



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DUAL DÖNÜŞÜMLERİN KİNEMATİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğur ERCAN

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

AKSARAY, 2021

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342414 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Uğur ERCAN tarafından hazırlanan “**DUAL DÖNÜŞÜMLERİN KİNEMATİĞİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Üye: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ayşe YAVUZ

Necmettin Erbakan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.....

Tez Savunma Tarihi: 08/07/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

UĞur ERCAN

TEŞEKKÜR

“Dual Dönüşümlerin Kinematiği” adlı tez çalışmasının başından sonuna kadar, değerli zamanını feda ederek, her türlü destek ve yardımlarını esirgmeden beni yönlendiren, fikirlerinden, bilim insanı kişiliğinden ve insaniyetinden çok şey öğrendiğim değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA’ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi çalışmalarım süresince de maddi manevi destekleriyle yanımda olan aileme, göstermiş oldukları sabır ve fedakârlıkları için eşim Çiğdem ERCAN ve kızım Ebrar Elif ERCAN’a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Uğur ERCAN
AKSARAY, 2021

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 \mathbb{E}^n de Hareketler.....	3
2.2 Lorentz Uzayı.....	8
2.3 Galile Uzayı.....	11
2.4 Dual Dönüşüm.....	19
3. LORENTZ UZAYINDA DUAL DÖNÜŞÜMLERİN KİNEMATİĞİ	23
4. GALİLE UZAYINDA DUAL DÖNÜŞÜMLERİN KİNEMATİĞİ	38
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL DÖNÜŞÜMLERİN KİNEMATİĞİ

Uğur ERCAN

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

ÖZET

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmı olarak düzenlenmiş, kinematik ve dual dönüşüm kavramlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılan temel kavramlar sunularak dual dönüşümün tanımı verilmiştir. Üçüncü bölümde, Öklid uzayı ile Lorentz uzayı arasındaki ilişki dual dönüşüm yardımıyla ele alınmıştır. Her iki uzayda da sabit kalan dönme eksenleri üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca, dual dönüşüm ve Cayley formülü kullanılarak oluşturulan komutatif diagram incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Galile ve pseudo-Galile uzayları arasında tanımlanan dual dönüşüm verilerek, uygulamaları yapılmıştır. Son bölüm, tezin sonuç kısmı olarak düzenlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dual Dönüşüm, Lorentz Uzayı, Dönme Ekseni, Galile Uzayı, Pseudo-Galile Uzayı.

Haziran, 2021; 46 sayfa

M.Sc. THESIS

KINEMATICS OF DUAL TRANSFORMATIONS

Uğur ERCAN

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Gülsüm YÜCA

ABSTRACT

This thesis consists of five main parts. The first chapter was arranged as an introduction part, and the concepts of kinematics and dual transformation were mentioned. In the second chapter, the definition of dual transformation is given by presenting the basic concepts used in the thesis. In the third chapter, the relationship between Euclidean space and Lorentz space is discussed with the help of dual transformation. The axes of rotation that remain constant in both spaces have been studied. In addition, the commutative diagram created using the dual transform and Cayley formula is examined. In the fourth chapter, the dual transformation defined between Galilean and pseudo-Galilean spaces is given and its applications are made. The last chapter is organized as the conclusion part of the thesis.

Key Words: Dual Transformation, Lorentzian Space, Rotation Axis, Galilean Space, Pseudo-Galilean Space.

June, 2021; 46 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Dönme hareketi.....	5
Şekil 2.2. Light koni.	10
Şekil 2.3. Galile düzleminde bir noktanın orijine olan uzaklığı	15
Şekil 2.4. Bir dual sayının normu.	16
Şekil 2.5. Galile düzleminde d_{AA_1} uzaklığı.	16
Şekil 2.6. Galile düzleminde δ_{AA_1} özel uzaklığı	17
Şekil 2.7. G^2 de ABC üçgeninde kenar uzunlukları.....	17
Şekil 2.8. S_G^r, G^2 de r – yarıçaplı Galile çemberi.....	18
Şekil 2.9. G^2 de birim çember.	19
Şekil 4.1. Shear hareketi.	39



SİMGELER VE KISALTMALAR

V	Reel vektör uzayı
\mathbb{E}^n	n-boyutlu öklid uzayı
$GL(n, \mathbb{R})$	Genel lineer grup
$O(n)$	Ortogonal matrislerin kümesi
$SO(n)$	Özel ortogonal matrislerin kümesi
$SO(n - 1, 1)$	Özel semi-ortogonal matrislerin kümesi
\mathbb{E}_1^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
G^2	Galile düzlemi
G^3	Galile uzayı
G^n	n-boyutlu Galile uzayı
G_1^3	3-boyutlu pseudo Galile uzayı
G_1^n	n-boyutlu pseudo Galile uzayı
S_G^r	r-yarıçaplı Galile çemberi
C	Liht koni
\mathbb{D}	Dual sayılar kümesi
$\widehat{SO}(n)$	Özel dual ortogonal matrislerin kümesi
$\widehat{SO}(n - 1, 1)$	Özel dual semi-ortogonal matrislerin kümesi
$\diamond(n)$	$SO(n)$ Grubunun lie cebiri
$\diamond(n - 1, 1)$	$SO(n - 1, 1)$ Grubunun lie Cebiri

1. GİRİŞ

Kinematik, hareketi oluşturan sebepler göz ardı edilerek, yalnızca hareketin geometrisini göz önüne alan bilim dalıdır. Kinematikte belirlenmesi gerekenler her an noktanın veya katı cismin yeri (yörüngesi), hızı ve ivmesidir. Kinematik; yol, hız, ivme ve zaman arasında bağıntılar kurar.

Son yıllarda, Öklid dışı geometrilere yapılan çalışmaların sayısı artmaktadır. Özellikle, Lorentz ve Galile uzaylarında yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar ve uygulanabilirlikleri ilgi çekicidir. Bu tezin amacı, dual dönüşüm yardımıyla, Öklid, Lorentz ve Galile uzaylarındaki dönme hareketleri arasındaki ilişkiyi incelemek ve bunların kinematik uygulamalarını vermektir.

Bu tez çalışmasında, Dohi vd. (2010) tarafından tanımlanmış dual dönüşüm yardımıyla, $n \times n$ -lik matrislerin iki kümesi olan $SO(n)$ ve $SO(n - 1, 1)$ izometri grupları arasındaki geçiş incelenecektir. Bu geçiş, benzer şekilde n -boyutlu Galile uzayında da ele alınacaktır. Tez süresince ele alınacak kavramların tanımları alt başlıklar halinde ayrıntılı olarak verilecektir. Greub (1967) ve McCarthy (1990) çalışmaları temel alınarak kinematik anlamda kullanılacak tanım ve teoremler araştırılacaktır. Lopez (2008), O’neill (1983) ve Weinstein (1996) tarafından yapılan çalışmalar ışığında Lorentzian geometrideki kinematik uygulamalar üzerinde durulacaktır. Ryan (1986) ve Yüca ve Yaylı (2020) tarafından incelenen Galile uzayındaki dual dönüşümlerin kinematığı, tezin Galile uzayında çalışılan bölümüne ışık tutacaktır. Temel tanım ve teoremlerin sunulmasının ardından, dual dönüşümün uygulamalarına geniş yer verilecektir.

Dual dönüşüm bu tezde kullanıldığı anlamıyla ilk defa Dohi vd. (2010) da tanımlanmıştır. Sonrasında Yüca ve Yaylı (2018) çalışmalarında bu çalışmayı dual uzaya aktarmışlar ve eksenlerin sabit kalıp kalmadığını araştırmışlardır. Aynı zamanda iki uzayda elde edilen yüzeylerin görsellerini de vererek, bunlar arasında bir ilişki olup olmadığını yorumlamışlardır. Yüca ve Yaylı (2020) çalışmalarında, dual dönüşüm kavramını Galile uzayına aktarmışlardır. Bu çalışmalar ışığında Yüca (2021a) da komutatif bir diagramla dual dönüşümü Cayley dönüşümü ile birlikte ifade etmiştir. Yüca ve Yaylı (2021b) çalışmalarında dual dönüşümü kuaterniyonları kullanarak ifade etmişlerdir. Reel ve dual uzaylarda dual dönüşümle yapılan dönme

ve vida hareketleri üzerinde çalışmışlardır. Daha sonra, Yüca ve Yaylı (2021c) çalışmalarında dual dönüşümü homotetik hareketlerle ifade etmişlerdir. Bu tez çalışmasında, Yüca (2014) doktora tezi ve sonrasında yapılan çalışmalar ışığında dual dönüşüme dair tüm tanım ve teoremler ele alınarak, dual dönüşüm kavramı pekiştirilecek ve kinematik uygulamalarla desteklenecektir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez süresince kullanılacak olan temel kavramlar sunulacaktır. Üzerinde çalışılacak farklı kavramların daha anlaşılır olması adına, bölüm dört alt başlık halinde verilmiştir.

