

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

---

**LİNEER REGRESYON MODELİNDE LİU TAHMİN EDİCİ**

---

**Birer GÜVELOĞLU**

*İstatistik Anabilim Dalı*

Temmuz, 2024

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ ONAYI

LİNEER REGRESYON MODELİNDE LİU TAHMİN EDİCİ

Birer GÜVELOĞLU

*İstatistik Anabilim Dalı*

Bu Yüksek Lisans Tezi 26/07/2024 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Değerlendirilmiş ve Oy Birliği / Oy Çokluğu ile Kabul Edilmiştir.

Jüri : Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR (Danışman) .....  
: Doç. Dr. Nimet ÖZBAY .....  
: Doç. Dr. Murat GENÇ .....

**Bu Tez Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.**

**Tez No:**

**Prof. Dr. Sadık DİNÇER**  
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## İÇİNDEKİLER

|   |     |
|---|-----|
| ÖZ .....  | I   |
| ABSTRACT.....   | II  |
| TEŞEKKÜR.....   | III |
| TABLolar DİZİNİ .....   | IV  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....  | V   |
| 1. GİRİŞ.....   | 1   |
| 1.1. Linear Regresyon Modeli .....  | 1   |
| 1.2. Özdeş Olmayan Kovaryans Matrisli Genel Lineer Model.....                   | 3   |
| 1.3. Karşılaştırma Kriterleri .....   | 5   |
| 1.3.1. Matris Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması.....  | 5   |
| 1.3.2. Skaler Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması ..... | 6   |
| 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....   | 7   |
| 2.1. Model Parametrelerinin Tahmini .....                                       | 7   |
| 2.1.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Yöntemi.....                                    | 7   |
| 2.1.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici .....                                      | 9   |
| 2.1.3. Karma Tahmin Edici .....   | 10  |
| 2.1.4. Ridge Tahmin Edici .....   | 12  |
| 2.1.5. Liu Tahmin Edici .....   | 13  |
| 2.1.6. Liu Tipi Tahmin Edici.....   | 15  |
| 2.2. Yanlılık Azaltan Tahmin Yöntemleri .....                                   | 16  |
| 2.2.1. Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu Tahmin Edici.....                | 16  |
| 2.2.2. Ön Bilgiye Dayalı Yansız Liu Tahmin Edici .....                          | 19  |
| 2.3. Kısıtlı Tahmin Yöntemi .....   | 21  |
| 2.3.1. Kısıtlı Liu Tahmin Edici .....   | 21  |
| 2.3.2. (r,d) sınıf Tahmin Edici.....  | 24  |
| 2.3.3. Kısıtlı ve Kısıtsız İki Parametrelili Tahmin Edici .....                 | 26  |
| 2.3.4. Stokastik Kısıt Altında Ağırlıklı Tahmin Edici .....                     | 30  |
| 2.4. Hata Kareleri Ortalamasını Azaltan Yöntemler .....                         | 35  |
| 2.4.1. Ridge Tahmin Ediciye Dayanan Yeni Bir Tahmin Edici.....                  | 35  |
| 2.5. Dayanıklılı Tahmin Yöntemleri .....  | 36  |
| 2.5.1. Dayanıklılı Liu Tahmin Edici.....  | 36  |
| 2.5.2. Dayanıklılı Liu Tipi Tahmin Edici.....                                   | 37  |
| 3. MATERYAL VE METOT .....  | 39  |
| 4. BULGULAR VE TARTIŞMA .....   | 41  |
| 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....   | 57  |

|                 |    |
|-----------------|----|
| KAYNAKLAR ..... | 59 |
| ÖZGEÇMİŞ .....  | 71 |



# LİNEER REGRESYON MODELİNDE LIU TAHMİN EDİCİ

Birer GÜVELOĞLU

*Danışman: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR*

*İstatistik Anabilim Dalı*

## ÖZ

Çoklu doğrusal regresyon modellerinde çoklu iç ilişki önemli bir problemidir. Bu problemi gidermek için birçok çözüm yöntemi önerilmiştir. Bu yöntemlerden en önemlisi, tüm bağımsız değişkenleri modelde tutan ve en küçük kareler yöntemine alternatif olan yanlı tahmin yöntemlerini kullanmaktır.

Literatürde birçok yanlı tahmin yöntemi çalışılmış olup bunlardan en çok bilinen tahmin edicidir. Hoerl ve Kennard (1970a, b) tarafından tanımlanan ridge regresyon tahmin edicisidir. Ridge regresyon tahmin edicisi ve buna bağlı olarak tanımlanan birçok farklı tahmin edici ve özellikleri literatürde yaygın olarak çalışılmış ve halen çalışılmaya da devam edilmektedir. Ancak ridge tahmin edicide en önemli problemlerden biri yanlılık parametresinin seçimidir. Bu tahmin edici yanlılık parametresinin bir lineer fonksiyonu olmayıp bu da seçim işlemlerini zorlaştırmaktadır. Bu nedenle ridge tahmin ediciye alternatif yöntemlerin aranması da regresyonda önemli bir problem olmuştur. Bu konuda birçok farklı tahmin yöntemi önerilmiş olup, literatürde önemli bir yer tutan tahmin edicilerden birisi de Liu (1993) tarafından tanımlanan Liu tahmin edicidir. Kaynaklarda Liu tahmin edici ve bu tahmin ediciye bağlı tanımlanan birçok tahmin edici tanımlanmış ve bunların bazı özellikleri incelenmiş ve incelenmeye de devam edilmektedir. Bu nedenle bu çalışmada, bundan sonraki çalışmalara ışık tutması açısından, şimdiye kadar Liu tahmin edici ve bu tahmin ediciye bağlı tanımlanan tahmin ediciler lineer regresyon modelinde ele alınmıştır.

Bu amaçla çalışmada, 1993-2024 yılları arasında yapılan çalışmalar detaylı bir şekilde analiz edilerek incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Lineer regresyon, Çoklu iç ilişki, Yanlı tahmin edici, Ridge tahmin edici, Liu tahmin edici.

---

**LIU ESTIMATOR IN LINEAR REGRESSION  
MODEL**

---

**Birer GÜVELOĞLU**

*Advisor: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR*

*Department of Statistics*

**ABSTRACT**

Multicollinearity are an important problem in multiple linear regression models. Many solutions have been proposed to solve this problem. The most important of these methods is to use biased estimation methods, which keep all the independent variables in the model and are an alternative to the least squares method.

Many biased estimation methods have been studied in the literature, and the most well-known one is the ridge regression estimator defined by Hoerl and Kennard's (1970a, b). The ridge regression estimator and many different estimators and its properties have been widely studied in the literature and still continue to be studied. However, one of the most important problems about the ridge estimator is the selection of the biasing parameter. The biasing parameter of ridge estimator is not a linear function, which complicates the selection process. Therefore, the search for alternative methods to the ridge estimator has also been an important problem in regression. Many different estimation methods have been proposed in this regard, and one of the estimators that has an important place in the literature is the Liu estimator defined by Liu (1993). Liu estimator and many estimators related to this estimator have been defined in the literature, and some of their properties have been examined and continue to be examined. For this reason, in this study, the Liu estimator and the estimators defined based on Liu estimator are discussed in the linear regression model in order to shed light on future studies. For this purpose, the studies carried out between 1993-2024 were analyzed and examined in detail.

**Key Words:** Linear regression, Multicollinearity, Biased estimator, Ridge estimator, Liu estimator.

## TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın hazırlanması sırasında Yüksek Lisans ğrenimim sresince beni srekli destekleyen sevgili eőime ve ocuklarıma tm kalbimle Őkranlarımı sunuyorum. Sizler olmasaydınız bu çalışma da olmazdı. Sizleri çok seviyorum. Benim çabalarım dıőında bu çalışmanın yapılarak bitirilmesinde öncelikle yönlendirmesi, sorunlara çözüm bulmamda yardımcı olması ve en önemlisi Kanser hastalığımlı öğrendiğim dönemde Yüksek Lisans çalıőmama devam etmem konusunda teővik ve ikna eden, teővikleriyle bana emeği geçen, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, değerli zamanını ayırarak tezimin tamamlanmasının sağlanmasında sonsuz desteği olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a teőekkürlerimi sunarım. Engin bilgisi ve deneyimi, anlayıőı, sabrı ve her sıkıntımızda yanımızda olduğunu hissettiren lisans döneminden de hocam olan ve bir dönem Yüksek Lisans tez danıőmanlıđımı yapmıő olan Sayın Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU'na, yine bir dönem Yüksek Lisans tez aőamasında danıőmanlıđımı yapmıő olan Sayın Doç. Dr. Selma Toker KUTAY'a ve Yüksek Lisans ders aőamasında bizlere bilgileriyle destek olan kıymetli hocalarımlın hepsine ayrı ayrı teőekkürü borç bilirim.

## TABLULAR DİZİNİ

|  |    |
|--|----|
| Tablo 1. Yanlılık Azaltan Bazı Tahmin Yöntemleri .....                                 | 41 |
| Tablo 2. k-d sınıf tahmin ediciye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri .....           | 43 |
| Tablo 3. Kısıtlı Liu Tahmin Ediciye Dayanan Kısıtlı Alternatif Tahmin Yöntemleri ..... | 45 |
| Tablo 4. r-d Sınıf Tahmin Ediciye Dayanan Kısıtlı Alternatif Tahmin Yöntemleri .....   | 46 |
| Tablo 5. TPE'ye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri .....                             | 49 |
| Tablo 6. TP-WME'ye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri .....                          | 53 |
| Tablo 7. Dayanıklı Liu Tahmin Edici'ye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri .....      | 54 |



## SİMGELER VE KISALTMALAR

|        |  |
|--------|--|
| MSE    | : Hata Kareler Ortalaması  |
| mse    | : Skaler Hata Kareler Ortalaması                                 |
| p.d.   | : Pozitif Tanımlı  |
| EKK    | : En Küçük Kareler   |
| GEKK   | : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler                              |
| RLS    | : Kısıtlı En Küçük Kareler                                       |
| PCR    | : Temel Bileşenler Regresyon                                     |
| ME     | : Karma Tahmin Edici   |
| RE     | : Ridge Regresyon Tahmin Edici                                   |
| RTE    | : Ridge Tipi Tahmin Edici  |
| RRE    | : Kısıtlı Ridge Tahmin Edici                                     |
| LE     | : Liu Tahmin Edici   |
| GLE    | : Genelleştirilmiş Liu Tahmin Edici                              |
| AURE   | : Hemen Hemen Yansız Ridge Tahmin Edici                          |
| AUGRE  | : Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Ridge Tahmin Edici         |
| AULE   | : Hemen Hemen Yansız Liu Tahmin Edici                            |
| AUGLE  | : Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu Tahmin Edici           |
| AUGLME | : Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu M-Tahmin Edici         |
| RLE    | : Kısıtlı Liu Tahmin Edici                                       |
| RAURE  | : Kısıtlı Hemen Hemen Yansız Ridge Tahmin Edici                  |
| RAULE  | : Kısıtlı Hemen Hemen Yansız Liu Tahmin Edici                    |
| RTPE   | : Kısıtlı İki Parametrelî Tahmin Edici                           |
| UL     | : Yansız Liu Tahmin Edici  |
| TPE    | : İki Parametrelî Tahmin Edici                                   |
| WME    | : Ağırlıklı Karma Tahmin Edici                                   |
| WMLE   | : Ağırlıklı Karma Liu Tahmin Edici                               |
| WMRE   | : Ağırlıklı Karma Ridge Tahmin Edici                             |
| WMAURE | : Ağırlıklandırılmış Karma Hemen Hemen Yansız Ridge Tahmin Edici |
| TPWME  | : İki Parametrelî Ağırlıklı Karma Tahmin Edici                   |
| LTE    | : Liu Tipi Tahmin Edici  |
| GLME   | : Genelleştirilmiş Liu M-Tahmin Edici                            |
| SRLE   | : Stokastik Kısıtlı Liu Tahmin Edici                             |
| SRRE   | : Stokastik Kısıtlı Ridge Tahmin Edici                           |

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $\hat{\beta}$                | : En Küçük Kareler Tahmin Edici                         |
| $\hat{\beta}_s$              | : Stein Tahmin Edici                                    |
| $\hat{\beta}_G$              | : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edici        |
| $\hat{\beta}_R$              | : Kısıtlı En Küçük Kareler Tahmin Edici                 |
| $\hat{\beta}_{PCR}$          | : Temel Bileşenler Tahmin Edici                         |
| $\hat{\beta}(R)$             | : Karma Tahmin Edici                                    |
| $\hat{\beta}_{WME}(w)$       | : Ağırlıklı Karma Tahmin Edici                          |
| $\hat{\beta}(k)$             | : Ridge Tahmin Edici                                    |
| $\hat{\beta}(d)$             | : Liu Tahmin Edici                                      |
| $\hat{\beta}_{Gd}$           | : Genelleştirilmiş Liu Tahmin Edici                     |
| $\tilde{\beta}(C, \beta^*)$  | : Yansız Liu Tahmin Edici                               |
| $\hat{\beta}_{rd}$           | : Kısıtlı Liu Tahmin Edici                              |
| $\hat{\beta}_R(k)$           | : Kısıtlı Ridge Tahmin Edici (Sarkar (1992))            |
| $\hat{\beta}_r(k)$           | : Kısıtlı Ridge Tahmin Edici (Gross (2003))             |
| $\hat{\beta}(r, d)$          | : $(r, d)$ Sınıf Tahmin Edici                           |
| $\hat{\beta}(k, d)$          | : İki Parametrelili Tahmin Edici (TPE)                  |
| $\hat{\beta}_r(k, d)$        | : Kısıtlı İki Parametrelili Tahmin Edici                |
| $\hat{\beta}_{k,d}$          | : $(k, d)$ Sınıf Tahmin Edici                           |
| $\hat{\beta}_{d,k}$          | : Liu-Tipi Tahmin Edici (LTE)                           |
| $\hat{\beta}_{WMLE}(w, d)$   | : Ağırlıklı Karma Liu Tahmin Edici                      |
| $\tilde{\alpha}_L^*$         | : Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu Tahmin Edici  |
| $\hat{\beta}_{WMRE}(w, k)$   | : Ağırlıklı Karma Ridge Tahmin Edici                    |
| $\hat{\beta}_{AURE}(k)$      | : Hemen Hemen Yansız Ridge Tahmin Edici                 |
| $\hat{\beta}_{AULE}(d)$      | : Hemen Hemen Yansız Liu Tahmin Edici                   |
| $\hat{\beta}_{WMAURE}(w, k)$ | : Ağırlıklı Karma Hemen Hemen Yansız Ridge Tahmin Edici |
| $\tilde{\beta}_R(w, k)$      | : Stokastik Ağırlıklı Karma AURE                        |
| $\tilde{\beta}_L(w, d)$      | : Stokastik Ağırlıklı Karma AULE                        |
| $\tilde{\beta}_w(k, d)$      | : İki Parametrelili Ağırlıklı Karma Tahmin Edici        |
| $\tilde{\alpha}_M(k)$        | : Dayanımlı Ridge Tahmin Edici                          |

- $\hat{\beta}_{JRM}$  : Dayanıklı Jackknifed Ridge Tahmin Edici  
 $\hat{\beta}_{LM}(d)$  : Dayanıklı Liu Tahmin Edici  
 $\hat{\beta}_{WME}(w)$  : Ağırlıklı Karma Tahmin Edici  
 $\tilde{\beta}_w$  : Ağırlıklı Karma Tahmin Edici  
 $\hat{\beta}_M$  : Huber M-Tahmin Edici  
 $b(k, b^*)$  : Uyarlanmış Tahmin Edici



## 1. GİRİŞ

Bu bölümde lineer regresyon modeli ve çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak bazı ön bilgilere yer verilmiştir.

### 1.1. Lineer Regresyon Modeli

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (1.1)$$

çoklu lineer regresyon modeli verilsin. Burada,  $n$ : gözlem sayısı,  $p$ : bağımsız değişken sayısı olmak üzere  $y: n \times 1$  bağımlı değişkene ait gözlem vektörü,  $X: n \times p$  tam sütun ranklı  $p$  tane bağımsız değişkenin gözlem matrisi,  $\beta: p \times 1$  bilinmeyen regresyon katsayılarının vektörü ve  $\varepsilon: n \times 1$  hataların vektörüdür. (1.1) modelinin standart varsayımları aşağıdaki gibidir:

- $X$  matrisi stokastik olmayan bir matristir.  $X'X$  matrisi ise tekil olmayan bir matristir ve  $rank(X'X) = p$  dir.
- $X$  matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsızdır ( $rank(X) = p$ ). Yani bağımsız değişkenler arasında doğrusal veya doğrusala yakın bir ilişki yoktur. Bu varsayımın sağlanmaması durumunda  $X'X$  matrisinin tersi alınamayacağından parametre tahminleri yapılamaz. Tersinin alınabildiği durumlarda ise parametre tahminleri tutarsız ve tahminlerin varyansları büyük olabilir.
- $n \geq p$ 'dir.  $X$  matrisinin tam sütun ranklı olabilmesi için gözlem sayısı modeldeki bağımsız değişken sayısından fazla olmalıdır.
- $E(\varepsilon) = 0$  dir. Yani hata teriminin ortalaması sıfıra eşittir.  $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$  olmalıdır. Bu varsayıma göre hata teriminin varyansı bağımsız değişkendeki değişmelere bağlı olarak değişmeyip aynı kalır, yani hatalar sabit varyanslıdır. Ayrıca  $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  dir. Yani hatalar birbirleriyle ilişkisizdir. Bu varsayımın sağlanmadığı durumda hata terimleri arasında otokorelasyon vardır.

(1.1) modelinde bilinmeyen regresyon parametrelerini tahmin edebilmek için genellikle en küçük kareler (EKK) yöntemi kullanılır. Bunun için

$$\begin{aligned} \varepsilon' \varepsilon &= (y - X\beta)'(y - X\beta) \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \quad (1.2)$$

hata kareler toplamını minimum yapacak şekilde parametre tahminleri bulunur. (1.2)  
fonksiyonunun  $\beta$  'ya göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenirse

$$X'X\beta = X'y \quad (1.3)$$

elde edilir.  $X$  tam sütun ranklı olduğunda (1.3)'ün çözümünden  $\beta$  'nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y \quad (1.4)$$

olarak elde edilir.

$\beta$  parametresi  $\hat{\beta}$  ile tahmin edildiğinde hata vektörü  $\varepsilon$  için

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta} \quad (1.5)$$

tahmin edicisi elde edilir. Tahmin edilen hata kareler toplamı  $n - p$  ile bölüldüğünde,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-p} \quad (1.6)$$

$\sigma^2$  nin yansız ve tutarlı bir tahmini elde edilir.  $\hat{\beta}$  'nın örneklem özellikleri ise aşağıdaki gibidir:

$$E(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1} X'y] = (X'X)^{-1} X'E(y) = \beta$$

$$Var(\hat{\beta}) = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']$$

$$= (X'X)^{-1} X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$\hat{\beta}$  ,  $\beta$  parametresi için en iyi lineer yansız tahmin edici olma özelliğine sahiptir. Ancak model varsayımlarının sağlanmaması durumunda EKK yöntemiyle tahmin edilen parametreler

güvenilir olmayabilir.  $X$  matrisinin kolonları arasında lineer bağımlılık olması durumunda çoklu iç ilişki problemi ortaya çıkabilir. Çoklu iç ilişki olan bir veride, parametrelerin EKK tahminlerinin mutlak değerce büyük olduğu bilinmektedir. Ayrıca çoklu iç ilişkinin olduğu bir veride EKK tahmin yöntemi kullanıldığında örneklem varyansları büyümektedir. Bunun sonucunda parametreler için elde edilen güven aralıkları geniş olur, anlamlı regresyon katsayıları modelden çıkarılabilir ve nokta tahminler iyi sonuç vermezler. Regresyon parametrelerinin tahmini için EKK yöntemi kullanıldığında karşılaşılan bu gibi problemlerden dolayı farklı tahmin yöntemlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

## 1.2. Özdeş Olmayan Kovaryans Matrisli Genel Lineer Model

$$y = X\beta + e \quad (1.7)$$

çoklu lineer regresyon modeli verilmiş olsun. Burada,  $y$ ,  $n \times 1$  tipinde yanıt değişkenlerin vektörü,  $X$ ,  $n \times p$  tipinde stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlenen matrisi,  $\beta$ ,  $p \times 1$  tipinde bilinmeyen regresyon parametrelerinin vektörü,  $e$ ,  $n \times 1$  tipinde  $E[e] = 0$  ortalamalı ve  $E[ee'] = \Phi = \sigma^2 V$  kovaryans matrisli rasgele hata vektörüdür ( $e \sim N(0, \sigma^2 V)$ ). Ayrıca  $V$ ,  $n \times n$  tipinde pozitif tanımlı simetrik bir matris ve  $\sigma^2$ , bilinmeyen skalerdir.  $e_i$  rastgele değişkenlerinin varyansı özdeş değildir ve  $i \neq j$  için  $e_i$  ve  $e_j$  arasındaki kovaryans sıfır olmayabilir.

$E[ee'] = \sigma^2 V$  olduğu zaman  $\beta$ 'nin en iyi yansız tahmini incelenecektir. Bunun için yapılan ilk adım (1.7) modeli üzerinde dönüşümler yapmaktır.  $n \times n$  tipindeki  $V$  matrisinin bilindiğini varsayalım.  $V$  pozitif tanımlı olduğundan dolayı  $P'P = V^{-1}$  yani  $PVP' = I_n$  eşitliklerinin sağlayan bir  $P$  matrisi her zaman vardır.

