# KOMORNİK EŞİTSİZLİĞİ İLE BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

**EVRİM AKKURT**

**TEMMUZ 2024**

**DİYARBAKIR**

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# KOMORNİK EŞİTSİZLİĞİ İLE BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

EVRİM AKKURT

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

TEMMUZ 2024

DİYARBAKIR

**KOMORNİK EŞİTSİZLİĞİ İLE BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI**

**Evrim AKKURT** tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ ____________________
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN ____________________
Danışman, **Matematik Bölümü,**
**Dicle Üniversitesi**

**Sınav Jürisi:**

Prof. Dr. Erdal KORKMAZ (*) ____________________
Matematik Bölümü, Muş Alparslan Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (**) ____________________
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Yavuz DİNÇ ____________________
Matematik Bölümü, Mardin Artuklu Üniversitesi

ONAY

**Savunma Tarihi:** 09 / 07 / 2024

**(*)** Jüri Başkanı
**(**)** Tez Danışmanı

*Aileme…*

**Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılayıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.**

**Ad, Soyad: Evrim AKKURT**

**İmza: ……..…………………….**

**TEŞEKKÜR**

Değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN hocama ilgi ve destekleri için, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı doktora öğrencileri sevgili Nebi YILMAZ ve Ayşe FİDAN'a çalışmam sürecindeki yardımları için, yüksek lisansa başlamam için beni destekleyen ve yüreklendiren sevgili arkadaşım Neval KAVAL'a ve her konuda bana güvenip beni destekleyen kıymetli aileme teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| **Simge** | **Açıklama** |
|---|---|
| $R^n$ | n-boyutlu Euclid Uzayı |
| $\Omega$ | $R^n$ de sınırlı bir bölge |
| $\partial\Omega$ | $\Omega$ bölgesinin sınırı |
| $C(\Omega)$ | Sürekli Fonksiyonlar Uzayı |
| $L^p(\Omega)$ | $p$. mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı |
| $W^{m,p}(\Omega)$ | Sobolev Uzayı |
| $H^m(\Omega)$ | Hilbert Uzayı |
| $\nabla$ | Nabla operatörü (Gradiyent) |
| $\Delta$ | Laplace operatörü |

# ÖZET

**KOMORNİK EŞİTSİZLİĞİ İLE BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI**

AKKURT, Evrim
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Temmuz 2024, 51 sayfa

19. ve 20. yüzyıllarda kısmi diferansiyel denklemler üzerine yapılan araştırmalar, bu denklemlerin matematiğin diğer dallarıyla ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerle olan ilişkisini ortaya koymayı amaçlamıştır. Kısmi diferansiyel denklemler sadece teorik problemlerin çözümlerini sağlamakla kalmamış, aynı zamanda mühendislik, kimya ve fizik gibi alanlarda karşılaşılan olayların matematiksel modellemelerine de zemin hazırlamıştır. Doğadaki olaylar matematiksel problemler olarak karşımıza çıkmaktadır ve bu problemlerin çözümü için matematiksel modeller oluşturmak bilimin teorik gelişimine katkıda bulunmaktadır. Bu modeller genellikle lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere dayanmaktadır ve bu tür denklemler her zaman açık bir çözüme sahip olmayabilir. Çözümü bulunamayan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde, yaklaşık çözümler bulmak veya çözümün davranışını anlamak için denklemler belirli şartlarla sınırlandırılmalıdır. Bu bağlamda, denklemlerin hangi şartlar altında çözüme sahip olup olmadığının araştırılması, matematikte önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir.
Bu tezin ilk bölümünde, diferansiyel denklemlerin tanımı, elde ediliş yöntemleri; kısmi türevli denklemlerin tanımı, kısmi diferansiyel denklemlerin diğer uygulamalı bilimlerle ile olan ilişkisi, kısmi diferansiyel denklemler için verilen bir problemin çözümü, varlığı, tekliği, kararlılığı ile ilgili bilgiler verilmiş ve son olarak da evolüsyon denklemleri özetlenmiştir. Bu tezin ikinci bölümünde parabolik tipteki Kirchhoff tipi denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar ve bu çalışmaların tarihsel gelişimi ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise tez boyunca kullanılacak temel tanımlar, lemmalar, teoremler ve eşitsizlikler sunulmuştur. Dördüncü bölümde, yüksek mertebeden parabolik bir denklemin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması incelenmiştir. Bu çalışmalar, matematiksel teorinin uygulanabilirliğini ve mühendislik ile fen bilimlerindeki pratik problemlerin çözümüne katkılarını göstermektedir. Özellikle, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm davranışlarını anlamak için yapılan bu tür çalışmalar, teorik ve pratik açıdan büyük önem taşımaktadır.



Anahtar Kelimeler: Kirchhoff tipi reaksiyon-difüzyon denklemi, Global varlık, Enerji azalması, Komornik eşitsizliği

# ABSTRACT

## STABILITY OF SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE KOMORNIK INEQUALITY



AKKURT, Evrim
Master of Science in Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN


July 2024, 51 pages



Research on partial differential equations in the 19th and 20th centuries aimed to reveal the relationship of these equations with other branches of mathematics and applied sciences such as engineering. Partial differential equations not only provide solutions to theoretical problems, but also provide the basis for mathematical modeling of events encountered in fields such as engineering, chemistry and physics. Events in nature appear as mathematical problems, and creating mathematical models to solve these problems contributes to the theoretical development of science. These models are often based on nonlinear partial differential equations, and such equations may not always have an explicit solution. In nonlinear partial differential equations for which no solution can be found, the equations must be limited to certain conditions in order to find approximate solutions or understand the behavior of the solution. In this context, investigating the conditions under which equations have solutions has become an important field of study in mathematics.

In the first part of this thesis, the definition of differential equations and their methods of obtaining them; The definition of partial differential equations, the studies on partial differential equations in the 19th and 20th centuries, the relationship of partial differential equations with other applied sciences, the solution of a given problem for partial differential equations, and finally the evolution equations are summarized. In the second part of this thesis, studies on higher order parabolic Kirchhoff type equations and the historical development of these studies are discussed. In the third chapter, basic definitions, lemmas, theorems and inequalities that will be used throughout the thesis are presented. In the fourth chapter, the global existence and energy decay of solutions of a higher order parabolic equation are examined. These studies demonstrate the applicability of mathematical theory and its contributions to solving practical problems in engineering and science. In particular, such studies carried out to understand the solution behavior of nonlinear partial differential equations are of great theoretical and practical importance.



Keywords: Kirchhoff type reaction-diffusion equation, Global existence, Energy decay, Komornik's inequality

# 1. GİRİŞ

Bilimin amaçlarından biri de gerçek dünya problemlerini anlayabilmektir. Doğada karşılaşılan bir çok olay matematiksel olarak bir problem oluşturur. Matematiğin kendine özgü kuralları mevcuttur ve çoğunlukla var olan problemle bire bir uyuşmaz. Bu nedenle var olan problemlere yönelik matematiksel modellemeler oluşturulur. Mühendislik, fen, ekonomi,... gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan problemlerin tek bir denklem üzerinden modellenmesi çoğu zaman mümkün değildir. Bu matematiksel modellerin kurulabilmesi için, genel olarak bir bilinmeyenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini (veya diferansiyellerini) içeren bir denkleme ihtiyaç vardır. İhtiyacımızı karşılayacak olan bu denklem diferansiyel denklemdir. Diferansiyel denklem bir fonksiyonu ve o fonksiyonun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemlerdir.

Diferansiyel denklemlerin elde edilmeleri genel olarak üç kısımda toplanabilir;

**i.** Problem cebirsel olarak verilebilir. İçinde keyfi sabitlerin bulunduğu bir cebirsel denklem, düzlemde bir eğri ailesi oluşturur. Cebirsel denklemdeki keyfi sabitler, denklem ve onun türevleri arasında yok edilerek bir diferansiyel denkleme ulaşılır.

**ii.** Geometrik özellikleri ile problemi tanımlayıp bu özelliklere uyan eğrinin bulunması da bize bir diferansiyel denklem verir.

**iii.** Uygulamalı bilim dallarında problemin matematiksel modeli genellikle bir diferansiyel denklemdir.

Bir bağımlı değişkenin iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem (kısmi türevli denklem) denir. Kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili 19. ve 20. yüzyılda yapılan çalışmalar ise kısmi diferansiyel denklemlerin matematiğin diğer dallarıyla, mühendislik ve diğer uygulamalı bilimler ile olan bağlantısını ortaya koymuştur. Bu yüzden kısmi diferansiyel denklemler matematiksel modellemesi yapılan birçok mühendislik, fizik vb. olayların çalışmasına zemin hazırlamaktadır. Oluşturulan matematiksel modeller bilimin ilerlemesine katkıda bulunacaktır.

Genel olarak fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan denklemlerde bazı yan koşullar da bulunur. Bu yan koşullar başlangıç ve sınır koşulları olarak

adlandırılır.
Eğer denklem ile birlikte başlangıç koşulları verilirse başlangıç değer problemi, sınırda koşullar verilirse sınır değer problemi olur. Sınır değer problemi sınırda verilen problemin durumuna göre ayrıca sınıflandırılır.

Kısmi diferansiyel denklemler için verilen bir problemin;
**i.** çözümü var,
**ii.** var olan bu çözüm tek,
**iii.**çözüm, sürekli olarak problemde verilen verilere bağlı
ise bu problem iyi konulmuş bir problemdir.

