

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

e^* -TOPOLOJİK HALKALAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CAN DALKIRAN

HAZİRAN 2024
MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

Can DALKIRAN tarafından hazırlanan e^* -**TOPOLOJİK HALKALAR ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 28/06/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JÜRİSİ

Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK (**Başkan**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Sakarya Üniversitesi, Sakarya

Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ (**Danışman**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Çağrı DEMİR (**Üye**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Ege Üniversitesi, İzmir

ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza:

Matematik Bölüm Başkanı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ

İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 28/06/2024

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini, akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Can DALKIRAN

28/06/2024

ÖZET
 e^* -TOPOLOJİK HALKALAR ÜZERİNE

Can DALKIRAN

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ

Haziran 2024, 45 sayfa

Bu çalışmanın temel amacı e^* -topolojik halka kavramını tanıtmaktır. Bu sınıf, β -topolojik halkalar sınıfının genelleştirilmiş bir versiyonu olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca, e^* -topolojik halka fikri ile literatürde var olan diğer bazı topolojik halka türleri arasındaki ilişkiler tartışılmıştır. Buna ek olarak, e^* -topolojik halkalar hakkında bazı temel sonuçlar ortaya konmuştur. Sonuçlarımıza ilişkin bazı karşı örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: topolojik halka, e^* -açık küme, e^* -topolojik halka.

ABSTRACT
ON e^* -TOPOLOGICAL RINGS

Can DALKIRAN

Master of Science (M.Sc.)
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murad ÖZKOÇ

June 2024, 45 pages

The main purpose of this study is to introduce the concept of e^* -topological ring. This class appears as a generalised version of the class of β -topological rings. Also, the relations between the idea of e^* -topological ring and some other types of topological rings existing in the literature have been discussed. In addition, some fundamental results about e^* -topological rings are revealed. Some counterexamples regarding our results have been given.

Keywords: topological ring, e^* -open set, e^* -topological ring.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının ortaya çıkma sürecinde değerli bilgilerini ve tecrübelerini benimle paylaşan, çalışma konusunun belirlenmesinde yol gösteren, lisans ve lisansüstü eğitimim boyunca yardım ve desteklerini esirgemeyen, ahlaki değerleri ve çalışma azmiyle örnek aldığım, birlikte çalışmaktan gurur duyduğum sayın danışman hocam Doç. Dr. Murad ÖZKOÇ'a sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Bazı Temel Kavramlar	2
2. MATERYAL VE YÖNTEM	13
2.1. e^* -topolojik Halkalar	13
2.2. Bazı Temel Sonuçlar	24
3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRME	39
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	44

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$:\Rightarrow$	tanımsal gerektirme
2^X	X kümesinin kuvvet kümesi
Y^X	X kümesinden Y kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi
$O(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki açık kümeler ailesi
$O(Y, F)$	(Y, σ) topolojik uzayındaki F kümesini içeren açık kümelerin ailesi
$C(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki kapalı kümeler ailesi
$O(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren açık kümelerin ailesi
$C(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren kapalı kümelerin ailesi
$RO(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki regüler açık kümeler ailesi
$RC(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki regüler kapalı kümeler ailesi
$RO(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren regüler açık kümelerin ailesi
$RC(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren regüler kapalı kümelerin ailesi
$\delta O(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki δ -açık kümelerin ailesi
$\delta C(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki δ -kapalı kümelerin ailesi
$\delta O(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren δ -açık kümelerin ailesi
$\delta C(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren δ -kapalı kümelerin ailesi
$\beta O(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki β -açık kümelerin ailesi
$\beta C(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki β -kapalı kümelerin ailesi
$\beta O(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren β -açık kümelerin ailesi
$\beta C(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren β -kapalı kümelerin ailesi
$e^* O(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki e^* -açık kümelerin ailesi
$e^* C(X)$	(X, τ) topolojik uzayındaki e^* -kapalı kümelerin ailesi
$e^* O(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren e^* -açık kümelerin ailesi
$e^* C(X, x)$	(X, τ) topolojik uzayındaki x noktasını içeren e^* -kapalı kümelerin ailesi

$int(A)$	A kümesinin içi
$cl(A)$	A kümesinin kapanışı
$\delta-int(A)$	A kümesinin δ -içi
$\delta-cl(A)$	A kümesinin δ -kapanışı
$\beta-int(A)$	A kümesinin β -içi
$\beta-cl(A)$	A kümesinin β -kapanışı
$e^*-int(A)$	A kümesinin e^* -içi
$e^*-cl(A)$	A kümesinin e^* -kapanışı



1. GİRİŞ

Topoloji tanımından da anlaşılacağı üzere bir (X, τ) topolojik uzayında X kümesinin elemanları arasındaki ilişkilerin topoloji kavramı için çok önemi yoktur. Bu küme bazen alelade bir küme bazen de gerçel sayılar kümesi gibi sonsuz elemanlı ve elemanları arasında sıralama olan bir küme olabilir. Bu sebeple topoloji alanında çalışmalar yapan birçok matematikçi bazı sorulara cevap aramak amacıyla çalışmalarında matematiğin başka bir çalışma alanı olan cebir alanından faydalanmıştır. Örneğin topolojide iki uzayın homeomorf olmadığını gösterme problemi bazen oldukça zor bir hâl alabilir yani iki uzay arasında birebir, örten, sürekli ve tersi sürekli olan bir fonksiyon yazılamayacağını göstermek zor olabilir. Bu yüzden topoloji alanında çalışmalar yapan birçok matematikçi çalışmalarında iki uzayın homeomorfik olmadığını göstermek amacıyla temel grupları kullanmıştır. İki topolojik uzayın temel grupları izomorfik değilse topolojik olarak homeomorfik olamazlar. Bu çalışmalara bir başka örnek olarak çalışmamızda ilham aldığımız 1947 yılında I. Kaplansky tarafından tanımlanan topolojik halka kavramıdır. I. Kaplansky çalışmasında halka ve özelliklerini kullanarak analizsel birçok sonuçlar elde etmiştir.

Bu çalışmanın birinci bölümünde 2021 yılında S. Billawria ve Sh. Sharma tarafından tanımlanan β -topolojik halka kavramından farklı bir kavram olan e^* -topolojik halka kavramı tanıtılmış ve e^* -topolojik halka kavramının β -topolojik halka kavramından daha genel bir topolojik halka kavramı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca karşıtının doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. Çalışmanın yine birinci bölümünde bir e^* -topolojik halkadaki ne tarz kümelerin e^* -açık küme olabileceği incelenmiş ve birçok sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde bir e^* -topolojik halkadaki bir kümenin e^* -içi ve e^* -kapanışına dair birçok sonuçlar elde edilmiştir. Bunlara ilaveten e^* -topolojik halkalarda e^* -süreklilik kavramı ile ilgili sonuçlar incelemiştir

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.3. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesinin kapsadığı açık kümelerin birleşimine A kümesinin **içi** denir ve $int(A)$ ile gösterilir.

Biçimsel olarak

$$((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)$$

$:\Rightarrow$

$$int(A) := \bigcup \{U \mid (U \subseteq A)(U \in \mathcal{O}(X))\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.1.4. (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun.

- a) $int(A) = \{x \in A \mid (\exists U \in \mathcal{O}(X, x))(U \subseteq A)\}$,
- b) $int(A) \subseteq A$,
- c) $A \subseteq B \Rightarrow int(A) \subseteq int(B)$,
- d) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$,
- e) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$,
- f) $int(int(A)) = int(A)$,
- g) $A \in \mathcal{O}(X) \Leftrightarrow A = int(A)$,
- h) $int(A) \in \mathcal{O}(X)$.

Tanım 1.1.5. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesini kapsayan kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin **kapanışı** denir ve $cl(A)$ ile gösterilir.

Biçimsel olarak

$$((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)$$

$:\Rightarrow$

$$cl(A) := \bigcap \{F \mid (A \subseteq F)(F \in \mathcal{C}(X))\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.1.6. (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun.

- a) $cl(A) = \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{O}(X, x))(U \cap A \neq \emptyset)\}$,
- b) $A \subseteq cl(A)$,
- c) $A \subseteq B \Rightarrow cl(A) \subseteq cl(B)$,
- d) $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$,
- e) $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$,
- f) $cl(cl(A)) = cl(A)$,

$$\mathbf{g)} A \in C(X) \Leftrightarrow A = cl(A),$$

$$\mathbf{h)} cl(A) \in C(X),$$

$$\mathbf{i)} int(X \setminus A) = X \setminus cl(A), \quad cl(X \setminus A) = X \setminus int(A),$$

$$\mathbf{j)} int(cl(int(cl(A)))) = int(cl(A)), \quad cl(int(cl(int(A)))) = cl(int(A)).$$

Tanım 1.1.7. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesinin kapanışının içi kendisine eşit ise A kümesine bu uzayda bir **regüler açık küme** denir. Tümleyeni regüler açık olan kümeye de bu uzayda bir **regüler kapalı küme** denir. Bir (X, τ) topolojik uzayının tüm regüler açık (regüler kapalı) kümelerinin oluşturduğu aile $RO(X)$ ($RC(X)$) ve bir $x \in X$ noktasını içeren (X, τ) topolojik uzayının tüm regüler açık (regüler kapalı) kümelerinin oluşturduğu aile de $RO(X, x)$ ($RC(X, x)$) ile gösterilir.

Biçimsel olarak

$$((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)(x \in X)$$

$$:\Rightarrow$$

$$A, \text{ regüler açık} :\Leftrightarrow A = int(cl(A))$$

$$A, \text{ regüler kapalı} :\Leftrightarrow X \setminus A, \text{ regüler açık}$$

$$RO(X) := \{A \subseteq X \mid A = int(cl(A))\}$$

$$RC(X) := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in RO(X)\}$$

$$RO(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in RO(X)\}$$

$$RC(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in RC(X)\}$$

şeklinde ifade edilir. (Stone, 1937)

Tanım 1.1.8. (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in A$ olmak üzere A kümesi tarafından kapsanan regüler açık kümelerin birleşimine A kümesinin **δ -içi** denir ve $\delta-int(A)$ ile gösterilir. A kümesine ait bir x noktası, A kümesinin δ -içinin elemanı ise bu noktaya A kümesinin bir **δ -iç noktası** denir.

Biçimsel olarak

$$\begin{aligned} & ((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)(x \in A) \\ & \quad \Rightarrow \\ & \delta\text{-int}(A) := \bigcup \{U \mid (U \subseteq A)(U \in RO(X))\} \\ & \quad x, A \text{ 'nın } \delta\text{-iç noktası} : \Leftrightarrow x \in \delta\text{-int}(A) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. (Velicko, 1968)

Teorem 1.1.9. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\begin{aligned} \delta\text{-int}(A) &= \{x \in A \mid (\exists U \in RO(X, x))(U \subseteq A)\} \\ &= \{x \in A \mid (\exists U \in O(X, x))(int(cl(U)) \subseteq A)\}. \end{aligned} \text{ (Velicko, 1968)}$$

Tanım 1.1.10. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesinin δ -içi kendisine eşit ise A kümesine bu uzayda bir **δ -açık küme** denir. Tümleyeni δ -açık olan kümeye bu uzayda bir **δ -kapalı küme** denir. Bir (X, τ) topolojik uzayının tüm δ -açık (δ -kapalı) kümelerinin oluşturduğu aile $\delta O(X)$ ($\delta C(X)$) ve bir $x \in X$ noktasını içeren (X, τ) topolojik uzayının tüm δ -açık (δ -kapalı) kümelerinin oluşturduğu aile de $\delta O(X, x)$ ($\delta C(X, x)$) ile gösterilir.

Biçimsel olarak

$$\begin{aligned} & ((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)(x \in X) \\ & \quad \Rightarrow \\ & \quad A, \delta\text{-açık} : \Leftrightarrow A = \delta\text{-int}(A) \\ & \quad A, \delta\text{-kapalı} : \Leftrightarrow X \setminus A, \delta\text{-açık} \\ & \quad \delta O(X) := \{A \subseteq X \mid A = \delta\text{-int}(A)\} \\ & \quad \delta C(X) := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \delta O(X)\} \\ & \quad \delta O(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in \delta O(X)\} \\ & \quad \delta C(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in \delta C(X)\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. (Velicko, 1968)

Teorem 1.1.11. (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun.

- a) $A \subseteq B \Rightarrow \delta\text{-int}(A) \subseteq \delta\text{-int}(B)$,
- b) $\delta\text{-int}(A \cap B) = \delta\text{-int}(A) \cap \delta\text{-int}(B)$,
- c) $\delta\text{-int}(A) \cup \delta\text{-int}(B) \subseteq \delta\text{-int}(A \cup B)$,
- d) $A, B \in \delta\mathcal{O}(X) \Rightarrow A \cap B \in \delta\mathcal{O}(X)$,
- e) $\mathcal{A} \subseteq \delta\mathcal{O}(X) \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \delta\mathcal{O}(X)$,
- f) $\delta\text{-int}(A) \in \delta\mathcal{O}(X)$,
- g) $\delta\text{-int}(\delta\text{-int}(A)) = \delta\text{-int}(A)$. (Velicko, 1968)

Tanım 1.1.12. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesini kapsayan regüler kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin **δ -kapanışı** denir ve $\delta\text{-cl}(A)$ ile gösterilir. X kümesine ait bir x noktası, A kümesinin δ -kapanışının elemanı ise bu noktaya A kümesinin bir **δ -değme noktası** denir.

Biçimsel olarak

$$((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)(x \in X)$$

$:\Rightarrow$

$$\delta\text{-cl}(A) := \bigcap \{F \mid (A \subseteq F)(F \in \mathcal{RC}(X))\}$$

$$x, A \text{ 'nın } \delta\text{-değme noktası} :\Leftrightarrow x \in \delta\text{-cl}(A)$$

şeklinde ifade edilir. (Velicko, 1968)

Teorem 1.1.13. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\begin{aligned} \delta\text{-cl}(A) &= \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{RO}(X, x))(U \cap A \neq \emptyset)\} \\ &= \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{O}(X, x))(\text{int}(cl(U)) \cap A \neq \emptyset)\}. \end{aligned} \text{ (Velicko, 1968)}$$

Teorem 1.1.14. (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun.

- a) $\delta\text{-cl}(X \setminus A) = X \setminus \delta\text{-int}(A)$,
- b) $A \subseteq B \Rightarrow \delta\text{-cl}(A) \subseteq \delta\text{-cl}(B)$,
- c) $\delta\text{-cl}(A \cup B) = \delta\text{-cl}(A) \cup \delta\text{-cl}(B)$,
- d) $\delta\text{-cl}(A \cap B) \subseteq \delta\text{-cl}(A) \cap \delta\text{-cl}(B)$,
- e) $A, B \in \delta\mathcal{C}(X) \Rightarrow A \cup B \in \delta\mathcal{C}(X)$,
- f) $\mathcal{A} \subseteq \delta\mathcal{C}(X) \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \delta\mathcal{C}(X)$,
- g) $\delta\text{-cl}(A) \in \delta\mathcal{C}(X)$,
- h) $\delta\text{-cl}(\delta\text{-cl}(A)) = \delta\text{-cl}(A)$. (Velicko, 1968)

Sonuç 1.1.15. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\delta\text{-int}(A) \subseteq \text{int}(A) \subseteq A \subseteq \text{cl}(A) \subseteq \delta\text{-cl}(A). \text{ (Velicko, 1968)}$$

Tanım 1.1.16. (X, τ) topolojik uzay $A \subseteq X$ olmak üzere $A \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}(A)))$ koşulunu sağlayan A kümesine bu uzayda bir β -açık küme denir ve yine tümleyeni β -açık olan kümeye β -kapalı küme denir. (X, τ) topolojik uzayındaki tüm β -açık kümelerinin oluşturduğu aile $\beta O(X)$ ile tüm β -kapalı kümelerinin oluşturduğu aileyi $\beta C(X)$ ile ve bir $x \in X$ noktasını içeren β -açık kümelerinin ailesini de $\beta O(X, x)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm β -kapalı kümelerinin ailesini $\beta C(X, x)$ ile gösterilir.

Biçimsel olarak

$$((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)(x \in X)$$

$:=$

$$A, \beta\text{-açık} := A \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}(A)))$$

$$A, \beta\text{-kapalı} := X \setminus A, \beta\text{-açık}$$

$$\beta O(X) := \{A \subseteq X \mid A \subseteq \text{cl}(\text{int}(\text{cl}(A)))\}$$

$$\beta C(X) := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \beta O(X)\}$$

$$\beta O(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in \beta O(X)\}$$

$$\beta C(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in \beta C(X)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.17. (X, τ) topolojik uzay $A \subseteq X$ olmak üzere $A \subseteq \text{cl}(\text{int}(\delta\text{-cl}(A)))$ koşulunu sağlayan A kümesine bu uzayda bir e^* -açık küme denir ve yine tümleyeni e^* -açık olan kümeye e^* -kapalı küme denir. (X, τ) topolojik uzayındaki tüm e^* -açık kümelerinin oluşturduğu aile $e^* O(X)$ ile tüm e^* -kapalı kümelerinin oluşturduğu aileyi $e^* C(X)$ ile ve bir $x \in X$ noktasını içeren e^* -açık kümelerinin ailesini de $e^* O(X, x)$, bir $x \in X$ noktasını içeren tüm e^* -kapalı kümelerinin ailesini $e^* C(X, x)$ ile gösterilir.

Biçimsel olarak

$$\begin{aligned}
& ((X, \tau) \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X)(x \in X) \\
& \quad \Rightarrow \\
& A, e^* \text{-açık} : \Leftrightarrow A \subseteq cl(int(\delta-cl(A))) \\
& A, e^* \text{-kapalı} : \Leftrightarrow X \setminus A, e^* \text{-açık} \\
& e^*O(X) := \{A \subseteq X \mid A \subseteq cl(int(\delta-cl(A)))\} \\
& e^*C(X) := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in e^*O(X)\} \\
& e^*O(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in e^*O(X)\} \\
& e^*C(X, x) := \{A \subseteq X \mid x \in A \in e^*C(X)\}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.18. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesinin kapsadığı e^* -açık kümelerinin birleşimine A kümesinin e^* -içi (Ekici, 2009) denir ve $e^* \text{-int}(A)$ ile gösterilir. Benzer şekilde A kümesini kapsayan e^* -kapalı kümelerinin arakesitine A kümesinin b -kapanışı e^* -kapanışı denir ve $e^* \text{-cl}(A)$ ile gösterilir.

Biçimsel olarak

$$\begin{aligned}
& ((X, \tau), \text{ topolojik uzay})(A \subseteq X) \\
& \quad \Rightarrow \\
& e^* \text{-int}(A) := \bigcup \{U \mid (U \subseteq A)(U \in e^*O(X))\} \\
& e^* \text{-cl}(A) := \bigcap \{F \mid (A \subseteq F)(F \in e^*C(X))\}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.1.19. (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun.

- a) $e^* \text{-int}(A) = \{x \in A \mid (\exists U \in e^*O(X, x))(U \subseteq A)\}$,
- b) $A \subseteq B \Rightarrow e^* \text{-int}(A) \subseteq e^* \text{-int}(B)$,
- c) $e^* \text{-int}(A \cap B) \subseteq e^* \text{-int}(A) \cap e^* \text{-int}(B)$,
- d) $e^* \text{-int}(A) \cup e^* \text{-int}(B) \subseteq e^* \text{-int}(A \cup B)$,
- e) $\mathcal{A} \subseteq e^*O(X) \Rightarrow \cup \mathcal{A} \in e^*O(X)$,
- f) $e^* \text{-int}(A) \in e^*O(X)$,
- g) $A \in e^*O(X) \Leftrightarrow A = e^* \text{-int}(A)$,

- h) $e^*-int(A) = A \cap int(cl(\delta-cl(A)))$,
i) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} e-int(A) \subseteq e-int(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)$. (Ekici, 2008a)

Teorem 1.1.20. (X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun.

- a) $e^*-cl(A) = \{x \in X \mid (\forall U \in e^*O(X, x))(U \cap A \neq \emptyset)\}$,
b) $e^*-cl(X \setminus A) = X \setminus e^*-int(A)$,
c) $A \subseteq B \Rightarrow e^*-cl(A) \subseteq e^*-cl(B)$,
d) $e^*-cl(A) \cup e^*-cl(B) \subseteq e^*-cl(A \cup B)$,
e) $e^*-cl(A \cap B) \subseteq e^*-cl(A) \cap e^*-cl(B)$,
f) $\mathcal{A} \subseteq e^*C(X) \Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \in e^*C(X)$,
g) $e^*-cl(A) \in e^*C(X)$,
h) $A \in eC(X) \Leftrightarrow A = e^*-cl(A)$,
i) $e^*-cl(A) = A \cup int(cl(\delta-int(A)))$. (Ekici, 2009)

Teorem 1.1.21. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$$int(A) \subseteq e^*-int(A) \subseteq A \subseteq e^*-cl(A) \subseteq cl(A). \text{ (Ekici, 2009)}$$

Tanım 1.1.22. (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyon olmak üzere (Y, σ) topolojik uzayındaki her açık kümenin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü (X, τ) topolojik uzayında bir e^* -açık küme ise f fonksiyonuna e^* -**süreklili fonksiyon** denir.

Biçimsel olarak

$$((X, \tau), (Y, \sigma) \text{ topolojik uzaylar})(f \in Y^X)$$

$:=\Rightarrow$

$$f, e^*\text{-süreklili} :\Leftrightarrow (\forall V \in \sigma)(f^{-1}[V] \in e^*O(X))$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.23. Boş kümeden farklı bir G kümesi üzerinde $*$ bir işlem olmak üzere $*$ işlemi G üzerinde birleşme özelliğine sahip, G kümesi $*$ işlemine göre birim elemana sahip, G kümesindeki her elemanın $*$ işlemine göre G içinde tersi var ise $(G, *)$

ikilisine grup denir. Biçimsel olarak

$$(G \neq \emptyset)(* \in G^{G^2})$$

$$:\Rightarrow$$

$$(G, *) \text{ grup} :\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1)} (\forall x, y, z \in G)(x * (y * z) = (x * y) * z) \\ \mathbf{2)} (\exists e \in G)(\forall x \in G)(x * e = e * x = x) \\ \mathbf{3)} (\forall x \in G)(\exists x^{-1} \in G)(x * x^{-1} = x^{-1} * x = e) \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.24. $(G, *)$ grup ve $x, y \in G$ olmak üzere $x * y = y * x$ koşulunu sağlayan $(G, *)$ ikilisine değişmeli grup denir.

Biçimsel olarak

$$(G, *) \text{ grup}$$

$$:\Rightarrow$$

$$(G, *) \text{, değişmeli grup} :\Leftrightarrow (\forall x, y \in G)(x * y = y * x)$$

Tanım 1.1.25. $(R, +)$ değişmeli bir grup R üzerinde \cdot işlemi verilmiş olsun Eğer;

- 1) R 'de \cdot işlemi birleşme özelliğine sahip
 - 2) R 'de \cdot işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği var
- şartlarını sağlayan $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne bir halka denir.

Biçimsel olarak

$$(R \neq \emptyset) \left(+ \in R^{R^2} \right) \left(\cdot \in R^{R^2} \right)$$

$$:\Rightarrow$$

$$(R, +, \cdot) \text{ halka} :\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1)} (R, +) \text{ değişmeli grup} \\ \mathbf{2)} (\forall x, y, z \in R)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \\ \mathbf{3)} (\forall x, y, z \in R)(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)) \\ \mathbf{4)} (\forall x, y, z \in R)((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)) \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 1.1.26. $(R, +, \cdot)$ halka, $U, V \subseteq R$ ve $x \in R$ olsun.

$$\begin{aligned} U + V &:= \{u + v \mid (u \in U)(v \in V)\}, \\ x + U &:= \{x\} + U = \{x + u \mid u \in U\}, \\ U \cdot V &:= \{uv \mid (u \in U)(v \in V)\}, \\ x \cdot U &:= \{x\} \cdot U = \{xu \mid u \in U\}. \end{aligned}$$

Lemma 1.1.27. $(R, +, \cdot)$ halka, $x \in R$ ve $U, V \subseteq R$ olsun.

a) $(U = \emptyset \vee V = \emptyset) \Rightarrow U + V = \emptyset,$

b) $U = \emptyset \Rightarrow x + U = \emptyset.$

Kanut. a) $U = \emptyset$ veya $V = \emptyset$ olsun. Amacımız $U + V = \emptyset$ olduğunu göstermek. Bunun için olmayana ergi yöntemini kullanalım. Varsayalım ki $U + V \neq \emptyset$.

$$\left. \begin{aligned} U + V \neq \emptyset &\Rightarrow (\exists r \in R)(r \in U + V) \Rightarrow (\exists u \in U)(\exists v \in V)(r = u + v) \\ U = \emptyset \vee V = \emptyset & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Çelişki.}$$

b) $U = \emptyset$ olsun. Amacımız $x + U = \emptyset$ olduğunu göstermek. Bunun için olmayana ergi yöntemini kullanalım. Varsayalım ki $x + U \neq \emptyset$.

$$\left. \begin{aligned} x + U \neq \emptyset &\Rightarrow (\exists r \in R)(r \in x + U) \Rightarrow (\exists u \in U)(r = x + u) \\ U = \emptyset & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Çelişki.} \quad \square$$

Sonuç 1.1.28. $(R, +, \cdot)$ halka, $x \in R$ ve $U, V \subseteq R$ olsun.

a) $U + V \neq \emptyset \Rightarrow (U = \emptyset)(V = \emptyset),$

b) $x + U \neq \emptyset \Rightarrow U \neq \emptyset.$

Kanut. Lemma 1.1.27'den açık. □

Tanım 1.1.29. $(R, +, \cdot)$ halka ve (R, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

- $W \in \mathcal{O}(R, x + y) \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(R, x))(\exists V \in \mathcal{O}(R, y))(U + V \subseteq W),$
- $W \in \mathcal{O}(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(R, x))(-U \subseteq W),$
- $W \in \mathcal{O}(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(R, x))(\exists V \in \mathcal{O}(R, y))(UV \subseteq W)$

koşulları sağlanıyorsa o zaman $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsüne bir topolojik halka denir.

Biçimsel olarak

$$((R, +, \cdot), \text{ halka})((R, \tau), \text{ topolojik uzay})$$

$:\Rightarrow$

$$(R, +, \cdot, \tau), \text{ topolojik halka}$$

$:\Leftrightarrow$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(\exists V \in O(R, y))(U + V \subseteq W)],$$

$$(\forall x \in R)[W \in O(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(-U \subseteq W)],$$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(\exists V \in O(R, y))(UV \subseteq W)]$$

şeklinde fade edilir.

Tanım 1.1.30. $(R, +, \cdot)$ halka ve (R, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

- $W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in \beta O(R, x))(\exists V \in \beta O(R, y))(U + V \subseteq W),$
- $W \in O(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in \beta O(R, x))(-U \subseteq W),$
- $W \in O(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in \beta O(R, x))(\exists V \in \beta O(R, y))(UV \subseteq W)$

koşulları sağlanıyorsa o zaman $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsüne bir β -topolojik halka denir.

Biçimsel olarak

$$((R, +, \cdot), \text{ halka})((R, \tau), \text{ topolojik uzay})$$

$:\Rightarrow$

$$(R, +, \cdot, \tau), \beta\text{-topolojik halka}$$

$:\Leftrightarrow$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in \beta O(R, x))(\exists V \in \beta O(R, y))(U + V \subseteq W)],$$

$$(\forall x \in R)[W \in O(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in \beta O(R, x))(-U \subseteq W)],$$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in \beta O(R, x))(\exists V \in \beta O(R, y))(UV \subseteq W)]$$

şeklinde fade edilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. e^* -topolojik Halkalar

Tanım 2.1.1. $(R, +, \cdot)$ halka ve (R, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

- $W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, y))(U + V \subseteq W)$,
- $W \in O(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(-U \subseteq W)$,
- $W \in O(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, y))(UV \subseteq W)$

koşulları sağlanıyorsa o zaman $(R, +, \cdot, \tau)$ dördlüsüne bir e^* -topolojik halka denir.

Biçimsel olarak

$$((R, +, \cdot), \text{halka})((R, \tau), \text{topolojik uzay})$$
$$:=\Rightarrow$$

$$(R, +, \cdot, \tau), e^*\text{-topolojik halka}$$

$$:\Leftrightarrow$$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, y))(U + V \subseteq W)],$$

$$(\forall x \in R)[W \in O(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(-U \subseteq W)],$$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, y))(UV \subseteq W)]$$

şeklinde ifade edilir.

Uyarı 2.1.2. β -topolojik halka ve e^* -topolojik halka tanımlarından her β -topolojik halkanın bir e^* -topolojik halka olduğu hemen görülür. Ancak aşağıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere karşıtı her zaman doğru değildir.

Örnek 2.1.3. $R = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, R, \{a\}, \{a, b\}\}$ olmak üzere $+$: $R^2 \rightarrow R$ ve \cdot : $R^2 \rightarrow R$ işlemleri aşağıdaki tablolardaki gibi tanımlansın.

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	c

(R, τ) topolojik uzayında

$$C(R) = \{\emptyset, R, \{b, c, d\}, \{c, d\}\}$$

ve

$$RO(R) = RC(R) = \{\emptyset, R\}$$

olur. Bu durumda her $A \in 2^R \setminus \{\emptyset\}$ için $\delta-cl(A) = R$ olacağından

$$A \subseteq cl(int(\delta-cl(A))) = R$$

koşulu sağlanır. Dolayısıyla R kümesinin bütün altkümeleri (R, τ) topolojik uzayında e^* -açıktır yani

$$e^*O(R) = 2^R$$

olur. Öte yandan

$$cl(int(cl(\emptyset))) = cl(int(\emptyset)) = cl(\emptyset) = \emptyset \supseteq \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{a\}))) = cl(int(R)) = cl(R) = R \supseteq \{a\} \Rightarrow \{a\} \in \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{b\}))) = cl(int(\{b, c, d\})) = cl(\emptyset) = \emptyset \not\supseteq \{b\} \Rightarrow \{b\} \notin \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{c\}))) = cl(int(\{b, c, d\})) = cl(\emptyset) = \emptyset \not\supseteq \{c\} \Rightarrow \{c\} \notin \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{d\}))) = cl(int(\{c, d\})) = cl(\emptyset) = \emptyset \not\supseteq \{c, d\} \Rightarrow \{c, d\} \notin \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{a, b\}))) = cl(int(R)) = cl(R) = R \supseteq \{a, b\} \Rightarrow \{a, b\} \in \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{a, c\}))) = cl(int(R)) = cl(R) = R \supseteq \{a, c\} \Rightarrow \{a, c\} \in \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{a, d\}))) = cl(int(R)) = cl(R) = R \supseteq \{a, d\} \Rightarrow \{a, d\} \in \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{b, c\}))) = cl(int(\{b, c, d\})) = cl(\emptyset) = \emptyset \not\supseteq \{b, c, d\} \Rightarrow \{b, c, d\} \notin \beta O(R),$$

$$cl(int(cl(\{b, d\}))) = cl(int(\{b, c, d\})) = cl(\emptyset) = \emptyset \not\supseteq \{b, d\} \Rightarrow \{b, d\} \notin \beta O(R),$$

$cl(int(cl(\{c,d\}))) = cl(int(\{b,c,d\})) = cl(\emptyset) = \emptyset \not\supseteq \{b,c,d\} \Rightarrow \{c,d\} \notin \beta O(R),$
 $cl(int(cl(\{a,b,c\}))) = cl(int(R)) = cl(R) = R \supseteq \{a,b,c\} \Rightarrow \{a,b,c\} \in \beta O(R),$
 $cl(int(cl(\{a,b,d\}))) = cl(int(R)) = cl(R) = R \supseteq \{a,b,d\} \Rightarrow \{a,b,d\} \in \beta O(R),$
 $cl(int(cl(\{a,c,d\}))) = cl(int(\{a,c,d\})) = cl(R) = R \supseteq \{a,c,d\} \Rightarrow \{a,c,d\} \in \beta O(R),$
 $cl(int(cl(\{b,c,d\}))) = cl(int(\{b,c,d\})) = cl(\emptyset) = \emptyset \not\supseteq \{b,c,d\} \Rightarrow \{b,c,d\} \notin \beta O(R),$
 $cl(int(cl(R))) = cl(int(R)) = cl(R) = R \supseteq R \Rightarrow R \in \beta O(R)$
 olduğundan

$$\beta O(R) = \{\emptyset, R, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}\}$$

olur.

Şimdi de $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsünün bir β -topolojik halka olmadığını gösterelim. Ele alınan halkada

$$c + c = a$$

olduğu açıktır. Eğer $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsü bir β -topolojik halka olsaydı $\{a\} \in O(R, a)$ olduğundan $c \in R$ için $U + V \subseteq \{a\}$ olacak şekilde $U, V \in \beta O(R, c)$ olması gerekirdi.

$$\beta O(R) = \{\emptyset, R, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}\}$$

oldüğundan

$$\beta O(R, c) = \{R, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$U := \{a,c\} \text{ ve } V := \{a,b,c\} \text{ seçilirse } U + V = \{a,b,c,d\} \not\subseteq \{a\}$$

$$U := \{a,c\} \text{ ve } V := \{a,c,d\} \text{ seçilirse } U + V = \{a,b,c,d\} \not\subseteq \{a\}$$

$$U := \{a,b,c\} \text{ ve } V := \{a,b,c\} \text{ seçilirse } U + V = \{a,b,c,d\} \not\subseteq \{a\}$$

olur yani

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, y))(U + V \subseteq W)]$$

önermesi doğru değildir. O halde $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsü bir β -topolojik halka değildir.

Şimdi ise $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsünün bir e^* -topolojik halka olduğunu gösterelim.

$x, y \in R$ ve $W \in O(R, x+y)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(R, x+y) \\ (U := \{x\})(V := \{y\}) \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^*O(R, x))(V \in e^*O(R, y))(U + V \subseteq W).$$

Şimdi de $x \in R$ ve $W \in O(R, -x)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(R, -x) \Rightarrow -x \in W \in O(R) \\ U := \{x\} \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^*O(R, x))(-U \subseteq W).$$

Son olarak da $x, y \in R$ ve $W \in O(R, xy)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(R, xy) \\ (U := \{x\})(V := \{y\}) \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^*O(R, x))(V \in e^*O(R, y))(UV \subseteq W).$$

Dolayısıyla $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsü bir e^* -topolojik halkadır.

Lemma 2.1.4. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$(x - \delta, x + \delta) \cdot (y - \delta, y + \delta) \subseteq (xy - \varepsilon, xy + \varepsilon)$$

koşulu sağlanacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Kanıt. Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$(x - \delta, x + \delta) \cdot (y - \delta, y + \delta) \subseteq (xy - \varepsilon, xy + \varepsilon)$$

koşulunun sağlanması için $\delta > 0$ sayısının

$$(x - \delta) \cdot (y - \delta) \in (xy - \varepsilon, xy + \varepsilon)$$

$$(x - \delta) \cdot (y + \delta) \in (xy - \varepsilon, xy + \varepsilon)$$

$$(x + \delta) \cdot (y - \delta) \in (xy - \varepsilon, xy + \varepsilon)$$

$$(x + \delta) \cdot (y + \delta) \in (xy - \varepsilon, xy + \varepsilon)$$

koşullarını yani

$$xy - \varepsilon \leq xy - x\delta - y\delta + \delta^2 \leq xy + \varepsilon$$

$$xy - \varepsilon \leq xy + x\delta - y\delta - \delta^2 \leq xy + \varepsilon$$

$$xy - \varepsilon \leq xy - x\delta + y\delta - \delta^2 \leq xy + \varepsilon$$

$$xy - \varepsilon \leq xy + x\delta + y\delta + \delta^2 \leq xy + \varepsilon$$

koşullarını yani

$$-\varepsilon \leq -x\delta - y\delta + \delta^2 \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq x\delta - y\delta - \delta^2 \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq -x\delta + y\delta - \delta^2 \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq x\delta + y\delta + \delta^2 \leq \varepsilon$$

koşullarını yani

$$|-x\delta - y\delta + \delta^2| \leq \varepsilon$$

$$|x\delta - y\delta - \delta^2| \leq \varepsilon$$

$$|-x\delta + y\delta - \delta^2| \leq \varepsilon$$

$$|x\delta + y\delta + \delta^2| \leq \varepsilon$$

koşullarını sağlaması gerekir.

$$|-x\delta - y\delta + \delta^2| \leq |-x\delta| + |-y\delta| + |\delta^2| = |x\delta| + |y\delta| + \delta^2$$

$$|x\delta - y\delta + \delta^2| \leq |x\delta| + |-y\delta| + |\delta^2| = |x\delta| + |y\delta| + \delta^2$$

$$|-x\delta + y\delta + \delta^2| \leq |-x\delta| + |y\delta| + |\delta^2| = |x\delta| + |y\delta| + \delta^2$$

$$|x\delta + y\delta + \delta^2| \leq |x\delta| + |y\delta| + |\delta^2| = |x\delta| + |y\delta| + \delta^2$$

olduğundan $\delta > 0$ sayısını

$$|x\delta| + |y\delta| + \delta^2 \leq \varepsilon$$

koşulu sağlanacak şekilde seçersek işimiz biter. Şimdi $\delta > 0$ sayısını $0 < \delta \leq 1$ olacak şekilde seçeceğimizi kendimize söz verelim.

$$0 < \delta \leq 1 \Rightarrow |x\delta| + |y\delta| + \delta^2 \leq |x|\delta + |y|\delta + \delta = \delta(|x| + |y| + 1)$$

olduğundan

$$0 < \delta \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{|x| + |y| + 1} \right\}$$

seçilirse hem istenen koşul sağlanmış olur hem de verdiğimiz sözü tutmuş oluruz.

Toparlayacak olursak her $\varepsilon > 0$ için $0 < \delta \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{|x| + |y| + 1} \right\}$ seçilirse

$$(x - \delta, x + \delta) \cdot (y - \delta, y + \delta) \subseteq (xy - \varepsilon, xy + \varepsilon)$$

koşulu sağlanır. □

Örnek 2.1.5. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gerçel sayılar halkası ve $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathcal{U})$ dörtlüsü bir e^* -topolojik halkadır.

Şimdi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $W \in O(\mathbb{R}, x+y)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(\mathbb{R}, x+y) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)((x+y-\varepsilon, x+y+\varepsilon) \subseteq W) \\ (U := (x - \frac{\varepsilon}{4}, x + \frac{\varepsilon}{4})) (V := (y - \frac{\varepsilon}{4}, y + \frac{\varepsilon}{4})) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (U \in e^*O(\mathbb{R}, x))(V \in e^*O(\mathbb{R}, y))(U+V \subseteq W) \dots (1)$$

Şimdi de $x \in \mathbb{R}$ ve $W \in O(\mathbb{R}, -x)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(\mathbb{R}, -x) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)((-x-\varepsilon, -x+\varepsilon) \subseteq W) \\ U := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^*O(\mathbb{R}, x))(-U \subseteq W) \dots (2)$$

Son olarak da $x, y \in \mathbb{R}$ ve $W \in O(\mathbb{R}, xy)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(\mathbb{R}, xy) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)((xy - \varepsilon, xy + \varepsilon) \subseteq W) \\ U := \left(x - \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|x|+|y|+1}\right\}, x + \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|x|+|y|+1}\right\}\right) \\ V := \left(y - \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|x|+|y|+1}\right\}, y + \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|x|+|y|+1}\right\}\right) \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{Lemma 2.1.4}}$$

$$\Rightarrow (U \in e^*O(\mathbb{R}, x))(V \in e^*O(\mathbb{R}, y))(UV \subseteq W) \dots (3)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \tau)$, e^* -topolojik halka.

Örnek 2.1.6. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gerçel sayılar halkası ve \mathbb{R} gerçel sayılar kümesi üzerindeki topoloji $\tau = 2^{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsü bir e^* -topolojik halkadır.

(\mathbb{R}, τ) ayrık topolojik uzay olduğundan her $A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$\delta\text{-cl}(A) = \text{int}(A) = \text{cl}(A) = A$$

olur. Dolayısıyla $e^*O(\mathbb{R}) = 2^{\mathbb{R}}$ elde edilir.

Şimdi $x, y \in \mathbb{R}$ ve $W \in O(\mathbb{R}, x+y)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(\mathbb{R}, x+y) \\ (U := \{x\})(V := \{y\}) \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^*O(\mathbb{R}, x))(V \in e^*O(\mathbb{R}, y))(U+V \subseteq W) \dots (1)$$

Şimdi de $x \in \mathbb{R}$ ve $W \in O(\mathbb{R}, -x)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(\mathbb{R}, -x) \Rightarrow -x \in W \in O(\mathbb{R}) \\ U := \{x\} \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^*O(\mathbb{R}, x))(-U \subseteq W) \dots (2)$$

Son olarak da $x, y \in \mathbb{R}$ ve $W \in O(\mathbb{R}, xy)$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} W \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, xy) \\ (U := \{x\})(V := \{y\}) \end{array} \right\} \Rightarrow (U \in e^* \mathcal{O}(\mathbb{R}, x))(V \in e^* \mathcal{O}(\mathbb{R}, y))(UV \subseteq W) \dots (3)$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \tau)$, e^* -topolojik halka.

Örnek 2.1.7. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gerçel sayılar halkası ve \mathbb{R} gerçel sayılar kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ olsun.

$$\text{int}(cl(\emptyset)) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in RO(\mathbb{R})$$

$$\text{int}(cl(\mathbb{R})) = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in RO(\mathbb{R})$$

$$\text{int}(cl(\{1\})) = \{1\} \Rightarrow \{1\} \in RO(\mathbb{R})$$

$$\text{int}(cl(\{2\})) = \{2\} \Rightarrow \{2\} \in RO(\mathbb{R})$$

olduğundan (\mathbb{R}, τ) topolojik uzayındaki her açık küme bir δ -açıktır. Dolayısıyla

$$\delta\mathcal{O}(\mathbb{R}) = \tau$$

olur. Şimdi de

$$e^* \mathcal{O}(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \cap \{1, 2\} \neq \emptyset\}$$

olduğunu gösterelim.

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $A \cap \{1, 2\} = \emptyset$ olsun. Bu durumda $cl(\text{int}(\delta-cl(A))) = \emptyset$ olacağından

$$A \notin e^* \mathcal{O}(\mathbb{R})$$

olur. Şimdi de $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $A \cap \{1, 2\} \neq \emptyset$ olsun. $A \in e^* \mathcal{O}(\mathbb{R})$ olduğunu gösterelim.

$$A \cap \{1, 2\} \neq \emptyset \Rightarrow (1 \in A)(2 \notin A) \vee (2 \in A)(1 \notin A) \vee (1, 2 \in A)$$

I. Durum: $1 \in A$ ve $2 \notin A$ olsun.

$$(1 \in A)(2 \notin A) \Rightarrow A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{2\} = cl(\text{int}(\delta-cl(A))) \Rightarrow A \in e^* \mathcal{O}(\mathbb{R}).$$

II. Durum: $2 \in A$ ve $1 \notin A$ olsun.

$$(2 \in A)(1 \notin A) \Rightarrow A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\} = cl(\text{int}(\delta-cl(A))) \Rightarrow A \in e^* \mathcal{O}(\mathbb{R}).$$

III. Durum: $1, 2 \in A$ olsun.

$$1, 2 \in A \Rightarrow A \subseteq \mathbb{R} = cl(int(\delta-cl(A))) \Rightarrow A \in e^*O(\mathbb{R}).$$

Dolayısıyla

$$e^*O(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \cap \{1, 2\} \neq \emptyset\}$$

olur. Öte yandan $-3, 4 \in \mathbb{R}$ ve $\{1\} \in O(\mathbb{R}, -3+4) = O(\mathbb{R}, 1)$ için $U+V \subseteq \{1\}$ olacak şekilde $U \in e^*O(\mathbb{R}, -3)$ ve $V \in e^*O(\mathbb{R}, 4)$ yoktur. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsü bir e^* -topolojik halka değildir.

Teorem 2.1.8. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $A \in O(R) \Rightarrow -A \in e^*O(R)$,

b) $(A \in O(R))(x \in R) \Rightarrow x+A \in e^*O(R)$,

c) $(A \in O(R))(x \in R) \Rightarrow A+x \in e^*O(R)$.

Kanıt. a) $A \in O(R)$ olsun. Amacımız

$$-A \in e^*O(R)$$

yani

$$e^*-int(-A) = -A$$

olduğunu göstermek. Bunun için de

$$e^*-int(-A) \subseteq -A$$

ve

$$-A \subseteq e^*-int(-A)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$e^*-int(-A) \subseteq -A \dots (1)$$

ilişkisi her zaman doğru. Dolayısıyla

$$-A \subseteq e^*-int(-A)$$

olduğunu gösterirsek kanıt biter. Şimdi $y \in -A$ olsun. $y \in e^*-int(-A)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left. \begin{array}{l} y \in -A \Rightarrow -y \in A \\ A \in O(R) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Tanım 2.1.1}} (\exists U \in e^*O(R, y))(-U \subseteq A)$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, y))(U \subseteq -A)$$

$$\Rightarrow y \in e^* \text{-int}(-A)$$

O halde

$$-A \subseteq e^* \text{-int}(-A) \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow e^* \text{-int}(-A) = -A \Rightarrow -A \in e^*O(R).$$

b) $A \in O(R)$ ve $x \in R$ olsun. Amacımız

$$x + A \in e^*O(R)$$

yani

$$x + A = e^* \text{-int}(x + A)$$

olduğunu göstermek. Bunun için de

$$e^* \text{-int}(x + A) \subseteq x + A$$

ve

$$x + A \subseteq e^* \text{-int}(x + A)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$e^* \text{-int}(x + A) \subseteq x + A \dots (1)$$

ilişkisi her zaman doğru. Dolayısıyla

$$x + A \subseteq e^* \text{-int}(x + A)$$

olduğunu gösterirsek kanıt biter. Şimdi $y \in x + A$ olsun. $y \in e^* \text{-int}(x + A)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left. \begin{array}{l} y \in x + A \Rightarrow (\exists z \in A)(y = x + z) \\ A \in O(R) \end{array} \right\} \Rightarrow -x + y \in A \in O(R)$$

$$\xrightarrow{\text{Tanım 2.1.1}} (\exists U \in e^*O(R, -x))(\exists V \in e^*O(R, y))(-x + V \subseteq U + V \subseteq A)$$

$$\Rightarrow (\exists V \in e^*O(R, y))(-x + V \subseteq A)$$

$$\Rightarrow (\exists V \in e^*O(R, y))(V \subseteq x + A)$$

$$\Rightarrow y \in e^*\text{-int}(x + A)$$

O halde

$$x + A \subseteq e^*\text{-int}(x + A) \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow e^*\text{-}(x + A) = x + A \Rightarrow x + A \in e^*O(R).$$

c) Toplama işleminin değişmeli olmasından dolayı (b) şıkkından hemen çıkar. \square

Sonuç 2.1.9. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) A \in O(R) \Rightarrow -A \subseteq cl(int(\delta\text{-cl}(-A))),$$

$$b) (x \in R)(A \in O(R)) \Rightarrow x + A \subseteq cl(int(\delta\text{-cl}(x + A))),$$

$$c) (x \in R)(A \in O(R)) \Rightarrow A + x \subseteq cl(int(\delta\text{-cl}(A + x))).$$

Teorem 2.1.10. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) A \in C(R) \Rightarrow -A \in e^*C(R),$$

$$b) (x \in R)(A \in C(R)) \Rightarrow x + A \in e^*C(R),$$

$$c) (x \in R)(A \in C(R)) \Rightarrow A + x \in e^*C(R).$$

Kanıt. a) $A \in C(R)$ olsun. Amacımız

$$-A \in e^*C(R)$$

yani

$$-A = e^*\text{-cl}(-A)$$

olduğunu göstermek. Bunun için de

$$-A \subseteq e^*\text{-cl}(-A)$$

ve

$$e^*\text{-cl}(-A) \subseteq -A$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$-A \subseteq e^*-cl(-A) \dots (1)$$

ilişkisi her zaman doğru. Dolayısıyla

$$e^*-cl(-A) \subseteq -A$$

olduğunu gösterirsek kanıt biter. Şimdi $y \in e^*-cl(-A)$ olsun. $y \in -A$ yani $-y \in A$ olduğunu göstereceğiz. Keyfi bir $W \in O(R, -y)$ alalım.

$$\left. \begin{array}{l} W \in O(R, -y) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, y))(-U \subseteq W) \\ y \in e^*-cl(-A) \end{array} \right\} \Rightarrow (U \subseteq -W)(U \cap (-A) \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq U \cap (-A) \subseteq (-W) \cap (-A)$$

$$\Rightarrow W \cap A \neq \emptyset$$

Buradan $-y \in cl(A)$ elde ederiz. Ayrıca $A \in C(R)$ olduğundan $-y \in A$ yani $y \in -A$ olur. O halde

$$e^*-cl(-A) \subseteq -A \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow -A = e^*-cl(-A) \Rightarrow -A \in e^*C(R).$$

b) $y \in R$ ve $A \in C(R)$ olsun. Amacımız

$$x+A \in e^*C(R)$$

yani

$$x+A = e^*-cl(x+A)$$

olduğunu göstermek. Bunun için de

$$x+A \subseteq e^*-cl(x+A)$$

ve

$$e^*-cl(x+A) \subseteq x+A$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$x+A \subseteq e^*-cl(x+A) \dots (1)$$

ilişkisi her zaman doğru. Dolayısıyla

$$e^*-cl(x+A) \subseteq x+A$$

olduğunu gösterirsek kanıt biter. $y \in e^*-cl(x+A)$ olsun. $y \in x+A$ yani $-x+y \in A$ olduğunu göstereceğiz. Keyfi bir $W \in O(R, -x+y)$ alalım.

$$W \in O(R, -x+y) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists U \in e^*O(R, -x))(\exists V \in e^*O(R, y))(U+V \subseteq W) \\ y \in e^*-cl(x+A) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (U+V \subseteq W)(V \cap (x+A) \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq (-x+V) \cap A \subseteq (U+V) \cap A \subseteq W \cap A$$

$$\Rightarrow W \cap A \neq \emptyset$$

Buradan $-x+y \in cl(A)$ elde ederiz. $A \in C(R)$ olduğundan $-x+y \in A$ olur. Dolayısıyla $y \in x+A$.

c) Toplama işleminin değişmeli olmasından dolayı (b) şikkından hemen çıkar. \square

Sonuç 2.1.11. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) A \in C(R) \Rightarrow int(cl(int(-A))) \subseteq -A,$$

$$b) (A \in C(R))(x \in R) \Rightarrow int(cl(int(x+A))) \subseteq x+A,$$

$$c) (A \in C(R))(x \in R) \Rightarrow int(cl(int(A+x))) \subseteq A+x.$$

2.2. Bazı Temel Sonuçlar

Teorem 2.2.1. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka ve a, R kümesinin belirli bir elemanı olmak üzere $f_a(x) := a+x$ kuralı ile verilen $f_a : R \rightarrow R$ fonksiyonu e^* -süreklidir.

Kanıt. $V \in O(R)$ olsun. Amacımız $f^{-1}[V] \in e^*O(R)$ olduğunu göstermek.

$$f^{-1}[V] = \{x \in R : f_a(x) \in V\} = \{x \in R : x \in -a+V\} = -a+V \left. \begin{array}{l} \\ (a \in R)(V \in O(R)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Teorem 2.1.8}} \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow f^{-1}[V] \in e^*O(R). \quad \square$$

denir. Bir $(R, +, \cdot)$ halkasındaki tüm tersinir elemanların oluşturduğu küme R^* ile gösterilecektir.

Biçimsel olarak

$$R^* := \{x \in R \mid (\exists y \in R)(xy = yx = 1_R)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.2.8. $(R, +, \cdot, \tau)$ birimli e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $(A \in O(R))(r \in R^*) \Rightarrow Ar \in e^*O(R)$,

b) $(A \in O(R))(r \in R^*) \Rightarrow rA \in e^*O(R)$.

Kanıt. a) $A \in O(R)$ and $r \in R^*$ olsun. Amacımız

$$Ar \in e^*O(R)$$

yani

$$Ar = e^*\text{-int}(Ar)$$

olduğunu göstermek. Bunun için de

$$e^*\text{-int}(Ar) \subseteq Ar$$

ve

$$Ar \subseteq e^*\text{-int}(Ar)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$e^*\text{-int}(Ar) \subseteq Ar \dots (1)$$

ilişkisi her zaman doğru. Dolayısıyla

$$Ar \subseteq e^*\text{-int}(Ar)$$

olduğunu gösterirsek kanıt biter. Şimdi $x \in Ar$ olsun. $x \in e^*\text{-int}(Ar)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left. \begin{array}{l} x \in Ar \Rightarrow (\exists a \in A)(x = ar) \\ r \in R^* \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists a \in A)(xr^{-1} = a) \\ A \in O(R) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, r^{-1}))(Ur^{-1} \subseteq UV \subseteq A)$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(U \subseteq Ar)$$

$$\Rightarrow x \in e^*-int(Ar)$$

O halde

$$Ar \subseteq e^*-int(Ar) \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow Ar = e^*-int(Ar) \Rightarrow Ar \in e^*O(R).$$

b) (a) şikkına benzer şekilde yapılır. □

Teorem 2.2.9. $(R, +, \cdot, \tau)$ birimli e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) (A \in C(R))(r \in R^*) \Rightarrow Ar \in e^*C(R),$$

$$b) (A \in C(R))(r \in R^*) \Rightarrow rA \in e^*C(R).$$

Kanıt. $A \in C(R)$ ve $r \in R^*$ olsun. Amacımız

$$Ar \in e^*C(R)$$

yani

$$Ar = e^*-cl(Ar)$$

olduğunu göstermek. Bunun için de

$$Ar \subseteq e^*-cl(Ar)$$

ve

$$e^*-cl(Ar) \subseteq Ar$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$Ar \subseteq e^*-cl(Ar) \dots (1)$$

ilişkisi her zaman doğru. Dolayısıyla

$$e^*-cl(Ar) \subseteq Ar$$

olduğunu gösterirsek kanıt biter.

$x \notin Ar$ olsun. $x \notin e^*-cl(Ar)$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} x \notin rA \Rightarrow (\forall a \in A)(x \neq ra) \\ A \in C(R) \Rightarrow A = cl(A) \end{array} \right\} \Rightarrow (\forall a \in cl(A))(x \neq ra) \\
& \Rightarrow (\forall a \in cl(A))(r^{-1}x \neq a) \\
& \Rightarrow r^{-1}x \notin cl(A) \\
& \Rightarrow (\exists W \in O(R, r^{-1}x))(W \cap A = \emptyset) \\
& \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, r^{-1}x))(\exists V \in e^*O(R, r^{-1}x))(r^{-1}V \cap A \subseteq UV \cap A \subseteq W \cap A = \emptyset) \\
& \Rightarrow (\exists V \in e^*O(R, x))(r^{-1}V \cap A = \emptyset) \\
& \Rightarrow (\exists V \in e^*O(R, x))(V \cap rA = \emptyset) \\
& \Rightarrow x \notin e^*-cl(rA)
\end{aligned}$$

O halde

$$e^*-cl(rA) \subseteq rA \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow rA = e^*-cl(rA) \Rightarrow rA \in e^*C(R).$$

b) (a) şikkına benzer şekilde yapılır. □

Teorem 2.2.10. $(R, +, \cdot, \tau)$ birimli e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $r \in R \Rightarrow r \cdot e^*-cl(A) \subseteq cl(rA)$,
- b) $r \in R \Rightarrow int(rA) \subseteq r \cdot e^*-int(A)$,
- c) $r \in R^* \Rightarrow r \cdot int(A) \subseteq e^*-int(rA)$,
- d) $r \in R^* \Rightarrow e^*-cl(rA) \subseteq r \cdot cl(A)$,
- e) $r \in R \Rightarrow e^*-cl(A) \cdot r \subseteq cl(Ar)$,
- f) $r \in R^* \Rightarrow int(A) \cdot r \subseteq e^*-int(Ar)$.

Kanıt. a) $x \in r \cdot e^*-cl(A)$ olsun. Amacımız $x \in cl(rA)$ olduğunu göstermek. Keyfi bir $W \in O(R, x)$ alalım. $W \cap rA \neq \emptyset$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} x \in r \cdot e^*-cl(A) \Rightarrow (\exists y \in e^*-cl(A))(x = ry) \\ W \in O(R, x) \end{array} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow (x \in e^*-cl(A))(\exists U \in e^*O(R, r))(\exists V \in e^*O(R, y))(UV \subseteq W)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, r))(\exists V \in e^*O(R, y))(UV \subseteq W)(V \cap A \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq UV \cap rA \subseteq W \cap rA$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq W \cap rA$$

O halde $x \in cl(rA)$. Dolayısıyla $r \cdot e^*-cl(A) \subseteq cl(rA)$.

b) $x \in int(rA)$ olsun. Amacımız $x \in r \cdot e^*-int(A)$ olduğunu göstermek.

$$x \in int(rA) \Rightarrow (x \in rA)(int(rA) \in O(R, x))$$

$$\Rightarrow (\exists y \in A)(x = ry)(int(rA) \in O(R, x))$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, r))(\exists V \in e^*O(R, y))(rV \subseteq UV \subseteq int(rA) \subseteq rA)$$

$$\Rightarrow (\exists V \in e^*O(R, y))(V \subseteq A)$$

$$\Rightarrow y \in e^*-int(A)$$

$$\Rightarrow x = ry \in r \cdot e^*-int(A).$$

c) $x \in r \cdot int(A)$ olsun.

$$x \in r \cdot int(A) \Rightarrow r^{-1}x \in int(A)$$

$$\Rightarrow int(A) \in O(R, r^{-1}x)$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, r^{-1}))(\exists V \in e^*O(R, x))(r^{-1}V \subseteq UV \subseteq int(A) \subseteq A)$$

$$\Rightarrow (\exists V \in e^*O(R, x))(V \subseteq rA)$$

$$\Rightarrow x \in e^*-int(rA).$$

d) $x \in e^*-cl(rA)$ olsun. Amacımız $x \in r \cdot cl(A)$ yani $r^{-1}x \in cl(A)$ olduğunu göstermek.

Keyfi bir $W \in O(R, r^{-1}x)$ alalım. $W \cap A \neq \emptyset$ olduğunu göstereceğiz.

$$W \in O(R, r^{-1}x) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, r^{-1}))(\exists V \in e^*O(R, x))(r^{-1}V \subseteq UV \subseteq W) \left. \vphantom{W \in O(R, r^{-1}x)} \right\} \Rightarrow x \in e^*-cl(rA)$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, r^{-1}))(\exists V \in e^*O(R, x))(r^{-1}V \subseteq UV \subseteq W)(V \cap rA \neq \emptyset)$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq UV \cap A \subseteq W \cap A$$

O halde $r^{-1}x \in cl(A)$ yani $x \in r \cdot cl(A)$. Dolayısıyla $e^*-cl(rA) \subseteq r \cdot cl(A)$.

e) $x \in e^*-cl(A) \cdot r$ olsun. Amacımız $x \in cl(Ar)$ olduğunu göstermek. Şimdi $W \in O(R, x)$ olsun.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} x \in e^*-cl(A) \cdot r \Rightarrow (\exists y \in e^*-cl(A))(x = yr) \\ W \in O(R, x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow (y \in e^*-cl(A))(\exists U \in e^*O(R, y))(\exists V \in e^*O(R, r))(UV \subseteq W) \\
& \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, y))(\exists V \in e^*O(R, r))(UV \subseteq W)(U \cap A \neq \emptyset) \\
& \Rightarrow \emptyset \neq UV \cap Ar \subseteq W \cap Ar \\
& \Rightarrow \emptyset \neq W \cap Ar
\end{aligned}$$

O halde $x \in cl(Ar)$. Dolayısıyla $e^*-cl(A) \cdot r \subseteq cl(Ar)$.

f) $x \in int(A) \cdot r$ olsun. Amacımız $x \in e^*-int(Ar)$ olduğunu göstermek.

$$\begin{aligned}
x \in int(A) \cdot r & \Rightarrow xr^{-1} \in int(A) \\
& \Rightarrow int(A) \in O(R, xr^{-1}) \\
& \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, r^{-1}))(Ur^{-1} \subseteq UV \subseteq int(A) \subseteq A) \\
& \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(U \subseteq Ar) \\
& \Rightarrow x \in e^*-int(Ar). \quad \square
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.11. $(R, +, \cdot, \tau)$ birimli e^* -topolojik halka ve r, R^* kümesinin belirli bir elemanı olmak üzere $f_r(x) := rx$ kuralı ile verilen $f_r : R \rightarrow R$ fonksiyonu e^* -sürekli.

Kanıt. $V \in O(R)$ olsun. Amacımız

$$f_r^{-1}[V] \in e^*O(R)$$

yani

$$f_r^{-1}[V] = e^*-int(f_r^{-1}[V])$$

olduğunu göstermek. Bunun için de

$$e^*-int(f_r^{-1}[V]) \subseteq f_r^{-1}[V]$$

ve

$$f_r^{-1}[V] \subseteq e^*-int(f_r^{-1}[V])$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$e^*-int(f_r^{-1}[V]) \subseteq f_r^{-1}[V] \dots (1)$$

ilişkisi her zaman doğru. Dolayısıyla

$$f_r^{-1}[V] \subseteq e^*-int(f_r^{-1}[V])$$

olduğunu gösterirsek kanıt biter. $x \in f_r^{-1}[V]$ olsun. $x \in e^*-int(f_r^{-1}[V])$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left. \begin{array}{l} x \in f_r^{-1}[V] = r^{-1}V \\ V \in O(R) \Rightarrow V = int(V) \end{array} \right\} \Rightarrow x \in r^{-1} \cdot int(V) \stackrel{\text{Teorem 2.2.10}}{\Rightarrow} x \in e^*-int(r^{-1}V) \left. \begin{array}{l} \\ r^{-1}V = f_r^{-1}[V] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in e^*-int(f_r^{-1}[V])$$

O halde

$$f_r^{-1}[V] \subseteq e^*-int(f_r^{-1}[V]) \dots (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f_r^{-1}[V] = e^*-int(f_r^{-1}[V]) \Rightarrow f_r^{-1}[V] \in e^*O(R). \quad \square$$

Teorem 2.2.12. $(R, +, \cdot, \tau)$ birimli e^* -topolojik halka ve r, R^* kümesinin belirli bir elemanı olmak üzere $f_r(x) := xr$ kuralı ile verilen $f_r : R \rightarrow R$ fonksiyonu e^* -süreklidir.

Kanıt. Teorem 2.2.11'e benzer şekilde yapılır. □

Teorem 2.2.13. $(R, +, \cdot, \tau)$ birimli e^* -topolojik halka ve r, R^* kümesinin belirli bir elemanı olmak üzere $f_r(x) := rxr$ kuralı ile verilen $f_r : R \rightarrow R$ fonksiyonu e^* -süreklidir.

Kanıt. Teorem 2.2.11 ve Teorem 2.2.12'dan direkt çıkar. □

Sonuç 2.2.14. Teorem 2.2.11, Teorem 2.2.12 ve Teorem 2.2.13'de verilen fonksiyonlar birer e^* -homeomorfizmadır.

Teorem 2.2.15. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) x \in R \Rightarrow x + e^*-cl(A) \subseteq cl(x+A),$$

$$b) x \in R \Rightarrow e^*-cl(x+A) \subseteq x + cl(A),$$

$$c) x \in R \Rightarrow x + int(A) \subseteq e^*-int(x+A),$$

d) $x \in R \Rightarrow \text{int}(x+A) \subseteq x + e^* \text{-int}(A)$.

Kanıt. a) $x \in R$ ve $y \in x + e^* \text{-cl}(A)$ olsun. Amacımız $y \in \text{cl}(x+A)$ olduğunu göstermek. Keyfi bir $W \in O(R, y)$ alalım. $W \cap (x+A) \neq \emptyset$ olduğunu göstereceğiz.

$$y \in x + e^* \text{-cl}(A) \Rightarrow (\exists z \in e^* \text{-cl}(A))(y = x + z) \left. \vphantom{y \in x + e^* \text{-cl}(A)} \right\} \Rightarrow \\ W \in O(R, y) \left. \vphantom{W \in O(R, y)} \right\}$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^* O(R, x))(\exists V \in e^* O(R, z))(\emptyset \neq (U+V) \cap (x+A) \subseteq W \cap (x+A))$$

$$\Rightarrow W \cap (x+A) \neq \emptyset.$$

b) $x \in R$ ve $y \in e^* \text{-cl}(x+A)$ olsun. Amacımız $y \in x + \text{cl}(A)$ yani $-x + y \in \text{cl}(A)$ olduğunu göstermek. Keyfi bir $W \in O(R, -x+y)$ alalım. $W \cap A \neq \emptyset$ olduğunu göstereceğiz.

$$W \in O(R, -x+y) \Rightarrow (\exists U \in e^* O(R, -x))(\exists V \in e^* O(R, y))(-x+V \subseteq U+V \subseteq W)$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq (-x+V) \cap A \subseteq W \cap A$$

O halde $-x+y \in \text{cl}(A)$ yani $y \in x + \text{cl}(A)$. Dolayısıyla $e^* \text{-cl}(x+A) \subseteq x + \text{cl}(A)$.

c) $x \in R$ ve $y \in x + \text{int}(A)$ olsun. Amacımız $y \in e^* \text{-int}(x+A)$ olduğunu göstermek.

$$y \in x + \text{int}(A) \Rightarrow -x+y \in \text{int}(A) \in O(R)$$

$$\Rightarrow (\exists U \in e^* O(R, -x))(\exists V \in e^* O(R, y))(-x+V \subseteq U+V \subseteq \text{int}(A) \subseteq A)$$

$$\Rightarrow (\exists V \in e^* O(R, y))(V \subseteq x+A)$$

$$\Rightarrow y \in e^* \text{-int}(x+A).$$

d) $y \in \text{int}(x+A)$ olsun. Amacımız $y \in x + e^* \text{-int}(A)$ olduğunu göstermek.

$$y \in \text{int}(x+A) \Rightarrow (\exists U \in O(R, y))(U \subseteq x+A)$$

$$\Rightarrow (\exists U \in O(R, y))(-x+U \subseteq A)$$

$$\stackrel{\text{Teorem 2.1.8}}{\Rightarrow} (-x+U \in e^* O(R, -x+y))(-x+U \subseteq A)$$

$$\Rightarrow -x+y \in e^* \text{-int}(A)$$

$$\Rightarrow y \in x + e^* \text{-int}(A). \quad \square$$

Teorem 2.2.16. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) -e^*-cl(A) \subseteq cl(-A),$$

$$b) e^*-cl(-A) \subseteq -cl(A),$$

$$c) -int(A) \subseteq e^*-int(-A),$$

$$d) int(-A) \subseteq -e^*-int(A).$$

Kanıt. a) $x \notin cl(-A)$ olsun.

$$\begin{aligned} x \notin cl(-A) &\Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(R, x))(U \cap (-A) = \emptyset) \\ &\Rightarrow (-U \in e^*\mathcal{O}(R, -x))((-U) \cap A = \emptyset) \\ &\Rightarrow -x \notin e^*-cl(A) \\ &\Rightarrow x \notin -e^*-cl(A). \end{aligned}$$

b) $x \notin -cl(A)$ olsun.

$$\begin{aligned} x \notin -cl(A) &\Rightarrow -x \notin cl(A) \\ &\Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(R, -x))(U \cap A = \emptyset) \\ &\Rightarrow (-U \in e^*\mathcal{O}(R, x))((-U) \cap (-A) = \emptyset) \\ &\Rightarrow x \notin e^*-cl(-A). \end{aligned}$$

c) $x \in -int(A)$ olsun.

$$\begin{aligned} x \in -int(A) &\Rightarrow -x \in int(A) \\ &\Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}(R, -x))(U \subseteq A) \\ &\Rightarrow (-U \in e^*\mathcal{O}(R, x))(-U \subseteq -A) \\ &\Rightarrow x \in e^*-int(-A). \end{aligned}$$

d) $x \in \text{int}(-A)$ olsun.

$$\begin{aligned}
x \in \text{int}(-A) &\Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(U \subseteq -A) \\
&\Rightarrow (-U \in e^*O(R, -x))(-U \subseteq A) \\
&\Rightarrow -x \in e^*\text{-int}(A) \\
&\Rightarrow x \in -e^*\text{-int}(A). \quad \square
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.17. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $x \in R \Rightarrow x + \text{int}(cl(\delta\text{-int}(A))) \subseteq cl(x + A)$,
- b) $x \in R \Rightarrow \text{int}(cl(\delta\text{-int}(x + A))) \subseteq x + cl(A)$,
- c) $x \in R \Rightarrow x + \text{int}(A) \subseteq cl(\text{int}(\delta\text{-cl}(x + A)))$,
- d) $x \in R \Rightarrow \text{int}(x + A) \subseteq x + cl(\delta\text{-cl}(A))$.

Kanıt. a) $A \subseteq R$ and $x \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
(A \subseteq R)(x \in R) &\Rightarrow cl(x + A) \in C(R) \xrightarrow{\text{Teorem 2.1.8}} -x + cl(x + A) \in e^*C(R) \\
&\Rightarrow \text{int}(cl(\delta\text{-int}(e^*\text{-cl}(A)))) \subseteq \text{int}(cl(\delta\text{-int}(-x + cl(x + A)))) \subseteq -x + cl(x + A) \\
&\Rightarrow \text{int}(cl(\delta\text{-int}(A))) \subseteq \text{int}(cl(\delta\text{-int}(e^*\text{-cl}(A)))) \subseteq -x + cl(x + A) \\
&\Rightarrow x + \text{int}(cl(\delta\text{-int}(A))) \subseteq cl(x + A).
\end{aligned}$$

b) $A \subseteq R$ and $x \in R$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq R \Rightarrow cl(A) \in C(R) \\ x \in R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Teorem 2.1.8}} x + cl(A) \in e^*C(R)$$

$$\Rightarrow \text{int}(cl(\delta\text{-int}(x + A))) \subseteq \text{int}(cl(\delta\text{-int}(x + cl(A)))) \subseteq x + cl(x + A).$$

c) $A \subseteq R$ and $x \in R$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq R \Rightarrow \text{int}(A) \in O(R) \\ x \in R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Teorem 2.1.8}} x + \text{int}(A) \in e^*O(R)$$

$$\Rightarrow x + \text{int}(A) \subseteq cl(\text{int}(\delta\text{-cl}(x + \text{int}(A)))) \subseteq cl(\text{int}(\delta\text{-cl}(x + A))).$$

d) $A \subseteq R$ and $x \in R$ olsun.

$$(A \subseteq R)(x \in R) \Rightarrow \text{int}(x+A) \in O(R) \stackrel{\text{Teorem 2.1.8}}{\Rightarrow} -x + \text{int}(x+A) \in e^*O(R)$$

$$\Rightarrow -x + \text{int}(x+A) \subseteq \text{cl}(\text{int}(\delta\text{-cl}(-x + \text{int}(x+A)))) \subseteq \text{cl}(\text{int}(\delta\text{-cl}(A))). \quad \square$$

Teorem 2.2.18. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka ve $A \subseteq R$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$a) -\text{int}(\text{cl}(\delta\text{-int}(A))) \subseteq \text{cl}(-A),$$

$$b) \text{int}(\text{cl}(\delta\text{-int}(-A))) \subseteq -\text{cl}(A),$$

$$c) -\text{int}(A) \subseteq \text{cl}(\text{int}(\delta\text{-cl}(-A))),$$

$$d) \text{int}(-A) \subseteq -\text{cl}(\text{int}(\delta\text{-cl}(A))).$$

Kanıt. a) $A \subseteq R$ olsun.

$$A \subseteq R \Rightarrow \text{cl}(-A) \in C(R)$$

$$\stackrel{\text{Teorem 2.1.8}}{\Rightarrow} -\text{cl}(-A) \in e^*C(R)$$

$$\Rightarrow \text{int}(\text{cl}(\delta\text{-int}(A))) \subseteq \text{int}(\text{cl}(\delta\text{-int}(-\text{cl}(-A)))) \subseteq -\text{cl}(-A)$$

$$\Rightarrow -\text{int}(\text{cl}(\delta\text{-int}(A))) \subseteq \text{cl}(-A).$$

b) $A \subseteq R$ olsun.

$$A \subseteq R \Rightarrow \text{cl}(A) \in C(R)$$

$$\stackrel{\text{Teorem 2.1.8}}{\Rightarrow} -\text{cl}(A) \in e^*C(R)$$

$$\Rightarrow \text{int}(\text{cl}(\delta\text{-int}(-A))) \subseteq \text{int}(\text{cl}(\delta\text{-int}(-\text{cl}(A)))) \subseteq -\text{cl}(A).$$

c) $A \subseteq R$ olsun.

$$A \subseteq R \Rightarrow \text{int}(A) \in O(R)$$

$$\stackrel{\text{Teorem 2.1.8}}{\Rightarrow} -\text{int}(A) \in e^*O(R)$$

$$\Rightarrow -\text{int}(A) \subseteq \text{cl}(\text{int}(\delta\text{-cl}(-\text{int}(A)))) \subseteq \text{cl}(\text{int}(\delta\text{-cl}(-A))).$$

ve

$$e^*-cl(A) + e^*-cl(B) = e^*-cl(\{a\}) + e^*-cl(\{c\}) = \{a\} + \{c\} = \{a+c\} = \{c\}$$

olur. Buradan da

$$cl(\{c\}) = \{c, d\} \not\subseteq \{c\} = e^*-cl(A) + e^*-cl(B)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.22. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka ve $(S, +, \cdot, \sigma)$ de bir topolojik halka olmak üzere eğer $f : R \rightarrow S$ fonksiyonu bir halka homomorfizması ve 0_R noktasında sürekli ise o zaman f fonksiyonu e^* -sürekli dir.

Kanıt. $f : X \rightarrow Y$ homomorfizmi 0_R noktasında sürekli olsun. Amacımız f fonksiyonunun e^* -sürekli olduğunu göstermek. Şimdi $V \in O(R, f(x))$ olsun. $f[U] \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in e^*O(R, x)$ var olduğunu gösterirsek kanıt biter.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} V \in O(R, f(x)) \Rightarrow f(x) = f(x+0_R) \in V \in O(R) \\ f, \text{ homomorfizm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow f(x+0_R) = f(x) + f(0_R) \in V \in O(R) \Rightarrow -f(x) + V \in O(R, f(0_R)) \left. \right\} \Rightarrow \\ & \qquad \qquad \qquad f, 0_R \text{ 'de sürekli} \\ & \Rightarrow (\exists W \in O(R, 0_R))(f[W] \subseteq -f(x) + V) \Rightarrow (\exists W \in O(R, 0_R))(f(x) + f[W] \subseteq V) \left. \right\} \Rightarrow \\ & \qquad \qquad \qquad f, \text{ homomorfizm} \\ & \Rightarrow (\exists W \in O(R, 0_R))(f[x+W] \subseteq V) \left. \right\} \xrightarrow{\text{Teorem 2.1.8}} (U \in e^*O(R, x))(f[U] \subseteq V). \quad \square \\ & \qquad \qquad \qquad U := x+W \end{aligned}$$

Teorem 2.2.23. $(R, +, \cdot, \tau)$ bir e^* -topolojik halka olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $+$: $R^2 \rightarrow R$, $+(x, y) = x + y$ fonksiyonu e^* -sürekli dir.
- b) \cdot : $R^2 \rightarrow R$, $\cdot(x, y) = x \cdot y$ fonksiyonu e^* -sürekli dir.
- c) $-$: $R \rightarrow R$, $-(x) = -x$ fonksiyonu e^* -sürekli dir.

Kanıt. a) $(x, y) \in R^2$ ve $W \in O(R, x+y)$ olsun.

$$\left. \begin{aligned} W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, y))(U+V \subseteq W) \\ O := U \times V \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (O \in e^*O(R^2, (x, y))) (+[O] = +[U \times V] = U + V \subseteq W).$$

b) $(x, y) \in R^2$ ve $W \in O(R, xy)$ olsun.

$$W \in O(R, xy) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\exists U \in e^*O(R, x))(\exists V \in e^*O(R, y))(UV \subseteq W) \\ O := U \times V \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (O \in e^*O(R^2, (x, y))) (\cdot[O] = \cdot[U \times V] = UV \subseteq W).$$

c) $V \in O(R)$ olsun. Amacımız $-^{-1}[V] \in e^*O(R)$ olduğunu göstermek.

$$\left. \begin{array}{l} -^{-1}[V] = \{x \in R : -(x) \in V\} = \{x \in R : -x \in V\} = -V \\ V \in O(R) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Teorem 2.1.8 $\Rightarrow -^{-1}[V] \in e^*O(R).$

□

3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışma kapsamında e^* -topolojik halka kavramının topolojik halka ve β -topolojik halka kavramından daha genel bir kavram olduğu görülmüş ve karşınının doğru olmadığına dair örnekler verilmiştir. 1947 yılında I. Kaplansky, Topological Rings adlı çalışmasında topolojik halka tanımını aşağıda belirtilen şekilde ele almıştır.

$(R, +, \cdot)$ halka ve (R, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

- $+$: $R^2 \rightarrow R$, $+(x, y) = x + y$ sürekli
- $-$: $R \rightarrow R$, $-(x) = -x$ sürekli
- \cdot : $R^2 \rightarrow R$, $\cdot(x, y) = xy$ sürekli

koşulları sağlanıyorsa o zaman $(R, +, \cdot, \tau)$ dördlüsüne bir topolojik halka denir.

Biçimsel olarak

$$((R, +, \cdot), \text{halka})((R, \tau), \text{topolojik uzay})$$

$:\Rightarrow$

$$(R, +, \cdot, \tau), \text{topolojik halka}$$

$:\Leftrightarrow$

$$+ : R^2 \rightarrow R, +(x, y) = x + y \text{ sürekli,}$$

$$- : R \rightarrow R, -(x) = -x \text{ sürekli,}$$

$$\cdot : R^2 \rightarrow R, \cdot(x, y) = xy \text{ sürekli}$$

şeklinde ifade edilir. Bu tanımın çarpım topolojisinin özelliklerinden aşağıdaki koşullara denk olduğu görülmüştür.

$(R, +, \cdot)$ halka ve (R, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

- $W \in O(R, x + y) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(\exists V \in O(R, y))(U + V \subseteq W)$,
- $W \in O(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(-U \subseteq W)$,

$$\bullet W \in O(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(\exists V \in O(R, y))(UV \subseteq W)$$

koşulları sağlanıyorsa o zaman $(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsüne bir topolojik halka denir.

Biçimsel olarak

$$((R, +, \cdot), \text{halka})((R, \tau), \text{topolojik uzay})$$

$$:\Rightarrow$$

$$(R, +, \cdot, \tau), \text{topolojik halka}$$

$$:\Leftrightarrow$$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(\exists V \in O(R, y))(U+V \subseteq W)],$$

$$(\forall x \in R)[W \in O(R, -x) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(-U \subseteq W)],$$

$$(\forall x, y \in R)[W \in O(R, xy) \Rightarrow (\exists U \in O(R, x))(\exists V \in O(R, y))(UV \subseteq W)]$$

şeklinde ifade edilir.

Benzer şekilde

$$((R, +, \cdot), \text{halka})((R, \tau), \text{topolojik uzay})$$

$$:\Rightarrow$$

$$(R, +, \cdot, \tau), e^* \text{topolojik halka}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$+ : R^2 \rightarrow R, +(x, y) = x + y \text{ } e^* \text{-sürekli,}$$

$$- : R \rightarrow R, -(x) = -x \text{ } e^* \text{-sürekli,}$$

$$\cdot : R^2 \rightarrow R, \cdot(x, y) = xy \text{ } e^* \text{-sürekli}$$

önermesi doğru mu sorusu düşünülmüştür. Teorem 2.2.23'da söz konusu önermenin gerek kısmı ispatlanmıştır. Yeter kısmı için çeşitli çalışmalar yapılmış olmasına karşın olumlu ya da olumsuz bir sonuca ulaşılamamıştır. Eğer yeter kısım doğruysa kanıtın aşağıdaki gibi olması gerektiği düşünülmektedir.

$(R, +, \cdot)$ halka, (R, τ) topolojik uzay ve söz konusu olan fonksiyonlar e^* -sürekli olsun.

$(R, +, \cdot, \tau)$ dörtlüsünün e^* -topolojik halka olduğunu göstermeye çalışalım.

$$\left. \begin{aligned} W \in O(R, x+y) \Rightarrow (\exists Y \in e^*O(R^2, (x, y)))(+[Y] \subseteq W) \\ (U := \pi_1[Y])(V := \pi_2[Y]) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (U \overset{?}{\in} e^*O(R,x))(V \overset{?}{\in} e^*O(R,y))(U+V \subseteq W). \\ &W \in O(R,xy) \Rightarrow (\exists Y \in e^*O(R^2,(xy)))(+[Y] \subseteq W) \\ &\qquad\qquad\qquad (U := \pi_1[Y])(V := \pi_2[Y]) \left. \vphantom{W \in O(R,xy)} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (U \overset{?}{\in} e^*O(R,x))(V \overset{?}{\in} e^*O(R,y))(U+V \subseteq W). \end{aligned}$$

Yukarıda söz konusu olan π_1 ve π_2 fonksiyonları birinci ve ikinci izdüşüm fonksiyonları olup ispat zincirinde tek bir soru işareti kalmıştır. Birinci ve ikinci izdüşüm fonksiyonları altında e^* -açık kümelerin görüntüsü e^* -açık mıdır? Bu soruya çalışma kapsamı boyunca cevap bulunamamıştır.



4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tanımlanan e^* -topolojik halka kavramının topolojik halka ve β -topolojik halka kavramından daha genel bir kavram olduğu yani her topolojik halkanın ve β -topolojik halkanın birer e^* -topolojik halka olduğu görülmüştür ve karşınının doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. Ayrıca e^* -topolojik halka olmayan bir örnek de inşa edilmiştir. Bu çalışmada e^* -topolojik halka yapısında ne tarz kümelerin e^* -açık veya ne tarz kümelerin e^* -kapalı olduğu incelenmiştir.

Yine bu çalışma kapsamında e^* -topolojik halkalarda e^* -süreklilik konusu işlenmiş ve bir takım sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışma kapsamında e^* -topolojik halkalarda bir kümenin e^* -içi, bir kümenin e^* -kapanışına dair halka yapısındaki işlemleri kullanarak bazı temel sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışma kapsamında incelenen konular e^* -açık küme kavramından daha genel veya daha özel bir açık küme kavramı kullanılarak yeni bir topolojik halka kavramı tanımlanabilir e^* -topolojik halka ile arasındaki ilişkiler incelenebilir.

KAYNAKLAR

- M.E. Abd El-Monsef, S.N. El-Deeb and R.A. Mahmoud, β -open sets and β -continuous mappings, *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ.*, **12** (1983), 77-90.
- S. Billawria and Sh. Sharma, On β -topological rings, *J. Algebra Relat. Top.*, **9**(1) (2021), 51-60.
- C. Dalkıran and M. Özkoç, On e^* -topological spaces, (Accepted for Publication in International Journal of Maps in Mathematics).
- E. Ekici, On e^* -open sets and (D, S) -sets, *Math. Morav.*, **13** (2009), 29-36.
- I. Kaplansky, Topological rings, *Amer. J. Math.*, **69** (1947), 153-182.
- I. Kaplansky, Topological rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 809-826.
- N. Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 36-41.
- A.S. Mashhour, M. E. Abd El-Monsef, S. N. El-Deeb, On precontinuous and weak precontinuous mappings, *Proc. Math Phys. Soc. Egypt*, **53** (1982), 47-53.
- O. Njastad, On some classes of nearly open sets, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 961-970.
- M. Ram, S. Sharma, S. Billawria and T. Landol, On α -irresolute topological rings, *Int. J. of Math. Trends and Technology* (2) **65** (2019), 1-5.
- H.M.M. Salih, On irresolute topological rings, *J. Adv. Stud. Topol.*, **9**(2) (2018), 130-134.
- M.H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.* **41** (1937), 375-381.
- N.V. Veličko, H -closed topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* **78** (2) (1968), 103-118.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı: C***n D***N
Doğum Yeri ve Tarihi: B*****r, 2*.0*.1**5
E-posta: c*****n@gmail.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum / Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Balıkesir Anadolu Lisesi	2014
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2021

Yabancı Dil(ler)

İngilizce	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		x	
Konuşma		x	
Anlama		x	
Okuma		x	

Bilimsel Faaliyetler

SCI veya SCI-Expanded, SSCI ve AHCI dışındaki uluslararası indeksler tarafından taranan dergilerde yayımlanan tam makale

1. C. Dalkıran and M. Özkoç, On the topology of δ_e -open sets, J. Linear Topol. Algeb. 12(2), (2023), 119-131.
2. C. Dalkıran and M. Özkoç, On e^* -topological rings, (Accepted for Publication in International Journal of Maps in Mathematics).
3. C. Dalkıran and M. Özkoç, a -continuous and a -open functions, (İncelemede)
4. C. Dalkıran and M. Özkoç, e^* -locally closed sets and related topics, (İncelemede)

Bilgisayar Bilgisi

1. Latex
2. Maple
3. Microsoft Office Programları (Word, Excel, Powerpoint)