Dönüştürülmüş model

$$Py = PX\beta + Pe$$

ya da

$$y_* = X_*\beta + e_* \quad (1.8)$$

olarak yazılabilir. Burada  $y_* = Py$ ,  $X_* = PX$  ve  $e_* = Pe$ 'dir. Dönüştürülmüş model için hata yapısının ortalaması,

$$E[e_*] = E[Pe] = PE[e] = 0$$

ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e_*) &= E[e_* e_*'] = E[P e e' P'] \\ &= P E[e e'] P' \\ &= P \sigma^2 V P' \\ &= \sigma^2 P V P' = \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

olarak bulunur. (1.8) dönüştürülmüş modele uygulanan EKK yöntemi genelleştirilmiş en küçük kareler (ağırlıklı en küçük kareler) yöntemi olarak adlandırılır (GEKK). Böylece dönüştürülmüş model EKK yönteminin varsayımlarını sağlamış olur.

GEKK tahmin edicisi, EKK da olduğu gibi, hata kareler toplamını minimum yapacak şekilde elde edilir.

$$e_* = y_* - X_* \beta$$

$$\sum_{i=1}^n e_{*i}^2 = e_*' e_*$$

$$= (Py - PX \beta)' (Py - PX \beta) = (y' - \beta' X' V^{-1}) (y - X \beta)$$

$$= y' V^{-1} y - y' V^{-1} X \beta - \beta' X' V^{-1} y + \beta' X' V^{-1} X \beta$$

dir.  $\beta$ 'nin tahmin edicisi  $e_*' e_*$ 'i minimum yapar. O halde normal denklemleri,

$$\frac{\partial (e_*' e_*)}{\partial \beta} = -2X' V^{-1} y + 2X' V^{-1} X \beta = 0$$

$$X' V^{-1} X \beta = X' V^{-1} y$$

olup buradan  $\beta$ 'nin GEKK tahmini

$$\hat{\beta}_G = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \quad (1.9)$$

olarak elde edilir. GEKK tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E(\hat{\beta}_G) = \beta$$

kovaryans matrisi,

$$Cov(\hat{\beta}_G) = \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1} \quad (1.10)$$

olup (1.7) modeli altında GEKK tahmin edicisinin BLUE olduğu görülür.

### 1.3. Karşılaştırma Kriterleri

#### 1.3.1. Matris Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması

$\beta$ 'nin bir  $\tilde{\beta}$  tahmin edicisinin matris değerli karesel kayıp fonksiyonu

$$L(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)' \quad (1.11)$$

olarak tanımlanır. Bu kayıp fonksiyonuna göre risk yani matris değerli hata kareler ortalaması (Mean Square Error, MSE) ise

$$MSE(\tilde{\beta}) = E[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)'] \quad (1.12)$$

şeklinde tanımlanır.  $\tilde{\beta}$ 'nin yanlışlığı yani  $\beta$  ile  $E(\tilde{\beta})$  arasındaki fark  $Bias(\tilde{\beta})$  ile gösterilirse (1.12) eşitliği

$$MSE(\tilde{\beta}) = Var(\tilde{\beta}) + Bias(\tilde{\beta})Bias(\tilde{\beta})' \quad (1.13)$$

olarak ifade edilebilir.

### 1.3.2. Skaler Değerli Karesel Kayıp Fonksiyonu ve Hata Kareler Ortalaması

$\beta$ 'nin bir  $\tilde{\beta}$  tahmin edicisinin skaler değerli karesel kayıp fonksiyonu

$$L(\tilde{\beta}) = (\tilde{\beta} - \beta)'(\tilde{\beta} - \beta) \quad (1.14)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu kayıp fonksiyonuna göre risk

$$mse(\tilde{\beta}) = E[(\tilde{\beta} - \beta)'(\tilde{\beta} - \beta)] \quad (1.15)$$

skaler değerli MSE olarak adlandırılır. Skaler değerli MSE, matris değerli MSE'nin izi olarak ifade edilebilir. Yani;

$$mse(\tilde{\beta}) = trE[(\tilde{\beta} - \beta)(\tilde{\beta} - \beta)'] = trMSE(\tilde{\beta})$$

formunda yazılabilir.

Skaler değerli MSE'nin kullanılması, matris değerli MSE'nin köşegen dışı elemanlarının göz ardı edilmesi ve  $(\tilde{\beta}_i - \beta)$  farklarının tamamının eşit ağırlıklandırılması anlamına gelir. Bu nedenle matris değerli MSE, skaler değerli MSE'den daha iyi bir kriterdir. Fakat hesaplanması daha zor olduğundan uygulamada genellikle skaler değerli MSE tercih edilir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde bazı yanlış tahmin ediciler ile Liu tahmin ediciye dayanan tahmin yöntemleri ve çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı ön bilgilere yer verilmiştir.

### 2.1. Model Parametrelerinin Tahmini

#### 2.1.1. Kısıtlı En Küçük Kareler Yöntemi

(1.1) ile verilen lineer regresyon modelindeki parametre vektörü  $\beta$  üzerinde

$$R\beta = r \quad (2.1)$$

kısıtı bulunsun. Burada  $R: m \times p$ ,  $\text{rank}(R) = m$  olan bir matris ve  $r, m \times 1$  bir vektördür. (2.1)'de tanımlanan  $m$  lineer kısıt birbirinden bağımsızdır.

Örneklem bilgisi ve yardımcı bilgilerin eşanlı olarak kullanılabilmesi için (1.2)'deki hata kareler toplamı,  $R\beta = r$  kısıtı altında minimum yapılmalıdır. Bunun için Lagrange fonksiyonu,

$$S(\beta, \lambda) = (y - X\beta)'(y - X\beta) - 2\lambda'(R\beta - r)$$

formundadır. Burada  $\lambda, m \times 1$  Lagrange çarpanları vektörüdür.  $S(\beta, \lambda)$  fonksiyonunun  $\beta$  ve  $\lambda$ 'ya göre kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S(\beta, \lambda)}{\partial \beta} = -X'y + X'X\beta - R'\lambda = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S(\beta, \lambda)}{\partial \lambda} = -R\beta + r = 0 \quad (2.2)$$

normal denklemleri elde edilir. (2.2) ile verilen normal denklemlerin çözümünden  $\beta$ 'nin kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi (Restricted Least Squares, RLS),

$$\hat{\beta}_R = (X'X)^{-1} X'y + (X'X)^{-1} R'\lambda \quad (2.3)$$

olarak elde edilir. Öte yandan (2.1) kısıtından

$$R\hat{\beta}_R = r = R\hat{\beta} + R(X'X)^{-1} R'\lambda \quad (2.4)$$

yazılabilir.  $R(X'X)^{-1}R' > 0$  olduğundan  $\lambda$ 'nın en uygun tahmini

$$\hat{\lambda} = \left( R(X'X)^{-1}R' \right)^{-1} (r - R\hat{\beta}) \quad (2.5)$$

bulunur.  $\hat{\lambda}$  (2.3)'de yerine konulduğunda  $S = X'X$  olmak üzere

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}) \quad (2.6)$$

elde edilir. Dikkat edilecek olursa

$$R\hat{\beta}_R = R\hat{\beta} + (RS^{-1}R')(RS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}) = r \quad (2.7)$$

olup,  $\hat{\beta}_R$ 'nin (2.1) kısıtını sağladığı görülmektedir. Ayrıca

$$E(\hat{\beta}_R) = \beta + S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}(r - R\beta)$$

olup,  $R\beta = r$  kısıtı doğru iken  $\hat{\beta}_R$  yansızdır, aksi halde yanlıdır.  $\hat{\beta}_R$ 'nin varyans-kovaryans matrisi ise

$$\text{Var}(\hat{\beta}_R) = \sigma_u^2 S^{-1} - \sigma_u^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi  $\hat{\beta}_R$ 'nin varyans-kovaryans matrisi  $R$ 'ye bağlıdır. Bu da  $\hat{\beta}_R$ 'nin varyansının  $\hat{\beta}$ 'nin varyansı ile karşılaştırıldığında her zaman daha küçük olacağını göstermektedir. Yani

$$\text{Var}(\hat{\beta}) - \text{Var}(\hat{\beta}_R) = \sigma_u^2 S^{-1}R'(RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1} \geq 0 \quad (2.8)$$

olmaktadır. (2.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade bir nnd matristir. Dolayısıyla  $R\beta = r$  kısıtı doğru iken (1.1) modeli üzerine lineer kısıtlamaları uygulamak etkili olmuştur.

### 2.1.2. Temel Bileşenler Tahmin Edici

Temel bileşenler tahmin edici, çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak veya şiddetini azaltmak için öne sürülen tahmin edicilerden biridir. Bu tekniğin ilk olarak Hotelling (1933) tarafından verildiği kabul edilmektedir.

$$y = Z\alpha + \varepsilon \quad (2.9)$$

kanonik modelini ele alırsak burada  $Z = XT$ ,  $\alpha = T'\beta$  ve  $T'X'XT = Z'Z = \Lambda$  şeklinde olur.  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ 'nin,  $X'X$ 'in özdeğerlerinin ( $p \times p$ ) boyutlu köşegen matrisi;  $T$ 'nin sütunlarına karşılık gelen özvektörler olan ( $p \times p$ ) boyutlu bir dik matristir. Burada  $Z$ , yeni dik açıklayıcı değişkenleri tanımlar ve temel bileşenler olarak ifade edilir.  $Z$ 'nin sütunları  $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_p]$  şeklindedir.

Bu modele göre  $X_j$ ,  $X$ 'in j-inci kolonu ve  $t_{ji}$ ,  $T$ 'nin  $i$ -inci kolonunun elemanlarıdır. Böylece  $Z = XT$  olduğu için  $Z$ 'nin  $i$ -inci kolonu şu şekildedir:

$$Z_i = \sum_{j=1}^p t_{ji} X_j \quad (2.10)$$

$Z_i'Z_i = t_i'(X'X)t_i = \lambda_i$  olduğu için,  $\lambda_i$  özdeğeri  $Z_i$ 'deki değişimi ölçmektedir.  $\lambda_i \approx 0$  olduğunda  $Z_i$  temel bileşeni modele çok az bir etki sağlar. Tamamının bire eşit olmasının sonucunda ise açıklayıcı değişkenler ortogonal olacaktır.  $X$  matrisinin kötü koşullu olduğu durumda bazı özdeğerler çok küçük olur. Genelliği kaybetmeden,  $\lambda_{r+1} \approx 0, \dots, \lambda_p \approx 0$  ise,  $Z_{r+1}, Z_{r+2}, \dots, Z_p$  ler yaklaşık olarak sabit ve modelden atılabilir. (2.9.) modeline göre aşağıdaki parçalanışlar yapılır:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & \Lambda_{p-r} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_r : r \times r, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \alpha_{p-r} \end{pmatrix}, \quad \alpha_r : r \times 1 \quad (2.11)$$

$$Z = (Z_r, Z_{p-r}), \quad Z_r : n \times r, \quad T = (T_r, T_{p-r}), \quad T_r : p \times r. \quad (2.12)$$

Bu durumda,  $T_r = [t_1, t_2, \dots, t_r]$  ve  $T_{p-r} = [t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_p]$  olduğundan  $T_r' X' X T_r = \Lambda_r = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  ve  $T_{p-r}' X' X T_{p-r} = \Lambda_{p-r} = \text{diag}(\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_p)$  olarak belirtilir. (2.9) modeli aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$y = Z_r \alpha_r + Z_{p-r} \alpha_{p-r} + \varepsilon \quad (2.13)$$

Çoklu iç ilişki probleminin varlığı söz konusu ise,  $Z_{p-r} \alpha_{p-r}$  modelden çıkarılmalıdır. İlk  $r$  katsayısı EKK ile,  $\hat{\alpha}_r = \Lambda_r^{-1} Z_r' y$  şeklinde tahmin edilir.  $\beta = T \alpha$  ifadesinden dolayı  $\beta$ 'nin temel bileşenler tahmin edicisi  $\hat{\beta}_{PCR} = (T_r, T_{p-r}) \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_r \\ 0 \end{pmatrix} = T_r \hat{\alpha}_r = T_r \Lambda_r^{-1} Z_r' y$  şeklinde ifade edilir.  $Z = TX$  eşitliğinden dolayı  $Z_r' = T_r' X'$  olur.  $X' X = T \Lambda T' = T_r \Lambda_r T_r' + T_{p-r} \Lambda_{p-r} T_{p-r}'$  eşitliği ve  $\beta$ 'nin temel bileşenler tahmin edicisi şu şekilde elde edilir:

$$\hat{\beta}_{PCR} = T_r \Lambda_r^{-1} T_r' X' y = T_r T_r' \hat{\beta} \quad (2.14)$$

Bu eşitlikte  $\hat{\beta}$  EKK tahmin edicisidir.

### 2.1.3. Karma Tahmin Edici

Pratik uygulamalarda,  $(y, X)$  matrisinin örneklem bilgilerine ek olarak çoğu zaman,

$$r = R\beta + \phi, \quad \phi \sim (0, \sigma^2 V) \quad (2.15)$$

tipinde ifade edilen bir lineer stokastik kısıt bilgisi de bulunur. Burada  $r : m \times 1$  ve  $R : m \times p$  tipinde matrisler,  $\text{rank}(R) = m$ 'dir. Ayrıca  $R$  ve  $V$ 'nin bilindiği kabul edilmektedir.  $V > 0$  olsun.  $r$  vektörü  $E(r) = R\beta$  beklenen değeri ile bir rasgele değişken olarak yorumlanabilir. Böylece (2.9) kısıtlaması bu anlamda tam olarak sağlanmaz.  $r$ 'nin bilindiği kabul edilirse bütün beklenen değerler  $r$ 'ye bağlı  $E(\hat{\beta} | r)$  gibi koşullu beklenen değerler olur. Durbin (1953) örneklem bilgilerini ve yardımcı (ek) bilgiyi aynı anda kullanarak, parametrelerin stepwise (aşamalı, kademeli) tahmin edicisini tanımlayan ilk kişidir. Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) örneklem bilgilerini ve ön bilgiyi,

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

ortak modelinde birleştirerek karma tahmin tekniğini ortaya koymuşlardır. Burada hatalar arasında korelasyon olmadığı kabul edilmektedir. Yani;

$$E(\varepsilon\phi') = 0 \quad (2.17)$$

dır. Daha önceki varsayımların aksine burada genel regresyon modeli kabul edilir ve  $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 W$  olur. (2.16) kullanılarak varyans-kovaryans matrisi;

$$E \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{pmatrix} (\varepsilon, \phi)' \right] = \sigma^2 \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Karma model,

$$\tilde{y} = \tilde{X}\beta + \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} \sim (0, \sigma^2 \tilde{W}) \quad (2.18)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} > 0$$

dır.  $rank(\tilde{W}) = rank(X) = p$  olduğundan (2.18) modeli, genelleştirilmiş lineer model gibi görünür.  $S = X'W^{-1}X$  olmak üzere aşağıdaki teorem elde edilir.

**Teorem 2.1.** (2.18) karma modelinde  $\beta$  için en iyi lineer yansız tahmin edici;

$$\hat{\beta}(R) = (S + R'V^{-1}R)^{-1} (X'W^{-1}y + R'V^{-1}r) \quad (2.19)$$

dir ve  $\hat{\beta}(R)$ 'nin varyans-kovaryans matrisi;

$$COV(\hat{\beta}(R)) = \sigma^2 (S + R'V^{-1}R)^{-1} \quad (2.20)$$

dir.  $\hat{\beta}(R)$  tahmin edicisi  $\beta$  'nın karma tahmin edicisi (ME) olarak adlandırılır.

$\hat{\beta}(R)$  ile GEKK' nin Karşılaştırılması

Karma tahmin edicisi yansızdır ve GEKK den daha küçük bir varyans-kovaryans matrisine sahiptir, yani

$$COV(\hat{\beta}_G) - COV(\hat{\beta}(R)) = \sigma^2 S^{-1} R' (V + R S^{-1} R')^{-1} R S^{-1} \geq 0$$

dir. Karma tahmin edicisinin daha küçük varyansa sahip olması  $E(r) = R\beta$  eşitliğinin sağlanıp sağlanmamasından bağımsızdır.

#### 2.1.4. Ridge Tahmin Edici

Hoerl ve Kennard'ın (1970) önerdiği ridge regresyon tahmin edici (RRE),

$$\hat{\beta}(k) = (X'X + kI)^{-1} X'y, \quad k \geq 0 \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır. RRE  $k$  yanlılık parametresine bağlıdır ve  $k$  nın seçimi tahmin edicinin performansını etkiler. Ridge tahmin edici  $k = 0$  için EKK tahmin edicisini vermektedir. Ayrıca ridge tahmin edici EKK tahmin edicinin bir lineer dönüşümü olarak da yazılabilmektedir:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k) &= (X'X + kI)^{-1} X'X \hat{\beta}, \\ &= W(k) \hat{\beta}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Burada,  $W(k) = (X'X + kI)^{-1} X'X$ . Ayrıca,

$$E(\hat{\beta}(k)) = S_k^{-1} X'X \beta, \quad Bias(\hat{\beta}(k), \beta) = -k S_k^{-1} \beta, \quad Var(\hat{\beta}(k)) = \sigma^2 S_k^{-1} X'X S_k^{-1}$$

olduğundan ridge tahmin edicinin matris hata kareler ortalaması

$$MSE(\hat{\beta}(k), \beta) = S_k^{-1} (\sigma^2 X'X + k^2 \beta\beta') S_k^{-1}$$

olur. Burada  $S_k = X'X + kI$  dir. Bu durumda,

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ,  $X'X$  in özdeğerleri olmak üzere skaler hata kareler ortalaması

$$mse(\hat{\beta}(k), \beta) = tr(MSE(\hat{\beta}(k), \beta)) = \sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 \lambda_i + k^2 \beta_i^2}{(\lambda_i + k)^2}$$

olarak elde edilir. Ayrıca,  $\hat{\beta}(k)$  nin mse'si  $\hat{\beta}$  dan daha iyi olacak şekilde her zaman bir  $k > 0$  vardır.

### *k Yanlılık Parametresinin Seçimi*

Ridge regresyonda  $k$  nın seçimi için pek çok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları şu şekildedir:

1. Hoerl ve Kennard (1970) ridge tahmin edicinin EKK'dan daha küçük mse'ye sahip olması için yanlılık parametresinin tahminini  $\hat{k}_{HK} = \frac{\hat{\alpha}^2}{\hat{\alpha}_{maks}^2}$  olarak vermiştir. Burada  $\hat{\alpha}_{maks}$ , kanonik formda regresyon katsayısının tahmininin maksimum değeridir.

2. Theobald (1974) her  $W$  için  $E[(\hat{\beta}(k) - \beta)'W(\hat{\beta}(k) - \beta)]$ ,  $E[(\hat{\beta} - \beta)'W(\hat{\beta} - \beta)]$  dan daha küçük olacak şekilde yanlılık parametresinin tahminini  $\hat{k}_T = \frac{2\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$  olarak vermiştir.

3. Hoerl, Kennard ve Baldwin (1975) ridge tahmin edicinin mse değerini minimum yapan  $k_i = \frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$  değerlerinin harmonik ortalaması  $\hat{k}_{HKB} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'\hat{\beta}}$  yı önermiştir.

4. Lawless ve Wang (1976) bayesian yaklaşımla  $\hat{k}_{LW} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}$  tahminini vermişlerdir.

### **2.1.5. Liu Tahmin Edici**

Çoklu iç ilişki olması durumunda EKK tahmin edicinin dezavantajları bilinmektedir. Bu dezavantajları gidermek için pek çok tahmin edici önerilmiştir. Ridge ve Stein ( $\hat{\beta}_s = c\hat{\beta}$ ,  $0 < c < 1$ ) tahmin ediciler bunlardan ikisidir. Fakat her iki tahmin edicinin de olumlu yanları gibi bazı olumsuz yanları da vardır.

$\hat{\beta}(k)$ ,  $k$  nın karmaşık bir fonksiyonudur. Bu nedenle  $k$  nın seçimi için önerilen metotlarda karmaşık denklemlerle karşılaşabiliriz. Ridge tahmin metodu  $X'X$  matrisinin aksine  $X'X + kI$ ,  $k \geq 0$  matrisine bağlı olduğundan EKK deki zorluklar önlenmiş olunur.  $X'X + kI$  'nın koşul sayısı  $k$  nın azalan bir fonksiyonu olduğundan yeteri kadar büyük  $k$  için  $X'X + kI$  nın koşul sayısı küçük seviyeye düşürülebilir. Fakat uygulamada  $k$  nın küçük olması önerilir. Bu nedenle  $X'X + kI$  nın koşul sayısını küçültebilecek bir  $k$  bulunamayabilir. Seçilen  $k$  değerine göre hala çoklu iç ilişki problemine sahip olabilir.

Stein tahmin edicinin avantajı  $c$  nin bir lineer fonksiyonu olmasıdır. Fakat  $\hat{\beta}_s$  nin her elemanının büzülmesi aynıdır. Bu da uygulamada iyi sonuç vermez.

İki tahmin edicinin kombinasyonunun bu iki tahmin edicinin avantajlarını birleştireceği düşüncesi Liu (1993) yeni bir tahmin edici önermeye sevk etmiştir. Çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmak için Liu (1993), Stein (1956) tahmin edici ile ridge tahmin ediciyi birleştirmiş ve

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(d) &= (X'X + I)^{-1} (X'y + d\hat{\beta}), \quad 0 < d < 1 \\ &= (X'X + I)^{-1} (X'X + dI) \hat{\beta} = F(d) \hat{\beta}\end{aligned}\quad (2.23)$$

tahmin edicisini önermiştir. Burada  $F(d) = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI)$ . Bu tahmin edici Akdeniz ve Kaçiranlar (1995) tarafından Liu tahmin edici (LE) olarak adlandırılmıştır.  $\hat{\beta}(d)$  nın  $\hat{\beta}(k)$  üzerindeki avantajı  $d$  nin bir lineer fonksiyonu olmasıdır. Dolayısıyla  $d$  nin seçimi  $k$  nin seçiminden daha kolaydır.