Kısmi türevli denklemlerde bağımsız değişkenlerden biri zaman $(t)$ ise bu tür denklemlere evolüsyon denklemler denir. Parabolik ve hiperbolik tipten denklemler birer evolüsyon denklemlerdir. Bu denklemler sadece matematiğin değil aynı zamanda fizik, mekanik ve mühendislik bilimi gibi bilimin diğer dallarında da büyük önem taşımaktadır. Kuantum mekaniğinden doğrusal olmayan Klein-Gordon denklemleri ve lineer olmayan Kirchhoff denklemleri, ısı transferi ve biyolojik bilimlerden lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemleri, akışkanlar mekaniğinden Navier-Stokes ve Euler denklemleri bu tip özel denklemlerdir.

Evolüsyon denklemleri, genellikle başlangıç koşulları ve sınır koşulları ile birlikte ele alınır. Başlangıç koşulları, zaman $t = 0$ anında sistemin durumunu tanımlar ve bu koşullar denklemin çözümü için hayati öneme sahiptir. Sınır koşulları ise uzaysal değişkenler üzerindeki belirli kısıtlamaları ifade eder ve sistemin fiziksel sınırlarını tanımlar. Bu denklemler, zamanın ilerlemesiyle birlikte sistemin nasıl evrildiğini modellemek için kullanılır.

Örneğin, ısı transferi problemlerinde kullanılan ısı denklemi (parabolik tipte bir denklem), belirli bir bölgedeki sıcaklık dağılımının zamanla nasıl değiştiğini tanımlar. Bu tür denklemler, mühendislik uygulamalarında ısı değişim cihazlarının tasarımında ve enerji verimliliğinin artırılmasında kritik rol oynar. Benzer şekilde, biyolojik sistemlerdeki reaksiyon-difüzyon denklemleri, kimyasal maddelerin veya biyolojik organizmaların bir ortamda nasıl yayıldığını ve reaksiyona girdiklerini modellemek için kullanılır.

Akışkanlar mekaniğinde, Navier-Stokes denklemleri ve Euler denklemleri gibi denklemler, akışkanların hareketini tanımlamak için kullanılır. Bu denklemler, aerodinamikten hidrodinamiğe kadar geniş bir yelpazede uygulama alanına sahiptir. Özellikle Navier-Stokes denklemleri, karmaşıklığı nedeniyle matematiksel olarak çözülmesi zor olan denklemler arasındadır ve bu denklemler üzerinde yapılan araştırmalar, modern matematiğin ve fiziksel bilimlerin önemli bir dalını oluşturur.

Kuantum mekaniğinde, Schrödinger denklemi evrensel bir evolüsyon denklemi örneğidir ve kuantum sistemlerinin zamanla nasıl değiştiğini tanımlar. Bu denklem, temel parçacıkların ve atom altı parçacıkların davranışlarını anlamak için vazgeçilmezdir. Schrödinger denkleminin çözümleri, kuantum durumlarının olasılık dağılımlarını verir ve bu, kuantum bilgisayarlarının ve kuantum iletişim sistemlerinin temelini oluşturur.

Sonuç olarak, evolüsyon denklemleri, bilim ve mühendisliğin pek çok alanında temel bir rol oynar. Bu denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri, teorik ve uygulamalı çalışmalarda kritik öneme sahiptir. Gelişen hesaplama teknikleri ve bilgisayar teknolojileri, bu denklemlerin daha karmaşık sistemler için çözülmesini ve anlaşılmasını mümkün kılmaktadır.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada yüksek mertebeden parabolik tipten Kirchhoff denkleminin bir sınıfı için aşağıdaki başlangıç-sınır değer probleminin çözümlerinin global varlığını ve enerji azalmasını çalışacağız:

$$\left(1+|z|^{p-2}\right) z_t + M\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2\right) \mathcal{A} z = |z|^{q-2} z, \tag{2.1}$$

burada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$ bir doğal sayı ve $\gamma \geq 1$ için

$$M(s) = 1 + s^\gamma$$

dır.

Birçok matematiksel modelde yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle karşılaşırız. Örneğin, akışkan dinamiği, elektromanyetizma, biyoloji, mekanik ve görüntü işlemede bulunabilir; burada üç boyutlu problemler yüzeylerde temsil edilir; örneğin ince geometriler durumunda (Shahrouzi 2023).

Problem (2.1) Kirchhoff tarafından ortaya atılan bir modelin genelleştirilmesidir. Kirchhoff aşağıdaki modeli elde etti (Kirchhoff, 1883)

$$\rho h z_{tt} + \delta z_t + g(z_t) = \left[\rho_0 + \frac{Eh}{2L}\int_0^L (z_x)^2\, dx\right] z_{xx} + f(z), \tag{2.2}$$

$0 < x < L,\ t \geq 0$ için $z(x,t)$ yatay yer değiştirme, $E$ Young modülü, $\rho$ kütle yoğunluğu, $h$ kesit alanı, $L$ uzunluk, $\rho_0$ başlangıç eksenel gerilim, $\delta$ direnç modülü, $f$ ve $g$ dış kuvvetlerdir. Ayrıca (2.2) ifadesinde $\rho_0 = 0$ olduğunda dejenere denklem, $\rho_0 > 0$ olduğunda dejenere olmayan denklem olarak adlandırılır.
(2.1) denkleminde $m = 1$ alındığında

$$\left(1+|z|^{p-2}\right) z_t - M\left(\|\nabla z\|^2\right) \cdot z = |z|^{q-2} z$$

parabolik denklemi elde edilir. Ouaoua ve arkadaşları (2020) problemin çözümünün global varlığını ve enerji azalmasını çalıştılar.

Pişkin ve Ekinci (2020)

$$z_t - \Delta z_t - M(\|\nabla z\|^2)\Delta z + |z|^{q-2} z_t = |z|^{p-2} z$$

denkleminin çözümlerinin patlamasını ve üstel büyümesini çalıştılar.
Ishige ve arkadaşları (2020) doğrusal olmayan yüksek mertebeli ısı denklemi için

$$z_t + \mathcal{A}z = |z|^q$$

Cauchy problemini ele aldılar. Bu Cauchy probleminin çözümlerinin varlığını kanıtladılar.

Xiao ve Li (2021) doğrusal olmayan yüksek mertebeli ısı denklemleri için aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini

$$z_t + \mathcal{A}z_t + \mathcal{A}z = f(z)$$

ele aldılar ve bu problemin çözümlerin varlığını kanıtladılar.

Pişkin ve Cömert (2022)

$$z_t - M(\|\nabla z\|^2)\Delta z - \Delta z_t = |z|^{q-2}\, z \ln |z|$$

logaritmik kaynak terimli doğrusal olmayan Kirchhoff tipi parabolik denklemi incelediler. Bu problemin çözümlerinin varlığını ve enerji azalmasını kanıtladılar.

# 3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde bir sonraki bölümdeki çalışmamız için gerekli olan ön bilgilere değinilecektir. Fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemlerle ilgili bazı önemli tanım ve teoremler verilecek, Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı, bazı önemli eşitsizlikler ve enerji azalması açıklanacaktır (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Kesevan, 2003; Pişkin, 2017; Pişkin, 2018; Pişkin, 2021; Pişkin, 2022; Pişkin ve Okutmuştur, 2021).

## 3.1 Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Kavramlar

**Tanım 3.1.1** Çalışılan alanlarda karşılaşılan problemler için matematiksel modeller oluşturmak, bilimin hemen hemen her alanının teorik açıdan gelişmesinde önem taşır. Bazı bilim dallarında bir problemin çözümü, problemin özelliklerini taşıyan bir matematiksel bağıntı (veya matematiksel model) kurulmasını gerektirir. Böyle bir bağıntı, genellikle bir bilinmeyen fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini (veya diferansiyellerini) içeren bir denklem olarak karşımıza çıkar. Bir fonksiyonu ve onun sonlu mertebeden türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir.
Bir diferansiyel denklemde bağımlı ve bağımsız değişkenler olmak zorunda değildir. Fakat bağımlı değişkenin herhangi bir mertebeden türev veya türevleri olmak zorundadır.

Örneğin; $y^{''} = 0$ ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

**Tanım 3.1.2** Eğer bir diferansiyel denklem yalnızca bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre türevlerini içeriyorsa, buna adi (sıradan) diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemler genellikle şu şekilde ifade edilir:

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir. Eğer $y^{(n)}$ terimi diğerlerinden ayrılabiliyorsa, denklem şu forma dönüştürülebilir:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right).$$

Öte yandan, eğer diferansiyel denklem bir bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeriyorsa, buna kısmi diferansiyel denklem denir. Bu denklemler genellikle şu şekilde gösterilir:

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, ...\right) = 0$$

ya da

$f(x, y, z, z_x, z_y, ...) = 0$

biçiminde yazılır.

Örneğin;

$y' = 2xy$

denklemi adi diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemi ise kısmi diferansiyel denklemdir.

**Tanım 3.1.3** Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi (basamağı) denir. Yani denklemdeki en yüksek türevdir. En yüksek mertebeli türevin cebirsel kuvvetine (üssüne) diferansiyel denklemin derecesi denir. Derece bulunurken denklem türevlere göre polinom olarak yazılmalıdır.

Örneğin;

$(y'')^3 + 2x^5(y')^4 - 3y = \sin x$

denklemi $2$. mertebe, $3$. derecedendir.

$(y''')^3 = (1 + y')^{\frac{5}{2}}$

biçimindeki denklemin derecesini bulmak için önce denklemi türevlere göre polinom olarak yazmalıyız, bunun için denklemin her iki tarafının $2$. kuvvetini alalım

$(y''')^6 = (1 + y')^5$

denklemi elde edilir. Bu da $3$. mertebe, $6$. dereceden bir diferansiyel denklemdir.

