



**Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu ile Bazı Lineer
Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin
İncelenmesi**

Uğur BAYRAKCI

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Vehpi YILDIRIM

Eş Danışman: Doç. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY

2021

Her hakkı saklıdır.



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KUDRYASHOV METODU İLE BAZI LİNEER
OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN
İNCELENMESİ**

Uğur BAYRAKCI

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Vehpi YILDIRIM
Eş Danışman: Doç. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY**

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2021

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

23 / 06 / 2021

İmzası

Uğur BAYRAKCI

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KUDRYASHOV METODU İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Uğur BAYRAKCI

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Vehpi YILDIRIM

Eş Danışman: Doç. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY

Bu tez çalışması beş ayrı bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölüm olan giriş kısmında kısmi diferansiyel denklemler ve genelleştirilmiş Kudryashov metodunun ortaya çıkışı ve metodun gelişimi ile ilgili birtakım bilgiler aktarılmıştır. İkinci bölüm kaynak özetleri kısmı olup Kudryashov metodu, modifiye edilmiş Kudryashov metodu ve genelleştirilmiş Kudryashov metodu ile ilgili geçmişte yapılmış olan bazı çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde bu tez çalışması için gerekli olan bazı temel tanım ve kavramlar yer almış ve genelleştirilmiş Kudryashov metodunun genel yapısı hakkında bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde gergin dalga denklemi, (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sistemi, (2+1)-boyutlu Bogoyavlensky-Konopelchenko (BK) denklemi, perturbe edilmiş Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan (RKL) denklemi, (2+1)-boyutlu Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa (DJKM) denklemlerinin bazı tam çözümlerini elde etmek amacıyla bu denklemler için genelleştirilmiş Kudryashov metodu (GKM) ele alınmıştır. Ayrıca, Mathematica 12 programı kullanılarak da elde edilmiş olan çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri belli değerleri için çizilmiştir. Beşinci bölüm sonuç ve öneriler kısmıdır ve bu tezde bulunan çözümlerle ilgili olarak kapsamlı sonuçlar belirtilmiştir.

2021, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Mathematica 12, Soliton çözümler, Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu.

ABSTRACT

MS. Thesis

INVESTIGATION THE SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY GENERALIZED KUDRYASHOV METHOD

Uğur BAYRAKCI

Erzurum Technical University

Gradute School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Vehpi YILDIRIM

Co-supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY

This thesis consists of five distinct chapters. In the introduction part, which is the first chapter, some information about partial differential equations and the emergence of the generalized Kudryashov method and the development of the method are given. The second part is the section of resource summaries, and some information about the past studies on Kudryashov method, modified Kudryashov method and generalized Kudryashov method have been given. In the third part, some basic definitions and concepts required for this thesis study are included and information about the general structure of the generalized Kudryashov method is introduced. In the fourth chapter, generalized Kudryashov method is employed for obtaining some exact solutions of strain wave equation, (2+1)-dimensional dissipative long wave system, (2+1)-dimensional Bogoyavlensky-Konopelchenko (BK) equation, perturbed Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan (RKL) equation, (2+1)-dimensional Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa (DJKM) equations. In addition, two- and three-dimensional graphs of the obtained solutions by using the Mathematica 12 programming language were plotted for certain values. The fifth chapter is conclusion and suggestions, and comprehensive results regarding the solutions found in this thesis are stated.

2021, 44 page

Keywords: Mathematica 12, Soliton solutions, Generalized Kudryashov method.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez konumun belirlenerek çalışmamın yürütülmesinde yardımlarını esirgemeyen danışman hocalarım Sayın Doç. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Vehpi YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde, TÜBİTAK 2211 yurt içi lisansüstü burs programı kapsamında, beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Uğur BAYRAKCI
Haziran 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1. Temel Tanım ve Teoremler	5
3.2. Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM).....	7
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	10
4.1. Gergin Dalga Denklemi ve Uygulaması	10
4.2. (2+1)-boyutlu Enerji Tüketen Uzun Dalga Sistemi ve Uygulaması	16
4.3. (2+1)-boyutlu Bogoyavlensky-Konopelchenko (BK) Denklemi ve Uygulaması ...	21
4.4. Perturbe Edilmiş Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan (RKL) Denklemi ve Uygulaması	26
4.5. (2+1)-boyutlu Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa (DJKM) Denklemi ve Uygulaması .	33
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

BK	Bogoyavlenky-Konopelchenko
DJKM	Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa
GKM	Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu
MEKM	Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu
RKL	Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1.1 Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.10) tam çözümünün $\alpha_1 = 2, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 0.5, \varepsilon = 4, -25 < x < 25$ ile $-25 < t < 25, t = 2.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	12
Şekil 4.1.2 Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.12) tam çözümünün $\alpha_1 = 1.5, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 0.2, \varepsilon = 1.5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	13
Şekil 4.1.3 Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.14) tam çözümünün $\alpha_1 = 3, \alpha_3 = 2.5, \alpha_4 = 0.25, \varepsilon = 2, c = 4, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 1$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	14
Şekil 4.1.4 Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.16) tam çözümünün $c = 0.6, -5 < x < 5$ ile $-5 < t < 5, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	15
Şekil 4.1.5 Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.18) tam çözümünün $\alpha_1 = 3, \alpha_3 = 0.01, \alpha_4 = 0.5, c = 0.3, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t = 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	16
Şekil 4.2.1 (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.9) tam çözümünün $c = 2, y = 2, -5 < x < 5$ ile $-10 < t < 10, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	18
Şekil 4.2.2 (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.10) tam çözümünün $c = 0.25, y = 2, -10 < x < 10$ ile $-10 < t < 10, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	18
Şekil 4.2.3 (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.12) tam çözümünün $c = -1, y = 1, -10 < x < 10$ ile $-5 < t < 5, t = 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	19
Şekil 4.2.4 (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.13) tam çözümünün $c = 1, y = 2, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t = 0.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	20
Şekil 4.2.5 (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.15) tam çözümünün $c = 3, y = 5, -15 < x < 15$ ile $-10 < t < 10, t = 2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	21

Şekil 4.2.6 (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.16) tam çözümünün $c=1, y=0.2, -20 < x < 20$ ile $-15 < t < 15, t=3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri	21
Şekil 4.3.1 (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.13) tam çözümünün $c=1, y=2, \beta=0.5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t=3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri	24
Şekil 4.3.2 (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.15) tam çözümünün $c=0.5, a=3, \beta=2, y=4, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t=2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	25
Şekil 4.3.3 (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.18) tam çözümünün $c=0.4, a=0.8, y=2, -10 < x < 10$ ile $-10 < t < 10, t=2.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri	26
Şekil 4.4.1 perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.10) tam çözümünün $a=0.25, w=3, v=0.5, k=2, \gamma=1, \varepsilon=5, b=3, \lambda=4, \mu=1, -10 < x < 10$ ile $-10 < t < 10, t=0.2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri	29
Şekil 4.4.2 perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) tam çözümünün $a=5, v=0.05, k=4, \gamma=0.1, b=3, \lambda=4, \mu=0.01, w=0.5, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t=1.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.	30
Şekil 4.4.3 perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.16) tam çözümünün $a=5, a_1=2.5, v=-1, k=2, \gamma=1, b=3, \lambda=-4, \mu=1, w=2, -5 < x < 5$ ile $-5 < t < 5, t=-1.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri	31
Şekil 4.4.4 perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.19) tam çözümünün $a=1, a_1=2, k=2, v=1, \gamma=1, \lambda=3, \mu=1, b=1, b_1=-2, -15 < x < 15$ ile $-5 < t < 5, t=1$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri	33
Şekil 4.5.1 (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.11) tam çözümünün $n=0.2, a=4, y=0.5, k=2, -25 < x < 25$ ile $-25 < t < 25, t=0.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.....	36

- Şekil 4.5.2** (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.14) tam çözümünün $a = 3, k = 0.2, n = 2, y = 5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 0.02$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri..... 37
- Şekil 4.5.3** (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.17) tam çözümünün $a = 4, k = 2, y = 0.5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 1$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri..... 38
- Şekil 4.5.4** (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.20) tam çözümünün $a = 0.1, k = 0.5, y = 8, -5 < x < 5$ ile $-5 < t < 5, t = 2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri..... 39



1. GİRİŞ

Matematik biliminin en önemli alanlarından birisi olan uygulamalı matematik, diğer bilim dallarında ve gerçek hayatta karşımıza çıkan problemleri çözmek için kullanılmaktadır. Bilim dünyasının birçok alanında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modellemesini yapmak ve çözmek için diferansiyel denklemler ortaya çıkmıştır. Diferansiyel denklemler hakkında yapılan ilk çalışmalar ise 17.yy'da İngiliz matematikçi Newton ve Alman matematikçi Leibniz ile başlar. Diferansiyel denklemler ilk olarak adi diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkmış daha sonra kısmi diferansiyel denklemler oluşturulmuştur.

Diferansiyel denklemler bir uygulamalı matematik konusu olmasına rağmen biyoloji, tıp, sosyoloji, teknoloji, ekonomi, fizik ve mühendislik gibi çok geniş bir kullanım alanına sahiptir (Aksoy ve Özkan 2011). Özellikle de lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler çeşitli bilim çevrelerinde meydana gelen kimyasal reaksiyonları araştırma, canlı popülasyonlarında oluşan değişimler, metaller üzerindeki ısı yayılımı, elektrik devrelerinde yük ve akım belirleme, levha ve tel titreşimleri; deniz, göl, akarsu ve gelgit dalgaları, radyoaktif bir cismin bozulması gibi önemli fiziksel olayların incelenmesinde ve yorumlanmasında yaygın olarak kullanılmaktadır (Upton 2004; Aslan 2007).

Bilim ve teknolojinin çok hızla geliştiği günümüzde bilimsel olayları anlamak ve çözüme kavuşturabilmek için oluşturulan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler daha karmaşık ve zor hale gelmiştir. Dolayısıyla bu denklemleri çözmek ve tam çözümlerini elde edebilmek bilim çevreleri için çok önemli bir konu haline gelmiştir. Son zamanlarda, ortaya çıkan zor ve uğraştırıcı hesaplamalardan dolayı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan Mathematica, Matlab ve Maple gibi güçlü bilgisayar programları geliştirilmiştir.

Dünyamız için son derece önemli kullanım alanlarına sahip olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri de dünyanın dört bir yanındaki birçok araştırmacı için çok büyük bir önem arz etmektedir. Bu amaç doğrultusunda lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için birçok farklı

yöntem çeşitli araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. Bu yöntemlerin bazıları şunlardır; sine-Gordon açılım metodu (Taşbozan and Kurt 2020), $\exp(-\varphi(\xi))$ -açılım metodu (Arshed 2020), F-açılım metodu (Yıldırım 2021), geliştirilmiş Bernoulli alt-denklemler fonksiyonu metodu (Dusunceli et al. 2021), modifiye edilmiş varyasyonel iterasyon metodu (Ahmad et al. 2020), modifiye edilmiş yardımcı denklemler metodu (Mahak and Akram 2020), modifiye edilmiş Kudryashov metodu (Rahman et al. 2020), modifiye edilmiş genişletilmiş doğrudan cebirsel metot (Soliman 2008), Darboux dönüşümü (Xu et al. 2017).

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için kullanılan Kudryashov metodu ilk olarak Nikolay A. Kudryashov tarafından 1988 yılında gösterilmiş (Kudryashov 1988) ve 1991 yılında ise uygulaması yapılmıştır (Kudryashov 1991). Bu metot o dönem için fark edilmemiştir. Literatüre kazandırılması ise yine Nikolay A. Kudryashov tarafından 2012 yılında gerçekleştirilmiştir (Kudryashov 2012). Bu metot daha sonra çeşitli lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için bazı yazarlar tarafından uygulanmıştır (Hubert et al. 2014; Hosseini and Ayati 2016; Nuruddeen and Nass 2018). Kudryashov metodunun modifiye edilmesiyle oluşturulan modifiye edilmiş Kudryashov metodu (MEKM) yine çeşitli yazarlar tarafından lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır (Tandogan et al. 2013; Ege and Misirli 2014; Hosseini et al. 2017).

Bu çalışmada kullanılacak olan Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM), Kudryashov metodunun genelleştirilmesiyle elde edilmiş olup literatüre ilk olarak 2014 yılında sunulmuştur (Tuluçe Demiray et al. 2014). Zaman içerisinde çeşitli araştırmacılar tarafından da bir takım lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için GKM kullanılmıştır (Tuluçe Demiray 2020a, 2020b; Gurefe 2020; Tuluçe Demiray and Bayrakci 2021a, 2021b). Bu tez çalışmasında ise, gergin dalga denklemi, (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sistemi, (2+1)-boyutlu Bogoyavlensky-Konopelchenko (BK) denklemi, perturbe edilmiş Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan (RKL) denklemi, (2+1)-boyutlu Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa (DJKM) denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek için GKM kullanılmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden olan Kudryashov metodu, bu metodun modifiye edilmesiyle oluşturulan MEKM ve geliştirilmesi ile elde edilen GKM hakkında yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

Kudryashov metodu ilk olarak Nikolay A. Kudryashov tarafından 1988 yılında dalga dinamiklerinin geliştirilmiş gelişim denklemlerinin soliton çözümlerini bulmak için kullanılmıştır (Kudryashov 1988).

1991 yılında Kudryashov metodu, Nikolay A. Kudryashov tarafından Burgers-Korteweg-de Vries, Bretherton, Kuramoto-Sivashinsky ve Kawachara denklemlerinin çözümlerini elde etmek amacıyla kullanılmıştır (Kudryashov 1991).

2012 yılında Nikolay A. Kudryashov, daha önce kullanılan fakat fark edilmeyen Kudryashov metodunu literatüre kazandırmış ve bu metodu Fisher denklemi ve yedinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için kullanmıştır (Kudryashov 2012).

2014 yılında Hubert ve arkadaşları lineer olmayan iletim hat denkleminin çözümünü bulmak için Kudryashov metodunu uygulamışlardır (Hubert et al. 2014).

2016 yılında Hosseini ve Ayati, Kudryashov metodunu uzay zaman kesirli equal width ve modifiye edilmiş equal width denklemleri için uygulamışlardır (Hosseini and Ayati 2016).