Liu tahmin edicinin bazı özellikleri ise şu şekildedir:

1.  $d = 1$  iken  $\hat{\beta}(d) = \hat{\beta}$  dir.
2.  $\|\hat{\beta}(d)\| < \|\hat{\beta}\|$  dir.
3.  $E(\hat{\beta}(d)) = (X'X + I)^{-1} (X'X + dI) \beta$  olup yanlı bir tahmin edicidir.
4.  $\hat{\beta}(d)$  nın MSE'si  $\hat{\beta}$  dan daha iyi olacak şekilde bir  $0 < d < 1$  vardır.
5. Kanonik formda;

$$mse(\hat{\beta}(d), \beta) = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{(\lambda_i + d)^2}{\lambda_i (\lambda_i + 1)} + (d-1)^2 \sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}$$

olur.  $mse(\hat{\beta}(d), \beta)$  'yi minimum yapan  $d$  yanlılık parametresinin tahmini

$$\hat{d}_{mm} = 1 - \hat{\sigma}^2 \left( \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i (\lambda_i + 1)} / \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\alpha}_i^2}{(\lambda_i + 1)^2} \right)\quad (2.24)$$

olarak Liu (1993)'de verilmiştir. Bu makalede ayrıca ridge tahmin edicide  $k$  seçme yöntemlerine benzer şekilde diğer  $d$  yanlılık parametresi seçimleri de verilmiştir.

(1.1.) ile verilen çoklu lineer regresyon modeli kanonik formda

$$y = Z\alpha + \varepsilon, \quad (2.25)$$

şeklinde verilir. Burada  $Z = XT$ ,  $\alpha = T'\beta$  ve  $T$  de kolonları  $X'X$  matrisinin özvektörlerinden oluşan ortogonal bir matris olup;

$$Z'Z = T'X'XT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \quad (2.26)$$

ile elde edilir. Burada  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ ,  $X'X$  matrisinin özdeğerleridir. (2.25) denklemi için EKK tahmin edici;

$$\hat{\alpha} = \Lambda^{-1}Z'y \quad (2.27)$$

ile verilir. Benzer şekilde ridge tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}(k) = (\Lambda + kI)^{-1}\Lambda\hat{\alpha} = T_k\hat{\alpha} \quad (2.28)$$

ile verilir. Burada,  $T_k = (\Lambda + kI)^{-1}$  dir.

Benzer şekilde kanonik formda Liu tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}(d) = (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)\hat{\alpha} = F(d)\hat{\alpha} \quad (2.29)$$

ile verilir. Burada,  $F(d) = (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)$  dir.

### 2.1.6. Liu Tipi Tahmin Edici

Liu (2003) LTE'yi şu şekilde önermiştir:

$$\hat{\alpha}(k, d) = (\Lambda + kI)^{-1}(Z'y - d\alpha^*), \quad k > 0, -\infty < d < \infty. \quad (2.30)$$

Burada  $\alpha^*$ ,  $\alpha$ 'nın herhangi bir tahmin edicisidir. (2.30) da sırasıyla

$\alpha^* = \hat{\alpha}$  ve  $\alpha^* = \hat{\alpha}(k)$  alınır;

$$\hat{\alpha}(k, d) = (\Lambda + kI)^{-1}(\Lambda - dI)\hat{\alpha} = W_1(k, d)\hat{\alpha} \quad (2.31)$$

$$\tilde{\alpha}(k, d) = (\Lambda + kI)^{-1}(\Lambda - d(\Lambda + kI)^{-1}\Lambda)\hat{\alpha} = W_2(k, d)\hat{\alpha} \quad (2.32)$$

ifadeleri elde edilir . (2.31) ve (2.32) den;

$$\lim_{d \rightarrow 0} \hat{\alpha}(k, d) = \hat{\alpha}(k) \text{ ve } \lim_{d \rightarrow 0} \tilde{\alpha}(k, d) = \hat{\alpha}(k)$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \hat{\alpha}(k, d) = \hat{\alpha} \text{ ve } \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \tilde{\alpha}(k, d) = \hat{\alpha} \quad (2.33)$$

sonuçları elde edilir.

## 2.2. Yanlılık Azaltan Tahmin Yöntemleri

### 2.2.1. Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu Tahmin Edici

Bu konuda ilk çalışma, Singh ve ark. (1986) tarafından verilen Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş ridge tahmin ediciden esinlenerek Akdeniz ve Kaçiranlar (1995) tarafından ele alınmıştır.

LE'nin genelleştirilmiş formu olan genelleştirilmiş Liu tahmin edici (GLE) standart lineer regresyon modelinde,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{Gd} &= (X'X + I)^{-1}(X'y + D\hat{\beta}), \quad 0 < d_i < 1 \\ &= (X'X + I)^{-1}(X'X + D)\hat{\beta}, \quad D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p) \end{aligned} \quad (2.34)$$

ve kanonik formda (GLE),

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_L &= (\Lambda + I)^{-1}(X'y - D\hat{\alpha}) = (\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + D)\hat{\alpha} \\ &= I - (\Lambda + I)^{-1}(I - D)\hat{\alpha} \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklinde Liu(1993) tarafından tanımlanmıştır. Aynı zamanda, Liu (1993) GLE'nin MSE'sini minimum yapan  $d_i$ 'yi şu şekilde önermiştir:

$$d_i = \frac{\alpha_i^2 - \sigma^2}{\alpha_i^2 + (\sigma^2 / \lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.36)$$

Burada  $\alpha_i^2$  ve  $\sigma^2$  bilinmeyen parametrelerinin yerlerine sırasıyla  $\hat{\alpha}_i^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i}$  ve  $\hat{\sigma}^2$  yansız tahminleri yazıldığında

$$\hat{d}_i = \frac{\lambda_i(\hat{\alpha}_i^2 - \hat{\sigma}^2)}{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2 + \hat{\sigma}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.37)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) GLE'nin yanlılığını azaltmak için hemen hemen yansız genelleştirilmiş Liu tahmin ediciyi (AUGLE) aşağıdaki gibi tanımlamışlardır:

$$\tilde{\alpha}_L^* = [I + (\Lambda + I)^{-1}(I - D)] \hat{\alpha}_L \quad (2.38)$$

$$= [I - (\Lambda + I)^{-2}(I - D)^2] \hat{\alpha}$$

Burada,  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ ,  $0 < d_i < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  'dır. Aynı zamanda Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) AUGLE'nin, GLE ve EKK tahmin ediciden üstünlüklerini MSE kriterine göre incelemiş olup, AUGLE'nin MSE'sini minimum yapan  $d_i$ 'yi şu şekilde önermişlerdir:

$$d_i^* = 1 - \frac{\sigma(\lambda_i + 1)}{\sqrt{\lambda_i\alpha_i^2 + \sigma^2}}, \quad (2.39)$$

Burada bilinmeyen  $\alpha_i^2$  ve  $\sigma^2$  parametrelerinin yerlerine sırasıyla  $\hat{\alpha}_i^2$  ve  $\hat{\sigma}^2$  tahminleri yazıldığında;

$$\tilde{d}_i^* = 1 - \frac{\hat{\sigma}(\lambda_i + 1)}{\sqrt{\lambda_i\hat{\alpha}_i^2 + \hat{\sigma}^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.40)$$

elde edilir (Akdeniz ve Kaçıranlar, 1995).

$d_i$  parametrelerinin stokastik olmadığı varsayımı altında AUGLE ile GLE ve EKK tahmin edicinin MSE kriterine göre karşılaştırılmaları

$$MSE(\hat{\alpha}_i) = E(\hat{\alpha}_i - \alpha_i)^2 = \frac{\sigma^2}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.41)$$

$$MSE(\hat{\alpha}_{L_i}) = \frac{\sigma^2}{\lambda_i} (1 - \delta_i)^2 + \delta_i^2 \alpha_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.42)$$

$$MSE(\tilde{\alpha}_{L_i}^*) = \frac{\sigma^2}{\lambda_i} (1 - \delta_i^2)^2 + \delta_i^4 \alpha_i^2 \quad (2.43)$$

ile verilmiştir.

AUGLE ile GLE'nin karşılaştırılması Teorem 2.2. ile verilmiştir.

**Teorem 2.2.** Eğer  $\sigma^2 < \alpha_i^2 \left( \frac{\lambda_i + 2}{2\lambda_i + 3} \right)$ ,

a)  $MSE(\tilde{\alpha}_{L_i}^*) < MSE(\hat{\alpha}_{L_i}), 0 < k_i < k_i < 1$

b)  $MSE(\tilde{\alpha}_{L_i}^*) < MSE(\hat{\alpha}_{L_i}), 0 < k_i < k_i < 1$

Burada,

$$k_i = 1 - d_i \text{ ve } k_i = \frac{\lambda_i + 1}{2} \left( -1 + \left\{ \frac{9\sigma^2 + \lambda_i \alpha_i^2}{\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2} \right\}^{1/2} \right) \quad (2.44)$$

dır.

AUGLE ile EKK tahmin edicinin karşılaştırılması Teorem 2.3. ile verilmiştir.

**Teorem 2.3.** Eğer  $\sigma^2 < \frac{\lambda_i \alpha_i^2}{2(1 + \lambda_i)^2 - 1}$ ,

a)  $MSE(\tilde{\alpha}_{L_i}^*) < MSE(\hat{\alpha}_i), 0 < k_i < k_i < 1$

b)  $MSE(\tilde{\alpha}_{L_i}^*) < MSE(\hat{\alpha}_i), 0 < k_i < k_i < 1$

Burada,

$$k_{2i} = \sigma(\lambda_i + 1) \left\{ \frac{2}{\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2} \right\}^{1/2} \quad (2.45)$$

dır.

### 2.2.2. Ön Bilgiye Dayalı Yansız Liu Tahmin Edici

Bu konuda ilk çalışma, Crouse ve ark. (1995) tarafından tanımlanan yansız ridge tahmin ediciden esinlenerek, Sakalılıoğlu ve Akdeniz (2003) tarafından verilmiştir. Çalışmada yansız Liu tahmin edicisi tanımlanarak,  $d$  parametresinin tahmini verilmiş ve yeni tanımlanan tahmin edicinin EKK ve LE ile karşılaştırılmaları MSE matrisi kriterine göre incelenmiştir.

(1.1) genel lineer regresyon modelini göz önüne alalım ve  $\hat{\beta} \sim N(\beta, \Sigma)$  kabul edelim. Burada,  $\Sigma = \sigma^2(X'X)^{-1}$  dır.

Swindel (1976) ön bilgi ile ridge regresyonu birleştirerek aşağıdaki tahmin ediciyi tanımlamıştır:

$$b(k, b^*) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kb^*), k \geq 0 \quad (2.46)$$

Burada,  $b^*$ ,  $\beta$ 'nin önceki tahmininin sabit bir vektördür. Ayrıca, Crouse ve ark. (1995)  $\beta^*$  ön bilgiye dayalı yansız ridge regresyon tahmin edicisini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

$$\beta(kI, \beta^*) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + k\beta^*), \quad (2.47)$$

burada ön bilgi  $\beta^*$   $\hat{\beta}$ 'dan bağımsızdır ve  $\beta^* \sim N(\beta, \Sigma)$  dir. Ayrıca  $V$  tam ranklı varyans kovaryans matrisidir.

Aşağıdaki konveks tahmin ediciyi göz önünde bulunduralım:

$$\tilde{\beta}(C, \beta^*) = C\hat{\beta} + (I - C)\beta^*$$

burada  $I$   $p \times p$  birim matrisidir ve  $C$  bir  $p \times p$  matrisidir.  $\tilde{\beta}(C, \beta^*)$  tahmin edicisinin MSE'si

$$MSE(\tilde{\beta}(C, \beta^*)) = \sigma^2 C S^{-1} C' + (I - C)V(I - C)'$$

olarak yazılabilir.

$MSE(\tilde{\beta}(C, \beta^*))$ 'yi minimum yapan  $C$  matrisi

$$\frac{\partial MSE(\tilde{\beta}(C, \beta^*))}{\partial C} = 2C(\sigma^2 S^{-1} + V) - 2V = 0$$

eşitliğinin çözülmesiyle

$$C = V(\sigma^2 S^{-1} + V)^{-1} \text{ veya } C = V(\Sigma + V)^{-1}$$

şeklinde elde edilir. Böylece  $V = (I - C)^{-1} C \Sigma$  olur.

Liu (1993) tarafından verilen  $\hat{\beta}(d)$  'yi ele alalım:

$$\hat{\beta}(d) = (S + I)^{-1} (S + dI) \hat{\beta} = C \hat{\beta} \quad (2.48)$$

burada  $C = (S + I)^{-1} (S + dI)$  dir.

Aşağıdaki yansız tahmin edici Sakallıoğlu ve Akdeniz (2003) tarafından tanımlanmıştır.

$$\tilde{\beta}(C, \beta^*) = \hat{\beta}(d) + (I - C) \beta^* = C \hat{\beta} + (I - C) \beta^* \quad (2.49)$$

$C = (S + I)^{-1} (S + dI)$  olduğundan  $V = \frac{\sigma^2}{1-d} (S + dI) S^{-1}$  olur. Böylece  $\beta^*$ ,  $0 < d < 1$  için  $N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{1-d} (S + dI) S^{-1}\right)$  olur.

Yansız Liu ile EKK'nın karşılaştırılması ele alınırsa aşağıdaki teoremler verilebilir.

**Teorem 2.4.**  $\hat{\beta}$  ve  $\tilde{\beta}(C, \beta^*)$  sırasıyla EKK ve yansız Liu tahmincileri olsun. Bu durumda  $D(\hat{\beta}) - D(\tilde{\beta}(C, \beta^*))$  negatif tanımlı olmayan matristir.

**Teorem 2.5.**  $\hat{\beta}(d)$  tahmin edicisinin  $\tilde{\beta}(C, \beta^*)$  den MSE matrisi anlamında daha iyi olması için gerek ve yeter koşul  $\beta'(S + dI)^{-1} S \beta \leq \frac{\sigma^2}{1-d}$  olmasıdır.

**Teorem 2.6.**  $\hat{e}$  ve  $\tilde{e}_{C, \beta^*}$  sırasıyla EKK ve yansız Liu rezüdü (artık) vektörleri olsun. Bu durumda  $D(\hat{e}) - D(\tilde{e}_{C, \beta^*})$  negatif olmayan tanımlı bir matristir.

**Teorem 2.7.**  $\tilde{e}$ , Liu artığı ve  $\tilde{e}_{C,\beta^*}$ 'in yansız Liu artığı olsun. Bu durumda  $\tilde{e}$  nin  $\tilde{e}_{C,\beta^*}$ 'den MSE'ye göre daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul  $\beta'(S + dI)^{-1}S\beta \leq \frac{\sigma^2}{I-d}$  olmasıdır.

## 2.3. Kısıtlı Tahmin Yöntemi

### 2.3.1. Kısıtlı Liu Tahmin Edici

Bir modele lineer kısıtların eklenmesiyle, elde edilen kısıtlı en küçük kareler tahmin edicinin (RLS) bazı mse kriterlerine göre, kısıtlar doğru ya da değil iken, EKK tahmin ediciden daha iyi olduğu bilinmektedir. Kısıtlar lineer regresyonda genellikle,

- 1-  $R\beta = r$ ,  $r$  ve  $R$  sabit,

- 2-  $R\beta \leq r$ ,  $r$  ve  $R$  sabit,

- 3-  $r = R\beta + \phi$ ,  $\phi \sim (0, \sigma^2 V)$

$r$  bilinen  $m \times 1$  rasgele vektör,  $R$  bilinen  $m \times p$  matris ve  $\phi$  bir rasgele vektör,

- 4-  $r = R\beta + \delta + \phi$ ,  $E(\phi) = 0$  ve  $\text{Cov}(\phi) = \sigma^2 V$ ,  $E(r) - R\beta = \delta$ ,  $\delta \neq 0$

formlarında ele alınmaktadır. Yukarıdaki kısıt formlarında kısıtlı tahmin ediciler elde edilerek bunların EKK tahmin edici ile çeşitli kriterlere göre karşılaştırılmaları literatürde geniş yer tutmaktadır. Bu çalışmalardan yararlanarak kısıtlı tahmin edicilerin yanlı tahmin edicilerle birleştirilerek yeni tahmin edicilerin tanımlanması da önemli bir çalışma konusu olmuştur. Bu kapsamda kısıtlı ridge, kısıtlı Stein-Rule ve kısıtlı Liu tahmin edici gibi birçok tahmin edici lineer regresyon modeli başta olmak üzere diğer regresyon modellerinde de tanımlanarak literatüre kazandırılmıştır. Çalışmanın bu kısmında, kısıtlı Liu tahmin edicilerden bahsedeceğiz. İlk olarak, Kaçıranlar ve ark. (1999) tarafından kısıtlı Liu tahmin edici tanımlanmış olup bu tahmin ediciden yararlanarak birçok çalışma gerçekleştirilmiştir.

Sarkar (1992) kısıtlı EKK tahmin edici ile Ridge tahmin ediciyi birleştirerek Kısıtlı Ridge (RRE) tahmin edicisini

$$\hat{\beta}_R(k) = W(k)\hat{\beta}_R, \quad W(k) = (I_p + k(X'X)^{-1})^{-1}, \quad k \geq 0 \quad (2.50)$$

şeklinde vermiştir. Bu çalışmadan esinlenerek Kaçıranlar ve ark. (1999) tarafından kısıtlı Liu tahmin edici (RLE),

$$\hat{\beta}_{rd} = F(d)\hat{\beta}_R, \quad F(d) = (X'X + I)^{-1}(X'X + dI), \quad -\infty < d < +\infty \quad (2.51)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu çalışmada mse anlamında yeni tahmin edicinin RLS ve Liu tahmin edici ile karşılaştırılmalarına yer verilmiştir. Ayrıca Portland çimento verisi kullanılarak elde edilenler detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Yine bu çalışmada Liu tahmin edici için  $0 < d < 1$  şeklinde olan parametre aralığı ilk kez  $-\infty < d < +\infty$  aralığına genişletilmiştir. Şimdi bu tahmin edicinin bazı özelliklerini inceleyelim:

$$mse(\hat{\beta}_{rd}) = \sigma^2 tr(F(d)AF'(d)) + \|F(d)\beta + F(d)S^{-1}\delta_* - \beta\|^2 \quad (2.52)$$

Kısıtlamalar geçerli olduğunda yani  $\delta = 0$  olduğunda (3.19.)

$$mse(\hat{\beta}_{rd}) = \sigma^2 tr(F(d)AF'(d)) + (d-1)^2 \beta'(S+I)^{-2} \beta \quad (2.53)$$

olur.

Kısıtlamalar doğru iken RLE ile LE'nin karşılaştırılmasını ele alalım.  $\hat{\beta}(d) = F(d)\hat{\beta}$  ve  $\hat{\beta}_{rd} = F(d)\hat{\beta}_R$  olduğundan

$$D\hat{\beta}(d) - D(\hat{\beta}_{rd}) = F(d) [D(\hat{\beta}) - D(\hat{\beta}_R)] F'(d)$$

olur.  $D(\hat{\beta}) - D(\hat{\beta}_R) = \sigma^2 S^{-1} R' (RS^{-1} R')^{-1} RS^{-1}$  negatif tanımlı olmayan olduğundan; her  $d$  için  $D(\hat{\beta}(d)) - D(\hat{\beta}_{rd})$  matrisi de negatif tanımlı olmayan olur. Ayrıca  $D(\hat{\beta}(d))$  'in  $D(\hat{\beta}_{rd})$  eşit olması için gerek ve yeter koşul  $R(S+dI) = 0$  olmasıdır.

**Teorem 2.8.**  $d$  seçimine bakılmaksızın,  $\hat{\beta}_{rd}$  'nin varyans-kovaryans matrisi her zaman  $\hat{\beta}(d)$  nin varyans-kovaryans matrisinden küçük veya eşittir. Varyans-kovaryans matrislerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul  $R(S+dI) = 0$  olmasıdır.

**Sonuç 2.8.**  $R\beta = r$  kısıtlamaları doğru olsun. Bu durumda  $d \geq 0$  için,

$$\hat{\beta}_{rd}, \text{ MSE ve mse anlamında } \hat{\beta}(d) \text{ 'dan daha iyidir.}$$

**Teorem 2.9.**  $R\beta = r$  iken  $\sigma^2 > 0$ ,  $q < p$ ,  $d_1$  ve  $d_u$   $d_1 = 1 - 2 \frac{\sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 b_{ii}}{\lambda_i + 1}}{\sum_{i=1}^p \frac{\sigma^2 b_{ii} \alpha_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}}$  ve  $d_u = 1$  olsun.  $\hat{\beta}_{rd}$

'nin mse anlamında  $\hat{\beta}_R$ 'den daha iyi olması için gerek ve yeter koşul  $d$ 'nin  $d_1 < d < 1$  olmasıdır.

$d_{opt}$  için alternatif bir tahmin edici, RLS tabanlı minimum mse tahmin edicisi olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\hat{d}_{RLS} = 1 - \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{b_{ii}}{\lambda_i + 1}}{\sum_{i=1}^p \frac{b_{ii} \sigma^2 \alpha_i^2}{(\lambda_i + 1)^2}} \quad (2.54)$$

**Teorem 2.10.**  $R\beta = r$  doğru olmasın. Bu durumda;

1- Eğer  $h'(1) > 0$  veya

$$tr\{(S+I)^{-1} S^{-1} \delta_* (\beta + S^{-1} \delta_*)'\} > -\sigma^2 tr\{(S+I)^{-1} A\}$$

ise,  $d < 1$  ile (yeterince büyük) bir  $d$  parametresi vardır ve buna karşılık gelen  $\hat{\beta}_{rd}$ , mse anlamında  $\hat{\beta}_R$ 'den daha iyidir.  $h'(1)$ 'in pozitif olması için yeterli koşul, her  $i = 1, 2, \dots, p$  için  $1 + \alpha_i \lambda_i \tilde{\delta}_i^T \geq 0$  olmasıdır.