**Tanım 3.1.4** Bir diferansiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden ve bunlar çarpım halinde bulunmuyorlarsa denkleme doğrusal (lineer) denklem, aksi halde doğrusal olmayan (nonlineer) denklem denir. $n$. mertebeden en genel doğrusal adi diferansiyel denklem

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$

biçimindedir. Denklem eğer; $b(x) = 0$ ise homojen denklem, $b(x) \neq 0$ ise homojen olmayan denklem olarak adlandırılır.

Ayrıca katsayılar sabit sayılar ise sabit katsayılı diferansiyel denklem, aksi halde değişken katsayılı diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

### 3.1.2 Diferansiyel denklemlerin çözümü

**Tanım 3.1.2.1** $n.$ mertebeden

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım

**i)** $f$, bir $I$ reel aralığında ($I$ sonlu, sonsuz, açık veya kapalı aralık olabilir) $\forall x$ için tanımlı ve $n.$ mertebeden türeve sahip bir reel fonksiyon olsun. Eğer $f$ , aşağıdaki koşulları sağlarsa $y = f(x)$, $I$ aralığında diferansiyel denklemin bir açık çözümü olarak adlandırılır;

**a)** $F(x, f(x), f^{'}(x), ...f^{(n)}(x))$ , $\forall x \in I$ için tanımlı ve

**b)** $\forall x \in I$ için $y = f(x)$ ve türevleri diferansiyel denklemde yerine konulduğunda denklemi sağlar.

**ii)** Bir $g(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonun bir $I$ aralığında diferansiyel denklemi sağlarsa buna diferansiyel denklemin kapalı çözüm denir.

Açık ve kapalı çözümlere basit çözümler denir.

**Örnek:**

$$y = f(x) = 2e^{2x} + e^{-3x}$$

fonksiyonu $\forall x \in R$ için

$$y'' + y' - 6y = 0$$

diferansiyel denkleminin bir açık çözümüdür.

**Örnek:**

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

kapalı fonksiyonu

$yy' + x = 0$

diferansiyel denkleminin bir kapalı çözümüdür.

**Tanım 3.1.2.2**

$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$

diferansiyel denklemi verilsin. $c_1, c_{2,}..., c_n$ birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere

$F\left(x, y, c_1, c_{2,}..., c_n\right) = 0$

bağıntısıyla tanımlanan $n$ parametreli bir fonksiyon ailesini göz önüne alalım. Eğer ailedeki her fonksiyon diferansiyel denklemin bir çözümü ise bu fonksiyona diferansiyel denklemin genel çözümü denir.

**Tanım 3.1.2.3** Keyfi sabitlere özel değerler vererek genel çözümden elde edilen çözümlere özel çözüm denir.

**Tanım 3.1.2.4** Genel çözümde keyfi sabitlere özel değerler vererek elde edilemeyen çözümlere tekil (aykırı, singüler) çözüm denir.

**Tanım 3.1.2.5** Bir özel çözümün grafiğine integral eğrisi, genel çözümün grafiğine ise integral eğriler ailesi (integral eğriler kümesi) denir.

### 3.1.3 Başlangıç ve sınır değer problemleri

**Tanım 3.1.3.1** Uygulamalı bilimlerde genellikle bir diferansiyel denklemin genel çözümü yerine onun bazı ek koşulları sağlayan çözümlerinin bulunması istenir, eğer ek koşullar bağımlı değişken ve türevlerine göre tek bir noktada verilmişse probleme başlangıç-değer problemi, eğer koşullar en az iki farklı noktada verilmişse probleme sınır-değer problemi denir.

**Tanım 3.1.3.2** Bir bağımlı değişkenin iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem (kısmi türevli denklem) denir. $u$ bağımlı, $x$ ve $y$ bağımsız değişkenleri için en genel kısmi türevli denklem

$F\left(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, ...\right) = 0,$

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots\right) = 0$$

dır.

İki bağımsız değişkenli kısmi türevli denklemlerde genellikle

$$p = \frac{\partial u}{\partial x},\ q = \frac{\partial u}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

gösterimleri kullanılır.

Örneğin;

$$u_{xx} - u_x u_y = u^2$$

denklemi

$$r - pq = u^2$$

olarak yazılabilir.

**Tanım 3.1.3.3** Bir kısmi türevli diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine denklemin mertebesi (basamağı) denir. Mertebeyi belirleyen terimin cebirsel kuvvetine denklemin derecesi denir.

Örneğin;

$$u_{xx} - x^2 u_y + y^3 u = 0$$

kısmi türevli denklemi ikinci mertebe birinci derecedendir.

**Tanım 3.1.3.4** Kısmi türevli denklemlerde bağımlı değişken ve türevleri birinci dereceden ve bunlar denklemde çarpım halinde değillerse lineer (doğrusal) denklem, aksi halde lineer olmayan (nonlineer) denklemdir.

$$A(x,y)u_x + B(x,y)\,u_y + C(x,y)\,u = D(x,y)$$

denklemi birinci mertebeden bir bağımlı $(u)$, iki bağımsız değişkenli ($x$ ve $y$) lineer kısmi türevli denklemlerin genel halidir.

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{yy} + D(x,y)\,u_x + E(x,y)\,u_y + F(x,y)\,u = G(x,y)$$

denklemi ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli lineer kısmi türevli denklemlerin genel halidir.

**Tanım 3.1.3.5** Lineer olmayan bir kısmi türevli denklemde en yüksek mertebeden türevli terimlerin dereceleri bir ve bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorsa bu denklem yarı lineer denklemdir.

$$A\left(x,y,u\right)u_x+B\left(x,y,u\right)u_y=C\left(x,y,u\right)$$

denklemi iki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci basamaktan yarı lineer denklemin genel halini temsil eder.

**Tanım 3.1.3.6** Bir yarı lineer denklemde en yüksek basamaktan türevin katsayıları, sadece bağımsız değişkenleri kapsıyorsa o denkleme hemen hemen lineer denir.

$$A(x,y)u_{xx}+B\left(x,y\right)u_{xy}+C\left(x,y\right)u_{yy}+D\left(x,y,u,u_x,u_y\right)=0$$

denklemi ikinci basamaktan hemen hemen lineer kısmi türevli denklemi temsil eder.

### 3.1.4 Başlangıç ve sınır değer problemleri

Genellikle fen, tıp ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan denklemlerde bazı yan koşullar bulunur. Bu yan koşullara başlangıç ve sınır koşulları denir.

Eğer denklem ile birlikte başlangıç koşulları verilirse başlangıç değer problemi, sınırda koşullar verilirse sınır değer problemi olur. Sınır değer problemleri sınırda verilen fonksiyonun durumuna göre ayrıca sınıflandırılır. Eğer denklemin sınırda aldığı değer verilmiş ise Dirichlet sınır koşulu, sınırda fonksiyonun türevinin aldığı değer verilmiş ise Neumann sınır koşulu, bunların toplamı olarak verilmiş ise karışık (mixed) sınır koşulu ve bölgenin bir kısmında fonksiyonun aldığı değer diğer bir kısmında ise fonksiyonun türevinin aldığı değer verilmiş ise Robin sınır koşulu olur.
Denklem ile başlangıç ve/veya sınır koşulları birlikte çözümünün araştırılması istenen problemi oluşturur.

**Örnek.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Denklem | : $u_t - u_{xx} = 0,$ | $0 < x < 4,$ | $t > 0,$ |
| Başlangıç koşulu: | $u(x,0) = \cos x,$ | $0 < x < 4,$ | |
| Sınır koşulu | : $u(0,t) = 0,$ | | $t \geq 0,$ |
| Sınır koşulu | : $u(4,t) = 0,$ | | $t \geq 0,$ |

**Örnek.**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

kısmi türevli denklemi $\partial\Omega$ sınırına sahip $\Omega$ bölgesinde tanımlansın.

Bu durumda $\partial\Omega$ da

**i.**

$$u = f(s)$$

verilirse Dirichlet sınır koşulu,

**ii.**

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(s)$$

verilirse Neumann sınır koşulu,

**iii.**

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = f(s)$$

verilirse karışık sınır koşulu,

**iv.**

$$\begin{cases} u = f_1(u); & \partial\Omega_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f_2(u); & \partial\Omega_2 \end{cases}$$

verilirse Robin sınır koşuludur.

### 3.1.5 Çözüm kavramı

Bir kısmi türevli denklemin mertebesi kadar sürekli türevli keyfi fonksiyon içeren ve denklemi sağlayan fonksiyonlara genel çözüm denir. Denklemi sağlayan fakat keyfi sabit, fonksiyon ve parametre içermeyen çözümlere özel çözüm denir.

Genel olarak kısmi türevli denklemlerde; genel çözüm, özel çözüm ve tekil (aykırı, singüler) çözüm olmak üzere üç çeşit çözüm ile ilgileniyorsakta denklemin veya başlangıç-sınır koşullarının durumuna göre zayıf çözüm (weak solution), güçlü çözüm (strong solution), yumuşak çözüm (mild solution),... gibi çözümleri olabilir. Bu nedenle genel ve özel çözümlere klasik çözüm denir.

**3.1.6 (Hadamard şartları)** Bir problemde

**i.** varlık: en az bir çözüm varsa,

**ii.** teklik: problemin çözümü tek ise,

**iii.** kararlılık: Çözüm giriş verilerine sürekli bağımlı ise yani başlangıç verilerinde olan küçük değişiklik çözümde de küçük değişiklik meydana getiriyorsa probleme iyi konulmuş (well posed) problem denir. Eğer bu şartlardan bir tanesi dahi sağlanmıyorsa kötü konulmuş (ill posed) problem denir. Bu şartlara Hadamard şartları denir.