2.1 \mathbb{E}^n de Hareketler

Tanım 2.1.1 (Afin uzay) $A \neq \emptyset$ bir küme ve bir vektör uzayı V olsun.

$$\psi : A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \mapsto \psi(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \quad (2.1)$$

dönüşümü

$$1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

$$2) \forall P \in A \text{ ve } \alpha \in V \text{ için } \overrightarrow{PQ} = \alpha \text{ olacak biçimde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

Eğer bu şartı sağlıyor ise A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.1.2 (Öklid uzayı) A bir reel afin uzay ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2.2)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A afin uzayına Öklid uzayı denir iç çarpım işlemine de standart Öklid metriği denir. (Hacısalihoglu, 1983).

Örnek 2.1.1 3 - boyutlu standart reel vektör uzayı \mathbb{R}^3 ile birleştirilmiş \mathbb{R}^3 afin uzayını ele alalım. Bu \mathbb{R}^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3) \\ y = (y_1, y_2, y_3) \end{cases} \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece \mathbb{R}^3 afin uzayı 3 – boyutlu Öklid uzayı olur ve \mathbb{E}^3 ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 \mathbb{R} üzerinde tanımlanan bütün $n \times n$ lik matrislerin kümesi \mathbb{R}_n^n olmak üzere, \mathbb{R}_n^n deki bütün regüler matrislerin çarpma işlemi ile oluşturduğu gruba genel lineer grup denir ve $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid \det(A) \neq 0\} \quad (2.4)$$

$O(n)$ grubunun $GL(n, \mathbb{R})$ ' nin bir altgrubu olduğu açıktır.

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n\}. \quad (2.5)$$

$O(n)$ deki bir matrisin determinanı için, $AA^T = A^T A = I_n$ ifadesinde her iki tarafa determinant fonksiyonu uygulanırsa,

$$\det A \cdot \det A^T = 1 \quad (2.6)$$

ve

$$\det A^T = \det A \quad (2.7)$$

olduğundan

$$\det A = \pm 1 \quad (2.8)$$

olduğu görülür. O halde, $O(n)$ deki bazı matrislerin determinantları +1'dir. Bu matrislerin kümesi matris çarpımı işlemine göre bir gruptur. Bu grup $O(n)$ in bir altgrubu olup $SO(n)$ ile gösterilir. Böylece şu tanım verilebilir.

Tanım 2.1.4 $SO(n) = \{A: A \in O(n), \det A = 1\}$ kümesinin çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba özel ortogonal grup veya dönme grubu denir ve $SO(n)$ ile gösterilir.

Aynı şekilde $GL(n, \mathbb{R})$ 'de de determinantı +1 olan matrisler vardır. Bu matrislerin kümeleri de matris çarpımı işlemine göre birer gruptur. Bu gruba da özel lineer grup denir, $SL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Böylece aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$$

$SL(n, \mathbb{R})$ ve $SO(n)$ grupları $GL(n, \mathbb{R})$ nin birer alt grubuna izomorfturlar.

Tanım 2.1.5 (\mathbb{E}^n de izometri) d , \mathbb{E}^n n- boyutlu Öklid uzayı üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olmak üzere,

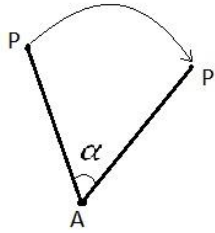
$$f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n \quad (2.9)$$

fonksiyonu için

$$d(f(X), f(Y)) = d(X, Y) \quad X, Y \in \mathbb{E}^n \quad (2.10)$$

ise f fonksiyonuna \mathbb{E}^n in bir izometrisi denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.1.6 (Dönme Hareketi) Düzlemde bir A noktası ve radyan bir α -açısı alalım. Bir P noktası için $\hat{PAP}' = \alpha$ ve $|AP| = |AP'|$ olacak şekilde P yi P' noktasına götüren dönüşüme dönme hareketi denir. Şekil 2.1'de bir dönme hareketi gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Dönme hareketi.

Teorem 2.1.1 \mathbb{E}^n ile eşleşen \mathbb{R}^n n-boyutlu standart reel vektör uzayında

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (2.11)$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile, $O = (0, \dots, 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Böylece herhangi bir dönme hareketi altında, \mathbb{E}^n deki bir X noktasının görüntüsü Y olmak üzere,

$$Y = A.X, \quad A \in O(n) \quad (2.12)$$

biçiminde yazılabilir.

Tanım 2.1.7 (Öteleme) f , \mathbb{E}^n nin bir izometrisi ve eğer, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ için,

$$f(X) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n), \dots t_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

ise f ye \mathbb{E}^n de bir öteleme fonksiyonu denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Teorem 2.1.2 \mathbb{E}^n , n - boyutlu Öklid uzayının katı hareketlerinden birinin matrisi B olmak üzere,

$$B = \begin{bmatrix} & & & t_1 \\ & & & t_2 \\ & a_{ij} & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_n \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$= \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$[a_{ij}] \in O(n), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.15)$$

$(n + 1) \times (n + 1)$ -lik reel ve regüler bir matristir. Böylece B ye karşılık gelen izometri, \mathbb{E}^n deki bir X noktasının B altındaki görüntüsü Y olmak üzere, matris formunda

$$Y = A.X + C, \quad A \in O(n), \quad C \in T(n) \quad (2.16)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.8 (Genel hareket) \mathbb{E}^n , n - boyutlu Öklid uzayında A $n \times n$ -lik ortogonal bir matris, C bir ötelemeye tekabül eden $n \times 1$ -lik matris olmak üzere

$$Y = A.X + C \quad (2.17)$$

ile verilen bir genel izometrinin ifadesindeki A ve C matrisleri eğer, zaman ile özdeşlenebilen bir t parametresinin fonksiyonları, ayrıca A nın determinanı 1 ve bütün karakteristik değerleri farklı ise $Y = A.X + C$ izometrilerinin herhangi birine \mathbb{E}^n de bir genel hareket denir (Tütüncü, 2009).

$$Y = A.X \quad (2.18)$$

Bir genel harekette $A.X$ kısmına hareketin dönme kısmı, C kısmına da hareketin öteleme kısmı denir.

Dönme hareketlerini yaptıran ortogonal matrisler, anti-simetrik matrisler kullanılarak Cayley formülü yardımıyla da elde edilebilir. McCarthy (1990) de bir vektöre karşılık gelen anti-simetrik matris aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.9 $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ vektörüne karşılık gelen 3×3 - lük anti-simetrik S matrisi aşağıdaki gibi verilir:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Bu sayede, dönme eksenini belirlenen ortogonal matris, S anti-simetrik matrisi kullanılarak Cayley formülü yardımıyla elde edilebilir.

Tanım 2.1.10 (Cayley formülü) A bir ortogonal matris ve S de bir antisimetrik matris olmak üzere Cayley formülü aşağıdaki gibi verilir:

$$[S] = [A - I][A + I]^{-1} \quad (2.20)$$

Cayley dönüşümü ayrıca,

$$[A] = [I - S]^{-1}[I + S] \quad (2.21)$$

eş değer formuna da sahiptir. Bu sayede, bir anti-simetrik matris yardımıyla bir ortogonal matris elde edilebildiği gibi bir ortogonal matristen de bir anti-simetrik matris elde edilebilir.

2.2 Lorentz Uzayı

Tanım 2.2.1 Lorentz uzayı $\mathbb{E}_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ metrik uzayıdır, \langle , \rangle metriği ile aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n \quad u = (u_1, \dots, u_n), \quad v = (v_1, \dots, v_n). \quad (2.22)$$

\langle , \rangle metriği, Lorentz metriği olarak adlandırılır, indeksi 1 olan non-dejenere metrik olarak yorumlanır. \mathbb{E}_1^n Minkowski uzayı ve \langle , \rangle Minkowski metriği olarak da adlandırılır. Burada, \mathbb{R}^n uzayında iken Öklid metriği düşünülecek ve Öklid uzayını karşılayan \mathbb{E}^n ifadesi kullanılacaktır.

Aynı zamanda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\langle u, v \rangle = u^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v = u^T G v. \quad (2.23)$$

Lorentz uzayının alt boyutları aşağıdaki gibi gösterilir:

$$n = 1, \quad \mathbb{E}_1^1 = (\mathbb{R}, \langle \rangle), \quad \langle u, v \rangle = -uv.$$

$n = 2, \quad \mathbb{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \rangle), \quad \langle u, v \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2.$ \mathbb{E}_1^2 , Lorentz düzlemi olarak ifade edilecektir (Lopez, 2008).

Tanım 2.2.2 Bir $v \in \mathbb{E}_1^n$ vektörü,

i) $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise spacelike,

ii) $\langle v, v \rangle < 0$ ise timelike,

iii) $\langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise lightlike

olarak adlandırılır.

Burada, $v = 0$ olması durumunda $\langle v, v \rangle = 0$ sağlamasına rağmen vektörün spacelike olduğu belirtilir (Lopez, 2008).

Tanım 2.2.3 Verilen $u \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü için $\sqrt{|\langle u, u \rangle|}$ ifadesi u vektörünün normu olarak adlandırılır ve $|u|$ ile gösterilir. u vektörünün normu 1 ise bu vektöre birim denir.

