermiştir. Yaptıkları simülasyon çalışmasında önerilen skor testinin iyi performans gösterdiğini ifade etmişlerdir.

Log-normal ortalamaların eşitliği hipotezi reddedilmediğinde, ilgilenilen sorun yığınların ortak ortalaması hakkında çıkarımlar yapmaktır. Bu problemde uygulamada karşılaşılan önemli problemlerden biridir. Konuyla ilgili örnek verilecek olursa, Bradstreet ve Liss (1995) erkeklerde alkol etkileşimi üzerine yapılan bir çalışma ele alınmıştır. Bu çalışmada yirmi üç sağlıklı erkek denek, beş dönemli bir çapraz geçiş çalışmasını tamamlamış, her bir deneğe etkili dört farklı tedavi yöntemi uygulanmıştır. Eğer dört farklı tedavi gören grup arasında ilgilenilen değişken bakımından farklılık yoksa dört farklı tedavi altındaki grubun ilgili değişken bakımından ortak ortalaması hakkında çıkarım yapmak ve bunu hiçbir tedavi görmemiş grubun ortalamasıyla karşılaştırmanın ilgi çekici olabileceği belirtilmiştir. Başka bir örnek olarak ise Regenstrief Tıbbi Kayıt Sistemi'nden (RMRS) bir tıbbi ücret çalışmasında (McDonald, Blevins, Tierney ve Martin 1988; Zhou vd., 1997), tıbbi ücretlerin çarpık olduğu ve log-normal dağılımlarla iyi açıklanabileceği ve Afrika kökenli Amerikalı hastalar ve beyaz hastalar için ortalama tıbbi ücretler arasında fark olmadığı gösterilmiştir (Zhou vd., 1997; Wu vd., 2002). Dolayısıyla, hem Afrika kökenli Amerikalı hem de beyaz hastalar için genel tıbbi ücretler hakkında çıkarım yapmanın ilgi çekici olacağı belirtilmiştir.

Birçok araştırmacının birden fazla log-normal dağılımının ortak ortalaması çıkarımı problemini ele aldığını belirtmek gerekir.

Krishnamoorthy ve Mathew (2003) yaptığı çalışmada; örneklem büyüklüğü küçük olduğunda veya parametreler birbirine yakın olmadığında Z-skor istatistiğinin dağılımının çarpık olduğunu, bu nedenle genelleştirilmiş p-değeri ve genelleştirilmiş güven aralığı kavramlarını kullanarak tek log-normal ortalama ve iki log-normal ortalama hakkında çıkarım yapmak için yaklaşımlar önermiştir.

Tian ve Wu (2007) alışmasında, birkaç log-normal yığının ortak ortalamasının güven aralığı tahmini ve hipotez testi için GV kavramını kullanarak yeni bir yaklaşım önermiştir. Yaptıkları simülasyon çalışmasıyla, önerilen yaklaşımın tatmin edici kapsama olasılıklarıyla güven aralıkları sağlayabildiğini ve hipotez testini küçük örneklem büyüklüklerinde bile I. tip hata kontrolü ile gerçekleştirebildiğini göstermişlerdir.

Lin (2013) yapmış olduğu çalışmada; birkaç log-normal dağılımının ortak ortalamasının güven aralığını oluşturmak için modifiye edilmiş işaret olabilirlik oran yöntemi olarak bilinen yüksek dereceli olabilirlik yöntemini önermiştir. Önerilen prosedür, daha yüksek mertebeden bir olabilirlik yöntemine dayanmaktadır. Lin (2013) yaptığı çalışmada, önerdiği yöntemi, güven aralıklarının beklenen uzunlukları ve kapsama olasılıkları bakımından Tian ve Wu (2007)'nin önermiş olduğu yöntemle karşılatırmıştır. Buna göre, önerilen yöntemin kapsama olasılıklarının çok küçük örneklem büyüklükleri için bile daha doğru olduğunu göstermiştir.

Behboodian ve Jafari (2014) yapmış olduğu çalışmada; birkaç log-normal dağılıma sahip yığınların ortak ortalaması için güven aralığı ve hipotez testi problemini ele almış, genelleştirilmiş test değişkenine dayalı yeni bir yöntem önermiştir.

Krishnamoorthy ve Oral (2017) yapmış olduğu çalışmada; birkaç log-normal dağılımının ortak ortalamasının güven aralığı için varyans tahmini kurtarma yöntemini (the method of variance estimate recovery, MOVER) kullanılarak bir yöntem geliştirmiş ve genelleştirilmiş güven aralığı yöntemi ile karşılaştırmıştır. Yapılan simülasyon

çalışmalarıyla, önerilen güven aralığının kapsama olasılıkları açısından genelleştirilmiş güven aralığından daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Malekzadeh ve Kharrati-Kopaei (2019) birkaç log-normal dağılıma sahip yığınların ortak ortalaması hakkında yapmış olduğu çalışmada; Parametrik Bootstrap yaklaşımına dayalı 2 yöntem (PB1 ve PB2) önermiştir. Ayrıca önerdiği yöntemleri MOVER, genelleştirilmiş p yöntemi, Behboodian ve Jafari'nin yöntemi, Tian ve Wu'nun yöntemi ve yüksek dereceli olabirlik (higher order likelihood, HOL) yöntemleriyle karşılaştırmıştır. Elde etmiş oldukları simülasyon çalışmasına göre MOVER ve PB2 yöntemleriyle elde edilen güven aralıklarının genel olarak kullanılabilirliğini ifade etmişlerdir.

Yukardaki çalışmalardan görüldüğü gibi araştırmacılar tarafından önerilen yöntemler literatürde var olan bazı yöntemlerle bazı durumlar altında karşılaştırılmıştır. Literatürü incelediğimizde hangi durumda hangi yöntemin kullanılacağını belirten kapsamlı bir simülasyon çalışmasına rastlanmamıştır. Bu amaçla bu çalışmada literatürde son zamanlarda önerilen yöntemler, çok farklı durumlar altında incelenmiş ve hangi durumda hangi yöntemin iyi olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda literatüre katkı sağlanması amaçlanmıştır.

Bu çalışma aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 2'de birden fazla log-normal dağılımın ortak ortalaması için güven aralığı tahmininde kullanılan Parametrik Bootstrap Yöntemi (PB), Varyans Tahminlerinin Geri Kazanımı Yöntemi (MOVER), Genelleştirilmiş Değişken Yaklaşım Yöntemi (GV), Behboodian ve Jafari Yöntemi (BJ) incelenmiştir. Bölüm 3'te örnekler üzerinden PB1, PB2, GV1, GV2, MV ve BJ yöntemleri uygulanmıştır. Bölüm 4'te ise farklı senaryolar oluşturularak simülasyon çalışması yapılmış ve bahsedilen yöntemlere ilişkin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları hesaplanmıştır. 5. Bölümde de sonuçlar yorumlanmıştır.

2. k TANE LOG-NORMAL DAĞILIMA SAHİP YIĞINLARIN ORTAK ORTALAMASI İÇİN KULLANILAN YÖNTEMLER

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}, i = 1, \dots, k; \mu_i$ ve σ_i^2 parametrelili log-normal dağılıma sahip i . yığından seçilen rastgele bir örnek olsun, yani $X_{ij} \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2)$ dir. i . yığının ortalaması η_i olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\eta_i = E(X_{ij}) = e^{\mu_i + \sigma_i^2/2} \quad (2.1)$$

Uygulamalı istatistikte en çok ilgilenilen problemlerden biri de log-normal dağılıma sahip yığınların ortalamasının eşitliği hipotezini test etmektir. Buna göre yokluk hipotezi Eş. (2.2)'de verildiği gibidir.

$$H_0 = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_k \quad (2.2)$$

Log-normal dağılımın, normal dağılım ile yakından ilişkisi vardır. Buna göre Log-normal dağılıma sahip değişkenin logaritması alındığında normal dağılıma sahip olur.

$$Y_{ij} = \ln(X_{ij}) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

Eş. (2.1)'de verilen η_i ise bu durumda;

$$\theta_i = \ln(\eta_i) = \mu_i + \sigma_i^2/2$$

olur. Eş.(2.2)'de verilen yokluk hipotezi ise tekrar yazıldığında,

$$H'_0 = \ln(\eta_1) = \ln(\eta_2) = \dots = \ln(\eta_k) = \ln(\eta)$$

yada

$$H'_0 = \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = \theta \quad (2.3)$$

olur.

Eş. (2.3) deki gibi yokluk hipotezinin ifade edilmesi normal dağılımın tüm özelliklerini kullanabilme imkanı verdiği için bu durum matematiksel ve istatistiksel kolaylık sağlayacaktır. Dolayısıyla log-normal dağılımın eşitliğinin test edilmesiyle ilgili literatürdeki tüm çalışmalar hep bu mantıkla yürütülmüştür.

Eş.(2.3)'de verilen yokluk hipotezinin testi için son yıllarda bazı önemli yöntemler önerilmiştir. (Krishnamoorthy ve Oral, 2017; Çakmak, F. Gökpinar, E. Gökpinar ve Ebeğil, 2020; F. Gökpinar ve E. Gökpinar, 2017). Bu yöntemlerin sonucunda Eş.(2.3)'de verilen yokluk hipotezi red edilemediğinde yani grupların ortalamaları farklı olmadığında grupların ortak ortalaması (θ) tahmin edilmek istenebilir. Tian ve Wu (2007)'nin belirttiği gibi, bazı log-normal yığının aynı ortalamaaya sahip olabileceği durumlar vardır ve bu durumda ilgilenilen problem ortak ortalamayı tahmin etmek veya test etmek olabilir. Bu bağlamda bu çalışmadaki amaç log-normal dağılıma sahip yığınların ortak ortalamasıyla ilgili çıkarımlarla ilgilenmektir. Buna göre yığınların ortak ortalama parametresi θ ,

$$\theta = \ln(\eta)$$

$$\theta = \mu_i + \sigma_i^2/2$$

$$\mu_i = \theta - \sigma_i^2/2$$

olur. Bu durumda Y_{ij} 'nin dağılımı $Y_{ij} \sim N(\theta - \frac{\sigma_i^2}{2}, \sigma_i^2)$ şeklindedir. Ayrıca

$$\bar{Y}_i \sim N\left(\theta - \frac{\sigma_i^2}{2}, \frac{\sigma_i^2}{n_i}\right)$$

ve

$$\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma_i^2} \sim X_{n_i-1}^2$$

dağılımına sahip olur. Burada

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

olarak gösterilir. Bu durumda log-normal dağılımın θ ve σ_i^2 parametrelerinin En çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur. Buna göre; $N = \sum_{i=1}^k n_i$ olmak üzere k grup için olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$L(.) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \cdot (\sigma_1^2)^{n_1/2} \dots (\sigma_k^2)^{n_k/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(Y_{ij} - (\theta - \sigma_i^2/2))^2}{\sigma_i^2}}$$

Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alındığında;

$$\begin{aligned} \ln L(.) &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \left(\frac{n_1}{2} \ln \sigma_1^2 + \frac{n_2}{2} \ln \sigma_2^2 + \dots + \frac{n_k}{2} \ln \sigma_k^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(Y_{ij} - (\theta - \sigma_i^2/2))^2}{\sigma_i^2} \\ \ln L(.) &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} \ln \sigma_i^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(Y_{ij} - \theta + \frac{\sigma_i^2}{2})^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

elde edilir. Eş 2.4'de verilen fonksiyonu θ 'ya göre türev alındığında;

$$\frac{\partial \ln L(.)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \frac{1}{\sigma_i^2} (Y_{ij} - \theta + \frac{\sigma_i^2}{2}) = 0$$

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} - \sum_{j=1}^{n_i} \theta + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\sigma_i^2}{2} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_i^2} \left(n_i \bar{Y}_i - n_i \theta + n_i \frac{\sigma_i^2}{2} \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_i}{\sigma_i^2} \bar{Y}_i - \sum_{j=1}^k \frac{n_i}{\sigma_i^2} \theta + \sum_{j=1}^k \frac{n_i}{2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_i}{\sigma_i^2} \bar{Y}_i + \sum_{j=1}^k \frac{n_i}{2} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sigma_i^2} n_i \theta$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{n_i}{\sigma_i^2} \bar{Y}_i + \sum_{j=1}^k \frac{n_i}{2}}{\sum_{j=1}^k \frac{n_i}{\sigma_i^2}} = \frac{\sum_{j=1}^k w_i \bar{Y}_i + N/2}{\sum_{j=1}^k w_i}$$

olarak elde edilir. Burada $w_i = \frac{n_i}{\sigma_i^2}$ dir. Eş.(4)'de verilen olabilirlik fonksiyonu σ_i^2 'ya göre türev alındığında;

$$\frac{\ln L(.)}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{n_i}{2\sigma_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(-\frac{(Y_{ij} - \theta)^2}{(\sigma_i^2)^2} + \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\frac{\ln L(.)}{\partial \sigma_i^2} = -\frac{n_i}{2\sigma_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{(Y_{ij} - \theta)^2}{(\sigma_i^2)^2} \right) - \frac{n_i}{8} = 0$$

$$-\frac{4n_i\sigma_i^2}{8(\sigma_i^2)^2} + \frac{4}{8} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{(Y_{ij} - \theta)^2}{(\sigma_i^2)^2} \right) - \frac{n_i(\sigma_i^2)^2}{8(\sigma_i^2)^2} = 0$$

$$-4n_i\sigma_i^2 + 4\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2 - n_i(\sigma_i^2)^2 = 0$$

olur. Bu denklem sistemini çözmek için $aX^2 + bX + C = 0$ sisteminden faydalanılırsa

$$a = -n_i, \quad b = -4n_i \quad \text{ve} \quad c = 4\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2$$

olur. Bu durumda $\Delta = b^2 - 4ac$ 'den

$$\begin{aligned} \Delta &= 16n_i^2 - 4(-n_i)4\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2 \\ &= 16n_i^2 + 16n_i\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2 = 16n_i(n_i + \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2) > 0 \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ olduğundan bu denklem sisteminin 2 çözümü vardır. Buna göre

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olmak üzere X_1 ve X_2 ifadelerini tekrar yazacak olursak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$X_1 = \frac{4n_i + 4\sqrt{n_i(n_i + \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2)}}{2(-n_i)}$$

$$= -2 - 2 \sqrt{1 + \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2}{n_i}} < 0$$

X_1 ifadesinden görüldüğü gibi $X_1 < 0$ olduğundan bu sonuç σ_i^2 'nin tahmin edicisi olamaz.