### 3.1.7 Kanonik form

İkinci dereceden hemen hemen lineer denklemin en genel şekli

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + H(x,y,z,z_z,z_y) = 0 \tag{3.1}$$

dır. Burada $A,\, B,\, C \in C^2(R)$ dır. Verilen denklemde

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

olmak üzere,

**i.** $\Delta = 0$ ise denklem parabolik,

**ii.** $\Delta > 0$ ise denklem hiperbolik,

**iii.** $\Delta < 0$ ise denklem eliptik olarak sınıflandırılır.

Şimdi (3.1) denkleminin kanonik forma nasıl indirgeneceğini inceleyelim. (3.1) denklemine

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases} \tag{3.2}$$

dönüşümünü uygulayalım. Burada $\xi$ ve $\eta$ yeni bağımsız değişkenlerdir. Burada

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

olsun. Şimdi bu dönüşüm altında (3.1) denkleminde görülen kısmi türevleri hesaplayalım:

$$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x,$$
$$z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y,$$

dir.

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= (z_x)_x = (z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x)_x, \\
&= z_{\xi x}\xi_x + z_\xi \xi_{xx} + z_{\eta x}\eta_x + z_\eta \eta_{xx} \\
&= (z_{\xi\xi}\xi_x + z_{\xi\eta}\eta_x)\xi_x + (z_{\eta\eta}\eta_x + z_{\eta\xi}\xi_x)\eta_x + z_\xi \xi_{xx} + z_\eta \eta_{xx} \\
&= z_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2z_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + z_{\eta\eta}\eta_x^2 + z_\xi \xi_{xx} + z_\eta \eta_{xx}
\end{aligned}$$

dir.

$$z_{yy=} z_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2z_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + z_{\eta\eta}\eta_y^2 + z_\xi \xi_{yy} + z_\eta \eta_{yy}$$

ve

$$\begin{aligned}
z_{xy} &= (z_x)_y = (z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x)_y \\
&= (z_\xi \xi_x)_y + (z_\eta \eta_x)_y \\
&= z_{\xi y}\xi_x + z_\xi \xi_{xy} + z_{\eta y}\eta_x + z_\eta \eta_{xy} \\
&= (z_{\xi\xi}\xi_y + z_{\xi\eta}\eta_y)\xi_x + (z_{\eta\xi}\xi_y + z_{\eta\eta}\eta_y)\eta_x + z_\xi \xi_{xy} + z_\eta \eta_{xy} \\
&= z_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + z_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + z_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + z_\xi \xi_{xy} + z_\eta \eta_{xy}
\end{aligned}$$

dir. Bu ifadeler (3.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$A_1(\xi,\eta)z_{\xi\xi} + B_1(\xi,\eta)z_{\xi\eta} + C_1(\xi,\eta)z_{\eta\eta} + H^*(\xi,\eta,z,z_\xi,z_\eta) = 0 \tag{3.3}$$

olur. Burada

$$A_1(\xi,\eta) = A^*(\xi,\eta)\left(\xi_x\right)^2 + B^*\left(\xi,\eta\right)\xi_x\eta_x + C^*\left(\xi,\eta\right)\left(\xi_y\right)^2,$$

$$B_1\left(\xi,\eta\right) = 2A^*\left(\xi,\eta\right)\xi_x\eta_x + B^*\left(\xi,\eta\right)\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + 2C^*\left(\xi,\eta\right)\xi_x\xi_y,$$

$$C_1\left(\xi,\eta\right) = A^*(\xi,\eta)\left(\eta_x\right)^2 + B^*\left(\xi,\eta\right)\eta_x\eta_y + C^*(\xi,\eta)(\eta_y)^2 \tag{3.4}$$

dır. Burada görüldüğü gibi $\xi,\eta$ dönüşümü altında denklemin tipi değişmemektedir. Şimdi denklemin kanonik forma nasıl dönüştüğünü görelim:

**i.Hiperbolik Tip**

(3.1) denkleminde

$$\Delta = B^2 - 4AC > 0$$

olsun. Bu denkleme (3.2) dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen (3.3) denkleminde $A_1 = 0$ veya $C_1 = 0$ olsun. Bu durumda (3.4) ifadesindeki birinci ve üçüncü eşitliklerden

$$A_1 (\xi, \eta) = A^*(\xi, \eta) (\xi_x)^2 + B^* (\xi, \eta) \xi_x \eta_x + C^* (\xi, \eta) (\xi_y)^2 = 0,$$

$$C_1 (\xi, \eta) = A^*(\xi, \eta) (\eta_x)^2 + B^* (\xi, \eta) \eta_x \eta_y + C^*(\xi, \eta)(\eta_y)^2 = 0 \tag{3.5}$$

olmalıdır. (3.5) ifadesindeki ilk denklemi $(\xi_y)^2$ ile bölersek

$$A^* \left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + B^* \frac{\xi_x}{\xi_y} + C^* = 0 \tag{3.6}$$

olur. Şimdi (3.2) ifadesindeki dönüşümde

$$\xi = \varphi (x, y) = c_1 \tag{3.7}$$

olduğunu varsayalım. Böylece (3.7) ile adına seviye eğrileri denen bir eğri elde etmiş olduk.

**Tanım 3.1.7.1**

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) = c_1, \\ \eta = \psi(x, y) = c_2 \end{cases} \tag{3.8}$$

eğrilerine (3.1) denkleminin karakteristikleri denir.
(3.8) deki ilk ifadededen

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0$$

yazılabilir ve buradan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$$

elde edilir. Bu ifade (3.6) da yerine yazılırsa

$$A^* \left(-\frac{dy}{dx}\right)^2 + B^* \left(-\frac{dy}{dx}\right) + C^* = 0$$

olur. Buradan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B^{*}\mp\sqrt{B^{*2}-4A^{*}C^{*}}}{2A^{*}}$$

olur. Diğer taraftan $A^{*}(\xi,\eta)=A\left(x,y\right),\ B^{*}\left(\xi,\eta\right)=B\left(x,y\right),\ C^{*}(\xi,\eta)=C\left(x,y\right)$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}\text{ ve }\frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^{2}-4AC}}{2A}$$

olur. Böylece hiperbolik denklemin kanonik formu

$$z_{\xi\eta}=H^{**}(\xi,\eta,z,z_{\xi},z_{\eta})$$

olarak bulunur. Burada $H^{**}=-\frac{1}{B_1}H^{*}$ dır.

**ii. Parabolik Tip**

$$B^{2}-4AC=0$$

özdeşliğinden

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A}$$

karakteristiklerinden biridir. Diğeri

$$\frac{\partial\left(\xi,\eta\right)}{\partial\left(x,y\right)}\neq 0$$

olacak şekilde keyfi seçilir. Böylece parabolik denklemin kanonik formu

$$z_{\xi\xi}=H^{*}\left(\xi,\eta,z,z_{\xi},z_{\eta}\right)$$

veya

$$z_{\eta\eta}=H^{*}\left(\xi,\eta,z,z_{\xi},z_{\eta}\right)$$

olarak bulunur.

**iii. Eliptik Tip**

$$B^{2}-4AC<0$$

özdeşliğinden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} f_1(x, y) = c_1 \\ f_2(x, y) = c_2 \end{cases}$$

kompleks fonksiyonları elde edilir. Bu durumda karakteristikler

$$\begin{cases} \xi = \frac{c_1 + c_2}{2} \\ \eta = \frac{c_1 - c_2}{2i} \end{cases}$$

Buradan eliptik denklemin kanonik formu

$$z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta} = H^*(\xi, \eta, z, z_\xi, z_\eta)$$

şeklinde bulunur.

### 3.1.8 Isı denklemi

Uçları sabit sıcaklıkta tutulan $L$ uzunluğundaki bir tel çubuk ısının yayılması problemini ele alalım. Bu çubuğun başlangıç noktası $x = 0$ ve bitiş noktası $x = L$ olacak şekilde $x$ ekseni boyunca verilsin ve çubuğun herhangi bir $t$ anında $x$ noktasındaki sıcaklığı $u = u(x, t)$ olsun. Ayrıca çubuğun yanal yüzeyi ısı geçirmeyecek şekilde yalıtılmış olsun. Yani sıcaklık $x$ ekseni yönünde hareket etsin.

Bu çubuğun $A(x, 0)$ ve $B(x + \Delta x, 0)$ noktaları arasındaki kesitini alalım. Bu durumda $t$ anında $A$ noktasındaki sıcaklık $u(x, t)$, $B$ noktaasındaki sıcaklık $u(x + \Delta x, t)$ olur.

Aşağıdaki fiziksel prensipleri hatırlatalım:

**i.** Birim zamanda birim alandan geçen ısı akımı

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

tir. Burada $k$ orantı sabiti materyalin termal geçirgenliğidir. Burada termal geçirgenlik noktadan noktaya göre değişebilir. Yani $k = k(x)$ değişken veya sabit $(k)$ olabilir. $\frac{\partial u}{\partial x}$ ise sıcaklığın grandiyentidir.

**ii.** $c$ materyalin öz ısısı olmak üzere, $m$ kütleli bir nesnenin sıcaklığını $\Delta u$ kadar arttırmak için gerekli ısı miktarı

$cm\Delta u$

dır.