2- Eğer  $h'(1) < 0$  veya

$$tr\{(S+I)^{-1} S^{-1} \delta_* (\beta + S^{-1} \delta_*)'\} < -\sigma^2 tr\{(S+I)^{-1} A\}$$

ise,  $d > 1$  ile (yeterince küçük) bir  $d$  parametresi vardır ve buna karşılık gelen  $\hat{\beta}_{rd}$ , mse anlamında  $\hat{\beta}_R$ 'den daha iyidir.

**Teorem 2.11.**  $R\beta = r$  doğru olmasın.  $\bar{d}$

$$\bar{d} := \frac{\max_i \left( \frac{\tilde{\delta}_i^2}{\lambda_i} - 2 \frac{\alpha_i \tilde{\delta}_i}{\lambda_i} - \sigma^2 c_{ii} \lambda_i \right)}{\min_i \left( \sigma^2 c_{ii} - 2 \frac{\alpha_i \tilde{\delta}_i}{\lambda_i} - \frac{\tilde{\delta}_i^2}{\lambda_i^2} \right)}$$

olarak tanımlansın ve  $\bar{d}$ 'nin bu tanımındaki paydayı  $\bar{d}_{den}$  gösterebilirsin. Ayrıca  $d > 0$  olduğunu varsayalım: O zaman:

- 1- Eğer  $\bar{d}_{den} > 0$  ise,  $d > \bar{d}$  olan her pozitif  $d$  için  $\hat{\beta}_{rd}$  mse anlamında  $\hat{\beta}(d)$ 'den daha iyidir.
- 2- Eğer  $\bar{d}_{den} < 0$  ise,  $d < \bar{d}$  olan her pozitif  $d$  için  $\hat{\beta}_{rd}$ , mse anlamında  $\hat{\beta}(d)$ 'den daha iyidir.

### 2.3.2. (r,d) sınıf Tahmin Edici

Baye ve Parker, (1984)'de özel durumlarda EKK, RRE ve PCR tahmin edicileri veren  $r-k$  sınıfı tahmin ediciyi önermiştir. Nomura ve Ohkubo (1985)'te  $r-k$  sınıfı tahmin edici ile RRE tahmin edicisi MSE değerine göre karşılaştırılmıştır. Bu çalışmadan esinlenerek, Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001) de özel durumda EKK, PCR ve Liu tahmin edicilerini içeren  $(r,d)$  sınıfı diye adlandırdıkları bir tahmin edici sınıfı tanımlanmıştır. Özellikle, yeni tahmin edicinin mse'sinin Liu tahmin edici, EKK tahmin edici ve PCR tahmin ediciden üstün olduğu bu çalışmada gösterilmiştir.

(1.1) modeli altında  $\beta$ 'nin  $r-d$  sınıfı tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}(r,d) &= T_r (T_r' X' X T_r + I_r)^{-1} (T_r' X' y + d T_r' \hat{\beta}_{PCR}) \\ &= T_r (T_r' X' X T_r + I_r)^{-1} (I_r + d (T_r' X' X T_r)^{-1}) T_r' X' y\end{aligned}\quad (2.55)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada,  $r \leq p$ ,  $0 < d < 1$  bir parametredir ve  $\hat{\beta}_{PCR}$ , PCR tahmin edicisidir. Şimdi karşılaştırma için mse değerlerini göz önüne alalım:

$$mse(\hat{\beta}(r,d)) = \sum_{i=1}^r \left[ (\delta_i - 1)^2 \alpha_i^2 + \frac{\sigma^2 \delta_i^2}{\lambda_i} \right] + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i^2 \quad (2.56)$$

$$mse(\hat{\beta}_{PCR}) = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma^2}{\lambda_i} + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i^2 \quad (2.57)$$

$$mse(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i} \quad (2.58)$$

burada  $\delta_i = (\lambda_i + d) / (\lambda_i + 1)$  'dir.

**Teorem 2.12.**  $mse(\hat{\beta}(r, d)) < mse(\hat{\beta}_{PCR})$  olacak şekilde her zaman bir  $0 < d < 1$  vardır.

$\hat{\beta}(r, d)$  ve EKK tahmin edicinin mse'lerinin karşılaştırılması aşağıdaki teoremle de verilebilir.

**Teorem 2.13.a.** Her  $i \in N_r = \{1, 2, \dots, r\}$  için,  $\sum_{i=r+1}^p \left( \alpha_i^2 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right) \leq 0$  ve  $\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 \geq 0$  ise,

$0 < d < 1$  için  $mse(\hat{\beta}(r, d)) < mse(\hat{\beta})$  'dir.

**Teorem 2.13.b.** Bazı  $i \in N_r$  için,  $\sum_{i=r+1}^p \left( \alpha_i^2 - \frac{\sigma^2}{\lambda_i} \right) \leq 0$  ve  $\frac{\sigma^2}{\lambda_i} - \alpha_i^2 < 0$  ise,

$0 < \max_{i \in N_r} \left( (\lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2) / (\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2) \right) < d < 1$  için  $mse(\hat{\beta}(r, d)) < mse(\hat{\beta})$  dir.

**Teorem 2.14.a.** Bazı  $i \in N_p$  için,  $\sigma^2 \leq \lambda_i \alpha_i^2 + 2\alpha_i^2$  ise,  $0 < d_1 < d < 1$  için

$mse(\hat{\beta}_d) > mse(\hat{\beta}(p-1, d)) > \dots > mse(\hat{\beta}(r, d))$  olacak şekilde negatif olmayan bir  $d_1$  vardır.

Burada  $N_p = \{r+1, r+2, \dots, p\}$  'dir.

**Teorem 2.14.b.** Her  $i \in N_p$  için,  $\sigma^2 < \lambda_i \alpha_i^2 + 2\alpha_i^2$  ise,  $0 < d < d_2 < 1$  için

$mse(\hat{\beta}_d) < mse(\hat{\beta}(p-1, d)) < \dots < mse(\hat{\beta}(r, d))$  olacak şekilde pozitif bir  $d_2$  vardır. Örneğin,

$$d_1 = \min_{i \in N_p} \left\{ 1, \max_{i \in N_p} \frac{\lambda_i (2\alpha_i^2 + \lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2)}{\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2} \right\}$$

ve

$$d_2 = \min_{i \in N_p} \left\{ \frac{\lambda_i (2\alpha_i^2 + \lambda_i \alpha_i^2 - \sigma^2)}{\lambda_i \alpha_i^2 + \sigma^2} \right\}.$$

Bu tahmin edicide ortaya atılan fikir daha sonra birçok çalışmada kullanılmıştır. Bunlar daha sonra incelenecektir.

### 2.3.3. Kısıtlı ve Kısıtsız İki Parametrelili Tahmin Edici

Stein tahmin edicinin  $\hat{\beta}$ 'yi büzerek daha iyi tahminler elde edilmesini sağlamasına karşın,  $\hat{\beta}$ 'nin her elemanını aynı katsayıyla büzmesi bir dezavantajdır. Özkale ve Kaçıranlar (2007a), (1.1) modeli için ridge ve Stein tahmin edicilerin avantajlarını birleştirerek, iki parametrelili tahmin ediciyi (TPE)

$$\hat{\beta}(k,d) = (X'X + kI)^{-1} (X'y + kd\hat{\beta}), k > 0, 0 < d < 1 \quad (2.59)$$

şeklinde tanımlamışlardır. İki parametrelili tahmin edici bir minimumlaştırma probleminin çözümü olarak makalede verilmiştir. Bu tahmin edici ayrıca, Liu tahmin edicinin elde edilmesine benzer şekilde (1.1) modeline  $kd\hat{\beta} = k\beta + \varepsilon$  lineer stokastik kısıtları eklenerek de elde edilebilir.

İki parametrelili tahmin edici EKK, ridge ve Liu tahmin edicilerin genel halidir. Bu özellik  $\hat{\beta}(k,d)$ 'de  $k$  ve  $d$  için farklı değerler seçilmesi ile aşağıdaki eşitliklerden görülebilir:

- $\hat{\beta}(k,1) = (X'X)^{-1} X'y$ , EKK tahmin edici,
- $\hat{\beta}(0,d) = (X'X)^{-1} X'y$ , EKK tahmin edici,
- $\hat{\beta}(k,0) = (X'X + kI)^{-1} X'y$ , Ridge tahmin edici,
- $\hat{\beta}(1,d) = (X'X + I)^{-1} (X'y + d\hat{\beta})$ , Liu tahmin edici,
- $\hat{\beta}(\infty,d) = d\hat{\beta}$ , daraltan tahmin edici
- $\hat{\beta}(k,d) = (X'X + kI)^{-1} (X'y + kd\hat{\beta})$   
 $= (X'X + kI)^{-1} (X'X + kdI)\hat{\beta}$

formundan  $\hat{\beta}(k,d)$ 'nin  $\hat{\beta}$ 'nin her bir elemanını farklı katsayıyla büzdüğü görülmektedir. Dolayısıyla, daraltan tahmin edicinin dezavantajının üstesinden gelinmiştir. Özkale ve Kaçıranlar (2007a), iki parametrelili tahmin edicinin EKK tahmin ediciden MSE kriterine göre daha iyi olması için gerek ve yeter koşulları elde etmişlerdir. Ayrıca  $k$  ve  $d$  yanlılık parametreleri için seçim yöntemi önermişlerdir.

$R\beta = r$  olmak üzere RLS tahmin edicinin,

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta} + (X'X)^{-1} R' [R(X'X)^{-1} R']^{-1} (r - R\hat{\beta}) \quad (2.60)$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Sarkar (1992)'de kısıtlı ridge regresyon tahmin edici (RRE)'yi

$$\hat{\beta}_R(k) = W\hat{\beta}_R, \quad W = (I_p + k(X'X)^{-1})^{-1}, \quad k \geq 0$$

şeklinde tanımlamıştır. Groß (2003),  $\hat{\beta}_R(k)$ 'nin  $y$ 'nin her sonucu için  $R\hat{\beta}_R(k) = r$  eşitliğini sağlamadığını ve dolayısıyla  $R\beta = r$  eşitliğine göre bu tahmin edicinin kısıtlı bir tahmin edici olmadığını belirtmiştir. Bu fikirler onu,  $R\beta = r$  kısıtlamalarına göre kısıtlı bir tahmin edici olan

$$\hat{\beta}_r(k) = \hat{\beta}_r(k, \beta_0) - S_k^{-1}R'[RS_k^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}(k, \beta_0) - r), \quad k \geq 0 \quad (2.61)$$

olarak  $\beta$  için yeni bir ridge benzeri tahmin edici tanımlamaya yöneltmiştir. Burada  $S_k = X'X + kI_p$ ,  $\beta_0 = R'(RR')^{-1}r$ , ve  $\hat{\beta}(k, \beta_0) = S_k^{-1}(X'y + kR'(RR')^{-1}r)$ . (2.46)'da  $\hat{\beta}_R = \beta_0$  kabul edilerek  $\hat{\beta}(k, \beta_0)$  elde edilir.  $\hat{\beta}_r(k)$  için bir alternatif gösterim Kaçırınlar ve ark. (2011) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\hat{\beta}_r(k) = \hat{\beta}(k) + S_k^{-1}R'[RS_k^{-1}R']^{-1}(r - R\hat{\beta}(k)) \quad (2.62)$$

Şimdi  $d\hat{\beta}$ 'ya en yakın olan ve kısıtları sağlayan bir tahmin edici bulalım: Böylece,  $\frac{1}{k}$  bir Lagrange çarpanı,  $\lambda$ 'nın Lagrange çarpanlarının bir vektörü ve  $c$ 'nin bir sabit olduğu

$$\psi_1 = (\hat{\beta}_R - d\hat{\beta})'(\beta^* - d\hat{\beta}) + \frac{1}{k}[(y - X\hat{\beta}_R)'(y - X\hat{\beta}_R) - c] - 2\lambda'(R\hat{\beta}_R - r)$$

şeklinde tanımlanan minimizasyon probleminin çözümü olarak aşağıdaki kısıtlı iki parametrelili tahmin edici (RTPE) Özkale ve Kaçırınlar (2007) tarafından elde edilmiştir.

$$\hat{\beta}_r(k, d) = \hat{\beta}(k, d) + S_k^{-1}R'(RS_k^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}(k, d)), \quad k > 0, \quad 0 < d < 1 \quad (2.63)$$

burada  $S_k = X'X + kI$ . Bu çalışmada RTPE ile TPE nin MSE matrisine göre karşılaştırmaları da incelenmiştir.  $\psi_1$  için bir diğer minimizasyon problemi

$$\psi_2 = (y - X\hat{\beta}_R)'(y - X\hat{\beta}_R) + k[(\hat{\beta}_R - d\hat{\beta})'(\hat{\beta}_R - d\hat{\beta}) - c] - 2\lambda'(R\hat{\beta}_R - r) \text{ 'dür.}$$

şeklinde de verilebilir ve sonuçta yine  $\hat{\beta}_r(k,d)$  elde edilir. Bu durumda  $\hat{\beta}_r(k,d)$ ,  $R\beta = r$  kısıtlamalarını karşıladığında  $d\hat{\beta}$ 'ya eşit uzaklıkta olan  $\beta$  tahmin edicilerinin eşdeğerlik sınıfındaki minimum artık kareler toplamına sahiptir. Şimdi MSE kriterine göre  $\hat{\beta}(k,d)$ 'nin EKK tahmin edicisi ile karşılaştırılmasını inceleyelim:

$S_k = S + kI_p$ ,  $S_{kd} = S + kdI_p$  ve  $S = X'X$  olmak üzere  $\hat{\beta}(k,d) = S_k^{-1}S_{kd}\hat{\beta}$  gösteriminden

$$V(\hat{\beta}(k,d)) = \sigma^2 S_k^{-1} S S_{kd}^{-1} S_{kd} S_k^{-1}$$

ve

$$Bias(\hat{\beta}(k,d)) = (S_k^{-1} S_{kd} - I_p) \beta = k(d-1) S_k^{-1} \beta$$

bulunur. Böylece

$$MSE(\hat{\beta}(k,d)) = \sigma^2 S_k^{-1} S_{kd}^{-1} S_{kd} S_k^{-1} + k^2 (d-1)^2 S_k^{-1} \beta \beta' S_k^{-1} \quad (2.64)$$

elde edilir.

$$MSE(\hat{\beta}) = \sigma^2 S^{-1} \quad (2.65)$$

olduğunu biliyoruz.

**Teorem 2.15.** MSE kriterine göre  $\beta$ 'nın  $\hat{\beta}(k,d)$  tahmin edicisinin, EKK tahmin edicisinden üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\sigma^{-2} k(1-d) \beta' [k(1+d)S^{-1} + 2I]^{-1} \beta \leq 1$$

dir.

*MSE Kriterine Göre  $\hat{\beta}_r(k,d)$  ile  $\hat{\beta}(k,d)$  Karşılaştırılması*

(2.64)'de verilen  $MSE(\hat{\beta}(k,d))$  ve  $\hat{\beta}_r(k,d) = M_k S_{kd} \hat{\beta} + S_k^{-1} R' [RS_k^{-1} R']^{-1} r$  gösterimi kullanılarak  $M_k = S_k^{-1} - S_k^{-1} R' [RS_k^{-1} R']^{-1} RS_k^{-1}$  olmak üzere  $R\beta = r$  doğru kabul edildiğinde  $V(\hat{\beta}_r(k,d)) = \sigma^2 M_k S_{kd} S^{-1} S_{kd} M_k$  ve  $Bias(\hat{\beta}_r(k,d)) = M_k [S_{kd} - S_k] \beta = k(d-1) M_k \beta$  elde edilir. Buradan

$$MSE(\hat{\beta}_r(k,d)) = \sigma^2 M_k S_{kd} S^{-1} S_{kd} M_k + k^2 (d-1)^2 M_k \beta \beta' M_k \quad (2.66)$$

dir.

### **Teorem 2.16.**

MSE kriterine göre  $\beta$ 'nin  $\hat{\beta}_r(k,d)$  tahmin edicisinin,  $\hat{\beta}(k,d)$  tahmin edicisinden üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\lambda_{\max}(B^{-1} M_k S_k B S_k M_k) \leq 1$$

olmasıdır.

### *k ve d Parametrelerinin Seçimi*

Doğrusal bir regresyon modelinin ortogonal dönüşümle kanonik bir forma dönüştürülebileceği iyi bilinmektedir.  $Z = XQ$ ,  $\alpha = Q' \beta$  ve  $Q$ ,  $Z'Z = Q'X'XQ = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  şeklinde bir ortogonal matris olsun; burada  $\lambda_i$ ,  $X'X$ 'in özdeğerleridir, o zaman modelin (1.1) kanonik formunu

$$y = Z\alpha + e$$

olarak elde ederiz.

$\hat{\alpha}(k,d) = Q' \hat{\beta}(k,d)$  ve  $MSE(\hat{\alpha}(k,d)) = Q' MSE(\hat{\beta}(k,d)) Q$  olduğundan, (2.64)'den  $\hat{\alpha}(k,d)$ 'nin MSE'si

$$MSE(\hat{\alpha}(k,d)) = \sigma^2 (\Lambda + kI)^{-1} (\Lambda + kdI) \Lambda^{-1} (\Lambda + kdI) (\Lambda + kI)^{-1} + k^2 (d-1)^2 (\Lambda + kI)^{-1} \alpha \alpha' (\Lambda + kI)^{-1}$$

olarak yazılabilir.

Sabit k değeri için d'nin optimal tahmin edicisi

$$\hat{d}_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{k\hat{\alpha}_i^2 - \hat{\sigma}^2}{(\lambda_i + k)^2}}{\sum_{i=1}^p \frac{k(\hat{\sigma}^2 + \hat{\alpha}_i^2 \lambda_i)}{\lambda_i(\lambda_i + k)^2}} \quad (2.67)$$

dir.

Benzer şekilde  $k$  tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\hat{k}_{HM} = \frac{p\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^p \left[ \hat{\alpha}_i^2 - d \left( \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i} + \hat{\alpha}_i^2 \right) \right]} \quad (2.68)$$

$\hat{k}$  değerlerinin harmonik ortalamasıdır.

$$\hat{k}_{AM} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\alpha}_i^2 - d \left( \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i} + \hat{\alpha}_i^2 \right)} \quad (2.69)$$

$\hat{k}$  değerlerinin aritmetik ortalamasıdır.

$$\hat{k}_{GM} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\left( \prod_{i=1}^p \left[ \hat{\alpha}_i^2 - d \left( \frac{\hat{\sigma}^2}{\lambda_i} + \hat{\alpha}_i^2 \right) \right] \right)^{1/p}} \quad (2.70)$$

$\hat{k}$  değerlerinin geometrik ortalamasıdır.

### 2.3.4. Stokastik Kısıt Altında Ağırlıklı Tahmin Edici

(1.1) ile verilen örneklem bilgisi ve (2.15) ile verilen ön bilgi eşit ağırlığa sahip değilken, Schaffin ve Toutenburg (1990) tarafından ağırlıklı karma tahmin edici (WME)

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{WME}(w) &= (S + wR'V^{-1}R)^{-1}(X'y + wR'V^{-1}r) \\ &= \hat{\beta} + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}), \quad 0 \leq w \leq 1 \end{aligned} \quad (2.71)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $S = X'X$  ve  $w$  stokastik olmayan skaler bir ağırlıktır.

(2.71)'de  $\hat{\beta}$  yerine Liu tahmin edici yerleştirilerek elde edilen ağırlıklı karma Liu tahmin edici (WMLE);

$$\hat{\beta}_{WMLE}(w, d) = \hat{\beta}(d) + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}(d))$$

$$= (S + wR'V^{-1}R)^{-1}(F(d)X'y + wR'V^{-1}r) \quad (2.72)$$

Yang ve ark. (2009) tarafından önerilmiştir. Ayrıca,  $\hat{\beta}_{WME}(w)$  ve  $\hat{\beta}_{WMLE}(w,d)$ 'nin MSE kriterine göre karşılaştırılması Yang ve ark. (2009) tarafından verilmiştir.

Benzer şekilde (2.71)'de  $\hat{\beta}$  yerine ridge tahmin edici yerleştirilerek elde edilen ağırlıklı karma ridge tahmin edici (WMRE);

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{WMRE}(w,k) &= \hat{\beta}(k) + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}(k)) \\ &= (S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1})(T_k X'y + wR'V^{-1}r) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Li ve Yang (2011) tarafından önerilmiştir. Burada  $T_k = (I + kS^{-1})^{-1} = S_k^{-1}S = SS_k^{-1}$ ,  $S_k = S + kI$ ,  $S = X'X$ 'dir. Ayrıca,  $\hat{\beta}_{WME}(w)$  ve  $\hat{\beta}_{WMLE}(w,k)$ 'nin MSE kriterine göre karşılaştırılması yazarlar tarafından verilmiştir.

Akdeniz ve Erol (2003) hemen hemen yansız ridge tahmin edicisini (AURE)

$$\hat{\beta}_{AURE}(k) = (I - k^2 S_k^{-2})\hat{\beta} = (I + kS_k^{-1})T_k\hat{\beta} \quad (2.74)$$

elde etmiştir. Ağırlıklandırılmış karma tahmin edici ve hemen hemen yansız ridge tahmin edicinin kullanılmasıyla, ağırlıklandırılmış karma hemen hemen yansız ridge tahmin edici (WMAURE)

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{WMAURE}(w,k) &= \hat{\beta}_{AURE}(k) + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1} \times (r - R\hat{\beta}_{AURE}(k)) \\ &= (I - k^2 S_k^{-2})\hat{\beta}_{LS} + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1} \times (r - R(I - k^2 S_k^{-2})\hat{\beta}_{LS}) \\ &= (S^{-1} - wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}) \times (I - k^2 S_k^{-2})X'y \\ &\quad + wS^{-1}R'(V + wRS^{-1}R')^{-1}r \end{aligned} \quad (2.75)$$

şeklinde Liu ve ark (2013) tarafından tanımlanmış ve çeşitli kriterlere göre yeni tahmin edici ile alternatifleri karşılaştırılmıştır.

Ayrıca, Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) tarafından verilen hemen hemen yansız genelleştirilmiş Liu tahmin edicisinin bir özel versiyonu olan hemen hemen yansız Liu tahmin edicisini (AULE) Akdeniz ve Erol (2003) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\hat{\beta}_{AULE}(d) = (I - (1-d)^2(S + I)^{-2})\hat{\beta} \quad (2.76)$$

Stokastik ağırlıklandırılmış karma hemen hemen yansız ridge tahmin edici  $\tilde{\beta}_R(w, k)$  ve stokastik ağırlıklandırılmış karma hemen hemen yansız Liu tahmin edici  $\tilde{\beta}_L(w, d)$  aşağıdaki şekilde Liu ve ark. (2014) tarafından, sırasıyla (2.74) ve (2.76)'da  $\hat{\beta}$  yerine  $\hat{\beta}_{WME}(w)$  yerleştirilerek önerilmiştir ve çeşitli kriterlere göre yeni tahmin edicilerin alternatifleri ile detaylı karşılaştırmaları incelenmiştir.

$$\tilde{\beta}_R(w, k) = (I - k^2 S_k^{-2}) \hat{\beta}_{WME}(w),$$

$$\tilde{\beta}_L(w, d) = (I - (1-d)^2 (S + I)^{-2}) \hat{\beta}_{WME}(w).$$

Yukarıdaki çalışmalarda tanımlanan tahmin ediciler sezgisel olarak tanımlanmış tahmin ediciler olup daha matematiksel ve istatistiksel olarak konuya yaklaşıldığında Özbay ve Kaçıranlar (2018) de ağırlıklı iki parametrelili karma tahmin ediciyi aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Aşağıdaki minimizasyon problemi ele alınmıştır:

$$\Phi^* = (y - X\beta)'(y - X\beta) + k \left[ (\beta - d\hat{\beta})'(\beta - d\hat{\beta}) - c \right] + w(r - R\beta)' \Psi^{-1}(r - R\beta) \quad (2.77)$$

Burada  $c$  bir sabit,  $k$  bir Lagrange çarpanı ve  $w$  stokastik olmayan 0 ve 1 aralığında bulunan bir ağırlık katsayısıdır.  $\Phi^*$ 'in  $\beta$  ve  $k$  ya göre türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle normal denklemler elde edilir:

$$X'X\beta - X'y + k(\beta - d\hat{\beta}) + w(R'\Psi^{-1}R - R'\Psi^{-1}r) = 0 \quad (2.78)$$

$$(\beta - d\hat{\beta})'(\beta - d\hat{\beta}) = c \quad (2.79)$$

(2.78)'den

$$\tilde{\beta}_w(k, d) = (S_k + wR'\Psi^{-1}R)^{-1}(X'y + kd\hat{\beta} + wR'\Psi^{-1}r), \quad k > 0, \quad 0 < d < 1 \quad (2.80)$$

elde edilir.

$$(S_k + wR'\Psi^{-1}R)^{-1} = S_k^{-1} - wS_k^{-1}R'(\Psi + wRS_k^{-1}R)^{-1}RS_k^{-1}$$

ve

$$(S_k^{-1} - wS_k^{-1}R'(\Psi + wRS_k^{-1}R')^{-1}RS_k^{-1})wR'\Psi^{-1}r = wS_k^{-1}R'(\Psi + wRS_k^{-1}R')^{-1}r$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla iki parametrelili ağırlıklı karma tahmin edici (TPWME)'yi aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\tilde{\beta}_w(k, d) = \hat{\beta}(k, d) + wS_k^{-1}R'(\Psi + wRS_k^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}(k, d)) \quad (2.81)$$

TPWME'nin tanımından, bu tahmin edicinin TPE, RTPE ve WME tahmin edicilerini içermesinden dolayı daha genel bir tahmin edici sınıfı olduğu açıktır. Örneğin;

- (i)  $\tilde{\beta}_0(k, d) = \hat{\beta}(k, d)$ ,
- (ii)  $\tilde{\beta}_1(k, d) = \hat{\beta}_r(k, d)$ ,
- (iii)  $\tilde{\beta}_w(0, d) = \hat{\beta}_{WME}(w)$ .

$\hat{\beta}(k, d)$  nin de özel durumda ridge ve Liu tahmin ediciyi verdiğini bildiğimizden (2.80) den WMLE ve WMRE tahmin edicilerini de elde edebiliriz. Bu çalışmada ayrıca tanımlanan yeni tahmin edicinin WME ve TPE tahmin edicilerle MSE kriterine göre karşılaştırılmalarına yer verilmiştir. Ayrıca; Monte Carlo simülasyon çalışması ile teorik sonuçlar detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Şimdi karşılaştırma çalışmalarını ele alalım:

TPWME'nin varyansı, yanlılığı ve MSE matrisi sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$V(\tilde{\beta}_w(k, d)) = \sigma^2 \left[ A_k S_{kd} S^{-1} S_{kd} A_k + w^2 S_k^{-1} R' (\Psi + wRS_k^{-1} R')^{-1} \Psi (\Psi + wRS_k^{-1} R')^{-1} RS_k^{-1} \right]$$

$$Bias(\tilde{\beta}_w(k, d)) = -k(1-d) A_k \beta$$

ve

$$MSE(\tilde{\beta}_w(k, d)) = \sigma^2 \left[ A_k S_{kd} S^{-1} S_{kd} A_k + w^2 S_k^{-1} R' (\Psi + wRS_k^{-1} R')^{-1} \Psi (\Psi + wRS_k^{-1} R')^{-1} RS_k^{-1} \right] + k^2 (1-d)^2 A_k \beta \beta' A_k \quad (2.82)$$

burada  $S = X'X$ ,  $S_{kd} = S + kdI$  ve  $A_k = (S_k + wR'\Psi^{-1}R)^{-1}$ .

$k=0$  için WME'nin MSE'si aşağıdaki gibi bulunur.

$$MSE(\tilde{\beta}_w) = \sigma^2 A(S + w^2 R' \Psi^{-1} R) A, \quad (2.83)$$

burada  $A = (S + wR' \Psi^{-1} R)^{-1}$  dir.

Benzer şekilde  $w=0$  için TPE'nin MSE'si

$$MSE(\hat{\beta}(k, d)) = \sigma^2 S_k^{-1} S_{kd} S^{-1} S_{kd} S_k^{-1} + k^2 (1-d)^2 S_k^{-1} \beta \beta' S_k^{-1} \quad (2.84)$$

olarak elde edilir. TPWME'nin MSE açısından WME ve TPE ile karşılaştırılmasını incelemek için

$D_1 = V(\tilde{\beta}_w(k, d))$ ,  $D_2 = V(\tilde{\beta}_w)$ ,  $D_3 = V(\hat{\beta}(k, d))$ ,  $b_1 = -k(1-d)A_k \beta$  ve  $b_2 = -k(1-d)S_k^{-1} \beta$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= MSE(\tilde{\beta}_w) - MSE(\tilde{\beta}_w(k, d)) \\ &= \sigma^2 \left[ A(S + w^2 R' \Psi^{-1} R) A - A_k S_{kd} S^{-1} S_{kd} A_k - w^2 S_k^{-1} R' (\Psi + wR' S_k^{-1} R)^{-1} \Psi (\Psi + wR S_k^{-1} R')^{-1} R S_k^{-1} \right] \\ &\quad - k^2 (1-d)^2 A_k \beta \beta' A_k \\ &= \sigma^2 (D_2 - D_1) - b_1 b_1' \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= MSE(\hat{\beta}_w(k, d)) - MSE(\tilde{\beta}_w(k, d)) \\ &= \sigma^2 \left[ S_k^{-1} S_{kd} S^{-1} S_{kd} S_k^{-1} + A_k S_{kd} S^{-1} S_{kd} A_k - w^2 S_k^{-1} R' (\Psi + wR S_k^{-1} R')^{-1} \Psi (\Psi + wR S_k^{-1} R')^{-1} R S_k^{-1} \right] \\ &\quad + k^2 (1-d)^2 (S_k^{-1} \beta \beta' S_k^{-1} - A_k \beta \beta' A_k) \\ &= \sigma^2 (D_3 - D_1) + b_2 b_2' - b_1 b_1' \end{aligned} \quad (2.86)$$

denklemleri elde edilir. MSE karşılaştırmaları Farebrother [1] ile Rao ve Toutenburg [2] den aşağıdaki teorem ve tanımlar kullanılarak yapılmıştır.

**Tanım 2.1.**  $C : n \times n$  ve  $D : n \times n$  herhangi bir matris olsun. O halde  $|C - \lambda D| = 0$  denkleminin kökleri  $\lambda_i = \lambda_i^D(C)$ 'dir. Bu köklere  $D$ 'nin metriğinde  $C$ 'nin özdeğerleri denir.

**Lemma 2.1.** (Rao and Toutenburg [2]):

$C > 0$  ( $C \geq 0$ ) ve  $D > 0$  olsun. O zaman  $D - C \geq 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $\lambda_i^D(C) \leq 1$  olmasıdır.

**Lemma 2.2.** (Farebrother [1]):

$M$  pozitif tanımlı bir matris,  $c$  sıfırdan farklı bir vektör ve  $\theta$  pozitif bir skaler olsun. Daha sonra  $\theta M - cc'$  nin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul  $c'M^{-1}c < \theta$  olmasıdır.

(2.86)'da  $D_1 > 0$  ve  $D_2 > 0$  olduğundan, Lemma 2.1'den  $D_2 - D_1 \geq 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $\lambda_i^{D_2}(D_1) \leq 1$  veya  $\lambda_{\max}(D_1 - D_2^{-1}) \leq 1$  olmasıdır. Lemma 2.2'den  $\Delta_1 > 0$  olması için gerek ve yeter koşul  $b_1'(D_2 - D_1)^{-1}b_1 < \sigma^2$  olmasıdır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.17.**  $\lambda_i^{D_2}(D_1) \leq 1$  olsun. Bu durumda TPWME'nin MSE anlamında WME'den üstün olabilmesi için gerek ve yeter koşul  $b_1'(D_2 - D_1)^{-1}b_1 < \sigma^2$  olmasıdır.

**Teorem 2.18.**  $\lambda_i^{D_3}(D_1) \leq 1$  olsun. Eğer  $b_1'(D_3 - D_1)^{-1}b_1 < \sigma^2$  ise, TPWME, MSE anlamında TPE'den üstündür.

Karşılaştırma sonuçları bilinmeyen parametreler olan  $\beta$ ,  $\sigma^2$  ve ayrıca  $d$  ve  $k$  seçimlerine bağlı olduğundan, sonuçlar bu bilinmeyen parametreler açısından kullanılamaz hale gelebilir. Böylece,  $\beta$  ve  $\sigma^2$ 'nin yansız tahmin edicilerinin kullanılması,  $d$  ve  $k$ 'nin uygun tahminlerinin bulunması sonuçların uygulanabilir olmasını sağlar.

## 2.4. Hata Kareleri Ortalamasını Azaltan Yöntemler

### 2.4.1. Ridge Tahmin Ediciye Dayanan Yeni Bir Tahmin Edici

Liu (2003) de

$$\hat{\beta}_{d,k} = (X'X + I)^{-1}(X'y - d\beta^*), \quad k > 0, \quad -\infty < d < \infty \quad (2.87)$$

tahmin edicisini tanımlamıştır. Burada  $\beta^*$  herhangi bir tahmin edicidir. Pratikte  $\beta^*$  yerine EKK ya da ridge tahmin edici kullanılması önerilmiştir. Bu tahmin edici de Liu-tipi tahmin edici ya da iki parametrelili tahmin edici olarak adlandırılmıştır.

(1.1) modelinin  $d\hat{\beta} = \beta + \varepsilon'$  denklemi ile genişletip EKK yönteminin uygulanmasıyla  $\hat{\beta}(d)$  tahmin edicisinin elde edildiğini biliyoruz. Bu iki düşüncenin birleştirilmesi ile (1.1) modelini  $d\hat{\beta}(k) = \beta + \varepsilon'$  denklemi ile genişletip EKK yönteminin uygulanmasıyla

$$\hat{\beta}_{k,d} = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}(k)), k > 0, -\infty < d < \infty \quad (2.88)$$

tahmin edicisi Sakallıoğlu ve Kaçırancilar (2008) tarafından çoklu iç ilişki problemini gidermek için tanımlanmıştır. Bu tahmin edici de  $(k, d)$  sınıf tahmin edici olarak adlandırılmış bir iki parametrelili tahmin edicidir. Özel durumlarda EKK, ridge ve Liu tahmin ediciyi üreten bir tahmin edicidir.

$$\hat{\beta}_{0,1} = \hat{\beta}$$

$$\hat{\beta}_{k,1-k} = \hat{\beta}(k),$$

$$\hat{\beta}_{0,d} = \hat{\beta}(d), 0 < d < 1$$

Çalışmada ayrıca yeni önerilen tahmin edicinin ridge, Liu, EKK tahmin edicilerle ve iki özel durumda Liu-tipi tahmin edicilerle mse anlamında çok kapsamlı karşılaştırılmasına yer verilmiştir.

## 2.5. Dayanıklı Tahmin Yöntemleri

### 2.5.1. Dayanıklı Liu Tahmin Edici

Arslan ve Billor'un (2000) önerdiği dayanıklı Liu tahmin edici,

$$\hat{\beta}_{LM}(d) = [(X'X + I)^{-1}(X'X + dI)]\hat{\beta}_M, 0 < d < 1 \quad (2.89)$$

$$= F(d)\hat{\beta}_M,$$

olarak tanımlanmıştır. Burada  $\hat{\beta}_M$  bilinmeyen  $\beta$  parametresi için Huber'in M-tahmin edicisidir. Bu tahmin edici de dayanıklı ridge tahmin ediciye benzer şekilde veride hem çoklu iç ilişki hemde sapan değerler olması durumunda ortaya çıkan problemi çözmek için tanımlanmıştır. Kanonik formun kullanılmasıyla bu tahmin edici

$$\hat{\alpha}_{LM}(d) = [(\Lambda + I)^{-1}(\Lambda + dI)]\hat{\alpha}_M, 0 < d < 1 \quad (2.90)$$

şeklinde verilir. Burada  $\Lambda$ ,  $X'X$  matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen köşegen bir matristir. Arslan ve Billor (2000) yanlılık parametresi  $d$  için

$$\hat{d}_M = 1 - \hat{A}^2 \left( \sum_{i=1}^p \frac{1}{\lambda_i(\lambda_i+1)} / \sum_{i=1}^p \frac{\hat{\alpha}_{Mi}^2}{(\lambda_i+1)^2} \right) \quad (2.91)$$

önermişlerdir. Bu tahmin edicinin performansı, MSE anlamında, M-tahmin edici ve Liu tahmin edici ile karşılaştırılmış ve yanlılık parametresinin seçimine bağlı olarak daha iyi MSE'ye sahip olduğu gösterilmiştir.

ME'ye dayalı Genelleştirilmiş Liu-M (GLME) ve Hemen Hemen Yansız Genelleştirilmiş Liu-M tahmin edicileri (AUGLME) aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{\alpha}_{ML} = \left[ I - (\Lambda + I)^{-1} (I - D) \right] \hat{\alpha}_M, \quad (2.92)$$

$$\tilde{\alpha}_{ML}^* = \left[ I - (\Lambda + I)^{-2} (I - D)^2 \right] \hat{\alpha}_M, \quad (2.93)$$

GLME ve AUGLME tahmin edicileri için yanlılık parametre tahminleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\hat{d}_{mi} = \frac{\lambda_i(\hat{\alpha}_{Mi}^2 - \hat{A}^2)}{\lambda_i \hat{\alpha}_{Mi}^2 + \hat{A}^2}, \quad (2.94)$$

$$\tilde{d}_{mi}^* = 1 - \frac{A(\lambda_i+1)}{\sqrt{\lambda_i \hat{\alpha}_{Mi}^2 + \hat{A}^2}}, \quad (2.95)$$

Ayrıca, burada Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) benzer şekilde AUGLME ve GLME'nin MSE'sini minimum yapan  $d_i$ 'ler kullanılarak AUGLME nin parametre tahmininin GLME'nin parametre tahminine eşit olduğu da gösterilmiştir (Ertaş, 2015).

### 2.5.2. Dayanıklı Liu Tipi Tahmin Edici

(2.31) ve (2.32) ile verilen tahmin ediciler y-yönündeki sapan değerlerden olumsuz etkilendiğinden M-Tahmin ediciye dayalı, dayanıklı Liu-tipi tahmin ediciler (RLTE) dayanıklı ridge tahmin ediciye alternatif olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{\alpha}_M(k, d) = W_1(k, d) \hat{\alpha}_M, \quad k > 0, -\infty < d < \infty \quad (2.96)$$

$$\tilde{\alpha}_M(k, d) = W_2(k, d) \hat{\alpha}_M \quad k > 0, -\infty < d < \infty. \quad (2.97)$$

(2.33)'de LTE'nin özel durumlarında EKK ve RE'ye yakınsadığı gösterilmişti. Benzer şekilde LTME için de aşağıdaki sonuçlar;

$$\lim_{d \rightarrow 0} \hat{\alpha}_M(k, d) = \hat{\alpha}_M(k) \text{ ve } \lim_{d \rightarrow 0} \tilde{\alpha}_M(k, d) = \hat{\alpha}_M(k)$$

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \hat{\alpha}_M(k, d) = \hat{\alpha}_M \text{ ve } \lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \tilde{\alpha}(k, d) = \hat{\alpha}_M \quad (2.98)$$

elde edilir.



### 3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde diğer tahmin yöntemleri ve alternatif tahmin ediciler ile ilgili yapılmış literatürdeki çalışmalar, 1993-2024 yılları arasında yapılan çalışmalardan kronolojik sırada araştırılarak yapılan inceleme ve analizler sonunda karşılaştırma kriterlerine göre tablo olarak sunulmuştur.

Akdeniz ve Kaçıranlar (1995) tarafından literatüre kazandırılan AUGLE'ye dayanan ISI WEB OF SCIENCE'e göre 2001-2024 arasında 126 çalışma, GOOGLE AKADEMİK'e göre 189 çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazılarında yeni tahmin yöntemleri tanımlanmış, bazılarında karşılaştırma çalışmalarına, bazılarında uygulama çalışmalarına yer verilmiştir. Üç durumun ele alındığı birçok çalışma da bulunmaktadır. Bazı çalışmalarda da farklı regresyon modellerinde AUGLE ele alınmıştır. Bu çalışmalar analiz edildiğinde yanlılık azaltan yeni tahmin ediciler ve karşılaştırma kriterleri Tablo 1 ile özetlenmiştir.

Sakallıoğlu S., Kaçıranlar S. (2008) tarafından literatüre kazandırılan k-d sınıf tahmin ediciye dayanan 2008-2024 yılları arasında yapılan çalışmalar ISI WEB OF SCIENCE ve GOOGLE AKADEMİK'te araştırılmıştır. Yapılan çalışmalardan bazılarında yeni tahmin yöntemleri tanımlanmış olup bu çalışmalar analiz edildiğinde yanlılık azaltan k-d sınıf tahmin ediciye dayanan yeni alternatif tahmin ediciler ve karşılaştırma kriterleri Tablo 2 ile özetlenmiştir.

Kaçıranlar ve ark. (1999) tarafından kısıtlı Liu tahmin edici, Kaçıranlar ve Sakallıoğlu (2001) tarafından r-d sınıf tahmin edici, Özkale ve Kaçıranlar (2007) tarafından iki parametrelilik kısıtlı tahmin edici ve Özbay ve Kaçıranlar (2018) tarafından iki parametrelilik ağırlıklı karma tahmin edici literatüre kazandırılmıştır. Bu tahmin edicilere dayanan çalışmalar ISI WEB OF SCIENCE ve GOOGLE AKADEMİK'te araştırılmıştır. Yapılan çalışmalardan bazılarında yeni tahmin yöntemleri tanımlanmış olup bu çalışmalar analiz edildiğinde kısıtlı alternatif tahmin edicilere dayanan yeni alternatif tahmin yöntemleri ve karşılaştırma kriterleri sırasıyla Tablo 3, Tablo 4, Tablo 5 ve Tablo 6 ile özetlenmiştir.

Arslan ve Billor (2000) tarafından dayanıklı Liu tahmin edici ilk kez literatüre kazandırılmıştır. 2000-2024 yılları arasında yapılan çalışmalar ISI WEB OF SCIENCE ve GOOGLE AKADEMİK'te araştırılmıştır. Yapılan çalışmalardan bazılarında yeni tahmin yöntemleri tanımlanmış olup bu çalışmalar analiz edildiğinde dayanıklı Liu tahmin ediciye dayanan yeni alternatif tahmin yöntemleri ve karşılaştırma kriterleri Tablo 7 ile özetlenmiştir.



#### 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde diğer tahmin yöntemleri ve alternatif tahmin ediciler ile ilgili yapılmış çalışmalar, literatürde 1993-2024 yılları arasında yapılan çalışmalardan kronolojik sırada araştırılarak incelenmiştir. Yapılan analiz sonucunda elde edilen sonuçlar tahmin edici ve karşılaştırma kriterlerine göre tablo olarak sunulmuştur.

Tablo 1. Yanlılık Azaltan Bazı Tahmin Yöntemleri

|   | MAKALELER  | TAHMİN EDİCİLER   | KRİTER                                 |
|---|--|---|--|
| 1 | Almost Unbiased Generalized Liu Estimator (AUGLE)<br>Akdeniz, F., & Kaçiranlar, S. (1995).<br>$\tilde{\beta}_L^* = (I + (X'X + I)^{-1}(I - D))\hat{\beta}_{GL},$ $= (I - (X'X + I)^{-2}(I - D)^2)\hat{\beta},$ $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$ | AUGLE, GLE, EKK   | MSE                                    |
| 2 | The examination and analysis of residuals for some biased estimators in linear regression<br>Akdeniz, F. (2001).   | AUGLE,<br>Genelleştirilmiş<br>invers tahmin edici,<br>PCR, LE | MSE<br>Rezüdü MSE                      |
| 3 | Mean squared error matrix comparisons of some biased estimators in linear regression<br>Akdeniz, F., & Erol, H. (2003).  | AUGLE, AUGRE  | MSE                                    |
| 4 | New biased estimators under the LINEX loss function<br>Akdeniz, F. (2004).   | AUGLE, GLE,<br>uyarlanabilir GLE,<br>AUGLE, LE                | LINEX<br>kayıp<br>fonksiyonu           |
| 5 | Generalized Liu type estimators under Zellner's balanced loss function<br>Akdeniz, F., Wan, A. T., & Akdeniz, E. (2005).   | Uyarlanabilir<br>AUGLE,<br>Uyarlanabilir GLE,<br>RRE, LTE     | Zellner's<br>balanced loss<br>function |
| 6 | Mean Squared Error Matrix Comparisons of Some Restricted Almost Unbiased Estimators<br>Yang, H., Li, Y., & Xu, J. (2009).  | Kısıtlı AULE, kısıtlı<br>AURE                                 | MSE                                    |
| 7 | More on the Preliminary Test Estimator in Almost Unbiased Liu Regression<br>Li, Y., Yang, H., & Xu, J. (2011).   | Ön test AULE  | Kuadratik<br>bias, MSE                 |

|    |   |   |                      |
|----|---|---|----------------------|
| 8  | On the Weighted Mixed Almost Unbiased Ridge Estimator in Stochastic Restricted Linear Regression<br>Liu, C.L., Yang, H., Wu, J.B. (2013)            | Ağırlıklı karma AURE  | Kuadratik bias, MSE  |
| 9  | Efficiency of an almost unbiased two parameter estimator in linear regression model<br>Wu, J., & Yang, H. (2013).                                   | AU-TPE<br>Özkale ve Kaçiranlar (2017)                                     | mse                  |
| 10 | Two Classes of Almost Unbiased Type Principal Component Estimators in Linear Regression Model<br>Li, Y., & Yang, H. (2014).                         | AU-Ridge Tipi PCR,<br>AU-Liu Tipi PCR                                     | MSE                  |
| 11 | Two Kinds of Weighted Biased Estimators in Stochastic Restricted Regression Model<br>Liu, C., Jiang, H., Shi, X., & Liu, D. (2014).                 | Ağırlıklı karma AUE   | Kuadratik bias, MSE  |
| 12 | Modified Restricted Almost Unbiased Liu Estimator in Linear Regression Model<br>Wu, J. (2016).  | Uyarlanmış Kısıtlı AULE   | MSE                  |
| 13 | Positive-rule stein-type almost unbiased ridge estimator in linear regression model<br>Liu, C., & Yang, H. (2016).                                  | Pozitif Kural-Stein Tipi-AURE   | Kuadratik bias, risk |
| 14 | Generalized preliminary test stochastic restricted estimator in the linear regression model<br>Arumairajan, S., & Wijekoon, P. (2016).              | AURE, AULE,<br>Stokastik Kısıtlı AURE, AULE                               | MSE                  |
| 15 | Modified Almost Unbiased Liu Estimator in Linear Regression Model<br>Arumairajan, S., & Wijekoon, P. (2017).  | AULE, RE,<br>LE MSE   | MSE                  |
| 16 | Efficiency of two classes of stochastic restricted almost unbiased type principal component estimators in linear regression model<br>Li, Y. (2018). | Stokastik kısıtlı AU-Ridge Tipi-PCR,<br>Stokastik kısıtlı AU-Liu Tipi-PCR | MSE                  |
| 17 | On the restricted almost unbiased Liu estimator in the logistic regression model<br>Wu, J., Asar, Y., & Arashi, M. (2018).                          | Kısıtlı AULE  | MSE                  |
| 18 | A new class of almost unbiased estimator<br>Huang, J., Ma, L., & Wang, L. (2018).   | AU-TP-PCR   | MSE                  |

|    |  |  |                            |
|----|--|--|----------------------------|
| 19 | Performance of the restricted almost unbiased type principal components estimators in linear regression model<br>Li, Y., & Yang, H. (2019).        | Kısıtlı AU-Ridge<br>Tipi-PCR, Kısıtlı<br>AU-Liu Tipi-PCR | MSE                        |
| 20 | Preliminary test almost unbiased two-parameter estimators with student's t errors and conflicting test statistics<br>Chang, X., & Wang, H. (2019). | Ön test AU-TP  | Bias,<br>kuadratik<br>risk |
| 21 | An almost unbiased Liu-type estimator in the linear regression model<br>Erdugan, F. (2022).  | AU-LTE   | MSE                        |
| 22 | Almost unbiased modified ridge-type estimator: An application to tourism sector data in Egypt<br>Omara, T. M. (2022).                              | AU-Uyarlanmış RTE  | MSE, mse,<br>GCV           |
| 23 | An Almost Unbiased Regression Estimator: Theoretical Comparison and Numerical Comparison in Portland Cement Data<br>Ng, S. F. (2023).              | k-AUE  | MSE                        |

Tablo 2. k-d sınıf tahmin ediciye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri

|   | MAKALELER  | TAHMİN<br>EDİCİLER            | KRİTER |
|---|--|-------------------------------|--------|
| 1 | k-d sınıf tahmin edici<br>Sakallıoğlu S., Kaçıranlar S. (2008).<br>$\tilde{\beta}(k, d) = (X'X + I)^{-1}(X'y + d\hat{\beta}(k)),$<br>$k > 0, -\infty < d < \infty$ | RE, LE, EKK                   | MSE    |
| 2 | A stochastic restricted k-d class estimator<br>Yang, H., & Wu, J. (2012).  | SR-k-d sınıf, SRLE            | MSE    |
| 3 | Modified Liu-Type Estimator Based on (rk) Class Estimator<br>Alheety, M. I., & Golam Kibria, B. M. (2013).   | r-k, r-d, k-d, LTE,<br>LE, RE | MSE    |
| 4 | Efficiency of a stochastic restricted two-parameter estimator in linear regression<br>Li, Y., & Yang, H. (2014).   | SR-TPE, TPE, ME               | MSE    |

|    |   |                            |             |
|----|---|----------------------------|-------------|
| 5  | A Generalized Stochastic Restricted Ridge Regression Estimator<br>Alheety, M. I., & Kibria, B. G. (2014).                                       | ME, RE, k-d, SRRE,<br>SRLE | MSE         |
| 6  | A new Liu-type estimator<br>Kurnaz, F. S., & Akay, K. U. (2015).  | LTE, RE, LE                | MSE         |
| 7  | Two New Ridge Parameters and A Guide for Selecting an Appropriate Ridge Parameter in Linear Regression<br>Göktaş, A., & Sevinç, V. (2016).      | RE, TPE                    | mse         |
| 8  | Matrix mean squared error comparisons of some biased estimators with two biasing parameters<br>Kurnaz, F. S., & Akay, K. U. (2018).             | TPE, LTE, k-d              | MSE         |
| 9  | Modifying Two-Parameter Ridge Liu Estimator Based on Ridge Estimation<br>Omara, T. M. (2019).   | TPE, RE, LE                | MSE         |
| 10 | Combining modified ridge-type and principal component regression estimators<br>Lukman, A. F., Ayinde, K., Oludoun, O., & Onate, C. A. (2020).   | Uyarlanmış RTE,<br>PCR     | MSE         |
| 11 | A New Ridge-Type Estimator for the Linear Regression Model: Simulations and Applications<br>Kibria, B. G., & Lukman, A. F. (2020).              | RE, LE                     | MSE         |
| 12 | The modified Liu-ridge-type estimator: a new class of biased estimators to address multicollinearity<br>Aslam, M., & Ahmad, S. (2022).          | Uyarlanmış LTE,<br>RTE     | MSE         |
| 13 | Another proposal about the new two-parameter estimator for linear regression model with correlated regressors<br>Ahmad, S., & Aslam, M. (2022). | N-TPE, TPE, LE             | MSE         |
| 14 | Modified Two Parameter Regression Estimator for Solving the Multicollinearity<br>Dawoud, I. (2022).   | Uyarlanmış TPE             | MSE         |
| 15 | A new ridge-type estimator for the linear regression model with correlated regressors<br>Owolabi, A. T., Ayinde, K., & Alabi, O. O. (2022).     | RTE, TP-RTE                | Monte Carlo |

|    |   |                                       |     |
|----|---|---------------------------------------|-----|
| 16 | A new hybrid estimator for linear regression model analysis: Computations and simulations<br>Shewa, G. A., & Ugwuowo, F. I. (2023). | Uyarlanmış Ridge<br>Tipi Tahmin Edici | MSE |
|----|---|---------------------------------------|-----|

Tablo 3. Kısıtlı Liu Tahmin Ediciye Dayanan Kısıtlı Alternatif Tahmin Yöntemleri

|   | MAKALELER   | TAHMİN<br>EDİCİLER | KRİTER |
|---|---|--------------------|--------|
| 1 | Restricted Liu Estimator (RLE)<br>Kaçıranlar, S., Sakallıoğlu, S., Akdeniz, F., Styan, GPH. and Werner, HJ. (1999).<br>$\hat{\beta}_{rd} = F_d \hat{\beta}_R,$<br>$F_d = (S + I)^{-1}(S + dI), \quad S = X'X$ | RLE, RLS, EKK      | mse    |
| 2 | On the restricted Liu estimator in the Gauss-Markov model<br>Torigoe, N., & Ujiie, K. (2006).   | RLE, RLS           | MSE    |
| 3 | Improvement of the Liu estimator in linear regression model<br>Hubert, M. H., & Wijekoon, P. (2006).  | SRLE, ME           | MSE    |
| 4 | The research on two kinds of restricted biased estimators based on mean squared error matrix<br>Yang, H., & Zhang, C. (2007).   | RLE (2), RRE       | MSE    |
| 5 | An alternative stochastic restricted Liu estimator in linear regression<br>Yang, H., & Xu, J. (2009).   | SRLE (2), ME       | MSE    |
| 6 | Improvement of the Liu Estimator in Weighted Mixed Regression<br>Yang, H., Chang, X., & Liu, D. (2009).   | WMLE, LE, ME       | MSE    |
| 7 | More on the Bias and Variance Comparisons of the Restricted Almost Unbiased Estimators<br>Xu, J., & Yang, H. (2011).  | RAULE, RAURE       | MSE    |

|    |   |   |     |
|----|---|---|-----|
| 8  | A stochastic restricted k-d class estimator<br>Yang, H., & Wu, J. (2012).<br><br>k-d class estimator [Sakallıoğlu, S., & Kaçıranlar, S. (2008). A new biased estimator based on ridge estimation. Statistical Papers, 49, 669-689.] | SR k-d sınıf tahmin edici   | MSE |
| 9  | The relative efficiency of the restricted estimators in linear regression models<br>Özkale, M. R. (2014).   | RTPE, RLS, RLE  | MSE |
| 10 | Modified Restricted Almost Unbiased Liu Estimator in Linear Regression Model<br>Wu, J. (2016).  | Uyarlanmış Kısıtlı AULE   | MSE |
| 11 | More on the two-parameter estimation in the restricted regression<br>Li, Y., & Yang, H. (2016).   | Yeni RTPE, RTPE, RLE, RRE   | MSE |
| 12 | Stochastic Restricted Liu Type estimator for SUR model<br>Omara, T. M. (2018).  | SUR model için SR-LTE, SR-RE  | MSE |
| 13 | On the Stochastic Restricted Modified Almost Unbiased Liu Estimator in Linear Regression Model<br>Arumairajan, S. (2018).   | EKK, ME, RE, LE, AULE, SRLE, Modified Almost Unbiased Liu Estimator (MAULE) | MSE |
| 14 | A new stochastic restricted Liu-type estimator in linear regression model<br>Yıldız, N. (2019).   | SR-LTE, ME  | MSE |

Tablo 4. r-d Sınıf Tahmin Ediciye Dayanan Kısıtlı Alternatif Tahmin Yöntemleri

|   | MAKALELER   | TAHMİN EDİCİLER                | KRİTER |
|---|---|--------------------------------|--------|
| 1 | r-d Class Estimator<br>Kaçıranlar, S., & Sakallıoğlu, S. (2001).<br>$\hat{\beta}(r, d) = T_r(T_r' X' X T_r + I_r)^{-1}(T_r' X' y + d T_r' \hat{\beta}_r)$ | r-d sınıf tahmin edici,<br>PCR | mse    |
| 2 | Using Liu-type estimator to combat collinearity<br>Liu, K. (2003).  | Liu-Tipi Tahmin Edici          | mse    |

|    |  |                                   |       |
|----|--|-----------------------------------|-------|
| 3  | A new biased estimator based on ridge estimation<br>Sakallıoğlu, S., & Kaçıranlar, S. (2008).  | k-d sınıf tahmin edici, RE, EKK   | MSE   |
| 4  | A New Biased Estimator Derived from Principal Component Regression Estimator<br>Ng, S. F., Low, H. C., & Quah, S. H. (2010).                 | Liu-Tipi Tahmin Edici-PCR         | MSE   |
| 5  | Adjustive Liu-Type Estimators in Linear Regression Models<br>Rong, J. Y. (2010).   | Düzeltilmiş Liu-Tipi Tahmin Edici | MSE   |
| 6  | Improved Liu estimator in a linear regression model<br>Liu, X. Q. (2011).  | Geliştirilmiş Liu tahmin edici    | PRESS |
| 7  | On the restricted almost unbiased estimators in linear regression<br>Xu, J., & Yang, H. (2011).  | RAURE, RAULE                      | MSE   |
| 8  | On the restricted r-k class estimator and the restricted r-d class estimator in linear regression<br>Xu, J., & Yang, H. (2011).              | Kısıtlı r-d, Kısıtlı r-k          | MSE   |
| 9  | Combining two-parameter and principal component regression estimators<br>Chang, X., & Yang, H. (2012).                                       | TP-PCR, r-d, r-k                  | MSE   |
| 10 | Combining the unrestricted estimators into a single estimator and a simulation study on the unrestricted estimators<br>Özkale, M. R. (2012). | EKK, PCR, r-d, r-k                | mse   |
| 11 | On the Performance of Principal Component Liu-Type Estimator under the Mean Square Error Criterion<br>Wu, J. (2013).                         | PCR-Liu                           | MSE   |
| 12 | Efficiency of the restricted r-d class estimator in linear regression<br>Wu, J. (2014).  | Kısıtlı r-d, PCR, r-d             | BLF   |
| 13 | New shrinkage-type estimators in a linear regression model when multicollinearity is severe<br>Liu, X. Q., Gao, F., & Wu, X. Q. (2014).      | Yeni Daraltıcı Tahmin Edici       | MSE   |

|    |   |                                    |          |
|----|---|------------------------------------|----------|
| 14 | On the Stochastic Restricted r-k Class Estimator and Stochastic Restricted r-d Class Estimator in Linear Regression Model<br>Wu, J. (2014).   | Stokastik kısıtlı r-d,<br>r-k      | MSE      |
| 15 | Combining the Liu-type estimator and the principal component regression estimator<br>İnan, D. (2015).   | Liu Tipi-PCR                       | MSE      |
| 16 | On a principal component two-parameter estimator in linear model with autocorrelated errors<br>Huang, J., & Yang, H. (2015).                  | PCR-TP                             | MSE      |
| 17 | r-d Class Estimator Under Misspecification<br>Üstündağ Şiray, G. (2015).  | r-d, LE, PCR                       | MSE      |
| 18 | On the Principal Component Liu-type Estimator in Linear Regression<br>Wu, J., & Yang, H. (2015).  | Liu Tipi-PCR                       | MSE      |
| 19 | A restricted class estimator in the mixed regression model with autocorrelated disturbances<br>Chandra, S., & Sarkar, N. (2016).              | Stokastik kısıtlı<br>ridge, ME, RE | MSE      |
| 20 | More on the two-parameter estimation in the restricted regression<br>Li, Y., & Yang, H. (2016).   | Kısıtlı TP, RRE, RLE               | MSE      |
| 21 | Combining modified ridge-type and principal component regression estimators<br>Lukman, A. F., Ayinde, K., Oludoun, O., & Onate, C. A. (2020). | Uyarlanmış ridge<br>tipi, PCR      | EMSE     |
| 22 | On the mixed Kibria-Lukman estimator for the linear regression model<br>Chen, H., & Wu, J. (2022).  | Karma K-L tahmin<br>edici, ME, EKK | EMSE     |
| 23 | The extended two-type parameter estimator in linear regression model<br>Zeinal, A. (2023).  | TPE, GRE, GLE,<br>EKK              | MSE, mse |

Tablo 5. TPE'ye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri

|    | MAKALELER   | TAHMİN EDİCİLER                          | KRİTER |
|----|---|--|--------|
| 1  | <p>İki Parametrelî Tahmin Edici (TPE-1)</p> $\hat{\beta}(k, d) = (X'X + kI)^{-1}(X'y + kd\hat{\beta}),$ $k > 0, \quad 0 < d < 1$ <p>Kısıtlı İki Parametrelî Tahmin Edici (TPRE)</p> $\hat{\beta}_r(k, d) = \hat{\beta}(k, d) + S_k^{-1}R'(RS_k^{-1}R')^{-1}(r - R\hat{\beta}(k, d)),$ $k > 0, \quad 0 < d < 1$ <p>Özkale, M. R., &amp; Kaçiranlar, S. (2007).</p> | TPE, RTPE                                | MSE    |
| 2  | <p>A New Two-Parameter Estimator in Linear Regression</p> <p>Yang, H., &amp; Chang, X. (2010).</p>  | EKK, RE, LE, TPE                         | MSE    |
| 3  | <p>A Stochastic Restricted Two-Parameter Estimator in Linear Regression Model</p> <p>Yang, H., &amp; Cui, J. (2011).</p>  | ME, TPE                                  | MSE    |
| 4  | <p>Two kinds of restricted modified estimators in linear regression model</p> <p>Li, Y., &amp; Yang, H. (2011).</p>   | Kısıtlı uyarlanmış ridge, Liu            | MSE    |
| 5  | <p>Liu and Ridge Estimators-A Comparison</p> <p>Gruber, M. H. (2012).</p>   | Bayes tahmin edici, Liu-Tipi, Liu, Ridge | MSE    |
| 6  | <p>Modified and Restricted r-k Class Estimators</p> <p>Üstündağ Şiray, G. (2014).</p>   | Uyarlanmış r-k sınıf, Kısıtlı r-k sınıf  | MSE    |
| 7  | <p>An Unbiased Two-Parameter Estimation with Prior Information in Linear Regression Model</p> <p>Wu, J. (2014).</p>   | Yansız TPE, TPE                          | MSE    |
| 8  | <p>A new Liu-type estimator</p> <p>Kurnaz, F. S., &amp; Akay, K. U. (2015).</p>   | Yeni Liu-Tipi Tahmin Edici, LE, RRE, EKK | MSE    |
| 9  | <p>On the Principal Component Liu-type Estimator in Linear Regression</p> <p>Wu, J., &amp; Yang, H. (2015).</p>   | PCR-LTE, PCR, LTE                        | MSE    |
| 10 | <p>A restricted class estimator in the mixed regression model with autocorrelated disturbances</p> <p>Chandra, S., &amp; Sarkar, N. (2016).</p>   | ME, RRE, PCR, SRRE                       | MSE    |

|    |  |                                |     |
|----|--|--------------------------------|-----|
| 11 | More on the two-parameter estimation in the restricted regression<br>Li, Y., & Yang, H. (2016).  | Yeni RTPE, RRRE,<br>RLE        | MSE |
| 12 | The Almon two parameter estimator for the distributed lag models<br>Özbay, N., & Kaçiranlar, S. (2017).  | TPE, Almon Tahmin<br>Edici     | MSE |
| 13 | On the restricted almost unbiased two-parameter estimator in linear regression model<br>Huang, H., Wu, J., & Yi, W. (2017).  | RAUTPE, TPE                    | MSE |
| 14 | Estimation in a linear regression model with stochastic linear restrictions: a new two-parameter-weighted mixed estimator<br>Özbay, N., & Kaçiranlar, S. (2018).   | WMTPE, TPE,<br>WME             | MSE |
| 15 | A new two-parameter estimator for the inverse Gaussian regression model with application in chemometrics<br>Shamany, R., Alobaidi, N. N., & Algamal, Z. Y. (2019). | MLE, TPE                       | MSE |
| 16 | Improved two-parameter estimators for the negative binomial and Poisson regression models<br>Kandemir Çetinkaya, M., & Kaçiranlar, S. (2019).                      | NBRE, PRE, TPE                 | MSE |
| 17 | Performance of the restricted almost unbiased type principal components estimators in linear regression model<br>Li, Y., & Yang, H. (2019).                        | RAUE, PCR, RTE,<br>LTE         | MSE |
| 18 | Modifying Two-Parameter Ridge Liu Estimator Based on Ridge Estimation<br>Omara, T.M. (2019).   | Uyarlanmış TPRE,<br>TPLE       | MSE |
| 19 | A Modified New Two-Parameter Estimator in a Linear Regression Model<br>Lukman, A. F., Ayinde, K., Siok Kun, S., & Adewuyi, E. T. (2019).                           | Uyarlanmış TPE,<br>TPE, RE, LE |     |
| 20 | A New Biased Estimator to Combat the Multicollinearity of the Gaussian Linear Regression Model<br>Dawoud, I., & Kibria, B. G. (2020).                              | Dawoud-Kibria<br>Tahmin Edici  | MSE |