X_2 için gerekli işlemler yapıldığı zaman,

$$X_2 = \frac{4n_i - 4 \sqrt{n_i (n_i + \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2)}}{2(-n_i)}$$

$$= -2 + 2 \frac{\sqrt{n_i (n_i + \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2)}}{n_i}$$

$$= -2 + 2 \sqrt{\frac{n_i^2 + n_i \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2}{n_i^2}}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = -2 + 2 \sqrt{1 + \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2}{n_i}}$$

elde edilir. Buna göre θ ve σ_i^2 parametrelerinin H_0 altında elde edilen kısıtlı en çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^k w_i \bar{Y}_i + N/2}{\sum_{i=1}^k w_i} \quad \text{ve} \quad \hat{\sigma}_{ML(i)}^2 = -2 + 2 \sqrt{1 + \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \theta)^2}{n_i}} \quad (2.5)$$

Eş. (2.5)'den görüldüğü gibi θ ve σ_i^2 'nin tahmin edicilerinin tam çözümleri olmadığı için iterasyon yöntemi ile bulunur. Birbirine bağlı denklemlerde iterasyon yöntemi oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Buna göre ilk olarak $\hat{\theta}$ tahmini için bir başlangıç değeri belirlenerek aşağıdaki algoritmayla bu parametrelerin tahmin edicileri elde edilir (Krishnamoorthy ve Oral, 2017)

Algoritma:

- 1) $V_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{n_i}$ olmak üzere $\sigma_{i,0}^2 = V_i^2$, $i=1, \dots, k$ ' dir.
- 2) $\hat{\theta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\sigma_{i,0}^2} (\bar{Y}_i + \sigma_{i,0}^2/2)}{\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{\sigma_{j,0}^2}}$
- 3) $\hat{\sigma}_{i,yeni}^2 = -2 + 2\sqrt{1 + V_i^2 + (\bar{Y}_i - \hat{\theta}_0)^2}$, $i=1, \dots, k$.
- 4) $\hat{\theta}_{yeni} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{n_i / \sigma_{i(yeni)}^2}{\sum_{j=1}^k n_j / \sigma_{j(yeni)}^2} \right) (\bar{Y}_i + \sigma_{i(yeni)}^2/2)$
- 5) Eğer $|\hat{\theta}_{yeni} - \hat{\theta}_0| < \varepsilon$ ise dur.
- 6) Değilse $\hat{\theta}_{yeni}$ eski değer olarak işleme devam et.

Bundan sonraki bölümde bazı log-normal dağılıma sahip yığınların ortak ortalamasının çıkarımlarıyla ilgili yöntemler ele alınmıştır.

2.1. Parametrik Bootstrap Yöntemi (PB)

Malekzadeh ve Kharrati-Kopaei (2019) yaptığı çalışmada bazı log-normal dağılıma sahip yığınların ortak ortalamasının güven aralığı çıkarımı için Parametrik Bootstrap (PB) yöntemini geliştirmiştir. Buna göre bu yöntem aşağıdaki gibi verilebilir.

$\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ bilindiği zaman

$$Q = (\hat{\theta} - \theta)^2 \sum_{i=1}^k w_i \sim \chi_1^2$$

$$Q = \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^k w_i \bar{Y}_i + N/2}{\sum_{i=1}^k w_i} \right) - (\mu_i + \sigma_i^2/2) \right]^2 \sum_{i=1}^k w_i \sim \chi_1^2$$

olur. Gerçekte σ_i^2 bilinmediği için Q'nun dağılımı, χ_1^2 dağılımına sahip değildir. σ_i^2 'nin yerine tahmini konulduğu zaman Q ifadesi Q^* olarak ifade edilir. Bu durumda Q^* 'nin dağılımı bilinmeyen parametreye bağlı olabilir.

Malekzadeh ve Kharrati-Kopaei (2019), Q^* dağılımını, bilinmeyen parametrelerin tahminini yerine koyarak Q^* ın örnekleme dağılımını yaklaşık olarak elde etmiştir. Buna göre; eğer σ_i^2 'nin yerine S_i^2 ifadesini koyarsak, Q, Q_u olarak ifade etmek üzere aşağıdaki gibi olur.

$$Q_u = (\hat{\theta}_u - \theta)^2 \sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}$$

Burada $\hat{\theta}_u = \left(\frac{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui} \bar{Y}_i + N/2}{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}} \right)$ ve $\hat{w}_{ui} = \frac{n_i}{S_i^2}$ dir. Q_u ise

$$Q_u = \left[\left(\frac{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui} \bar{Y}_i + N/2}{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}} \right) - \theta \right]^2 \sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}$$

$$Q_u = \left(\frac{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui} \bar{Y}_i + \frac{N}{2} - \theta \sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}}{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}} \right)^2 \sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}$$

Q_u ifadesi $\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}$ ifadesine göre ortak paranteze alındığında

$$Q_u = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui} (\bar{Y}_i - \theta) + \frac{N}{2} \right)^2}{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}} \quad \text{elde edilir.}$$

Burada;

$$(\bar{Y}_i - \theta) \sim N\left(-\frac{\sigma_i^2}{2}, \frac{\sigma_i^2}{n_i}\right)$$

ve

\hat{w}_{ui} 'lerin dağılımı sadece σ_i^2 'lere bağlıdır. Bu nedenle Q_u 'nun dağılımı θ 'ya bağlı değildir ancak ilgilenilmeyen (nuisance) parametrelere yani σ_i^2 'ye bağlıdır. σ_i^2 'ler ve dolayısıyla Q_u 'nun dağılımı pratikte bilinmemektedir. Q_u 'ya karşılık gelen PB değişkeni;

$$Q_u^B = (\hat{\theta}_u^B - \hat{\theta}_u)^2 \sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}^B,$$

olup, burada $\hat{\theta}_u^B = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}^B \bar{Y}_i^B + N/2 \right)}{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}^B}$ ve $\hat{w}_{ui}^B = \frac{n_i}{S_i^{2B}}$ dir.

Buna göre \bar{y}_i ve s_i^2 ; \bar{Y}_i ve S_i^2 'nin gözlenen değerleri olmak üzere

$$\bar{Y}_i^B \sim N\left(\bar{y}_i, \frac{s_i^2}{n_i}\right) \quad \text{ve} \quad S_i^{2B} \sim \frac{s_i^2 \chi_{n_i-1}^2}{(n_i-1)} \quad (2.6)$$

dır. Daha sonra θ için %100(1- α) güvenle, güven aralığı aşağıdaki şekilde verilir

$$\hat{\theta}_u \pm \left(\frac{q_{u\alpha}^B}{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui}} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Burada $q_{u\alpha}^B$, Q_u^B dağılımının $(1-\alpha)$ 'inci kantil değerini gösterir ve aşağıdaki algoritma ile kolayca hesaplanabilir.

- i. Verilerden \bar{y}_i ve s_i^2 'ler hesaplanır.
- ii. Eş.(2.6)'dan \bar{Y}_i^B , S_i^{2B} üretilir ve Q_u^B elde edilir.
- iii. 2.adım L kez tekrarlanarak Q_u^B 'nin dağılımı elde edilir. Üretilen Q_u^B 'nin $(1-\alpha)$ 'inci değeri $q_{u\alpha}^B$ ile gösterilmek üzere, bu değer elde edilir.

Bu çalışmada bu yöntem PB1 olarak gösterilmiştir.

$H_0^*: \theta = \theta_0$ hipotezini test etmek istenildiği zaman, $(\hat{\theta}_u - \theta_0)^2 \sum_{i=1}^k \hat{w}_{ui} > q_{u\alpha}^B$ olduğunda yokluk hipotezi reddedilir.

Malekzadeh ve Kharrati-Kopaei (2019), aynı zamanda Q'nun Parametrik bootstrap dağılımını elde etmek için ikinci bir yol da önermiştir. Buna göre PB1 den farklı olarak σ_i^2 parametresinin ve θ 'nın En çok olabilirlik tahmin edicisini kullanmıştır.

- i. Verilerden \bar{y}_i ve s_i^2 'ler hesaplanır.
- ii. σ_i^2 ve θ parametrelerinin Eş.(2.5)'de verilen en çok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\sigma}_{ML(i)}^2$ ve $\hat{\theta}_{ML}$ elde edilir. Ayrıca $\hat{w}_{ML(i)} = n_i / \hat{\sigma}_{ML(i)}^2$ dir.
- iii. $N(\bar{y}_i, s_i^2/n_i)$, $i = 1, \dots, k$ dağılımından n_i çapında örnek üretilir.
- iv. 3.adımdan elde edilen örneklerden $\hat{\sigma}_{ML(i)}^{2(B)}$ ve $\hat{\theta}_{ML}^B$ elde edilir.
- v. $Q_{ML}^B = (\hat{\theta}_{ML}^B - \hat{\theta}_{ML})^2 \sum_{i=1}^k \hat{w}_{ML(i)}^B$ elde edilir. Burada $\hat{w}_{ML(i)}^B = n_i / \hat{\sigma}_{ML(i)}^{2(B)}$.
- vi. 3-5.adımlar L kez tekrarlanarak Q_{ML}^B 'nin dağılımı elde edilir. Üretilen Q_{ML}^B 'nin $(1-\alpha)$ 'inci kantil değeri $q_{ML(\alpha)}^B$ ile gösterilmek üzere bu değer elde edilir.

Buna göre θ için %100(1- α) güvenle, güven aralığı şu şekilde verilir;

$$\hat{\theta}_{ML} \pm \left(\frac{q_{ML(\alpha)}^B}{\sum_{i=1}^k \hat{w}_{ML(i)}} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Çalışmada bu yöntem PB2 olarak gösterilmiştir.

2.2. Varyans Tahminlerinin Geri Kazanımı Yöntemi ile Güven Aralığı Tahmini (MOVER)

Log-normal dağılımın ortalaması için bir güven aralığı oluşturmanın zorluğu, ortalamanın iki bilinmeyen parametre içermesinden kaynaklanmaktadır. Bununla birlikte, her bir parametre (ortalama ve varyans) için güven aralığı sınırlarının elde edilmesi kolaydır. Zou, Taleban ve Huo (2009) yaptığı çalışmada güven aralığının sınırlarının bağlı olduğu tahmin edici MOVER yöntemini uygulayarak elde etmiştir. Buna göre parametrelerin fonksiyonları için yaklaşık güven aralıkları oluşturmuştur.

δ_1 ve δ_2 parametrelerinin tahmin edicileri $\hat{\delta}_1$ ve $\hat{\delta}_2$ olmak üzere birbirinden bağımsız olsun. Buna göre, $\delta = \delta_1 + \delta_2$ için %100(1- α) güvenle, güven aralığı (L_δ, U_δ) oluşturmak istediğimizi varsayalım. Güven aralığı alt sınırı L_δ ve güven aralığı üst sınırı U_δ olmak üzere, L_δ aşağıdaki gibidir.

$$L_\delta = \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 - Z_{\alpha/2} \sqrt{\text{var}(\hat{\delta}_1) + \text{var}(\hat{\delta}_2)} \quad (2.9)$$

L_δ değeri, $\text{var}(\hat{\delta}_i)$ bilinmediğinde kolayca elde edilemez.

δ_i parametresi için güven aralığı, güven aralığı alt sınırı l_i ve üst sınırı u_i ($i=1,2$) olmak üzere, $\delta_1 \rightarrow (l_1, u_1)$ ve $\delta_2 \rightarrow (l_2, u_2)$ 'dir. Bu durumda L_δ ; $(l_1 + l_2)$ 'nin komşuluğunda ve U_δ ; $(u_1 + u_2)$ 'nin komşuluğundadır. Bartlett (1953) yaklaşımından yola çıkarak; L_δ 'yi tahmini aşağıdaki gibi olur.

Merkezi Limit teoremi ile güven aralığı alt sınırı l_i ,

$$l_i = \hat{\delta}_i - Z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{var}}(\hat{\delta}_i)}, \quad i=1,2$$

şeklindedir ve $\hat{\delta}_i$ için varyans tahminini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\delta}_i) = \frac{(\hat{\delta}_i - l_i)^2}{Z_{\alpha/2}^2}, \quad i = 1,2 \quad (2.10)$$

Eş.(2.10) ifadesi, Eş. (2.9) denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} L_{\delta} &= \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 - Z_{\alpha/2} \sqrt{\left(\frac{\hat{\delta}_1 - l_1}{Z_{\alpha/2}}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\delta}_2 - l_2}{Z_{\alpha/2}}\right)^2} \\ &= \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 - \sqrt{(\hat{\delta}_1 - l_1)^2 + (\hat{\delta}_2 - l_2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde güven aralığının üst sınırı U_{δ} için aynı işlemler yapılır.

Merkezi Limit teoremi ile güven aralığı üst sınırı u_i ,

$$u_i = \hat{\delta}_i + Z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{var}(\hat{\delta}_i)}, \quad i=1,2$$

şeklindedir ve $\hat{\delta}_i$ için varyans tahminini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\widehat{var}(\hat{\delta}_i) = \frac{(u_i - \hat{\delta}_i)^2}{Z_{\alpha/2}^2}, \quad (2.11)$$

dir ve Eş. (2.11) kullanılarak U_{δ} ifadesi aşağıda verilen Eş. (2.12) deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} U_{\delta} &= \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 + Z_{\alpha/2} \sqrt{\left(\frac{u_1 - \hat{\delta}_1}{Z_{\alpha/2}}\right)^2 + \left(\frac{u_2 - \hat{\delta}_2}{Z_{\alpha/2}}\right)^2} \\ &= \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 + \sqrt{(u_1 - \hat{\delta}_1)^2 + (u_2 - \hat{\delta}_2)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Zou, Taleban ve Huo (2009) çalışmalarında MOVER yönteminin geçerliliğinin 2 parametrenin her biri için güven sınırlarının geçerliliğine bağlı olduğunu ifade etmişlerdir.