**iii.** Isı akımı, yüksek sıcaklıktan düşük sıcaklığa doğrudur.

Şimdi ısı denklemini elde edelim. $s$ çubuğun kesit alanı olmak üzere, $A = A(x,0)$ noktasından pozitif yöne doğru akan ısı miktarı

$$q(x) = -k(x)s\Delta t\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x},$$

$B = B\left(x+\Delta x,0\right)$ noktasından pozitif yöne doğru akan ısı miktarı

$$q(x+\Delta x) = -k(x+\Delta x)s\Delta t\frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial x}$$

dır. Ayrıca $Q(x,t)$ ısı enerjisi yoğunluğu olmak üzere, çubuğun içinde ısı kaynakları tarafından oluşturulan ısı miktarı:

$$Q\left(x,t\right)s\Delta t\Delta x$$

tir. Böylece net ısı miktarı

$$\begin{aligned}\Delta E &= q\left(x\right)-q\left(x+\Delta x\right)+Q\left(x,t\right)s\Delta t\Delta x\\ &= s\Delta t\left[k\left(x+\Delta x\right)\right]\frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial x}-k\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\\ &\quad +Q\left(x,t\right)s\Delta t\Delta x \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Diğer taraftan (ii) den

$$\Delta E = cm\Delta u$$

dır. Burada, sıcaklıktaki değişiklik: $\Delta u = u\left(x,t+\Delta t\right)-u\left(x,t\right)$ ve kütle: $m = \rho s\Delta x$ $(\rho = \rho\left(x\right)$ : yoğunluk ise

$$\Delta E = c\left(x\right)\rho\left(x\right)s\Delta x\left[u\left(x,t+\Delta t\right)-u\left(x,t\right)\right] \qquad (3.10)$$

dır. Sonuç olarak (3.9) ve (3.10) dan

$$\begin{aligned}&c\left(x\right)\rho\left(x\right)s\Delta x\left[u\left(x,t+\Delta t\right)-u\left(x,t\right)\right]\\ =\;&s\Delta t\left[k\left(x+\Delta x\right)\right]\frac{\partial u\left(x+\Delta x,t\right)}{\partial x}-k\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\\ &+Q\left(x,t\right)s\Delta t\Delta x\end{aligned}$$

olur. Denklem $s\Delta t\Delta x$ ile bölünür ve $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ için limit alınırsa

$$c\left(x\right)\rho\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q\left(x,t\right)$$

kısmi diferansiyel denklemi bulunur.

Eğer $c\left(x\right)$, $\rho\left(x\right)$ ve $k\left(x\right)$ fonksiyonları sabit ise

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(x,t\right)$$

olur. Ayrıca kaynak terim yok $\left(F\left(x,t\right) = 0\right)$ ise homojen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ısı denklemi elde edilir.

## 3.2 Normlu Uzaylar

**Tanım 3.2.1** $X$ bir reel (veya kompleks) vektör uzayı olsun. $\overrightarrow{x} \in X$ vektörünü $\|\overrightarrow{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli

$$\|.\| : X \to R$$

fonksiyonuna $X$ üzerinde bir norm denir. $\forall\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in X$ ve $\forall\lambda \in R$ için

$n_1$) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0$ ve $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = 0$

$n_2$) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, . \, \|\overrightarrow{x}\|$

$n_3$)$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ dır.

Bu durumda $X$ vektör uzayına norm ile birlikte normlu vektör uzayı veya normlu uzay denir. $\|\overrightarrow{x}\|$ gösterimine de $\overrightarrow{x}$ in normu denir.

## 3.3 İç Çarpım Uzayı

**Tanım 3.3.1** $X$ bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle .,. \rangle : X \times X \to R$$

fonksiyonu

**i)** $\langle u,u \rangle \geq 0$ ve $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

**ii)** $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

**iii)** $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$
**iv)** $\langle cu,v\rangle = \langle u,cv\rangle = c\langle u,v\rangle$
özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım denir.

### 3.4 Lebesgue Uzayları ($L^p\left(\Omega\right)$)

**Tanım 3.4.1** $\Omega$, $R^n$ de ölçülebilir bir küme olsun. $u$ ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, yani

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

ise $u\left(x\right)$ fonksiyonları $p$.kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p\left(\Omega\right)$ veya $L^p$ ile gösterilir.

Bu uzaydaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

**Not.** $L^p\left(\Omega\right)$ uzayında
**i.** $p=1$ alınırsa $L^1\left(\Omega\right) = L\left(\Omega\right)$ integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,
**ii.** $p=2$ alınırsa $L^2\left(\Omega\right)$ karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır.

### 3.5 Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

**Tanım 3.5.1** $\Omega$, $R^n$de bir bölge $m$ negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}\left(\Omega\right) = \left\{u \in L^p\left(\Omega\right) : D^\alpha u \in L^p\left(\Omega\right),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Yani kendisi ve $m.$ mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^P\left(\Omega\right)$ uzayında olan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir.
Sobolev uzayında normlar: $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left({}_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^P(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 3.5.2** Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile verilir.

**Tanım 3.5.3** $1 \le p \le \infty$ ve $m$ negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere

$$W_0^{m,p}(R^n) = W^{m,p}(R^n)$$

dır.
$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında
$m = 0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ile
$p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ile gösterilir.
$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

**Tanım 3.5.4 (Gömülme)** $X$ ve $Y$ iki normlu uzay olsun. Eğer
**i.** $X$ in bütün elemanları $Y$ de ise $(X \subset Y)$ ve
**ii.** $u$ dan bağımsız bir $c$ sabiti ve her $u \in X$ için

$$\|u\|_Y \le c\,\|u\|_X$$

oluyorsa $X$ uzayı $Y$ uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

**Teorem 3.5.5 (Sobolev Gömülme Teoremi)** $\Omega$, $R^n$ de bir koni özelliğine sahip açık bir bölge $m \ge 1$ ve $j \ge 0$ tamsayılar ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere
**i.** $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir.

**ii.** $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \le q < \infty$$

ya da $j=0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q,\ p \le q < \infty$$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p=1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

elde edilir.

**iii.** $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \le q \le p^*$$

ya da $j=0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q,\ p \le q \le p^*$$

gömülmesi elde edilir. Burada

$$p^* \begin{cases} \frac{np}{n-mp} & n > mp \\ +\infty & n \le mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gömülmelerde $W^{m,p}$ uzayı alınırsa, $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı alınırsa $\Omega$ bölgesi üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın gömülmeler yine geçerli olur.

**Teorem 3.5.6 (Sobolev Poincare eşitsizliği)**

$$\begin{cases} 2 \le p < \infty, & n \le 2m, \\ 2 \le p < \frac{2n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

olsun. Bu durumda her $u \in H_0^m(\Omega)$ için

$$\|u\|_p \le \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} u\right\|_2$$

dır. Burada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$ , $m \ge 1$ ve $c = c(\Omega, p)$ dır.

### 3.6 Eşitlikler ve Eşitsizlikler

**Lemma 3.6.1 (Young eşitsizliği)** $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dır.

**Not**. $\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Young eşitsizliğinde $a = \delta X$ ve $b = \frac{Y}{\delta}$ alınırsa

$$XY \leq \frac{\delta^p X^p}{p} + \frac{\delta^{-q} Y^{-q}}{q}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Lemma 3.6.2 ($\varepsilon$ lu young eşitsizliği)**

Eğer $\varepsilon > 0, a, b \in R, p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise,
o zaman

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + C(\varepsilon) b^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dır.

**Lemma 3.6.3 (Hölder eşitsizliği)**

$1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır.

**Lemma 3.6.4 (Minkowski eşitsizliği)** $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda $u + v \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

dır.

**Lemma 3.6.5 (Komornik eşitsizliği)** $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ artmayan bir fonksiyon ve $c > 0$ sabit sayısı $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty h(\tau)\, d\tau \leq ch(t) \tag{3.11}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0)\, e^{1-\frac{t}{c}} \tag{3.12}$$

dır (Komornik 1994).

**İspat.** $\forall t \geq 0$ için

$$f(x) = e^{\frac{x}{c}} \int_x^\infty h(\tau)\, d\tau \tag{3.13}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $f$ lokal mutlak sürekli ve (3.11) den dolayı artmayandır (3.13) eşitsizliğinin türevi alınır ve (3.11) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c}} \int_x^\infty h(\tau)\, d\tau + e^{\frac{x}{c}} (-h(x)) \\ &= \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c}} \left( \int_x^\infty h(\tau)\, d\tau - ch(x) \right) \leq 0 \end{aligned}$$

olur. $f$ artmayan olduğundan $\forall x \geq 0$ için $f(x) \leq f(0)$ dır. Bu gerçeğin göz önünde bulundurlması ve (3.11) den

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{x}} \int_x^\infty h(\tau)\, d\tau &= f(x) \\ &\leq f(0) \\ &= \int_0^\infty h(\tau)\, d\tau \\ &\leq ch(0) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int_x^\infty h(\tau)\, d\tau \leq ch(0)\, e^{-\frac{x}{c}} \tag{3.14}$$

olur.

Diğer taraftan $h$ negatif olmayan ve artmayan olduğundan

$$\begin{aligned}\int_x^\infty h(\tau)\,d\tau &\geq \int_x^{x+c} h(\tau)\,d\tau \\ &\geq \min_{\tau\in[x,x+c]} h(\tau)\,d\tau \int_x^{x+c} d\tau \\ &= ch(x+c)\end{aligned} \tag{3.15}$$

dır. (3.14) ve (3.15) ten $\forall x \geq 0$ için

$$h(x+c) \leq h(0)\,e^{-\frac{x}{c}}$$

olur. Buradan da $x+c=t$ olarak seçilmesiyle

$$h(t) \leq h(0)\,e^{1-\frac{t}{c}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Lemma 3.6.6 (Komornik eşitsizliği)** $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ artmayan bir fonksiyon $\alpha > 0$ ve $c > 0$ sabit sayıları, $\forall t \geq 0$ için

$$\int_t^\infty h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau \leq ch^\alpha(0)\,h(t) \tag{3.16}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq h(0)\left(\frac{c+\alpha t}{c+\alpha c}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.17}$$

dır (Komornik 1994).