Sonuç 2.2.1

- i) u bir spacelike vektör ise $|u| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$,
- ii) timelike vektör ise $|u| = \sqrt{-|\langle u, u \rangle|}$ olur (Lopez, 2008).

Tanım 2.2.4 \mathbb{E}_1^n uzayına ait bir liht koni, \mathbb{E}_1^n uzayının tüm lightlike vektörlerinin kümesidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$C = \{v \in \mathbb{E}_1^n; \langle v, v \rangle = 0\} - \{(0, \dots, 0)\}$$

C , alt boyutlarda aşağıdaki gibi hesaplanır:

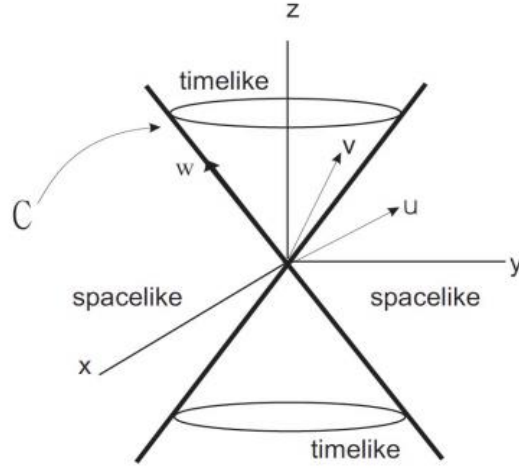
$n = 2$ için, $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2; x^2 - y^2 = 0\} - \{(0,0)\}$ biri $x - y = 0$ diğeri $x + y = 0$ olan iki doğrudan oluşur.

$n = 3$ için, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0,0,0)\}$ tepe noktası orijin olan konidir.

Timelike vektörlerinin kümesi T ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$T = \{v \in \mathbb{E}_1^n; \langle v, v \rangle < 0\}.$$

Şekil 2.2' de görüldüğü üzere, T timelike vektörlerin kümesinin iki bileşeni $\{v \in T; v_n > 0\}$ ve $\{v \in T; v_n < 0\}$ birbiri ile tam olarak bağlantılı değildir. Spacelike vektörler kümesi daima bağlantılıdır. C light konisi, $n = 2$ durumunda birbirleri ile bağlantılı dört bileşenden oluşurken $n > 2$ olması durumunda iki bileşenlidir. Lightlike w , spacelike u ve timelike v vektörleri yine Şekil 2.2 üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Light koni.

Bu çalışmada, dual dönüşüm yardımı ile ortogonal matrislerden semi-ortogonal matrisler elde edileceği için aşağıdaki tanımın verilmesi faydalı olacaktır.

Tanım 2.2.5 G Lorentz uzayının işaret matrisi olmak üzere, bir $n \times n$ lik A matrisi,

- i) $A^T = GAG$ veya $A = GA^T G$ ise semi simetrik,
 - ii) $A^T = -GAG$ veya $A = -GA^T G$ ise semi anti-simetrik,
 - iii) $A^T = GA^{-1}G$ veya $A^{-1} = GA^T G$ ise semi-ortogonal olarak adlandırılır.
- (O’neill, 1983).

\mathbb{E}^n ‘de hareketler bölümünde, bir vektöre karşılık gelen Öklidyen anti-simetrik matris verilmişti. Benzer şekilde, Lorentzian anti-simetrik matris de aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.2.6 \mathbb{E}_1^3 de $\vec{s}_L = (s_1, s_2, s_3)$ vektörüne karşılık gelen 3×3 - lük Lorentzian anti-simetrik S_L matrisi aşağıdaki gibi verilir:

$$S_L = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

2.3 Galile Uzayı

Bu bölümde Yaglom (1979) dan faydalanarak dual sayılar kümesinin cebirsel özellikleri ile Galile düzlemindeki tanımlara yer verildi.

Tanım 2.3.1 (Dual sayıların vektör uzayı)

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

iki boyutlu reel vektör uzayıdır. Dual sayılar kümesi,

$$\mathbb{D} = \{\hat{a} = a + \varepsilon a^* | a, a^* \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0\} \quad (2.25)$$

olmak üzere, $(\mathbb{D}, +)$ bir Abel grubu oluşturur (Hacısalıhoğlu, 1993).

\mathbb{D} dual sayılar kümesi üzerindeki iç işlem (toplama):

$$\begin{aligned} + & : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \\ (\hat{a}, \hat{b}) & \mapsto \hat{a} + \hat{b} \end{aligned} \quad (2.26)$$

ve dış işlem (skalar ile çarpma işlemi):

$$\begin{aligned} . & : \mathbb{R} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \\ (\lambda, \hat{a}) & \mapsto \lambda \cdot \hat{a} \end{aligned} \quad (2.27)$$

olmak üzere $\hat{a} = a + \varepsilon a^*$, $\hat{b} = b + \varepsilon b^*$, $\hat{c} = c + \varepsilon c^*$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\text{i) } \hat{a} + \hat{b} = (a + b) + \varepsilon (a^* + b^*) \in \mathbb{D} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} &= [(a + b) + c] + \varepsilon [(a^* + b^*) + c^*] \\ &= [a + (b + c)] + \varepsilon [a^* + (b^* + c^*)] \\ &= \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

iii) $0 = 0 + \varepsilon 0 \in \mathbb{D}$ için

$$\hat{a} + 0 = (a + 0) + \varepsilon(a^* + 0). \quad (2.30)$$

iv) $-\hat{a} = (-a) + \varepsilon(-a^*) \in \mathbb{D}$ için,

$$\hat{a} + (-\hat{a}) = (a + (-a)) + \varepsilon(a^* + (-a^*)) = 0. \quad (2.31)$$

v) $\hat{a} + \hat{b} = (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*)$

$$= (b + a) + \varepsilon(b^* + a^*) \quad (2.32)$$

$$= \hat{b} + \hat{a}$$

dir. Böylece $(\mathbb{D}, +)$ Abel grubudur.

vi) $\lambda \cdot \hat{a} = \lambda a + \varepsilon(\lambda a^*), \lambda a, \lambda a^* \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \cdot \hat{a} \in \mathbb{D}$. (2.33)

vii) $(\lambda + \mu)\hat{a} = (\lambda + \mu)a + \varepsilon(\lambda + \mu)a^*, \lambda a, \mu a, \lambda a^*, \mu a^* \in \mathbb{R}$ ve $(\lambda + \mu)\hat{a} \in \mathbb{D}$ (2.34)

viii) $\lambda(\hat{a} + \hat{b}) = \lambda(a + b) + \varepsilon\lambda(a^* + b^*)$

$$= \lambda(a + \varepsilon a^*) + \lambda(b + \varepsilon b^*) \quad (2.35)$$

$$= \lambda\hat{a} + \lambda\hat{b}$$

ix) $(\lambda\mu)\hat{a} = (\lambda\mu)a + \varepsilon(\lambda\mu)a^*, (\lambda\mu)a, (\lambda\mu)a^* \in \mathbb{R}$

$$= \lambda(\mu a) + \varepsilon\lambda(\mu a^*)$$

$$= \lambda[\mu a + \varepsilon(\mu a^*)] \text{ ve } (\lambda + \mu)\hat{a} \in \mathbb{D}.$$

$$= \lambda(\mu\hat{a}) \quad (2.36)$$

x) $\forall \hat{a} \in \mathbb{D}, \quad 1 \in \mathbb{R}$ için $1 \cdot \hat{a} = \hat{a} \in \mathbb{D}$

Böylece \mathbb{D} dual sayılar kümesi, \mathbb{R} reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Ayrıca,

$$f : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\hat{a}, \hat{b}) \mapsto f(\hat{a}, \hat{b}) = \overrightarrow{\hat{a}\hat{b}} \quad (2.37)$$

fonksiyonu ile \mathbb{D} kümesi \mathbb{R}^2 ile birleştirilmiş bir afin uzaydır. Böylece

i) $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{D}$ için

$$\overrightarrow{\hat{a}\hat{c}} = \overrightarrow{\hat{a}\hat{b}} + \overrightarrow{\hat{b}\hat{c}} \text{ dir.} \quad (2.38)$$

ii) $\forall \hat{a} \in \mathbb{D}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2$ için $\overrightarrow{\hat{a}\hat{a}_1} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $\hat{a}_1 \in \mathbb{D}$ noktası vardır. $\overrightarrow{\hat{a}\hat{a}_1}$ vektöründe \hat{a} noktasına başlangıç noktası ve \hat{a}_1 noktasına da uç noktası denir. Diğer yandan \mathbb{D} nin boyutu \mathbb{R}^2 boyutudur; yani

$$\text{boy}\mathbb{D} = \text{boy}\mathbb{R}^2 \quad (2.39)$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1993).

Tanım 2.3.2 $\hat{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\hat{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\hat{a}, \hat{b}) \mapsto \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle &= \text{re}(\hat{a} \cdot \overline{\hat{b}}) \\ &= ab. \end{aligned} \quad (2.40)$$

olarak tanımlanan \langle , \rangle işlemi \mathbb{D} üzerinde indefinit iç çarpım işlemidir (Hacısalihoglu 1993).