Bu yöntemi Krishnamorthy ve Oral (2017) Log-normal dağılımın ortak ortalamasının güven aralığı için uygulamıştır. Buna göre, $\delta_1, \dots, \delta_k$ parametrelerinin doğrusal bir kombinasyonu için MOVER güven aralığı aşağıdaki gibi tanımlanır. $\hat{\delta}_i, \delta_i, i = 1, \dots, k$ 'nin yansız bir tahmini ve $\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_k$ tahminlerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılınsın. Ayrıca her δ_i için %100(1- α) güven düzeyinde güven aralığı (l_i, u_i) dir. ($i=1, \dots, k$)

$\delta_1, \dots, \delta_k$ parametrelerinin doğrusal bir kombinasyonu $\Delta = \sum_{i=1}^k c_i \delta_i$, $i = 1, \dots, k$ için %100(1- α) güven düzeyinde güven aralığının alt (L_Δ) ve üst sınırı(U_Δ) aşağıdaki gibi verilir.

$$L_\Delta = \sum_{i=1}^k c_i \hat{\delta}_i - \sqrt{\sum_{i=1}^k c_i^2 (\hat{\delta}_i - l_i^*)^2}, \quad l_i^* = \begin{cases} l_i & c_i > 0 \\ u_i & c_i < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$U_\Delta = \sum_{i=1}^k c_i \hat{\delta}_i + \sqrt{\sum_{i=1}^k c_i^2 (\hat{\delta}_i - u_i^*)^2}, \quad u_i^* = \begin{cases} u_i & c_i > 0 \\ l_i & c_i < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Yukarıdaki yöntem, log-normal dağılımın $\theta_1, \dots, \theta_k$ parametrelerinin doğrusal bir kombinasyonu olarak $\theta = \sum_{i=1}^k c_i \theta_i$ alınarak MOVER yöntemi aşağıdaki gibi elde edilmiştir. $\theta_i = \mu_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, k$ parametresi için \bar{Y}_i ve S_i^2 'ye dayalı olarak ayrı ayrı güven aralıklarını birleştirerek ortak θ_i için bir güven aralığını elde etmek mümkündür. Bu durumda, μ_i için güven aralığı

$$(L_{\mu_i}, U_{\mu_i}) = \left(\bar{Y}_i - t_{n_i-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S_i}{\sqrt{n_i}}; \bar{Y}_i + t_{n_i-1; 1-\alpha/2} \frac{S_i}{\sqrt{n_i}} \right)$$

ve σ_i^2 için güven aralığı

$$(L_{\sigma_i^2}, U_{\sigma_i^2}) = \left(\frac{(n_i - 1)S_i^2}{\chi_{n_i-1; 1-\alpha/2}^2}, \frac{(n_i - 1)S_i^2}{\chi_{n_i-1; \alpha/2}^2} \right)$$

olur. $\hat{\theta}_i = \bar{Y}_i + \frac{1}{2} S_i^2$ olmak üzere $\theta_i = \mu_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2$ parametresi için MOVER yöntemiyle elde edilen güven aralığı

$$\begin{aligned} L_i &= \hat{\theta}_i - \sqrt{(\bar{Y}_i - L_{\mu_i})^2 + \left(\frac{S_i^2}{2} - L_{\sigma_i^2} \right)^2} \\ &= \hat{\theta}_i - \sqrt{\left(\bar{Y}_i - \bar{Y}_i + t_{n_i-1; 1-\alpha/2} \frac{S_i}{\sqrt{n_i}} \right)^2 + \left(\frac{S_i^2}{2} - \frac{(n_i - 1)S_i^2}{2\chi_{n_i-1; 1-\alpha/2}^2} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{\theta}_i - \sqrt{t_{n_i-1;1-\alpha/2}^2 \frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_i^4}{4} \left(1 - \frac{(n_i-1)}{\chi_{n_i-1;1-\alpha/2}^2}\right)^2} \\
&= \hat{\theta}_i - S_i \sqrt{\frac{t_{n_i-1;1-\alpha/2}^2}{n_i} + \frac{S_i^2}{4} \left(1 - \frac{(n_i-1)}{\chi_{n_i-1;1-\alpha/2}^2}\right)^2} \tag{2.15}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
U_i &= \hat{\theta}_i + \sqrt{(\bar{Y}_i - U_{\mu_i})^2 + \left(\frac{S_i^2}{2} - U_{\sigma_i^2}\right)^2} \\
&= \hat{\theta}_i + \sqrt{\left(\bar{Y}_i - \bar{Y}_i - t_{n_i-1;1-\alpha/2} \frac{S_i}{\sqrt{n_i}}\right)^2 + \left(\frac{S_i^2}{2} - \frac{(n_i-1)S_i^2}{2\chi_{n_i-1;\alpha/2}^2}\right)^2} \\
&= \hat{\theta}_i + \sqrt{t_{n_i-1;1-\alpha/2}^2 \frac{S_i^2}{n_i} + \frac{S_i^4}{4} \left(1 - \frac{(n_i-1)}{\chi_{n_i-1;\alpha/2}^2}\right)^2} \\
&= \hat{\theta}_i + S_i \sqrt{\frac{t_{n_i-1;1-\alpha/2}^2}{n_i} + \frac{S_i^2}{4} \left(1 - \frac{(n_i-1)}{\chi_{n_i-1;\alpha/2}^2}\right)^2} \tag{2.16}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. (2.15) ve Eş. (2.16) da verilen bu bağımsız güven aralıklarının birleştirilmesiyle Eş. (2.13) ve Eş. (2.14) de yerine konularak ortak θ parametresi için güven aralığı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$L_{\theta} = \sum_{i=1}^k w_i \hat{\theta}_i - \sqrt{\sum_{i=1}^k w_i^2 (\hat{\theta}_i - L_i)^2}, \tag{2.17}$$

$$U_{\theta} = \sum_{i=1}^k w_i \hat{\theta}_i + \sqrt{\sum_{i=1}^k w_i^2 (\hat{\theta}_i - U_i)^2} \tag{2.18}$$

Zou, Taleban ve Huo (2009) MOVER yöntemini kullanarak log-normal dağılımın ortalaması için μ_i parametresi için $\bar{X}_i \pm Z_{1-\alpha/2} S_i / \sqrt{n_i}$ aralığını kullanmıştır.

Krishnamoorthy ve Oral (2017) yaptığı çalışmada z dağılımına dayalı MOVER güven aralığının tek grup log-normal dağılımın ortalaması yada iki log-normal dağılımın ortalaması arasındaki fark için iyi bir şekilde çalıştığını ifade etmiştir. Bu problem için yani k tane log-normal dağılımın ortak ortalaması için sonuçların iyi vermediğini (güven aralığının kapsama olasılığının belirlenen güven düzeyinden daha düşük ölçüde) olduğunu ifade etmiştir, o yüzden μ_i parametresinin güven aralığı için z dağılımı yerine t dağılımını kullanmışlardır.

Ayrıca Krishnamoorthy ve Oral (2017) yaptığı çalışmada $w_i = (n_i/S_i^2)/\sum_{j=1}^k (n_j/S_j^2)$ olarak almıştır. Burada w_i 'ler örnek varyansı ile ters orantılı ve örnek hacmi ile doğru orantılı olacak şekilde seçilmiştir. Ayrıca w_i , $\hat{\theta}_i = \bar{Y}_i + \frac{S_i^2}{2}$ 'nin varyansının tahmini ile ters orantılı olarak da seçilebileceğini ifade etmişlerdir. Ancak Malekzadeh ve Kharrati-Kopaei (2019) yaptığı çalışmada, $w_i \propto (S_i^2/n_i + S_i^4/(2n_i + 2))^{-1/2}$, $i=1, \dots, k$ alarak, bu w_i 'lerin daha iyi performans göstereceğini ifade etmiştir. Krishnamoorthy ve Oral tarafından kullanılan çalışmanın geri kalanında bu yöntem MV olarak isimlendirilecektir.

2.3. Genelleştirilmiş Değişken (GV) Yaklaşımı

Bu bölümde k tane log-normal dağılımın ortak ortalaması için güven aralıklarını bulmaya yönelik Tian ve Wu (2007) tarafından önerilen GV yaklaşımı verilmiştir. GV yaklaşımı istatistiğin gerçek dağılımını bilmek yerine, GV yaklaşımının dağılımı kullanarak güven aralığı ve hipotez testi gibi çıkarımsal istatistik alanında oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Kısaca bu yöntemi aşağıdaki gibi açıklamak mümkündür.

$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$, $\xi = (\xi, \nu)$ parametrelerine bağlı bir dağılımdan gelen rastgele bir örnek olsun. Burada ξ ilgilenilen parametre ve ν ise ilgilenilmeyen parametrelerin bir vektörüdür. y , Y 'nin gözlenen değeri ve $R(Y; y, \xi, \nu)$ genelleştirilmiş bir pivot olmak üzere aşağıdaki iki özelliğe sahiptir (Weerahandi, 1993).

1. $R(Y; y, \xi, \nu)$ bilinmeyen parametrelere bağımlı olmayan bir dağılıma sahiptir.
2. $R(y; y, \xi, \nu)$ değeri ξ 'dir.

$H_0: \xi = \xi_0$ ile $H_1: \xi < \xi_0$ testi ele alındığında, ξ_0 belirli bir değer olmak üzere $T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v})$ şeklinde genelleştirilmiş bir test değişkeni aşağıdaki üç koşulu sağlayacak şekilde elde edilir (Tui ve Weerahandi, 1989):

1. sabit \mathbf{y} için, $T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v})$ dağılımı \mathbf{v} ilgilenilmeyen parametre vektöründen bağımsızdır.
2. $T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v})$ 'nin $\mathbf{Y}=\mathbf{y}$ 'deki değeri bilinmeyen parametrelerden bağımsızdır.
3. Sabit \mathbf{y} , \mathbf{v} , ve tüm t için $P[T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v}) > t]$ ξ 'nin artan veya azalan bir fonksiyonudur.

$T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v})$, ξ 'da stokastik olarak artıyorsa, genelleştirilmiş uç bölge $C=[\mathbf{Y}: T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v}) \geq T(\mathbf{y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v})]$ olarak tanımlanır. $T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v})$ ξ 'da stokastik olarak azalıyorsa $C=[\mathbf{Y}: T(\mathbf{Y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v}) \leq T(\mathbf{y}; \mathbf{y}, \xi, \mathbf{v})]$ olarak tanımlanır. Genelleştirilmiş p-değeri $P(C/\xi_0)$ şeklinde tanımlanır.

Aşağıda yukarıdaki tanımları kullanarak ortak log-normal dağılımın ortalaması için genelleştirilmiş pivot değişkeni ve genelleştirilmiş değişken tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Buna göre $V_i^2 = (n_i - 1)S_i^2$ ve onun gözlem değeri $v_i^2 = (n_i - 1)s_i^2$ olmak üzere i-inci örneğe dayalı μ_i tahmini için genelleştirilmiş pivot değişkeni

$$R_{\mu_i} = \bar{x}_i - \left(\frac{\bar{x}_i - \mu_i}{\sigma_i / \sqrt{n_i}} \right) \frac{\sigma_i}{v_i} \frac{v_i}{\sqrt{n_i}} \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. $U_i = \frac{v_i^2}{\sigma_i^2}$ ve $Z_i = \frac{\bar{x}_i - \mu_i}{\sigma_i / \sqrt{n_i}}$ olmak üzere Eşitlik 2.19'da yerine konulursa

$$R_{\mu_i} = \bar{x}_i - \frac{Z_i}{\sqrt{U_i}} \frac{v_i}{\sqrt{n_i}} = \bar{x}_i - \frac{Z_i}{\sqrt{U_i}} \sqrt{\frac{(n_i-1)s_i^2}{n_i}} \quad (2.20)$$

elde edilir. Burada $U_i \sim \chi_{n_i-1}^2$ ve $Z_i \sim N(0,1)$ dir. i-inci örneğe dayalı σ_i^2 tahmini için genelleştirilmiş pivot değişkeni aşağıdaki gibidir.

$$R_{\sigma_i^2} = \frac{(n_i-1)s_i^2}{v_i} \quad i=1, \dots, k. \quad (2.21)$$

Buna göre i -nci log-normal dağılımın ortalaması $\eta_i = e^{\mu_i + \sigma_i^2/2}$ olmak üzere η_i için genelleştirilmiş pivot değişkeni,

$$R_{\eta_i} = \exp\left(R_{\mu_i} + \frac{1}{2}R_{\sigma_i^2}\right) \quad (2.22)$$

dir.

i -inci örnek için η_i 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\eta}_i$ aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\eta}_i = \exp\left(\hat{\mu}_i + \frac{\hat{\sigma}_i^2}{2}\right)$$

Burada $\hat{\mu}_i = \bar{X}_i$ ve $\hat{\sigma}_i^2 = S_i^2$ dir. $\hat{\eta}_i$ 'nın varyans tahmini Ahmed ve Tomkins (1995) tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\text{Var}(\hat{\eta}_i) = \sigma_i^2 \left(1 + \frac{\sigma_i^2}{2}\right) \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)$$

Buna göre R_{η_i} genelleştirilmiş pivot değişkeninin ağırlıklandırılmış ortalaması

$$R_{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^k R_{w_i} R_{\eta_i}}{\sum_{i=1}^k R_{w_i}} \quad (2.23)$$

olarak elde edilir. Burada

$$R_{w_i} = 1/R_{\text{Var}(R_{\eta_i})} \quad (2.24)$$

$$R_{\text{Var}(R_{\eta_i})} = \left[R_{\sigma_i^2} \left(1 + \frac{R_{\sigma_i^2}}{2}\right) \exp\left(2R_{\mu_i} + R_{\sigma_i^2}\right) \right]. \quad (2.25)$$

Belirli bir veri seti için Y_{ij} $i=1,2,\dots,k$, $j=1,2,\dots,n_i$, η için genelleştirilmiş güven aralıkları aşağıdaki adımlarla hesaplanabilir:

1. $i=1,2,\dots,k$ için \bar{x}_i ve s_i^2 hesaplanır.

2. $V_i \sim \chi_{n_i-1}^2$ oluşturulur ve $i=1,2,\dots,k$ için Eş.(2.21)'den $R_{\sigma_i^2}$ hesaplanır.
3. $Z_i \sim N(0,1)$ ve $U_i \sim \chi_{n_i-1}^2$ oluşturulur ve $i=1,2,\dots,k$ için Eş. (2.20)'den R_{μ_i} hesaplanır.
4. $i=1,2,\dots,k$ için Eş. (2.22)'den R_{η_i} hesaplanır.
5. Adım 2 ve 3 tekrarlanarak, $i=1,2,\dots,k$ için Eş. (2.24) ve (2.25)'den R_{w_i} hesaplanır.
6. Eş. (2.23)'den R_{η} hesaplanır.
7. Adım 2 – 6 arası toplam m kez tekrarlanır ve R_{η} 'lerin dizisi elde edilir.
8. Adım 7'den elde edilen R_{η} 'lar dizisini küçükten büyüğe doğru sıralanır.

Bu R_{η} 'ların 100α 'lık yüzdellik dilimi, $R_{\eta}(\alpha)$, tek taraflı $\%100(1-\alpha)$ güven aralığının alt sınırının bir tahminidir ve $R_{\eta}(\alpha/2)$, $R_{\eta}(1-\alpha/2)$ iki taraflı $\%100(1-\alpha)$ güven aralığıdır.

Krishnamorthy ve Oral (2017) GV yaklaşımını kullanarak, ortak ortalama $\eta = \exp(\theta)$ olmak üzere θ için alternatif güven aralığını bulma yöntemi önermiştir. θ için alternatif GV yaklaşımı aşağıdaki gibi verilir.

$$R_{\theta}^* = \sum_{i=1}^k w_i R_{\theta_i} \quad (2.26)$$

Burada $R_{\theta_i} = \ln(R_{\eta_i})$ ve R_{η_i} 'de Eş. (2.22)'den elde edilir. Ayrıca burada

$$w_i = \frac{(n_i/s_i^2)}{\sum_{j=1}^k (n_j/s_j^2)}, j=1, \dots, k$$

dır. Belirli bir $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, s_1^2, \dots, s_k^2)$ için R_{θ}^* ifadesinin dağılımı bilinmeyen parametrelere bağlı değildir ve yüzdellik dilimleri Monte Carlo simülasyonu kullanılarak tahmin edilebilir. Alt ve üst 100α yüzdellik dilimleri bulunarak θ için $\%100(1-\alpha)$ güvenle güven aralığı oluşturulur.

2.4. Behboodian ve Jafari'nin Testi (BJ)

Behboodian ve Jafari (2014) tarafından geliştirilmiş değişken yaklaşımı kullanılarak bazı log-normal dağılımların genel ortalamasının güven aralığı için alternatif bir yöntem önerilmiştir.