**İspat.** Eğer $h(0) = 0$ ise $h(t) = 0$ olur. Bu durumda (3.17) eşitsizliği doğrudan sağlanır. Kabul edelim ki $h(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\frac{h(t)}{h(0)}$ tanımlıdır. Şimdi $h(t)$ nin yerine $\frac{h(t)}{h(0)}$ ve genelliği bozmadan $h(0) = 1$ olarak alırsak, böylece $\forall t \geq c$ için

$$h(t) \leq \left(\frac{c+\alpha t}{c+\alpha c}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.18}$$

eşitsizliğinin ispatlanması gerekir.

$F : [0,\infty) \to [0,\infty)$ olmak üzere

$$F(t) = \int_t^\infty h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau \tag{3.19}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $F$ lokal mutlak sürekli ve artmayandır. (3.19) ifadesinin türevi alınırsa

$$F'(t) = -h^{\alpha+1}(t) \tag{3.20}$$

olur. Diğer taraftan (3.16) ve $h(0) = 1$ kabulü göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^{\infty} h^{\alpha+1}(\tau)\, d\tau \\ &\leq ch^{\alpha}(0)\, h(t) \\ &= ch(t) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$h(t) \geq \frac{F(t)}{c} \tag{3.21}$$

yazılır. (3.20) ve (3.21) den hemen hemen bütün $(0, \infty)$ aralığında

$$-F' \geq c^{-\alpha-1} F^{\alpha+1}$$

olur. Buradan $B = \sup\{t : h(t) > 0\}$ olmak üzere, hemen hemen bütün $(0, B)$ aralığında

$$\left(F^{-\alpha}\right)' \geq \alpha c^{-\alpha-1} \tag{3.22}$$

yazılabilir. ($F^{-\alpha}(t)$ nın $t < B$ için tanımlı olduğuna dikkat ediniz). $\forall s \epsilon [0, B)$ için (3.22) eşitsizliğinin $[0, s]$ aralığında integrali alınırsa

$$F^{-\alpha}(s) - F^{-\alpha}(0) \geq \alpha c^{-\alpha-1} s$$

bulunur. Buradan $\forall s \epsilon [0, B)$ için

$$F(s) \leq \left(F^{-\alpha}(0) + \alpha c^{-\alpha-1} s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3.23}$$

olur. $s \geq B$ iken $F(s) = 0$ olduğundan (3.23) eşitsizliği aslında $\forall s \geq 0$ için sağlanır. (3.16) dan

$$F(0) \leq ch^{\alpha+1}(0) = c$$

dır. Böylece (3.23) eşitsizlignin sağ tarafı

$$\begin{aligned} \left(F^{-\alpha}(0) + \alpha c^{-\alpha-1} s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} &\leq \left(c^{-\alpha} + \alpha c^{-\alpha-1} s\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \\ &= c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (c + \alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

olur. Diğer taraftan $h$ negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olduğundan (3.23) eşitsizliğinin sol tarafı

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_s^{\infty} h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau \\ &= \int_s^{c+(\alpha+1)s} h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau + \int_{c+(\alpha+1)s}^{\infty} h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau \\ &\geq \int_s^{c+(\alpha+1)s} h^{\alpha+1}(\tau)\,d\tau \\ &\geq (c+\alpha s)\,h^{\alpha+1}(c+(\alpha+1)s) \end{aligned} \tag{3.25}$$

olur. Böylece (3.23)-(3.25) dan

$$(c+\alpha s)\,h^{\alpha+1}(c+(\alpha+1)s) \leq c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(c+\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned} h^{\alpha+1}(c+(\alpha+1)s) &\leq c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(c+\alpha s)^{-\frac{1}{\alpha}-1} \\ &= \left(1+\frac{\alpha s}{c}\right)^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} \end{aligned}$$

olur. Buradan $c+(\alpha+1)s = t$ olarak seçilirse

$$h(t) \leq \left(\frac{c+\alpha t}{c+\alpha c}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

olur. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

### 3.7 Green özdeşliği

Şimdi bazı notasyonları verelim, kolaylık olması açısından $R^3$ ten alalım. $u = u(x,y,z)$ bir fonksiyon ve $F = (F_1, F_2, F_3)$ vektör olsun.

$\nabla u$ =grad$u = (u_x, u_y, u_z)$,

$\nabla.F$ =div$F = F_{1x} + F_{2y} + F_{3z}$,

$\Delta u$ =div grad $u = \nabla.\nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$,

$|\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$,

$\nabla.\nabla = \nabla^2 = \Delta$ dır.

**Teorem 3.7.1 (Green özdeşliği)** $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ olsun. O halde

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega \nabla v \nabla u dx$$

dır. Burada $n$ dışa doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\nabla u$ dır.

### 3.8 Enerji Azalması

**Tanım 3.8.1** $E(t)$ enerji fonksiyonu ve $\forall t > 0, \alpha, \beta, K > 0$ olmak üzere

**i.** $E(t) \leq Ke^{-\alpha t}$ üstel enerji azalması,

**ii.** $E(t) \leq Kt^{-\beta}$ polinomal enerji azalması denir.

Örneğin; $u = u(t)$ olmak üzere

$$\begin{cases} u' = -u^p, \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

başlangıç değer problemlerinde

$p = 1$ için

$$u(t) = e^{-t}$$

üstel azalma söz konusudur.

$p = 2$ için

$$u(t) = (1+t)^{-1}$$

polinomal azalma söz konusudur.

## 4. YÜKSEK MERTEBEDEN PARABOLİK TİPTEN BİR KİRCHHOFF DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE ENERJİ AZALMASI

Bu bölümde yüksek mertebeden parabolik tipten Kirchhoff denklemi için aşağıdaki başlangıç- sınır değer problemini çalışacağız.

$$z_t + M\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2\right)\mathcal{A}z + |z|^{p-2}z_t = |z|^{q-2}z,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{4.1}$$

başlangıç koşulu

$$z(x,0) = z_0(x),\ x\in\Omega,$$

ve sınır koşulu

$$\frac{\partial^i z(x,t)}{\partial\nu^i} = 0,\ i = 0,1,2,...,m-1,\ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),$$

dır. Burada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$ , $m \geq 1$ bir doğal sayıdır, $\Omega$ bölgesi $R^n$ de $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. $\nu$ dış birim normal vektördür. $\gamma \geq 1$ olmak üzere

$$M(s) = 1 + s^{\gamma}$$

dır.

### 4.1 Çözümlerin Global Varlığı

(4.1) problemi için aşağıdaki fonksiyonelleri tanımlayalım:

$$E(t) = E(z) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q}\|z\|_q^q \tag{4.2}$$

ve

$$I(t) = I(z) = \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} - \|z\|_q^q \tag{4.3}$$

dır.

Şimdi enerji fonksiyonelinin artmayan olduğunu ispatlayalım.

**Lemma 4.1.1** $z$ nin (4.1) in bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda $t \in [0,T]$ için

$$E'(t) = -\|z_t\|^2 - \int_\Omega |z|^{p-2}|z_t|^2\,dx \leq 0, \tag{4.4}$$

ve

$E(t) \leq E(0)$

dır.

**İspat**. (4.1) ifadesinde $M(s) = 1 + s^{\gamma}$ olduğunu göz önüne alıp denklem $z_t$ ile çarpılırsa

$$z_t^2 + z_t \mathcal{A} z + z_t \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \mathcal{A} z + |z|^{p-2} z_t^2 = |z|^{q-2} z z_t \tag{4.5}$$

bulunur. Bulunan ifadenin $\Omega$ bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\int_\Omega \left( z_t^2 + z_t \mathcal{A} z + z_t \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \mathcal{A} z + |z|^{p-2} z_t^2 \right) dx = \int_\Omega |z|^{q-2} z z_t dx$$

olur. Buradan

$$\underbrace{\int_\Omega z_t^2 dx}_{A_1} + \underbrace{\int_\Omega z_t \mathcal{A} z dx}_{A_2} + \underbrace{\int_\Omega z_t \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \mathcal{A} z}_{A_3} + \underbrace{\int_\Omega |z|^{p-2} z_t^2 dx}_{A_4} = \underbrace{\int_\Omega |z|^{q-2} z z_t dx}_{A_5} \tag{4.6}$$

yazılabilir. Bu durumda her bir terimi bulalım: $A_1$terimi

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_\Omega z_t^2 dx \\ &= \|z_t\|^2 \end{aligned}$$

olur. $A_2$ terimi için Green özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_\Omega z_t \mathcal{A} z dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $A_3$ terimi

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_\Omega z_t \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \mathcal{A} z dx \\ &= \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \int_\Omega z_t \mathcal{A} z dx \\ &= \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)} \right) \end{aligned}$$

bulunur. $A_4$ terimi

$$A_4 = \int_\Omega |z|^{p-2} z_t^2 dx$$

dir. Ve son olarak $A_5$ terimi

$$\begin{aligned} A_5 &= \int_\Omega |z|^{q-2} z z_t dx \\ &= \int_\Omega |z|^{q-1} z_t dx \\ &= \frac{1}{q}\frac{d}{dt}\int_\Omega |z|^q dx \\ &= \frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|z\|_q^q \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz ifadeler (4.6) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} & \|z_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 \\ & +\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2(\gamma+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^{2(\gamma+1)}\right) + \int_\Omega |z|^{p-2} z_t^2 dx \\ = & \frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|z\|_q^q \end{aligned} \tag{4.7}$$

ifadesi bulunur. Buradan (4.7) ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q}\|z\|_q^q\right) \\ = & -\|z_t\|^2 - \int_\Omega |z|^{p-2} |z_t|^2 dx \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q}\|z\|_q^q$$

olduğundan

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = -\|z_t\|^2 - \int_\Omega |z|^{p-2} |z_t|^2 dx \leq 0,$$

$$E'(t) = -\|z_t\|^2 - \int_\Omega |z|^{p-2} |z_t|^2 dx \leq 0$$

olur. Böylece

$$E(t) \leq E(0) \tag{4.8}$$

bulunmuş olur.