2018 yılında Nuruddeen ve Nass, Kudryashov metodunu kesirli geliştirilmiş equal width-Burgers ve klasik geliştirilmiş equal width-Burgers denklemlerinin çözümlerini bulmak için kullanmışlardır (Nuruddeen and Nass 2018).

2013 yılında Tandogan ve arkadaşları MEKM'i Rosenau-Kawahara denkleminin çözümlerini bulmak için uygulamışlardır (Tandogan et al. 2013).

2014 yılında MEKM, Ege ve Misirli tarafından uzay zaman kesirli modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin ve uzay zaman kesirli potansiyel Kadomtsev-Petviashvili denkleminin uygulanmıştır (Ege and Misirli 2014).

Hosseini ve arkadaşları, 2017 yılında zaman kesirli Klein-Gordon denkleminin çözümünü bulmak için MEKM kullanmışlardır (Hosseini et al. 2017).

2014 yılında Tuluçe Demiray ve arkadaşları tarafından zaman kesirli Klein-Gordon denkleminin GKM uygulanmıştır (Tuluçe Demiray et al. 2014).

2020 yılında Tuluçe Demiray GKM'yi kullanarak beta zaman türevli Biswas-Arshed denkleminin yeni çözümlerini bulmuştur (Tuluçe Demiray 2020a).

2020 yılında Tuluçe Demiray tarafından beta zaman türevli optik darbe zarfı $E(z, \tau)$ denkleminin çözümleri GKM yoluyla elde edilmiştir. (Tuluçe Demiray 2020b)

2020 yılında Gurefe GKM'yi uygulayarak Atangana'nın çarpılabilir türevi ile Hunter-Saxton ve Schrödinger denklemlerinin çözümlerini elde etmiştir (Gurefe 2020).

Tuluçe Demiray ve Bayrakci 2021 yılında genelleştirilmiş üçüncü mertebeden lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümlerini GKM yoluyla bulmuşlardır (Tuluçe Demiray and Bayrakci 2021a).

Tuluçe Demiray ve Bayrakci 2021 yılında uzay-zaman kesirli Heisenberg ferromanyetik spin zincir denkleminin çözümlerini GKM yoluyla bulmuşlardır (Tuluçe Demiray and Bayrakci 2021b).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1.1: Herhangi bir fonksiyon ve bu fonksiyona ait olan türevlerden oluşan denklemlere diferansiyel denklem adı verilir. Kısaca diferansiyel denklem, bir veya birden daha fazla bağımlı değişkeni içerisinde barındıran bir fonksiyon ile bu fonksiyona ait bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında tanımlanmış bağıntıdır (Tuluçe Demiray 2014).

Tanım 3.1.2: Herhangi bir diferansiyel denklem içerisindeki bağımsız değişken, belirli bir değişkene göre denklemde türev alınması durumunda göz önüne alınan değişken olarak, bağımlı değişken ise denklem içerisinde türevi alınan değişken olarak tanımlanır (Tuluçe Demiray 2014).

$x \rightarrow$ Bağımsız değişken

$t \rightarrow$ Bağımlı değişken

Tanım 3.1.3: Bir bağımsız ve bir bağımlı değişkenden oluşan ve bağımlı olan değişkenin bağımsız olan değişkene göre çeşitli mertebelerden adi türevlerinden oluşan denklemlere adi diferansiyel denklemler denilmektedir. Bir adi diferansiyel denklem genel olarak,

$$g\left(x, t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \frac{d^3t}{dx^3}, \dots, \frac{d^nt}{dx^n}\right) = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir (Tuluçe Demiray 2014).

Tanım 3.1.4: Herhangi bir diferansiyel denklem, en az bir bağımlı değişken ve en az iki bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebelerden kısmi türevlerini içeriyorsa bu tür denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklem adı verilir. v 'nin bağımlı x, y ve t 'nin bağımsız değişkenler olarak ele alındığı n . mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem

$$K\left(x, y, t, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right) = 0,$$

$$v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, v_y = \frac{\partial v}{\partial y}, v_t = \frac{\partial v}{\partial t}, v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, v_{xy} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, v_{yy} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, v_{tt} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \dots, v_{x^n} = \frac{\partial^n v}{\partial x^n},$$

$$K(x, y, t, v, v_x, v_y, v_t, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, v_{tt}, \dots, v_{x^n}) = 0, \quad (3.2)$$

şekillerinde ifade edilir (Tuluçe Demiray 2014).

Tanım 3.1.5: Herhangi bir kısmi türevli denklem içerisinde yer alan en yüksek basamaklı kısmi türevin basamağına bu denklemin mertebesi denilmektedir (Tuluçe Demiray 2014).

Tanım 3.1.6: Herhangi bir kısmi türevli denklem içerisinde yer alan en yüksek basamaklı kısmi türevin kuvvetine bu denklemin derecesi denilmektedir (Tuluçe Demiray 2014).

Tanım 3.1.7: Diferansiyel denklemler genel olarak lineer olan diferansiyel denklemler ve lineer olmayan diferansiyel denklemler olmak üzere olarak iki ayrı kısma ayrılır. Herhangi bir diferansiyel denklem içerisinde bulunan bağımlı değişken ve onun türevlerinin katsayıları bağımsız değişken içeriyorsa bu tür diferansiyel denklemlere değişken katsayılı diferansiyel denklemler denir. Herhangi bir kısmi türevli denklemde bulunan bağımlı değişken ve bu değişkenlerin denklem içerisindeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklem, bağımlı değişkenler ile onların türevleri parantezi içerisinde yazıldığı zaman katsayıları sabit veya yalnızca bağımsız olan değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu tür denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Herhangi bir diferansiyel denklem içerisinde bulunan bağımlı değişken kendisi ya da türevleri ile çarpım veya bölüm şeklinde yazılıyor ya da bağımlı olan değişken üstel, logaritmik ya da trigonometrik olarak bulunuyor veya bağımlı olan değişkenlerin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden daha büyükse bu türde olan denklemler lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir (Tuluçe Demiray 2014).

Tanım 3.1.8: Herhangi bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem içerisindeki en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q}{d\eta^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim

$u^p \left(\frac{d^r}{d\eta^r} \right)^s$ ifadeleri ile verilmiş olsun. Bu durumda dengeleme terimi olarak göz önüne

alınan M için $M + q = M p + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir (Tuluçe Demiray 2014).

Kavram 3.1.1: Tekil dalgalar (Solitary waves) ilk olarak 1834 yılında Scott Russell tarafından gözlenmiştir. 1965 yılında ise Kruskal ve Zabusky tekil dalgaların birbiriyle olan etkileşimlerini ve başlangıç durumlarını korumalarını araştırdılar. KdV denklemi üzerinde Zabusky ve Kruskal tarafından yapılmakta olan nümerik araştırmalar esnasında; adına soliton ismini verdikleri ve çarpıştıktan sonra hızlarını ve şekillerini koruyan partikül benzeri bir davranış gösteren dalgalar buldular. Her lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümü soliton özelliğini yansıtmayabilir. Elde edilen hiperbolik fonksiyon çözümlerin soliton özelliğini yansıtabilmesi için denklemin integrallenebilir olması gerekmektedir. Denklemin çözümünde elde edilen soliton çözümler dark soliton ve bright soliton olmak üzere iki farklı çeşit olabilir. Eğer elde edilen çözüm *sech* fonksiyon tipinde ise buna bright soliton çözüm, eğer *tanh* fonksiyon tipinde bir çözüm var ise buna dark soliton çözüm denir. Elde edilen çözüm, *sech* ve *tanh* fonksiyonlarını bir arada içeriyorsa dark-bright soliton çözüm olarak adlandırılır (Hirota 2004; Tuluçe Demiray et al. 2015).

Kavram 3.1.2: Mathematica, Wolfram Research tarafından piyasaya sürülen, çeşitli matematiksel hesaplamalar yapılmasında, özellikle zor ve karmaşık yapıdaki sayısal problemlerin hızlı bir şekilde çözülmesinde, hem üç boyutlu hem de iki boyutlu renkli grafiklerin çiziminde kolaylık sağlaması sayesinde son derece etkili, güvenilir ve hızlı çözüm yapan matematiksel bir yazılım programıdır (Taşlıbeyaz and Gülcü 2013). Bu çalışmada ise araştırılan denklemlerin çözümleri Mathematica 12 sürümü kullanılarak yapılmıştır.

3.2 Genelleştirilmiş Kudryashov Metodu (GKM)

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için Nikolay A. Kudryashov tarafından literatüre kazandırılmış olan Kudryashov metodunun genelleştirilmiş hali olan GKM'nin yapısı şu şekilde verilebilir (Tuluçe Demiray et al. 2014):

1. Adım:

Bağımlı bir v fonksiyonu x , y ve t şeklindeki üç farklı bağımsız değişkene bağlı olmak üzere,

$$R(v, v_t, v_y, v_x, v_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.2.1)$$

eşitliği ile verilmiş olan kısmi diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. (3.2.1) denklemi için dalga dönüşüm denklemi,

$$v(x, y, t) = v(\eta), \quad \eta = kx + ly - ct \quad (3.2.2)$$

şeklinde olsun. (3.2.1) ile verilmiş olan denkleme (3.2.2) eşitliği ile verilmiş olan dalga dönüşümü uygulanırsa, (3.2.1) eşitliğindeki kısmi diferansiyel denklem,

$$L(t, y, x, v, v', v'', \dots) = 0 \quad (3.2.3)$$

eşitliğindeki gibi bir lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenir. Bu eşitlikteki türevler η 'ya göre alınmıştır.

2. Adım: Genelleştirilmiş Kudryashov fonksiyonu, (3.2.3) eşitliği ile verilmiş olan adi diferansiyel denklem için,

$$v(\eta) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Q^i(\eta)}{\sum_{j=0}^M b_j Q^j(\eta)} = \frac{P[Q(\eta)]}{S[Q(\eta)]} \quad (3.2.4)$$

eşitliği ile ele alınır. Burada $Q = \frac{1}{1 \pm e^\eta}$ olarak ele alınmaktadır. Q fonksiyonu ise

$$Q_\eta = Q^2 - Q \quad (3.2.5)$$

eşitliği ile verilmiş olan denklemin bir çözümüdür (Kudryashov 2012).

η 'ya göre v 'nin türevleri, (3.2.4) denkleminde yola çıkılarak,

$$v'(\eta) = \frac{P'Q'S - PS'Q'}{S^2} = Q' \left[\frac{P'S - PS'}{S^2} \right] = (Q^2 - Q) \left[\frac{P'S - PS'}{S^2} \right], \quad (3.2.6)$$

$$v''(\eta) = \frac{Q^2 - Q}{S^2} \left[(2Q - 1)(P'S - PS') + \frac{Q^2 - Q}{S} \left[S(P''S - PS'') - 2S'P'S + 2P(S')^2 \right] \right], \quad (3.2.7)$$

şeklinde elde edilebilir.

3. Adım: (3.2.3) eşitliği ile verilmiş olan lineer olmayan adi diferansiyel denklemin çözümü, GKM'ye göre aşağıdaki şekilde aranır;

$$v(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + \dots + a_N Q^N}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2 + \dots + b_M Q^M}. \quad (3.2.8)$$

(3.2.6) ve (3.2.7) denklemleri (3.2.3)'de yerine yazılır. Elde edilmiş olan bu denklemin dereceleri olan M ve N 'yi hesaplamak için dengeleme prensibi dikkate alınır. Bunun için de denklemde bulunan en yüksek dereceli lineer olmayan terimin polinom karşılığındaki en yüksek dereceli terim ile en yüksek mertebeden türev içeren terimin dengeleme bağıntısından yararlanılır.

4. Adım: (3.2.3) ile verilmiş olan lineer olmayan adi diferansiyel denklem içerisinde (3.2.4) eşitliği ile verilen denklem yazılırsa Q 'ya bağlı bir $R(Q)$ diferansiyel denklemi elde edilmektedir. $R(Q)$ denkleminin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Bulunan bu cebirsel denklem sistemini çözerek $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, b_0, b_1, b_2, \dots, b_M$ katsayıları belirlenir. Bu şekilde (3.2.1) eşitliği ile verilen kısmi diferansiyel denklemi için tam çözümler elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, gergin dalga denklemi, (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sistemi, (2+1)-boyutlu Bogoyavlensky-Konopelchenko (BK) denklemi, perturbe edilmiş Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan (RKL) denklemi, (2+1)-boyutlu Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa (DJKM) denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için GKM uygulanmıştır.

4.1 Gergin Dalga Denklemi ve Uygulaması

Mikro yapılı katılarda mikro gergin dalga denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} - \varepsilon \alpha_1 (u^2)_{xx} - k \alpha_2 u_{xxt} + \delta \alpha_3 u_{xxxx} - (\delta \alpha_4 + k^2 \alpha_7) u_{xxtt} + k \delta (\alpha_5 u_{xxxxt} + \alpha_6 u_{xxxtt}) = 0, \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade edilmektedir (Seadawy et al. 2020). (4.1.1) ile verilen denklemde $u(x, t)$ mikro gerilme dalga fonksiyonudur, ε elastik gerilmeyi gösterir, δ mikro yapının dalga uzunluğu ve boyutu arasındaki elastik gerilmeleri ve oranı gösterir, k dağılım etkisini yansıtır, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ değerleri ise keyfi sabitlerdir. (4.1.1) denklemi üzerinde $\delta = O(\varepsilon)$ olduğu düşünülürse dağılım ve lineer olmama arasında bir dengeleme gerçekleşir. Bu denklem üzerinde $k=0$ seçilirse mikro gerilme dalgasının dağılımsız durumu elde edilir. Bu şekilde aşağıdaki mikro yapılı katılardaki çift dağılımlı denklem elde edilir (Ayati et al. 2017; Arshad et al. 2019; Kumar et al. 2020; Gao et al. 2020; Irshad et al. 2020):

$$u_{tt} - u_{xx} - \varepsilon (\alpha_1 (u^2)_{xx} - \alpha_3 u_{xxxx} + \alpha_4 u_{xxtt}) = 0. \quad (4.1.2)$$

Gergin dalga denkleminin tam çözümlerini bulmak için (4.1.2) denkleminde GKM dikkate alınır.

$$u(x, t) = u(\eta), \eta = x - ct. \quad (4.1.3)$$

(4.1.3) ile verilen dönüşüm (4.1.2) denklemi üzerinde uygulanırsa,

$$(c^2 - 1)u - \varepsilon \alpha_1 u^2 + \varepsilon (\alpha_3 - c^2 \alpha_4) u'' = 0, \quad (4.1.4)$$

denklemini elde edilir. Böylece (4.1.2) denklemini (4.1.4) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde indirgenir. (3.2.4) ve (3.2.7) eşitlikleri (4.1.4) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 2N - 2M \Rightarrow N = M + 2, \quad (4.1.5)$$

olduğu görülür. Burada $M = 1$ için $N = 3$ olduğundan,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3}{b_0 + b_1 Q}, \quad (4.1.6)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3)}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right], \quad (4.1.7)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) = & \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3) \right] \\ & + \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \left[(b_0 + b_1 Q)^2 (2a_2 + 6a_3 Q) - 2b_1(b_0 + b_1 Q)(a_1 + 2a_2 Q + 3a_3 Q^2) + 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + a_3 Q^3) \right], \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

bulunur. (4.1.2) ile verilen gergin dalga denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

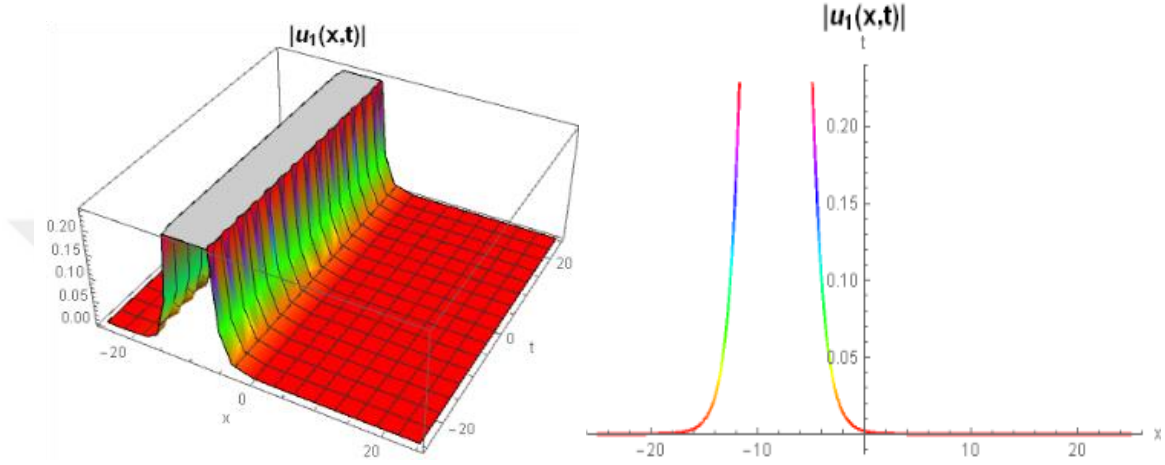
Durum 1:

$$\begin{aligned} a_0 = 0, a_1 = \frac{6b_0(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1(-1 + \varepsilon\alpha_4)}, a_2 = \frac{6(-b_0 + b_1)(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1(-1 + \varepsilon\alpha_4)}, \\ a_3 = \frac{6b_1(-\alpha_3 + \alpha_4)}{\alpha_1(-1 + \varepsilon\alpha_4)}, c = -\frac{\sqrt{-1 + \varepsilon\alpha_3}}{\sqrt{-1 + \varepsilon\alpha_4}}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

(4.1.9) eşitlikleri (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(x,t) = \frac{3(\alpha_3 - \alpha_4)}{\left(1 + \cosh \left[x + t \frac{\sqrt{-1 + \varepsilon \alpha_3}}{\sqrt{-1 + \varepsilon \alpha_4}} \right] \right) \alpha_1 (-1 + \varepsilon \alpha_4)}, \quad (4.1.10)$$

çözümü elde edilir. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.10) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.1.1. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.10) tam çözümünün $\alpha_1 = 2, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 0.5, \varepsilon = 4, -25 < x < 25$ ile $-25 < t < 25, t = 2.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

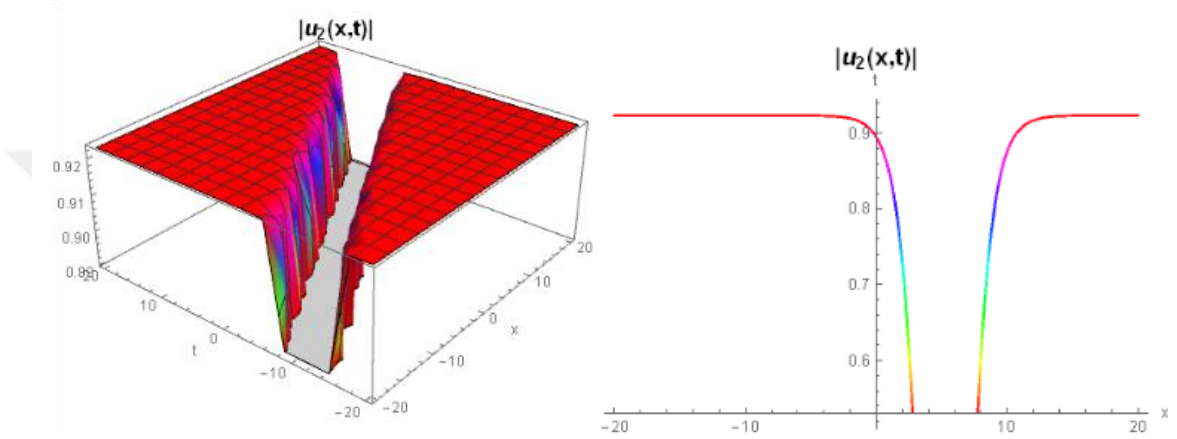
Durum 2:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{b_0(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1(1 + \varepsilon \alpha_4)}, a_1 = \frac{(-6b_0 + b_1)(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1(1 + \varepsilon \alpha_4)}, a_2 = \frac{6(b_0 - b_1)(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1(1 + \varepsilon \alpha_4)}, \\ a_3 &= \frac{6b_1(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1(1 + \varepsilon \alpha_4)}, c = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon \alpha_3}}{\sqrt{1 + \varepsilon \alpha_4}}. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

(4.1.11) eşitlikleri (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_2(x,t) = \frac{\left(-2 + \cosh\left[x - t \frac{\sqrt{1+\varepsilon\alpha_3}}{\sqrt{1+\varepsilon\alpha_4}}\right]\right)(\alpha_3 - \alpha_4)}{\left(1 + \cosh\left[x - t \frac{\sqrt{1+\varepsilon\alpha_3}}{\sqrt{1+\varepsilon\alpha_4}}\right]\right)\alpha_1(1+\varepsilon\alpha_4)}, \quad (4.1.12)$$

çözümü elde edilir. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.12) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.1.2. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.12) tam çözümünün

$\alpha_1 = 1.5, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 0.2, \varepsilon = 1.5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 3$ değerleri için

sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 3:

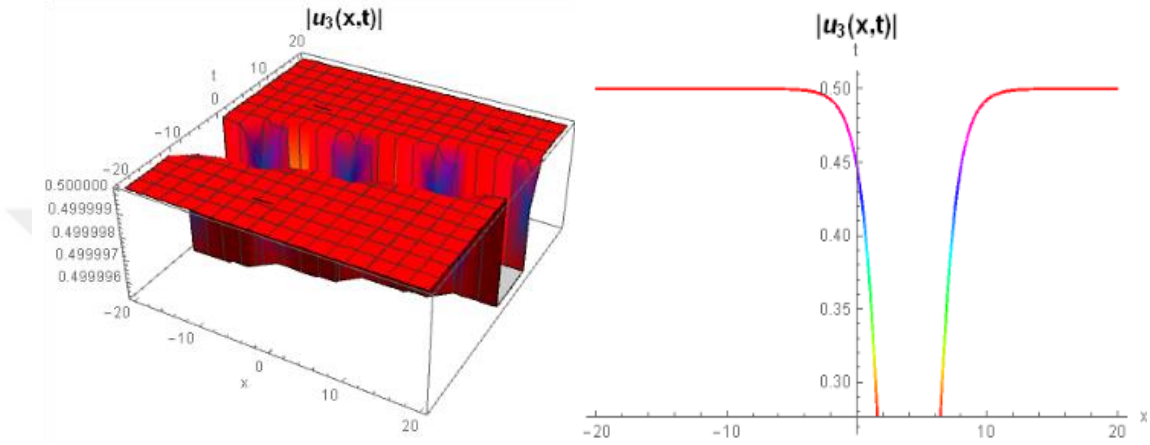
$$a_0 = 0, a_1 = -\frac{b_1 \left(-\alpha_3 + c^2 \alpha_4 + \sqrt{(\alpha_3 - c^2 \alpha_4)^2} \right)}{2\alpha_1}, a_2 = -\frac{6b_1(\alpha_3 - c^2 \alpha_4)}{\alpha_1}, \quad (4.1.13)$$

$$a_3 = \frac{6b_1(\alpha_3 - c^2 \alpha_4)}{\alpha_1}, b_0 = 0, \varepsilon = \frac{1 - c^2}{\sqrt{(\alpha_3 - c^2 \alpha_4)^2}}.$$

(4.1.13) eşitlikleri (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_3(x, t) = - \frac{\operatorname{sech}\left[\frac{x-ct}{2}\right]^2 \left(-(-5 + \cosh[x-ct])\alpha_3 + c^2(-5 + \cosh[x-ct])\alpha_4 \right) + (1 + \cosh[x-ct])(\alpha_3 - c^2\alpha_4)}{4\alpha_1}, \quad (4.1.14)$$

çözümü elde edilir. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.14) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.1.3. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.14) tam çözümünün $\alpha_1 = 3, \alpha_3 = 2.5, \alpha_4 = 0.25, \varepsilon = 2, c = 4, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 1$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 4:

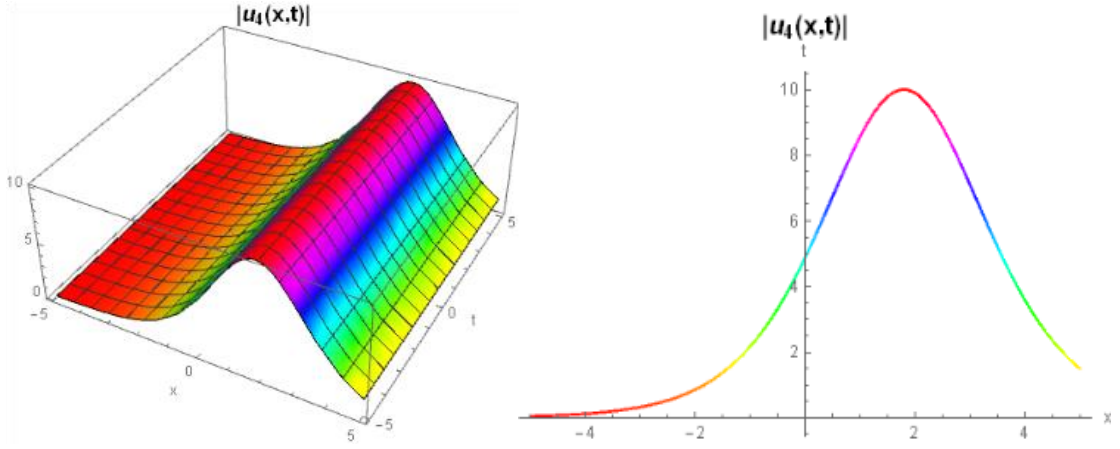
$$a_0 = 0, a_1 = \frac{6(-1+c^2)b_0}{\varepsilon\alpha_1}, a_2 = -a_3 - \frac{6(-1+c^2)b_0}{\varepsilon\alpha_1}, \quad (4.1.15)$$

$$b_1 = \frac{\varepsilon a_3 \alpha_1}{6-6c^2}, \alpha_3 = \frac{1-c^2+c^2\varepsilon\alpha_4}{\varepsilon}.$$

(4.1.15) eşitlikleri (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_4(x, t) = - \frac{20}{1 + \cosh[x-ct]}, \quad (4.1.16)$$

çözümü elde edilir. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.16) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.1.4. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.16) tam çözümünün $c = 0.6$, $-5 < x < 5$ ile $-5 < t < 5$, $t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 5:

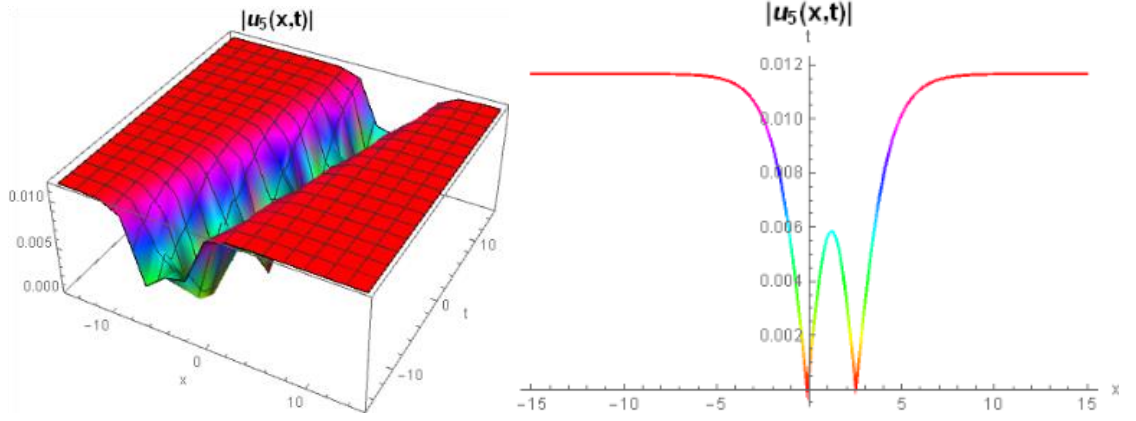
$$a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{12} a_3 \left(1 + \frac{-\alpha_3 + c^2 \alpha_4}{\sqrt{(\alpha_3 - c^2 \alpha_4)^2}} \right), a_2 = -a_3, b_0 = 0, \quad (4.1.17)$$

$$b_1 = \frac{a_3 \alpha_1}{6\alpha_3 - 6c^2 \alpha_4}, \varepsilon = \frac{1 - c^2}{\sqrt{(\alpha_3 - c^2 \alpha_4)^2}}.$$

(4.1.17) eşitlikleri (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_5(x, t) = - \frac{\left((5 - \cosh[x - ct]) \alpha_3 + c^2 (-5 + \cosh[x - ct]) \alpha_4 \right) + (1 + \cosh[x - ct]) (\alpha_3 - c^2 \alpha_4)}{2(1 + \cosh[x - ct]) \alpha_1} \quad (4.1.18)$$

çözümü elde edilir. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.18) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.1.5. Gergin dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.1.18) tam çözümünün $\alpha_1 = 3, \alpha_3 = 0.01, \alpha_4 = 0.5, c = 0.3, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t = 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

4.2 (2+1)-Boyutlu Enerji Tüketen Uzun Dalga Sistemi ve Uygulaması

(2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sistemi fiziksel uygulamalarda, lineer olmayan dalga teorisi ve lineer olmayan bilimde kullanılan ünlü bir denklem sistemidir (Chang et al. 2020). (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sistemi,

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} - 2u_x v - 2uv_x &= 0, \\ v_{ty} + v_{xxy} - 2u_{xx} - 2v_x v_y - 2vv_{xy} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

şeklinde verilmektedir (Yang and Feng 2021). (4.2.1) ile verilen sistemin tam çözümlerini bulabilmek için GKM dikkate alınır.

$$u(x, y, t) = u(\eta), v(x, y, t) = v(\eta), \eta = x + y - ct \quad (4.2.2)$$

(4.2.1) sistemi için (4.2.2) dönüşümü ele alınır ve integrasyon sabiti de sıfır kabul edilerek integral alınırsa,

$$-c^2 v - v'' + 3cv^2 + 2v^3 = 0, \quad (4.2.3)$$

elde edilir. Böylece (4.2.1) denklemi, (4.2.3) lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür. (3.2.4) ve (3.2.7) eşitlikleri (4.2.3) denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 3N - 3M \Rightarrow N = M + 1 \quad (4.2.4)$$

olduğu görülür. Burada $M = 1$ için $N = 2$ olduğundan,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q}, \quad (4.2.5)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right], \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) &= \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right] \\ &+ \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \left[2a_2(b_0 + b_1 Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) + 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right], \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

bulunur. (4.2.1) ile verilen (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin tam çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 1:

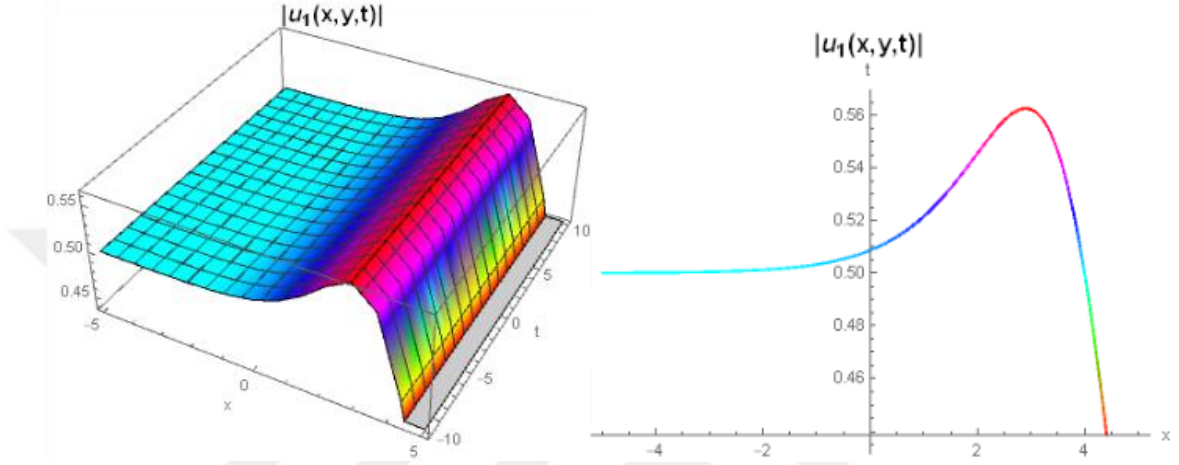
$$a_0 = 0, a_1 = -b_0, a_2 = -b_1, c = 1. \quad (4.2.8)$$

(4.2.8) eşitlikleri (4.2.5) denkleminde yerine yazılırsa

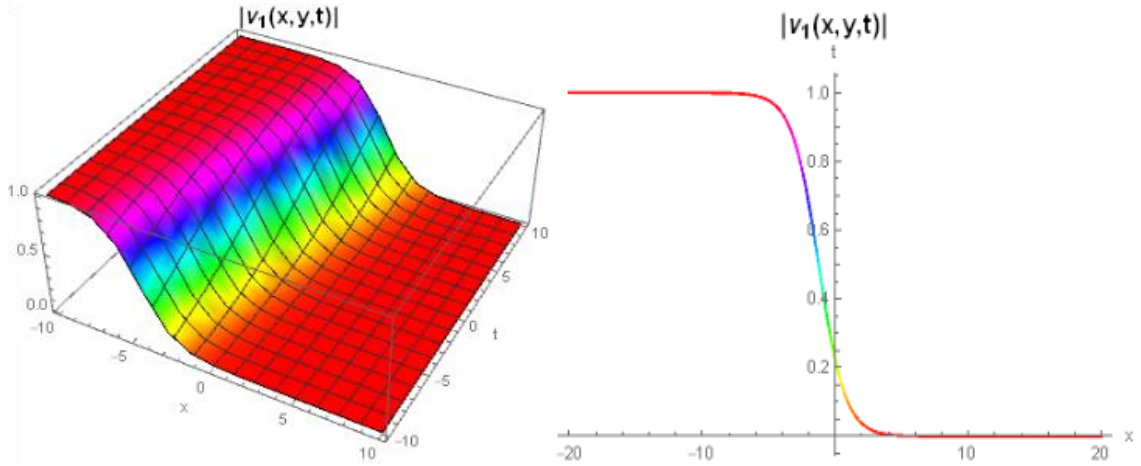
$$u_1(x, y, t) = -\frac{1}{4} \left(-1 + \tanh \left[\frac{x + y - ct}{2} \right] \right) \left(c + \tanh \left[\frac{x + y - ct}{2} \right] \right), \quad (4.2.9)$$

$$v_1(x, y, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{x + y - ct}{2} \right], \quad (4.2.10)$$

dark soliton çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.9) ve (4.2.10) tam çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekillerde çizilmiştir.



Şekil 4.2.1. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.9) tam çözümünün $c = 2, y = 2, -5 < x < 5$ ile $-10 < t < 10, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.2.2. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.10) tam çözümünün $c = 0.25, y = 2, -10 < x < 10$ ile $-10 < t < 10, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 2:

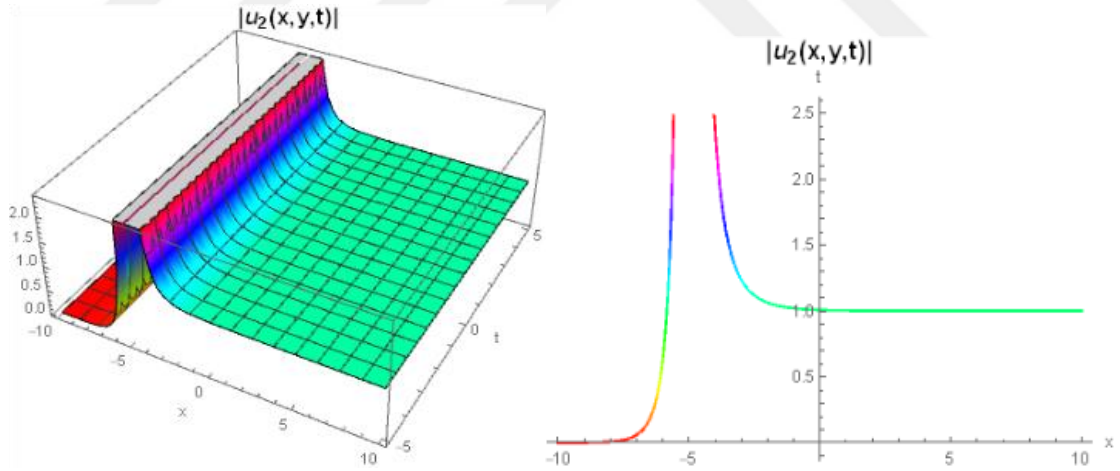
$$a_0 = b_1, a_1 = -2b_1, a_2 = b_1, b_0 = -\frac{b_1}{2}, c = 2. \quad (4.2.11)$$

(4.2.11) eşitlikleri (4.2.5) denkleminde yerine yazılırsa

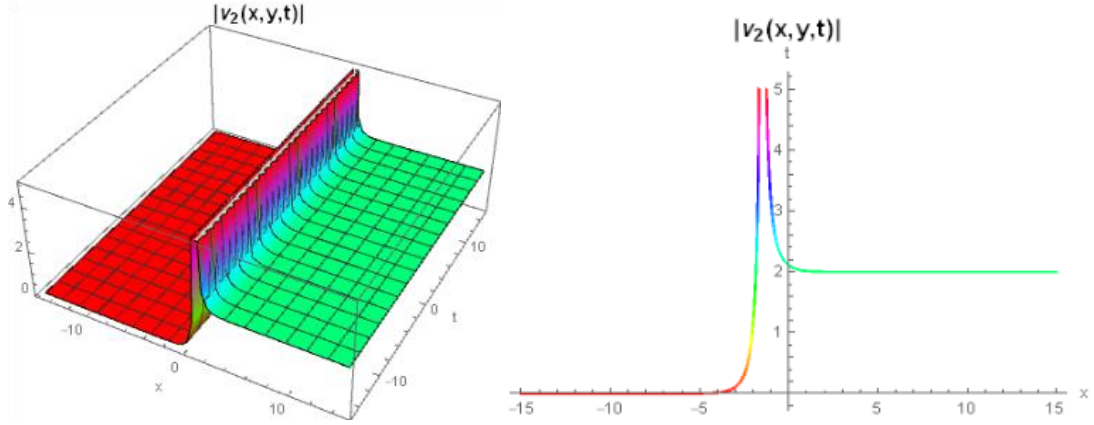
$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{4} (1 + \coth[x + y - ct]) (2c + 4 \coth[x + y - ct] + \operatorname{csch}[x + y - ct]), \quad (4.2.12)$$

$$v_2(x, y, t) = -\frac{1}{2} \left(1 + \coth \left[\frac{x + y - ct}{2} \right] \right)^2 \tanh \left[\frac{x + y - ct}{2} \right], \quad (4.2.13)$$

(4.2.12) dark-bright soliton ve (4.2.13) dark soliton çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.12) ve (4.2.13) tam çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekillerde çizilmiştir.



Şekil 4.2.3. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.12) tam çözümünün $c = -1, y = 1, -10 < x < 10$ ile $-5 < t < 5, t = 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.2.4. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.13) tam çözümünün $c = 1, y = 2, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t = 0.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 3:

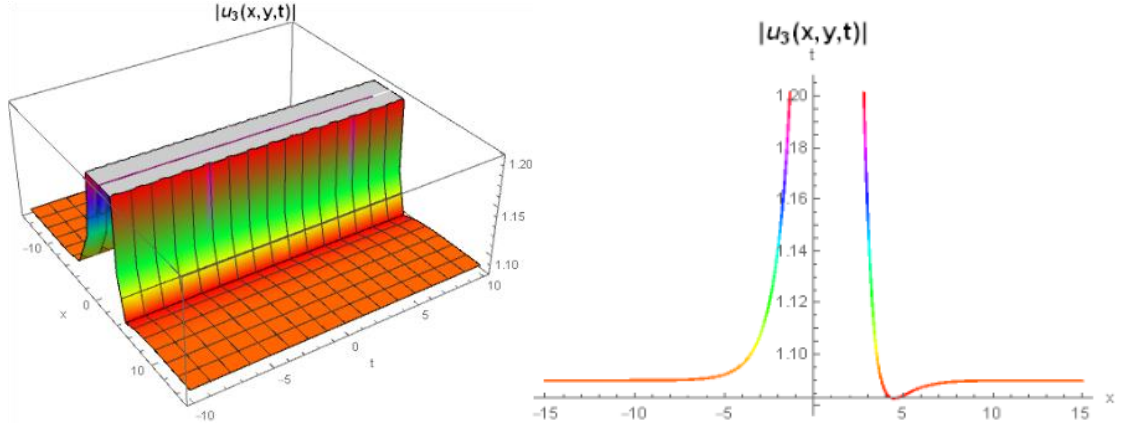
$$a_0 = \frac{ib_1}{2\sqrt{2}}, a_1 = \left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)b_1, a_2 = -b_1, b_0 = -\frac{b_1}{2}, c = i\sqrt{2}. \quad (4.2.14)$$

(4.2.14) eşitlikleri (4.2.6) denkleminde yerine yazılırsa

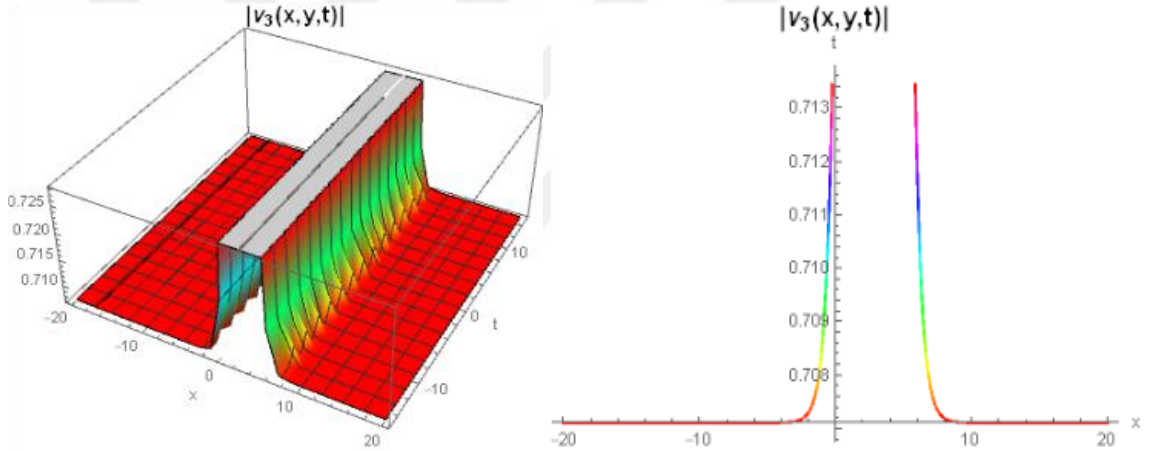
$$u_3(x, y, t) = \frac{1}{4} \left(1 + i\sqrt{2}c + 2 \operatorname{csch}[x + y - ct] \left(-i\sqrt{2} + c + \tanh \left[\frac{x + y - ct}{2} \right] \right) \right), \quad (4.2.15)$$

$$v_3(x, y, t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} - \operatorname{csch}[x + y - ct], \quad (4.2.16)$$

(4.2.15) dark-bright soliton ve (4.2.16) bright soliton çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sisteminin GKM ile elde edilen (4.2.15) ve (4.2.16) tam çözümleri için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekillerde çizilmiştir.



Şekil 4.2.5. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.15) tam çözümünün $c = 3, y = 5, -15 < x < 15$ ile $-10 < t < 10, t = 2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.



Şekil 4.2.6. (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga denkleminin GKM ile elde edilen (4.2.16) tam çözümünün $c = 1, y = 0.2, -20 < x < 20$ ile $-15 < t < 15, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

4.3 (2+1)-Boyutlu Bogoyavlensky–Konopelchenko (BK) Denklemini ve Uygulaması

(2+1)-boyutlu BK denklemini,

$$u_{xt} + h_1 u_{4x} + h_2 u_{3xy} + h_3 u_{xx} u_x + h_4 (u_{xy} u_x + u_{xx} u_y) = 0, \quad (4.3.1)$$

şeklinde verilsin (Ray 2018). Burada h_1, h_2, h_3, h_4 değerleri keyfi sabitlerdir. (4.3.1) denklemindeki h_1, h_2, h_3, h_4 sabitleri için $h_1 = a, h_2 = \beta, h_3 = 6a, h_4 = 4\beta$ değerleri seçilirse (4.3.1) denklemi

$$u_{xt} + au_{4x} + \beta u_{3xy} + 6au_{xx}u_x + 4\beta u_{xy}u_x + 4\beta u_{xx}u_y = 0, \quad (4.3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen (4.3.2) denklemi Korteweg-de Vries denkleminin iki boyutlu bir genellemesi olarak kabul edilir ve uygun şartlar da Korteweg-de Vries denkleminde indirgenebilir (Yan et al. 2016). (4.3.2) denklemi $a = 0$ değeri için Calogero-Bogoyavlensky-Schiff denklemini sağlamaktadır ve aynı zamanda da akışkanlar mekaniğinde y eksenini boyunca yayılan bir Riemann dalgası ile x eksenini boyunca yayılan uzun bir dalga ile etkileşimi olarak da tanımlanmaktadır (Xiang-peng et al. 2010; Zhou et al. 2021). (4.3.2) denkleminde $u_y = v_x$ dönüşümü yapılır ve integral alınırsa

$$u_t + au_{3x} + \beta v_{3x} + 3au_x^2 + 4\beta u_x v_x = 0, \quad (4.3.3)$$

denklemi elde edilir. Buna göre (4.3.2) denklemi

$$\begin{aligned} u_t + au_{3x} + \beta v_{3x} + 3au_x^2 + 4\beta u_x v_x &= 0, \\ u_y - v_x &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

şeklinde bir sistem olarak yazılabilir. Elde edilen (4.3.4) sistemi üzerinde GKM dikkate alınır.

$$u(x, y, t) = u(\eta), v(x, y, t) = v(\eta), \eta = x + y - ct. \quad (4.3.5)$$

(4.3.5) ile verilen dönüşüm (4.3.4) sistemi üzerinde uygulanırsa,

$$-cu' + (a + \beta)u''' + (3a + 4\beta)(u')^2 = 0, \quad (4.3.6)$$

elde edilir. Bu elde edilen (4.3.6) denklemi üzerinde $u' = g$ dönüşümü uygulanırsa

$$-cg + (a + \beta)g'' + (3a + 4\beta)g^2 = 0, \quad (4.3.7)$$

elde edilir. Böylece (4.3.4) sistemi (4.3.7) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde dönüşür. (3.2.4) ve (3.2.7) eşitlikleri (4.3.7) denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 2N - 2M \Rightarrow N = M + 2. \quad (4.3.8)$$

olduğu görülür. Burada $M = 1$ için $N = 3$ olduğundan,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3}{b_0 + b_1Q}, \quad (4.3.9)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3)}{(b_0 + b_1Q)^2} \right], \quad (4.3.10)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) = & \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3) \right] \\ & + \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1Q)^3} \left[(b_0 + b_1Q)^2 (2a_2 + 6a_3Q) - 2b_1(b_0 + b_1Q)(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2) + 2b_1^2(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3) \right], \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

bulunur. (4.3.1) ile verilen (2+1)-boyutlu BK denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 1:

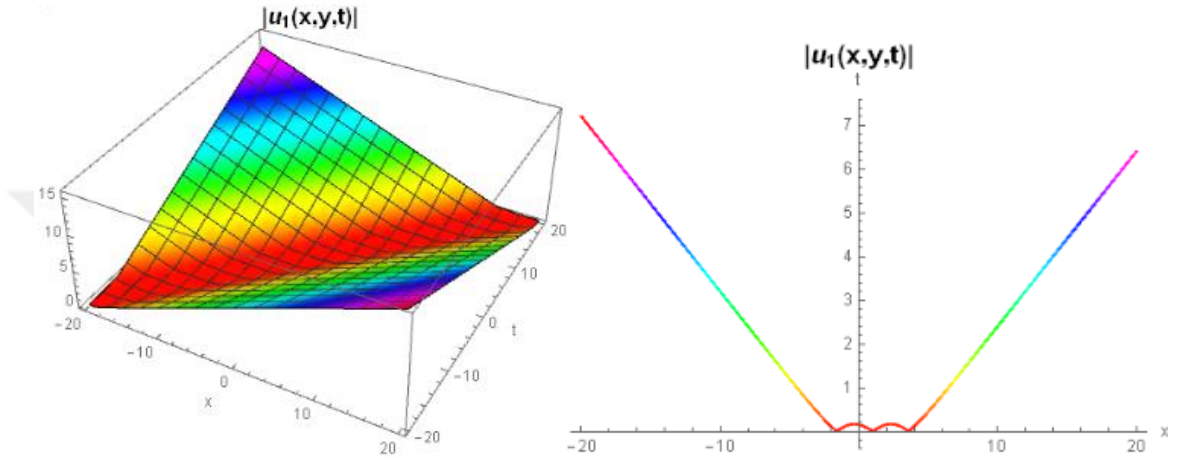
$$a_0 = \frac{cb_0}{-3c + \beta}, a_1 = \frac{c(6b_0 - b_1)}{3c - \beta}, a_2 = \frac{6c(-b_0 + b_1)}{3c - \beta}, a_3 = -\frac{6cb_1}{3c - \beta}, a = -c - \beta. \quad (4.3.12)$$

(4.3.12) eşitlikleri (4.3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(x, y, t) = \frac{c(x + y - ct) - 6c \left[\frac{(x + y - ct)}{2} \right] + 6c \tanh \left[\frac{(x + y - ct)}{2} \right]}{6c - 2\beta}, \quad (4.3.13)$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{c(x + y - ct) - 6c \left[\frac{(x + y - ct)}{2} \right] + 6c \tanh \left[\frac{(x + y - ct)}{2} \right]}{6c - 2\beta}, \quad (4.3.14)$$

dark soliton çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.13) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.3.1. (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.13) tam çözümünün $c = 1, y = 2, \beta = 0.5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 2:

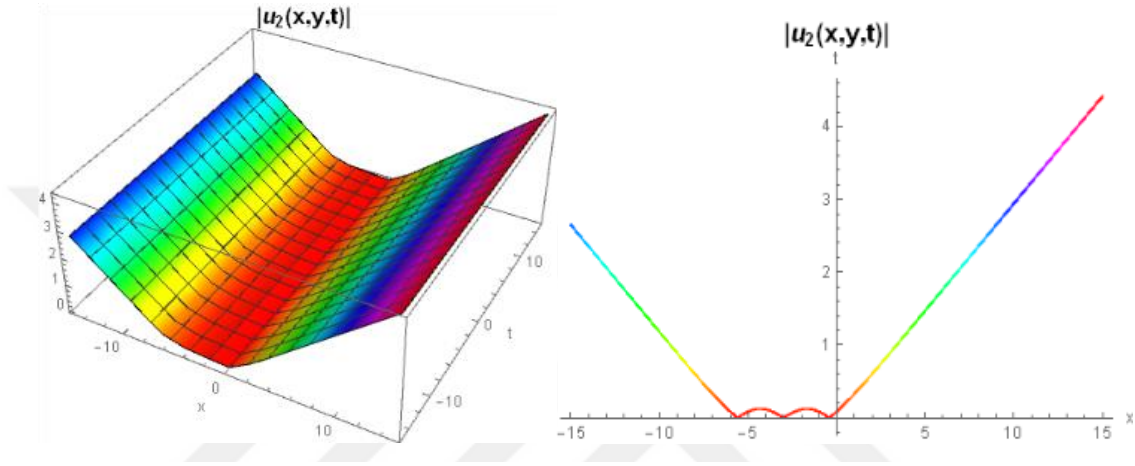
$$a_0 = -\frac{(a + \beta)b_0}{3a + 4\beta}, a_1 = \frac{(a + \beta)(6b_0 - b_1)}{3a + 4\beta}, a_2 = \frac{6(a + \beta)(-b_0 + b_1)}{3a + 4\beta}, a_3 = -\frac{6(a + \beta)b_1}{3a + 4\beta}, c = -a - \beta. \quad (4.3.14)$$

(4.3.14) eşitlikleri (4.3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_2(x, y, t) = -\frac{(a + \beta)((x + y - ct) - 3 \tanh \left[\frac{x + y - ct}{2} \right])}{3a + 4\beta}, \quad (4.3.15)$$

$$v_2(x, y, t) = -\frac{(a + \beta)((x + y - ct) - 3 \tanh\left[\frac{x + y - ct}{2}\right])}{3a + 4\beta}, \quad (4.3.16)$$

dark soliton çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.15) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.3.2. (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.15) tam çözümünün $c = 0.5, a = 3, \beta = 2, y = 4, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t = 2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 3:

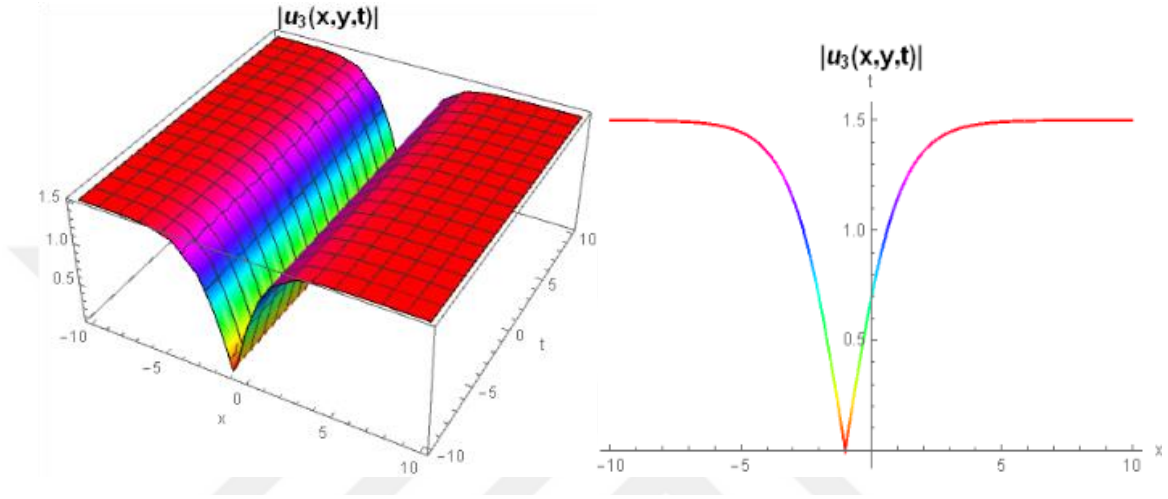
$$a_0 = 0, a_1 = -\frac{6cb_0}{a-4c}, a_2 = \frac{6cb_0}{a-4c}, a_3 = 0, b_1 = 0, \beta = -a + c. \quad (4.3.17)$$

(4.3.17) eşitlikleri (4.3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_3(x, y, t) = -\frac{3c \tanh\left[\frac{x + y - ct}{2}\right]}{a - 4c}, \quad (4.3.18)$$

$$v_3(x, y, t) = -\frac{3c \tanh\left[\frac{x+y-ct}{2}\right]}{a-4c}, \quad (4.3.19)$$

dark soliton çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.18) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.3.3. (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.3.18) tam çözümünün $c = 0.4, a = 0.8, y = 2, -10 < x < 10$ ile $-10 < t < 10, t = 2.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

4.4 Perturbe Edilmiş Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan (RKL) Denklemini ve Uygulaması

Perturbe edilmiş RKL denklemi

$$iq_t + aq_{xx} + b|q|^2 q = i\varepsilon q_x + i\lambda(|q|^2 q)_x + i\mu(|q|^2)_x q - i\gamma q_{xxx}, \quad (4.4.1)$$

şeklinde verilmektedir. Burada $q(x, t)$ karmaşık değerli bağımlı bir fonksiyondur ve x uzaysal değişkenleri t ise zamansal değişkenleri temsil eden bağımsız birer değişkenlerdir. (4.4.1) denkleminin sol tarafında bulunan ilk terim lineer olmayan dalganın zamansal değişimini, a katsayısı grup hız dağılımını, b ise lineer olmama katsayısını gösterir. Denklemdaki eşitliğin sağ tarafında bulunan katsayılar da ise ε modlar arası dağılımı, λ kısa darbeler için yükselme katsayısını, μ yüksek dereceli

dağılım katsayısını, γ ise üçüncü dereceden dağılım terimini temsil eder (Biswas et al. 2018; Biswas 2018; Ghanbari and Gomez-Aguilar 2019). (4.4.1) ile verilen perturbe edilmiş RKL denklemine GKM'yi uygulamak için ilk olarak

$$q(x,t) = u(\eta)e^{iP(x,t)}, \eta = x - vt, P(x,t) = -kx + wt. \quad (4.4.2)$$

dönüşümü göz önüne alınır. (4.4.1) denkleminde (4.4.2) ile verilen dönüşüm uygulanırsa,

$$(a + 3\gamma k)u'' - (w + ak^2 + \gamma k^3 + \varepsilon k)u + (b - k\lambda)u^3 = 0, \quad (4.4.3)$$

$$3\gamma u'' - 3(v + \varepsilon + 2ak + 3\gamma k^2)u - (3\lambda + 2\mu)u^3 = 0, \quad (4.4.4)$$

elde edilir. Böylece (4.4.1) denklemi (4.4.3) denklemi ile verilen reel ve (4.4.4) denklemi ile verilen imajiner çiftine indirgenir. (3.2.4) ve (3.2.7) eşitlikleri (4.4.3) ve (4.4.4) denklemlerinde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 3N - 3M \Rightarrow N = M + 1, \quad (4.4.5)$$

olduğu görülür. Burada $M = 1$ için $N = 2$ olduğundan,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2}{b_0 + b_1 Q}, \quad (4.4.6)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2)}{(b_0 + b_1 Q)^2} \right], \quad (4.4.7)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) &= \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1 Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) - b_1(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right] \\ &+ \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1 Q)^3} \left[2a_2(b_0 + b_1 Q)^2 - 2b_1(a_1 + 2a_2 Q)(b_0 + b_1 Q) + 2b_1^2(a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2) \right], \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

bulunur. (4.4.1) ile verilen perturbe edilmiş RKL denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 1:

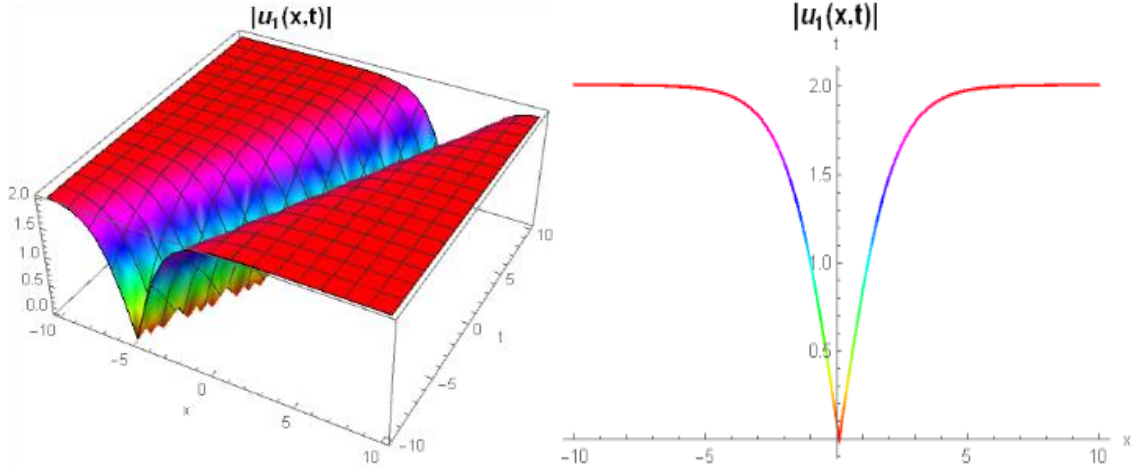
$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{i\sqrt{-ak(6+ak)-3v-w-\gamma k^2(9+\gamma k)-3\varepsilon-\varepsilon k b_0}}{\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}}, \\
 a_1 &= -\frac{a_2}{2} + \frac{2i\sqrt{-ak(6+ak)-3v-w-\gamma k^2(9+\gamma k)-3\varepsilon-\varepsilon k b_0}}{\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}}, \\
 b_1 &= -\frac{i\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}a_2}{2\sqrt{-ak(6+ak)-3v-w-\gamma k^2(9+\gamma k)-3\varepsilon-\varepsilon k}}, \\
 \gamma &= \frac{1}{3}\left(-a-2ak(6+ak)-6v-2w-\gamma k(3+2\gamma k(9+\gamma k))-2(-3\varepsilon-\varepsilon k)\right).
 \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

(4.4.9) eşitlikleri (4.4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(x,t) = -\frac{e^{i(-kx+wt)}i\sqrt{-ak(6+ak)-3v-w-\gamma k^2-3\varepsilon-\varepsilon k} \tanh\left[\frac{(x-vt)}{2}\right]}{\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}}, \tag{4.4.10}$$

$$u_2(x,t) = -\frac{e^{i(-kx+wt)}i\sqrt{-ak(6+ak)-3v-w-\gamma k^2-3\varepsilon-\varepsilon k} \coth\left[\frac{(x-vt)}{2}\right]}{\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}}, \tag{4.4.11}$$

çözümleri elde edilir. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.10) tam çözümünü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4.1. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.10) tam çözümünün $a = 0.25, w = 3, v = 0.5, k = 2, \gamma = 1, \varepsilon = 5, b = 3, \lambda = 4, \mu = 1, -10 < x < 10$ ile $-10 < t < 10, t = 0.2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 2:

$$a_0 = -\frac{i\sqrt{a+3(\gamma+\gamma k)}b_0}{\sqrt{2}\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}}, a_1 = -\frac{a_2}{2} + \frac{i\sqrt{2}\sqrt{a+3(\gamma+\gamma k)}b_0}{\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}},$$

$$b_1 = -\frac{i\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}a_2}{\sqrt{2a+6\gamma+6\gamma k}}, \quad (4.4.12)$$

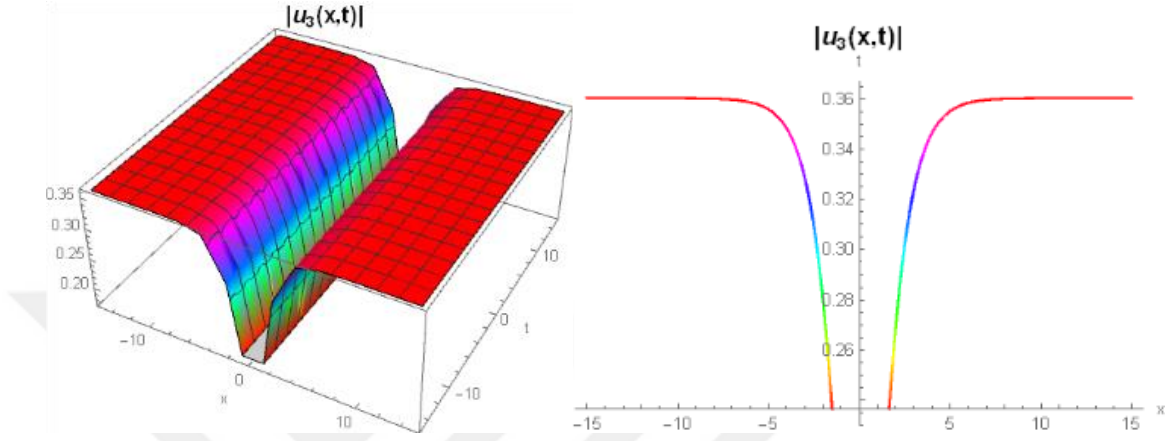
$$w = \frac{1}{2}(-a - 2ak(6 + ak) - 6v - 3\gamma - \gamma k(3 + 2\gamma k(9 + \gamma k)) - 2(3\varepsilon + \varepsilon k)).$$

(4.4.12) eşitlikleri (4.4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_3(x, t) = -\frac{e^{i(-kx+wt)}i\sqrt{a+3(\gamma+\gamma k)}\tanh\left[\frac{(x-vt)}{2}\right]}{\sqrt{2}\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}}, \quad (4.4.13)$$

$$u_4(x, t) = -\frac{e^{i(-kx+wt)}i\sqrt{a+3(\gamma+\gamma k)}\coth\left[\frac{(x-vt)}{2}\right]}{\sqrt{2}\sqrt{b-k\lambda-3\lambda-2\mu}}, \quad (4.4.14)$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümler içerisinde yer alan $w = \frac{1}{2}(-a - 2ak(6 + ak) - 6v - 3\gamma - \gamma k(3 + 2\gamma k(9 + \gamma k)) - 2(3\varepsilon + \varepsilon k))$ dir. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4.2. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.13) tam çözümünün $a = 5, v = 0.05, k = 4, \gamma = 0.1, b = 3, \lambda = 4, \mu = 0.01, w = 0.5, -15 < x < 15$ ile $-15 < t < 15, t = 1.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 3:

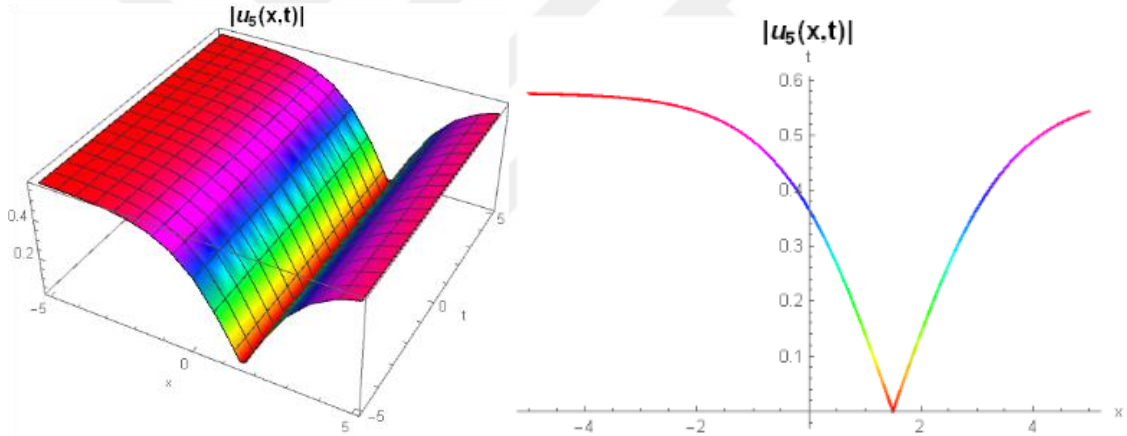
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{4} a_1 \left(-2 + \frac{\sqrt{2}(a + 3(\gamma + \gamma k))b_1}{\sqrt{-(a + 3(\gamma + \gamma k))(b - k\lambda - 3\lambda - 2\mu)a_1^2}} \right), \\
 a_2 &= -\frac{\sqrt{2}(a + 3(\gamma + \gamma k))a_1 b_1}{\sqrt{-(a + 3(\gamma + \gamma k))(b - k\lambda - 3\lambda - 2\mu)a_1^2}}, \\
 b_0 &= -\frac{\sqrt{-(a + 3(\gamma + \gamma k))(b - k\lambda - 3\lambda - 2\mu)a_1^2}}{\sqrt{2}(a + 3(\gamma + \gamma k))} + \frac{b_1}{2}, \\
 w &= \frac{1}{2}(-a - 2ak(6 + ak) - 6v - 3\gamma - \gamma k(3 + 2\gamma k(9 + \gamma k)) - 2(3\varepsilon + \varepsilon k)).
 \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

(4.4.15) eşitlikleri (4.4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_5(x,t) = e^{i(-kx+wt)} \frac{a + 3(\gamma + \gamma k)a_1 \tanh\left[\frac{(x-vt)}{2}\right]}{\sqrt{2}\sqrt{-(a + 3(\gamma + \gamma k))(b - k\lambda - 3\lambda - 2\mu)a_1^2}}, \quad (4.4.16)$$

$$u_6(x,t) = e^{i(-kx+wt)} \frac{a + 3(\gamma + \gamma k)a_1 \coth\left[\frac{(x-vt)}{2}\right]}{\sqrt{2}\sqrt{-(a + 3(\gamma + \gamma k))(b - k\lambda - 3\lambda - 2\mu)a_1^2}}, \quad (4.4.17)$$

çözümleri elde edilir. Burada çözümler içerisinde yer alan $w = \frac{1}{2}(-a - 2ak(6 + ak) - 6v - 3\gamma - \gamma k(3 + 2\gamma k(9 + \gamma k)) - 2(3\varepsilon + \varepsilon k))$ dir. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.16) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4.3. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.16) tam çözümünün $a = 5, a_1 = 2.5, v = -1, k = 2, \gamma = 1, b = 3, \lambda = -4, \mu = 1, w = 2, -5 < x < 5$ ile $-5 < t < 5, t = -1.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 4:

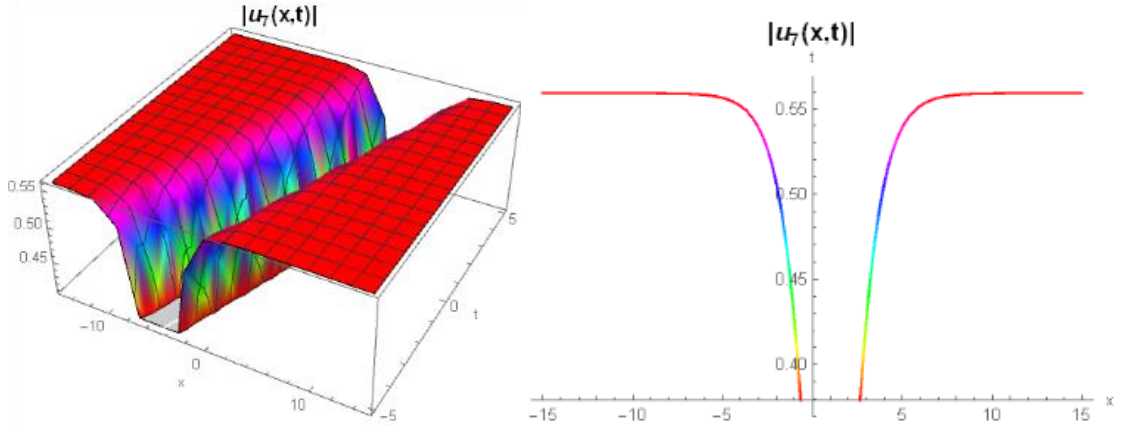
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4} a_1 \left(-2 - \frac{\sqrt{2}(a+3(\gamma+\gamma k))b_1}{\sqrt{-(a+3(\gamma+\gamma k))(b-k\lambda-3\lambda-2\mu)a_1^2}} \right), \\
a_2 &= \frac{\sqrt{2}(a+3(\gamma+\gamma k))a_1 b_1}{\sqrt{-(a+3(\gamma+\gamma k))(b-k\lambda-3\lambda-2\mu)a_1^2}}, \\
b_0 &= \frac{\sqrt{-(a+3(\gamma+\gamma k))(b-k\lambda-3\lambda-2\mu)a_1^2}}{\sqrt{2}(a+3(\gamma+\gamma k))} + \frac{b_1}{2}, \\
w &= \frac{1}{2}(-a-2ak(6+ak)-6v-3\gamma-\gamma k(3+2\gamma k(9+\gamma k))-2(3\varepsilon+\varepsilon k)).
\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

(4.4.18) eşitlikleri (4.4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u_7(x,t) &= \\
& \frac{-a_1 \left(2 + \frac{\sqrt{2}Ab_1}{\sqrt{-ABa_1^2}} \right) + \left(2a_1 - \frac{\sqrt{2}Aa_1b_1 \left(1 - \tanh \left[\frac{x-vt}{2} \right] \right)}{\sqrt{-ABa_1^2}} \right) \left(-1 + \tanh \left[\frac{x-vt}{2} \right] \right)}{4 \left(\frac{\sqrt{-ABa_1^2}}{\sqrt{2}A} + \frac{b_1}{2} \right) - 2b_1 \left(-1 + \tanh \left[\frac{x-vt}{2} \right] \right)},
\end{aligned} \tag{4.4.19}$$

$$\begin{aligned}
u_8(x,t) &= \\
& \frac{-a_1 \left(2 + \frac{\sqrt{2}Ab_1}{\sqrt{-ABa_1^2}} \right) + \left(2a_1 - \frac{\sqrt{2}Aa_1b_1 \left(1 - \coth \left[\frac{x-vt}{2} \right] \right)}{\sqrt{-ABa_1^2}} \right) \left(-1 + \coth \left[\frac{x-vt}{2} \right] \right)}{4 \left(\frac{\sqrt{-ABa_1^2}}{\sqrt{2}A} + \frac{b_1}{2} \right) - 2b_1 \left(-1 + \coth \left[\frac{x-vt}{2} \right] \right)},
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

çözümleri elde edilir. Burada $A=(a+3(\gamma+\gamma k))$, $B=(b-k\lambda-3\lambda-2\mu)$ dir. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.19) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4.4. Perturbe edilmiş RKL denkleminin GKM ile elde edilen (4.4.19) tam çözümünün $a=1, a_1=2, k=2, v=1, \gamma=1, \lambda=3, \mu=1, b=1, b_1=-2, -15 < x < 15$ ile $-5 < t < 5, t=1$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

4.5 (2+1)-Boyutlu Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa (DJKM) Denklemi ve Uygulaması

(2+1)-boyutlu DJKM denklemi Kadomtsev-Petviashvili hiyerarşisinin integral uzantısı olarak yazılır ve

$$u_{xxxxy} + 4u_{xxy}u_x + 2u_{xxx}u_y + 6u_{xy}u_{xx} + u_{yyy} - 2u_{xxt} = 0, \quad (4.5.1)$$

şeklinde verilmektedir (Yuan et al. 2017; Pu and Hu 2019; Ismael et al. 2020). (4.5.1) ile verilen (2+1)-boyutlu DJKM denkleminde GKM'yi uygulamak için ilk olarak aşağıdaki dönüşüm göz önüne alınır.

$$u(x, y, t) = u(\eta), \eta = n(x + y - kt). \quad (4.5.2)$$

(4.5.2) ile verilen dönüşüm (4.5.1) denklemi üzerinde uygulanırsa,

$$an^2u''' + 3an(u')^2 + (a^3 + 2k)u' = 0, \quad (4.5.3)$$

denklemi elde edilir. Elde edilen (4.5.3) denklemi üzerinde aşağıda verilen

$$u' = g, \quad (4.5.4)$$

dönüşümünü uygulayarak

$$an^2g'' + 3ang'^2 + (a^3 + 2k)g = 0, \quad (4.5.5)$$

elde edilir. Böylece (4.5.1) denklemi (4.5.5) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde indirgenir. (3.2.4) ve (3.2.7) eşitlikleri (4.5.5) denkleminde yerine yazılarak dengeleme prensibi uygulanırsa

$$N - M + 2 = 2N - 2M \Rightarrow N = M + 2, \quad (4.5.6)$$

olduğu görülür. Burada $M = 1$ için $N = 3$ olduğundan,

$$u(\eta) = \frac{a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3}{b_0 + b_1Q}, \quad (4.5.7)$$

$$u'(\eta) = (Q^2 - Q) \left[\frac{(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3)}{(b_0 + b_1Q)^2} \right], \quad (4.5.8)$$

$$\begin{aligned} u''(\eta) &= \frac{Q^2 - Q}{(b_0 + b_1Q)^2} (2Q - 1) \left[(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2)(b_0 + b_1Q) - b_1(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3) \right] \\ &+ \frac{(Q^2 - Q)^2}{(b_0 + b_1Q)^3} \left[(b_0 + b_1Q)^2 (2a_2 + 6a_3Q) - 2b_1(b_0 + b_1Q)(a_1 + 2a_2Q + 3a_3Q^2) + 2b_1^2(a_0 + a_1Q + a_2Q^2 + a_3Q^3) \right], \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

bulunur. (4.5.1) ile verilen (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Durum 1:

$$a_0 = -\frac{nb_0}{6}, a_1 = nb_0 - \frac{nb_1}{6}, a_2 = n(-b_0 + b_1), a_3 = -nb_1,$$

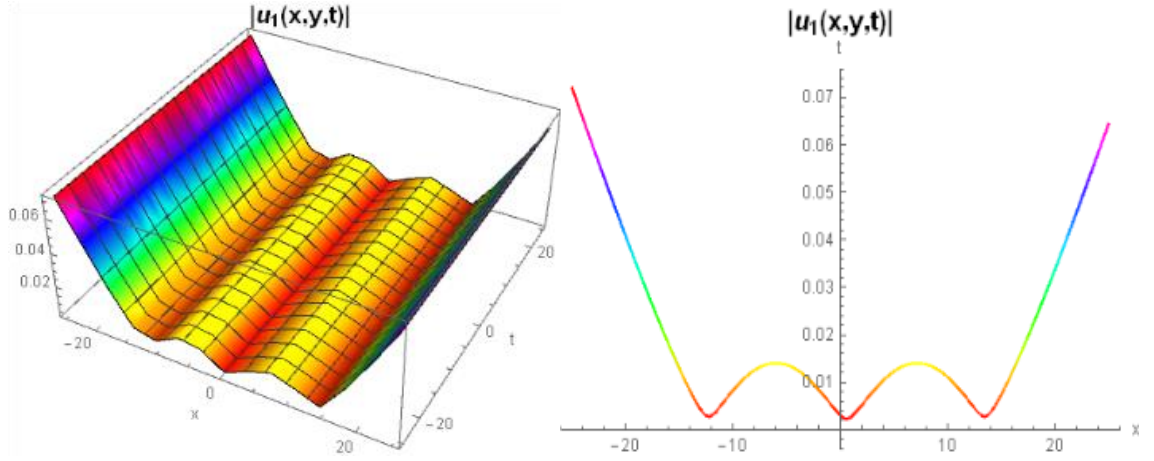
$$a = \frac{3^{1/3}n^2 + (-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{2/3}}{3^{2/3}(-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{1/3}}. \quad (4.5.10)$$

(4.5.10) eşitlikleri (4.5.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(x, y, t) = \frac{1}{12}n \left(-2 \left(nx - nkt + ny \frac{3^{1/3}n^2 + (-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{2/3}}{3^{2/3}(-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{1/3}} \right) + 6 \tanh \left[\frac{1}{2} \left(nx - nkt + ny \frac{3^{1/3}n^2 + (-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{2/3}}{3^{2/3}(-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{1/3}} \right) \right] \right), \quad (4.5.11)$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{12}n \left(-2 \left(nx - nkt + ny \frac{3^{1/3}n^2 + (-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{2/3}}{3^{2/3}(-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{1/3}} \right) + 6 \coth \left[\frac{1}{2} \left(nx - nkt + ny \frac{3^{1/3}n^2 + (-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{2/3}}{3^{2/3}(-9k + \sqrt{81k^2 - 3n^6})^{1/3}} \right) \right] \right), \quad (4.5.12)$$

çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu BK denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.11) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.5.1. (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.11) tam çözümünün $n = 0.2, a = 4, y = 0.5, k = 2, -25 < x < 25$ ile $-25 < t < 25, t = 0.5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 2:

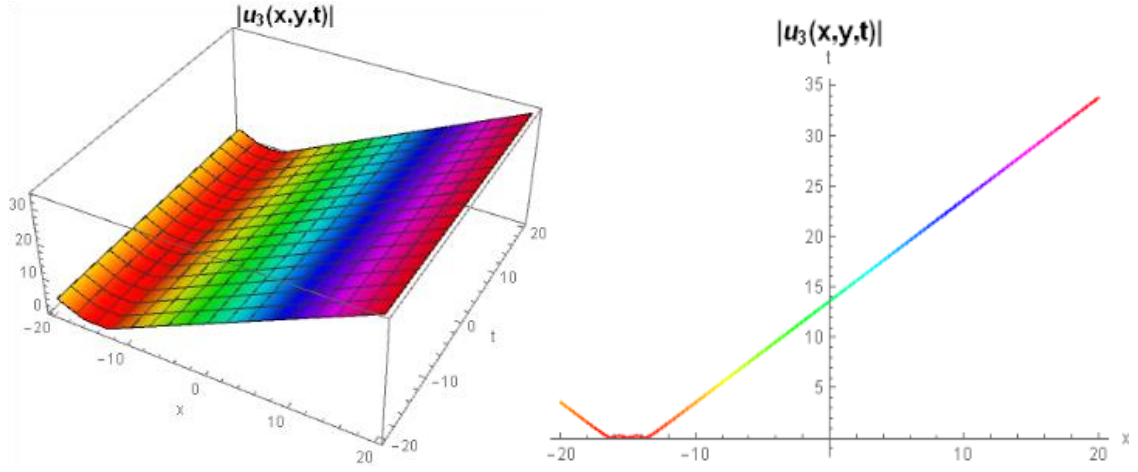
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{a^3 + 2kb_0}}{6\sqrt{a}}, a_1 = \frac{\sqrt{a^3 + 2k}(-6b_0 + b_1)}{6\sqrt{a}}, a_2 = \frac{\sqrt{a^3 + 2k}(b_0 - b_1)}{\sqrt{a}}, \\ a_3 &= \frac{\sqrt{a^3 + 2kb_1}}{\sqrt{a}}, n = -\frac{\sqrt{a^3 + 2k}}{\sqrt{a}}. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

(4.5.13) eşitlikleri (4.5.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_3(x, y, t) = \frac{\sqrt{a^3 + 2k} \left((nx + nay - nkt) - 3 \tanh \left[\frac{(nx + nay - nkt)}{2} \right] \right)}{6\sqrt{a}}, \quad (4.5.14)$$

$$u_4(x, y, t) = \frac{\sqrt{a^3 + 2k} \left((nx + nay - nkt) - 3 \coth \left[\frac{(nx + nay - nkt)}{2} \right] \right)}{6\sqrt{a}}, \quad (4.5.15)$$

çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.14) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.5.2. (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.14) tam çözümünün $a = 3, k = 0.2, n = 2, y = 5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 0.02$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 3:

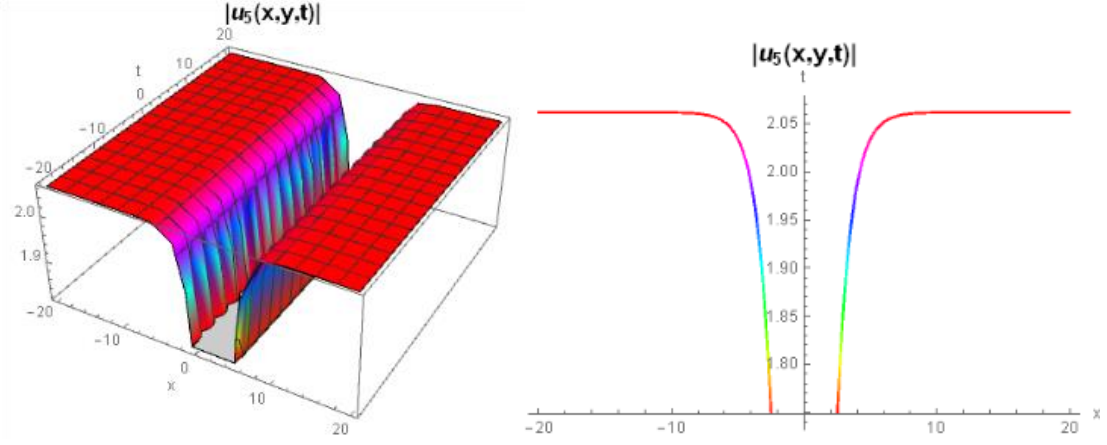
$$\begin{aligned} a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -\frac{i\sqrt{a^3 + 2kb_1}}{\sqrt{a}}, \\ a_3 = \frac{i\sqrt{a^3 + 2kb_1}}{\sqrt{a}}, b_0 = 0, n = -\frac{i\sqrt{a^3 + 2k}}{\sqrt{a}}. \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

(4.5.16) eşitlikleri (4.5.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_5(x, y, t) = -\frac{i\sqrt{a^3 + 2k} \tanh\left[\frac{nx + nay - nkt}{2}\right]}{2\sqrt{a}}, \quad (4.5.17)$$

$$u_6(x, y, t) = -\frac{i\sqrt{a^3 + 2k} \coth\left[\frac{nx + nay - nkt}{2}\right]}{2\sqrt{a}}, \quad (4.5.18)$$

çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.17) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.5.3. (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.17) tam çözümünün $a = 4, k = 2, y = 0.5, -20 < x < 20$ ile $-20 < t < 20, t = 1$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

Durum 4:

$$a_0 = -\frac{\sqrt{a^3 + 2kb_0}}{6\sqrt{a}}, a_1 = \frac{1}{6} \left(-a_2 + \frac{5\sqrt{a^3 + 2kb_0}}{\sqrt{a}} \right), a_3 = -a_2 - \frac{\sqrt{a^3 + 2kb_0}}{\sqrt{a}}, \quad (4.5.19)$$

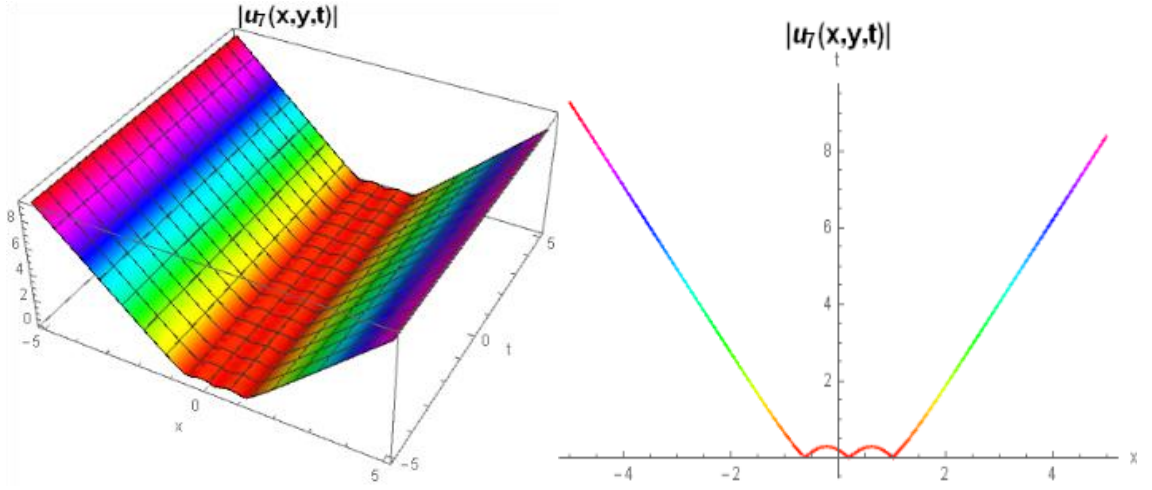
$$b_1 = \frac{\sqrt{aa_2}}{\sqrt{a^3 + 2k}} + b_0, n = \frac{\sqrt{a^3 + 2k}}{\sqrt{a}}.$$

(4.5.19) eşitlikleri (4.5.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_7(x, y, t) = \frac{1}{6} i \sqrt{17} \left(\frac{\sqrt{a^3 + 2k}(x + ay - kt)}{\sqrt{a}} - 3 \tanh \left[\frac{\sqrt{a^3 + 2k}(x + ay - kt)}{2\sqrt{a}} \right] \right), \quad (4.5.20)$$

$$u_8(x, y, t) = \frac{1}{6} i \sqrt{17} \left(\frac{\sqrt{a^3 + 2k}(x + ay - kt)}{\sqrt{a}} - 3 \coth \left[\frac{\sqrt{a^3 + 2k}(x + ay - kt)}{2\sqrt{a}} \right] \right), \quad (4.5.21)$$

çözümleri elde edilir. (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.20) tam çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.5.4. (2+1)-boyutlu DJKM denkleminin GKM ile elde edilen (4.5.20) tam çözümünün $a = 0.1, k = 0.5, y = 8, -5 < x < 5$ ile $-5 < t < 5, t = 2$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Nikolay A. Kudryashov tarafından literatüre sunulmuş olan Kudryashov metodunun geliştirilmiş bir hali olan GKM ele alınmıştır. İlk olarak bu metodun genel yapısı verilmiş ve GKM kullanılarak gergin dalga denklemi, (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sistemi, (2+1)-boyutlu Bogoyavlensky-Konopelchenko (BK) denklemi, perturbe edilmiş Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan (RKL) denklemi ve (2+1)-boyutlu Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa (DJKM) denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir. Ele alınan bu denklemlerde ilk olarak hareketli dalga dönüşümleri kullanılarak ele alınan denklemler lineer olmayan adi diferansiyel denklem formuna indirgenmiştir. Elde edilen bu denklem Mathematica 12 programı kullanılarak bir cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş ve bu cebirsel denklem sistemlerinin aynı program yoluyla çözülmesi sonucunda söz konusu denklemlerin tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca ele alınan bu denklemlerin bulunan çözümlerinin belli değerleri için hem iki boyutlu hem de üç boyutlu grafikleri Mathematica 12 programı kullanılarak çizilmiştir. Böylece lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için kullanılan GKM kullanışlı ve kesin sonuç veren bir yöntemdir. Ayrıca GKM'nin lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin soliton ve hiperbolik çözümlerini bulmak için kullanılan etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

GKM'nin (2+1)-boyutlu DJKM denklemine uygulanmasında elde edilen çözümler Pu and Hu (2019) tarafından verilen (24) çözümü ile benzerdir. Gergin dalga denklemi, (2+1)-boyutlu enerji tüketen uzun dalga sistemi, (2+1)-boyutlu Bogoyavlensky-Konopelchenko (BK) denklemi ve perturbe edilmiş Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan (RKL) denklemlerinin çözümlerinde elde edilen sonuçlara ise yapılan literatür taramalarında rastlanılmamış olup, bulunan çözümlerin yeni oldukları görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Ahmad, H., Seadawy, A.R., Khan, T.A. and Thounthong, P. 2020. Analytic approximate solutions for some nonlinear Parabolic dynamical wave equations. *Journal of Taibah University for Science*, 14(1), 346–358.
- Aksoy, Y., Özkan, E.M. 2011. *Diferansiyel Denklemler*. Yıldız Teknik Üniversitesi yayınevi, 226, İstanbul.
- Arshad, M., Seadawy, A.R., and Lu, D. 2019. Study of bright–dark solitons of strain wave equation in micro-structured solids and its applications. *Modern Physics Letters B*, 33(33), 1–12.
- Arshed, S. 2020. New soliton solutions to the perturbed nonlinear Schrödinger equation by $\exp(-\Phi(\xi))$ -expansion method. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 220(165123), 1-12.
- Aslan, İ. 2007. Liner olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin benzerlik çözümleri üzerine. *Doktora Tezi*, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 123, İzmir.
- Ayati, Z., Hosseini, K., and Mirzazadeh, M. 2017. Application of Kudryashov and functional variable methods to the strain wave equation in microstructured solids. *Nonlinear Engineering*, 6(1), 25–29.
- Biswas, A., Yildirim, Y., Yasar, E., Mahmood, M.F., Alshomrani, A.S., Zhou, Qin., Moshokoa, S.P. and Belic, M. 2018. Optical soliton perturbation for Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation with a couple of integration schemes. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 163, 126-136.
- Biswas, A. 2018. Optical soliton perturbation with Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation by traveling wave hypothesis. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 171, 217-220.
- Chang, L., Liu, H. and Xin, X. 2020. Lie symmetry analysis, bifurcations and exact solutions for the (2+1)-dimensional dissipative long wave system. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 64, 807-823.
- Dusunceli, F., Celik, E., Askin, M. and Bulut, H. 2021. New exact solutions for the doubly dispersive equation using the improved Bernoulli sub-equation function method. *Indian Journal of Physics*, 95(2), 309-314.
- Ege, S.M. and Misirli, E. 2014. The modified Kudryashov method for solving some fractional-order nonlinear equations. *Advances in Difference Equations*, 135(2014) 1-13.
- Gao, W., Silambarasan, R., Baskonus, H.M., Anand, R.V. and Rezazadeh, H. 2020. Periodic waves of the non dissipative double dispersive micro strain wave in the

- micro structured solids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 545(123772), 1-30.
- Ghanbari, B. and Gomez-Aguilar, J.F. 2019. Optical soliton solutions for the nonlinear Radhakrishnan–Kundu–Lakshmanan equation. *Modern Physics Letters B*, 33(32) 1-15.
- Gurefe, Y. 2020. The generalized Kudryashov method for the nonlinear fractional partial differential equations with the beta-derivative. *Revista Mexicana de Fisica*, 66(6), 771-781.
- Hirota, R. 2004. *The Direct Method In Soliton Theory*. Cambridge University press, 200, Cambridge.
- Hosseini K. and Ayati, Z. 2016. Exact solutions of space-time fractional EW and modified EW equations using Kudryashov method. *Nonlinear Sci. Lett. A*, 7(2), 58-66.
- Hosseini K. Mayeli P. and Ansari, R. 2017. Modified Kudryashov method for solving the conformable time-fractional Klein–Gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 130, 737-742.
- Hubert, M.B., Betchewe, G., Doka, S.Y. and Crepin, K.T. 2014. Soliton wave solutions for the nonlinear transmission line using the Kudryashov method and the (G'/G) -expansion method. *Applied Mathematics and Computation*, 239(1), 299-309.
- Irshad, A., Ahmed, N., Nazir, A., Khan, U. and Mohyud-Din, S.T. 2020. Novel exact double periodic Soliton solutions to strain wave equation in micro structured solids. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 550(124077), 1-15.
- Ismael, H.F., Bulut, H., Park, C. And Osman, M.S. 2020. M-lump, N-soliton solutions, and the collision phenomena for the $(2 + 1)$ -dimensional Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa equation. *Results in Physics*, 19(103329), 1-6.
- Kudryashov, N.A. 1988. Exact soliton solutions of the generalized evolution equation of wave dynamics, *Journal Applied Mathematic and Mechanic*, 52(3), 361–365.
- Kudryashov, N.A., 1991. On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions, *Physics Letters A* 155(4-5), 269–275.
- Kudryashov, N.A. 2012. One method for finding exact solutions of non-linear differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6), 2248–2253.
- Kumar, S., Kumar, A. and Wazwaz, A.M. 2020. New exact solitary wave solutions of the strain wave equation in microstructured solids via the generalized exponential rational function method, *The European Physical Journal Plus* 135(870), 1–17.
- Mahak, N. and Akram, G. 2020. The modified auxiliary equation method to investigate solutions of the perturbed nonlinear Schrödinger equation with Kerr law

- nonlinearity. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 207(164467), 1-6.
- Nuruddeen, R.I. and Nass, A.M. 2018. Exact solitary wave solution for the fractional and classical GEW-Burgers equations: an application of Kudryashov method. Journal of Taibah University for Science, 12(3), 309-314.
- Pu, J.C. and Hu, H.C. 2019. Exact solitary wave solutions for two nonlinear systems. Indian Journal of Physics, 93(2), 229-234.
- Rahman, M., Habiba, U., Salam, M. and Datta, M. 2020. The Traveling Wave Solutions of Space-Time Fractional Partial Differential Equations by Modified Kudryashov Method. Journal of Applied Mathematics and Physics, 8(11), 2683-2690.
- Ray, S.S. 2018. Lie symmetry analysis and reduction for exact solution of $(2 + 1)$ -dimensional Bogoyavlensky–Konopelchenko equation by geometric approach. Modern Physics Letters B, 32(11), 1-9.
- Seadawy, A.R., Arshad, M. and Lu, D. 2020. Dispersive optical solitary wave solutions of strain wave equation in micro-structured solids and its applications. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 540(123122), 1-13.
- Soliman, A.A. 2008. The Modified Extended Direct Algebraic Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations. International Journal of Nonlinear Science, 6(2), 136-144.
- Tandogan, Y.A., Pandır Y. and Gurefe, Y. 2013. Solutions of the nonlinear differential equations by use of modified Kudryashov method. Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 1, 54-60.
- Taşbozan, O. and Kurt, A. 2020. The New Travelling Wave Solutions of Time Fractional Fitzhugh-Nagumo Equation with SineGordon Expansion Method. ADYU J SCI, 10(1), 256-263.
- Taşlıbeyaz, E. and Gülcü, A. 2013. Secondary School Students' Views on Computer Assisted Mathematics Instruction. Journal of Theoretical Educational Science, 6(3), 408-422.
- Tuluçe Demiray, S., Pandir Y. and Bulut, H. 2014. The investigation of exact solutions of nonlinear time-fractional Klein-Gordon equation by using generalized Kudryashov method. AIP Conference Proceedings, 1637(1), 283-289.
- Tuluçe Demiray, S., Pandir, Y. and Bulut, H. 2015. New solitary wave solutions of Maccari system. Ocean Engineering, 103, 153-159.
- Tuluçe Demiray, S. 2014. Lineer ve Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözüm yöntemleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Elazığ, 120, 2014.

- Tuluçe Demiray, S. 2020a. New solutions of Biswas-Arshed equation with beta time derivative. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 222(165405), 1-5.
- Tuluçe Demiray, S. 2020b. New Soliton Solutions of Optical Pulse Envelope $E(Z, \tau)$ with Beta Time Derivative. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 223(165453), 1-6.
- Tuluçe Demiray, S. and Bayrakci, U. 2021a. Soliton Solutions of Generalized Third-Order Nonlinear Schrödinger Equation by Using GKM. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 11(2), 1481-1488.
- Tuluçe Demiray, S. and Bayrakci, U. 2021b. Soliton solutions for space-time fractional Heisenberg ferromagnetic spin chain equation by generalized Kudryashov method and modified $\exp(-\Omega(\eta))$ -expansion function method. *Revista Mexicana de Física*, 67(3), 393-402.
- Upton, S. D. 2004. Students' solution strategies to differential equations problems in mathematical and nonmathematical contexts. Doctoral dissertation. Boston University, 135, Boston.
- Xiang-peng, X., Xi-qiang, L. and Lin-lin, Z. 2010. Explicit solutions of the Bogoyavlensky–Konoplechenko equation. *Applied Mathematics and Computation*, 215(10), 3669-3673.
- Xu, Tao., Li, H., Zhang, H., Li, M. and Lan, S. 2017. Darboux transformation and analytic solutions of the discrete PT-symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger equation. *Applied Mathematics Letters*, 63, 88-94.
- Yan, H. Tian, S.F., Feng, L.L. and Zhang, T.T. 2016. Quasi-periodic wave solutions, soliton solutions, and integrability to a (2+1)-dimensional generalized Bogoyavlensky-Konopelchenko equation. *Waves in Random and Complex Media*, 26(4), 1-14.
- Yang, J. and Feng, Q. 2021. The soliton solutions and evolution of the (2+1)-dimensional dissipative long wave equation. *Results in Physics*, 21(103974), 1-7.
- Yıldırım, Y. 2021. Optical solitons with Biswas–Arshed equation by F-expansion method. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 227(165788), 1-7.
- Yuan, Y.Q., Tian, B., Sun, W.R., Chai, J. and Liu, L. 2017. Wronskian and Grammian solutions for a (2+1)-dimensional Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 74(4), 873-879.
- Zhou, X.M., Tian, S.F., Zhang, L.D. and Zhang T.T. 2021. General high-order breather, lump, and semi-rational solutions to the (2+1)-dimensional generalized Bogoyavlensky–Konopelchenko equation. *Modern Physics Letters B*, 35(3), 1-12.