θ için geliştirilmiş değişken yaklaşımı kullanıldığında; Z_i standart normal dağılıma, U_i ve V_i , $\chi_{n_i-1}^2$ dağılımına sahip ve Z_i , U_i ve V_i birbirinden bağımsız olmak üzere

$$R_{\sigma_i^2} = \frac{(n_i-1)s_i^2}{U_i}$$

$$R_{\mu_i} = \bar{y}_i - Z_i \sqrt{\frac{(n_i-1)s_i^2}{n_i V_i}},$$

elde edilir. Buna göre

$$R_{w_i} = \frac{n_i}{R_{\sigma_i^2}},$$

$$R_{\theta_i} = R_{\mu_i} + \frac{R_{\sigma_i^2}}{2}$$

tanımlanarak

$$T = \frac{\sum_{i=1}^k R_{w_i} R_{\theta_i}}{\sum_{i=1}^k R_{w_i}} = \frac{\sum_{i=1}^k \left(\frac{n_i U_i}{(n_i-1)s_i^2} \right) \left(\bar{y}_i - Z_i \sqrt{\frac{(n_i-1)s_i^2}{n_i V_i} + \frac{(n_i-1)s_i^2}{2U_i}} \right)}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i U_i}{(n_i-1)s_i^2}} \quad (2.27)$$

olur. θ için %100(1- α) güvenle, geliştirilmiş güven aralığı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$(T_{\alpha/2}, T_{1-\alpha/2})$$

Burada T_γ , Monte Carlo simülasyonu ile elde edilebilen T 'nin γ 'ncü kantil değeridir. Buna göre Behboodian ve Jafari (2014) tarafından önerilen θ için genelleştirilmiş güven aralıkları aşağıdaki adımlarla hesaplanabilir:

1. $i=1,2,\dots,k$ için \bar{y}_i ve s_i^2 hesaplanır.
2. $V_i \sim \chi_{n_i-1}^2$ ve $U_i \sim \chi_{n_i-1}^2$ elde edilir.
3. $Z_i \sim N(0,1)$ oluşturulur ve Eş.(2.27)'den T hesaplanır.
4. 2. ve 3.adımlar m kez tekrarlanarak T dizisi elde edilir.
5. Bu T 'ler dizisi küçükten büyüğe doğru sıralanır.



3. UYGULAMA

Bu bölümde örnekler üzerinden 2. Bölümde verilen PB1, PB2, GV1, GV2, MV ve BJ yöntemleri uygulamalı olarak incelenmiştir.

Örnek-1: Birkaç log-normal dağılıma sahip grupların ortalamasını karşılaştırmak için Louisiana Eyalet Üniversitesi Sağlık Bilimleri Merkezinde (LSUHSC) toplam anormal pulmoner venöz dönüş (total anomalous pulmonary venous return-TAPVR) tanısı konduğunda üç aylıktan küçük olan ve tedavi amaçlı ameliyat geçiren 75 bebekten retrospektif veriler (Ocak 1990 ile Aralık 2012 arasında) toplanmıştır (Krishnamoorthy ve Oral, 2017). Burada ilgilenilen istatistiksel problem cerrahi tedavi yapılan hastalar arasında dört anatomik TAPVR alt tipi bakımından hipotermik dolaşım durması sürelerini (dakika olarak) karşılaştırmaktır. Bu 75 bebek için derin hipotermik dolaşım durma süresine ilişkin verilere Çizelge 3.1'de yer verilmiştir. TAPVR'i olan 75 bebekten 24'ü SC tipi, 10'u C tipi, 4'ü M tipi ve 37'si IC tipindedir.

Çizelge 3.1. Dört anatomik TAPVR alt tipinin derin hipotermik dolaşım süresi (dakika cinsinden); SC. suprakardiyak; C. kardiyak; M. karışık tip; IC. İnfrakardiyak

SC			C		M	IC				
38	48	46	36	28	60	45	37	38	39	39
41	46	47	31	26	53	39	41	42	52	42
36	43	45	35	58	52	38	49	33	41	
41	40	43	36	60	37	42	50	45	45	
46	60	39	37	41	45	41	59	47		
44	39	38	38	45	45	43	50			
39	43	41	30	50	50	44	51			
51	48	43	26	38	60	46	60			

Log dönüşüm yapılan gruplara aşağıda Çizelge 3.2’te yer verilmiştir.

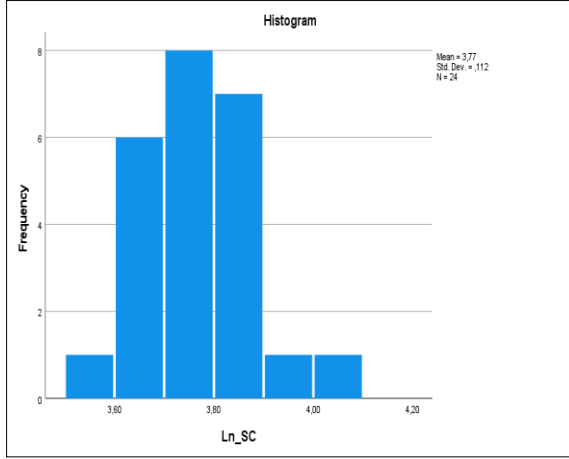
Çizelge 3.2. Dört anatomik TAPRV alt tipinin derin hipotermik dolaşım sürelerinin (dakika cinsinden) logaritması alınmış hali

SC			C		M		IC			
3,64	3,87	3,83	3,58	3,33	4,09	3,81	3,61	3,64	3,66	3,66
3,71	3,83	3,85	3,43	3,26	3,97	3,66	3,71	3,74	3,95	3,74
3,58	3,76	3,81	3,56		4,06	3,95	3,64	3,89	3,50	3,71
3,71	3,69	3,76	3,58		4,09	3,61	3,74	3,91	3,81	3,81
3,83	4,09	3,66	3,61			3,71	3,81	3,71	4,08	3,85
3,78	3,66	3,64	3,64			3,81	3,81	3,76	3,91	
3,66	3,76	3,71	3,40			3,91	3,91	3,78	3,93	
3,93	3,87	3,76	3,26			3,64	4,09	3,83	4,09	

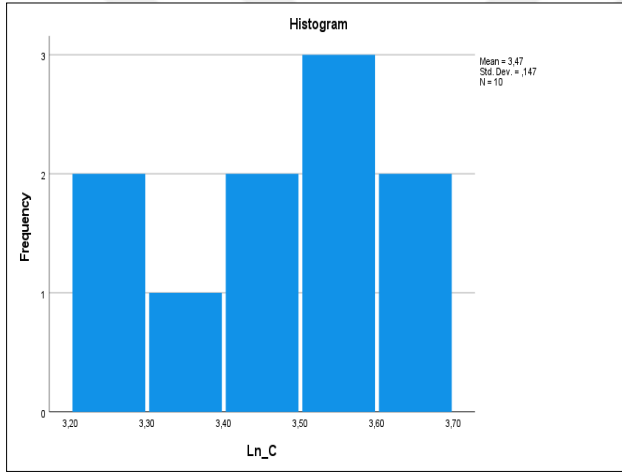
Krishnamoorthy ve Oral (2017) yaptıkları çalışmada log dönüşümü yapılan gruplara normallik testi yapmış ve M grubundaki veriler normallik varsayımını karşılamamış, bu nedenle sadece 1, 2 ve 4. grupları karşılaştırılmıştır. Biz de çalışmamızda 1, 2 ve 4. grupları dikkate aldık.

Logaritmik dönüşüm yapılan verilere ait histogram grafiklerine aşağıda sırası ile yer verilmiştir.

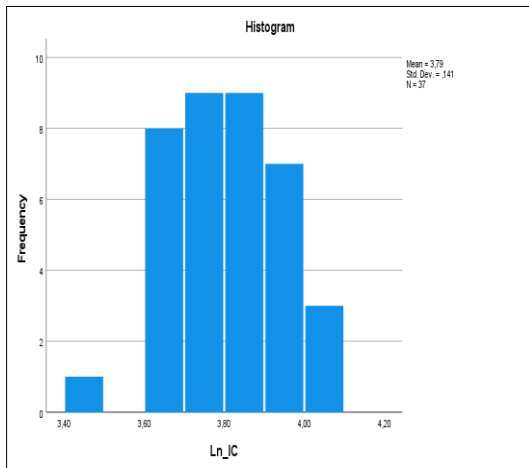
Şekil 3.1 SC grubu, Şekil 3.2 C grubu ve Şekil 3.3 IC grubuna ait logaritmik dönüşüm yapılan verilerin histogram grafiklerini göstermektedir.



Şekil 3.1. SC grubu için histogram grafiği



Şekil 3.2. C grubu için histogram grafiği



Şekil 3.3. IC grubu için histogram grafiği

Her grubun örnek çapları sırası ile $(n_1, n_2, n_4) = (24, 10, 37)$ 'dir. Logaritmik dönüşüm yapılan verilerin örneklem ortalamaları, standart sapmaları ve normallik testiyle ilgili p-değerine ilişkin sonuçlara aşağıdaki Çizelge 3.3'de yer verilmiştir.

Çizelge 3.3. Dört anatomik TAPRV alt tipinin derin hipotermik dolaşım sürelerinin (logaritması alınmış) normallik testi sonuçları

Gruplar	\bar{y}_i	S_i	Normallik Testi		
			Shapiro-Wilk		
			Test	Serbestlik Derecesi	p-değeri
SC	3,7675	0,1123	0,943	24	0,191
C	3,4654	0,1474	0,880	10	0,131
IC	3,7944	0,1411	0,966	37	0,319

Çizelge 3.3'de görüldüğü gibi verilerin logaritmasının dağılımı normal dağılmıştır. Bu durumda orijinal verilerimizin dağılımının log-normal dağılıma sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Yığınların ortak ortalamasının %95 güven düzeyinde PB1, PB2, GV1, GV2, MV ve BJ yöntemleri kullanılarak güven aralıkları ve aralık uzunluğu Çizelge 3.4'da gösterilmiştir.

Çizelge 3.4. Dört anatomik TAPRV alt tipinin derin hipotermik dolaşım sürelerine ait ortak ortalama için %95 güven aralıkları ve uzunlukları

Yöntemler	Güven aralığı	Uzunluk
PB1	40,030-45,604	5,574
PB2	43,466-44,421	0,955
MV	41,382-44,116	2,734
GV1	35,747-42,784	7,037
GV2	41,423-44,171	2,748
BJ	40,797-44,486	3,689

Çizelge 3.4'te PB2 ve GV1 güven aralıklarının bu örnekteki diğer güven aralıklar arasında sırasıyla en kısa ve en uzun aralık uzunluğuna sahip olduğu görülmektedir. Buna ek olarak,

GV2 uzunluk açısından PB1 ve BJ'den daha iyi performans gösterirken MV'nin GV2'den daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Örnek-2: Farmakokinetik veriler, Bradstreet ve Liss (1995) tarafından ele alınan erkeklerde alkol etkileşimi ile ilgilidir. Çalışmada, sağlıklı erkekler beş dönemlik çapraz bir çalışmayı tamamlamıştır. Her bir denek rastgele tahsis edilmiş beş tedavi dizisinden birini takip etmiştir; ya hiçbir tedavi ya da aynı hastalığı tedavi etmek için kullanılan aynı ilaç sınıfından dört aktif tedaviden biri (Li, H. ve ark., 2014; Tian ve Wu, 2007). Bu örnekte sadece üç aktif tedavi (grup 2, 3 ve 4) dikkate alınmıştır. Üç grubun verilerinin logaritması alınarak dönüştürülmüş halinin özet istatistikleri Çizelge 3.5'de verilmiştir.

Çizelge 3.5. Logaritması alınmış Farmakokinetik verilerin özet istatistikleri

Gruplar	n_i	\bar{y}_i	s_i^2
Grup1	22	2,601	0,24
Grup2	22	2,596	0,20
Grup3	22	2,599	0,17

Bu veri seti daha önce Li, Tang ve Wong (2014) ve Tian ve Wu (2007) tarafından da analiz edilmiştir. Yığınların ortak ortalamasının %95 güven düzeyinde PB1, PB2, GV1, GV2, MV ve BJ yöntemleri kullanılarak güven aralıkları ve aralık uzunluğu Çizelge 3.6'da gösterilmiştir.

Çizelge 3.6. Farmakokinetik verilerin ortak ortalaması için %95 güven aralıkları ve uzunlukları

Yöntemler	Güven aralığı	Uzunluk
PB1	13,093-16,850	3,757
PB2	12,996-16,826	3,830
MV	13,218-16,900	3,682
GV1	12,946-16,714	3,768
GV2	13,364-17,050	3,686
BJ	13,338-16,848	3,510

Çizelge 3.6'dan BJ ve PB2 güven aralıklarının diğer yöntemlerle elde edilen güven aralıklarına göre sırasıyla en kısa ve en uzun aralığa sahip olduğu görülmektedir. Buna ek olarak, MV'nin güven aralığı uzunluğu açısından PB1, GV1 ve GV2 yöntemlerinden daha küçükken, BJ yönteminin MV yönteminden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Örnek 3: Ramezani-Aliakbari, Badavi, Dianat, Mard ve Ahangarpour (2017) yaptıkları çalışmada izole edilmiş sıçan kalplerinde İskemi/Reperfüzyon (I/R) hasarı üzerine çalışmıştır. Erkek Wistar sıçanlarını rastgele sekiz gruba ayırmışlardır. Bir kontrol grubu (bir mg/kg Salin verilmiştir); üç grup 7,5 15 ve 30 ml/kg dozlarında Gallik asit ile ön muamele görmüş, bir grup 0,2 μ M Siklosporin A (CsA) almış ve diğer üç grup Gallik asit ve 0,2 μ M CsA ile ön muamele görmüştür. Miyokard enfarktüsünden hemen sonra yükselen en önemli indeks olan kreatin fosfo kinaz (CPK) seviyesini ölçmüşlerdir. Grupların log değerlerinin ortalamaları ve varyansları Çizelge 3.7'de verilmiştir.

Çizelge 3.7. Kreatin fosfo kinaz (CPK) verisinin özet istatistikleri

Gruplar	n_i	\bar{y}_i	s_i^2
Kontrol	8	1,48	0,85
$G_{7.5}$	6	1,82	0,80
G_{15}	6	2,06	1,38
G_{30}	7	1,32	0,88
G_{sA}	7	1,02	0,72
$G_{7.5+G_{sA}}$	8	2,01	0,59
$G_{15+G_{sA}}$	8	0,86	0,22
$G_{30+G_{sA}}$	7	1,15	0,82

%95 güven düzeyinde PB1, PB2, GV1, GV2, MV ve BJ yöntemlerinden elde edilen güven aralıkları Çizelge 3.8'de gösterilmektedir.