**Lemma 4.1.2** (4.1) denkleminin bir çözümü $z$ olsun ve $q > 2(\gamma+1)$ şartı sağlansın. Eğer

$I(0) > 0,$

ve

$$\beta_1 + \beta_2 < 1, \tag{4.9}$$

ise $t \in [0,T]$ için $I(t) \geq 0$ olur. Burada $0 < \alpha < 1$,

$$\beta_1 = \alpha c_*^q \left(\frac{2q}{q-2}E(0)\right)^{\frac{q-2}{q}}, \beta_2 = (1-\alpha)\, c_*^q \left(\frac{2(\gamma+1)\,q}{q-2(\gamma+1)}E(0)\right)^{\frac{q-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)}}$$

ve $c_*$, $H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ in gömme sabitidir.

**İspat.** Süreklilik nedeniyle öyle bir $T_*$ vardır ki

$$t \in [0,T_*] \text{ için } I(t) \geq 0, \tag{4.10}$$

dır. Şimdi bütün $t \in [0,T]$ için

$$E(t) = E(z) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q}\|z\|_q^q$$

dir. Buradan (4.3) denkleminden

$$I(t) = I(z) = \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} - \|z\|_q^q$$

dır. Buradan

$$\|z\|_q^q = \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} - I(t)$$

yazılır. Bu ifade $E(t)$ fonksiyonelinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E(t) &= E(z) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad -\frac{1}{q}\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} - I(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} \\
&\quad -\frac{1}{q}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \frac{1}{q}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q}I(t) \\
&= \frac{q-2}{2q}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{q-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)\,q}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q}I(t)
\end{aligned}$$

olur. $\forall t\in[0,T_*]$ için $I(t)>0$ olduğundan

$$\frac{q-2}{2q}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2}+\frac{q-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)q}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)}\leq E(t) \tag{4.11}$$

ifadesi elde edilir. (4.11) denkleminden ayrı ayrı eşitsizlikler kullanılır ve (4.8) ifadesi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2} &\leq \frac{2q}{q-2}E(t)\\ &\leq \frac{2q}{q-2}E(0)\end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)} &\leq \frac{2q(\gamma+1)}{q-2(\gamma+1)}E(t)\\ &\leq \frac{2q(\gamma+1)}{q-2(\gamma+1)}E(0)\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitsizliği de elde edilmiş olur. Diğer yandan

$$\|z\|_q^q=\alpha\|z\|_q^q+(1-\alpha)\|z\|_q^q \tag{4.14}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $H_0^m(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ gömülmesini uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_\Omega |z|^q\,dx &\leq \alpha c_*^q\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{q}+(1-\alpha)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{q}\\ &= \alpha c_*^q\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{q-2}.\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2}\\ &\quad+(1-\alpha)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{q-2(\gamma+1)}.\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)}\end{aligned} \tag{4.15}$$

ifadesi elde edilir. (4.12) ifadesinden

$$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2}\leq\frac{2q}{q-2}E(0) \tag{4.16}$$

eşitsizliği alınır ve (4.13) ifadesinden

$$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)}\leq\frac{2q(\gamma+1)}{q-2(\gamma+1)}E(0) \tag{4.17}$$

eşitsizliği alınırsa ve $\forall t\in[0,T_*]$ için

$$\begin{aligned}\|z\|_q^q &\leq \alpha c_*^q\left(\frac{2q}{q-2}E(0)\right)^{\frac{q-2}{2}}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2}\\ &\quad+(1-\alpha)c_*^q\left(\frac{2q(\gamma+1)}{q-2(\gamma+1)}E(0)\right)^{\frac{q-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)}}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2(\gamma+1)}\end{aligned} \tag{4.18}$$

ifadesi elde edilir. Burada daha önce tanımladığımız

$$\beta_1 = \alpha c_*^q \left( \frac{2q}{q-2} E(0) \right)^{\frac{q-2}{q}} \text{ ve } \beta_2 = (1-\alpha)\, c_*^q \left( \frac{2(\gamma+1)\, q}{q-2(\gamma+1)} E(0) \right)^{\frac{q-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)}}$$

eşitlikleri (4.18) eşitsizliğinde kullanılırsa $\forall t \in [0, T_*]$ için

$$\|z\|_q^q \leq \beta_1 \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \beta_2 \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)} \tag{4.19}$$

ifadesi elde edilir. $\beta_1 + \beta_2 < 1$ olduğundan

$$\|z\|_q^q \leq \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)}$$

dır. Bu da şu anlama gelir

$$I(t) > 0, \forall t \in [0, T_*]$$

dır. Bu durumda yukarıdaki prosedür tekrarlanarak $T^*, T$ ye genişletilebilir.

**Teorem 4.1.3** Lemma (4.1.1) varsayımı altında (4.1) denkleminin lokal çözümü globaldır.

**İspat.** $\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)}$ ifadesinin $t$ den bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir. (4.2) ve (4.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{q} \|z\|_q^q \\ &= \frac{q-2}{2q} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \frac{q-2(\gamma+1)}{2(\gamma+1)\, q} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)} + \frac{1}{q} I(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $I(t) \geq 0$ olduğundan

$$\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)} \leq C E(t) \tag{4.20}$$

olur ve (4.8) ifadesi dikkate alınırsa

$$\left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2(\gamma+1)} \leq C E(0) \tag{4.21}$$

ifadesi elde edilir. Burada $C = \max \left\{ \frac{2q}{q-2}, \ \frac{2(\gamma+1)q}{q-2(\gamma+1)} \right\}$ dır.

## 4.2 Çözümlerin Kararlılığı

Bu bölümde ana sonucumuz Komornik eşitsizliğine dayanmaktadır. Bu amaçla aşağıdaki Lemma'ya ihtiyacımız vardır.

**Lemma 4.2.1** Lemma 4.1.1 ve $m > 2$, varsayımlarının geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\|z\|_q^q \leq cE(t)\,. \tag{4.22}$$

dır. Bu durumda (4.22) eşitsizliğini sağlayan pozitif bir $c$ sabiti vardır.

**İspat.** Sobolev gömme teoreminden

$$\|z\|_q^q \leq c_*^q \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^q$$

yazılabilir. (4.16) dan

$$\begin{aligned} \|z\|_q^q &\leq c_*^q \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{q-2} . \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 \\ &\leq c_*^q \left(\frac{2q}{q-2}E(0)\right)^{\frac{q-2}{2}} . \frac{2q}{q-2}E(t) \\ &\leq cE(t)\,4.23 \end{aligned} \tag{4.23}$$

olur.

Şimdi, ana sonucumuzu belirleyelim.

**Teorem 4.2.2** Lemma 4.1.1 varsayımlarını kabul edelim. O zaman $C > 0$ sabitleri var ve $\forall t \geq C$ için

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{C+qt}{C+qC}\right)^{\frac{-1}{q}}$$

dır.

**İspat.** Şimdi (4.1) denklemini ele alalım:

$$z_t + M\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2\right)\mathcal{A}z + |z|^{p-2}z_t = |z|^{q-2}z$$

ifadesinde $M(s) = 1 + s^\gamma$ olduğundan

$$z_t + \mathcal{A}z + \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z^{2\gamma}\right\|\mathcal{A}z + |z|^{p-2}z_t = |z|^{q-2}z \tag{4.24}$$

ifadesi elde edilir. Buradan (4.24) ifadesi $zE^q(t), (q>0)$ ile çarpılıp $\Omega \times (S,T)$ bölgesi üzerinde integral alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega E^q(t)\left[zz_t - z\left(M\left(\int_\Omega \left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 dx\right)\mathcal{A}z + |z_t|^{p-2} z_t\right)\right] dxdt \\
= \; &\int_S^T \int_\Omega E^q(t)\left[z_t z + \underbrace{z\mathcal{A}z}_{A_1} \underbrace{+z\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{2\gamma}\mathcal{A}z}_{A_2} + z|z|^{p-2} z_t\right] dxdt \\
= \; &\int_S^T E^q(t)\int_\Omega |z|^q \, dxdt \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (4.25) ifadesinde $A_1$ ve $A_2$ terimlere Green özdeşliği uygulanırsa

$$\int_S^T \int_\Omega E^q(t)\left[\begin{array}{c} z_t z + \left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 \\ +\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^{2\gamma}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 + z|z|^{p-2} z_t \end{array}\right] dxdt = \int_S^T E^q(t)\int_\Omega |z|^q \, dxdt \qquad (4.26)$$