$\forall \hat{a} = a + \varepsilon a^*$ ve $\hat{b} = b + \varepsilon b^* \in \mathbb{D}$ için,

i) $(\hat{a}, \hat{b}) = \overline{\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle}$ (Konjuge simetri öz.)

ii) a) $\langle \hat{a} + \hat{b}, \hat{c} \rangle = \langle \hat{a}, \hat{c} \rangle + \langle \hat{b}, \hat{c} \rangle$

b) $\lambda \langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \langle \lambda \hat{a}, \hat{b} \rangle$ (Bilineerlik öz.) dir.

iii) $\forall \hat{a} \in \mathbb{D}$ için,

$$\langle \hat{a}, \hat{a} \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \hat{a} \neq 0$$

$\langle \hat{a}, \hat{a} \rangle = \text{re}(\hat{a} \cdot \overline{\hat{a}}) = a^2 \geq 0$ dir. Şimdi $\hat{a} \neq 0$ olmasını inceleyelim:

$$\hat{a} \neq 0 \begin{cases} \hat{a} = a + \varepsilon 0 \Leftrightarrow \langle \hat{a}, \hat{a} \rangle = 0 \\ \hat{a} = 0 + \varepsilon a^* \Leftrightarrow \langle \hat{a}, \hat{a} \rangle = 0 \end{cases}$$

dir.

$$\langle \hat{a}, \hat{a} \rangle = \text{re}(\hat{a} \cdot \overline{\hat{a}}) = a^2 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ve } a^* \neq 0$$

Böylece, $\hat{a} = 0 + \varepsilon a^*$ dir. $a^* \neq 0$ olabilir. O halde

$\langle \hat{a}, \hat{a} \rangle = 0$ olmasına rağmen $\hat{a} \neq 0$

olabilir. Dolayısıyla \langle, \rangle işlemi \mathbb{D} de pozitif tanımlı değildir. (indefinit öz.)

Tanım 2.3.3 (Baz) $\hat{a} \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \hat{a} &= a + \varepsilon a^* \\ &= a \cdot 1 + \varepsilon a^* \\ &= a(1 + 0\varepsilon) + (0 + \varepsilon)a^* \\ &= a(1,0) + a^*(0,1) \end{aligned} \tag{2.41}$$

olarak düşünüldüğünde \mathbb{D} deki bir bazın $\{(1,0), (0,1)\}$ olduğu görülür. $\varepsilon = (0,1)$ $\{(1,0), (0,1)\}$ dual birimdir (Hacısalıhoğlu, 1993). Ayrıca,

$$\langle (1,0), (0,1) \rangle = 0 \tag{2.42}$$

$$|1 + \varepsilon 0| = 1 \quad \text{ve} \quad |0 + \varepsilon 1| = 0$$

olduğundan $\{(1,0), (0,1)\}$ sistemi ortonormal değildir.

Tanım 2.3.4 (Galile düzlemi) \mathbb{D} afin uzayını \mathbb{R}^2 üzerindeki yukarıdaki iç çarpım ile düşünerek, \mathbb{D} ye Galile düzlemi denir ve $(\mathbb{R}^2, \mathbb{D}, \langle, \rangle)$ veya G^2 ile gösterilir.

Tanım 2.3.5 (Norm) \mathbb{D} üzerinde tanımlı \langle, \rangle işlemine göre $P = (a, a^*)$ noktasının O başlangıç noktasına olan uzaklığı

$$\begin{aligned}\psi(O, P) &= \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{a} \\ &= a + \varepsilon a^*\end{aligned}$$

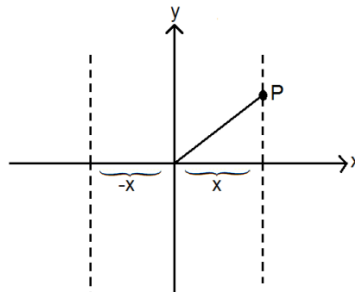
olmak üzere,

$$d(O, P) = \|\overrightarrow{OP}\| \quad (2.43)$$

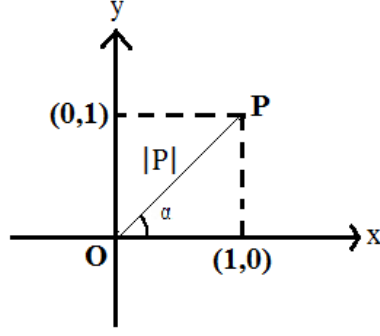
veya

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\| &= \sqrt{\langle \hat{a}, \hat{a} \rangle} \\ &= \sqrt{re(\hat{a} \cdot \hat{a})} \\ &= \sqrt{a^2} \\ &= |a|\end{aligned} \quad (2.44)$$

olarak tanımlanır. Şekil 2.3' de Galile düzleminde bir noktanın orijine olan uzaklığı verilmiştir. Şekil 2.4' te görüldüğü üzere bir dual sayının normu reel kısmının mutlak değerine eşittir.



Şekil 2.3. Galile düzleminde bir noktanın orijine olan uzaklığı.



Şekil 2.4. Bir dual sayının normu.

Galile düzlemini Yağlom'a göre yeniden tanımlayabiliriz. Burada, sadece norm tanımına değineceğiz. $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ için $\| \cdot \|$ tanımını,

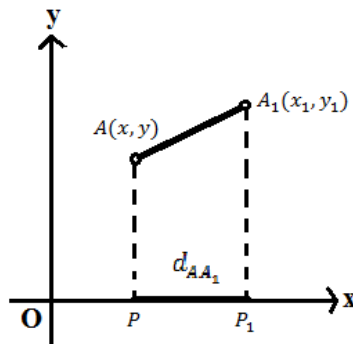
$$\|A\| = \begin{cases} |a|, & a \neq 0 \\ |b|, & a = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

şeklinde verilir. Bu norm dual sayılar yardımıyla verilen norm ile $a \neq 0$ halinde çakışmaktadır.

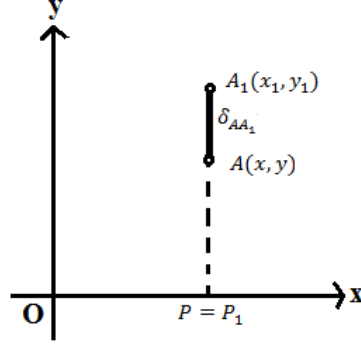
Tanım 2.3.6 (Galile düzleminde uzaklık ve özel uzaklık) Galile geometrisinde $A(x, y), A_1(x_1, y_1)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d_{AA_1} = x_1 - x \quad (2.46)$$

AA_1 doğru parçasının x - eksenindeki PP_1 projeksiyonunun işaretli uzunluğudur. Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da sırasıyla d_{AA_1} ve δ_{AA_1} uzaklıkları gösterilmiştir.



Şekil 2.5. Galile düzleminde d_{AA_1} uzaklığı.



Şekil 2.6. Galile düzleminde δ_{AA_1} özel uzaklığı.

$d_{AA_1} = 0$ ise $x_1 = x$ ve A ve A_1 aynı özel doğru üzerindedir. Bu durumdaki noktalar için

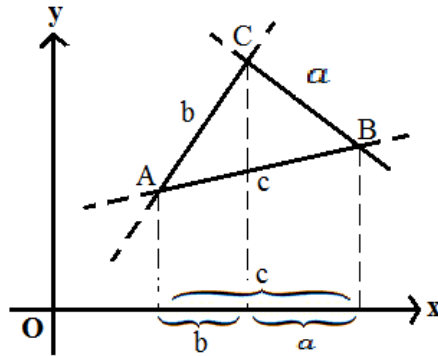
$$\delta_{AA_1} = y_1 - y \quad (2.47)$$

özel uzaklığı söz konusudur (Yaglom, 1979).

Galile düzleminde Şekil 2.7'de görüldüğü üzere herhangi bir ABC üçgenindeki kenar uzunluklarını incelediğimizde,

$$\left. \begin{array}{l} d_{AB} = a + b \\ d_{BC} = a \\ d_{CA} = b \end{array} \right\} d_{BC} + d_{CA} = d_{AB} \quad (2.48)$$

olduğu görülür (Yaglom, 1979).



Şekil 2.7. G^2 de ABC üçgeninde kenar uzunlukları.

Sonuç 2.3.1 Galile üçgeninde iki kenarın uzunlukları toplamı üçüncü kenarın uzunluğuna eşittir.

Tanım 2.3.7 Galile düzleminde sabit bir $Q(a, b)$ noktasına mutlak uzaklığı r ($r \in \mathbb{R}^+$) olan $M(a, a^*)$ noktalarının S_G^r kümesine Galile çemberi denir.

$$d_G(Q, M) = r$$

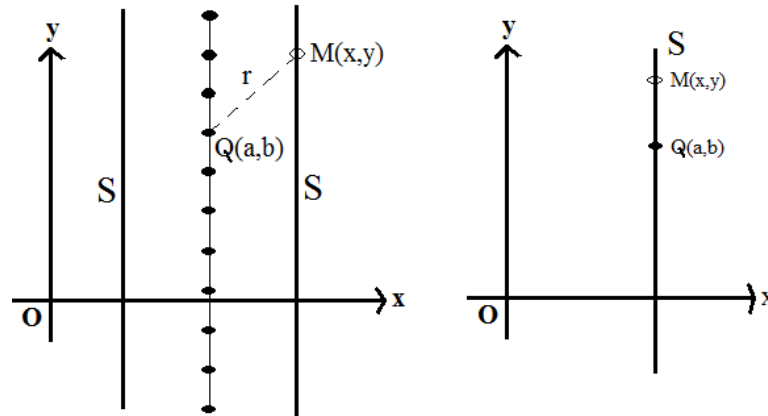
$$S_G^r = \{M(a, a^*) | d_G^2(Q, M) = r^2\} \quad (2.49)$$

$$(x - a)^2 = r^2$$

$p = -a$ ve $q = a^2 - r^2$ olmak üzere

$$a^2 + 2pa + q = 0 \quad (2.50)$$

dir. Şekil 2.8'de görüldüğü üzere gibi Q merkezli, r yarıçaplı S_G^r Galile çemberi, Q noktasından r Öklid mesafesindeki iki özel (y – ekasenine paralel) doğru üzerindeki noktalardan oluşur. $r = 0$ ise bu iki özel doğru çakışır. Önemle vurgulamalıyız ki, belirli bir r yarıçapı (iki bileşenli özel doğruları arasındaki Öklid mesafesinin yarısı) olan bir S_G^r Galile çemberinin, Q daki özel doğrusu üzerinde sonsuz çoklukta merkezi vardır (Yaglom, 1979).



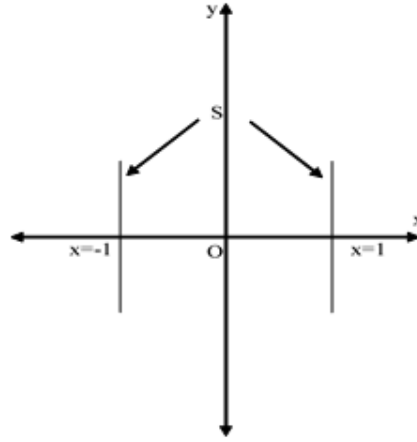
Şekil 2.8. S_G^r, G^2 de r – yarıçaplı Galile çemberi.

Şekil 2.9'da belirtilen Galile düzleminde birim çember,

$$S_G^1 = \{P(a, a^*) | d_G(O, P) = 1\} \quad (2.51)$$

dir (Yaglom, 1979).

$$\begin{aligned}
 d_G(O, P) &= \|\overrightarrow{OP}\| \\
 &= \|a + \varepsilon a^*\| \\
 &= |a| \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.52}$$



Şekil 2.9. G^2 de birim çember.

2.4 Dual Dönüşüm

Bu bölümde, tez çalışmasının temelini oluşturan dual dönüşümün tanımı verilecektir.

Tanım 2.4.1 (Dual dönüşüm) $n \times n$ – lik matrislerin iki kümesi aşağıdaki gibidir.

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T A = AA^T = I_n, \det A = 1\},$$

$$SO(n-1,1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^T G A = A G A^T = G, \det A = 1\},$$

buradaki G matrisi, $G = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dir ve I_n , $n \times n$ -lik birim matristir.

$SO(n)$, \mathbb{E}^n n – boyutlu Öklid uzayındaki izometrilere grubudur. Bu izometrilere \mathbb{R}^n deki yönlendirmeyi korurlar. $SO(n-1,1)$ de \mathbb{E}_1^n n – boyutlu Lorentz uzayındaki determinanı 1 olan semi-ortogonal matrislerin kümesidir.

Dual dönüşümü uygulayabilmek için, $n \times n$ - lik matrisler aşağıdaki verilen A matrisi gibi bloklara bölünmüş olarak yazılacaktır.

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$a_{nn} \neq 0$ dir. Buradaki B matrisi, $(n - 1) \times (n - 1)$ - lik kare matris, C , $(n - 1) \times 1$ - lik sütun matrisi ve D satır matrisidir. Bu matriste, $a_{nn} \neq 0$ olduğu için,

$$X = \{A \in SO(n); a_{nn} \neq 0 \}$$

$$Y = \{A \in SO(n - 1, 1); a_{nn} \neq 0 \}$$

kümeleri kullanılacaktır.

X ve Y kümeleri arasında bir dual dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f: X \rightarrow Y$$

$$f: A \mapsto f(A) = \frac{1}{a_{nn}} \begin{bmatrix} a_{nn}(B^{-1})^T & C \\ -D & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

T , matrisin transpozudur.

İspat f dönüşümü,

$$\begin{aligned} f^2(A) &= f(f(A)) \\ &= f(B) \\ &= A \\ &\Rightarrow f^2 = id. \end{aligned}$$

sağladığından bir dual dönüşümdür.

Örnek 2.4.1 3×3 - lük bir ortogonal A matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

A matrisinin f dual dönüşümü altındaki görüntüsü $f(A)$ semi-ortogonal matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(A) = \frac{4}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{3}} \\ -2 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$f(A) \in SO(2,1)$ olduğunu aşağıdaki gibi gösterelim;

$$(-1)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$(2)^2 + (0)^2 - \left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

$$(-2)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = -1$$

Aynı zamanda $f(A)$ matrisinin satırlarının ve sütunlarının kendi aralarında iç çarpımı sıfırdır.

Örnek 2.4.2 4×4 -lük bir ortogonal A matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A matrisinin f dual dönüşümü altındaki görüntüsü $f(A)$ semi-ortogonal matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. LORENTZ UZAYINDA DUAL DÖNÜŞÜMLERİN KİNEMATİĞİ

Dohi vd. (2010), çalışmalarında tanımladıkları dual dönüşüm sayesinde, Öklid uzayı ile Lorentz uzayı arasında bir geçişten bahsetmek mümkün olmuştur. Bu sayede, Öklid uzayındaki bir ortogonal matrizen Lorentz uzayında bir semi-ortogonal matris elde edilmektedir. Benzer şekilde, dual dönüşüm yardımıyla Lorentz uzayındaki bir semi-ortogonal matrizen Öklid uzayında bir ortogonal matris elde edilmektedir. Bu nedenle dönüşüm, “dual” olarak adlandırılmaktadır.

Aşağıdaki teorem ile dual dönüşümün, Öklid uzayında ve Lorentz uzayındaki dönme hareketinin eksenini sabit bıraktığı gösterilmiştir.

Teorem 3.1 f dual dönüşümü aşağıdaki gibi verilsin.

$$f: SO(3) \rightarrow SO(2,1)$$

$$A \mapsto f(A) = B$$

Dönme matrisi A nın eksenini ile boost matrisi B nin eksenini, dual dönüşüm altında değişmez veya paralel kalır.

İspat $A \in SO(3)$ bir ortogonal matris olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A - A^T$ ile A nın dönme eksenini hesaplanır (Ramis ve Yaylı, 2010).

$$\begin{aligned} A - A^T &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eşitlik (2.19)' ten, dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{u} aşağıdaki gibidir:

$$\vec{u} = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12}).$$

$A\vec{u} = \vec{u}$ eşitliğinin sağlanması aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} A\vec{u} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix} \\ &= \vec{u} \end{aligned}$$

Şimdi, bu hesaplamalar \mathbb{E}_1^3 e taşınacaktır. Bunun için öncelikle $f(A) = B \in \text{SO}(2,1)$ nin dönme eksenini bulunmalıdır. $O_1(3)$ ün bileşenlerinden biri $O_1^{++}(3)$,

$$O_1^{++}(3) = \{A \in O_1(3); \det(A) = 1, a_{33} > 0\}$$

şeklinde ifade edilir. $O_1^{++}(3)$ ün sabit bıraktığı eksen L olmak üzere, bu tür izometrilere boost adı verilir (Lopez 2008).

$$f(A) = B = \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} & a_{13} \\ -a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $B - B^{-1}$ matrisi ile B nin dönme eksenini hesaplanır.

$$B^{-1} = \varepsilon B^T \varepsilon = \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{31} \\ -a_{21} & a_{11} & a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - B^{-1} = \frac{1}{a_{33}} \begin{bmatrix} 0 & -a_{21} + a_{12} & a_{13} - a_{31} \\ -a_{12} + a_{21} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ -a_{31} + a_{13} & -a_{32} + a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

E_1^3 de, dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{w} aşağıdaki gibidir.

$$\vec{w} = \frac{1}{a_{33}} (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})$$

Böylelikle,

$$\vec{w} = \frac{1}{a_{33}} \vec{u}$$

olduğu görülür.

$$Sp\{\vec{u}\} = Sp\{\vec{w}\}$$

olduğundan, A ve B nin dönme eksenleri paraleldir.

Örnek 3.1 $A \in SO(3)$ matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

Ortogonal A matrisinin ve f dönüşümü altındaki görüntüsü $f(A)$ matrisinin dönme eksenleri hesaplanacaktır. Öncelikle \mathbb{E}^3 teki hesaplamalar yapılacaktır. $A - A^T$, matrisin dönme eksenini bulmamıza yardımcı olacaktır.

$$\begin{aligned} A - A^T &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\sqrt{3}-1}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{a} ,

$$\vec{a} = \left(1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

olarak elde edilir.

Şimdi, $f(A) = B$ nin dönme eksenini için $B - B^{-1}$ matrisi hesaplanacaktır.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{3}} \\ -2 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$B - B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 2 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{3}} \\ -2 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & \frac{2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \left(1, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\vec{w} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \vec{a}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla $Sp\{\vec{a}\} = Sp\{\vec{w}\}$ olduğundan A ve B nin dönme eksenleri paraleldir.

Örnek 3.2 $A \in SO(3)$ matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

ve

$$\det(A) = 1$$

olduğundan $A \in SO(3)$ olduğu görülür. Şimdi, ortogonal A matrisinin ve f dönüşümü altındaki görüntüsü $f(A)$ matrisinin dönme eksenleri incelenecektir. $A - A^T$ yardımıyla matrisin dönme eksenini,

$$A - A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Dönme ekseninin doğrultman vektörü,

$$\vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

olarak elde edilir. Şimdi, $f(A) = B$ nin dönme eksenini için $B - B^{-1}$ matrisi hesaplanmalıdır.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$(-1)^2 + (-1)^2 - (-1)^2 = 1$$

$$(1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -1$$

olduğundan $f(A) = B \in \text{SO}(2,1)$ olduğu görülmektedir.

$$B - B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E_1^3 de dönme ekseninin doğrultman vektörü \vec{w} aşağıdaki gibidir.

$$\vec{w} = (1,0,2) = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot (-1,0,2) = \frac{3}{2} \cdot \vec{u}$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla $Sp\{\vec{u}\} = Sp\{\vec{w}\}$ olduğundan A ve B nin dönme eksenleri paraleldir.

Örnek 3.3

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

matrisini inceleyelim.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$$

ve

$$\det(A) = 1$$

olduğundan $A \in SO(3)$ tür. Şimdi dönme eksenlerini hesaplayalım.

$$A - A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6} & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

doğrultman vektörü;

$$\vec{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6} \right)$$

Şimdi $f(A) = B$ matrisinin dönme eksenini hesaplayalım.

$$f(A) = B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2 - \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = -1$$

Ve,

$$\det B = 1$$

olduğundan $f(A) = B \in SO(2,1)$ dir.

$$B - B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Dönme ekseninin doğrultman vektörü;

$$\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\vec{b} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \vec{a}$$

olduğundan $Sp\{\vec{a}\} = Sp\{\vec{b}\}$ bulunur ve dönme eksenlerinin paralel olduğu görülür.

Şimdi, Lie gruplarının Lie cebirleri $\diamond(n)$ ve $\diamond(n-1,1)$ arasındaki geçiş dual dönüşüm yardımıyla tanımlanabilir. Ortogonal ve semi-ortogonal matrisler elde etmek amacıyla, dual dönüşüm Cayley formülü ile birlikte kullanılacaktır. Özkaldı ve Gündoğan (2010) da Lorentzian matris çarpımıyla Cayley formülü ele alınmışken Yüca (2021) de Cayley formülü Öklidyen matris çarpımıyla ele alınmış ve bu tezde bu şekilde kullanılacaktır. Sonuç olarak, bir antisimetrik matris kullanılarak Cayley formülü yardımıyla bir ortogonal matris elde edilecek, sonrasında da dual dönüşüm ile \mathbb{E}_1^3 te bir Lorentzian semi-ortogonal matris üretilecektir. Temel kavramlar bölümünde (2.20) ve (2.21) de verilen Cayley formülleri bu esnada kullanılacaktır.

Teorem 3.2 $\diamond(n)$ ve $\diamond(n-1,1)$ sırasıyla $SO(n)$ ve $SO(n-1,1)$ Lie gruplarının Lie cebirleri olsun. Aşağıdaki gibi bir diagram verilebilir.

$$\begin{array}{ccc} \diamond(n) & \xrightarrow{h} & \diamond(n-1,1) \\ \downarrow c & \searrow & \downarrow c_L \\ SO(n) & \xrightarrow{f} & SO(n-1,1) \end{array}$$

Burada C ve C_L Cayley dönüşümleri, f ise tanım (2.4) de verilen $a_{nn} \neq 0$ olan dual dönüşümdür.

İspat $f \circ C = C_L \circ h$ gösterilir. Cayley dönüşümü uygulanırsa,

$$C_L(S_L) = [I - S_L]^{-1}[I + S_L]$$

$$C(g) = [I - g]^{-1}[I + g]$$

Bu nedenle,

$$f(C(g)) = f(A) = B$$

$$(C_L \circ h)(g) = C_L(h(g)) = B$$

Burada $h(g) = S_L$.

Örnek 3.4 $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$ eğrisi ve S anti-simetrik matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cos(t) \\ 1 & 0 & -\sin(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Cayley dönüşümünü kullanarak $A(t)$ ortogonal matrisini elde edelim.

$$A(t) = [I_3 - S]^{-1} \cdot [I_3 + S]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\cos(t) \\ -1 & 1 & \sin(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cos(t) \\ 1 & 1 & -\sin(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+\sin^2(t)}{3} & \frac{-1+\cos(t)\sin(t)}{3} & \frac{\cos(t)+\sin(t)}{3} \\ \frac{\sin(t)\cos(t)+1}{3} & \frac{\cos^2(t)+1}{3} & \frac{\cos(t)-\sin(t)}{3} \\ \frac{-\cos(t)+\sin(t)}{3} & \frac{\cos(t)+\sin(t)}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cos(t) \\ 1 & 1 & -\sin(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sin^2(t) - \cos^2(t)}{3} & \frac{2\sin(t)\cos(t) - 2}{3} & \frac{2\cos(t) + 2\sin(t)}{3} \\ \frac{2\cos(t)\sin(t) + 2}{3} & \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{3} & \frac{2\cos(t) - 2\sin(t)}{3} \\ \frac{-2\cos(t) + 2\sin(t)}{3} & \frac{2\cos(t) + 2\sin(t)}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$f(A(t)) = B(t)$ dual dönüşümü yardımıyla

$$B(t) = \begin{bmatrix} \cos^2(t) - \sin^2(t) & -2\cos(t)\sin(t) - 2 & 2\cos(t) + 2\sin(t) \\ -2\sin(t)\cos(t) + 2 & \sin^2(t) - \cos^2(t) & 2\cos(t) - 2\sin(t) \\ 2\cos(t) - 2\sin(t) & -2\cos(t) - 2\sin(t) & 3 \end{bmatrix}$$

semi-ortogonal matrisi elde edilebilir. Burada,

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin^2(t) - \cos^2(t)}{3} & \frac{2 \sin(t) \cos(t) - 2}{3} & \frac{2 \cos(t) + 2 \sin(t)}{3} \\ \frac{2 \cos(t) \sin(t) + 2}{3} & \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{3} & \frac{2 \cos(t) - 2 \sin(t)}{3} \\ \frac{-2 \cos(t) + 2 \sin(t)}{3} & \frac{2 \cos(t) + 2 \sin(t)}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \cos^2(t) - \sin^2(t) & 2 \cos(t) \sin(t) - 2 & 2 \cos(t) + 2 \sin(t) \\ -2 \sin(t) \cos(t) + 2 & \sin^2(t) - \cos^2(t) & 2 \cos(t) - 2 \sin(t) \\ 2 \cos(t) - 2 \sin(t) & -2 \cos(t) - 2 \sin(t) & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. Bu nedenle $A(t)$ ve $B(t)$, $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$ eğrisini sabit bırakır.

Örnek 3.5 $\vec{S} = (s, 2s, s^2)$ ifadesi ile bir S anti simetrik matrisi oluşturalım.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s^2 & 2s \\ s^2 & 0 & -s \\ -2s & s & 0 \end{bmatrix}$$

Şimdi Cayley dönüşümü yardımıyla $A(t)$ ortogonal matrisini elde edelim.

$$A(t) = [I_3 - S]^{-1}[I_3 + S]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & s^2 & -2s \\ -s^2 & 1 & s \\ 2s & -s & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -s^2 & 2s \\ s^2 & 1 & -s \\ -2s & s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 1}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{s^2}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 5s^2 + 1} \\ \frac{3s^2}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{4s^2 + 1}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{2s^3 - s}{s^4 + 5s^2 + 1} \\ \frac{s^3 - 2s}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{2s^3 + s}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{s^4 + 1}{s^4 + 5s^2 + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s^2 & 2s \\ s^2 & 1 & -s \\ -2s & s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-s^4 - 3s^2 + 1}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{2s^2}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{2s^3 + 4s}{s^4 + 5s^2 + 1} \\ \frac{6s^2}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{-s^4 + 3s^2 + 1}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{4s^3 - 2s}{s^4 + 5s^2 + 1} \\ \frac{2s^3 - 4s}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{4s^3 + 2s}{s^4 + 5s^2 + 1} & \frac{s^4 - 5s^2 + 1}{s^4 + 5s^2 + 1} \end{bmatrix}$$

$f(A(t)) = B(t)$ dual dönüşümü yardımıyla $B(t)$ semi ortogonal matrisini elde edelim.

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{-s^4 + 3s^2 + 1}{s^4 - 5s^2 + 1} & \frac{-6s^2}{s^4 - 5s^2 + 1} & \frac{2s^3 + 4s}{s^4 - 5s^2 + 1} \\ \frac{-2s^2}{s^4 - 5s^2 + 1} & \frac{-s^4 - 3s^2 + 1}{s^4 - 5s^2 + 1} & \frac{4s^3 - 2s}{s^4 - 5s^2 + 1} \\ \frac{-2s^3 + 4s}{s^4 - 5s^2 + 1} & \frac{-4s^3 - 2s}{s^4 - 5s^2 + 1} & \frac{s^4 + 5s^2 + 1}{s^4 - 5s^2 + 1} \end{bmatrix}$$

Örnek 3.6 $\alpha(t) = (\cos(t), t, t^2)$ ile S anti simetrik matrisi,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -t^2 & t \\ t^2 & 0 & -\cos(t) \\ -t & \cos(t) & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Cayley formülü yardımıyla $A(t) \in So(3)$ ortogonal matrisini elde edelim.

$$A(t) = [I - S]^{-1}[I + S]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t^2 & -t \\ -t^2 & 1 & \cos(t) \\ t & -\cos(t) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -t^2 & t \\ t^2 & 1 & -\cos(t) \\ -t & \cos(t) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+\cos^2(t)}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} & \frac{-t^2+t\cos(t)}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} & \frac{t^2\cos(t)+t}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} \\ \frac{t^2+t\cos(t)}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} & \frac{t^2+1}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} & \frac{t^3-\cos(t)}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} \\ \frac{t^2\cos(t)-t}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} & \frac{t^3+\cos(t)}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} & \frac{t^4+1}{t^4+t^2+\cos^2(t)+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t^2 & t \\ t^2 & 1 & -\cos(t) \\ -t & \cos(t) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1 + \cos^2(t) - t^4 + t^2}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} & \frac{-2t^2 + 2t\cos(t)}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} & \frac{2t^2 \cos(t) + 2t}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} \\ \frac{2t^2 + 2t\cos(t)}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} & \frac{-t^4 + t^2 - \cos^2 + 1}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} & \frac{2t^3 - 2\cos(t)}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} \\ \frac{2t^2 \cos(t) - 2t}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} & \frac{2t^3 + 2\cos(t)}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} & \frac{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1}{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1} \end{bmatrix}$$

Şimdi $f(A(t)) = B(t)$ dual dönüşümü uygulanırsa,

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{-t^4 + t^2 - \cos^2(t) + 1}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} & \frac{-2t^2 - 2t\cos(t)}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} & \frac{2t^2 \cos(t) + 2t}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} \\ \frac{2t^2 - 2t\cos(t)}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} & \frac{1 + \cos^2(t) - t^4 - t^2}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} & \frac{2t^3 - 2\cos(t)}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} \\ \frac{-2t^2 \cos(t) + 2t}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} & \frac{-2t^3 - 2\cos(t)}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} & \frac{t^4 + t^2 + \cos^2(t) + 1}{t^4 - t^2 - \cos^2(t) + 1} \end{bmatrix}$$

semi ortogonal matrisi elde edilir.

Örnek 3.7 $\alpha(s) = (s, 2s, 1)$ ile S anti simetrik matrisi;

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2s \\ 1 & 0 & -s \\ -2s & s & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi Cayley dönüşümünü kullanarak $A(s)$ ortogonal matrisini elde edelim.

$$A(s) = [I_3 - S]^{-1} \cdot [I_3 + S]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2s \\ -1 & 1 & s \\ 2s & -s & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2s \\ 1 & 1 & -s \\ -2s & s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 1}{5s^2 + 2} & \frac{2s^2 - 1}{5s^2 + 2} & \frac{3s}{5s^2 + 2} \\ \frac{2s^2 + 1}{5s^2 + 2} & \frac{4s^2 + 1}{5s^2 + 2} & \frac{s}{5s^2 + 2} \\ \frac{-s}{5s^2 + 2} & \frac{3s}{5s^2 + 2} & \frac{2}{5s^2 + 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2s \\ 1 & 1 & -s \\ -2s & s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-3s^2}{5s^2+2} & \frac{4s^2-2}{5s^2+2} & \frac{6s}{5s^2+2} \\ \frac{4s^2+2}{5s^2+2} & \frac{3s^2}{5s^2+2} & \frac{2s}{5s^2+2} \\ \frac{-2s}{5s^2+2} & \frac{6s}{5s^2+2} & \frac{-5s^2+2}{5s^2+2} \end{bmatrix}$$

$A(s) \in SO(3)$ ortogonal matrisi elde edilir. $f(A(s)) = B(s)$ dual dönüşümünü uygularsak;

$$B(s) = \begin{bmatrix} \frac{3s^2}{-5s^2+2} & \frac{-4s^2-2}{-5s^2+2} & \frac{6s}{-5s^2+2} \\ \frac{-4s^2+2}{-5s^2+2} & \frac{-3s^2}{-5s^2+2} & \frac{2s}{-5s^2+2} \\ \frac{2s}{-5s^2+2} & \frac{-6s}{-5s^2+2} & \frac{5s^2+2}{-5s^2+2} \end{bmatrix}$$

Semi ortogonal matrisi elde edilir.

Örnek 3.8 $\alpha(t) = (1, t, t^2)$ eğrisi ile elde edilen S anti simetrik matrisi;

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -t^2 & t \\ t^2 & 0 & -1 \\ -t & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi Cayley formülü yardımıyla $A(t) \in So(3)$ ortogonal matrisini elde edelim.

$$\begin{aligned} A(t) &= [I - S]^{-1}[I + S] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t^2 & -t \\ -t^2 & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -t^2 & t \\ t^2 & 1 & -1 \\ -t & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{t^4+t^2+2} & \frac{-t^2+t}{t^4+t^2+2} & \frac{t^2+t}{t^4+t^2+2} \\ \frac{t^2+t}{t^4+t^2+2} & \frac{t^2+1}{t^4+t^2+2} & \frac{(t-1)(t^4+t^2+1)}{(t^2-t+1)(t^4+t^2+2)} \\ \frac{-t^2-t}{t^4+t^2+2} & \frac{t^3+1}{t^4+t^2+2} & \frac{t^4+1}{t^4+t^2+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -t^2 & t \\ t^2 & 1 & -1 \\ -t & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2 - t^4 - t^2}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{-2t^2 + 2t}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{2t^2 + 2t}{t^4 + t^2 + 2} \\ \frac{2t^2 + 2t}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{-t^4 - t^2}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{2t^3 - 2}{t^4 + t^2 + 2} \\ \frac{2t^2 - 2t}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{2t^3 + 2}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{t^4 - t^2}{t^4 + t^2 + 2} \end{bmatrix}$$

Son olarak $f(A(t)) = B(t)$ dual dönüşümü uygularsak;

$$B(t) = \begin{bmatrix} \frac{-t^4 - t^2}{t^4 - t^2} & \frac{-2t^2 - 2t}{t^4 - t^2} & \frac{2t^2 + 2t}{t^4 - t^2} \\ \frac{2t^2 - 2t}{t^4 - t^2} & \frac{2 - t^4 - t^2}{t^4 - t^2} & \frac{2t^3 - 2}{t^4 - t^2} \\ \frac{-2t^2 + 2t}{t^4 - t^2} & \frac{-2t^3 - 2}{t^4 - t^2} & \frac{t^4 + t^2 + 2}{t^4 - t^2} \end{bmatrix}$$

Semi ortogonal matrisi elde edilir.

4. GALİLE UZAYINDA DUAL DÖNÜŞÜMLERİN KİNEMATİĞİ

Bu bölümde, dual dönüşüm yardımıyla Galile uzayı ile pseudo-Galile uzayları arasındaki geçiş verilmiştir. Temel tanım ve teoremler sunulduktan sonra konuya ilişkin uygulamalara da yer verilmiştir.

Tanım 4.1 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun, G^n ,

$$\|X\| = \begin{cases} |x_1|, & x_1 \neq 0 \\ \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}, & x_1 = 0. \end{cases}$$

ile birlikte bir Galile uzayıdır $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Teorem 4.1 A $n \times n$ -lik bir matris olsun,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

burada $A_1 \in SO(n-1)$ ve $C = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^{n-1}$. (4.2)

f bir Galile dönüşümüdür ve

$$f: G^n \rightarrow G^n$$

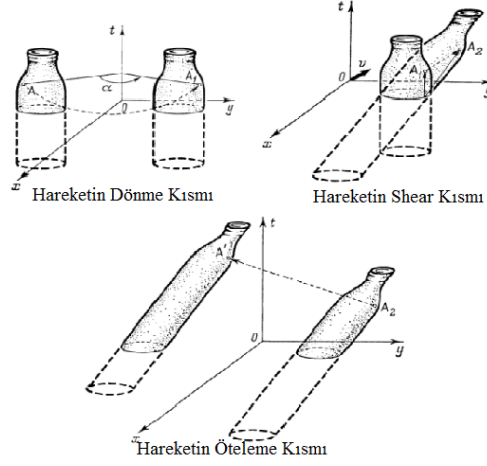
$$X \mapsto f(X) = AX + C. \quad (4.3)$$

G^3 de, f yardımıyla Shear hareketi tanımlanır.

$$f: G^3 \rightarrow G^3$$

$$X \mapsto f(X) = AX. \quad (4.4)$$

f aynı zamanda Galilean anlamında hareket olarak da adlandırılır. Şekil 4.1'de shear hareketinin dönme, öteleme ve shear kısımları verilmiştir.



Şekil 4.1. Shear hareketi.

Tanım 4.2 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve G^n bir pseudo- Galile uzayı $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ olsun.

$$\|X\|_{PG} = \begin{cases} |x_1|, & x_1 \neq 0 \\ \sqrt{|x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2|}, & x_1 = 0. \end{cases}$$

G_1^3 pseudo- Galile uzayında,

$$f: G_1^3 \rightarrow G_1^3$$

$$X \mapsto f(X) = AX \quad (4.5)$$

Shear hareketi olarak adlandırılır.

Teorem 4.2 A $n \times n$ -lik bir matris olsun,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 \in SO(n-2,1), A_1^{-1} = GA_1^T G, G^{-1} = G^T \text{ ve } C = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_1^{n-1} \text{ olmak}$$

üzere,

f bir pseudo- Galilean dönüşümdür.

$$f: G_1^n \rightarrow G_1^n$$

$$X \mapsto f(X) = AX + C. \quad (4.6)$$

Tanım 4.3 a ve a^* reel sayılar ve $\varepsilon^2 = 0$ ise $\hat{a} = a + \varepsilon a^*$ kombinasyonu bir dual sayı olarak adlandırılır. Burada ε dual birimdir.

Tüm dual sayılar kümesi, reel sayılar alanı üzerinde değişmeli bir halka oluşturur ve \mathbb{D} ile gösterilir.

$$\mathbb{D}^3 = \{\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) | \hat{a}_i \in D, 1 \leq i \leq 3\}$$

\mathbb{D} halkası üzerinde bir modüldür. \mathbb{D} –modül veya dual uzayı olarak adlandırılır. \mathbb{D}^3 ün elemanları dual vektörler olarak adlandırılır.

Dohi vd. (2010) da verilen f dual dönüşümünü yardımıyla, ortogonal matrislerden semi ortogonal matrisler elde ederiz. Bu bölümde, dual dönüşümü G^n ve G_1^n Galile uzaylarına taşıyacağız.

Teorem 4.3 $\tilde{A} \in G^n$ aşağıdaki gibi verilsin,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} & a_{1n} \\ A & \vdots \\ & a_{n-1n} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix},$$

burada, $A \in SO(n - 1)$.

g bir dual dönüşüm tanımlar,

$$g: G^n \rightarrow G_1^n$$

$$\tilde{A} \mapsto g(\tilde{A}) = \tilde{B} = \begin{bmatrix} & a_{1n} \\ f(A) & \vdots \\ & a_{n-1n} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix},$$

f , (2.4) te verilen dual dönüşümdür, böylece $f(A) \in SO(n - 2, 1)$ olduğu görülür.

İspat g aşağıdaki eşitliği sağladığı için bir dual dönüşümdür,

$$\begin{aligned} g^2(\check{A}) &= g(g(\check{A})) \\ &= g(\check{B}), \quad f^2 = id. \\ &= A \\ &\Rightarrow g^2 = id. \end{aligned}$$

Örnek 4.1 \check{A} 3×3 tipinde aşağıdaki gibi bir matris olsun,

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Galile matrisi \check{A} ya g dual dönüşümü uygularız. Sonra $g(\check{A}) = \check{B}$ pseudo-Galile matrisini elde ederiz.

$$\check{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & -2 \\ -1 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Örnek 4.2 \check{A} matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Galilean \check{A} matrisine g dual dönüşümünü uygularsak $g(\check{A}) = \check{B}$ pseudo-Galile matrisini elde ederiz.

$$\check{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Örnek 4.3 Bir parametreye bağlı \check{A} matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\check{A} = \begin{bmatrix} \frac{t^2(-t^2 + 1)}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{2t(-t + 1)}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{2(t^3 + 1)}{t^4 + t^2 + 2} & -2 \\ \frac{2t(t + 1)}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{-t^4 - t^2 + 2}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{2t(t - 1)}{t^4 + t^2 + 2} & \sqrt{2} \\ \frac{2(t^3 - 1)}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{2t(t + 1)}{t^4 + t^2 + 2} & \frac{t^2(t^2 - 1)}{t^4 + t^2 + 2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

\check{A} matrisine g dual dönüşümünü uygularsak,

$$g(\check{A}) = \check{B} = \begin{bmatrix} \frac{-t^4 - t^2 + 2}{t^2(t^2 - 1)} & \frac{-2t(t + 1)}{t^2(t^2 - 1)} & \frac{2(t^3 + 1)}{t^2(t^2 - 1)} & -2 \\ \frac{-2t(-t + 1)}{t^2(t^2 - 1)} & -1 & \frac{2t(t - 1)}{t^2(t^2 - 1)} & \sqrt{2} \\ \frac{-2(t^3 - 1)}{t^2(t^2 - 1)} & \frac{-2t(t + 1)}{t^2(t^2 - 1)} & \frac{t^4 + t^2 + 2}{t^2(t^2 - 1)} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pseudo-Galile matrisi elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Öklid uzayı ve Lorentz uzayı arasında bir geçişe imkan sağlayabildiği düşünülen dual dönüşüm üzerinde çalışılmıştır. Dual dönüşümün iki uzayda da dönme eksenlerini sabit bıraktığı incelenerek örnekler verilmiştir. Ayrıca, Cayley formülü ve dual dönüşüm ile verilen komutatif diagram üzerinde çalışılmış, uygulamalar yardımıyla teoremler pekiştirilmiştir.

Bu tez çalışmasının devamı olarak dual dönüşümler dual uzaylarda çalışılabilir ve bunların geometrik uygulamaları incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Dohi, R., Maeda, Y., Mori, M. ve Yoshida, H., 2010. A dual transformation between $S\hat{O}(n+1)$ ve $S\hat{O}(n,1)$ ans its geometric applications, *Linear Algebra and its Applications*, 432, 770-776.
- Greub, W.H., 1967. *Linear algebra*, Springer-Verlag, 451, New York.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1980. Yüksek diferansiyel geometriye giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 2, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1983. Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1993. Diferansiyel geometri, İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1998. Dönüşümler ve geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, Ankara.
- Lopez, R., 2008. Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space, Mini-Course Taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP), University of Sao Paulo, Brasil.
- McCarthy, J. M., 1990. *An introduction to theoretical kinematics*, MIT Press, Cambridge.
- O'Neill, B., 1983. *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York.
- Özkaldı, S. ve Gündoğan, H., 2010. Cayley formula Euler parameters and rotations in 3-dimensional lorentzian space, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 367-377.
- Ramis, Ç. ve Yaylı, Y., 2010. Dual split quaternions and Chasles theorem in 3-dimensional Minkowski space \mathbb{E}_1^3 , *Advances in Applied Clifford Algebras*. 432, 770-776
- Ryan, P.J., 1986. *Euclidean and non-euclidean geometry*, Cambridge University Press, 232, Cambridge.
- Tütüncü, E.E., 2009. Galile uzaylarında hareketlerin geometrisi, Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Weinstein, T., 1996. *An introduction to lorentz surfaces*, Walter de Gruyter.
- Yaglom, I. M. , 1979. *A simple non-euclidean geometry and its physical basis*, Springer-Verlang Inc., New York.

Yüca, G., 2014. Dual uzaylarda dual dönüşümler ve geometrik uygulamaları, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

Yüca, G. ve Yaylı, Y., 2018. A dual transformation between $S\hat{O}(3)$ and $S\hat{O}(2,1)$ and its applications, Proceedings of the National Academy of Sciences., India, Section A: Physical Sciences, 88, 2, 267-273.

Yüca, G. ve Yaylı, Y., 2020. Dual transformation in Galilean spaces, International Electronic Journal of Geometry 13, 2, 52-61.

Yüca, G., 2021. Kinematics applications of dual transformations. Journal of Geometry and Physics, 163, 2, 104-132, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104139> .

Yüca, G. ve Yaylı, Y., 2021. Homothetic motions and dual transformations. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 37, 1, 194-205.

Yüca, G. ve Yaylı, Y., 2021. Dual transformations and quaternions. Mathematical Methods in the Applied Sciences. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7459> .

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Uğur ERCAN

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2007-2011

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, 2019-2021

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Hakkari Merkez Anadolu Lisesi Merkez/HAKKARİ 2014-2015
2. Mustafa Koyuncu Anadolu İmam Hatip Lisesi Yahyalı/KAYSERİ 2015-2019
3. Demirci Çok Programlı Anadolu Lisesi Gülağaç/AKSARAY 2019-

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Yüca, G. ve Ercan, U., 2021. Kinematics of Dual Transformations in Lorentzian and Galilean Spaces, ICOMAA-2021, İstanbul, 26-29 Mayıs.