|    |  |                                |     |
|----|--|--------------------------------|-----|
| 21 | Combining modified ridge-type and principal component regression estimators<br>Lukman, A. F., Ayinde, K., Oludoun, O., & Onate, C. A. (2020).  | Uyarlanmış RTE,<br>PCR         | MSE |
| 22 | Modified One-Parameter Liu Estimator for the Linear Regression Model<br>Lukman, A. F., Kibria, B. G., Ayinde, K., & Jegede, S. L. (2020).  | Uyarlanmış LE, RE,<br>LE       | MSE |
| 23 | A New Ridge-Type Estimator for the Linear Regression Model: Simulations and Applications<br>Kibria, B. G., & Lukman, A. F. (2020).   | RE, LE                         | MSE |
| 24 | New Versions of Liu-type Estimator in Weighted and non-weighted Mixed Regression Model<br>Alheety, M. I. N. (2020).  | N-LTE                          | MSE |
| 25 | Usage of the GO estimator in high dimensional linear models<br>Genç, M., & Özkale, M. R. (2021).   | GO, LASSO, TPE,<br>RE          | mse |
| 26 | Robust Dawoud-Kibria estimator for handling multicollinearity and outliers in the linear regression model<br>Dawoud, I., & Abonazel, M. R. (2021).   | Dawoud-Kibria<br>Tahmin Edici  | MSE |
| 27 | Defining a two-parameter estimator: a mathematical programming evidence<br>Üstündağ Şiray, G., Toker, S., & Özbay, N. (2021).  | Yeni TPE                       | MSE |
| 28 | The modified Liu-ridge-type estimator: a new class of biased estimators to address multicollinearity<br>Aslam, M., & Ahmad, S. (2022).   | Uyarlanmış LTE,<br>RTE         | MSE |
| 29 | Another proposal about the new two-parameter estimator for linear regression model with correlated regressors<br>Ahmad, S., & Aslam, M. (2022).  | N-TPE, TPE, LE                 | MSE |
| 30 | Development of robust Özkale-Kaçıranlar and Yang-Chang estimators for regression models in the presence of multicollinearity and outliers<br>Awwad, F. A., Dawoud, I., & Abonazel, M. R. (2022). | TPE, Dayanıklı<br>Tahmin Edici | MSE |

|    |  |   |             |
|----|--|---|-------------|
| 31 | Comparison of Liu and two parameter principal component estimator to combat multicollinearity<br>Kaçıranlar, S., Özbay, N., Özkan, E., & Güler, H. (2022). | LE, TPE-PCR                             | MSE         |
| 32 | Modified Two Parameter Regression Estimator for Solving the Multicollinearity<br>Dawoud, I. (2022).  | Uyarlanmış TPE                          | MSE         |
| 33 | Almost unbiased modified ridge-type estimator: An application to tourism sector data in Egypt<br>Omara, T. M. (2022).                                      | AU-Uyarlanmış-RTE, AUE                  | MSE         |
| 34 | Weighted ridge and Liu estimators for linear regression model<br>Babar, I., & Chand, S. (2022).  | WRE, WLE                                | MSE         |
| 35 | On the mixed Kibria-Lukman estimator for the linear regression model<br>Chen, H., & Wu, J. (2022).   | Karma Kibria-Lukman                     | MSE         |
| 36 | A new ridge-type estimator for the linear regression model with correlated regressors<br>Owolabi, A. T., Ayinde, K., & Alabi, O. O. (2022).                | RTE, TP-RTE                             | Monte Carlo |
| 37 | A new biased regression estimator: Theory, simulation and application<br>Dawoud, I., Lukman, A. F., & Haadi, A. R. (2022).                                 | Yeni Yanlı Tahmin Edici                 | MSE         |
| 38 | The generalized new two-type parameter estimator in linear regression model<br>Zeinal, A., & Azmoun Zavié Kivi, M. R. (2023).                              | N-TPE, GRE, GLE                         | MSE         |
| 39 | On the jackknife Kibria-Lukman estimator for the linear regression model<br>Ugwuowo, F. I., Oranye, H. E., & Arum, K. C. (2023).                           | Kibria-Lukman Tahmin Edici              | MSE         |
| 40 | Inverse Gaussian Liu-type estimator<br>Bulut, Y. M. (2023).  | Liu-Tipi Tahmin Edici, ML, RE, LE       | MSE         |
| 41 | A new improved estimator for reducing the multicollinearity effects<br>Dawoud, I. (2023).  | Yeni Uyarlanmış Ridge Tipi Tahmin Edici | MSE         |

|    |  |   |     |
|----|--|---|-----|
| 42 | On modified unbiased two-parameter estimator<br>Lattef, M. N., & Alheety, M. I. (2023).  | Uyarlanmış yansız<br>TPE  | MSE |
| 43 | The extended two-type parameter estimator in<br>linear regression model<br>Zeinal, A. (2023).  | TPE, GRE, GLE   | MSE |
| 44 | A combination of ridge and Liu regressions for<br>extreme learning machine<br>Yıldırım, H., & Özkale, M. R. (2023).  | RE, LE  | mse |
| 45 | A new hybrid estimator for linear regression model<br>analysis: Computations and simulations<br>Shewa, G. A., & Ugwuowo, F. I. (2023).   | Kibria-Lukman<br>Tahmin Edici,<br>Uyarlanmış Ridge<br>Tipi Tahmin Edici | MSE |
| 46 | Kibria-Lukman-Type Estimator for Regularization<br>and Variable Selection with Application to Cancer<br>Data<br>Lukman, A. F., Allohibi, J., Jegede, S. L., Adewuyi,<br>E. T., Oke, S., & Alharbi, A. A. (2023). | Kibria-Lukman, Liu-<br>LASSO  | MSE |
| 47 | New Bayesian Approach to the Estimation in<br>Simultaneous Equations Model<br>Toker, S., & Özbay, N. (2023).   | İki Aşamalı EKK   | MSE |

Tablo 6. TP-WME'ye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri

|   | <b>MAKALELER</b>  | <b>TAHMİN<br/>EDİCİLER</b> | <b>KRİTER</b> |
|---|---|----------------------------|---------------|
| 1 | İki Parametrelili Ağırlıklı Karma Tahmin Edici<br>(TPWME)<br>$\tilde{\beta}_w(k, d) = \hat{\beta}(k, d) + wS_k^{-1}R'(\Psi + wRS_k^{-1}R')^{-1}$ $(r - R\hat{\beta}(k, d))$ $k > 0, \quad 0 < d < 1$<br>Özbay, N., & Kaçiranlar, S. (2018). | TPE, TPWME                 | MSE           |
| 2 | Optimal determination of the parameters of some<br>biased estimators using genetic algorithm<br>Tekeli, E., Kaçiranlar, S., & Özbay, N. (2019).   | RE, LE, TPE                | MSE           |
| 3 | New Versions of Liu-type Estimator in Weighted<br>and non-weighted Mixed Regression Model<br>Alheety, M. I. N. (2020).  | LTE, WLTE                  | MSE           |

|   |  |                   |     |
|---|--|-------------------|-----|
| 4 | On the mixed Kibria-Lukman estimator for the linear regression model<br>Chen, H., & Wu, J. (2022).             | Kibria-Lukman, ME | MSE |
| 5 | Two parameter weighted mixed estimator in linear measurement error models<br>Ghapani, F., & Babadi, B. (2022). | TPE, TPWME        | MSE |

Tablo 7. Dayanıklı Liu Tahmin Edici'ye Dayanan Alternatif Tahmin Yöntemleri

|    | MAKALELER   | TAHMİN EDİCİLER   | KRİTER   |
|----|---|---|----------|
| 1  | Dayanıklı Liu<br>$\hat{\beta}_{LM} = F_d \hat{\beta}_M$ ,<br>$\hat{\beta}_M$ M-tahmin edici (Huber, 1981)<br>Arslan, O., & Billor, N. (2000). | RE, LE, EKK   | MSE      |
| 2  | Robust model selection criteria for robust Liu estimator<br>Çetin, M. (2009).   | LE, LTE   | MSE      |
| 3  | Adjustive Liu-Type Estimators in Linear Regression Models<br>Rong, J. Y. (2010).  | LTE, GLE  | PRESS    |
| 4  | Improved Liu estimator in a linear regression model<br>Liu, X. Q. (2011).   | LE, EKK   | PRESS    |
| 5  | Robust ridge and robust Liu estimator for regression based on the LTS estimator<br>Kan, B., Alpu, Ö., & Yazıcı, B. (2013).                    | LTS, Dayanıklı LE, Dayanıklı RE                                   | MSE, mse |
| 6  | New shrinkage-type estimators in a linear regression model when multicollinearity is severe<br>Liu, X. Q., Gao, F., & Wu, X. Q. (2014).       | LE, EKK   | MSE      |
| 7  | A Generalized Diagonal Ridge-type Estimator in Linear Regression<br>Liang, F. B., & Lan, Y. X. (2014).  | RE, EKK   | MSE      |
| 8  | Robust Winsorized Shrinkage Estimators for Linear Regression Model<br>Jadhav, N. H., & Kashid, D. N. (2014).                                  | RE, LE, EKK   | MSE      |
| 9  | Robust Linearized Ridge M-estimator for Linear Regression Model<br>Jadhav, N. H., & Kashid, D. N. (2016).                                     | RRE, LE, M-Tahmin edici   | MSE      |
| 10 | Robust model selection criteria for robust <i>S</i> and <i>LTS</i> estimators<br>Çetin, M. (2016).  | Liu TİPİ-S, Liu tipi-LTS  | MSE      |
| 11 | Robust Liu-type estimator for regression based on M-estimator<br>Ertaş, H., Kaçıranlar, S., & Güler, H. (2017).                               | Dayanıklı Liu tipi-M tahmin edici, LTE, Ridge tipi-M tahmin edici | MSE      |
| 12 | A robust Liu regression estimator<br>Filzmoser, P., & Kurnaz, F. S. (2018).   | M- Tahmin edici, LE   | MSE      |

|    |  |                                  |             |
|----|--|----------------------------------|-------------|
| 13 | Ridge Least Squares Ratio Estimator for Linear Regression Model<br>Jadhav, N. H., & Kashid, D. N. (2018).  | EKK, RE                          | MSE         |
| 14 | Ridge-Type MML Estimator in the Linear Regression Model<br>Acıtaş, S., & Şenoğlu, B. (2019).   | EKK, RE, M-Tahmin edici          | MSE         |
| 15 | Robust regression: Testing global hypotheses about the slopes when there is multicollinearity or heteroscedasticity<br>Wilcox, R. R. (2019).   | EKK, Dayanıklı RE                | Monte Carlo |
| 16 | Robust Dawoud-Kibria estimator for handling multicollinearity and outliers in the linear regression model<br>Dawoud, I., & Abonazel, M. R. (2021).   | Dawoud-Kibria Tahmin Edici       | MSE         |
| 17 | Development of robust Özkale-Kaçıranlar and Yang-Chang estimators for regression models in the presence of multicollinearity and outliers<br>Awwad, F. A., Dawoud, I., & Abonazel, M. R. (2022). | TPE, Dayanıklı Tahmin Edici      | MSE         |
| 18 | Robust-stein estimator for overcoming outliers and multicollinearity<br>Lukman, A. F., Farghali, R. A., Kibria, B. G., & Oluyemi, O. A. (2023).  | M-Tahmin edici, RE, LE           | MSE, mse    |
| 19 | New penalized M-estimators in robust ridge regression: real life applications using sports and tobacco data<br>Wasim, D., Khan, S. A., Suhail, M., & Shabbir, M. (2023).                         | M-Tahmin edici, RE, Dayanıklı RE | MSE         |
| 20 | Robust Liu-type estimator based on GM estimator<br>Işıl, M., & Bulut, Y. M. (2024).  | M-Tahmin edici, LE, RE           | MSE         |



## 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Ridge ve Stein tahmin edicilerinin avantajlı yönlerinin birleştirilmesi ilkesine göre oluşturulan Liu (1993) tahmin edicisi ve bu tahmin ediciye dayalı olarak oluşturulan birçok tahmin edici kapsamlı ve ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu doğrultuda 1993-2024 yılları arasında yapılmış çalışmalar bir literatür taraması yapılarak sınıflandırılmış ve analiz edilmiştir. Böylece bu çalışmanın Liu tahmin edici ve genelleştirmelerine bağlı olarak yapılacak yeni ve özgün çalışmalara ışık tutması hedeflenmiştir.

Çalışmanın bulguları Liu tahmin edicisinin genelleştirilmiş lineer modeller, ölçüm hatalı modeller, yarı parametrik modeller, kısmi lineer modeller ve ekonometrik modeller gibi birçok farklı modelde kullanıldığını göstermiştir. Dolayısıyla çalışma Liu tahmin edicisinin farklı disiplinlerdeki yaygın kullanımını göstermesi bakımından yol gösterici niteliktedir.

Ayrıca bu çalışma kapsamında değinilen tahmin edicilerin parametre tahminlerinin hesaplanabilmesi için birçok programdan faydalanılabilir. Spesifik olarak R programı bünyesinde bulunan liureg (Imdad Ullah ve Aslam, 2022) ve fastliu (Genç ve Özbilen, 2023) paketleri liu regresyonda parametre tahmini, parametre tahminler için hipotez testleri, daraltma parametresinin seçimi ve Liu regresyon ile ilgili istatistiklerin hesaplanmasında kullanılabilir. Dahası bu paketler Liu tahmin edicisinin genelleştirmelerine dair hesaplamalar için kaynak niteliğindedir.



## KAYNAKLAR

- Acıtaş, S., ve Şenoğlu, B., 2019. Ridge-type MML estimator in the linear regression model. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43, 589-599.
- Ahmad, S., ve Aslam, M., 2022. Another proposal about the new two-parameter estimator for linear regression model with correlated regressors. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 51(6), 3054-3072.
- Akaike, H., 1974. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, 19(6), 716-723.
- Akdeniz, F., ve Kaçiranlar, S., 1995. On the almost unbiased generalized Liu estimator and unbiased estimation of the bias and MSE. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 24(7), 1789-1797.
- Akdeniz, F., 2001. The examination and analysis of residuals for some biased estimators in linear regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 30(6), 1171-1183.
- Akdeniz, F., 2004. New biased estimators under the LINEX loss function. *Statistical Papers*, 45, 175-190.
- Akdeniz, F., ve Erol, H., 2003. Mean squared error matrix comparisons of some biased estimators in linear regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32(12), 2389-2413.
- Akdeniz, F., ve Kaçiranlar, S., 1995. On the almost unbiased generalized Liu estimator and unbiased estimation of the bias and MSE. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 24(7), 1789-1797.
- Akdeniz, F., Wan, A. T., ve Akdeniz, E., 2005. Generalized Liu type estimators under Zellner's balanced loss function. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 34(8), 1725-1736.
- Allen, D. M., 1971. Mean square error of prediction as a criterion for selecting variables. *Technometrics*, 13(3), 469-475.
- Alheety, M. I. N., 2020. New versions of liu-type estimator in weighted and non-weighted mixed regression model. *Baghdad Science Journal*, 17(1 (Suppl.)), 0361-0361.
- Alheety, M. I., ve Golam Kibria, B. M., 2013. Modified Liu-type estimator based on  $(r-k)$  class estimator. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 42(2), 304-319.
- Alheety, M. I., ve Kibria, B. G., 2014. A generalized stochastic restricted ridge regression estimator. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(20), 4415-4427.
- Andrews, D. F., 1974. A robust method for multiple linear regression. *Technometrics*, 16(4), 523-531.
- Arkin, R. G., ve Montgomery, D. C., 1980. Augmented robust estimators. *Technometrics*, 22(3), 333-341.

- Arslan, O., ve Billor, N., 1996. Robust ridge regression estimation based on the GM-estimators. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 9(1), 1-9.
- Arslan, O., ve Billor N., 2000. Robust Ridge Regression Estimation Based on the M-Estimator. *Journal of Applied Statistics*, 27, 1, 39-47.
- Arslan, O., ve Billor, N., 2000. Robust Liu estimator for regression based on an M-estimator. *Journal of applied statistics*, 27(1), 39-47.
- Arumairajan, S., 2018. On the Stochastic Restricted Modified Almost Unbiased Liu Estimator in Linear Regression Model. *Communications in Mathematics and Statistics*, 6, 185-206.
- Arumairajan, S., ve Wijekoon, P., 2016. Generalized preliminary test stochastic restricted estimator in the linear regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(20), 6061-6086.
- Arumairajan, S., ve Wijekoon, P., 2017. Modified almost unbiased Liu estimator in linear regression model. *Communications in Mathematics and Statistics*, 5, 261-276.
- Aslam, M., ve Ahmad, S., 2022. The modified Liu-ridge-type estimator: a new class of biased estimators to address multicollinearity. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 51(11), 6591-6609.
- Awwad, F. A., Dawoud, I., ve Abonazel, M. R., 2022. Development of robust Özkale–Kaçiranlar and Yang–Chang estimators for regression models in the presence of multicollinearity and outliers. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 34(6), e6779.
- Babar, I., ve Chand, S., 2022. Weighted ridge and Liu estimators for linear regression model. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 34(27), e7343.
- Baye, M. R., ve Parker, D. F., 1984. Combining ridge and principal component regression: a money demand illustration. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 13(2), 197-205.
- Bulut, Y. M., 2023. Inverse Gaussian liu-type estimator. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 52(10), 4864-4879.
- Cetin, M. C., ve Erar, A., 2002. Variable selection with Akaike information criteria: a comparative study. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 31, 89-97.
- Chandra, S., ve Sarkar, N., 2016. A restricted r-k class estimator in the mixed regression model with autocorrelated disturbances. *Statistical Papers*, 57(2), 429-449.
- Chang, X., ve Wang, H., 2019. Preliminary test almost unbiased two-parameter estimators with student's t errors and conflicting test statistics. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 48(18), 4449-4473.
- Chang, X., ve Yang, H., 2012. Combining two-parameter and principal component regression estimators. *Statistical Papers*, 53, 549-562.
- Chen, H., ve Wu, J., 2022. On the mixed Kibria–Lukman estimator for the linear regression model. *Scientific Reports*, 12(1), 12430.

- Crouse, R. H., Jin, C., ve Hanumara, R. C., 1995. Unbiased ridge estimation with prior information and ridge trace. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 24(9), 2341-2354.
- Çetin, M., 2000. Sağlam Regresyonda Değişken Seçim Ölçütleri. Hacettepe Üniv. Fen Fak. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Ankara.
- Çetin, M., 2009. Robust model selection criteria for robust Liu estimator. *European journal of operational research*, 199(1), 21-24.
- Çetin, M., 2016. Robust model selection criteria for robust S and LTS estimators. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 45(1), 153-164.
- Cetin, M. C., ve Erar, A., 2002. Variable selection with Akaike information criteria: a comparative study. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 31, 89-97.
- Çetin, M., ve Erar, A., 2006. A simulation study on classic and robust variable selection in linear regression. *Applied mathematics and computation*, 175(2), 1629-1643.
- Cox, D. R., ve Snell, E. J., 1974. The choice of variables in observational studies. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 23(1), 51-59.
- Daniel, C., ve Wood, F. S., 1980. *Fitting equations to data: computer analysis of multifactor data*. John Wiley & Sons, Inc..
- Dawoud, I., 2022. Modified two parameter regression estimator for solving the multicollinearity. *Thailand Statistician*, 20(4), 842-859.
- Dawoud, I., 2023. A new improved estimator for reducing the multicollinearity effects. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 52(8), 3581-3592.
- Dawoud, I., ve Abonazel, M. R., 2021. Robust Dawoud–Kibria estimator for handling multicollinearity and outliers in the linear regression model. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(17), 3678-3692.
- Dawoud, I., ve Kibria, B. G., 2020. A new biased estimator to combat the multicollinearity of the Gaussian linear regression model. *Stats*, 3(4), 526-541.
- Dawoud, I., Lukman, A. F., ve Haadi, A. R., 2022. A new biased regression estimator: Theory, simulation and application. *Scientific African*, 15, e01100.
- Delaney, N. J., ve Chatterjee, S., 1986. Use of the bootstrap and cross-validation in ridge regression. *Journal of Business & Economic Statistics*, 4(2), 255-262.
- Dorugade, A. V., ve Kashid, D. N., 2010. Variable selection in linear regression based on ridge estimator. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(11), 1211-1224.
- Draper, N. R., ve Smith, H., 1998. *Applied regression analysis (Vol. 326)*. John Wiley & Sons.
- Durbin, J., 1953. A note on regression when there is extraneous information about one of the coefficients. *Journal of the American Statistical Association*, 48(264), 799-808.
- Dutter, R., 1977. Numerical solution of robust regression problems: Computational aspects, a comparison. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 5(3), 207-238.

- Erdugan, F., 2022. An almost unbiased Liu-type estimator in the linear regression model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-13.
- Ertaş, H., Kaçıranlar, S., ve Güler, H., 2017. Robust Liu-type estimator for regression based on M-estimator. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(5), 3907-3932.
- Ertaş, H., Toker, S., ve Kaçıranlar, S., 2015. Robust two parameter ridge M-estimator for linear regression. *Journal of Applied Statistics*, 42(7), 1490-1502.
- Farebrother, R. W., 1976. Further results on the mean square error of ridge regression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 248-250.
- Filzmoser, P., ve Kurnaz, F. S., 2018. A robust Liu regression estimator. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 47(2), 432-443.
- Genç, M., ve Özkale, M. R., 2021. Usage of the GO estimator in high dimensional linear models. *Computational Statistics*, 36(1), 217-239.
- Ghapani, F., ve Babadi, B., 2022. Two parameter weighted mixed estimator in linear measurement error models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 51(12), 6936-6946.
- Goldberger, A. S., ve Theil, H., 1961. On pure and mixed estimation in economics. *International Economic Review*. 2, 65-77.
- Golub, G. H., Heath, M., ve Wahba, G., 1979. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2), 215-223.
- Göktaş, A., ve Sevinç, V., 2016. Two new ridge parameters and a guide for selecting an appropriate ridge parameter in linear regression. *Gazi University Journal of Science*, 29(1), 201-211.
- Groß, J., 2003. Restricted ridge estimation. *Statistics & probability letters*, 65(1), 57-64.
- Gruber, M. H. J., 1998. *Improving Efficiency by Shrinkage: The James-Stein and Ridge Regression Estimators*. Marcell Dekker, Inc. New York.
- Gruber M.H.J., 2010. *Regression Estimators. A Comparative study*. 2nd ed. Baltimore:John Hopkins Univ. Press.
- Gruber, M. H., 2012. Liu and ridge estimators-a comparison. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 41(20), 3739-3749.
- Hald, A., 1952. *Statistical Theory with Engineering Applications*. New York: Wiley.
- Hocking, R. R., 1972. Criteria for selection of a subset regression: which one should be used?. *Technometrics*, 14(4), 967-976.
- Hockings, R. R., ve LaMotte, L. R., 1973. Using the SELECT program for choosing subset regressions, en WO Thompson and Cady, FB. In *Proceedings of the University of Kentucky Conference on Regression with a Large Number of Predictors Variables*, Department of statistics, University of Kentucky, Lexington.
- Hocking, R. R., 1976. A Biometrics invited paper. The analysis and selection of variables in linear regression. *Biometrics*, 1-49.

- Hoerl, A. E., ve Kennard, R. W., 1970a. Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 55-67.
- Hoerl, A. E., ve Kennard, R. W., 1970b. Ridge regression: applications to nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12(1), 69-82.
- Hoerl, A. E., Kannard, R. W., ve Baldwin, K. F., 1975. Ridge regression: some simulations. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 4(2), 105-123.
- Holland, P. W., 1973. Weighted ridge regression: Combining ridge and robust regression methods (No. w0011). National Bureau of Economic Research.
- Holland, P. W., ve Welsch, R. E., 1977. Robust regression using iteratively reweighted least-squares. *Communications in Statistics-theory and Methods*, 6(9), 813-827.
- Hotelling, H., 1933. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of educational psychology*, 24(6), 417.
- Huang, H., Wu, J., ve Yi, W., 2017. On the restricted almost unbiased two-parameter estimator in linear regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(4), 1668-1678.
- Huang, J., ve Yang, H., 2015. On a principal component two-parameter estimator in linear model with autocorrelated errors. *Statistical Papers*, 56(1), 217-230.
- Huang, J., Ma, L., ve Wang, L., 2018. A new class of almost unbiased estimator. *Latin American Applied Research*, 48, 205-209.
- Huber, P. J., ve Ronchetti, E. M., 1981. *Robust statistics* john wiley & sons. New York, 1(1).
- Hubert, M. H., ve Wijekoon, P., 2006. Improvement of the Liu estimator in linear regression model. *Statistical Papers*, 47(3), 471-479.
- Hurvich, C. M., ve Tsai, C. L., 1989. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, 76(2), 297-307.
- Işıl, M., ve Bulut, Y. M., 2024. Robust Liu-type estimator based on GM estimator. *Statistica Neerlandica*, 78(1), 167-190.
- İnan, D., 2015. Combining the Liu-type estimator and the principal component regression estimator. *Statistical Papers*, 56, 147-156.
- İyi, P., 2006. Genetik algoritma uygulanarak ve bilgi kriterleri kullanılarak çoklu regresyonda model seçimi (Doctoral dissertation, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana).
- Jadhav, N. H., ve Kashid, D. N., 2011. A jackknifed ridge M-estimator for regression model with multicollinearity and outliers. *Journal of statistical theory and practice*, 5(4), 659-673.
- Jadhav, N. H., Kashid, D. N., ve Kulkarni, S. R., 2014. Subset selection in multiple linear regression in the presence of outlier and multicollinearity. *Statistical Methodology*, 19, 44-59.

- Kaçıranlar S., ve Sakallıoğlu S., 2001. Combining the Liu estimator and the principal component regression estimator. *Communications in Statistics, Theory and Methods*. 30 (12), 2699 – 2705.
- Kaçıranlar, S., Özbay, N., Özkan, E., ve Güler, H., 2022. Comparison of Liu and two parameter principal component estimator to combat multicollinearity. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 34(5), e6737.
- Kaçıranlar, S., Sakallıoğlu, S., Akdeniz, F., Styan, GPH. ve Werner, HJ., 1999. A New biased estimator in linear regression and a detailed analysis of the widely-analysed dataset on Portland Cement. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, Vol.61, Series B, Pt.3, 443-459.
- Kan, B., Alpu, Ö., ve Yazıcı, B., 2013. Robust ridge and robust Liu estimator for regression based on the LTS estimator. *Journal of Applied Statistics*, 40(3), 644-655.
- Kandemir Çetinkaya, M., ve Kaçıranlar, S., 2019. Improved two-parameter estimators for the negative binomial and Poisson regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 89(14), 2645-2660.
- Kashid, D. N., ve Kulkarni, S. R., 2002. A more general criterion for subset selection in multiple linear regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31(5), 795-811.
- Kejian, L., 1993. A new class of biased estimate in linear regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 22(2), 393-402.
- Kibria, B. G., ve Lukman, A. F., 2020. A new ridge-type estimator for the linear regression model: simulations and applications. *Scientifica*, 2020(1), 9758378.
- Kurnaz, F. S., ve Akay, K. U., 2015. A new Liu-type estimator. *Statistical Papers*, 56, 495-517.
- Kurnaz, F. S., ve Akay, K. U., 2018. Matrix mean squared error comparisons of some biased estimators with two biasing parameters. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(8), 2022-2035.
- Lattef, M. N., ve Alheety, M. I., 2023. On modified unbiased two-parameter estimator. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 52(7), 2843-2864.
- Lawless, J. F., ve Wang, P., 1976. A Simulation Study of Ridge and Other Regression Estimators. *Communication in Statistics*, 7, 139-164.
- Li, Y., 2018. Efficiency of two classes of stochastic restricted almost unbiased type principal component estimators in linear regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(4), 793-804.
- Li, Y., ve Yang, H., 2010. A new stochastic mixed ridge estimator in linear regression model. *Statistical Papers*. Vol. 51, 315-323.
- Li, Y., ve Yang, H., 2011. Two kinds of restricted modified estimators in linear regression model. *Journal of Applied Statistics*, 38(7), 1447-1454.
- Li, Y., ve Yang, H., 2012. A new Liu-type estimator in linear regression model. *Statistical Papers*, 53, 427-437.

- Li, Y., ve Yang, H., 2014a. Two classes of almost unbiased type principal component estimators in linear regression model. *Journal of Applied Mathematics*, 2014(1), 639070.
- Li, Y., ve Yang, H., 2014b. Efficiency of a stochastic restricted two-parameter estimator in linear regression. *Applied Mathematics and Computation*, 249, 371-381.
- Li, Y., ve Yang, H., 2016. More on the two-parameter estimation in the restricted regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(24), 7184-7196.
- Li, Y., ve Yang, H., 2019. Performance of the restricted almost unbiased type principal components estimators in linear regression model. *Statistical Papers*, 60, 19-34.
- Li, Y., Yang, H., ve Xu, J., 2011. More on the Preliminary Test Estimator in Almost Unbiased Liu Regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 40(13), 2292-2304.
- Liang, F. B., ve Lan, Y. X., 2014. A Generalized Diagonal Ridge-type Estimator in Linear Regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(6), 1145-1163.
- Lindsey, C., ve Sheather, S., 2010. Variable selection in linear regression. *The Stata Journal*, 10(4), 650-669.
- Linhart, H., ve Zucchini, W., 1986. *Model selection*. John Wiley.
- Liu, C., ve Yang, H., 2016. Positive-rule stein-type almost unbiased ridge estimator in linear regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(8), 2228-2255.
- Liu, C., Jiang, H., Shi, X., ve Liu, D., 2014. Two kinds of weighted biased estimators in Stochastic restricted regression model. *Journal of Applied Mathematics*, 2014(1), 314875.
- Liu, C., Yang, H., ve Wu, J., 2013. On the weighted mixed almost unbiased ridge estimator in stochastic restricted linear regression. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1), 902715.
- Liu, K., 2003. Using Liu-type estimator to combat collinearity. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 32(5), 1009-1020.
- Liu, X. Q., 2011. Improved Liu estimator in a linear regression model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(1), 189-196.
- Liu, X. Q., Gao, F., ve Wu, X. Q., 2014. New shrinkage-type estimators in a linear regression model when multicollinearity is severe. *Statistics*, 48(2), 344-358.
- Lukman, A. F., Allohibi, J., Jegede, S. L., Adewuyi, E. T., Oke, S., ve Alharbi, A. A., 2023. Kibria–Lukman-Type Estimator for Regularization and Variable Selection with Application to Cancer Data. *Mathematics*, 11(23), 4795.
- Lukman, A. F., Ayinde, K., Oludoun, O., ve Onate, C. A., 2020. Combining modified ridge-type and principal component regression estimators. *Scientific African*, 9, e00536.
- Lukman, A. F., Ayinde, K., Siok Kun, S., ve Adewuyi, E. T., 2019. A modified new two-parameter estimator in a linear regression model. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2019(1), 6342702.
- Lukman, A. F., Farghali, R. A., Kibria, B. G., ve Oluyemi, O. A., 2023. Robust-stein estimator for overcoming outliers and multicollinearity. *Scientific Reports*, 13(1), 9066.

- Lukman, A. F., Kibria, B. G., Ayinde, K., ve Jegede, S. L., 2020. Modified one-parameter Liu estimator for the linear regression model. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2020(1), 9574304.
- Mallows, C. L., 1973. Some comments on Cp. *Technometrics* 15: 661–675.
- Mallows, C. L., 1975. On some topics in robustness. Unpublished memorandum, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, NJ, 37.
- Marquardt, D. W., 1970. Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation. *Technometrics*, 12(3), 591-612.
- Massy, W. F., 1965. Principal components regression in exploratory statistical research. *Journal of the American Statistical Association*, 60(309), 234-256.
- Mayer, L. S., ve Willke, T. A., 1973. On biased estimation in linear models. *Technometrics*, 15(3), 497-508.
- McDonald, G. C., ve Galarneau, D. I., 1975. A Monte Carlo evaluation of some ridge-type estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 70(350), 407-416.
- Miller, A. J., 1990. *Subset selection in regression*, London: Chapman and Hall.
- Montgomery, D. C., ve Friedman, D. J., 1993. Prediction using regression models with multicollinear predictor variables. *IIE Trans.* 25:73–85.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., ve Vining, G. G., 2001. *Introduction to Linear Regression Analysis*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York.
- Myers, R. H., ve Myers, R. H., 1990. *Classical and modern regression with applications* (Vol. 2, p. 488). Belmont, CA: Duxbury press.
- Ng, S. F., 2023. An Almost Unbiased Regression Estimator: Theoretical Comparison and Numerical Comparison in Portland Cement Data. *Matematika*, 315-327.
- Ng, S. F., Low, H. C., ve Quah, S. H., 2010. A New Biased Estimator Derived from Principal Component Regression Estimator. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 9(1), 22.
- Nomura, M., ve Ohkubo, T., 1985. A note on combining ridge and principal component regression. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 14(10), 2489-2493.
- Omara, T. M., 2018. Stochastic Restricted Liu Type estimator for SUR model. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 903-911.
- Omara, T. M., 2019. Modifying two-parameter ridge Liu estimator based on ridge estimation. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 881-890.
- Omara, T. M., 2022. Almost unbiased modified ridge-type estimator: An application to tourism sector data in Egypt. *Heliyon*, 8(9).
- Owolabi, A. T., Ayinde, K., ve Alabi, O. O., 2022. A new ridge-type estimator for the linear regression model with correlated regressors. *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 34(15), e6933.

- Özbay, N., ve Kaçiranlar, S., 2017. The Almon two parameter estimator for the distributed lag models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 87(4), 834-843.
- Özbay, N., ve Kaçiranlar, S., 2018. Estimation in a linear regression model with stochastic linear restrictions: a new two-parameter-weighted mixed estimator. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(9), 1669-1683.
- Özkale, M. R., 2009. A stochastic restricted ridge regression estimator. *Journal of multivariate analysis*, 100(8), 1706-1716.
- Özkale, M. R., 2012. Combining the unrestricted estimators into a single estimator and a simulation study on the unrestricted estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82(5), 653-688.
- Özkale, M. R., 2014. The relative efficiency of the restricted estimators in linear regression models. *Journal of Applied Statistics*, 41(5), 998-1027.
- Özkale, M. R., ve Kaçiranlar, S., 2007. The restricted and unrestricted two-parameter estimators. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 36(15), 2707-2725.
- Radhakrishna Rao, C., ve Toutenburg, H., 1999. Linear models. *Linear Models: Least Squares and Alternatives*, 5-21.
- Rousseeuw, P. J., Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., ve Stahel, W. A., 1986. Robust statistics: the approach based on influence functions.
- Pfaffenberger, R.C., ve Dielman, T.E., 1985. A Comparison of Robust Ridge Regression. *Proceeding of the American Statistical Association Business and Economic Statistics Section*, Las Vegas, Nev., 631-635.
- Pfaffenberger, R.C., ve Dielman, T.E., 1990. A Comparison of Regression Estimators When Both Multicollinearity and Outliers are Present. In *Robust Regression*, 243-270
- Ronchetti, E., ve Staudte, R. G. A., 1994. Robust Version of Mallows' Cp. *Journal of the American Statistical Association*, 89(426), 550–559.
- Rong, J. Y., 2010. Adjustive Liu-type estimators in linear regression models. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 39(6), 1162-1173.
- Sakallıoğlu S. ve Akdeniz, F., 2003. Unbiased Liu estimator with prior information. *Int. J. Math. Sci.* 2 (1), 205-217.
- Sakallıoğlu, S., ve Kaçiranlar, S., 2008. A new biased estimator based on ridge estimation. *Statistical Papers*, 49, 669-689.
- Sakallıoğlu, S., Kaçiranlar, S., ve Akdeniz, F., 1996. A note on combining ridge and least squares estimator. *Journal of Institute of Mathematics and Computer Science (Math. Series)*, 9(2), 193-198.
- Sarkar, N., 1992. A new estimator combining the ridge regression and the restricted least squares methods of estimation. *Communications in statistics-theory and methods*, 21(7), 1987-2000.

- Schaffrin, B., ve Toutenburg, H., 1990. Weighted mixed regression. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 70(6), T735-T738.
- Schwarz, G., 1978. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 461-464.
- Shamany, R., Alobaidi, N. N., ve Algamal, Z. Y., 2019. A new two-parameter estimator for the inverse Gaussian regression model with application in chemometrics. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, 12(2), 453-464.
- Shewa, G. A., ve Ugwuowo, F. I., 2023. A new hybrid estimator for linear regression model analysis: Computations and simulations. *Scientific African*, 19, e01441.
- Silvapulle, M. J., 1991. Robust ridge regression based on an M-estimator. *Australian Journal of Statistics*, 33(3), 319-333.
- Silvey, S. D., 1969. Multicollinearity and imprecise estimation. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 31(3), 539-552.
- Singh, B., Chaubey, Y. P., ve Dwivedi, T. D., 1986. An almost unbiased ridge estimator. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 342-346.
- Smith, G., ve Campbell, F., 1980. A critique of some ridge regression methods. *Journal of the American Statistical Association*, 75(369), 74-81.
- Stein, C., 1956. Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. In *Proceedings of the Third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (Vol. 1, No. 1, pp. 197-206).
- Swindel, B. F., 1976. Good ridge estimators based on prior information. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 5(11), 1065-1075.
- Tekeli, E., Kaçıranlar, S., ve Özbay, N., 2019. Optimal determination of the parameters of some biased estimators using genetic algorithm. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 89(18), 3331-3353.
- Theil, H., 1963. On the symmetry approach to the committee decision problem. *Management Science*, 9(3), 380-393.
- Theobald, C. M., 1974. Generalizations of mean square error applied to ridge regression. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 36(1), 103-106.
- Thompson, M. L., 1978a. Selection of variables in multiple regression: Part I. A review and evaluation. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 1-19.
- Thompson, M. L., 1978b. Selection of variables in multiple regression: Part II. Chosen procedures, computations and examples. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 129-146.
- Toker, S., ve Özbay, N., 2023. New Bayesian Approach to the Estimation in Simultaneous Equations Model. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 44(9), 3872-3888.
- Torigoe, N., ve Ujiie, K., 2006. On the restricted Liu estimator in the Gauss–Markov model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35(9), 1713-1722.

- Tukey, J. W., 1977. Exploratory data analysis (Vol. 2, pp. 131-160). Reading, MA: Addison-wesley.
- Ugwuowo, F. I., Oranye, H. E., ve Arum, K. C., 2023. On the jackknife Kibria-Lukman estimator for the linear regression model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 52(12), 6116-6128.
- Üstündağ Şiray, G., 2014. Modified and Restricted rk Class Estimators. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(24), 5130-5155.
- Üstündağ Şiray, G., 2015. rd class estimator under misspecification. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 44(22), 4742-4756.
- Üstündağ Şiray, G., Toker, S., ve Özbay, N., 2021. Defining a two-parameter estimator: a mathematical programming evidence. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 91(11), 2133-2152.
- Vinod, H. D., 1978. A survey of ridge regression and related techniques for improvements over ordinary least squares. *The Review of Economics and Statistics*, 121-131.
- Wilcox, R. R., 2019. Robust regression: Testing global hypotheses about the slopes when there is multicollinearity or heteroscedasticity. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 72(2), 355-369.
- Wu, J., 2013. On the Performance of Principal Component Liu-Type Estimator under the Mean Square Error Criterion. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1), 858794.
- Wu, J., 2014a. On the Stochastic Restricted r-k Class Estimator and Stochastic Restricted r-d Class Estimator in Linear Regression Model. *Journal of Applied Mathematics*, 2014(1), 173836.
- Wu, J., 2014b. An Unbiased Two-Parameter Estimation with Prior Information in Linear Regression Model. *The Scientific World Journal*, 2014(1), 206943.
- Wu, J., 2014c. Efficiency of the restricted rd class estimator in linear regression. *Applied Mathematics and Computation*, 236, 572-579.
- Wu, J., 2016. Modified Restricted Almost Unbiased Liu Estimator in Linear Regression Model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 45(2), 689-700.
- Wu, J., ve Yang, H., 2013. Efficiency of an almost unbiased two-parameter estimator in linear regression model. *Statistics*, 47(3), 535-545.
- Wu, J., ve Yang, H., 2015. On the principal component Liu-type estimator in linear regression. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44(8), 2061-2072.
- Wu, J., Asar, Y., ve Arashi, M., 2018. On the restricted almost unbiased Liu estimator in the logistic regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(18), 4389-4401.
- Xu, J., ve Yang, H., 2011. More on the bias and variance comparisons of the restricted almost unbiased estimators. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 40(22), 4053-4064.

- Xu, J., ve Yang, H., 2011. On the restricted almost unbiased estimators in linear regression. *Journal of Applied Statistics*, 38(3), 605-617.
- Xu, J., ve Yang, H., 2011. On the restricted  $r$ - $k$  class estimator and the restricted  $r$ - $d$  class estimator in linear regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(6), 679-691.
- Yang, H., ve Chang, X., 2010. A new two-parameter estimator in linear regression. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 39(6), 923-934.
- Yang, H., ve Cui, J., 2011. A stochastic restricted two-parameter estimator in linear regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 40(13), 2318-2325.
- Yang, H., ve Wu, J., 2012. A stochastic restricted  $k$ - $d$  class estimator. *Statistics*, 46(6), 759-766.
- Yang, H., ve Xu, J., 2009. An alternative stochastic restricted Liu estimator in linear regression. *Statistical Papers*, 50, 639-647.
- Yang, H., ve Xu, J., 2009. An alternative stochastic restricted Liu estimator in linear regression. *Statistical Papers*, 50, 639-647.
- Yang, H., ve Zhang, C., 2007. The research on two kinds of restricted biased estimators based on mean squared error matrix. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37(1), 70-80.
- Yang, H., Chang, X. ve Liu, D., 2009. Improvement of the Liu estimator in weighted mixed regression. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 38, 285-292.
- Yang, H., Li, Y., ve Xu, J., 2009. Mean squared error matrix comparisons of some restricted almost unbiased estimators. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38(14), 2321-2332.
- Yıldırım, H., ve Özkale, M. R., 2023. A combination of ridge and Liu regressions for extreme learning machine. *Soft Computing*, 27(5), 2493-2508.
- Yıldız, N., 2019. A new stochastic restricted Liu-type estimator in linear regression model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 48(1), 91-108.
- Yüksel G., ve Akdeniz F., 2001. Properties of some new preliminary test Liu estimators and comparisons with the usual preliminary test estimators. *J. Stat. Res.* 35 (2), 45-56.
- Zeinal, A., 2023. The extended two-type parameter estimator in linear regression model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 52(2), 463-478.
- Zeinal, A., ve Azmoun Zavie Kivi, M. R., 2023. The generalized new two-type parameter estimator in linear regression model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 52(1), 98-109.

## ÖZGEÇMİŞ

Birer GÜVELOĞLU, ilkokul üçüncü sınıfa kadar Almanya’da okudu. Ailesinin 1984 yılında Türkiye’ye kesin dönüş yapması sonrası ilkokul, ortaokul ve liseyi Adana’da tamamladı. 1994 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı. 1999 yılında mezun olduktan sonra özel dershanelerde matematik öğretmenliği yaptı. 2001 yılında Millî Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak atandı. Halen Millî Eğitim Bakanlığında bağlı olarak Matematik Öğretmenliğine devam etmektedir. 1999 yılında başladığı Yüksek lisans eğitimini 2024 yılında tamamladı. Almanca ve İngilizce bilen Birer GÜVELOĞLU evli ve dört çocuk babasıdır.