Çizelge 3.8. Kreatin fosfo kinaz (CPK) verisinde yer alan ortak ortalama için %95 güven aralık ve uzunlukları

Yöntemler	Güven aralığı	Uzunluk	Normal Aralık
PB1	2,859-8,228	5,369	4-6(ml/kg)
PB2	4,674-10,795	6,121	
MV	3,771-7,741	3,970	
GV1	2,338-5,186	2,848	
GV2	4,170-8,482	4,312	
BJ	3,557-7,391	3,834	

Miyokard enfarktüsünden hemen sonra yükselen en önemli indeks olan kreatin fosfo kinaz (CPK) seviyeleri ölçmüş olup, CPK için hesaplanan uzunlukların ön görülün normal aralık değeri olan 4-6(ml/kg) normal aralığı kapsayıp kapsamadığına bakılmıştır.

CPK enziminin ortak ortalaması için normal aralığın PB1, GV2 ve PB2 güven aralıkları tarafından yaklaşık olarak kapsadığı görülmektedir. Bu aralıklardan da GV2 yöntemiyle elde edilen aralığın diğer aralıklara göre en kısa aralık olduğu da görülmektedir.



4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, log-normal dağılıma sahip yığınların ortak ortalaması olan θ parametresi için güven aralıklarının bulunmasını sağlayan yöntemlerin performansı değerlendirilmiştir. Bu amaçla simülasyon çalışmasıyla yöntemlerin güven aralığı kapsama olasılıkları ve ortalama genişlikleri tahmin edilmiştir. Ayrıca yöntemlerin performansını değerlendirmek için farklı θ , k , n ve σ_i^2 değerleri alınarak farklı senaryolar oluşturulmuştur. Buna göre MATLAB programı kullanılarak her bir senaryo için 3000 tekrarlı deneme yapılmıştır.

Güven aralıklarının kapsama olasılıklarını (KO) ve ortalama uzunluklarını (OU) tahmin etmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir.

- (I) $\bar{y}_i \sim N(\theta - \sigma_i^2/2, \sigma_i^2/n_i)$ ve $s_i^2 \sim \sigma_i^2 \chi_{n_i-1}^2/(n_i - 1)$ $i=1, \dots, k$ üretilir. Burada $\theta = 0$ alınmıştır.
- (II) MOVER yöntemi hariç diğer yöntemlerin güven aralığını oluşturmak için 3000 tekrarlı deneme yapılır ve güven aralığı ve güven aralığının uzunluğu hesaplanır.
- (III) Her bir yöntem için I-II adımları 3000 kez tekrarlanarak güven aralıklarının $\theta = 0$ değerini kapsayıp kapsamadığına bakılarak KO ve OU değerleri hesaplanır.

Çizelge 4.1'de simülasyon çalışmasında kullanılan farklı k , σ^2 ve n değerleri için senaryolar verilmiştir. Bu senaryolardaki durumlar Malakzedah (2019) çalışması referans alınarak yapılmıştır. $\alpha = 0.05$ olmak üzere bu senaryolara göre sonuçlar Çizelge 4.2-4.5'te verilmiştir.

Çizelge 4.1. Simülasyon çalışmasında dikkate alınan senaryolar

k	senaryolar	n	σ^2
k=2	1-6	$(5)_2$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	7-12	$(5;10)$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	13-18	$(10;5)$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	19-24	$(10)_2$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	25-30	$(20)_2$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	31-36	$(10;20)$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	37-42	$(20;10)$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	43-48	$(50;10)$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
	49-54	$(50)_2$	$(0,1_2); (0,5_2); (1_2); (1; 2,5); (1; 0,1); (1; 0,5)$
k=3	1-6	$(5)_3$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	7-12	$(5; 10; 5)$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	13-18	$(10;5;10)$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	19-24	$(10)_3$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	25-30	$(20)_3$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	31-36	$(10;50;10)$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	37-42	$(50;10;50)$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	43-48	$(20;50;20)$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
	49-54	$(50)_3$	$(0,1_3); (0,5_3); (1_3); (2,5; 0,5; 2,5); (0,1; 0,5; 1); (0,1; 0,5; 2)$
k=5	1-6	$(5)_5$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	7-12	$(5;10_3; 5)$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	13-18	$(10; 5_3; 10)$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	19-24	$(10)_5$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	25-30	$(20)_5$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	31-36	$(10;20_3; 10)$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	37-42	$(20;10_3; 20)$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	43-48	$(50;20;50;20;50)$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$
	49-54	$(50)_5$	$(0,1_5); (0,5_5); (1_5); (0,5; 2,5_3; 0,5); (0,1; 1_3; 0,1); (1; 0,1_3; 1)$

Çizelge 4.1. (devam) Simülasyon çalışmasında dikkate alınan senaryolar

k=7	1-8	(5 ₇)	(0,1 ₇); (0,5 ₇); (1 ₇); (1 ₂ ; 0,5 ₃ ; 1 ₂); (0,5 ₂ ; 1 ₃ ; 0,5 ₂); (2,5 ₂ ; 0,5 ₃ ; 2,5 ₂); (0,5 ₂ ; 2,5 ₃ ; 0,5 ₂); (1 ₂ ; 2 ₃ ; 1 ₂)
	9-16	(5 ₃ ; 10 ₄)	(0,1 ₇); (0,5 ₇); (1 ₇); (1 ₂ ; 0,5 ₃ ; 1 ₂); (0,5 ₂ ; 1 ₃ ; 0,5 ₂); (2,5 ₂ ; 0,5 ₃ ; 2,5 ₂); (0,5 ₂ ; 2,5 ₃ ; 0,5 ₂); (1 ₂ ; 2 ₃ ; 1 ₂)
	17-24	(10 ₇)	(0,1 ₇); (0,5 ₇); (1 ₇); (1 ₂ ; 0,5 ₃ ; 1 ₂); (0,5 ₂ ; 1 ₃ ; 0,5 ₂); (2,5 ₂ ; 0,5 ₃ ; 2,5 ₂); (0,5 ₂ ; 2,5 ₃ ; 0,5 ₂); (1 ₂ ; 2 ₃ ; 1 ₂)
	25-32	(20 ₇)	(0,1 ₇); (0,5 ₇); (1 ₇); (1 ₂ ; 0,5 ₃ ; 1 ₂); (0,5 ₂ ; 1 ₃ ; 0,5 ₂); (2,5 ₂ ; 0,5 ₃ ; 2,5 ₂); (0,5 ₂ ; 2,5 ₃ ; 0,5 ₂); (1 ₂ ; 2 ₃ ; 1 ₂)
	33-40	(10 ₃ ; 20 ₄)	(0,1 ₇); (0,5 ₇); (1 ₇); (1 ₂ ; 0,5 ₃ ; 1 ₂); (0,5 ₂ ; 1 ₃ ; 0,5 ₂); (2,5 ₂ ; 0,5 ₃ ; 2,5 ₂); (0,5 ₂ ; 2,5 ₃ ; 0,5 ₂); (1 ₂ ; 2 ₃ ; 1 ₂)
	41-48	(50 ₇)	(0,1 ₇); (0,5 ₇); (1 ₇); (1 ₂ ; 0,5 ₃ ; 1 ₂); (0,5 ₂ ; 1 ₃ ; 0,5 ₂); (2,5 ₂ ; 0,5 ₃ ; 2,5 ₂); (0,5 ₂ ; 2,5 ₃ ; 0,5 ₂); (1 ₂ ; 2 ₃ ; 1 ₂)

Not: Bu tabloda (x_y) x'in y kez tekrarlandığı anlamına gelir.

Bir yöntemin iyi bir performans göstermesi için ilk olarak tahmin edilen KO değeri 0.946'dan daha büyük olması gerekir. Böyle bir yöntem güvenilir bir yöntem olarak adlandırılır. İkinci olarak da ilk şartı sağlayan yöntemler arasında en küçük OU'ya sahip olmasına bakılır (Malekzadeh ve Kharrati-Kopaei 2019). Buna göre tablolardan elde edilen sonuçlar yorumlanırken bu kıstaslara dikkat edilerek yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunluklarına aynı anda bakılmış ve yorumlanmıştır.

Çizelge 4.2. k=2 için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

Senaryo	Kapsama Olasılığı						Ortalama Uzunluk					
	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ
1	0,963	0,766	0,941	0,958	0,927	0,929	0,616	0,370	0,557	0,597	0,556	0,458
2	0,951	0,821	0,950	0,941	0,923	0,924	1,510	1,078	1,680	1,559	1,696	1,206
3	0,946	0,847	0,967	0,931	0,935	0,932	2,410	1,832	2,992	2,436	3,070	2,011
4	0,939	0,840	0,957	0,924	0,930	0,930	3,226	2,351	4,093	3,313	4,254	2,786
5	0,962	0,750	0,953	0,952	0,946	0,942	0,912	0,491	0,885	1,089	0,887	0,767
6	0,943	0,819	0,955	0,938	0,932	0,931	1,861	1,360	2,157	1,934	2,193	1,530
7	0,956	0,711	0,927	0,956	0,920	0,920	0,450	0,229	0,397	0,470	0,394	0,353
8	0,960	0,827	0,953	0,944	0,935	0,932	1,129	0,780	1,165	1,203	1,137	0,915
9	0,947	0,877	0,957	0,932	0,937	0,939	1,773	1,398	1,960	1,871	1,917	1,462
10	0,931	0,887	0,960	0,930	0,945	0,936	2,457	2,457	2,940	2,530	2,913	2,195
11	0,967	0,649	0,955	0,945	0,944	0,941	0,568	0,219	0,527	0,836	0,500	0,466
12	0,965	0,808	0,969	0,942	0,946	0,947	1,301	0,800	1,343	1,497	1,301	1,043
13	0,962	0,707	0,936	0,950	0,927	0,924	0,452	0,234	0,398	0,466	0,395	0,354
14	0,958	0,833	0,947	0,943	0,929	0,934	1,124	0,769	1,152	1,202	1,125	0,908
15	0,953	0,873	0,964	0,930	0,945	0,940	1,766	1,397	1,958	1,855	1,916	1,459
16	0,954	0,840	0,964	0,918	0,945	0,940	2,244	1,440	2,414	2,582	2,361	1,788
17	0,952	0,804	0,929	0,956	0,937	0,929	0,758	0,615	0,730	0,826	0,754	0,693
18	0,938	0,866	0,944	0,947	0,930	0,925	1,426	1,209	1,551	1,482	1,528	1,204
19	0,960	0,756	0,948	0,959	0,942	0,938	0,339	0,206	0,318	0,343	0,314	0,301
20	0,954	0,879	0,959	0,952	0,949	0,950	0,838	0,698	0,847	0,901	0,827	0,758
21	0,940	0,905	0,954	0,925	0,939	0,938	1,305	1,236	1,373	1,397	1,340	1,196
22	0,934	0,861	0,954	0,920	0,942	0,939	1,706	1,451	1,818	1,920	1,779	1,588
23	0,956	0,670	0,954	0,947	0,946	0,945	0,474	0,225	0,465	0,556	0,457	0,451
24	0,944	0,864	0,950	0,938	0,938	0,933	1,004	0,832	1,032	1,106	1,006	0,921
25	0,951	0,770	0,945	0,955	0,938	0,942	0,218	0,143	0,211	0,223	0,209	0,206
26	0,951	0,936	0,953	0,949	0,947	0,944	0,536	0,564	0,534	0,577	0,525	0,512
27	0,947	0,963	0,949	0,941	0,936	0,941	0,840	1,064	0,854	0,920	0,838	0,804
28	0,951	0,941	0,953	0,928	0,946	0,945	1,081	1,191	1,106	1,250	1,087	1,046
29	0,950	0,687	0,946	0,946	0,944	0,943	0,297	0,158	0,295	0,327	0,292	0,292
30	0,957	0,921	0,955	0,944	0,947	0,947	0,642	0,655	0,645	0,703	0,633	0,616
31	0,957	0,719	0,941	0,959	0,940	0,941	0,264	0,152	0,248	0,284	0,246	0,241
32	0,955	0,897	0,953	0,938	0,948	0,945	0,651	0,611	0,643	0,733	0,631	0,600
33	0,960	0,952	0,956	0,935	0,945	0,949	1,024	1,170	1,043	1,152	1,022	0,948
34	0,947	0,970	0,955	0,942	0,946	0,947	1,464	2,233	1,517	1,581	1,503	1,393
35	0,954	0,685	0,961	0,938	0,948	0,946	0,314	0,155	0,317	0,432	0,301	0,299
36	0,963	0,889	0,957	0,938	0,942	0,943	0,735	0,636	0,738	0,900	0,715	0,680
37	0,955	0,708	0,937	0,945	0,935	0,937	0,265	0,153	0,249	0,284	0,247	0,241
38	0,951	0,889	0,949	0,954	0,941	0,942	0,647	0,595	0,637	0,732	0,626	0,596
39	0,954	0,951	0,952	0,934	0,936	0,940	1,021	1,172	1,041	1,149	1,020	0,947
40	0,951	0,933	0,955	0,931	0,948	0,941	1,227	1,236	1,251	1,596	1,214	1,132
41	0,953	0,824	0,932	0,950	0,948	0,946	0,438	0,450	0,404	0,455	0,426	0,424
42	0,953	0,955	0,948	0,947	0,940	0,941	0,836	1,024	0,834	0,918	0,828	0,781
43	0,963	0,807	0,949	0,954	0,953	0,955	0,180	0,123	0,169	0,248	0,169	0,167
44	0,965	0,981	0,956	0,954	0,953	0,952	0,441	0,573	0,426	0,616	0,423	0,412

Çizelge 4.2. (devam) $k=2$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

45	0,953	0,990	0,947	0,952	0,943	0,941	0,688	1,135	0,675	0,963	0,668	0,642
46	0,963	0,993	0,950	0,915	0,944	0,945	0,756	1,151	0,744	1,356	0,726	0,702
47	0,960	0,996	0,910	0,953	0,952	0,947	0,392	0,924	0,342	0,418	0,378	0,376
48	0,955	0,994	0,945	0,957	0,944	0,948	0,619	1,109	0,594	0,775	0,600	0,579
49	0,949	0,886	0,945	0,946	0,943	0,942	0,131	0,110	0,129	0,132	0,129	0,129
50	0,946	0,988	0,947	0,940	0,943	0,942	0,320	0,497	0,320	0,338	0,317	0,315
51	0,954	0,997	0,959	0,937	0,955	0,954	0,499	0,968	0,501	0,537	0,496	0,491
52	0,954	0,992	0,959	0,942	0,955	0,956	0,643	1,025	0,647	0,716	0,641	0,634
53	0,954	0,808	0,956	0,952	0,954	0,953	0,180	0,126	0,179	0,185	0,179	0,179
54	0,954	0,978	0,955	0,946	0,950	0,951	0,383	0,547	0,383	0,408	0,380	0,377

Çizelge 4.2'deki sonuçlara göre, $k=2$ olduğunda ve örneklem çapı ve varyans değerleri eşit olduğunda, PB1 yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı eşit ve varyans değerleri farklılaştığında ise MV yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Örneklem çapı farklı ve varyans değerleri eşit iken yine PB1 yönteminin diğer 5 yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı ve varyans değerleri farklılaştığında ise BJ yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Çizelge 4.2'de sadece kapsama olasılıklarına baktığımızda ise PB1 ve MV yöntemleri, burada dikkate aldığımız neredeyse tüm örneklem büyüklükleri için güvenilir güven aralıkları ile sonuçlanır çünkü tahmin edilen KO'lar 0,946'dan düşük değildir. GV2 yönteminin ise $n \geq 10$ olduğunda güvenilir olduğu, BJ yönteminin ise $n \geq 20$ olduğunda güvenilir olduğu görülmektedir.

Ortalama uzunluk açısından PB2, PB1'den daha iyi performans göstermektedir. $\sigma^2(\sigma^2 \geq 0,1)$ değerleri büyük olduğunda GV2, MV'den daha küçük ortalama uzunluğa sahiptir. GV1 yöntemi ortalama uzunluk açısından en kötü performansa sahiptir.

Çizelge 4.3. k=3 için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

Senaryo	Kapsama Olasılığı						Ortalama Uzunluk					
	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ
1	0,973	0,793	0,926	0,941	0,920	0,918	0,549	0,318	0,432	0,502	0,438	0,351
2	0,958	0,841	0,941	0,907	0,914	0,914	1,358	0,921	1,292	1,341	1,353	0,893
3	0,939	0,854	0,950	0,875	0,918	0,912	2,137	1,553	2,253	2,050	2,420	1,436
4	0,955	0,821	0,952	0,854	0,929	0,913	2,502	1,584	2,504	2,768	2,710	1,715
5	0,966	0,801	0,939	0,905	0,923	0,921	0,931	0,535	0,797	1,045	0,824	0,644
6	0,966	0,787	0,938	0,915	0,931	0,926	0,980	0,535	0,839	1,326	0,869	0,687
7	0,969	0,753	0,924	0,947	0,923	0,921	0,440	0,223	0,342	0,440	0,345	0,298
8	0,969	0,847	0,950	0,900	0,933	0,931	1,106	0,719	1,011	1,154	1,025	0,756
9	0,952	0,884	0,946	0,871	0,926	0,918	1,734	1,284	1,712	1,773	1,761	1,191
10	0,977	0,803	0,959	0,855	0,938	0,926	1,850	0,782	1,606	2,526	1,630	1,180
11	0,957	0,827	0,923	0,930	0,928	0,922	0,785	0,513	0,661	0,936	0,683	0,568
12	0,964	0,828	0,932	0,922	0,922	0,920	0,834	0,524	0,694	1,230	0,715	0,603
13	0,967	0,765	0,933	0,938	0,929	0,931	0,356	0,190	0,291	0,364	0,290	0,265
14	0,961	0,868	0,945	0,907	0,929	0,928	0,892	0,633	0,810	0,979	0,800	0,660
15	0,958	0,911	0,955	0,882	0,934	0,935	1,400	1,134	1,357	1,499	1,345	1,039
16	0,949	0,916	0,948	0,886	0,932	0,926	1,756	1,802	1,789	1,871	1,803	1,420
17	0,968	0,698	0,941	0,928	0,931	0,932	0,554	0,251	0,479	0,700	0,469	0,430
18	0,973	0,673	0,953	0,920	0,939	0,937	0,567	0,242	0,496	0,796	0,486	0,447
19	0,961	0,752	0,930	0,949	0,930	0,931	0,287	0,165	0,254	0,287	0,250	0,240
20	0,961	0,894	0,953	0,913	0,939	0,936	0,715	0,595	0,676	0,765	0,661	0,597
21	0,947	0,929	0,951	0,872	0,938	0,936	1,122	1,075	1,093	1,209	1,072	0,932
22	0,960	0,857	0,957	0,878	0,940	0,939	1,255	0,957	1,199	1,603	1,178	1,061
23	0,967	0,757	0,952	0,923	0,944	0,941	0,456	0,276	0,422	0,538	0,415	0,400
24	0,958	0,745	0,946	0,919	0,946	0,940	0,473	0,276	0,440	0,634	0,432	0,418
25	0,954	0,800	0,943	0,948	0,941	0,939	0,180	0,120	0,170	0,184	0,169	0,167
26	0,949	0,957	0,947	0,928	0,944	0,938	0,446	0,505	0,430	0,488	0,423	0,410
27	0,957	0,988	0,957	0,894	0,951	0,947	0,699	0,968	0,684	0,785	0,671	0,639
28	0,959	0,903	0,957	0,896	0,948	0,943	0,749	0,719	0,729	0,974	0,717	0,695
29	0,960	0,773	0,956	0,933	0,949	0,950	0,283	0,194	0,274	0,316	0,271	0,269
30	0,944	0,726	0,941	0,936	0,939	0,936	0,291	0,178	0,282	0,349	0,279	0,277
31	0,960	0,794	0,931	0,951	0,935	0,932	0,174	0,122	0,156	0,241	0,157	0,155
32	0,966	0,974	0,942	0,922	0,938	0,941	0,434	0,561	0,400	0,634	0,398	0,381
33	0,957	0,991	0,945	0,902	0,941	0,933	0,679	1,102	0,635	0,999	0,629	0,590
34	0,966	0,973	0,957	0,867	0,943	0,940	0,525	0,579	0,500	1,364	0,477	0,460
35	0,959	0,978	0,924	0,938	0,940	0,936	0,339	0,510	0,297	0,469	0,312	0,303
36	0,958	0,975	0,925	0,933	0,944	0,940	0,344	0,510	0,302	0,576	0,317	0,309
37	0,950	0,876	0,935	0,949	0,933	0,936	0,132	0,109	0,124	0,185	0,124	0,123
38	0,955	0,991	0,951	0,933	0,946	0,945	0,325	0,491	0,310	0,487	0,307	0,301
39	0,952	0,996	0,942	0,912	0,939	0,935	0,507	0,949	0,486	0,772	0,481	0,466
40	0,946	1,000	0,935	0,938	0,942	0,933	0,770	2,169	0,732	0,885	0,744	0,719
41	0,951	0,810	0,943	0,942	0,940	0,940	0,185	0,126	0,181	0,290	0,178	0,177
42	0,955	0,803	0,949	0,935	0,943	0,943	0,189	0,124	0,185	0,304	0,182	0,181
43	0,959	0,826	0,947	0,950	0,945	0,945	0,144	0,115	0,137	0,163	0,136	0,135
44	0,953	0,980	0,947	0,929	0,941	0,943	0,354	0,525	0,342	0,427	0,339	0,332

Çizelge 4.3. (devam)k=3 için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

45	0,949	0,995	0,948	0,912	0,946	0,941	0,554	1,036	0,541	0,693	0,534	0,517
46	0,955	0,974	0,960	0,873	0,952	0,944	0,471	0,570	0,477	0,857	0,454	0,446
47	0,950	0,981	0,935	0,943	0,939	0,940	0,253	0,421	0,235	0,288	0,244	0,242
48	0,946	0,985	0,928	0,933	0,937	0,936	0,258	0,418	0,241	0,322	0,249	0,247
49	0,954	0,908	0,950	0,952	0,949	0,949	0,108	0,099	0,105	0,109	0,105	0,104
50	0,952	0,997	0,952	0,937	0,949	0,950	0,264	0,466	0,260	0,280	0,258	0,255
51	0,948	1,000	0,951	0,922	0,947	0,948	0,411	0,927	0,407	0,457	0,403	0,397
52	0,953	0,975	0,954	0,923	0,948	0,950	0,433	0,549	0,429	0,513	0,425	0,421
53	0,953	0,847	0,951	0,942	0,949	0,948	0,168	0,135	0,166	0,175	0,165	0,165
54	0,947	0,817	0,948	0,951	0,948	0,947	0,172	0,128	0,170	0,182	0,169	0,169

Çizelge 4.3'e göre, $k=3$ olduğunda eşit ve küçük örneklem çapı durumunda varyans değerleri eşit olduğunda; PB1 örnek çapı arttığında ise PB1 yöntemine ilaveten bazı durumlarda MV bazı durumlarda BJ yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Örneklem çapı eşit ve küçük olduğu durumda varyans değerleri farklıyken PB1, örnek çapı arttıkça BJ ve GV2 yöntemlerinin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Örneklem çapı farklı ve varyans değerleri eşit iken yine PB1 yönteminin diğer 5 yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı ve varyans değerleri farklılaştığında ise yine PB1 yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Çizelge 4.3'te sadece kapsama olasılıklarına baktığımızda ise PB1 yöntemi, burada dikkate aldığımız neredeyse tüm örneklem büyüklükleri için güvenilir güven aralıkları ile sonuçlanır çünkü tahmin edilen KO'lar 0,946'dan önemli ölçüde düşük değildir. PB2 yönteminin $n \geq 20$ olduğunda güvenilir olduğu görülmektedir.

Ortalama uzunluk açısından PB2, PB1'den daha iyi performans göstermektedir. $\sigma^2(\sigma^2 \geq 0,1)$ değerleri büyük olduğunda GV2 MV'den daha küçük ortalama uzunluğa sahiptir. GV1 yöntemi ortalama uzunluk açısından en kötü performansa sahiptir.

Çizelge 4.4. k=5 için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

Senaryo	Kapsama Olasılığı						Ortalama Uzunluk					
	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ
1	0,973	0,780	0,903	0,915	0,899	0,902	0,475	0,240	0,315	0,411	0,325	0,264
2	0,960	0,839	0,923	0,808	0,905	0,891	1,175	0,716	0,932	1,159	1,015	0,652
3	0,958	0,871	0,945	0,730	0,921	0,886	1,839	1,192	1,598	1,815	1,802	1,012
4	0,963	0,854	0,936	0,697	0,913	0,878	2,003	1,077	1,638	2,498	1,856	1,101
5	0,979	0,810	0,928	0,856	0,915	0,904	0,772	0,382	0,554	0,998	0,588	0,450
6	0,974	0,796	0,918	0,886	0,901	0,903	0,623	0,320	0,430	0,746	0,450	0,358
7	0,976	0,759	0,910	0,936	0,910	0,911	0,317	0,152	0,228	0,316	0,229	0,208
8	0,971	0,896	0,945	0,829	0,930	0,921	0,798	0,534	0,631	0,893	0,639	0,511
9	0,965	0,931	0,951	0,745	0,939	0,913	1,267	0,965	1,066	1,418	1,094	0,796
10	0,959	0,919	0,940	0,792	0,930	0,907	1,393	1,324	1,222	1,583	1,281	0,946
11	0,961	0,856	0,891	0,903	0,914	0,896	0,586	0,459	0,442	0,611	0,473	0,403
12	0,973	0,757	0,936	0,875	0,921	0,917	0,360	0,168	0,275	0,641	0,265	0,246
13	0,978	0,765	0,911	0,926	0,913	0,917	0,367	0,168	0,251	0,352	0,255	0,224
14	0,968	0,873	0,929	0,829	0,919	0,902	0,922	0,574	0,714	1,006	0,741	0,552
15	0,961	0,919	0,943	0,753	0,925	0,898	1,452	1,016	1,204	1,581	1,276	0,856
16	0,977	0,864	0,947	0,684	0,933	0,897	1,428	0,688	1,041	2,460	1,079	0,783
17	0,990	0,779	0,944	0,831	0,933	0,923	0,509	0,210	0,369	0,943	0,357	0,317
18	0,964	0,839	0,890	0,902	0,907	0,909	0,531	0,344	0,372	0,511	0,405	0,336
19	0,968	0,791	0,930	0,929	0,932	0,931	0,231	0,136	0,193	0,229	0,190	0,183
20	0,957	0,923	0,939	0,839	0,930	0,919	0,585	0,501	0,509	0,635	0,499	0,451
21	0,953	0,950	0,944	0,772	0,930	0,915	0,932	0,912	0,827	1,029	0,814	0,699
22	0,967	0,910	0,955	0,752	0,945	0,924	0,944	0,743	0,826	1,378	0,815	0,715
23	0,966	0,811	0,940	0,881	0,934	0,928	0,355	0,228	0,308	0,453	0,302	0,288
24	0,971	0,818	0,944	0,907	0,938	0,937	0,294	0,186	0,251	0,342	0,247	0,236
25	0,960	0,847	0,943	0,941	0,940	0,940	0,143	0,107	0,131	0,144	0,130	0,129
26	0,953	0,980	0,945	0,859	0,942	0,938	0,355	0,453	0,330	0,393	0,325	0,313
27	0,948	0,995	0,945	0,800	0,942	0,931	0,560	0,868	0,523	0,652	0,513	0,485
28	0,956	0,962	0,949	0,797	0,943	0,932	0,557	0,607	0,518	0,789	0,508	0,486
29	0,951	0,866	0,941	0,908	0,939	0,937	0,216	0,174	0,203	0,247	0,200	0,197
30	0,958	0,862	0,943	0,923	0,940	0,940	0,180	0,139	0,168	0,197	0,166	0,163
31	0,966	0,820	0,936	0,934	0,935	0,937	0,169	0,115	0,148	0,185	0,147	0,145
32	0,964	0,965	0,947	0,853	0,950	0,938	0,424	0,470	0,380	0,513	0,374	0,354
33	0,950	0,987	0,934	0,789	0,932	0,911	0,672	0,894	0,604	0,837	0,595	0,547
34	0,955	0,988	0,944	0,819	0,947	0,933	0,779	1,344	0,695	0,923	0,702	0,648
35	0,961	0,950	0,917	0,930	0,936	0,936	0,318	0,410	0,266	0,333	0,281	0,272
36	0,964	0,826	0,949	0,898	0,938	0,939	0,188	0,126	0,177	0,277	0,169	0,167
37	0,965	0,802	0,934	0,932	0,927	0,934	0,186	0,120	0,159	0,201	0,158	0,155
38	0,958	0,958	0,938	0,841	0,934	0,922	0,467	0,480	0,411	0,561	0,405	0,378
39	0,952	0,977	0,945	0,785	0,941	0,921	0,742	0,896	0,660	0,912	0,650	0,586
40	0,971	0,961	0,957	0,748	0,949	0,932	0,646	0,594	0,572	1,322	0,548	0,511
41	0,964	0,832	0,958	0,870	0,948	0,941	0,235	0,156	0,222	0,397	0,208	0,204
42	0,972	0,890	0,919	0,926	0,944	0,943	0,278	0,232	0,226	0,284	0,239	0,231
43	0,954	0,922	0,945	0,947	0,943	0,942	0,098	0,097	0,093	0,114	0,093	0,093
44	0,948	0,998	0,941	0,890	0,938	0,936	0,243	0,451	0,232	0,306	0,230	0,226

Çizelge 4.4. $k=5$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

45	0,949	0,999	0,945	0,838	0,945	0,938	0,382	0,891	0,364	0,513	0,361	0,351
46	0,959	0,997	0,958	0,820	0,950	0,945	0,331	0,513	0,322	0,630	0,313	0,307
47	0,957	0,937	0,960	0,910	0,950	0,953	0,131	0,128	0,130	0,175	0,126	0,125
48	0,959	0,864	0,941	0,941	0,951	0,949	0,140	0,122	0,128	0,158	0,132	0,131
49	0,957	0,962	0,951	0,939	0,949	0,947	0,084	0,093	0,081	0,085	0,081	0,081
50	0,950	0,999	0,946	0,914	0,943	0,944	0,207	0,441	0,201	0,222	0,199	0,197
51	0,944	1,000	0,943	0,857	0,946	0,938	0,323	0,867	0,314	0,367	0,311	0,305
52	0,954	0,994	0,954	0,864	0,953	0,948	0,316	0,501	0,307	0,385	0,304	0,300
53	0,957	0,946	0,952	0,933	0,949	0,949	0,127	0,131	0,124	0,133	0,124	0,123
54	0,948	0,947	0,942	0,943	0,940	0,942	0,106	0,112	0,103	0,109	0,103	0,103

Çizelge 4.4'te kapsama olasılıkları ve ortalama uzunluklarına aynı anda bakılmıştır. $k=5$ olduğunda ve örneklem çapı ile varyans değerleri eşit olduğunda; PB1 yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı eşit ve varyans değerleri farklılaştığında ise yine PB1 yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Örneklem çapı farklı ve varyans değerleri eşit iken yine PB1 yönteminin diğer 5 yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı ve varyans değerleri farklılaştığında ise yine PB1 yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Çizelge 4.4'te sadece kapsama olasılıklarına baktığımızda ise PB1 yöntemi burada dikkate aldığımız neredeyse tüm örneklem büyüklükleri için güvenilir güven aralıkları ile sonuçlanır çünkü tahmin edilen KO'lar 0,946'dan önemli ölçüde düşük değildir. PB2 yönteminin $n \geq 10$ olduğunda, GV2 yönteminin ise $n \geq 20$ olduğunda güvenilir olduğu görülmektedir.

Ortalama uzunluk açısından PB2, PB1'den daha iyi performans gösterirken, GV1 yöntemi ortal

ama uzunluk açısından en kötü performansa sahiptir.

Çizelge 4.5. $k=7$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

Senaryo	Kapsama Olasılığı						Ortalama Uzunluk					
	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ
1	0,982	0,789	0,894	0,885	0,894	0,887	0,433	0,196	0,257	0,358	0,268	0,223
2	0,971	0,870	0,926	0,688	0,904	0,875	1,085	0,612	0,761	1,087	0,849	0,548
3	0,955	0,885	0,927	0,543	0,919	0,842	1,688	1,031	1,297	1,724	1,508	0,840
4	0,968	0,882	0,927	0,628	0,917	0,862	1,354	0,777	0,988	1,463	1,124	0,678
5	0,968	0,871	0,924	0,642	0,910	0,867	1,277	0,736	0,919	1,372	1,042	0,641
6	0,968	0,866	0,928	0,555	0,912	0,854	1,756	0,923	1,257	2,468	1,459	0,866
7	0,971	0,867	0,930	0,594	0,919	0,854	1,525	0,818	1,083	2,187	1,243	0,758
8	0,952	0,888	0,932	0,497	0,919	0,832	2,039	1,232	1,592	2,204	1,881	1,009
9	0,983	0,777	0,903	0,904	0,910	0,913	0,292	0,133	0,191	0,285	0,194	0,178
10	0,972	0,914	0,924	0,733	0,919	0,896	0,746	0,486	0,538	0,854	0,555	0,437
11	0,967	0,936	0,938	0,588	0,928	0,878	1,175	0,857	0,887	1,370	0,933	0,668
12	0,976	0,919	0,935	0,672	0,934	0,896	0,927	0,608	0,678	1,159	0,704	0,534
13	0,968	0,917	0,922	0,678	0,920	0,877	0,871	0,593	0,641	1,036	0,665	0,509
14	0,972	0,905	0,942	0,588	0,931	0,883	1,179	0,698	0,845	2,009	0,884	0,661
15	0,972	0,904	0,930	0,640	0,933	0,885	1,024	0,647	0,748	1,590	0,784	0,591
16	0,961	0,936	0,941	0,535	0,922	0,867	1,427	1,059	1,100	1,717	1,169	0,807
17	0,971	0,799	0,924	0,902	0,923	0,918	0,201	0,119	0,162	0,196	0,159	0,155
18	0,961	0,940	0,938	0,759	0,929	0,915	0,515	0,451	0,426	0,560	0,417	0,378
19	0,951	0,968	0,932	0,604	0,924	0,893	0,826	0,830	0,691	0,918	0,681	0,585
20	0,965	0,954	0,945	0,680	0,930	0,907	0,647	0,594	0,537	0,750	0,528	0,467
21	0,954	0,943	0,935	0,699	0,933	0,904	0,604	0,543	0,502	0,694	0,493	0,439
22	0,958	0,928	0,944	0,614	0,940	0,903	0,806	0,662	0,663	1,274	0,654	0,574
23	0,958	0,933	0,933	0,661	0,925	0,895	0,696	0,578	0,574	1,082	0,565	0,501
24	0,950	0,965	0,936	0,562	0,929	0,891	0,994	0,991	0,830	1,195	0,822	0,692
25	0,962	0,888	0,941	0,921	0,938	0,938	0,122	0,100	0,111	0,123	0,109	0,108
26	0,959	0,990	0,946	0,813	0,942	0,932	0,308	0,433	0,279	0,342	0,274	0,265
27	0,949	0,997	0,944	0,692	0,942	0,926	0,490	0,831	0,442	0,573	0,434	0,409
28	0,949	0,993	0,939	0,751	0,935	0,921	0,384	0,566	0,347	0,447	0,341	0,326
29	0,959	0,992	0,948	0,765	0,943	0,933	0,359	0,517	0,325	0,416	0,319	0,307
30	0,953	0,973	0,946	0,702	0,942	0,924	0,466	0,557	0,419	0,702	0,412	0,393
31	0,960	0,986	0,954	0,747	0,952	0,940	0,408	0,502	0,368	0,587	0,362	0,346
32	0,950	0,995	0,943	0,642	0,940	0,923	0,586	0,953	0,526	0,741	0,517	0,485
33	0,968	0,849	0,929	0,916	0,929	0,930	0,147	0,105	0,126	0,161	0,124	0,123
34	0,963	0,984	0,944	0,782	0,939	0,929	0,375	0,443	0,322	0,462	0,317	0,300
35	0,954	0,993	0,936	0,655	0,933	0,911	0,602	0,840	0,515	0,778	0,507	0,466
36	0,961	0,982	0,940	0,726	0,935	0,918	0,464	0,564	0,400	0,621	0,393	0,367
37	0,961	0,980	0,936	0,745	0,936	0,916	0,442	0,542	0,381	0,562	0,375	0,351
38	0,960	0,960	0,941	0,659	0,935	0,917	0,562	0,574	0,480	1,045	0,471	0,439
39	0,963	0,970	0,948	0,722	0,934	0,930	0,508	0,540	0,435	0,825	0,430	0,401
40	0,951	0,991	0,943	0,616	0,939	0,911	0,724	0,991	0,619	0,982	0,611	0,553
41	0,953	0,984	0,948	0,932	0,946	0,946	0,071	0,090	0,069	0,072	0,068	0,068
42	0,950	1,000	0,946	0,870	0,949	0,941	0,176	0,426	0,170	0,190	0,168	0,166
43	0,955	1,000	0,953	0,792	0,947	0,946	0,277	0,840	0,265	0,317	0,262	0,257
44	0,953	1,000	0,947	0,843	0,941	0,940	0,218	0,521	0,209	0,242	0,208	0,205

Çizelge 4.5. (devam) $k=7$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

45	0,946	1,000	0,946	0,852	0,948	0,938	0,205	0,480	0,197	0,225	0,195	0,193
46	0,950	0,999	0,948	0,801	0,947	0,940	0,262	0,466	0,251	0,323	0,249	0,245
47	0,954	1,000	0,949	0,835	0,950	0,943	0,231	0,454	0,221	0,273	0,219	0,216
48	0,954	1,000	0,955	0,761	0,947	0,944	0,329	0,884	0,314	0,395	0,311	0,304

Çizelge 4.5'te kapsama olasılıkları ve ortalama uzunluklarına aynı anda bakılmıştır. $k=7$ olduğunda ve örneklem çapı ile varyans değerleri eşit olduğunda; PB1 yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı eşit ve varyans değerleri farklılaştığında ise MV ve GV2 yönteminin benzer performans gösterdiği, ancak PB1 yönteminin yine diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Örneklem çapı farklı ve varyans değerleri eşit iken yine PB1 yönteminin diğer 5 yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı ve varyans değerleri farklılaştığında ise yine PB1 yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Çizelge 4.5'te sadece kapsama olasılıklarına baktığımızda ise PB1 yöntemi, burada dikkate aldığımız neredeyse tüm örneklem büyüklükleri için güvenilir güven aralıkları ile sonuçlanır çünkü tahmin edilen KO'lar 0,946'dan önemli ölçüde düşük değildir. PB2 yönteminin $n \geq 10$ olduğunda, MV yönteminin ise $n \geq 20$ olduğunda güvenilir olduğu görülmektedir.

Ortalama uzunluk açısından PB2, PB1'den daha iyi performans gösterirken, GV1 yöntemi ortalama uzunluk açısından en kötü performansa sahiptir.

Elde edilen sonuçlar genel olarak yorumlanacak olursa. PB1 yönteminin tahmin edilen kapsama olasılıklarının 0,946'dan önemli ölçüde düşük olmadığı, burada dikkate aldığımız farklı k değerleri ve örneklem büyüklükleri için güvenilir güven aralıklarıyla sonuçlandığını göstermektedir. Ayrıca grup sayısı arttıkça PB1 yönteminin birçok durumda diğer yöntemlere göre daha iyi sonuç verdiği gözlenmektedir. Bununla birlikte Kapsama olasılıkları ve güven aralıklarına birlikte bakıldığında $k=2$ ve $k=3$ olduğunda MV ve BJ yöntemleri de iyi performans göstermektedir.

Simülasyon çalışmasının bu bölümünde ortak θ parametresi için farklı değerler alınarak yöntemlerin performansı gözlenmiştir. Bu amaçla oluşturulan farklı senaryolar Çizelge 4.6'da verilmiştir. $\alpha = 0.05$ olduğunda dikkate alınarak farklı senaryolar için simülasyon sonuçları Çizelge 4.7 ve 4.8'de elde edilmiştir.

Çizelge 4.6. Ortak θ parametresi için farklı değerler alındığında dikkate alınan senaryolar

k	Senaryolar	θ	n_i	σ_i^2
$k=3$	1	1	(5; 5; 5)	(1; 2; 1)
	2	1	(5; 4; 7)	(1;2;1)
	3	1	(15;15;15)	(1;2;1)
	4	1	(15; 14; 17)	(1; 2; 1)
	5	1	(20;20;20)	(1; 2; 1)
	6	1,5	(5; 5; 5)	(0,5; 0,3; 0,2)
	7	1,5	(5; 4; 7)	(0,5; 0,3; 0,2)
	8	1,5	(15;15;15)	(0,5; 0,3; 0,2)
	9	1,5	(15; 14; 17)	(0,5; 0,3; 0,2)
	10	1,5	(20;20;20)	(0,5, 0,3, 0,2)
	11	2	(5; 5; 5)	(5; 0,5; 0,3)
	12	2	(5; 4; 7)	(5; 0,5; 0,3)
	13	2	(15;15;15)	(5; 0,5; 0,3)
	14	2	(15; 14; 17)	(5; 0,5; 0,3)
	15	2	(20;20;20)	(5; 0,5; 0,3)
	16	4	(5; 5; 5)	(0,5; 4; 3)
	17	4	(5; 4; 7)	(0,5; 4; 3)
	18	4	(15;15;15)	(0,5; 4; 3)
	19	4	(15; 14; 17)	(0,5; 4; 3)
	20	4	(20;20;20)	(0,5; 4; 3)
$k=5$	1	1	(5; 5; 5; 5; 5)	(2; 0,3; 5; 0,1; 2)
	2	1	(5;4;7;6;9)	(2; 0,3; 5; 0,1; 2)
	3	1	(15; 15; 15; 15; 15)	(2; 0,3; 5; 0,1; 2)
	4	1	(15;14;17;16;19)	(2; 0,3; 5; 0,1; 2)
	5	1	(20; 20; 20; 20; 20)	(2; 0,3; 5; 0,1; 2)
	6	1.5	(5; 5; 5; 5; 5)	(0,4; 0,2; 1; 1; 1)
	7	1.5	(5;4;7;6;9)	(0,4; 0,2; 1; 1; 1)
	8	1.5	(15; 15; 15; 15; 15)	(0,4; 0,2; 1; 1; 1)
	9	1.5	(15;14;17;16;19)	(0,4; 0,2; 1; 1; 1)
	10	1.5	(20; 20; 20; 20; 20)	(0,4; 0,2; 1; 1; 1)

Çizelge 4.6. (devam) Ortak θ parametresi için farklı değerler alındığında dikkate alınan senaryolar

11	2	(5; 5; 5; 5; 5)	(3; 2; 1; 1; 0,1)
12	2	(5;4;7;6;9)	(3; 2; 1; 1; 0,1)
13	2	(15; 15; 15; 15; 15)	(3; 2; 1; 1; 0,1)
14	2	(15;14;17;16;19)	(3; 2; 1; 1; 0,1)
15	2	(20; 20; 20; 20; 20)	(3; 2; 1; 1; 0,1)
16	4	(5; 5; 5; 5; 5)	(0,4; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1)
17	4	(5;4;7;6;9)	(0,4; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1)
18	4	(15; 15; 15; 15; 15)	(0,4; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1)
19	4	(15;14;17;16;19)	(0,4; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1)
20	4	(20; 20; 20; 20; 20)	(0,4; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1)

Çizelge 4.7. $k=3$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

Senaryo	Kapsama Olasılığı						Ortalama Uzunluk					
	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ
1	0,948	0,867	0,958	0,864	0,931	0,921	2,462	1,742	2,632	2,414	2,852	1,666
2	0,955	0,865	0,955	0,864	0,922	0,918	2,478	1,622	2,597	2,544	2,780	1,558
3	0,954	0,966	0,962	0,889	0,953	0,947	0,963	1,141	0,943	1,112	0,924	0,854
4	0,951	0,963	0,951	0,878	0,943	0,939	0,938	1,123	0,918	1,102	0,898	0,832
5	0,953	0,979	0,951	0,895	0,934	0,941	0,799	1,096	0,784	0,929	0,770	0,730
6	0,955	0,817	0,928	0,909	0,907	0,902	0,998	0,631	0,879	0,995	0,909	0,655
7	0,968	0,807	0,941	0,925	0,915	0,918	0,983	0,551	0,849	1,009	0,869	0,612
8	0,954	0,875	0,945	0,926	0,940	0,937	0,386	0,324	0,365	0,415	0,359	0,347
9	0,955	0,868	0,948	0,930	0,941	0,941	0,379	0,309	0,359	0,412	0,352	0,341
10	0,951	0,913	0,946	0,936	0,942	0,942	0,323	0,305	0,310	0,346	0,305	0,299
11	0,965	0,806	0,944	0,886	0,921	0,918	1,620	0,876	1,445	2,738	1,525	1,085
12	0,975	0,798	0,955	0,891	0,933	0,928	1,580	0,752	1,399	2,811	1,453	0,988
13	0,962	0,902	0,956	0,918	0,939	0,945	0,575	0,489	0,552	1,059	0,541	0,521
14	0,953	0,869	0,947	0,904	0,944	0,937	0,551	0,436	0,532	1,027	0,518	0,501
15	0,950	0,918	0,946	0,914	0,941	0,939	0,473	0,448	0,459	0,796	0,451	0,441
16	0,965	0,810	0,958	0,850	0,940	0,924	2,839	1,591	2,773	3,369	3,021	1,959
17	0,967	0,835	0,954	0,862	0,928	0,920	2,938	1,725	2,878	3,518	3,107	1,916
18	0,956	0,855	0,955	0,890	0,948	0,946	0,977	0,699	0,941	1,481	0,923	0,887
19	0,958	0,857	0,949	0,882	0,942	0,934	0,973	0,735	0,935	1,474	0,919	0,883
20	0,956	0,883	0,958	0,892	0,942	0,941	0,799	0,635	0,778	1,182	0,764	0,746

Çizelge 4.7’de kapsama olasılıkları ve ortalama uzunluklarına aynı anda bakılmıştır. $k=3$, $\theta=1$ ve örneklem çapları eşit olduğunda PB1, MV ve BJ yöntemlerinin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı farklı olduğunda ise PB1 ve MV yöntemlerinin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

$k=3$, $\theta=1,5$ ve örneklem çapları eşit olduğunda PB1 yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı farklı olduğunda ise PB1 ve MV yöntemlerinin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

$k=3$, $\theta=2$ ve 4 olduğunda, örneklem çapları eşitken MV yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı farklı olduğunda ise yine MV yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Çizelge 4.8. $k=5$ için yöntemlerin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları

Senaryo	Kapsama Olasılığı						Ortalama Uzunluk					
	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ	PB1	PB2	MV	GV1	GV2	BJ
1	0,976	0,790	0,930	0,777	0,923	0,892	1,125	0,495	0,788	2,549	0,854	0,655
2	0,977	0,814	0,929	0,817	0,922	0,906	0,945	0,512	0,699	1,887	0,744	0,589
3	0,959	0,843	0,950	0,851	0,941	0,936	0,349	0,259	0,320	0,732	0,315	0,309
4	0,959	0,833	0,946	0,874	0,943	0,937	0,337	0,245	0,308	0,646	0,306	0,301
5	0,952	0,859	0,943	0,863	0,936	0,933	0,284	0,233	0,268	0,534	0,264	0,261
6	0,969	0,836	0,931	0,801	0,906	0,892	1,201	0,688	0,936	1,359	1,022	0,674
7	0,960	0,876	0,926	0,841	0,914	0,904	1,080	0,748	0,874	1,111	0,934	0,644
8	0,962	0,934	0,950	0,856	0,948	0,938	0,422	0,415	0,383	0,504	0,376	0,360
9	0,957	0,952	0,943	0,870	0,936	0,931	0,419	0,470	0,380	0,482	0,376	0,361
10	0,956	0,950	0,944	0,863	0,942	0,931	0,347	0,390	0,323	0,406	0,318	0,309
11	0,980	0,824	0,932	0,777	0,934	0,899	1,242	0,638	0,893	2,008	0,975	0,729
12	0,988	0,694	0,950	0,766	0,931	0,909	0,924	0,283	0,631	2,066	0,635	0,518
13	0,961	0,839	0,950	0,857	0,945	0,938	0,376	0,336	0,344	0,600	0,338	0,334
14	0,960	0,765	0,955	0,847	0,945	0,938	0,329	0,209	0,311	0,579	0,299	0,296
15	0,952	0,872	0,945	0,859	0,943	0,937	0,309	0,326	0,291	0,456	0,287	0,285
16	0,978	0,808	0,916	0,905	0,897	0,905	0,557	0,291	0,380	0,519	0,395	0,313
17	0,978	0,770	0,915	0,905	0,907	0,918	0,468	0,204	0,318	0,491	0,320	0,271
18	0,963	0,853	0,942	0,924	0,943	0,937	0,200	0,145	0,180	0,208	0,177	0,174
19	0,962	0,842	0,940	0,922	0,933	0,933	0,187	0,136	0,171	0,197	0,167	0,164
20	0,957	0,886	0,941	0,930	0,936	0,938	0,166	0,135	0,153	0,171	0,152	0,150

Çizelge 4.8’de kapsama olasılıkları ve ortalama uzunluklarına aynı anda bakılmıştır. $k=5$, $\theta=1$ ve örneklem çapları eşit olduğunda PB1 yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı farklı olduğunda ise PB1 ve MV yöntemlerinin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

$k=5$, $\theta=1,5$ ve örneklem çapları eşit olduğunda PB1 yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı farklı olduğunda ise yine PB1 yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

$k=5$, $\theta=2$ ve örneklem çapları eşit olduğunda PB1 yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı olduğunda ise MV yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

$k=5$, $\theta=4$ ve örneklem çapları eşit olduğunda PB1 yönteminin diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği, örneklem çapı olduğunda ise yine PB1 yönteminin diğer yöntemlerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

Genel olarak tabloları yorumladığımızda θ ’nın farklı değerleri içinde sonuçların değişmediği yine PB1’in KO’ları ve OU bakımından diğer beş yöntemden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.



5. SONUÇ

Finans, çevre, gelir gibi birçok alanda log-normal dağılım pozitif sağa çarpık verileri tanımlamak için yaygın olarak kullanılmaktadır. Uygulamada karşılaşılan en önemli problemlerden bir tanesi log-normal dağılıma sahip yığınların ortalamalarının eşitliği hipotezini test etmektir. Bu test sonucunda yokluk hipotezi reddedilmediğinde yığınların ortalaması arasında fark yoktur sonucuna varılır. Uygulamada ilgilenilen bir problem de log-normal dağılıma sahip bu yığınların ortak ortalaması hakkında çıkarımlar yapmaktır. Bu çalışmada yığınların ortak ortalama parametresi için güven aralıklarının bulunmasını sağlayan yöntemler ayrıntılı olarak incelenmiştir. Buna göre son yıllarda önerilen Parametrik Bootstrap Yöntemi (PB), Varyans Tahminlerinin Geri Kazanımı Yöntemi (MOVER), Genelleştirilmiş Değişken Yaklaşımı (GV) ve Behboodian ve Jafari'nin Testi (BJ) incelenmiştir. Bu yöntemlerin performansını değerlendirmek için simülasyon çalışması yapılmış ve farklı grup sayısı, örnek çapı ve varyans değerleri alınarak farklı senaryolar oluşturulmuştur. Buna göre MATLAB programı kullanılarak her bir senaryo için 3000 tekrarlı deneme yapılmıştır. Simülasyon çalışması ile PB1, PB2, GV1, GV2, MV ve BJ yöntemlerine ilişkin kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları hesaplanmıştır. Simülasyon sonuçları yorumlanırken bir yöntemin iyi olması için $(1-\alpha)=0,95$ için kapsama olasılığı 0,946 ve üzeri olması ve en küçük ortalama uzunluğa sahip olmasına göre yorumlanmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçlarına göre çoğu durumda PB1 ve MV yöntemlerinin diğer yöntemlere göre kapsama olasılıkları ve ortalama uzunlukları açısından genel olarak tercih edilebileceği görülmüştür. Ancak grup sayısı ve/veya örneklem büyüklüklerinin belirli değerlerinde GV2 ve PB2 yöntemleri de tercih edilebilir.



KAYNAKLAR

- Addona. V., Atherton. J., Wolfson. D. B. (2012). The International Journal of Biostatistics. *International Journal of Biostatistics*. 8(1). 22.
- Aitchison. J. (1982). The statistical analysis of compositional data. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*. 44(2). 139-160.
- Aitchison, J. and Brown, J. A. C. (1957). The Lognormal Distribution. (Hart, P. E. (1990). Lognormal distribution. In *Econometrics* (pp. 145-147). London: Palgrave Macmillan UK.) yeni hali parantez içinde
- Baser. O. (2007). Modeling transformed health care cost with unknown heteroskedasticity. *Applied Economics Research*. 1. 1-6.
- Behboodiani. J., Jafari. A. A. (2014). Generalized inference for the common mean of several lognormal populations. *arXiv preprint arXiv:1405.0604*.
- Biondini. R. (1976). Cloud motion and rainfall statistics. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*. 15(3). 205-224.
- Black. F., Scholes. M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. 81(3). 637-654.
- Bradstreet. T. E., Liss. C. L. (1995). Favorite data sets from early (and late) phases of drug research-Part 4. In ASA Proceedings of the Section on Statistical Education, 335-340.
- Cakmak, M., Gokpinar, E., Gokpinar, F., Ebegil, M. (2020). A revisit to testing the equality of means for several lognormal distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 90(6), 961-1000.
- Glacken. I. M., Snowden. D. V., Edwards. A. C. (2001). Mineral resource estimation. Mineral resource and ore reserve estimation-the Aus. Inst. Mining and Metallurgy guide to good practice. 189-198.
- Gill. P. S. (2004). Small-Sample Inference for the Comparison of Means of Log-Normal Distributions. *Biometrics*. 60(2). 525-527.
- Gokpinar. F., Gokpinar. E. (2017). Testing the equality of several log-normal means based on a computational approach. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 46(3). 1998-2010.
- Goovaerts. P. (1997). Geostatistics for natural resources evaluation. *Applied Geostatistics*. 2(7),58-70.
- Hirano. S. S., Nordheim. E. V., Army. D. C., Upper. C. D. (1982). Lognormal distribution of epiphytic bacterial populations on leaf surfaces. *Applied and Environmental Microbiology*. 44(3). 695-700.

- Jafari. A. A.. Abdollahnezhad. K. (2015). Inferences on the means of two log-normal distributions: A computational approach test. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 44(7). 1659-1672.
- Jafari. A. A.. Abdollahnezhad. K. (2017). Testing the equality means of several log-normal distributions. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*. 46(3). 2311-2320.
- Julious. S. A.. Debnarot. C. A. (2000). Why are pharmacokinetic data summarized by arithmetic means?. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*. 10(1). 55-71.
- Keselman. H. J.. Wilcox. R. R.. Kowalchuk. R. K.. Olejnik. S. (2002). Comparing trimmed or least squares means of two independent skewed populations. *Biometrical Journal*. 44(4). 478-489.
- Krishnamoorthy, K. and Mathew, T. (2003). Inferences on the means of lognormal distributions using generalized p-values and generalized confidence intervals. *Journal of Statistical Planning and Inference* 115, 103–121
- Krishnamoorthy. K.. Oral. E. (2017). Standardized likelihood ratio test for comparing several log-normal means and confidence interval for the common mean. *Statistical Methods in Medical Research*. 26(6). 2919-2937.
- Lacey. L. F.. Keene. O. N.. Pritchard. J. F.. Bye. A. (1997). Common noncompartmental pharmacokinetic variables: are they normally or log-normally, 15(3)28-39.
- Limpert. E.. Stahel. W. A.. Abbt. M. (2001). Log-normal distributions across the sciences: keys and clues: on the charms of statistics. and how mechanical models resembling gambling machines offer a link to a handy way to characterize log-normal distributions. which can provide deeper insight into variability and probability—normal or log-normal: that is the question. *BioScience*. 51(5). 341-352.
- Li. H. Q.. Tang. M. L.. Wong. W. K. (2014). Confidence intervals for ratio of two Poisson rates using the method of variance estimates recovery. *Computational Statistics*. 29. 869-889.
- Lin, S. H. (2013). The higher order likelihood method for the common mean of several log-normal distributions. *Metrika*, 76(3), 381-392.
- Malekzadeh. A.. Kharrati-Kopaei. M. (2019). Inferences on the common mean of several heterogeneous log-normal distributions. *Journal of Applied Statistics*. 46(6). 1066-1083.
- Meiling. H. (2022). Big Data Mining and Analysis of Agricultural Products Based on e-Commerce Platform. *Wireless Communications & Mobile Computing*. 2022.
- McDonald. C. J.. Blevins. L.. Tierney. W. M.. Martin. D. K. (1988). The Regenstrief medical records. *MD Computing: Computers in Medical Practice*. 5(5). 34-47.

- Papalexiou. S. M., AghaKouchak. A., Foufoula-Georgiou. E. (2018). A diagnostic framework for understanding climatology of tails of hourly precipitation extremes in the United States. *Water Resources Research*. 54(9). 6725-6738.
- Piantadosi. S. T. (2014). Zipf's word frequency law in natural language: A critical review and future directions. *Psychonomic Bulletin Review*. 21. 1112-1130.
- Ramezani-Aliakbari. F., Badavi. M., Dianat. M., Mard. S. A., Ahangarpour. A. (2017). Effects of gallic acid on hemodynamic parameters and infarct size after ischemia-reperfusion in isolated rat hearts with alloxan-induced diabetes. *Biomedicine Pharmacotherapy*. 96. 612-618.
- Rhayma. N., Bressolette. P., Breul. P., Fogli. M., Saussine. G. (2013). Reliability analysis of maintenance operations for railway tracks. *Reliability Engineering System Safety*. 114. 12-25.
- Shen. H., Brown. L. D., Zhi. H. (2006). Efficient estimation of log-normal means with application to pharmacokinetic data. *Statistics in medicine*. 25(17). 3023-3038.
- Taylor. D. J., Kupper. L. L., Muller. K. E. (2002). Improved approximate confidence intervals for the mean of a log-normal random variable. *Statistics in Medicine*. 21(10). 1443-1459.
- Tian. L., Wu. J. (2007). Inferences on the Common Mean of Several Log-Normal Populations: The Generalized Variable Approach. *Biometrical Journal: Journal of Mathematical Methods in Biosciences*. 49(6). 944-951.
- Tsui. K. W., Weerahandi. S. (1989). Generalized p-values in significance testing of hypotheses in the presence of nuisance parameters. *Journal of the American Statistical Association*. 84(406). 602-607.
- Zhou. X. H., Gao. S., Hui. S. L. (1997). Methods for comparing the means of two independent log-normal samples. *Biometrics*. 1129-1135.
- Zou, G. Y., Taleban, J., Huo, C. Y. (2009). Confidence interval estimation for lognormal data with application to health economics. *Computational Statistics Data Analysis*, 53(11), 3755-3764.
- Zhou, X. H., Tu, W. (1999). Consultant's Forum-Comparison of Several Independent Population Means When Their Samples Contain Log-Normal and Possibly Zero Observations. *Biometrics*, 55(2), 645-651.
- Wu. J., Jiang. G., Wong. A. C. M., Sun. X. (2002). Likelihood analysis for the ratio of means of two independent log-normal distributions. *Biometrics*. 58(2). 463-469.







Gazili olmak ayrıcalıktır