bulunur. Eşitliğinin sol tarafına aşağıdaki (4.27) terimi eklenip çıkarılırsa

$$\int_S^T E^q(t)\int_\Omega \left[\beta_1\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 + \beta_2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^{2\gamma}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2\right] dxdt, \qquad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega E^q(t)\left[\begin{array}{c} z_t z(t) + \left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 + \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^{2\gamma}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 + z|z|^{p-2} z_t \\ +\beta_1\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 + \beta_2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^{2\gamma}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 \\ -\beta_1\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 - \beta_2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^{2\gamma}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 dxdt \end{array}\right] \\
= \; &\int_S^T E^q(t)\int_\Omega |z|^q \, dxdt \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&(1-\beta_1)\int_S^T E^q(t)\int_\Omega \left[\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2\right] dxdt \\
&+(1-\beta_2)\int_S^T E^q(t)\int_\Omega \left[\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^{2\gamma}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2\right] dxdt \\
&+\int_S^T E^q(t)\int_\Omega z_t z dxdt + \int_S^T E^q(t)\int_\Omega z|z|^{p-2} z dxdt \\
= \; &-\int_S^T E^q(t)\int_\Omega \left[\begin{array}{c} \beta_1\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 \\ +\beta_2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|_2^{2\gamma}\left|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right|^2 - z^q \end{array}\right] dxdt \le 0 \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

dır. Açıktır ki

$$
\begin{aligned}
& \xi \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^{2} + \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^{2} - \frac{|z|^{q}}{q} \right] dxdt \\
\leq \; & (1-\beta_{1}) \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^{2} \right] dxdt \\
& + (1-\beta_{2}) \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2(\gamma+1)} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^{2\gamma} \left| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right|^{2} \right] dxdt
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

olur. Buradan $\xi = \min\left((1-\beta_{1}), (1-\beta_{2})\right)$ kabul edelim

$$
\begin{aligned}
\xi \int_{S}^{T} E^{q+1}(t)\, dt \;\; \leq \;\; & -\int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} z z_{t} dxdt \\
& \int_{S}^{T} - E^{q}(t) \int_{\Omega} z z_{t} |z|^{p-2} dxdt
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

olur. Bu durumda (4.31) eşitsizliğin sağ tarafına Young Eşitsizliğini uygulanırsa

$$
XY \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_{1}} X^{\lambda_{1}} + \frac{1}{\lambda_{2} \varepsilon^{\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}}}} Y^{\lambda_{2}}, \; X, Y \geq 0, \; \varepsilon > 0
$$

ve $\frac{1}{\lambda_{1}} + \frac{1}{\lambda_{2}} = 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& -\int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} z z_{t} dxdt \\
\leq \; & \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left( \varepsilon c |z|^{2} + c_{\varepsilon} |z_{t}|^{2} \right) dxdt
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

elde edilir. Aynı şekilde yukarıdaki Young Eşitsizliği tekrar kullanılırsa şunu elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
& -\int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} z z_{t} |z|^{p-2} dxdt \\
= \; & -\int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} |z|^{\frac{p-2}{2}} z_{t} |z|^{\frac{p-2}{2}} z dxdt \\
\leq \; & \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left( \varepsilon c |z|^{p} + c_{\varepsilon} |z|^{p-2} z_{t}^{2} \right) dxdt
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

elde edilir. Buradan (4.32) ve (4.33) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\xi \int_{S}^{T} E^{q+1}(t)\, dt \;\; \leq \;\; & \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left( \varepsilon c |z|^{2} + c_{\varepsilon} |z|^{2} dxdt \right) \\
& + \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left( \varepsilon c |z|^{p} + c_{\varepsilon} |z|^{p-2} z_{t}^{2} dxdt \right) \\
\leq \;\; & \varepsilon c \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left[ |z|^{2} + |z|^{p} \right] dxdt \\
& + c_{\varepsilon} \int_{S}^{T} E^{q}(t) \int_{\Omega} \left( |z_{t}|^{2} + |z|^{p-2} z_{t}^{2} \right) dxdt
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

olur. Buradan $E^{'}(t)$ ifadesinin tanımı kullanılırsa

$$\xi\int_S^T E^{q+1}(t)\,dt \leq \varepsilon c\int_S^T E^{q+1}(t)\,dt + c_\varepsilon\int_S^T E^q(t)\int_\Omega\left(-E'(t)\right)dxdt$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\xi\int_S^T E^{q+1}(t)\,dt &\leq \varepsilon c\int_S^T E^{q+1}(t)\,dt + c_\varepsilon\left[E^{q+1}(S) - E^{q+1}(T)\right]\\ &\leq \varepsilon c\int_S^T E^{q+1}(t)\,dt + c_\varepsilon E^q(0)\,E(S)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\varepsilon$ yeteri kadar küçük seçilirse

$$\int_S^T E^{q+1}(t)\,dt \leq cE^q(0)\,E(S)$$

olur. Bu durumda $T\rightarrow\infty$ için

$$\int_S^\infty E^{q+1}(t)\,dt \leq cE^q(0)\,E(S)$$

Komornik eşitsizliği istenen sonucu verir.

# 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

## 5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada $\mathcal{A}=(-\Delta)^m$ , $m \geq 1$ bir doğal sayı ve $M(s) = 1 + s^\gamma$, $\gamma \geq 1$ olmak üzere

$$z_t + M\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2\right)\mathcal{A}z + |z|^{p-2} z_t = |z|^{q-2} z$$

yüksek mertebeden parabolik tipten Kirchoff tipi bir denklemin sınırlı bir $\Omega$ bölgesinde çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması araştırılmıştır.

## 5.2 Öneriler

Çalışılmış olan yüksek mertebeden parabolik tipten Kirchoff tipi denklemin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması başka koşullar altında çalışılabilir.
Ayrıca denklemin çözümlerinin patlaması, üstel büyümesi,... gibi özelliklerde çalışılabilir.

## KAYNAKLAR


Adams, R. A. ve Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press.

Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differantial equations*, New York, Springer.

Ishige, K., Kawakami, T. and Okabe S. (2020). Existence of solutions for a higher-order semilinear parabolic equation with singular initial data. Annales de l'Institut Henri Poincare C, Analyse Nonlineaire, 37, 1185-1209. doi: 10.1016/j.anihpc.2020.04.002

Kesevan, S. (2003). *Topics in functional analysis and applications*, India, John Wiley Sons.

Kirchhoff, G. (1883). Vorlesungen uber mechanik. BG Teubner.

Komornik, V. (1994). *Exact controllability and stabilization: The Multiplier Method*, Paris. RAM: Research in Applied Mathematics, Masson-John Wiley.

Ouaoua, A., Khaldi, A., Maouni, M. (2020). Stabilization of solutions for a Kirchhoff type reaction-diffusion equation. Canadian Journal of Mathematics, 2(2), 71-80.

Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları*, Ankara, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. (2018). *Teori ve Çözümlü Problemlerle Kısmi Türevli Denklemler*, Ankara, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. (2021). *Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması*, Ankara, Pegem Akademi.

Pişkin, E. (2022). *Teori ve Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler*, Ankara, Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E., and Cömert, T. (2022). Existence and decay of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity. Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal, 15(1), 111-128. doi: 10.32513/asetmj/19322008208

Pişkin, E., and Ekinci, F. (2020). Blow up and growth of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with multiple nonlinearities. Konuralp Journal of Mathematics, 8(1), 216-222.

Pişkin, E., and Okutmuştur, B. (2021). *An introduction to Sobolev spaces*. Sharjah, Bentham Science Publishers

Shahrouzi, M. (2023). Asymptotic behavior of solutions for a nonlinear viscoelastic higher-order p(x)-Laplacian equation with variable-exponent logarithmic source term, Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana 29, 1-20.

Xiao, L., and Li, M. (2021). Initial boundary value problem for a class of higher-order n-dimensional nonlinear pseudo-parabolic equations. Boundary Value Problems, 2021, 1-24. doi: 10.1186/s13661-020-01482-6

# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

| | |
|---|---|
| Soyad, Ad | Akkurt, Evrim |
| Web sayfası<br>(Research Gate, Academia, vs.) | |

## Eğitim Bilgileri

| Derece | Kurum | Mezuniyet Yılı |
|---|---|---|
| Yüksek Lisans | | |
| Lisans | Dicle Üniversitesi | 2012 |
| Lise | | |

## İş Deneyimi

| Dönem (Yıl) | Şirket, Kurum | Görev |
|---|---|---|
| 2016- | Milli Eğitim Bakanlığı | Matematik Öğretmeni |

## Yayınlar

1. Evrim Akkurt ve Erhan Pişkin, Asymptotic behavior of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation, 3rd International Conference on Engineering, Natural and Social Sciences (ICENSOS) 16- 17 May, 2024 in Konya-TÜRKİYE

**DİCLE ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Öğrencinin Adı, Soyadı | Evrim AKKURT | | |
| Öğrenci No | 22804018 | | |
| Ana Bilim Dalı | Matematik | | |
| Program Türü | Proje ☐ | Yüksek Lisans **X** | Doktora ☐ |
| Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı) | Prof. Dr. Erhan PİŞKİN | | |
| (Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı) | | | |
| Tez Başlığı | Komornik Eşitsizliği İle Bazı Kısmi Türevli Denklemlerin Çözümlerinin Kararlılığı | | |
| **RAPOR BİLGİLERİ** | | | |
| Raporlama Aşaması | Tez Savunma Sınavı Sonrası | | |
| Sayfa Sayısı | 52 | | |
| Raporlama Tarihi | 13.07.2024 | | |
| Benzerlik Oranı (%) | %15 | | |

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 39 sayfalık kısmına ilişkin, 13/07/2024 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 15 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:
XBaşlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
XKaynaklar hariç
☐Alıntılar ~~hariç~~/dâhil
☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir,
gereğini arz ederim.

**Öğrencinin** Adı Soyad: Evrim AKKURT
Tarih:
İmza:

**Danışman** Adı, Soyadı: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Tarih: İmza:

**Ana Bilim Dalı Başkanı** Adı, Soyadı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY İmza:
Tarih: