



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ LİSANS
ÖĞRENCİLERİNİN ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN
TÜREVİ KONUSUNDAKİ KAVRAM YANILGILARININ
İNCELENMESİ

BUSE GİZEM YİTMEZ

İzmir
2021

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ LİSANS
ÖĞRENCİLERİNİN ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN
TÜREVİ KONUSUNDAKİ KAVRAM YANILGILARININ
İNCELENMESİ

BUSE GİZEM YİTMEZ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Süha Yılmaz

İzmir
2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi” adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

26/07/2021

Busé Gizem YİTMEZ



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 27/07/2021

Tez Başlığı:

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 134 sayfalık kısmına ilişkin, 27/07/2021. tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezin **benzerlik oranı % 18'dir**.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz

Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☐

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☒

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça dâhil, ☒ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☐	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Buse Gizem Yılmaz
Öğrenci No : 2019950110
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans
Statüsü : Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐

ÖĞRENCİ

Buse Gizem Yılmaz

27.07.2021

DANIŞMAN

Prof. Dr. Süha Yılmaz

27.07.2021

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (□) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu* formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

İlk olarak, yüksek lisans çalışmalarım sürecinde her daim bana zaman ayıran, destekleyen, bu zor dönemde çalışmalarımı titizlikle inceleyen ve önerilerini sunan, akademik anlamda bana örnek teşkil eden çok değerli hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Süha YILMAZ'a sonsuz teşekkür ediyorum.

Lisans eğitim-öğretim hayatım boyunca yoluma ışık tutan ve bu yolda yürümemi her daim destek olan Sayın Doç. Dr. Şerife Koza ÇİFTÇİ KARADAĞ'ya, veri toplama araçlarımın geliştirilmesinde ve uygulanmasında yardımını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Şerife FAYDAOĞLU'na ve eğitim-öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği geçen tüm öğretmenlerime teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak hayatım boyunca her daim bana destek olan, başaracağıma dair inançlarını esirgemeyen, her zaman yanımda olan, yoğun dönemlerimde sevgileriyle beni rahatlatan sevgili annem Suzan YİTMEZ ve babam İsmail YİTMEZ'e çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Amaç ve Önem	2
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri.....	4
1.4. Sınırlılıklar	4
1.5. Varsayımlar.....	5
1.6. Tanımlar.....	5
BÖLÜM II.....	7
KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	7
2.1. Matematik Öğretimi.....	7
2.2. Kavram Yanılgıları	9
2.2.1. Kavram yanılgılarının türleri.....	12
2.2.2. Kavram yanılgılarının nedenleri	15
2.2.3. Kavram yanılgılarının giderilmesi	18
2.3. Analizin Tarihi ve Analiz Dersi.....	22
2.4. Çok Değişkenli Fonksiyonlar	25
2.5. Kısmi Türev	26
2.5.1. Kısmi türevin geometrik yorumu	27
2.5.2. İkinci mertebeden kısmi türev.....	28
2.6. Bileşik Fonksiyonların Türevleri	28
2.7. Yöne Göre Türev	30
2.8. Bu Yüzeyin Teğet Düzlemi ve Normalinin Denklemleri	31

2.9. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Maksimum ve Minimum.....	32
2.10. İlgili Araştırmalar.....	35
2.10.1. Yurt içinde yapılan araştırmalar	35
2.10.2. Yurt dışında yapılan araştırmalar	40
BÖLÜM III	43
YÖNTEM.....	43
3.1. Araştırmanın Deseni.....	43
3.2. Örneklem.....	44
3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları	45
3.4. Uygulama Süreci.....	47
3.5. Verilerin Analizi.....	47
3.6. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği.....	49
3.7. Araştırmacının Rolü	50
BÖLÜM IV	52
BULGULAR.....	52
4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular.....	52
4.2. İkinci Alt Probleme Ait Bulgular.....	65
4.3. Üçüncü Alt Probleme Ait Bulgular	75
4.4. Dördüncü Alt Probleme Ait Bulgular	83
BÖLÜM V	92
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	93
5.1. Tartışma.....	93
5.2. Sonuç ve Öneriler.....	100
5.2.1. Sonuç.....	100
5.2.2. Öneriler	103
KAYNAKÇA.....	105

EK 1. Öğrencinin Akademik Özgeçmişi.....	112
EK 2. Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarını Belirleme Testi.....	113
EK 3. Uygulama İzinleri	115



TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1 Öğretmen adaylarının 1. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	53
Tablo 2 Öğretmen adaylarının 2. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	55
Tablo 3 Öğretmen adaylarının 3. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	59
Tablo 4 Öğretmen adaylarının 4. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	61
Tablo 5 Öğretmen adaylarının 9. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	62
Tablo 6 Öğretmen adaylarının birinci alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	64
Tablo 7 Öğretmen adaylarının 5. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	65
Tablo 8 Öğretmen adaylarının 6. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	68
Tablo 9 Öğretmen adaylarının 7. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	69
Tablo 10 Öğretmen adaylarının 8. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	71
Tablo 11 Öğretmen adaylarının 16. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	72
Tablo 12 Öğretmen adaylarının ikinci alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	74
Tablo 13 Öğretmen adaylarının 10. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	75
Tablo 14 Öğretmen adaylarının 11. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	77
Tablo 15 Öğretmen adaylarının 12. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	78

Tablo 16 Öğretmen adaylarının 13. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	80
Tablo 17 Öğretmen adaylarının üçüncü alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	82
Tablo 18 Öğretmen adaylarının 14. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	83
Tablo 19 Öğretmen adaylarının 15. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	85
Tablo 20 Öğretmen adaylarının 17. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	87
Tablo 21 Öğretmen adaylarının 18. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	89
Tablo 22 Öğretmen adaylarının dördüncü alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu	91

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Kavram yanılgılarının oluşumuna neden olan engel türleri.....	15
Şekil 2. Bir dik üçgen modeli.....	20
Şekil 3. Bir $z = f(x, y)$ fonksiyonunun birinci mertebe kısmi türevlerinin grafiksel yorumu	28
Şekil 4. Bir bağımsız değişkenli ve iki ara değişkenli fonksiyon için zincir kuralı ...	29
Şekil 5. İki bağımsız değişkenli ve üç ara değişkenli fonksiyonun zincir kuralı	30
Şekil 6. $z = f(x, y)$ yüzeyinin P_0 noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusu ...	32
Şekil 7. Bir f fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremumlarının grafik üzerinde gösterimi (Thomas, 2010)	33
Şekil 8. $z = f(x, y)$ yüzeyinin orjiniinde bir eyer noktası.....	34
Şekil 9. ÖA42 kodlu öğretmen adayının 1. soruya verdiği cevap	53
Şekil 10. ÖA46 kodlu öğretmen adayının 1. soruya verdiği cevap	54
Şekil 11. ÖA39 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun a şıkkına verdiği cevap.....	56
Şekil 12. ÖA65 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun b şıkkına verdiği cevap.....	56
Şekil 13. ÖA70 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun c şıkkına verdiği cevap.....	57
Şekil 14. ÖA16 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun d şıkkına verdiği cevap.....	57
Şekil 15. ÖA49 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun e şıkkına verdiği cevap.....	58
Şekil 16. ÖA35 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun f şıkkına verdiği cevap	59
Şekil 17. ÖA8 kodlu öğretmen adayının 3. soruya verdiği cevap	60
Şekil 18. ÖA32 kodlu öğretmen adayının 4. soruya verdiği cevap	61
Şekil 19. ÖA35 kodlu öğretmen adayının 9. soruya verdiği cevap	63
Şekil 20. ÖA21 kodlu öğretmen adayının 5. soruya verdiği cevap	66
Şekil 21. ÖA81 kodlu öğretmen adayının 5. soruya verdiği cevap	67
Şekil 22. ÖA10 kodlu öğretmen adayının 6. soruya verdiği cevap	68
Şekil 23. ÖA43 kodlu öğretmen adayının 7. soruya verdiği cevap	70
Şekil 24. ÖA38 kodlu öğretmen adayının 8. soruya verdiği cevap	72
Şekil 25. ÖA50 kodlu öğretmen adayının 16. soruya verdiği cevap	73
Şekil 26. ÖA52 kodlu öğretmen adayının 10. soruya verdiği cevap	76
Şekil 27. ÖA53 kodlu öğretmen adayının 11. soruya verdiği cevap	77
Şekil 28. ÖA69 kodlu öğretmen adayının 12. soruya verdiği cevap	79

Şekil 29. ÖA58 kodlu öğretmen adayının 13. soruya verdiği cevap	81
Şekil 30. ÖA38 kodlu öğretmen adayının 14. soruya verdiği cevap	84
Şekil 31. ÖA62 kodlu öğretmen adayının 15. soruya verdiği cevap	86
Şekil 32. ÖA58 kodlu öğretmen adayının 17. soruya verdiği cevap	87
Şekil 33. ÖA48 kodlu öğretmen adayının 17. soruya verdiği cevap	88
Şekil 34. ÖA75 kodlu öğretmen adayının 18. soruya verdiği cevap	90



ÖZET

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ LİSANS ÖĞRENCİLERİNİN ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN TÜREVİ KONUSUNDAKİ KAVRAM YANILGILARININ İNCELENMESİ

Bir fonksiyonun birden fazla bağımsız değişkeni varsa bu tür fonksiyonlara çok değişkenli fonksiyon denmektedir. Çok değişkenli fonksiyonlar günlük yaşamın her alanında kullanılmaktadır. Örneğin bir kırtasiyede satılan ürünlerin her birinden elde edilen gelir (kitap satımından elde edilen gelir x , defter satımından elde edilen gelir y , fotokopi basımından elde edilen gelir z vb.) ayrı ayrı bağımsız değişkenleri, toplam elde edilen gelir bağımlı değişkeni, toplam gelir fonksiyonu da çok değişkenli fonksiyonu ifade etmektedir. Günlük yaşamla yakından ilişkili bu kavramın uygulamada kullanılabilmesi için çok değişkenli fonksiyonlarda türev kavramının öğrenilmesi gerekmektedir. Fakat bu kavramlara dair oluşabilecek kavram yanlışları, anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesini olumsuz yönde etkilemektedir. Dolayısıyla öğrenimde karşılaşılabilecek olumsuzlukların önlenmesi adına bu konudaki kavram yanlışlarının belirlenmesi büyük önem taşımaktadır. Bu araştırmada ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda matematik öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer tanım ve kavramlara, kısmi türev ile yöne göre türev kavramına ve çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamalarına ilişkin sahip oldukları kavram yanlışları incelenmiştir.

Araştırma nicel araştırma desenlerinden kesitsel tarama araştırması üzerine temellendirilmiştir. Çalışmada evrenden seçilen örneklem, olasılığa dayalı olmayan örnekleme yöntemlerinden uygun örnekleme yoluyla seçilmiştir. Çalışma 2020-2021 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim görmekte olan 81 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Araştırmada araştırmacı tarafından geliştirilen ve 18 adet açık uçlu sorudan oluşan “Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanlışlarını Belirleme Testi” adlı veri toplama aracı kullanılmıştır. Kullanılan testte yer alan sorular, öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki bilgilerini ölçmekten çok, bu konuda yer alan kavramlara ilişkin yanlışlarını ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır. Araştırmada örneklemden toplanan veriler ilk olarak betimsel analize, sonrasında çıkarımsal analize tabii tutularak, IBM SPSS Statistics 23.0 paket programı ile analiz edilmiştir.

Araştırmanın sonucunda, öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiş ve bu durumun olası nedenleri incelenmiştir. Ayrıca araştırmada öğrencilerin doğru sonuca ulaşmasına neden olan kavram yanlışlarına vurgu yapılmıştır. Bu doğrultuda öğretmen adaylarının %40,7'sinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin, %45,7'sinin kısmi türev kavramına ilişkin, %29,6'sının yöne göre türev kavramına ilişkin ve %19,8'inin çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamalarına ilişkin kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Çalışmada birçok öğretmen adayının kısmi türev ve yöne göre türev kavram tanımını, sezgisel olarak tanımladığı görülmüş ve alan dilindeki eksiklikleri dikkat çekmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının belirli bir soruya ilişkin kavrayışlarını, karşılaşılan benzer sorularda da uygulamaya çalıştığı bulgusuna ulaşılmıştır. Bazı öğretmen adaylarının ise ön bilgilerindeki bilgi eksikliklerinin ya da kavram yanlışlarının, yeni kavram yanlışlarının oluşumuna sebebiyet verdiği görülmüştür.

Araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının kavram yanlışlarının nedeninin, çok değişkenli fonksiyonlarda türev konusunun içeriğinde birçok soyut kavramı barındırmasından, öğrencilerin yeni öğrenme durumlarında ön bilgilerindeki bilgi eksikliğinden veya kavram yanlışlarından, öğretim aşamasında öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlarını ortaya çıkaracak sorulara yer verilmemesinden ve matematiksel dil kullanımına özen gösterilmemesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Analiz III, kavram yanlışları, kısmi türev, yöne göre türev, çok değişkenli fonksiyon.

ABSTRACT

AN INVESTIGATION INTO MISCONCEPTIONS OF PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS PRE-SERVICE TEACHERS' ON THE DERIVATIVE OF MULTI VARIABLE FUNCTIONS SUBJECT

If a function has more than one variable, this type of function is called a multivariate function. Multivariate functions are used in all areas of life. For example, the income from each of the products sold in a stationery (revenue from book sales x , income from book sales y , income from photocopy printing z , etc.) individual independent variable, the total revenue dependent variable, refer to multivariate function in the total revenue function. In order for this concept, which is closely related to daily life, to be used in implementation, the concept of derivatives must be learned in multivariate functions. However, the misconceptions that may occur about these concepts negatively affect the realization of meaningful learning. It is of great importance to identify the misconceptions about this subject in order to prevent the negativity that may be encountered in learning. In this research, it is aimed to determine the misconceptions of elementary mathematics teaching undergraduate students about the derivative of multivariate functions. For this purpose, the misconceptions of mathematics preservice teachers regarding some definitions and concepts about derivative of multivariate functions, the concept of derivatives by partial derivative and directional derivative and the geometric applications of derivatives in multivariate functions were examined.

The research is based on cross-sectional survey designs from quantitative research patterns. In the study, the sample selected from the population was selected from nonprobability sampling methods through convenience sampling. The study was carried out with 81 preservice teachers who were studying in the Department of Elementary Mathematics Teaching in the spring semester of the 2020-2021 academic years.

In the research, a data collection tool called "Test for Determining the Misconceptions about the Derivative of Multivariate Functions" was used, consisting of 18 open-ended questions developed by the researcher. The questions in the test used are aimed at exposing the misconceptions of preservice teachers regarding the concepts involved in this subject, rather than measuring their knowledge of the derivative of multivariate functions. The data collected from the sample in the study were first analyzed by descriptive analysis, then inferential analysis and analyzed with the IBM SPSS Statistics 23.0 package program.

As a result of the research, it was determined that preservice teachers had various misconceptions about the derivative of multivariate functions and the possible causes of this situation were examined. Also, the research emphasized the misconceptions that cause students to reach the correct conclusion. Accordingly, it was determined that 40.7% of preservice teachers had misconceptions regarding definitions and concepts related to derivatives of multivariate functions, 45.7% related to partial derivative concept, 29.6% related to directional derivative concept and 19.8% had misconceptions regarding the geometric applications of derivatives in multivariate functions. It was seen that many preservice teachers defined the concept definition of derivative by partial derivative and directional derivative as intuitive and noted their deficiencies in the field language. Moreover, it was found that the preservice teachers tried to apply their conception of a particular question in similar questions encountered. It has been observed that the lack of knowledge or misconceptions in the preliminary knowledge of some preservice teachers leads to the formation of new misconceptions.

It is thought by the researcher that the reason for the misconceptions of preservice teachers is that they contain many abstract concepts in the content of derivatives in multivariate functions, lack of knowledge or misconceptions in the preliminary knowledge of students in new learning situations, questions that will reveal the misconceptions of the students during the teaching phase and the use of mathematical language are not taken care of. Finally, some recommendations have been made in line with the results obtained.

Keywords: Analysis III, misconceptions, partial derivative, directional derivative, multivariate function.

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Ülkemizdeki matematik öğretim programları, öğrenciyi merkeze alan ve kavramsal öğrenmeye odaklanan yapılandırmacı yaklaşıma dayanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018). Kavramsal öğrenme, yeni öğrenilen kavram ile öğrencinin sahip olduğu eski bilgilerinin ilişkilendirilerek, kavramın tam olarak anlaşılmasını gerektirir. Matematik öğretiminde kavramsal öğrenmenin gerçekleşebilmesi için matematiksel kavramlar önemli bir yere sahiptir. Kavram, birden fazla nesne ya da yaşantıyı belirten veya bunlar arasındaki ilişkiyi anlatan genel ya da soyut düşünce olarak tanımlanmakta olup, genelde bir sözcük, simge ya da işaret aracılığı ile belirtilmektedir (Pesen, 2008). Matematik, soyut kavramlardan oluşmaktadır. Fakat matematiği meslek olarak seçecek olan üniversite öğrencileri de dahil olmak üzere toplumun her kesimi, soyut kavramlardan oluşan matematiğin anlaşılmasının zor olduğunu düşünmektedir (Moralı, Köroğlu, ve Çelik, 2004). Matematiğin alt alanlarından biri olan Analiz dersi de içeriğinde birçok soyut kavramı barındırdığı için öğrencilerin zorluk çektiği derslerin başında gelmektedir.

Ubuz'a göre ileri düzey matematiğin başlangıç noktası olarak kabul edilen Analiz kavramları, matematik, fen bilimleri ve mühendislik alanlarında çok önemli bir yere sahiptir (aktaran Gökçek ve Açıkyıldız, 2016). Ayrıca matematiğin yığılmalı bir disiplin olmasından dolayı öğrenilen her yeni bilgi, bir sonraki kavram ya da kavramları etkilemektedir. Örneğin fonksiyon kavramı öğrenilmeden limit, limit kavramı öğrenilmeden türev, türev kavramı öğrenilmeden integral kavramını öğrenmek mümkün değildir. Dolayısıyla ileri düzey matematik konuları için temel teşkil eden Analiz kavramlarının öğrenimi sonraki konular için basamak oluşturacağından, kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi son derece önemlidir.

Bir kavramı öğrenmede öğrencilerin karşılaştıkları zorluklar, bu konuyla bağlantılı diğer kavramların öğrenimini zorlaştırmaktadır. Bu yüzden bir kavram öğretilmeden önce, o kavramın ön bilgisi olan kavramların da öğretilmesi gerekmektedir. Eğer ki zihinde yapılandırılan bir kavram eksik ya da yanlış öğrenilmiş ise yanlış öğrenilen bu kavramın öğrenciler tarafından değiştirilmesi hem zor olacaktır hem de kavramla ilişkili diğer öğrenme durumlarını da olumsuz etkileyecektir. Eksik ya da yanlış öğrenilen her kavram, düzeltilmediği takdirde öğrencilerde kavram kargaşası ya da kavram yanlışlığı oluşumuna sebep olmaktadır. Zembat (2015a) kavram yanlışlığını, basit bir hata olmaktan ziyade öğrencileri sistematik hatalar yapmaya teşvik eden algı biçimi olarak tanımlamaktadır.

Kavramsal öğrenmenin önündeki en büyük engellerden biri kavram yanlışlarıdır (Yenilmez ve Yaşa, 2008). Dolayısıyla eğitimin kalitesi açısından var olan yanlışların ortadan kaldırılması gerekir. Bu anlamda öğrencinin yaptığı hatayı anlayabilmek ve var olan kavram yanlışlarına çözüm üretebilmek için ilk basamak öğrencileri sistematik hata yapmaya zorlayan kavram yanlışlarının belirlenmesidir.

Yapılandırmacı öğretim, öğrenci merkezli ve kavramsal öğrenmenin sağlanması ile mümkün olabileceğinden son yıllarda matematiksel kavram yanlışları üzerine birçok çalışma yapılmıştır ve halen yapılmaktadır (Mutlu ve Söylemez, 2018). Fakat bu araştırmaların büyük çoğunluğunun ilköğretim ya da ortaöğretim seviyelerinde yoğunlaştığı, lisans düzeyinde yapılan çalışmaların ise lisans matematik derslerine ilişkin olanlarının sayısının oldukça az olduğu tespit edilmiştir (Mutlu ve Söylemez, 2018).

Lisans düzeyi matematik derslerine ilişkin öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışları çalışmaları incelendiğinde, öğretim programında Analiz III dersi içerisinde yer alan ve öğrencilerin çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğu düşünülen, çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarına ilişkin bir çalışmanın bulunmadığı görülmüştür. Bu yüzden araştırmanın cevabını aradığı en genel problem öğrencilerin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan kavramlara ilişkin kavram yanlışlarına sahip olup olmadığı olarak belirlenmiştir. Matematik öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda sahip oldukları kavram yanlışlarının belirlenmesi, şüphesiz gelecek yıllarda bu konuda uygulanacak olan öğretilere yön vereceği düşünülmektedir.

1.2. Amaç ve Önem

Matematik eğitime verilen önem, teknolojinin gelişmesiyle ve eğitim bilimlerinde yaşanan gelişmelerle birlikte gün geçtikçe artmaktadır. Yaşanan bu gelişmeler matematik öğretiminin ve öğreniminin doğru olmasını zorunlu kılmıştır. Bu nedenle son yıllarda matematik eğitimi ve öğretimi alanındaki çalışmaların sayısında oldukça artış görülmektedir.

Matematiği, ortaya çıkışından bugüne kadar, tuğlaları sistematik ve özenli bir şekilde üst üste konularak inşa edilmiş, çok katlı ve her bir katı birbiriyle yakından ilişkili bir yapıya benzetebiliriz (Biber, 2018). Çok değişkenli fonksiyonlarda türev konusu da ekonomi, tıp, modelleme, mimarlık, istatistik, enerji ve mühendisliğin birçok alanında kullanılan ve birçok konuya basamak oluşturan, Analiz III dersi konularının başında yer almaktadır. Buradan anlaşılacağı üzere çok değişkenli fonksiyonların türevi içeriğinde birçok kavramı barındırmakta ve birçok alana temel oluşturmaktadır. Fakat içeriğinde soyut kavramlar bulundurmasından ve doğasında var olan karmaşıklıktan dolayı öğrencilerin güçlük çektiği konuların başında gelmektedir. Çok değişkenli fonksiyonlarda türev kavramının birçok alana

temel oluşturması, Analiz III dersi öğretiminin en etkili şekilde gerçekleşmesini gerekli kılmaktadır. Bu da ancak öğrenci merkezli, kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenerek anlamlı öğrenmelerin gerçekleştiği yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı ile mümkündür.

Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı, bir yandan öğrencilerin bilgiyi sorgulama, yorumlama ve analiz etme becerilerine sahip olması diğer yandan ise öğrencilerin ön bilgilerini kullanarak yeni bilgi üretmede bir sonuca varma yaklaşımıdır (Bukova, 2006). Cornu'ya (2002) göre öğrenciler bir kavramı öğrenmeden önce, o kavrama ait konuşma dili gibi günlük deneyimlerden gelen belirli fikir, sezgi, imge ve bilgilere sahip olarak sınıfa gelirler. Yani öğrenciler sınıfa geldiklerinde, yeni kavramı öğrenmeden önce o kavrama ait birçok ön bilgiye sahiptirler. Eğer ki öğrencilerin sahip olduğu ön bilgilerde eksiklik, yanlışlık ya da kavram yanlışları varsa kazandırılması istenen yeni kavramlar ile öğrencilerin zihnindeki ön bilgileri çatışmaktadır. Bu durum öğrencilerin yeni öğrenmelerini engellemekle birlikte yeni kavram yanlışlarının oluşumuna da neden olmaktadır. Örneğin öğrencinin çok değişkenli fonksiyonlarda türev kavramını tam olarak öğrenmeden, konu ile bağlantılı katlı integral kavramını zihninde oluşturması, öğrenmesi ve bu kavramlara hakim olması çok zor hatta mümkün değildir.

Etkili bir öğretimin gerçekleşmesi ve öğrencilerin güçlü matematik becerilerine sahip olması için kavram yanlışlarının üstesinden gelinmesi gerekmektedir. Fakat Hammer (1996)'a göre kavram yanlışlarının çoğu geleneksel metotlarla ortadan kaldırılamayacak kadar ısrarcıdırlar. Dolayısıyla var olan kavram yanlışlarının giderilmesi hiç de kolay değildir. Kavram yanlışlarının ortadan kaldırılması için öğrencilerin mevcut bilgilerini yeniden yapılandırmaları gerekmektedir. Bunun için öğrenciler hâlihazırda var olan kavram yanlışları üzerinde uğraştırılmalı, sistemli düşünmeleri ve soyutlama yapmaları sağlanarak, yanlışlar öğretimde avantaja dönüştürülmelidir (Zemba, 2015a). Fakat kavram yanlışlarını ortadan kaldırabilmenin ilk basamağı, öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlarını tespit etmektir. Çünkü ancak o zaman öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışları dikkate alınarak bir öğretim planı hazırlanabilir ve kavram yanlışlarının önüne geçilebilir. Sonuç olarak öğrencilerin matematikte herhangi bir kavram özel olarak da çok değişkenli fonksiyonlarda türev kavramı ile alakalı kavram yanlışlarını tespit etmek, öğretmenlerin olası yanlışları dikkate alarak öğretim plan ve programlarını hazırlaması açısından oldukça önemlidir. Ayrıca geleceğin öğretmenleri olacak matematik öğretmen adaylarının kavram yanlışlarının belirlenerek önüne geçilmesi, gelecekte yapacak oldukları öğretimleri doğrudan etkileyecek ve alanında uzman matematik öğretmenlerinin yetiştirilmesine olanak sağlayacaktır.

Bu bağlamda araştırma, İlköğretim Matematik Öğretmenliği lisans öğrencilerinin, çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarını belirlemeyi amaçlamaktadır. Araştırma sonuçlarının, gelecek yıllarda öğretim plan ve programlarının hazırlanmasında, belirlenen kavram yanlışlarını engelleyecek ya da ortadan kaldıracak şekilde ışık tutacağı ve matematik öğretmenlerinin alanında iyi yetiştirilmesine katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Araştırmanın problem cümlesi “İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programında yer alan Analiz III dersine giren 2. sınıf öğrencilerinin, çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarına ilişkin durumları nelerdir? ” olarak belirlenmiştir.

Bu çalışmanın alt problemleri:

1. İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencileri, çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki (kısmi türev, yöne göre türev) tanım ve kavramlara ilişkin kavram yanlışlarına sahip midir?
2. İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencileri, kısmi türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarına sahip midir?
3. İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencileri, yöne göre türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarına sahip midir?
4. İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencileri, çok değişkenli fonksiyonlarda türevin (kısmi türev, yöne göre türev) geometrik uygulamaları konusuna ilişkin kavram yanlışlarına sahip midir?

1.4. Sınırlılıklar

1. Araştırma 2020-2021 eğitim-öğretim yılı bahar dönemi, İzmir ili Dokuz Eylül Üniversitesi’nde öğrenim görmekte olan 81 lisans öğrencisi ile sınırlıdır.
2. Araştırma, Analiz III derslerine katılan ilköğretim matematik öğretmen adaylarının, çok değişkenli fonksiyonlarda türev ile ilgili bilgi ve deneyimleri ile sınırlıdır.
3. Araştırmada toplanan veriler, ilköğretim matematik öğretmen adaylarına sorulan çok değişkenli fonksiyonların türevi konusuna yönelik açık uçlu yazılı doküman ile sınırlıdır.
4. Araştırmanın dayanakları yurtiçi ve yurtdışından ulaşılabilen kaynaklar ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

1. Araştırmada kullanılan veri toplama aracı için alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmıştır.
2. Öğrencilerin veri toplama aracında yer alan sorulara verdikleri cevaplarda samimi ve objektif oldukları varsayılmıştır.
3. Araştırmada öğrencilere uygulanan veri toplama aracının, öğrencilerin seviyelerine ve araştırmanın amacına uygun olduğu varsayılmıştır.
4. Araştırmada seçilen örneklemin, evreni temsil edecek nitelikte olduğu varsayılmıştır.

1.6. Tanımlar

Kavram: Türk Dil Kurumu sözlüğünde kavram, bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tasarımı olarak tanımlanmaktadır.

Kavram Yanılgısı: Kavram yanılgısı genellikle bir konunun uzman görüşünden farklı olarak öğrencilerin sahip olduğu algı ya da kavrayış olarak tanımlanmaktadır (Graeber, 1993; Hammer, 1996; Zembat, 2015a). Bir başka deyişle öğrenci algısının uzman algısından uzaklaşmasıyla, öğrencileri basit bir hata olmaktan ziyade sistematik hatalara teşvik eden algı biçimidir (Zembat, 2015a).

Hata: Hata, öğrencilerin yanlış inançları ve deneyimleri sonucu ortaya çıkan davranış olarak tanımlanmaktadır (Mutlu ve Söylemez, 2018). Hata, kavram yanılgısının bir sonucudur (Zembat, 2015a).

Analiz: Analiz (Calculus), değişim ve hareket ile ilgili olguları inceleme konusu yapan biyoloji, kimya, fizik ve mühendislik alanlarında çalışılan olgulardaki değişimlerin “ne kadar yavaş, ne kadar hızlı veya nasıl” olduğunun cevabını matematiksel notasyon ve sembollerle vermeyi sağlayan büyük bir araçtır (Bingölbali, 2015).

Çok değişkenli fonksiyon: Birden fazla bağımsız değişkene sahip fonksiyonlar çok değişkenli fonksiyon olarak tanımlanmaktadır.

Kısmi türev: Çok değişkenli bir $u = f(x, y, z, \dots)$ fonksiyonunda, eğer bağımsız değişkenlerden biri değiştirilip, diğer bağımsız değişkenleri sabit tutulursa ve u fonksiyonunun değiştirilen değişkene göre türevi mevcut ise bu türeve $u = f(x, y, z, \dots)$ fonksiyonunun değiştirilen değişkene göre kısmi türevi denir (Karadeniz, 1988). Fiziksel

olarak ise çok değişkenli herhangi bir fonksiyonun, örneğin $z = f(x, y)$ fonksiyonunun x ile y , başka bir deyişle $\vec{i}$ ve $\vec{j}$ birim vektörleri yönündeki değişim hızını temsil etmektedir.

Yöne göre türev: Kısmi türev yöne göre türevin özel bir hali olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla yöne göre türev fiziksel olarak, iki ya da daha çok değişkenli bir fonksiyonun, örneğin $z = f(x, y)$ fonksiyonunun herhangi bir $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ birim vektörü yönündeki değişim hızını temsil etmektedir.



BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde, araştırmanın konusu ile ilgili kavramsal çerçeveye ve bu alanda yapılmış olan ilgili araştırmalara yer verilmiştir.

2.1. Matematik Öğretimi

Türk Dik Kurumu (TDK) matematiği; “aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanan niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adı” olarak tanımlamaktadır. Biber’e (2018) göre ise matematik, günlük hayatta karşımıza çıkan olayları, yaşadığımız çevreyi, bilimi, teknolojiyi, kısacası hayatı anlamak için kullanılan bir araçtır. Babil, Mısır ve Çin uygarlıklarına dayanan altı bin yıllık geçmişi olduğu bilinen matematiğin, günümüzde birçok disipline temel oluşturan bir bilim dalı olduğu kabul edilmektedir. Bu yüzden matematiği iyi anlayan, onu etkin kullanan bireyler olmadan, toplumsal ilerlemenin sağlanması hatta bu ilerlemenin en önemli faktörlerinden biri olan teknolojik gelişmelerin gerçekleşmesi mümkün değildir (Biber, 2018). Matematiğin yaşamımızda bu denli öneme sahip olması matematik öğretiminin en etkili şekilde gerçekleşmesini zorunlu kılmaktadır. Bu noktada öğretmenin matematik öğretimindeki yeri de oldukça önemlidir.

Shulman (1986), öğretmenlerin alan ve genel pedagojik bilgisinin yanı sıra bu iki bilgi türünü birleştiren, konunun başkaları tarafından anlaşılır bir yapıya dönüştürülmesini sağlayacak temsil ve öğretim biçimlerini kapsayan, öğrencilerin kavrayışlarını, ön bilgilerini ve kavram yanılgılarının anlaşılmasını içeren pedagojik alan bilgisi olarak adlandırdığı bilgi türünün gerekliliği üzerinde durmuştur (Wilkie, 2014). Yani Shulman pedagojik alan bilgisini, konu alanın uzmanı ile eğitmeni birbirinden ayıran bilgi türü olarak tanımlamaktadır. Bu durumda etkili bir matematik öğretiminin gerçekleşmesi için öğretmenlerin alan ve genel pedagojik bilgisinin yanında pedagojik alan bilgisine de sahip olması gerekmektedir. Bu durum pedagojik alan bilgisinin bir alt bileşeni olan öğretmenlerin, öğrencilerin sahip olduğu zorluk ve kavram yanılgılarını bilmelerinin gerekliliğini ortaya koymaktadır. Ancak öğretmenin öğretimdeki etkinliği yalnızca sahip olduğu bilgi türleriyle değil benimsemiş olduğu öğretim yaklaşımları ile de yakından ilişkilidir. Matematikte etkili bir öğretiminin gerçekleşmesi, öğretmen merkezli, yeni bilgilerin yapılandırılmasının söz konusu olmadığı, ezberciliğe dayanan ve bireysel farklılıklarının sınırlı ölçüde dikkate alındığı geleneksel öğrenme yaklaşımı ile mümkün değildir. Aksine öğrencilerin öğrenme süreçlerinde aktif olduğu ve bilgi oluşturma

süreçlerinde öğretmenlerin onlara rehber olduğu, öğrenciyi merkeze alan ve kavramsal öğrenmeyi esas alan yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı ile mümkündür. Sonuç olarak etkili matematik öğretiminin gerçekleşebilmesi için öğretmenlerin, kavramsal öğrenmenin esas alındığı yapılandırmacı öğrenme yaklaşımını benimsemesi ve öğrencilerin sahip olduğu zorluk ve kavram yanılgıları hakkında ayrıntılı bilgi sahibi olması gerekmektedir.

Matematik öğretiminde kavramsal ve işlemsel öğrenme olarak iki farklı öğrenme türü bulunmaktadır. Kavramsal öğrenme, matematiksel kavramların, işlemlerin ve tanımların zihinde anlamlandırılma sürecidir. Bu süreç, bireyin yeni karşılaştığı bir bilgiyi mevcut bilgileri doğrultusunda değerlendirip ilişkisel ve sistematik bir yapıya dönüştürmesidir (Yanık, 2016). Yani matematik öğretiminde öğrencilerin, matematiksel kavramların ifade ettiği anlamları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri anlayabilmesi için kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi gerekmektedir. İşlemsel öğrenme ise kavramsal öğrenmenin aksine, bireylerin işlemleri esnek, bilinçli ve etkili tercihlere dayalı olarak ve doğru bir şekilde kullanabilmesini gerektirir (Yanık, 2016). Ancak matematik dersinde anlamlı öğrenmenin gerçekleşebilmesi için hem işlemsel hem de kavramsal öğrenme gerçekleştirilerek, bu iki matematiksel öğrenme arasında denge kurulmalıdır. Fakat matematik derslerinde kavramsal öğrenmeden çok işlemsel öğrenmeye ağırlık verilmekte ve konular kavramsal düzeyde öğrenilememektedir (Soylu ve Aydın, 2006).

Matematik öğretiminin temelinde, matematiksel kavramların öğretimi yatmaktadır. Sıkça sözünü ettiğimiz kavram, Türk Dil Kurumu sözlüğünde “bir nesnenin veya düşüncenin zihnindeki soyut ve genel tasarımı ile nesnelerin ve olayların ortak özelliklerini kapsayan, ortak bir ad altında toplayan soyut ve genel bir fikir” olarak tanımlanmaktadır. Ubuz’a (1999) göre kavram, nesneleri ve olayları ortak ad altında toplayan ve ortak özelliklerini kapsayan soyut ve genel fikirdir. Yenilmez ve Yaşa’ ya (2008) göre, kelimenin isim halidir ve bir düşünce veya görüş özellikle bir sınıf nesnenin genelleştirilmiş görüşüdür. Matematik, soyut ve somut kavramlardan oluşmaktadır. En az bir duyu organı ile varlığına ilişkin bilgi sahibi olduğumuz, uzayda yer kaplayan nesnelere ait kavramlar somut kavramlar, beş duyu organı ile algılanamayan ve uzayda yer kaplayamayan daha çok sezgilere dayalı olan kavramlara ise soyut kavramlar denmektedir (Çinçin, 2016). Anlaşılacağı üzere somut kavramlar, çocukluktan itibaren kendiliğinden öğrenilirken, soyut kavramların öğrenimi için genellikle öğretim gerekmektedir (Pesen, 2008). Doğal olarak birçok öğrenci soyut kavramları öğrenirken zorlanmaktadır. Matematik de soyut kavramlardan oluştuğundan üniversite öğrencileri de dahil olmak üzere toplumun birçok kesimi matematiği öğrenilmesi zor bir ders olarak görmektedir.

Matematiğin yığılmalı bir bilim olması nedeniyle öğrenilen her yeni bilgi, bir sonraki kavramı etkilemektedir. Treagust'a (1988) göre öğrenciler, yaşamlarının erken dönemlerinde pek çok kavramı öğrenmeye ve yapılandırmaya başlarlar ve okula zihinlerinde oluşmuş birtakım kavramlarla gelirler (aktaran Öksüz ve Başışık, 2019). Yani öğrenciler yeni kavramları öğrenmeden önce, o kavrama ait ön bilgilere sahip olarak sınıfa gelmektedirler. Matematiksel kavramların birbirleriyle son derece ilişkili olmasından dolayı öğrenme sürecinde öğrencilerin sahip oldukları ön bilgiler yeni kavramların öğreniminde yanlış öğrenmelere neden olabilirler. İşte bu yanlış öğrenmelerin bazıları ise kavram yanlışlarına dönüşmektedir. Örneğin parçanın bütünden küçük olduğu düşüncesine sahip bir öğrenci, doğal sayılar kümesinin eleman sayısının, tam sayılar kümesinin eleman sayısından daha az olduğunu ve her iki kümenin eleman sayılarının eşit olamayacağını düşünecektirler. Galileo paradoksu olarak bilinen ve yüzyıllar boyu matematikçilerin bile açıklamakta zorlandığı bu gözlem öğrenciler içinde bir zorluk kaynağıdır (Özmantar, 2008). Buradan da görüldüğü gibi öğrencilerin sahip olduğu ön bilgiler yanlış öğrenmelere hatta kavram yanlışlarına sebebiyet verebilmektedir. Bu anlamda kavramsal öğrenmenin önündeki en büyük engellerden birinin kavram yanlışları olduğu söylenebilir (Yenilmez ve Yaşa, 2008). Matematik eğitiminde bu denli öneme sahip kavram yanlışlarının üstesinden gelebilmek için ise matematiksel kavram yanlışlarının iyi bilinmesi gerekmektedir.

2.2. Kavram Yanlışları

Matematiğin soyut yapısından dolayı öğrenciler matematik derslerinde bazı zorluklar yaşamaktadırlar. Bu zorluklar, öğrencilerin çeşitli hatalar yapmasına ve kavram yanlışlarının oluşumuna neden olmaktadır. Kavram yanlışsı kavramının daha anlaşılır olması için öncelikle hata ve zorluk kavramlarının bilinmesi fayda sağlayacaktır. “Zorluk” kapsamlı bir kavram olup öğrencilerin matematik öğreniminde yaşadıkları güçlükleri genel anlamda ifade etmek için kullanılır (Bingölbalı ve Özmantar, 2009). Hata ise, hem uzman hem de deneyimsiz kişiler tarafından kavramların, teorilerin ya da formüllerin yanlış uygulamaları sonucu oluşmaktadır (Li, Julaihi, ve Eng; 2017). Burada bahsedilen hata genellikle dikkatsizlik sonucu oluşan işlemsel hata olarak gösterilebilir. Bir de kavram yanlışlarının sonucunda oluşan hatalar vardır ki bu hataların daha anlaşılır olması için kavram yanlışsının tanımı yapıldıktan sonra hata ve kavram yanlışsı ile ilişkisine tekrar değinilecektir.

Kavram yanlışları genellikle bir konunun uzman görüşünden farklı olan, öğrencilerin sahip olduğu algı ya da kavrayış olarak tanımlanmaktadır (Graeber, 1993; Hammer 1996; Zembat, 2015a). Bir başka deyişle kavram yanlışsı, çeşitli öğrenmeler

sonucu öğrencilerin öğrenmiş oldukları ve zihinlerinde soyutlaştırdıkları kavramlara yüklediği anlamların, kavramın bilimsel anlamıyla örtüşmemesidir (Baki ve Aydın Güç, 2014). Bu tanımlardan anlaşılacağı gibi kavram yanlışlığı bireyin doğru olarak kabul ettiği fakat kavramın formal tanımından veya uzman görüşünden uzak kalan yanlış kavrayışlardır. Mevcut literatür incelendiğinde kavram yanlışlıklarını ifade etmek için ön kavrayış, alternatif kavrayış ya da alternatif teori, olgunlaşmamış kavrayış ya da olgunlaşmamış teori isimleri de kullanıldığı görülmüştür (Clement, 1982; Hewsen ve Hewsen, 1984; McCloskey, 1983, aktaran Zembat 2015a). Hammer’a (1996) göre kavram yanlışlıklarının temelini, farklı isimlendirmelerinde de görüldüğü gibi, güçlü ve sabit olarak var olan, uzman görüşünden uzak kalan, öğrencilerin anlamalarına etki eden ve öğrencilerin uzman anlayışına ulaşması için üstesinden gelinmesi zorunlu olan “kavrayış” kavramı oluşturmaktadır.

Ubuz (1999) kavram yanlışlığını öğrenmeye engel oluşturan, kavramsal engeller olarak tanımlamaktadır. Bahsedilen kavramsal engeller, kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesini mümkün kılmamaktadır. Yani kavramsal öğrenmenin gerçekleşebilmesi için kavram yanlışlıkları basitçe görmezden gelinemeyeceği gibi bu yanlışlıkların üstesinden gelinmesi gerekmektedir. Fakat düz anlatım, formül ezberletme gibi öğretmen merkezli yöntemlerle, öğrencilerin sahip oldukları güçlü ve kalıcı olan kavrayışları değiştirmek mümkün değildir. Bu kavrayışları değiştirebilmek için öğrencilerin var olan kavrayışlarından hareketle, onların kavrayışlarını geliştirecek yapılandırmacı yaklaşım temeline dayanan bir öğretim planı hazırlanmalıdır.

Yapılandırmacı yaklaşım temelinde bir öğretim planı hazırlamak amacıyla öğrencilerin sahip oldukları kavrayışlar belirlenirken hata ve kavram yanlışlıkları sıkça karıştırılmaktadır. Bu bağlamda Smith, diSessa ve Roschelle (1993) kavram yanlışlığını, sistematik bir şekilde hata üreten öğrenci kavrayışı olarak tanımlamıştır (akt. Bingölbalı ve Özmantar, 2009). Benzer şekilde Zembat’a (2015a) göre kavram yanlışlığı basit bir hatadan ziyade sistemli bir şekilde insanı hataya teşvik eden algı biçimi, Baki ve Aydın Güç’e (2014) göre ise sistematik bir hatanın tekrarlanmasına yol açan yanlış bir kavramdır. Bu tanımlardan da görüleceği üzere öğrencilerin sistematik olarak yaptığı hatalar yani kavram yanlışlıkları sıradan yapılan işlem hatalarından farklı olup öğrencinin sahip olduğu kavrayış biçimine dayanmaktadır. Buradan hareketle öğretim planlanırken odaklanılması gereken şey öğrencinin yapmış olduğu hatadan çok hatanın kaynağı olan kavram yanlışlığına dolayısıyla yanlışlığın temelinde yatan kavrayış biçimi olmalıdır (Zembat, 2015a). Örneğin Yang ve Sianturi’nin (2020) yaptığı 308 altıncı sınıf öğrencisiyle yürütülen çalışmada, öğrencilere kalem, kağıt kullanmadan $\frac{14}{15}$ ile $\frac{15}{16}$ kesirlerinden hangisinin daha büyük olduğu sorulmuştur

(Durum 1). 82 öğrenci (%26.62) bu soruya 14 ile 15 ve 15 ile 16 sayı çiftinin her ikisinde de aradaki farkın 1 olduğunu söyleyerek, sahip oldukları “pay ve paydasında daha büyük sayıya sahip olan kesir daha büyüktür” kavrayışı ile $\frac{15}{16}$ cevabını vermiştir. Her ne kadar cevabı bu şekilde veren öğrenciler soruyu doğru yanıtlamış olsalar da öğrencilerin bu cevabı vermelerine sebep olan kavrayışları göz önüne alındığında kesirlerde sıralamaya ilişkin kavram yanlışlığına sahip oldukları açıktır. Bu kavram yanlışlığına sahip olan öğrencilere $\frac{15}{14}$ ile $\frac{16}{15}$ kesirlerinden hangisinin büyük olduğu sorulsaydı (Durum 2) şüphesiz aynı kavrayışa sahip öğrenciler $\frac{16}{15}$ kesrinin daha büyük olduğu cevabını vereceklerdir. Görüldüğü gibi ikinci durumda öğrencilerin sahip olduğu “daha büyük sayıya sahip olan kesir daha büyüktür” kavrayışı öğrencilerde kavram yanlışlığı oluşmasına, sonucunda da öğrencilerin hata yapmasına neden olmuştur. Dolayısıyla burada ortaya çıkan basit bir hatadan ziyade, o hatanın oluşmasına kaynaklık eden ve hatayı sistematik hale getiren ya da getirebilecek olan “daha büyük sayıya sahip olan kesir daha büyüktür” kavram yanlışlığına sebep olan kavrayış söz konusudur. Bu nedenle öğrencilerin kavram yanlışlıklarının farkına varabilmek adına onların sadece verdiği cevaba değil, sonuca ulaştıkları sürece veya kavrayışa odaklanılmalıdır. Bu sayede öğrencilerin sahip oldukları kavram yanlışlıklarının öğrencileri hangi hataya sürüklediklerini ya da sürükleyebilecekleri konusunda bilgi sahibi olabiliriz.

Öğrencilerin sorulan sorulara verdikleri doğru cevaplar, matematiksel kavramları her zaman doğru anladıklarını göstermez. Yukarıdaki kavram yanlışlığına sahip bir öğrenciye sadece sahip olduğu kavrayışın işlediği Durum 1’de ki örnek verilirse öğrencinin kavram yanlışlığı olduğu gibi kalacak hatta daha da güçlenerek, ileride ortadan kaldırılması gittikçe zor bir hale gelecektir. Benzer şekilde bir öğrenci, “bir sayının mutlak değerinin sadece pozitif işaretli bir sayıya eşittir” kavrayışına sahipse ve öğrencinin karşılaştığı bütün mutlak değer örnekleri sadece pozitif işaretli bir sayıya eşit olursa öğrencinin sahip olduğu kavram yanlışlığı olduğu gibi kalacak hatta şüphesiz başka kavram yanlışlıklarının oluşumuna neden olacaktır (Rakes ve Ronau, 2019). Sonuç olarak hatalar kolayca fark edilse de kavram yanlışlıkları ayrıntılı gözlem yapılmadan tespit edilemez. Çünkü yukarıda da açıklandığı gibi, kavram yanlışlıkları yanlışlıkla doğru sonuçlara neden olabilmektedir (Li ve diğerleri, 2017). Sadece birkaç örnek üzerinde gösterilen öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlıkları, neredeyse matematiğin her konusunda örneklendirilebilir. Hatta öğrenciler bir konuda birden fazla kavram yanlışlığına sahip olabilir ya da farklı öğrenciler, aynı konuda farklı kavram yanlışlıklarına sahip olabilirler. Örneğin Baki ve Aydın Güç’ün (2014), öğrencilere $3,4\overline{5}$ ile $3,4\overline{5}$ devirli ondalık sayılarından hangisinin daha büyük olduğu sorulduğu çalışmasında

“Devredeni uzun olan sayı daha büyüktür” yanılıısına sahip bir öğrenci $3,4\overline{5}$, “devredeni kısa olan sayı daha büyüktür” yanılıısına sahip bir öğrenci $3,4\overline{5}$ cevabını vermiştir. Görüldüğü gibi her öğrenci kendine özgü bir kavrayışa sahiptir dolayısıyla öğrenciler farklı kavram yanılıgılarına sahip olabilmektedirler. Bu nedenle güçlü ve kalıcı özelliğe sahip kavram yanılıgılarının üstesinden gelebilmek için ilerdeki kavramlara temel oluşturan farklı kavram yanılıgılarının farkında olarak bir öğretim planı hazırlamak oldukça önemlidir.

Karaağaç ve Köse (2015), çalışmalarına katılan öğretmen ve öğretmen adayları için, konuları ve uygun temsilleri bildikleri fakat öğrencilerin kavram yanılıgılarını açıklamada yetersiz olduklarını belirtmiştir. Öğretmenlerin, öğrencilerin düşünce tarzlarını analiz edebilmek ve kavram yanılıgılarının üstesinden gelebilmek için kavram yanılıgılarının türlerini ve nedenlerini incelemek, öğretmenlere kavram yanılıgılarını analiz etme konusunda rehber olacağı düşünülmektedir.

2.2.1. Kavram yanılıgılarının türleri

Kavram yanılıgılarının türleri hakkında literatürde farklı sınıflandırmalar mevcuttur. Farklı iki sınıflandırma ile kavram yanılıgılarının türleri farklı açılardan değerlendirmiştir. Genel olarak kavram yanılıgılarını sınıflandıran Committee on Undergraduate Education (1996), kavram yanılıgılarını deneyimsiz kanılar, bilimsel olmayan inançlar, kavramsal yanlış anlamalar, yanlış benimseme ve kullanım dilinden kaynaklanan kavram yanılıgıları şeklinde 5 gruba olarak sınıflandırmıştır (aktaran Yağbasan ve Gülçiçek, 2003).

- Deneyimsiz kanılar; öğrencilerin günlük hayat tecrübelerini, yeni kavramlara ilişkilendirmesiyle oluşur.
- Bilimsel olmayan inançlar; öğrencilerin bilimsel olmayan kaynaklardan öğrendikleri bilgilerdir.
- Kavramsal yanlış anlamalar; bilimsel bilgilerin, öğrencilerin bilimsel olmayan inanışları ile yeni öğrenilen kavram ile arasında çelişki oluştuğunda ortaya çıkar. Öğrenciler ise bu çelişkiye çözüm üretmek amacıyla yanlış kavrayışlar geliştirirler ve bunun sonucu olarak kavram yanılıgıları ortaya çıkar.
- Yanlış benimseme; Öğrencilerin ve öğretmenlerin bilgi birikimlerinde yer alan yanılıgıları ifade etmektedir.
- Kullanım dilinden kaynaklı kavram yanılıgıları; bir kelimenin günlük hayattaki kullanımı ile bilimsel kullanımın farklılık göstermesi sonucunda ortaya çıkar.

Özel olarak ise matematiksel kavram yanlışlarını sınıflandıran bir çalışma Graeber ve Johnson (1991) tarafından yapılmıştır ve kavram yanlışları dört ayrı kategoride sınıflandırılmıştır. Bunlar sırasıyla aşırı genelleme, aşırı özelleme, yanlış tercüme ve kısıtlı algılamadır (aktaran Zembat, 2015b). Öğrencilerde sıklıkla karşılaşılan kavram yanlışları bu sınıflandırmada incelenecektir.

2.2.1.1. Aşırı Genelleme

Zembat (2015b) en sıklıkla karşılaşılan kavram yanlışsı türü olan aşırı genellemeyi, belli bir sınıfta işleyen kural, prensip veya kavramın diğer durumlarda da işliyormuş gibi düşünülmesi ve bu durumlara yayılması şeklinde tanımlamaktadır. Başka bir deyişle daha dar bir alanda geçerli olabilecek bir kural veya prensibin daha geniş bir alanda geçerli olduğunun düşünülmesidir. Örneğin öğrenciler ilköğretim yıllarının başlarından itibaren çarpma işleminin sonucunun, çarpan ve çarpılandan daha büyük değere sahip olduğunu, benzer şekilde bölme işleminin sonucunun bölünenden daha küçük bir değere sahip olduğunu sıkça tecrübe etmektedirler. Bu durum öğrencilerin “çarpma işleminin sonucu her zaman çarpan veya çarpılandan daha büyüktür” ya da “bölme işleminin sonucu her zaman bölen veya bölünenden daha küçüktür” kavrayışını geliştirmelerine neden olmaktadır (Graeber, 1993; Zembat 2015b). Öğrencilerin geliştirdiği bu kavrayış doğal sayılar üzerinde geçerli olan bir prensibin rasyonel sayılarda da geçerli olacağını düşünmelerine neden olmakta ve sonuç olarak aşırı genelleme türünden kavram yanlışları oluşmaktadır. Aşırı genellemeye bir başka örnek ise herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun $x \rightarrow x_0$ için limitinin $f(x_0)$ ’a eşit olduğudur. Polinom fonksiyonlar için geçerli olan bu limit belirleme yönteminin öğrenciler tarafından tüm fonksiyonlarda geçerliymiş gibi düşünmeleri aşırı genellemenin bir sonucudur (Özmantar ve Yeşildere, 2015).

2.2.1.2. Aşırı özelleme

Aşırı özelleme, aşırı genellemenin aksine, belli bir sınıfta işleyen kural, prensip veya kavramın daha özel bir alt sınıfa kısıtlanmasıdır (Zembat, 2015b). Başka bir deyişle daha geniş bir alanda geçerli olabilecek bir kural veya prensibin daha dar bir alana indirgenerek düşünülmesidir. Aşırı özlemeye bir örnek rasyonel sayılarla ilgili verilebilir. Öğrenciler sıklıkla kesir çizgisi ile belirtilen rasyonel sayılarla karşılaşır. Sadece bu tür rasyonel sayılarla karşılaşan öğrenciler “kesir çizgisine sahip olmayan sayıların rasyonel sayı olamayacağı” kavrayışına sahip olabilirler. Okur ve Gürel (2016) tarafından yapılan araştırmada, öğrencilere 15 sayısının rasyonel bir sayı olup olmadığı sorulmuştur. 15 sayısının rasyonel sayı olmadığını düşünen bir öğrenci “çünkü pay ve paydası yok” cevabını

vermiştir. Buradan da görüldüğü gibi rasyonel sayılar, kesir çizgisi ile belirtilen rasyonel sayılara indirgendiği için doğal sayıların rasyonel sayı olamayacağı kavram yanlışlığı aşırı özellemeye örnek gösterilebilir. Bir başka örneği inceleyecek olursak süreklilik ifadesini günlük hayatta “bütün gün sürekli yağmur yağdı” (yani yağmurda kesinti olmadı) şeklinde benimseyen bir öğrenci, matematiksel süreklilik kavramının aralıksız veya boşluksuz olması gerektiği anlayışına sahip olabilir. Bu bakış açısı öğrencide “sürekli fonksiyonların grafiğinin tek parçadan oluşması gerektiğini ya da grafiği kalemi kağıttan kaldırmadan tek parça çizilmesi gerektiği” şeklinde bir kavrayış geliştirmesine neden olmaktadır (Cornu, 2002; Özmantar ve Bingölbali, 2009; Özmantar ve Yeşildere, 2015). Öğrencinin sürekli fonksiyonlara dair bu şekilde bir kavrayışa sahip olması sürekli fonksiyonları, grafiği sadece aralıksız ve boşluksuz olarak çizilebilen fonksiyonlara indirgemesine neden olur; bu ise aşırı özelleme türünden kavram yanlışlığına örnek verilebilir. Ancak bahsedilen “sürekli fonksiyonların grafiğinin tek parçadan oluşması gerektiği” kavrayışı çoğu sürekli fonksiyon için doğru olsa da bütün sürekli fonksiyonlar için doğru değildir (örneğin, $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$). Bu anlamda, bahsedilen kavrayış bakılacak olursa aşırı genelleme türünden kavram yanlışlığına örnek olarak gösterilebilir (Özmantar ve Bingölbali, 2009).

2.2.1.3. Yanlış tercüme

İşlem, sembol, formül, tablo, grafik ve cümle gibi değişik formlar arası geçişlerde yapılan sistemli hatalar zincirine yanlış tercüme denilmektedir (Zembat, 2015b). Örneğin bu türden bir yanlışlığa sahip bir öğrenci, okunuşu verilen bir ondalık sayının yazılışını doğru yazamayabilmekte veya yazılışı verilen bir ondalık sayıyı doğru okuyamayabilmektedir.

2.2.1.4. Kısıtlı algılama

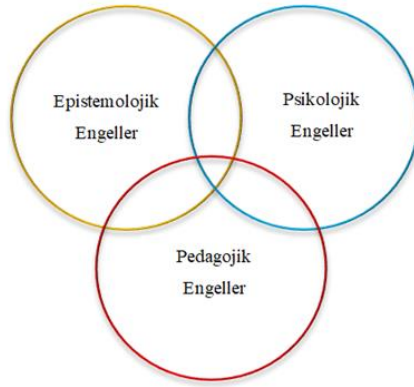
Bir kavramın kısıtlı veya olması gerekenden zayıf olarak anlamak bu kavramın kısıtlı olarak algılanmasını doğurur (Zembat, 2015b). Örneğin farklı uzunluklara sahip iki doğru parçasının eşit sayıda noktaya sahip olamayacağını düşünen bir öğrenci iki doğru parçasının da sonsuz noktaya sahip olduğunu ihmal etmekte yani sonsuzluk kavramını kısıtlı algılamaktadır. Kısıtlı algılamaya başka bir örnek ise öğrencilerin günlük hayattaki limit kavramının (hız limiti, kredi kartı limiti gibi) kullanımını, matematiksel limit kavramı ile ilişkilendirerek, matematiksel limit kavramının aslında geçilemeyecek bir nokta şeklinde bir anlayış geliştirmesidir (Cornu, 2002; Özmantar ve Yeşildere, 2015). Yani bu yanlışlığa sahip bir öğrenci için matematiksel limit kavramını kısıtlı algılamaktadır denilebilir.

Kavram yanlışlığının türleri olarak bahsedilen bu dört temel tür her ne kadar ayrı ayrı bahsedilmiş olsa da öğrencilerin kavram yanlışlıkları söz konusu türlerin tek bir türüne sahip

olabileceği gibi bu türlerin ikili, üçlü kombinasyonları ya da toplu bir şekilde de sahip olunabilir. Kucam ve Demir'in (2020) yaptığı çalışmada, çalışmaya katılan 340 öğrenciden 326 'sının tek bir kavram yanlışlığı türüne sahip olmadığı yani 326 öğrenci bahsedilen türlerin ikili, üçlü kombinasyonları ya da toplu bir şekilde kavram yanlışlığı türüne sahip olduğu görülmüştür.

2.2.2. Kavram yanlışlıklarının nedenleri

Matematik eğitiminde kavram yanlışlıklarının oluşum nedenlerinin bilinmesi, öğretimde yarattığı zorlukları engellemek, öğretim için en uygun stratejiyi seçmek ve var olan kavram yanlışlıklarını ortadan kaldırmak için oldukça önemlidir. Cornu (2002) kavram yanlışlıklarının sebeplerinin; matematiksel kavramlarının doğası gereği ortaya çıkan epistemolojik (epistemological) engellerden, öğrencinin kişisel gelişimi sonucu ortaya çıkan genetik ve psikolojik (genetic ve psychological) engellerden ve öğretmenin ve öğretimin doğası gereği ortaya çıkan pedagojik (didactic) engellerden kaynaklanabileceğini belirtmiştir. Şekil 1'de görüldüğü gibi, kavram yanlışlıklarının ortaya çıkmasına neden olan bu üç temel engelin her biri tek başına öğrencilerde kavram yanlışlıkları oluşmasına neden olabileceği gibi ikişerli kombinasyonları ya da üç engelin hepsi birlikte de öğrencilerde kavram yanlışlığı oluşmasına neden olabilmektedir (Bingölbalı ve Özmantar, 2009).



Şekil 1. Kavram yanlışlıklarının oluşumuna neden olan engel türleri

2.2.2.1. Epistemolojik engeller

Bachelard (1938), epistemolojik engellerin iki temel karakteristik özelliğinden bahsetmektedir (aktaran Cornu, 2002). Bunlardan birincisi epistemolojik engeller kaçınılmazdır ve öğrenilmesi gereken bilginin bir bileşenidir, ikincisi ise bu engeller ile en azından bazı kavramların tarihsel gelişiminde de karşılaşmıştır. Epistemolojik engellerin birinci özelliğine bakıldığında bu engellerin, öğrenilecek kavramın temel bir parçası olduğu

yani doğasında var olduğu söylenebilir. İkinci özelliğe bakıldığında ise ilgili kavramın tarihsel gelişim sürecinde, bilim insanları tarafından da zorluklarla karşılaşmış ve anlaşmazlığa düşmüş olabileceği görülmektedir. Örneğin limit konusunun tarihi boyunca, genellikle ε sembolü ile gösterilen sonsuz küçük miktarlarının var olduğu varsayımıyla karşılaşmaktadır. Bu durum tarih boyunca, neredeyse sıfır olacak kadar küçük ama yine de belirli bir boyuta sahip miktarlarla karşılaşmak mümkün müdür? Bu miktarlar sıfır kabul edildiğinde ne olur? gibi problemleri doğurmaktadır. Euler, sonsuz küçük kavramını, uygun olan yerlerde sıfıra eşit kabul edilebileceğini savunmuş, D'Alembert, eğer bir sonsuz küçük kavramının bir miktarı varsa sıfır olamayacağı, eğer sıfırsa bir miktarı olamayacağını savunmuş ve kullanımına karşı çıkarak bu kavramı diferansiyel hesaplamaadan çıkarmaya çalışmış, Cauchy ise sonsuz küçüğü, sıfıra meyilli basit bir değişken olarak kabul etmiştir (Cornu, 2002).

Görüldüğü gibi sonsuz küçük kavramının anlamlandırılmasında tarihsel gelişim sürecinde zorluklarla karşılaşmış ve matematikçiler arasında anlaşmazlığa düşmüştür. Bu durumda öğrencilerinde sonsuz küçük kavramına ilişkin zorluklarla karşılaşması kaçınılmazdır. Şüphesiz ki bu tür zorluklar kavram yanlışlarının oluşumuna neden olacaktır. Öğrencilerin yaşadığı zorluklarla tarihsel süreç içerisinde matematikçilerin yaşadığı zorluklar benzerlik gösterebilmektedir. Bu nedenle öğretmen ve öğretmen adaylarının epistemolojik engeller nedeniyle oluşabilecek kavram yanlışlarını aşabilmek adına ilk olarak ilgili kavramın tarihsel sürecinin ve bu süreçte karşılaşılan zorlukları bilmesi önem taşımaktadır.

2.2.2.2. Psikolojik engeller

Kavram yanlışlarının oluşmasına neden olan ikinci faktör psikolojik engellerdir. Psikolojik ya da genetik engeller en genel anlamda öğrencinin kişisel gelişimi sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu açıdan, öğrencinin kavrama yeteneği ve becerisi, öğrencilerin ön bilgileri ve hazır bulunuşluk düzeyleri, öğretim aşamasında bireyin bulunduğu gelişim aşaması gibi faktörler öğrencilerde görülen bazı kavram yanlışlarının oluşmasında önemli rol oynamaktadır (Bingölbali ve Özmantar, 2009). Cornu'ya (2002) göre öğrenciler bir kavramı öğrenmeden önce, o kavrama ait konuşma dili gibi günlük deneyimlerden gelen belirli fikir, sezgi, imge ve bilgilere sahip olarak sınıfa gelirler. Yani öğrenciler sınıfa gelmeden önce öğrenecekleri kavrama ait ön bilgilere sahiptirler ve bu öğrencilerin yeni öğrenilecek kavrama ait ön bilgileri, öğretmenlerin düşündüğünün aksine kendiliğinden yok edilemeyecek kadar güçlüdürler. Bu ön bilgiler, yeni edinilen bilgilerle karıştırılır, değiştirilir ve öğrencilerin kişisel kavramlarını oluşturmak için uyarlanırlar (Cornu, 2002). Örneğin

öğrenciler sezgisel olarak sonsuzluk kavramını, sürekli artan (sürekli azalan şey sonsuz olamaz), sınırsız (sınırlı olan bir şey sonsuz olamaz), çok büyük (küçük şeyler sonsuz olamaz), sayılabilen ve zamana bağlı olarak değişen bir kavram olarak görmektedirler (Özmantar, 2015). Öğrencilerin sahip olduğu bu sezgiler sonsuz küçük kavramının var olamayacağı (Cornu, 2002), iki nokta arasında ancak sınırlı sayıda nokta olabileceği, farklı uzunluklara sahip iki doğrunun eşit sayıda noktaya sahip olamayacağı (Özmantar, 2015) gibi kavram yanlışlarının oluşumuna sebep olmaktadır. Burada öğrencilerin konuya ilişkin sahip olduğu sezgi, eğer dikkate alınmazsa kavram yanlışlarının oluşumuna neden olacaktır. Başka bir örneğe bakacak olursak daha önce de bahsedilen limit kavramının konuşma dilinde kredi kartı limiti ya da hız limiti şeklinde kullanılması, öğrencinin matematiksel limiti aşılamayacak bir değer olarak görmesine dolayısıyla öğrencilerde kavram yanılığı oluşmasına sebebiyet vermektedir (Özmantar ve Yeşildere, 2015). Görüldüğü üzere iki örnekte de öğrencilerin tamamen kendi ön bilgilerinden ve düşünme biçimlerinden kaynaklanan kavram yanlışları meydana gelmektedir. Sonuç olarak psikolojik engellerin oluşmasına sebep olduğu kavram yanlışlarından bahsetmek mümkündür ve bu şekilde oluşan kavram yanlışları kaçınılmazdır.

2.2.2.3. Pedagojik engeller

Kavram yanlışlarının oluşmasına neden olan üçüncü faktör ise pedagojik engellerdir. Pedagojik engeller en genel anlamda öğretmenin ve öğretimin doğası gereği ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda öğretim modelleri ve bu modellerin uygulanışı, kavramların ders kitapları ve programlarda ele alınış şekilleri, öğretmenlerin kullandığı metafor ve analogiler gibi unsurlar kavram yanlışlarının oluşmasına neden olan pedagojik engeller bağlamında düşünülebilir (Özmantar ve Bingölbali, 2009). Örneğin Karaağaç ve Köse (2015) yaptıkları çalışmada öğretmen adayları, öğretmenler ve öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanlışları incelenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin kesirler konusunda çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğu görülmüştür. Bunlardan birisini incelediğimizde, çalışmaya katılan öğrencilerin neredeyse tamamı bir pizzanın $\frac{1}{2}$ 'ini çizerken pizzanın sadece 2 dilimden oluşması gerektiğini göstermişlerdir. Yapılan röportajlarda da öğretmen ve öğretmen adaylarının da pizzayı sadece 2 dilim olarak düşündükleri ortaya çıkmıştır. Halbuki pizzanın yarısını göstermek için pizza 10 dilimli olup yarısı 5 dilimli veya daha farklı bir sürü sonuç yazılabilirdi. Çalışmada öğretmenlerin ilgili kavramı bu şekilde kısıtlı algılamasının, öğretmenlerin kendi öğrencilerinde kavram yanılığı oluşumuna sebebiyet verdiği düşünülmektedir. Yani öğretmenler bütünün $\frac{1}{2}$ 'ini gösterirken bütünü

yalnızca iki parçaya ayırarak göstermiş olmaları, öğrencilerde bütünün $\frac{1}{2}$ 'inin sadece iki parçadan oluşması gerektiği kavram yanlışlığı oluşmasına neden olmuş olabilir. Görüldüğü gibi öğretmenlerin konuyu ele alış şekli, materyal kullanımı ve seçilen öğretim modeli gibi tercihleri öğrencilerde kavram yanlışlıklarına sebep olabilmektedir. Bu şekilde oluşan kavram yanlışlıklarıyla pedagojik engellerden dolayı karşılaşılmaktadır.

Buraya kadar kavram yanlışlıklarının oluşmasına neden olan epistemolojik, psikolojik ve pedagojik engellerden bahsedildi. Bu üç tür engelin her biri kaçınılmazdır ve oldukça doğaldır. Fakat bu üç tür engelin oluşmasına neden olduğu kavram yanlışlıklarını en aza indirmek mümkündür. Bunun içinse öğretmenlerin kavram yanlışlıklarına sebep olan epistemolojik, psikolojik ve pedagojik engellerin her birini iyi bilmesi ve öğrencilerin olası kavram yanlışlıklarının farkında olduğu bir öğretim planı hazırlaması önem taşımaktadır. Bu noktada öğretmenlere düşen görevler ve çözüm önerilerinin neler olduğunun bilinmesinde fayda vardır.

2.2.3. Kavram yanlışlıklarının giderilmesi

Matematik yığılmalı bir bilim olduğu için öğrenilen her bir kavram bir sonraki kavramın öğrenilmesini etkilemektedir. Fakat herhangi bir kavramın öğrenilmesinde yaşanan güçlük veya yanlış öğrenmeler, öğrencilerin sonraki birçok kavram üzerinde yanlış kavrayışlar geliştirmesine ve kavram yanlışlıkları oluşmasına sebep olabilir. Bu nedenle etkili bir öğretimin sağlanması ve öğrencilerin güçlü matematik becerilerine sahip olması için kavram yanlışlıkların üstesinden gelmek zorunlu hale gelmiştir. Yapılan araştırmalar sonucunda kavram yanlışlıklarının giderilmesinin öğrenci başarısını arttırdığı ve öğrencilerde güçlü matematik becerilerinin temelini oluşturduğu görülmüştür (Li ve diğerleri, 2017). Fakat kavram yanlışlıklarının sonradan düzeltilebilme imkanı olsa da, bu yanlışlıkları gidermek hiç de kolay değildir. Çünkü öğrenciler, sahip oldukları bu yanlış kavrayışları değiştirme konusunda oldukça ısrarcıdırlar ve değişikliğe direnç gösterirler. Piaget ve Vygotsky'nin bilişsel gelişim kuramları öğrenmeyi, sınıfın sosyal ortamı tarafından desteklenen bireysel inşa süreci olarak tanımlamaktadır (Jones ve Tanner, 2000). Öğrenciler bilgiyi var olan şemalarına uyan yönlerini özümseyerek, mevcut şemalarına uymayan bilgileri ise mevcut şemaları değiştirerek ya da genişleterek öğretimi anlamlandırmaya çalışırlar. Öğrencilerin kavram yanlışlıklarının ortadan kaldırılabilmesi için mevcut bilgilerinin yeniden yapılandırılması gerekmektedir. Bunun için öğrencilerin mevcut kavramlarının bir şekilde yetersiz olduğunu kabul etmesi ve öğrencilerin yeniden yapılandırma için çaba göstermesi gerekir. Bu noktada öğretmenlerin ise öğretilmesi gereken kavramı sadece açıklaması yeterli değildir. Kavram yanlışlıklarının üstesinden gelmek için bilişsel çatışmayı içeren öğretim

stratejilerinin kullanımı çok etkilidir (Jones ve Tanner, 2000). Bilişsel çatışma ortamının sağlanması için öğretmenlerin, öğrencilerin yaptığı hatalar karşısında direkt olarak hataya müdahale etmek yerine, öğrencilerden yaptıkları hatalar hakkında konuşmalarını isteyerek, onlara hatalarını fark ettirilmeye çalışılmalıdır. Bu şekilde hataların uygulama yoluyla pekiştirilmesi önlenerek, ders aralarında öğrencilere sıklıkla geri bildirim sağlanmalı, hatalar oluşukça sorgulama ortamı yaratılmalıdır. Bu noktada öğretmenlerin rolü derse en uygun öğretim stratejisini kullanarak çatışmanın çözümüne yardımcı olmaktır. Ayrıca öğretmenler, öğrencileri sahip oldukları yanlışlar üzerinde uğraştırarak onların sistemli bir şekilde düşünmeye teşvik ederek soyutlama yapmalarını sağlamalıdır (Zembat, 2015a).

Jones ve Tanner (2000) kavram yanlışlarının aşılması için öğretmenlere düşen görevleri;

- Derse hazırlık aşamasında dikkat etmesi gerekenler,
- Derste kullanacağı problemleri belirlerken dikkat etmesi gerekenler,
- Öğretim stratejilerini seçerken dikkat etmesi gerekenler ve
- Öğrencilere geri bildirim verirken dikkat etmesi gerekenler olarak dört başlıkta toplamıştır.

Jones ve Tanner (2000), herhangi bir konuyu öğretmeye hazırlanırken, kavram yanlışlarına zemin teşkil eden matematiksel kavramların tanımlanmasının ve konuyla ilgili araştırmaların incelenmesinin, yaygın kavram yanlışlarının öngörülmesine ve öğretimin daha verimli planlanmasına yardımcı olacağı üzerinde durmaktadır. Bu durumda kavram yanlışlarının önlenmesinin ya da var olan yanlışların giderilmesinin ilk basamağı kavram yanlışlarını tespit etmektir. Örneğin öğrencilerde en sık karşılaşılan kavram yanlışlarından bazılarının; bölme işleminin sonucunun daima bölünenden daha küçük bir değer olacağını düşünme, tam sayılarda toplama işlemini kesirlerde toplama işlemine genişletme, kollarının uzunlukları farklı çizildiği iki açının eşit olamayacağını düşünme vb. olduğu bilinmektedir. İşte öğretmenler bu gibi oluşabilecek kavram yanlışlarının farkında olurlarsa öğretimi en etkili şekilde planlayabilir ve bu sayede kavram yanlışları daha oluşmadan önüne geçilebilir. Dolayısıyla kavram yanlışlarını aşmak için önce belirlemek gerekmektedir. Kavram yanlışlarını belirlemek için ise genellikle sınıf içi gözlemler, kavram karikatürleri, kavram haritaları, tahmin-gözlem-açıklama, açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar, çoktan seçmeli testler, iki aşamalı ve üç aşamalı teşhis testleri kullanılabilir (Macit, 2019).

Öğrencilerin konuyla alakalı olası kavram yanlışları belirlendikten sonra öğretmenler derslerinde kullanacağı problemleri belirlerken oldukça dikkatli olmalıdır. Jones ve Tanner'a (2000) göre problemler seçilirken öğrencileri soruya dahil eden ve onları

düşünmeye zorlayan, informal yöntemlerle kolayca çözülemeyen, sadece algoritmanın tekrarlanmasını gerektiren sorulardan ziyade öğretilen matematiksel kavramın farklı yönlerini ele alan ve kavram yanlışları mevcut olduğunda mantıksız sonuçlara yol açarak bilişsel çatışmaya neden olan problemler seçilmelidir. Örneğin öğrencilere sadece sıklıkla karşılaşılan Şekil 2'deki gibi bir dik üçgen modeli verilirse, öğrenciler dik kenarları farklı konumlarda yer alan üçgenlerin dik üçgen olamayacağı düşünebilirler (Özmantar ve Bingölbalı, 2009). Dolayısıyla öğrencilerin hatalarının sürekli tekrar edebileceği problemlerden kaçınılarak onlara hatalarının farkına varabilecekleri bilişsel çatışmaya sebep olabilecek problemler sunulmalıdır.



Şekil 2. Bir dik üçgen modeli

Kavram yanlışlarını aşmak için üçüncü olarak öğretmenlerin öğretim stratejilerini seçerken dikkat etmesi gerekmektedir. Bu aşamada öğretmenler öğretim stratejilerini seçerken, matematiksel kavramları pekiştirmek için çeşitli yöntemler (tartışma, görsel sunumlar, problem çözme, örnek olay vb) kullanılmalı, öğrencilerin kendi düşüncelerini rahat bir şekilde ifade edebileceği sınıf tartışmaları oluşturmalı, öğrencilerden düşüncelerini sınıfta paylaşabileceği bir sınıf ortamı yaratarak herkesin dinlemesi ve anlamaya çalışması sağlanmalıdır. Ayrıca öğrenciler kendi stratejileri üzerine düşünmeye ve daha etkili stratejileri benimsemeye teşvik edilmeli, öğrencilerin yaptıkları hataların nerede olabileceğine dair tahmin yürütmeleri sağlanarak, var olan kavram yanlışlarıyla yüzleşmeleri sağlanmalı ve öğrencilerin hatalarını öğretim noktaları olarak kullanılmalıdır (Jones ve Tanner, 2000). Bahsedilen özelliklerin hepsi yapılandırmacı yaklaşım temelinde oluşturulan bir sınıf ortamının özellikleridir. Bu şekilde bir sınıf ortamının yaratılarak, bahsedilen stratejilerin uygulanması öğrencilerin hatalarının farkına varmasına ve değişime açık hale gelmesine sebep olacaktır. Hatalarının farkına varan öğrenciler ise ya sahip oldukları kavram yanlışlarının üstesinden gelmeye açık olacak ya da kavram yanlışları daha oluşmadan yok edilebilecektir.

Kavram yanlışlarının aşılması için son olarak öğretmenlerin öğrencilere geri bildirim verirken dikkat etmesi gerekmektedir. Jones ve Tanner (2000) bu noktada öğrencilerin sahip oldukları kavram yanlışları kullanımları boyunca pekiştirilmesin diye ve

öğrencilere nerede ve neden hata yaptıklarını göstermek amacıyla öğretmenlerin geri bildirim verme yollarını planlamasının önemini vurgulanmaktadır. Öğrencilere sınav yapılması ve sınav sonucunun sadece not ile belirtilmesi, öğrenciye hangi soruda ve nerede hata yaptığını göstermeyecektir. Hatasının farkına varamayan öğrenci kavram yanlışlarından kurtulamayacak, hatta önüne geçilmezse kullanımları boyunca daha da pekişecektir. Ders esnasında bir soruya hatalı cevap veren öğrenciye sadece yanlış cevap verdiği belirtilirse ve yanlışının nerede olduğu gösterilmezse, öğrenci yaptığının sıradan bir hata olduğunu düşünecek ve kavram yanlışından kurtulamayacaktır. Bu nedenle öğrencilere geri bildirim verirken dikkatli olunmalı, hatalarının yeri ve nedeni açıklanmalıdır. Fakat soruyu hatasız olarak cevaplarsa da kavram yanlışına sahip olan öğrencilerde olacaktır. Bu nedenle öğrencilerin sadece ulaştığı sonuca değil, soruyu çözme süreçlerine odaklanılmalıdır. Örneğin “uzun olan ondalık sayı daha büyüktür” kavrayışına sahip bir öğrenci 0.4 ondalık sayısı ile 0.675 ondalık sayısını karşılaştırırken doğru sonuca, 0.4 ile 0.234 ondalık sayısı karşılaştırırken ise yanlış sonuca ulaşacaktır (Bingölbalı ve Özmantar, 2009). Görüldüğü gibi ilk durumda öğrencinin doğru sonuca ulaştığı düşünülerek, soruyu çözme sürecine yani mevcut kavrayışına odaklanılmazsa, söz konusu öğrencinin kavram yanlışısı pekişecek ve ortadan kaldırılması daha zor hale gelecektir. Bu nedenle öğrencilerin sadece hatalı sonuçlarına değil doğru sonuçlarının da incelenerek öğrencilere geri bildirimler verilmesi gerekmektedir.

Buraya kadar öğretmenlerin ders öncesinde ve esnasında dikkat etmesi gereken dört aşamadan bahsedildi. Bu aşamaların her biri tek başına çok önemlidir. Fakat öğrencilerin sahip oldukları veya olabilecekleri kavram yanlışlarının üstesinden gelebilmek için sadece bir ya da birkaç aşamanın değil, dört aşamanın bütün olarak ele alınması ve dikkat edilmesi gerekmektedir. Sonuç olarak öğrencilerde oluşan kavram yanlışlarının giderilmesi ve oluşabilecek kavram yanlışlarının en aza indirgenmesi için öncelikle kavram yanlışlarının belirlenmesi gerekmektedir. Sonrasında öğretmenlerin ders esnasında kullanacakları problemlerin ve öğretim stratejilerinin seçimi öğrencilerin kavram yanlışlarını ortadan kaldırmaya yönelik olmalıdır. Son olarak ise öğrencilere geri bildirim verirken dikkat edilmeli ve öğrencilerin doğru ya da yanlış yanıtlarına dönüt sağlanmalıdır. Görüldüğü üzere kavram yanlışlarının giderilmesinde öğretmenlere çok önemli roller düşmektedir. Fakat bu rollerin en önemlisi kavram yanlışlarının oluşmasını engellemektir (Koçak, 2019).

Ülkemizde yapılan araştırmalar tüm bu durumlara ek olarak öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının da kavram yanlışlarına sahip olduğunu göstermektedir (Dereli, 2015; Gökçek ve Açıkyıldız, 2015; Karaağaç ve Köse, 2015; Koçak, 2019; Morali ve diğerleri,

2004; Özkaya ve İşleyen, 2012). Fakat belirli bir konuda kavram yanlışlığına sahip olan öğretmenlerin, o konuda ve o konu ile ilişkili alt konularda öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlıklarını belirlemesi ve ortadan kaldırması beklenemez. Dolayısıyla geleceğin öğretmenleri olan öğretmen adaylarının kavram yanlışlıklarının belirlenmesi, gelecekte yapacak oldukları öğretimleri yakından etkileyeceğinden kavram yanlışlıklarının öncelikle araştırılarak belirlenmesi, sonrasında ise giderilmesine yönelik çalışmalar yapılması oldukça önem taşımaktadır.

2.3. Analizin Tarihi ve Analiz Dersi

Analiz (Calculus) kavramının kelime kökenine inildiğinde, Latince de saymak ve hesaplamak için kullanılan “çakıl taşı” anlamına gelmektedir. Bu yüzdendir ki Analiz, matematiğin çakıl taşı olarak da görülmektedir. Analizin kavramsal alanı çok geniştir ve temel anlamda Analizi gerçek sayılar, fonksiyon, limit, süreklilik, türev ve integral kavramları oluşturmaktadır. Analiz, 16. ve 17. yüzyıl astronomi, fizik ve matematik alanlarındaki bilim insanlarının, evreni anlamak ve yorumlamak için yürüttükleri çalışmalar sonucunda ortaya çıkmıştır (Çetinkaya, Erbaş ve Alacacı, 2013). Analiz kavramlarının varlığı sezgisel olarak milattan öncesine dayanmasına rağmen bilinen anlamda ilk kullanımları 1637’de Descartes (1596-1650) ve Fermat’ın (1601-1665) analitik geometriyi keşfetmesinden sonra gerçekleşmiştir.

Analiz’in temelleri ilk olarak aynı dönemde fakat birbirinden farklı zamanlarda Isaac Newton (1642-1727) ve Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) tarafından atılmıştır. Newton, Analizi hareketi ve hızı anlamının bir yolu olarak düzgün ve sürekli değişen akışkanlar üzerine tanımlamıştır. Bu yaklaşıma göre tanımlanan akışkanların hızlarının oranına günümüzde türev denmektedir (Çetinkaya ve diğerleri, 2013). Leibniz ise Analiz ile ilgili çalışmalarında sonsuz küçük kavramını kullanmış ve türevi eğri üzerindeki bir (x, y) noktasındaki teğetin eğimi olan diferansiyellerin oranı veya sonsuz küçük miktarların farkının oranı şeklinde tanımlamıştır (Çetinkaya ve diğerleri, 2013). Ayrıca ayrı zamanlarda Leibniz’in ve Newton’un, bir eğrinin altında kalan alanın, türevin tersi alınarak hesaplanabileceğini kanıtlaması, Analizin geometriden bağımsız bir şekilde gelişmesine hız kazandırmıştır (Yavuz, 2013). Türevin keşfedildiği dönem olarak bilinen 17. yüzyılda Newton ve Leibniz türevi tanımlarken “sonsuz küçük” gibi kavramlara ihtiyaç duymuşlardır. Bu ihtiyaç doğrultusunda çok küçük olan bu sayıları Newton “akış (değişen, kararsız)”, Leibniz ise “diferansiyeller” olarak adlandırmıştır (Arslan ve Çelik, 2013). Fakat bu tanımlamalar “sonsuz küçük” kavram tanımının tam anlamıyla yapılmasına yetmemiş ve bu durum matematikçiler arasında anlaşmazlıklara sebep olmuştur. Bu anlaşmazlıklar 18. yüzyıl

boyunca devam etmiş ve bir fikir birliği sağlanamamıştır. Her ne kadar fikir birliği sağlanamasa da bu dönemde Euler, Maclaurin, Lagrange ve dönemin diğer matematik ve fizikçileri türevin gelişimine katkıda bulunmuşlardır. 19. yüzyılın başlarında Cauchy'nin (1789-1855) limit kavramını tanımlaması ve Karl Weierstrass'ın (1815-1884), çalışmalarını Cauchy'nin çalışmalarıyla birleştirerek limitin $\varepsilon - \delta$ tanımını yapmasıyla sonsuz küçük kavramından kaynaklanan kriz son bulmuştur (Arslan ve Çelik, 2013). Bahsedildiği üzere her ne kadar limit kavramının tanımlanması 19. yüzyılın başlarına dayansa da, kavram olarak milattan öncesine dayanmaktadır. Bu tarihsel gelişim içerisinde limit kavramına ilk kez Zeno'nun (MÖ 450) paradokslarının çözümünde ihtiyaç duyulmuştur. Örneğin Zeno'nun ok paradoksunda, hedef tahtaya atılan bir okun hedefe varabilmesi için önce mesafenin yarısını, sonra kalan mesafenin yarısını, sonra da kalanın yarısını vb. yol alması beklenmektedir (Arslan ve Çelik, 2013). Görüldüğü gibi limit fikri, üstü kapalı bir şekilde de olsa, Zeno'nun ok paradoksunda görülmektedir.

Sonuç olarak, sezgisel olarak limit kavramı tarihte milattan öncesine dayansa da tam anlamıyla tanımlanması 19. Yüzyılda gerçekleşmiştir. Limit kavramının formal tanımının yapılması, sonsuz küçük kavramının anlaşılmasına ve türevin tanımlanmasındaki tutarsızlıkların ortadan kalkmasına neden olmuştur. Tarihte limit, türev ve integral kavramlarının tanımlarının yapılmasıyla Analiz daha sağlam temeller üzerine oturtulmuştur.

Bilim insanlarının evreni anlamak ve yorumlamak amacıyla yaptıkları çalışmalar sonucunda ortaya çıkan Analiz kavramı günümüzde, eğrilerin eğimlerinin hesaplanmasında, robot yapımı ve bilgisayar üretimlerinde, diferansiyel denklemler ve sayısal analiz tekniklerinde, anten ve rüzgar gülü yapımlarında, biyolojik üremeler ve hastalıkların yayılmasını modellemede, düzgün olmayan şekillerin alanlarını, hacimlerini ve ağırlık merkezlerini belirlemede, topolojik denklemler ve elektrik devre analizlerinde, Dünya'nın yerçekimi alanından kurtulması için gereken hızı hesaplamada, bir sıvının düşey bir duvar üzerindeki hidrostatik basıncı hesaplamada ve sayılabilecek daha birçok yerde kullanılmaktadır. Kısacası Analiz günümüzde matematik, fizik, mühendislik, astronomi, kimya, tıp, ulaşım, gıda gibi neredeyse her alanda kullanılmaktadır da denilebilir.

Analizin hayatımızda bu denli öneme sahip olmasıyla birlikte öğrencilerin Analizin yapıtaşları olan limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarıyla tanışması ilk olarak ortaöğretim müfredatında gerçekleşmektedir. Sonrasında ise öğrencilerin Analiz dersini meslek hayatlarında aktif olarak kullanması gereken; matematik ve fen bilimleri eğitimi, mühendislik, mimarlık, istatistik, ekonomi, finans gibi daha birçok bölümde zorunlu olarak okutulmaktadır. Analizin birçok bilim dalı için önem teşkil etmesi Analiz kavramlarının

etkili öğretimini gerektirmektedir. Etkili bir öğretimin gerçekleşmesi için ise öğretmenlerin güçlü alan bilgilerine sahip olmaları gerekmektedir. Bu nedenle geleceğin matematik öğretmenlerinin yetiştirildiği İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği lisans programlarında, Analiz dersi öğretimin ilk üç yarıyılında yer almaktadır.

İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliğinin ilk yarıyılı zorunlu derslerinden olan Analiz I dersi kapsamında; “kümeler ve sayı sistemleri; bağıntı fonksiyon çeşitleri, üstel fonksiyonlar, logaritmik fonksiyonlar; limit, süreklilik, kavramları ve uygulamaları; türev ve türevin uygulamaları ve grafik çizimleri” konuları yer almaktadır (Yükseköğretim Kurulu [YÖK], 2018). İkinci yarıyılı zorunlu derslerinden olan Analiz II dersinde; “trigonometrik fonksiyonlar, trigonometrik bağıntılar, trigonometrik denklem çözümleri; karmaşık sayılar ve özellikleri; Riemann toplamı, belirli integral, belirsiz integral, integral alma yöntemleri, integralin uygulamaları, has olmayan integraller, seriler ve yakınsaklık testleri” konuları yer almaktadır (YÖK, 2018). Son olarak üçüncü yarıyılıda zorunlu olarak okutulan Analiz III dersi kapsamında ise “çok değişkenli fonksiyonlar; limit, süreklilik, fonksiyon dizi ve serileri; türev, yönlü türev, kısmi türev, kısmi türevin geometrik yorumu, yüksek mertebeden türevler ve zincir kuralı” yer almaktadır (YÖK, 2018).

Analiz dersi, İlköğretim ve Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği müfredatında görüldüğü gibi sıkı bir ardışıklık içerisinde yer almakta ve soyut yapısından dolayı öğrencilerin zorlandığı ve çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğu dersler arasında gelmektedir. Fakat öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışları belirlenmediği ve giderilmediği takdirde bir sonraki öğrenmelerini derinden etkileyecektir. Örneğin limit kavramına ait kavram yanlışına sahip bir öğrenci türev kavramını öğrendiğinde sahip olduğu kavram yanlışısı daha da güçlenecek ve ortadan kaldırılması gittikçe zorlaşacaktır. Sonuç olarak Analiz dersinin bu ardışık yapısı öğrenilen her bir kavramın önemini daha da arttırmaktadır.

Literatür öğrencilerin Analiz I ve II derslerinde okutulan fonksiyon, trigonometri, karmaşık sayılar limit, süreklilik, türev, integral, diziler ve seriler konularına ait çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğunu göstermektedir (Bingölbali, 2015; Dereli, 2015; Gökçek ve Akyıldız, 2016; Li ve diğerleri, 2017; Özkaya ve İşleyen, 2012; Özmantar ve Yeşildere, 2015). Fakat Analiz III dersi içerisinde yer alan çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlarına ilişkin herhangi bir çalışmanın bulunmadığı görülmüştür. Bu nedenle öğrencilerin birçok kavram yanlışına sahip olduğu tespit edilen fonksiyon, limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarını temelinde barındıran çok değişkenli fonksiyonlarda türev kavramında da kavram

yanılgılarına sahip olduğu düşünülmektedir. Çalışmamız Analiz III dersinde yer alan çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki öğrencilerin sahip olduğu kavram yanılgılarını belirlemeyi amaçladığından bölümün devamında çok değişkenli fonksiyonlarda türev konusunda yer alan kavramların açıklamalarına yer verilecektir.

2.4. Çok Değişkenli Fonksiyonlar

İki veya daha fazla bağımsız değişkene sahip olan fonksiyonlara çok değişkenli fonksiyon denmektedir. Başka bir deyişle, bir u değişkeninin değerleri $x, y, z, \dots$ değişkenlerinin değerlerine bağlı olarak yazılabiliyorsa, u değişkeni $x, y, z, \dots$ değişkenlerinin bir fonksiyonudur ve bu fonksiyon $u = f(x, y, z, \dots)$ şeklinde gösterilmektedir (Karadeniz, 1988). Belirtilen u fonksiyonu çok değişkenli fonksiyon olarak adlandırılmaktadır. Eğer ki çok değişkenli bir fonksiyonda bağımsız değişken sayısı iki olursa iki değişkenli fonksiyon; üç olursa, üç değişkenli fonksiyon; n olursa, n değişkenli fonksiyon elde edilmektedir.

Günlük yaşamda ve ilköğretim kademesinden itibaren karşılaşılan birçok fonksiyon aslında birden fazla bağımsız değişkene sahiptir. Örneğin öğrencilerin ilköğretim kademelerinden itibaren karşılaştıkları $X = V \cdot t$ fonksiyonu, hız ve zamana bağlı olarak alınan yolu hesaplamak için kullanılmaktadır. Görüldüğü gibi burada bağımlı değişken olan alınan yol, iki bağımsız değişkene (hız ve zaman) bağlı olarak değişeceğinden, iki değişkenli fonksiyonlara örnek verilebilir. Benzer şekilde $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ fonksiyonu ile bir koninin hacmi hesaplanmaktadır. Öğrencilerin ilköğretim kademesinde karşılaştıkları bu fonksiyonda koninin hacmi, yarıçap ve yükseklik değişkenlerine bağlı olarak değişeceğinden çok değişkenli bir fonksiyondur. Verilen örnekler incelendiğinde aslında ilköğretim seviyelerinde karşılaşılan bazı fonksiyonların, çok değişkenli fonksiyonlara örnek olarak gösterilebileceğini görmekteyiz. Bu örnekler genişletilecek olursa dünya yüzeyindeki bir noktanın sahip olduğu T sıcaklığı, enlemi x ve boylamı y 'ye bağlıdır ve $T = f(x, y)$ ile ifade edilir. Bir elektrik devresinin verdiği ısı miktarı $Q = Ri^2t$ olup devrenin direnci, akım ve zamanın bir fonksiyonudur ve $Q = f(R, i, t)$ ile ifade edilir. Bir yatırımcının r faiz oranı ile bankaya yatırmış olduğu P miktarındaki anaparanın t dönem sonraki değeri $S = P \cdot (1 + r)^t$ olarak bulunur ve $S = f(P, r, t)$ ile ifade edilir. Bir cismin kinetik enerjisi $E_K = \frac{1}{2}mV^2$ olup, cismin hızı ve kütlesine bağlı olarak, potansiyel enerjisi ise $E_p = mgh$ olup, cismin kütlesine, yer çekimi ivmesine ve yüksekliğine bağlı olarak değişmektedir. Örneklerin sayısı çoğaltılabileceği gibi belirtilen fonksiyonların hepsi çok değişkenli fonksiyonlara örnektir. Verilen örnekler çok değişkenli fonksiyonların birçok alanda

kullanıldığı ve günlük yaşamda ne denli öneme sahip olduğunu açıkça göstermektedir. Hatta çok değişkenli fonksiyonların uygulama alanlarının, tek değişkenli fonksiyonlara göre daha geniş olduğu söylenebilir. Uygulama alanı oldukça geniş olan çok değişkenli fonksiyonlar, Analiz I ve II, Diferansiyel Geometri, Uygulamalı Matematik, Fonksiyonel Analiz gibi ilgili tüm matematik alanlarına temel oluşturmaktadır (Biber ve Argün, 2012). Fakat söz konusu kavramın uygulamada kullanılabilmesi için ona ilişkin “çok değişkenli fonksiyonlarda türev” kavramının da öğrenilmesi gerekmektedir. Bu nedenle sonraki kısımlarda çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan kavramlardan bahsedilecektir.

2.5 Kısmi Türev

Tek değişkenli fonksiyonlarda fonksiyonun türevi, x bağımsız değişkeni Δx kadar arttırıldığında, fonksiyonun $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ artmasının Δx 'e oranının bulunup, bu Δx artışının sıfıra götürülerek limitinin alınmasıyla elde edilmektedir (Caferov, 1999).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$u = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu verildiğinde ise bağımsız değişkenlere $\Delta x, \Delta y$ artmaları verildiğinde fonksiyonun artması $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 'dir. Bu artmanın bağımsız değişkenlerin artması olan $(\Delta x, \Delta y)$ 'ye oranı anlamlı değildir. Bu nedenle çok değişkenli fonksiyonlarda bağımsız değişkenlerden yalnızca biri değiştirilip, diğerleri sabit tutularak fonksiyon tek değişkenli fonksiyona dönüştürülür ve artık yeni fonksiyonun türevinden söz edilebilir (Caferov, 1999).

Dolayısıyla çok değişkenli bir $u = f(x, y, z, \dots)$ fonksiyonunda, eğer bağımsız değişkenlerden biri değiştirilip, diğer bağımsız değişkenler sabit tutulursa ve u fonksiyonunun değiştirilen değişkene göre türevi mevcut ise bu türeve $u = f(x, y, z, \dots)$ fonksiyonunun değiştirilen değişkene göre kısmi türevi denir (Karadeniz, 1988). Çok değişkenli fonksiyonlarda bağımsız değişken sayısının birinci mertebe kısmi türevler elde edilir. Örneğin iki değişkenli $z = f(x, y)$ fonksiyonunda, eğer y sabit tutularak, x değiştirilirse ve z fonksiyonunun x 'e göre türevi varsa, bu türeve x 'e göre kısmi türev; eğer x sabit tutularak, y değiştirilirse ve z fonksiyonunun y 'ye göre türevi varsa bu türeve y 'ye göre kısmi türev denir. Kısmi türevleri, normal türevlerden ayırt etmek için d yerine ∂ sembolü kullanılır. $z = f(x, y)$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevleri aşağıdaki sembollerden biri ile gösterilmektedir (Karadeniz, 1988; Thomas, 2010).

$$f_x, \quad f'_x, \quad f_x(x, y), \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_x, \quad z'_x$$

$$f_y, \quad f'_y, \quad f_y(x, y), \quad f'_y(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_y, \quad z'_y$$

Bu kısmi türevler için oluşan limit tanımları ise aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

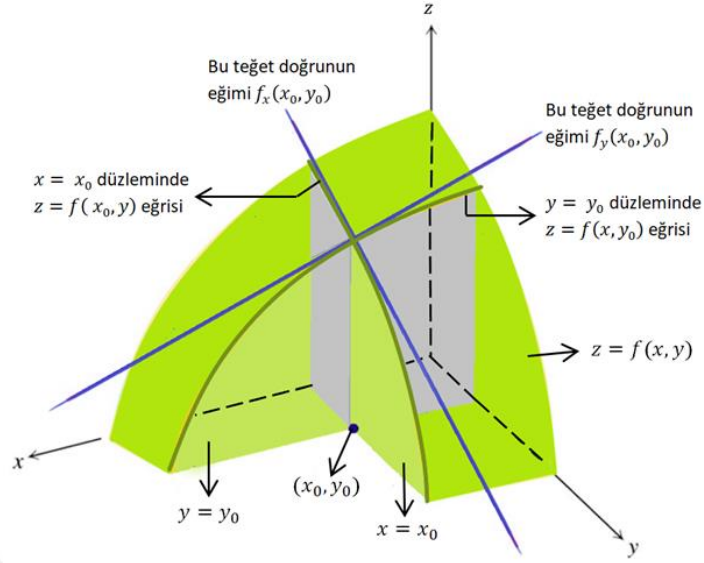
2.5.1 Kısmi türevin geometrik yorumu

Tek değişkenli fonksiyonlarda türev kavramı sembolik olarak farkların oranının limiti, fiziksel olarak hız, sözel olarak anlık değişim oranı ve grafiksel olarak bir eğriye bir noktadan çizilen teğetin eğimi olarak çok farklı şekillerde temsil edilebilir (Bingölbalı, 2015). Kısmi türev de farklı temsil biçimleriyle gösterebilmektedir. Bu temsil biçimlerinden birisinin farkların oranının limiti şeklinde olduğunu göstermiştik. Şimdi ise kısmi türevin grafiksel temsil biçiminden yani geometrik yorumundan bahsedilecektir. $z = f(x, y)$ fonksiyonunun gösterdiği S yüzeyi üzerinde bir nokta $P(x_0, y_0, z_0)$ olsun. P noktasından $y = 0$ düzlemine paralel bir düzlem çizildiğinde, bu düzlem üzerindeki noktalar için $y = y_0$ olur. Bu düzlemin S yüzeyi ile arakesiti denklemi $z = f(x, y_0)$ olan bir eğridir. $\frac{\partial z}{\partial x}$ kısmi türevi arakesit eğrisinin P noktasındaki teğetin eğimidir (Şekil 3). Buna göre z yüzeyinin x 'e göre kısmi türevi geometrik yorumu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$m_1 = \tan \alpha = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_P = f_x(x_0, y_0)$$

Benzer şekilde P noktasında $x = x_0$ düzlemi ile yüzeyin arakesiti olan $z = f(x_0, y)$ eğrisinin bu noktadaki teğetin eğimi (Şekil 3) aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$m_2 = \tan \beta = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_P = f_y(x_0, y_0)$$



Şekil 3. Bir $z = f(x, y)$ fonksiyonunun birinci mertbe kısmi türevlerinin grafiksel yorumu

2.5.2 İkinci mertebeden kısmi türev

$z = f(x, y)$ çok değişkenli fonksiyonu için elde edilen $\frac{\partial z}{\partial x}$ ve $\frac{\partial z}{\partial y}$ kısmi türevleri de x ve y 'nin fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla, elde edilen kısmi türevlerin de x ya da y 'ye göre tekrar kısmi türevleri hesaplanabilmektedir. Örneğin $z = f(x, y)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f_{xx} = f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yx} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yy} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Benzer şekilde n . mertebeden kısmi türevlerde elde edilebilir.

2.6 Bileşik Fonksiyonların Türevleri

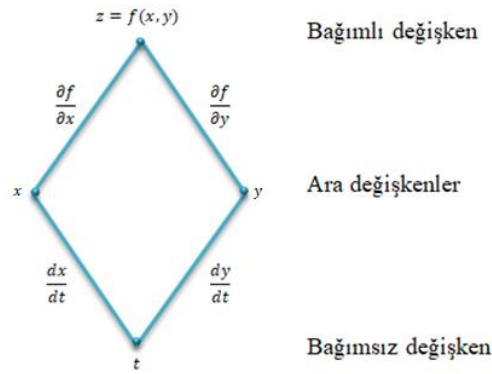
Çok değişkenli bileşik fonksiyonların türevi hesaplanırken, tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi “Zincir Kuralı” kullanılmaktadır. Çok değişkenli fonksiyonlar için Zincir Kuralının birkaç farklı formu vardır. Bu formlar verilen bir f fonksiyonunda ve

bahsedilen f fonksiyonun bağılı olduğu fonksiyonların kaç değişkenli olduğuna bağlıdır. Aşağıda yalnızca iki ve üç değişkenli fonksiyonlara örnek verilmiştir. Fakat bahsedilen kurallar ikiden fazla değişkenli fonksiyonlara da kolaylıkla uygulanabilmektedir.

$x = x(t), y = y(t)$ 'nin her biri türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere $z = f(x, y)$, x ve y 'nin türevlenebilen bir fonksiyonu ise u fonksiyonuda t 'nin türevlenebilen bir fonksiyonudur ve

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Şekil 4'teki ağaç diyagramı yukarıdaki gibi çok değişkenli bileşke fonksiyonların kuralını hatırlanmasında yardımcı olacaktır (Thomas, 2010).

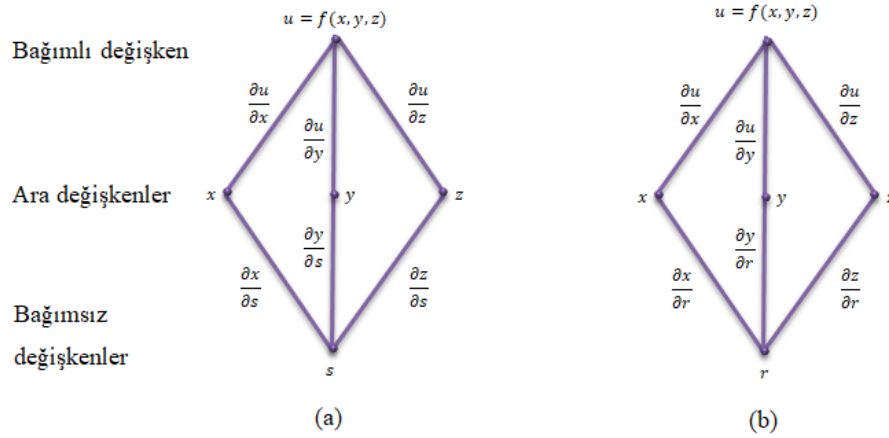


Şekil 4. Bir bağımsız değişkenli ve iki ara değişkenli fonksiyon için zincir kuralı

Yüzeyler üzerinde tanımlanan fonksiyonları inceleyecek olursak, $u = f(x, y, z)$, $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ olsun. Eğer ki x, y, z ara değişkenleri bu şekilde iki bağımsız değişkene sahipse $\frac{du}{dt}$ türevi yerine $\frac{\partial u}{\partial s}$ ve $\frac{\partial u}{\partial t}$ kısmi türevleri söz konusu olacaktır. Başta belirtilen u, x, y ve z fonksiyonları türevlenebiliyorsa u 'nun s ve t 'ye göre kısmi türevleri vardır ve bunlar aşağıdaki formüllerle hesaplanır (Thomas, 2010). Her iki denklem için oluşturulan ağaç diyagramları Şekil 5'te gösterilmektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \quad (a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \quad (b)$$



Şekil 5. İki bağımsız değişkenli ve üç ara değişkenli fonksiyonun zincir kuralı

2.7. Yöne Göre Türev

$z = f(x, y)$ şeklinde verilen bir fonksiyonun f_x ve f_y kısmi türevlerinin, z fonksiyonunun x ve y yönündeki değişim hızlarını temsil ettiğini hatırlayalım. Şimdi ise z fonksiyonunun x ya da y eksenlerine paralel olmayan bir $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ birim vektörü yönündeki değişim hızını bulmak istediğimizde ne yapmamız gerektiğine cevap arayacağız. İşte bu soruyu yöne göre türev diğer bir adıyla doğrultu türevi kavramı ile açıklayacağız. Bu açıdan bakıldığında kısmi türev, yönlü türevin özel bir hali olarak karşımıza çıkmaktadır. Kavramın daha anlaşılır olması açısından iki değişkenli bir $f(x, y)$ fonksiyon üzerinde açıklama yapılacaktır. $f(x, y)$ fonksiyonunun bir S bölgesinde tanımlı olduğunu, $P_0(x_0, y_0)$ noktasının S 'de tanımlı bir nokta olduğunu ve $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ vektörünün bir birim vektör olduğunu varsayalım. Ayrıca $x = x_0 + sa$ ve $y = y_0 + sb$ parametrik denklemleri P_0 noktasından u vektörüne paralel olan doğruyu gösteriyorsa bu durumda f fonksiyonunun bir P_0 noktasında u vektörü yönündeki değişim oranı $\frac{df}{ds}$ hesaplanarak bulunur (Thomas, 2010). Tek değişkenli fonksiyonlardakine benzer şekilde f fonksiyonunun P_0 noktasında $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ birim vektörü yönündeki yönlü türevi, limitinin var olması şartıyla,

$$\left(\frac{df}{ds} \right)_{u, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + sa, y_0 + sb) - f(x_0, y_0)}{s}$$

şeklinde bulunur. Belirtilen f fonksiyonunun yönlü türevi $(D_{\vec{u}}f)_{P_0}$ şeklinde gösterilmektedir.

Yöne göre türev, fiziksel olarak çok değişkenli fonksiyonların herhangi bir $\vec{u}$ (birim vektörü) yönündeki değişim hızını bulmamıza yardımcı olmaktadır. Bu kavramı ayrıca

geometrik olarak açıklamak mümkündür. Bu durumda $z = f(x, y)$ denkleminin temsil ettiği bir S yüzeyi ve bu yüzeyin üzerinde bulunan bir P noktası olsun. P noktasından ve u birim vektörüne paralel olarak geçen dikey düzlem S yüzeyini bir C eğrisinde keser. Bu durumda f fonksiyonunun $\vec{u}$ yönündeki değişim oranı C eğrisinin P noktasındaki teğetinin eğimi şeklinde açıklanabilir (Thomas, 2010).

Yukarıda verilen yöne göre türevin limit tanımı ile ikiden çok değişkenli fonksiyonların yöne göre türevini hesaplamak her zaman kolay olmamaktadır. Bu nedenle diferansiyellenebilir bir f fonksiyonunun yöne göre türevini hesaplamak için daha etkili bir formül geliştirilmiştir. Eğer $f(x, y, z)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise f fonksiyonunun, herhangi bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında her $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ yönünde yöne göre türevi vardır ve bu türev

$$(D_{\vec{u}}f)_{P_0} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_0} i + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_0} j + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{P_0} k \right]}_{f \text{ fonksiyonunun } P_0 \text{ noktasındaki gradyanı}} \cdot \underbrace{[ai + bj + ck]}_{u \text{ yönü}}$$

şeklinde bulunmaktadır (Thomas, 2010).

Burada bahsedilen gradyan vektörü, f fonksiyonunun kısmi türevlerinin P_0 noktasında hesaplanmasıyla elde edilen

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_0} i + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_0} j + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{P_0} k$$

vektörüdür. Burada ki ∇f gösterimi “ f ’nin gradyanı”, “del f ” ve “grand f ” şeklinde okunur (Thomas, 2010). Sonuç olarak çok değişkenli diferansiyellenebilir bir f fonksiyonunun P_0 noktasında u yönündeki türevinin, f ’nin P_0 ’daki gradyanı ile u vektörünün skaler çarpımı olduğunu söyleyebilir. Bahsedilen formül ikiden daha çok değişkenli fonksiyonların yöne göre türevini bulmak için kolaylıkla uygulanabilmektedir.

2.8. Bir Yüzeyin Teğet Düzlemi ve Normalinin Denklemleri

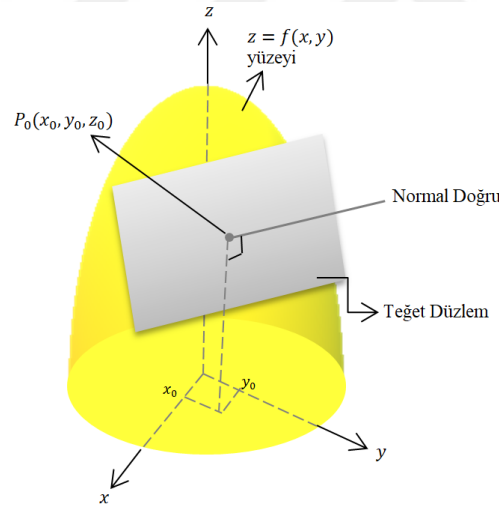
Uzayda düzgün bir yüzey üzerindeki bir noktadan geçen teğet düzlemin denklemi yüzeyi tanımlayan fonksiyonun kısmi türevlerinden elde edilmektedir. Aslında bu fikir tek değişkenli fonksiyonlar için koordinat düzleminde bir eğri üzerinde bir noktadan geçen teğet doğruyu tanımlamaya benzer (Thomas, 2010). Örneğin “ $z = f(x, y)$ ” denklemiyle tanımlanmış bir yüzeyi inceleyelim. Bir doğrunun herhangi bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında bu yüzeye teğet olması, yüzeyin bu noktadan geçen ve bu yüzey üzerinde bulunan bir eğriye

teğet olması demektir. O halde bu yüzey üzerine, P_0 noktasından sonsuz sayıda eğri çizilebileceğine göre, yüzeyin bu noktadan geçen sonsuz sayıda teğeti olacaktır. Dolayısıyla P_0 noktasındaki tüm teğetler, bu noktadaki normale dik olacak ve aynı bir düzlem üzerinde bulunacaktır” (Karadeniz, 1988). İşte bu düzleme yüzeyin P_0 noktasındaki teğet düzlemi denmektedir. P_0 noktasından geçen ve düzleme dik olan doğru ise yüzeyin P_0 ’daki normalidir. Şekil 6’da $z = f(x, y)$ yüzeyinin $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusu gösterilmektedir. O halde $z = f(x, y)$ yüzeyinin $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

şeklindedir. Normalinin denklemi ise

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{f_z(x_0, y_0)} \text{ dir.}$$

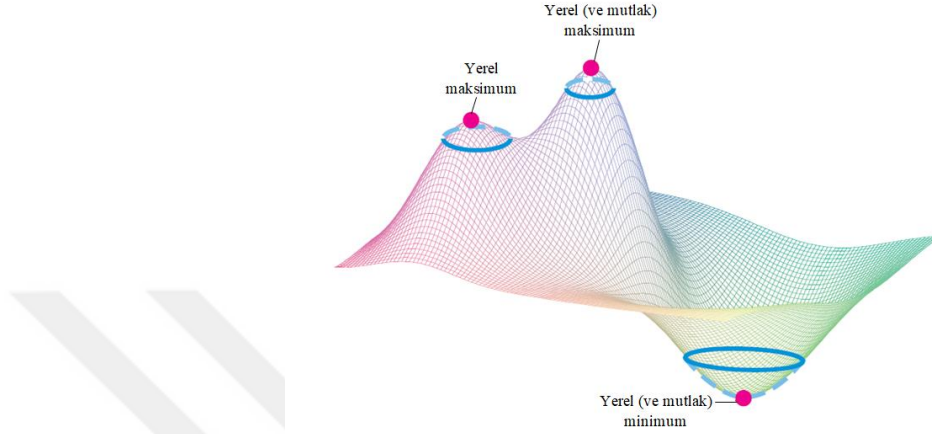


Şekil 6. $z = f(x, y)$ yüzeyinin P_0 noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusu

2.9. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Maksimum ve Minimum

Analizin en önemli uygulamalarından biri olan çok değişkenli fonksiyonlarda maksimum-minimum kavramlarına günlük hayatımızın birçok alanında yararlanılır. Örneğin devrenin direnci, akımı ve zamana bağlı olarak değişen bir elektrik devresinin verdiği ısı miktarının minimum olduğu değeri hesaplamak istediğimizde çok değişkenli fonksiyonlarda minimum kavramından, elipsoid şeklindeki bir kutu içerisine dikdörtgenler prizması şeklinde yerleştirebileceğimiz maksimum hacimli kutuyu belirlemek istediğimizde çok değişkenli fonksiyonlarda maksimum kavramından yararlanılır. Ya da çalışan maaşları, ürün maliyetleri gibi birden fazla değişkene bağlı olarak değişen bir şirketin yıllık kazancını

belirten bir fonksiyon tanımladığımızda, bu şirketin yıllık maksimum veya minimum kazancını hesaplamak istersek yine çok değişkenli fonksiyonlarda maksimum-minimum kavramlarından yararlanırız. Bu örnekler genişletilebilir ve örneklerin sayısı arttıkça günlük hayatımızın daha birçok alanında belirtilen kavramlar ile karşılaşıldığı görülebilir.



Şekil 7. Bir f fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremumlarının grafik üzerinde gösterimi (Thomas, 2010)

Şekil 7’de görüldüğü üzere iki değişkenli fonksiyonların maksimum-minimum noktaları, grafik üzerinde sezgisel olarak, tek değişkenli fonksiyonların maksimum-minimum noktaları ile benzerlik göstermektedir. Yine de biçimsel olarak farkını ayırt edebilmek için iki değişkenli fonksiyonlarda maksimum ve minimum kavramlarını tanımlamak fayda sağlayacaktır. $f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasını içeren bir R bölgesinde tanımlı olsun.

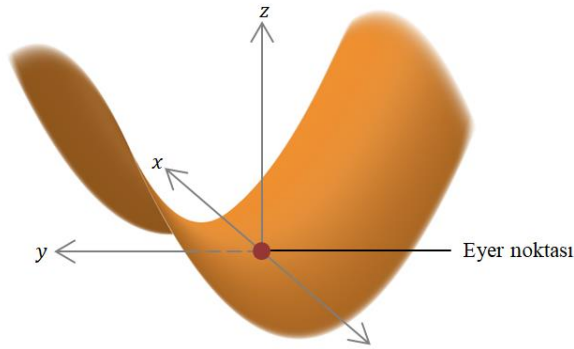
- (a, b) komşuluğundaki her (x, y) için $f(x, y) \leq f(a, b)$ ise f fonksiyonunun (a, b) noktasında bir *yerel maksimumu* vardır.
- (a, b) komşuluğundaki her (x, y) için $f(x, y) \geq f(a, b)$ ise f fonksiyonunun (a, b) noktasında bir *yerel minimumu* vardır.
- Eğer verilen eşitsizlikler f fonksiyonunun tanım kümesindeki her (x, y) için sağlanıyorsa, $f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında *mutlak maksimumu* ya da *mutlak minimumu* vardır.

Tek değişkenli fonksiyonlara benzer şekilde iki değişkenli fonksiyonların yerel ekstremum (maksimum-minimum) noktalarını birinci türev testi ile belirleriz. Bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinde yer alan (a, b) noktasında yerel maksimum veya minimum değeri var ve o noktada f fonksiyonunun birinci mertebe kısmi türevleri varsa,

$$f_x(a, b) = 0 \text{ ve } f_y(a, b) = 0$$

olur (Thomas, 2010). Eğer bir $f(x, y)$ fonksiyonunun tanım kümesinde yer alan bir noktada $f_x(a, b) = 0$ ve $f_y(a, b) = 0$ ise veya bu kısmi türevler mevcut değilse bu nokta f fonksiyonunun bir kritik noktası olarak adlandırılır (Karadeniz, 1988). Fakat tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi iki değişkenli fonksiyonlarda da her kritik nokta, yerel maksimum ya da yerel minimum noktası değildir.

Tek değişkenli diferansiyellenebilir bir fonksiyonun büküm noktasına benzer şekilde iki değişkenli diferansiyellenebilir fonksiyonlarda eyer noktası olabilmektedir (Thomas, 2010). Diferansiyellenebilir bir $f(x, y)$ fonksiyonunun kritik noktası (a, b) olsun. Eğer (a, b) noktasının her komşuluğunda $f(x_1, y_1) \leq f(a, b)$ olacak şekilde bir (x_1, y_1) noktası ve $f(x_1, y_1) \geq f(a, b)$ olacak şekilde bir (x_2, y_2) noktası varsa (a, b) noktasına fonksiyonun bir eyer noktası denir (Şekil 8) (Karadeniz, 1988).



Şekil 8. $z=f(x,y)$ yüzeyinin orjiniinde bir eyer noktası

İki değişkenli fonksiyonlarda yerel ekstremum noktalarını belirlemek için ikinci türev testini uygulamamız gerekmektedir. Bu teste göre bir $f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında sürekli kısmi türevlere sahip ve $f_x(a, b) = 0$ ve $f_y(a, b) = 0$ olsun. Bu durumda;

- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ve $f_{xx} < 0$ ise, $f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında bir yerel maksimumu vardır.
- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ve $f_{xx} > 0$ ise, $f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında bir yerel minimumu vardır.
- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ise $f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında bir eyer noktası vardır.
- $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ise ikinci türev testi bilgi vermez. Bu durumda $f(x, y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasındaki davranışını belirlemek için başka bir yol izlemek gerekir (Thomas, 2010).

2.10. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde matematik eğitimi üzerine yapılan çalışmalar incelenerek, araştırmamıza kaynak teşkil edecek “kavram yanlışları, hata ve zorluk” kavramları ile ilgili yurt içinde ve yurt dışında yapılan araştırmalara yer verilmiştir.

2.10.1. Yurt içinde yapılan araştırmalar

Okur ve Gürel (2016) “Ortaokul 6. ve 7. Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusundaki Kavram Yanlışları” adlı çalışmalarında literatürde var olan ve ilk defa tespit edilen kavram yanlışları arasından en yaygın olanlarını ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Araştırmanın örneklemini, Erzincan ilinde öğrenim görmekte olan 60 ortaokul öğrencisi oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak literatürde var olan kesirler konusuna ilişkin sekiz adet kavram yanlışlığı belirlenmiş ve belirlenen her bir kavram yanlışlığına ilişkin ikişer soru olmak üzere 16 sorulu açık uçlu bilgi testi kullanılmıştır. Verilerin analizi sonucunda belirlenen kesirler konusuna ilişkin sekiz adet kavram yanlışlığından öğrencilerin en çok “parça-bütün ilişkisi” konusunda kavram yanlışlığına sahip olduğu; en az kavram yanlışlığına ise “kesirlerde toplama işlemi” konusunda sahip oldukları belirlenmiştir.

Karaağaç ve Köse (2015) tarafında yapılan çalışmada matematik öğretmenleri ve öğretmen adaylarının, öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanlışlarına ilişkin mevcut bilgilerini araştırmayı amaçlanmaktadır. Araştırmanın örneklemini bir üniversitenin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim görmekte olan 2 öğrenmen adayı, ortaokulda görev yapmakta olan 4 matematik öğretmeni ve bir ortaokulun 7. Sınıfında okuyan 90 öğrenci oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak iki aşamalı kavram yanlışlığı testleri ile öğretmen ve öğretmen adaylarına yarı yapılandırılmış mülakatlar uygulanmıştır. Çalışmada araştırmada kullanılan sorulardan yalnızca bir tanesine ilişkin bulgular sunulmuştur. Bulgular sonucunda birçok öğrencinin kesrin parça-bütün anlamına ilişkin kavram yanlışlığına sahip olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen ve öğretmen adayları (çalışma grubundaki öğrencilerin öğretmeni de dahil olmak üzere) bu durumu öngörebilmişlerdir fakat yine de ilgili öğretmenin öğrencilerinin belirlenen kavram yanlışlığına sahip olduğu belirlenmiştir. Ayrıca araştırma öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerin kavram yanlışlıklarını açıklamada yetersiz olduğu ve pedagojik alan bilgisi açısından büyük oranda eksikliklerinin olduğunu göstermektedir.

Önal (2017) araştırmasında ilkökul 1. ve 2. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde dört işlemle ilgili yaptıkları hataları belirlemek ve yapılan bu hataların nedenlerini ortaya koyarak bu hatalara çözüm önerileri getirmek; bu hataların ailenin gelir düzeyine, okul öncesi eğitim alma durumuna, cinsiyete ve hatalara neden olan faktörleri belirlemek

amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda nitel araştırma yöntem ve teknikleri kullanılmıştır. Araştırmanın örneklemini düşük, orta ve yüksek sosyoekonomik düzeydeki okullarda öğrenim görmekte olan 327 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmada veriler, doküman incelemesi tekniği ile toplanmıştır. Doküman incelemesi sonucunda hata türleri arasında en fazla hata yaptığı düşünülen 60 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın sonucunda ilkokul birinci sınıf öğrencilerinin en sık yaptığı hata türünün “basamakları yanlış yere yerleştirme” olduğu; ikinci sınıf öğrencilerinin en sık yaptığı hata türünün ise “onluk bozduğu sayıyı eksiltmeme” olduğu görülmüştür. Çeşitli değişkenlere göre öğrencilerin dört işlem hatalarının dağılımına bakıldığında cinsiyete göre anlamlı bir farklılığın bulunmadığı; birçok hata türünde okul öncesi eğitim almayan ve ailesinin gelir durumu düşük olan öğrencilerin hata yapma oranının daha yüksek olduğu tespit edilmiştir.

Akın, İlhan ve Çelik (2019) çalışmalarında matematik öğretiminde Apartman Sudokosu materyali kullanımının matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünceleri ve kavram yanılgıları üzerindeki rolünü incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmanın katılımcılarını bir üniversitenin ikinci ve dördüncü sınıflarında okuyan 52 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak ikişer soru bulunan matematiksel düşünme becerilerini inceleme formu ve kavram yanılgısı formu kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda katılımcıların Apartman Sudokosu materyalini ürün olarak görmekten ziyade matematiksel düşünme becerisi süreci olarak gördükleri, genel anlamda kavram yanılgısı tanımını ve özelliklerinin ifade edebildikleri ve kullanılan materyaldeki olası kavram yanılgılarını doğru tespit edebildiği görülmüştür.

Kucam ve Demir (2020) araştırmalarında öğrencilerin matematik okuryazarlığı becerileri kapsamında kavram yanılgıları ile bu becerileri ölçmeye yönelik bir testteki yanıtlayıcı davranışları arasındaki ilişkileri belirlemeyi amaçlamaktadır. Araştırma üç okulun sekizinci sınıflarında öğrenim görmekte olan 340 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmada öğrencilere ilişkin veri toplamak için Kişisel Bilgi Formu, öğrencilerin matematik okuryazarlığı konusundaki kavram yanılgılarını belirlemek için İki Aşamalı Tanı Testi ve bu testteki maddelerin nasıl yanıtladığını belirlemek için Yanıtlayıcı Davranışları Formu kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerde iki veya daha fazla kavram yanılgısı türünün birlikte bulunduğu görülmüştür. Kavram yanılgısı olan öğrencilerin soruları yanıtlamada çoğunlukla eleme davranışını, en az yanıtı bırakma davranışını kullandıkları; kavram yanılgısı olmayan öğrencilerin ise çoğunlukla işlem yapma ve eleme davranışını, en az rastgele yanıtlama davranışını kullandıkları görülmüştür. Ayrıca sahip olunan kavram

yanılgısı türlerinin ve yanıtlayıcı davranışlarının öğrencilerin cinsiyetine göre farklılık göstermediği ve öğrencilerin yanıtlayıcı davranışlarının bulundukları ilçeye göre farklılaşmadığı belirlenmiştir.

Dereli (2015) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının diziler ve seriler konusundaki hata ve kavram yanılgılarını cinsiyet değişkeni açısından incelemeyi ve çözüm önerileri getirmeyi amaçlamaktadır. Çalışmanın katılımcılarını bir üniversitenin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı'nda öğrenim görmekte olan 97 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarına beşer adet açık uçlu soru soru yöneltmiş ve sorulara verilen yanıtlar 5'li anlama ölçeğine göre incelenmiştir. Araştırmanın sonucunda, öğretmen adaylarının bazı sorularda fazlaca kavram yanılgısına düştükleri görülmüştür. Ayrıca bazı sorularda kız öğrencilerin, bazı sorularda ise erkek öğrencilerin daha başarılı olduğu belirlenmiştir.

Öksüz ve Başışık (2019) tarafından yapılan çalışmada 5. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konularında sahip oldukları kavram yanılgılarının ve bu yanılgıların temelinde yatan düşünce biçimlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda çalışma 200 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmada 24 sorudan oluşan iki aşamalı teşhis testi kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda çoğu öğrencinin dörtgen ve çokgen gerek ve yeter şartlarını sıralayamadığı, üst sınıflama bilgisine sahip olmadığı, şekillerin alışık olunan konumlarda verilmediğinde tanınırlık oranlarının düştüğü ve yükseklik ve köşegen ile ilgili kavram yanılgılarına sahip olduğu görülmüştür. Kavram yanılgıları tespit edildikten sonra alınması gereken önlemler tartışılmıştır.

Yılmaz (2019) çalışmasında çokgen ve dörtgen sorularının yer aldığı teşhis testi kullanılarak kavram yanılgısı olduğu tespit edilen üç öğrencinin, GeoGebra dinamik geometri yazılımıyla hazırlanmış etkinlikler ile bilişsel çelişki oluşturularak kavram yanılgılarının giderilmesi amaçlanmıştır. Çalışmada altıncı sınıf 62 öğrenciye kavram yanılgısı teşhis testi uygulanmış ve kavram yanılgısına sahip olan 3 öğrenci ile klinik mülakatlar gerçekleştirilmiş, bunun ardından uygulanan son test ile üç öğrencinin öğrenme düzeyleri belirlenmiştir. Araştırmanın sonucunda çokgenler ve dörtgenler konusu beş ana başlığa ayrılmış ve her bir bölümdeki kavram yanılgıları belirlenerek kavram yanılgılarını gidermeye yönelik etkinlikler oluşturulmuştur. Etkinlikler sonucunda bilişsel çelişki temelli hazırlanan GeoGebra uygulamalarının, öğrencilerin kavram yanılgılarının giderilmesine, özel dörtgenlerin çizimine, dörtgenler hiyerarşisinin oluşmasına ve birbiriyle ilişkilendirilmesine olumlu katkı sağladığı tespit edilmiştir.

Mutlu ve Söylemez (2018) “Matematiksel Kavram Yanılgıları Konusunda Yapılmış Yüksek Lisans ve Doktora Tezlerinin İncelenmesi” adlı çalışmasında Türkiye’de matematiksel kavram yanılgılarına yönelik yayınlanmış olan yüksek lisans ve doktora tezlerini betimsel içerik analizi yöntemi ile incelemeyi amaçlamaktadır. Bu amaçla 1997-2015 yılları arasında yayınlanan üç tanesi doktora, kırk dokuz tanesi yüksek lisans tezine ulaşılmıştır. Yapılan inceleme doğrultusunda 2007 yılı ile beraber matematiksel kavram yanılgıları konusunda yapılan tezlerin sayısında önemli bir artış olduğu, ilkökul düzeyinde matematiksel kavram yanılgılarına yönelik hiçbir çalışmanın yapılmadığı, çalışmaların genel olarak ortaokul düzeyinde yoğunlaştığı, lisans düzeyinde yapılan çalışmaların ise lisans matematik derslerine yönelik olanlarının oldukça az olduğu görülmüştür. Ayrıca matematik öğretmenlerinin sahip oldukları kavram yanılgılarına ilişkin oldukça az sayıda çalışmaya ulaşılmıştır.

Gökçek ve Açıkyıldız (2016) tarafından yapılan araştırmanın amacı matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ve türev kavramını anlama sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya koymaktır. Araştırma Matematik Öğretmenliği Programı’nda okuyan 45 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Çalışmada veriler, araştırmanın problemi doğrultusunda türev ve limit, türev ve değişim oranı ilişkisini ortaya koymayı amaçlayan 2 yazılı sınav ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlar ile toplanmıştır. Verilerin analizi sonucunda türev ve limit ilişkisine yönelik bulgular, genel olarak öğretmen adaylarının bu ilişki hakkında yüzeysel bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Bu nedenle kavram arasındaki ifade etmeye çalışırken veya ilişkileri yorumlarken zorlandıkları ve bu ilişkilerin niteliği hakkında çok fazla fikirleri olmadığı görülmüştür. Türev ve değişim oranına yönelik bulgular öğretmen adaylarının ortalama hız ve anlık hız arasındaki ilişkiyi tam olarak bilmedikleri tespit edilmiştir. Türev-süreklilik ilişkisine yönelik ise öğretmen adaylarının sınırlı bir görüş içerisinde oldukları ortaya koyulmuştur.

Macit (2019) tarafından yapılan çalışmada 6. Sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki kavram imajlarının, kavram yanılgıları ve başarıları ile ilişkisinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaca yönelik araştırmanın örneklemini Malatya ilinde öğrenim görmekte olan 633 ortaokul öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri “Kesir Kavram İmajı Anketi”, “Üç Aşamalı Kesir Kavram Yanılgısı Teşhis Testi” ve “Kesir Başarı Testi” ile toplanmıştır. Araştırmanın sonucunda 6. Sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki başarı ve kavram yanılgısı puanlarının sahip oldukları kavram imajlarına göre anlamlı bir şekilde farklılaştığı tespit edilmiştir. Öğrencilerin en fazla sahip olduğu kavram imajlarının sırasıyla bölüm, parça-bütün ve pay-payda kavram imajları olduğu görülmüştür. Fakat araştırma

sonuçlarına göre parça-bütün kavram imajına sahip olan öğrencilerinin daha başarılı olduğu ve daha az kavram yanlışlığına sahip oldukları belirlenmiştir. Ayrıca araştırmaya katılan öğrencilerin kesirler konusundaki en fazla sahip olduğu kavram yanlışlığının ise “referans alınan bütün ne olursa olsun referans alınan aynı kesirlerin belirttikleri miktarların aynı olduğunun düşünülmesi” olmuştur.

Şimşek (2019) araştırmasında matematik öğretmen adaylarının fark etme becerilerini, kavram yanlışlıkları ve öğrenci zorlukları esas alınarak oluşturulan limit dersi videoları kullanılarak incelenmeyi amaçlamaktadır. Çalışmanın örneklemini bir devlet üniversitesinde Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programında öğrenim gören 19 matematik öğretmen adayı oluşturmaktadır. Veriler limit konusunda öğrencilerin yaşadığı zorluklar ve sahip oldukları kavram yanlışlıkları temel alınarak oluşturulan iki gerçek sınıf ortamı ders videosu ve ders gözlem formu aracılığıyla toplanmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarına izletilen ders videolarında ne fark ettikleri, nasıl fark ettikleri ve ders videolarında yer alan öğrenci zorluk ve kavram yanlışlıklarına dair neleri fark ettikleri araştırılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının izledikleri videolarda en çok “öğretmen” ve “pedagojik alan bilgisi” bileşenlerine odaklandığı görülmüştür. Nasıl fark ettiklerine dair bulgular incelendiğinde çoğu katılımcının önemli olayları açıklarken yorumlama yaptığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının ders videolarındaki öğrenci zorluk ve kavram yanlışlıklarına dair fark etmeleri incelendiğinde ise çok az sayıda öğretmen adayının öğrenci zorluk ve kavram yanlışlıklarına odaklandığı tespit edilmiştir.

Koçak (2020) araştırmasında matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin üstel belirsizlikler ve diferansiyel konularındaki kavram yanlışlıklarını incelemeyi amaçlamaktadır. Araştırmanın örneklemini İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü’nde öğrenim görmekte olan 90 lisans öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmada veriler, araştırmacı tarafından çalışmanın amacına uygun olarak hazırlanmış 10 adet açık uçlu sorudan oluşan “Üstel Belirsizlikler ve Diferansiyel Konularındaki Kavram Yanlışlıklarını Belirleme Testi” aracılığıyla toplanmıştır. Araştırmanın bulguları incelendiğinde, öğrencilerin üstel belirsizliklerin ve diferansiyelin tanımına ilişkin kavram yanlışlıklarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin diferansiyelin günlük yaşamda kullanımlarına dair çok az bilgiye sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin diferansiyelle ilgili kavram yanlışlıklarının yanı sıra üstel belirsizlikler ile diğer belirsizlikler arasındaki farkları belirtirken de kavram yanlışlıklarına rastlanmıştır. Araştırmanın sonuçları doğrultusunda üstel belirsizlikler ve diferansiyel gibi soyut kavramların öğretiminde kavram yanlışlıklarının önleyebilmek adına, bu kavramların öğretiminde somutlaştırmaya gidilmesi önerilmiştir.

2.10.2. Yurt dışında yapılan araştırmalar

Naseer (2015) çalışmasında bazı matematiksel kavramlara ilişkin öğrencilerin yaptığı hatalara ve sahip olduğu kavram yanlışlarını belirlemek, bu hataların ve kavram yanlışlarının oluşumunun nasıl önlenebileceğini ya da oluşan kavram yanlışlarının nasıl giderilebileceğine dair öneriler sunmayı amaçlamaktadır. Araştırmanın örneklemini 2012-2015 yılları arasında Maldivlerde üniversite öncesi matematik dersi alan 2411 öğrenci oluşturmaktadır. Veriler 2411 öğrencinin sınav kağıtlarının incelenmesi ile toplanmıştır. Araştırmada öğrencilerin sayı hissi, işlem bilgisi, kesirler, üslü ifadeler ve cebir konularında tespit edilen kavram yanlışları sunulmuştur. Çalışmanın sonucunda öğretmenlerin belirlenen kavram yanlışlarının farkında olması ve bu kavram yanlışlarının dikkate alarak bir öğretim planı hazırlaması yapılması gerekliliği üzerinde durulmuştur.

Hammer (1996) “More Than Misconceptions: Multiple Perspectives on Student Knowledge and Reasoning, and an Appropriate Role For Education Research” adlı çalışmasında tartışma yönteminin kullanıldığı fizik dersinden bir kesit alınarak, öğrencilerin verdiği cevaplardan, öğretmenlerin öğrencilerin kavrayışlarını anlamaları ve bu kavrayışlara nasıl cevap vermeleri gerektiğine odaklanılmıştır. Bu sayede çalışma öğrencilerin bilgi ve muhakeme yeteneklerini çoklu perspektiflerden (alan bilgisi, kavram yanlışlığı, sezgisel bilgi, muhakeme yeteneği ve epistemolojik inançlar) inceleyerek, öğretmenlerin algı ve düşüncelerini genişletmeyi amaçlamaktadır. Araştırmanın örneklemini Massachusetts şehrindeki bir lisede çoğu son sınıf öğrencisi 22 kişi oluşturmaktadır. Çalışmanın amacına yönelik bir sınıfın fizik derslerinde 3 hafta boyunca 33'er dakikalık tartışma ortamı yaratılmış ve tartışmalar videoya çekilmiştir. Videolar sonrasında incelenerek araştırmanın amacına en uygun olduğu düşünülen bir tartışmanın makalede üç dakikalık kesitine yer verilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmenlere, öğrencilerin anlama düzeylerinin ve kavrayışlarının daha iyi nasıl anlaşılması gerektiği ve öğretmenlerin bu kavrayışları nasıl etkileyebileceği gösterilerek, öğretmenlere bu konuda önerilerde bulunulmuştur.

Yang ve Sianturi (2020) tarafından yapılan “Sixth Grade Students’ Performance Misconception, and Confidence on a Three-Tier Number Sense Test” adlı çalışmada Endonezya’da yaşayan 308 altıncı sınıf öğrencisinin sayı hissi konusundaki performansları, sahip oldukları kavram yanlışları ve verdikleri cevaplara dair güven düzeylerinin ölçülmesi amaçlanmıştır. Araştırmada veriler sayı hissi konusunun yer aldığı 40 soruluk üç aşamalı teşhis testi kullanılarak toplanmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin, sorulara doğru ya da yanlış cevap vermesine bakılmaksızın, %82’ye yakınının yüksek güven duygusuna sahip olduğu görülmüştür. Bu durumun, kavram yanlışlığına sahip olan öğrencilerin kavram

yanılgılarının yok edilmesini zorlaştırdığı düşünülmektedir. Öğrencilerin yalnızca %25'inin kavramsal anlamının gerçekleştiği yüksek ve orta sayı hissi-yüksek güven seviyesi gösterdiği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin yaklaşık %73'ünün sayı hissinin çok düşük ya da düşük olduğu, bu öğrencilerin ise %60'ının çok güçlü ya da güçlü kavram yanılgılarına sahip olduğu belirlenmiştir. Sonuç olarak birçok öğrencinin düşük sayı hissine sahip olduğu, testte yetersiz başarı gösterdiği ve çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduğu tespit edilmiştir.

Li, Julaihi ve Eng (2017) "Misconceptions and Errors in Learning Integral Calculus" başlıklı çalışmalarında öğrencilerin integral kavramını öğrenirken yaşadığı zorlukları sunmayı amaçlamaktadır. Bu amaç doğrultusunda öğrencilerin integral sorularını çözerken karşılaşılan hata ve kavram yanılgıları belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmanın amacına uygun olarak karma desen kullanılmıştır ve araştırma iki bölümden oluşmuştur. İlk aşama öğrencilerin integral sorularını çözerken yaşadığı zorlukları incelemeyi amaçlayan nicel bir çalışmadır. Bu aşamada Analiz dersi alan 147 öğrencinin bu derse ait sınav kağıtları incelenerek hata yüzdeleri hesaplanmıştır. İkinci aşama ise nitel bir çalışma olup 70 öğrencinin yaptığı hata türleri incelenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin integral konusunda birçok hata yaptığı görülmüştür. Bu hatalar sınıflandırılarak kavramsal, işlemsel ve teknik hatalar olarak sınıflandırılmıştır. Kavramsal hata türü bağlamında öğrencilerin integral konusunun özellikleri konusunda kavram yanılgılarına sahip olduğu görülmüştür. İşlemsel hata türü kategorisinde yer alan öğrenci hatalarının kavram yanılgılarına neden olabileceği fakat kavram yanılgısı olarak değerlendirilemeyeceği belirtilmiştir. Teknik hata türündeki hataların ise öğrenci dikkatsizliğinden kaynaklanabileceği belirtilmiştir. Son olarak integral konusundaki hata ve kavram yanılgılarının belirlenmesinin Analiz başarısını arttıracığı, bu nedenle çalışmanın matematik eğitimcileri için önem arz ettiği vurgulanmıştır.

Lannin, Barker ve Townsend (2007) "How Students View the General Nature of Their Errors" adlı çalışmalarında iki öğrencinin, kendilerine sorulan cebir problemlerini genellemeye çalışırken yanlış akıl yürütmeleri sonucu karşılaştıkları hatalar ile nasıl başa çıktıkları incelenmiştir. Araştırmada özel olarak, "Öğrenciler yaptıkları hataları ne derece algılamaktadırlar?" ve "Öğrencilerin hatalarına ilişkin algıları, kavrayışlarını nasıl etkilemektedir?" sorularına cevap aranmıştır. Çalışma United States'te bir ilkokulda öğrenim gören 80 öğrenci içerisinde seçilen yüksek-orta seviyedeki iki öğrenci (Dallas ve Lloyd) ile yürütülmüştür. Çalışmanın amacı doğrultusunda öğrenciler ile 4 ay boyunca 18 ders yapılmış ve öğrencilerin muhakeme yetenekleri incelenmiştir. Elde edilen veriler Dallas ve Lloyd'un belirli problem durumlarında işleyen yanlış muhakemelerini, karşılaşılan problemin tüm durumlarına uygulamaya çalıştığını göstermektedir. Fakat sonrasında öğrencilere hatalı akıl

yürütmelerini genelleymeyecekleri sorular sorularak, öğrencilerin görüşlerindeki değişiklikler incelenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin sahip olduğu kavramsal şemanın yeniden yapılandırılması için hataların önemi vurgulanmıştır ve okuyucuya öneriler sunulmuştur.

Tanujaya ve Mumu (2020) tarafından “Students’ Misconception HOTS Problems Teaching and Learning of Mathematics” adlı çalışmalarında matematik eğitimi öğrencilerinin yüksek düşünme becerileri (HOTS) gerektiren problemlere yönelik görüşlerini incelemeyi amaçlamaktadır. Araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın örneklemini altıncı yarıyılı tamamlamış olan 21 matematik eğitimi öğrencisi oluşturmaktadır. İlk olarak öğrencilere HOTS ile ilgili bir problemi nasıl tanımladıkları sorulmuştur. Sonrasında onlardan matematik test kitaplarındaki soruları Bloom taksonomisine göre analiz etmeleri istenmiştir. Çalışmanın sonucunda HOTS sorularına ilişkin iki farklı öğrenci görüşü olduğu ortaya çıkmıştır. İlk grup zor problemlerin tümünün birer HOTS problemi olduğunu, ikinci grup ise HOTS problemlerinin alışılagelmiş bir yol ya da algoritma ile çözilemeyen sorular olduğunu belirtmiştir. Ayrıca öğrencilerin HOTS sorularını Bloom taksonomisinin üç üst düzeyde olması gerektiğini söylemişlerdir. Fakat zor problemlerin tümü ve Bloom taksonomisinin üç üst düzeyini kapsayan tüm problemler HOTS problemi olarak sınıflandırılmayacağından öğrencilerin bu konuda kavram yanlışlarına sahip oldukları tespit edilmiştir.

Graeber (1993) “Misconceptions about Multiplication and Division” adlı çalışmada “çarpma işleminin sonucunun çarpan ve çarpılandan daha büyük” ve “bölme işleminin sonucunun bölünenden daha küçük” olması gerektiği kavram yanlışısına sahip olan öğrencilerin, kavrayış biçimlerinin nedenlerini incelenmeyi ve öğretmenlere öneriler sunulması amaçlanmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin bahsedilen kavrayışlara sahip olmasının nedenlerinin günlük konuşma dilinden ve önceki deneyimlerinden kaynaklanabileceği belirtilmiştir. Öğrencilerin bölme işleminin sonucunun daima bölünenden küçük olacağını düşünmelerinin sebeplerine ek olarak literatürde belirlenen iki çeşit bölme modelinden (parçalı ve gruplamalı bölme) çoğu zaman parçalı bölme modelinin kullanılmasından kaynaklanabileceği de eklenmiştir. Öğrencilerin sahip olduğu bu kavram yanlışının önüne geçebilmek içinse öğretmenlere çeşitli öneriler sunulmuştur.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın deseni, örnekleme, veri toplama araçları, veri toplama süreci ve verilerin analizinde kullanılan tekniklerle ilgili açıklamalara yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Deseni

Araştırma İlköğretim Matematik Öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarını belirlemeyi ve bu kavram yanlışlarına çözüm önerileri getirmeyi amaçlamaktadır. Bu amaç doğrultusunda araştırmada, konu hakkında gözlemlenebilir, ölçülebilir ve sayısal olarak ifade edilebilir veriler ortaya koymakta olan nicel araştırma yöntem ve teknikleri kullanılmıştır.

Araştırma, nicel araştırma desenlerinden tarama (survey) araştırması üzerine temellendirilmiştir. Tarama araştırmaları diğer bir deyişle betimsel araştırmalar, araştırmacıların belirlenen evreni temsil eden örneklemin tutumlarının, fikirlerinin, davranışlarının veya özelliklerinin nasıl dağılım gösterdiğini belirlemek için kullandığı nicel araştırma yöntemlerinden birisidir (Creswell, 2012). Tarama araştırmalarının asıl amacı evrenin özelliklerini tanımlamaktır. Ancak diğer araştırma türlerinde olduğu gibi tarama araştırmalarında da evren bütün olarak değil, evrenin özelliklerini yansıtan bir örneklem üzerinde araştırma yapılarak sonuçlar evrene genellenmektedir (Sezgin Selçuk, 2019). Bu yöntemde yaygın olarak anket ve görüşme araç türleri kullanılsa da psikolojik ölçeklerin ölçüldüğü testler, tutum ölçekleri, başarı testleri, performans testleri gibi çeşitli veri toplama araçları da kullanılmaktadır (Sezgin Selçuk, 2019). Elde edilen veriler araştırma soruları ya da hipotezleri test etmek ve sonuçları evrene genelleyebilmek adına istatistiksel olarak analiz edilir. Tarama araştırmalarında katılımcılara herhangi bir müdahale yapılmadığından, neden-sonuç ilişkilerini deneysel araştırmalar kadar açıklayamazlar. Bunun yerine tarama yöntemi katılımcıların ilgilenilen durumlar hakkında eğilimlerini açıklamaya yardımcı olmaktadır (Creswell, 2012; Sezgin Selçuk, 2019). Araştırmada evreni temsil ettiği düşünülen örneklemin, çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarını belirlenmesi ve araştırma sonuçlarının evrene genellenebilmesi amaçlandığından araştırmanın deseni tarama araştırması olarak belirlenmiştir.

Tarama araştırmalarının, kesitsel ve boylamsal tarama araştırmaları olmak üzere iki farklı türü vardır. Kesitsel tarama araştırmalarında, örneklemin mevcut tutumları, düşünceleri ya da inançları hakkında veri toplamak amaçlanırken, boylamsal tarama

araştırmalarında, bireylerin eğilimlerinin zamana bağlı değişimlerini incelemek amacıyla veriler toplanır (Creswell, 2012; Sezgin Selçuk; 2019). Katılımcıların mevcut kavram yanılgılarının incelendiği bu çalışmada, araştırma verileri anlık olarak toplandığı için kesitsel tarama araştırmasına örnek teşkil etmektedir.

3.2. Örneklem

Tarama araştırmalarında evrenden seçilen ve üzerinde veri toplanacak olan örneklem seçilir, incelenir ve sonuçlar seçilen örneklemden evrene genellenir. Bu tür araştırmalarda ele alınan evrenin belirtilmesi, hem örneklem seçimi hem de mevcut kaynakların kullanımı için oldukça önemlidir (Sezgin Selçuk, 2019). Dolayısıyla örneklem seçiminde ilk olarak evren, sonrasında ise örneklem kavramlarının tanımlanması gerekmektedir. Evren, en geniş düzeyde, bir grup bireyin kendilerini diğer gruplardan ayıran bazı özelliklere sahip olduğu popülasyondur (Creswell, 2012; Sezgin Selçuk, 2019). Bir başka deyişle evrenden belirli sayıda oluşan ve evrenin temsilcisi olan parçaya örneklem denmektedir (Canbazoğlu Bilici, 2019). Sosyal bilimlerde birçok araştırma, evrenin tamamı yerine, evreni temsil eden tarafsız olarak seçilmiş örneklem üzerinde gerçekleştirilmektedir (Büyükoztürk, 2019). Genellikle belirli bir evrenden veri toplamak her zaman ulaşılabilir ve kolay değildir. Bu nedenle evrenden, evreni temsil edecek nitelikte örneklemin doğru seçilmesi önem taşımaktadır. Örneklem, araştırmacının evrenden seçtiği, daha az sayıda bireyden oluşan ve üzerinde veri toplanacak olan katılımcı grubu olarak tanımlanmaktadır.

Bu çalışmada evreni temsil ettiği düşünülen örneklemin, evrene genelleme amacı bulunduğundan elde edilen bulguların genellendiği büyük kitle olan evren ve büyük kitleyi temsil etme yeterliliğine sahip olan örneklem alma yoluna gidilmiştir. Araştırmanın amacı doğrultusunda evreni oluşturan bireylerin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunun yer aldığı Analiz III dersini almış olması gerekmektedir. İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında Analiz III dersi, 2. sınıf güz döneminde okutulmaktadır. Buradan hareketle araştırmanın evrenini Ege Bölgesi'ndeki üniversitelerin İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim görmekte olan 2. sınıf lisans öğrencileri oluşturmaktadır. Araştırmada evrenden seçilen örneklem, olasılığa dayalı olmayan örnekleme yöntemlerinden uygun örnekleme yoluyla seçilmiştir. Uygun örnekleme yönteminde, zaman, konum, para gibi koşullara bağlı olarak elverişlilik durumlarına uygun olacak şekilde örneklem seçilmektedir (Canbazoğlu Bilici, 2019). Araştırmanın örneklemini 2020-2021 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında öğrenim görmekte olan 2. sınıf 83 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Ancak

çalışma 2 öğretmen adayının katılımının sağlanmaması ile 81 öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Seçilen örneklemin evreni temsil edecek nitelikte olduğu ve çalışma sonuçlarının evrene genellenebileceği düşünülmektedir. Çalışmanın yapıldığı üniversitede İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde 2. sınıf iki şube bulunmaktadır. İki şubede de aynı öğretim üyesi ilgili dersi yürütmüştür ve dersler aynı içerik ve yöntemle işlenmiştir. Ayrıca araştırmada etik kurallar nedeniyle öğretmen adaylarının isimleri kullanılmamıştır. Bunun yerine öğretmen adayları ÖA1, ÖA2, ..., ÖA81 şeklinde kodlanmıştır.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Bu araştırmada İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında öğrenim görmekte olan 2. sınıf öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarını belirlemek için araştırmacı tarafından geliştirilen “Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanlışlarını Belirleme Testi” adlı veri toplama aracı kullanılmıştır. Kullanılan test pilot uygulama öncesinde yazılı cevap gerektiren 21 adet açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Hazırlanan sorular, çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki bilgiyi ölçmekten çok bu konuda yer alan kavramlardan kaynaklı oluşan kavram yanlışlarını ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır. Kapalı uçlu sorular katılımcıların verebileceği yanıtları sınırlamaktadır (Sezgin Selçuk, 2019). Bu nedenle araştırmada örneklemden çeşitli yanıtlar elde edilmesini olanak sağlayan açık uçlu sorular kullanılmıştır. Kavram yanlışısı tespit çalışmalarında da araştırmacılar tarafından en fazla kullanılan veri toplama aracının açık uçlu sorulardan oluştuğu tespit edilmiştir (Türkdoğan, Güler, Bülbül ve Danişman, 2015). Soruların hazırlık aşamasında araştırmacı 2020-2021 Eğitim ve Öğretim yılı Analiz III güz dönemi derslerine katılarak, öğrencilerin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yaptıkları hataları ve yanlışlığı düşüğü noktaları ders esnasında gözlemlemiştir. Sorular, araştırmacı tarafından haftalık olarak işlenen konulara paralel bir şekilde hazırlanmıştır. Testin son halini belirlemek amacıyla matematik eğitimi alanında uzman olan öğretim üyesinin görüşüne başvurulmuştur.

Hazırlanan “Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanlışlarını Belirleme Testi” adlı veri toplama aracı araştırmanın örneklemine uygulanmadan önce, Analiz III dersini almış olan Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde öğrenim görmekte olan 19 lisans öğrencisine uygulanmıştır. Pilot uygulama asıl uygulamanın yapılacağı örneklemden farklı olarak benzer ve daha az sayıda birey ile gerçekleştirilmiştir. Bu uygulama ile veri toplama aracını test etmek ve onlardan alınacak

geri bildirimler doğrultusunda araçta değişiklikler yapılması amaçlanmıştır. Pilot uygulamada öğrencilerin soruları çözmesi için üç saat süre verilmiş ve uygulama Dokuz Eylül Üniversitesi Uzaktan Eğitim Uygulama ve Araştırma Merkezi (DEUZEM) platformu üzerinden gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerden üç saatin sonunda cevap kağıtlarının fotoğraflarının gönderilmesi istenerek, öğrencilerin yanıtları analiz edilmiştir. Yapılan analizler sonucunda hiçbir öğrencinin çözemediği iki soru ve öğrencilerin kavram yanlışlığına sahip olmadığı görülen iki soru testten çıkartılmıştır. Araştırmanın alt problemlerine uygun soru dağılımının sağlanması amacıyla teste bir soru eklenmiş ve testte anlaşılmayan kısımlar düzeltilmiştir. Testte yapılan gerekli düzenlemeler sonucunda öğrencilerin düzeyleri ve soruların ilgili konu hakkında kavram yanlışlıklarını ölçme düzeyleri incelenerek soru sayısı 18 olarak belirlenmiştir. Testin pilot uygulaması ve test üzerinde düzenlemeler yapıldıktan sonra, testin son halini vermek ve kapsam geçerliliğini sağlamak amacıyla matematik eğitimi alanında uzman öğretim üyelerine başvurulmuştur. Öğretim üyelerinin tavsiyeleri sonucunda testin gerekli yerleri revize edilerek teste son hali verilmiştir. Testte yer alan soruların herkes tarafından anlaşılır olmasına ve sorularda açık bir dil kullanımına özen gösterilmiştir.

“Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanlışlıklarını Belirleme Testi” yazılı cevap gerektiren 18 adet açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Bu test çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda var olan veya oluşabilecek kavram yanlışlıklarını belirlemeyi amaçlamaktadır. Hazırlanan testte birinci alt probleme uygun şekilde 5 soru (1., 2., 3., 4. ve 9. sorular), ikinci alt probleme uygun şekilde 5 soru (5., 6., 7., 8. ve 16. sorular), üçüncü alt probleme uygun şekilde 4 soru (10., 11., 12. ve 13. sorular), son olarak dördüncü alt probleme uygun şekilde 4 soru (14., 15., 17. ve 18. sorular) yer almaktadır. Soru dağılımı çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda öğrencilerde gözlemlenen kavram yanlışlıkları dikkate alınarak ve ilgili alt problemin kapsamı doğrultusunda yapılmıştır.

Hazırlanan bir testin hem güvenilirliği hem de geçerliğin yüksek olması gerekmektedir. Bu nedenle testin geçerlik ve güvenilirliğini arttırmak için birtakım önlemler alınmıştır. Testin geçerliğini arttırmak için hazırlanan her sorunun beklenen yanlışlıklardan en az birini ortaya çıkarıcı ve ölçücü olması dikkate alınarak hazırlanmıştır. Hazırlanan her soru Analiz III kapsamında yer alan konuları hem kapsayıcı hem de dengeli bir şekilde temsil etmesine özen gösterilmiştir. Testin güvenilirliğini arttırmak için ilgili konuya düşen soru sayısının iki veya ikiden fazla olmasına, soruların açık, anlaşılır ve kesin cevaplı

olmasına, uygulama süresinin öğrencilerin bütün soruları cevaplamasına yetecek kadar verilmesine ve veri analizinin objektif bir şekilde yapılmasına dikkat edilmiştir.

3.4. Uygulama Süreci

Araştırma verileri öğrencilere Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünden gerekli izin alındıktan (Ek 3) sonra uygulanmıştır. Uygulama yapılmadan önce araştırmacı, uygulama yapılacak dersin öğretim üyesini çalışma ve süreç hakkında ayrıntılı olarak bilgilendirmiştir. Gerekli hazırlıklar yapıldıktan ve öğrenciler bilgilendirildikten sonra “Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarını Belirleme Testi” adlı teşhis testi 2020-2021 Eğitim ve Öğretim yılı güz döneminin sonunda Analiz III dersini alan öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Uygulama Dokuz Eylül Üniversitesi’nin tüm uzaktan eğitim faaliyetlerinin gerçekleştirildiği DEUZEM platformu üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarına sorular Ek 2’de yer aldığı şekliyle gönderilmiş ve öğrencilerin soruları çözmeleri için toplamda dört saat süre verilmiştir. Öğrencilerden yaptıkları işlem basamaklarını açık bir şekilde yazmaları ve belirtilen süre içerisinde yanıtlarını DEUZEM platformu üzerinden göndermeleri istenmiştir. Bulgularda bölümünde bazı öğretmen adaylarının yanıtlarına yer verildiğinden, etik kurallar nedeniyle uygulama yapılan kişiler için sembolik temsil kullanılmıştır. Araştırmada uygulamaya katılan öğretmen adayları ÖA1, ÖA2, ..., ÖA81 şeklinde kodlanmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Veriler toplandıktan ve düzenlendikten sonra analiz edilmeye hazır hale gelirler. Tüm araştırmalarda toplanan verileri, kolayca anlamak ve araştırma problemlerini yanıtlayabilmek için verilerin uygun istatistiksel teknikler kullanılarak analiz edilmesi gerekmektedir. Bilimsel bilgilerin anlamlılığı, güvenilir ve geçerli gözlemler yapılmasının yanı sıra analizde doğru istatistiklerin kullanımına bağlıdır (Büyüköztürk, 2019). Veri analizinin yöntemi, araştırmanın yöntemine ve desenine bağlı olarak değişiklik gösterecektir. Nicel yöntemlerin kullanıldığı eğitim araştırmalarında genel olarak betimsel analiz ve çıkarımsal analiz olmak üzere iki temel analiz çeşidi kullanılmaktadır (Creswell, 2012). Betimsel analiz, ulaşılabilen durumlarda evrenin tamamından ya da evreni temsil eden bir örneklem üzerinden elde edilen verilerin kullanılarak, katılımcıların ya da nesnelerin özelliklerini betimlemeyi amaçlayan istatistiksel işlemleri tanımlar. Özetle betimsel analiz, bir grubun özelliklerini ya da eğilimlerini betimlemek amacıyla kullanılan yüzde, frekans, merkezi eğilim ölçüleri, değişkenlik ölçüleri gibi teknikleri içermektedir (Büyüköztürk, 2019). Tarama araştırmalarında evreni oluşturan tüm bireylere ulaşmak her zaman mümkün

değildir. Bu nedenle tarama araştırmaları genelde evreni temsil eden ve tarafsız olarak seçilen örneklem üzerinde gerçekleştirilir. Burada asıl amaç örneklemden toplanan verilere dayalı olarak yapılan analizlerden hareketle evren hakkında tahminlerde bulunmaktır (Büyüköztürk, 2019). Bu tahminlerin yapılmasını sağlayan yöntem ve teknikler çıkarımsal analiz olarak tanımlanmaktadır. Kısaca çıkarımsal analiz, evreni temsil eden örneklemden elde edilen verilerin analiz edilerek evren ile ilgili çıkarım yapılmasına olanak sağlar.

Bu araştırmada ilk olarak örneklemden toplanan veriler üzerinde betimsel analiz, sonrasında ise çıkarımsal analiz yapılmıştır. Verilerin betimsel analizi yapılırken veri toplama aracında yer alan her sorunun frekans ve yüzdelik tablosu oluşturulmuştur. Elde edilen frekans ve yüzdelik değerlerden her bir alt probleme ait olan sorular kendi içerisinde analiz edilerek çıkarımsal analize tabii tutulmuştur.

Verilerin analizi yapılırken öğretmen adaylarının veri toplama aracında yer alan açık uçlu sorulara verdikleri yanıtlar incelenmiştir. Yanıtlar incelenirken var olan durumlara hiçbir müdahalede bulunulmamıştır. İlk olarak öğretmen adaylarının cevapları doğru cevap, yanlış cevap ve boş cevap olmak üzere üç kategoride incelenmiştir. Yapılan araştırmalar öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlarının öğrencileri yanlış cevaba sürükleyebileceği gibi öğrencilerin doğru cevap vermesine de neden olabileceği görülmüştür (Baki ve Aydın Güç, 2014; Li ve diğerleri, 2017; Rakes ve Ronau, 2019; Yang ve Sianturi, 2020). Yani öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışları öğrencilerin doğru cevap vermesine sebep olabilmektedir. Bu nedenle öğretmen adaylarının verdiği doğru cevap ve yanlış cevap kategorisinde yer alan cevaplar, sonrasında araştırmacı tarafından belirlenen kriterlere göre kavram yanılığı var ve kavram yanılığı yok olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmada matematik öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan kavramlara ve kısmi türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarının araştırıldığı birinci ve ikinci alt problem doğrultusunda 5'er soru analiz edilmiştir. Benzer şekilde yöne göre türev kavramına ve çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamalarına ilişkin kavram yanlışlarının araştırıldığı üçüncü ve dördüncü alt problem doğrultusunda ise 4'er soru analiz edilmiştir. Araştırma sorularının her biri bağlantılı olduğu alt problem kapsamında yer alan kavrama ilişkin kavram yanlışlarını belirlemeyi amaçlamaktadır.

Öğretmen adaylarının her bir soruya verdiği cevaplar ayrı ayrı değerlendirilerek yüzde ve frekans tabloları oluşturulmuştur. Sonrasında her bir alt problem kapsamında yer

alan sorular kendi içerisinde analiz edilmiştir. Bu doğrultuda kavram yanılgısı yok kategorisindeki cevaplar 1 ve kavram yanılgısı var kategorisindeki cevaplar 2 olarak kodlanmıştır. Boş cevap kategorisindeki cevaplar için kodlama yapılmamıştır. İlgili alt problem kapsamında incelen sorulara ilişkin öğretmen adaylarının verdiği cevapların ortalaması alınarak, araştırmanın alt problemlerine cevap aranmıştır. Ortalama alınırken boş cevap kategorisinde incelenen cevaplar için serinin ortalama puanı atanmıştır. Yapılan analiz sonucunda; $1,00 \leq x < 1,50$ aralığında çıkan sonuçlar kavram yanılgısı yok, $1,50 \leq x \leq 2,00$ aralığında çıkan sonuçlar kavram yanılgısı var olarak değerlendirilmiştir. Araştırmada nicel olarak toplanan veriler nicel veri analizi yöntemlerine tabii tutularak, IBM SPSS Statistics 23.0 paket programı kullanılarak analiz edilmiştir.

3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Nicel araştırmalarda geçerlik, bir test veya ölçek yardımıyla ölçülmek istenen bir kavramın doğru bir şekilde ölçülme derecesi olarak tanımlanmaktadır. Örneğin kavram yanılgılarını araştırmak için tasarlanan, fakat öğrencilerin başarılarını ölçen bir test geçerli sayılmaz. Araştırmanın geçerliği yalnızca nicel değil yapılan tüm bilimsel araştırmalarda büyük önem taşımaktadır. Bilimsel araştırmalarda geçerliğin yanı sıra güvenirlüğünde sağlanması gerekmektedir. Nicel araştırmalarda güvenirlilik, aynı veri toplama aracının, farklı zamanlarda aynı yöntemler ve koşullar altında tekrar uyguladığında alınan sonuçların istikrarlı ve tutarlı olma derecesi olarak tanımlanmaktadır (Creswell, 2012). Bilimsel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlilik birbiri ile yakından ilişkili kavramlardır. Güvenirlilik bilimsel araştırmalarda sağlanması gereken birincil koşul olmasına karşın güvenirlüğün yüksek olması geçerliğinde yüksek olması anlamına gelmemektedir (Sezgin Selçuk, 2019). Ancak geçerliğin yüksek olması, güvenirlüğün yüksek olmasını etkilemektedir. Anlaşılabacağı üzere güvenirliliği etkileyen faktörlerin başında araştırmanın geçerliği gelmektedir.

Bilimsel araştırmalarda geçerlik kavramı iç geçerlik ve dış geçerlik olarak iki şekilde incelenmektedir (Sezgin Selçuk, 2019). İç geçerlik, araştırma sonuçlarının mevcut gerçekliği ortaya çıkarmadaki yeterliliği ile ilgili iken, dış geçerlik bir çalışmanın sonuçlarının farklı durumlara genellenebilirliği ile ilgilidir (Merriam, 2018). Bu araştırmada iç geçerliğin sağlanması adına katılımcı kaybı yaşanmamasına özen gösterilmiştir. Bu doğrultuda araştırmaya, örneklem içerisinde yalnızca iki öğretmen adayı katılmamış, araştırma 81 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Bu sayede önemli miktarda veri kaybı oluşmasının önüne geçilerek, örneklemin evreni temsil etme düzeyinin düşmesine ve araştırma sonuçlarının genellemesinde tehdit oluşumuna engel olunmuştur. Ayrıca

araştırmada iç geçerliğin sağlanması için örneklem araştırmacı tarafından tarafsız olarak seçilmiş, katılımcıların tümüne aynı test uygulanmış, yanıtlarını etkileyebilecek ortamlardan kaçınılmış, ölçme işlemi tüm öğretmen adaylarına aynı anda uygulanarak, herkese eşit ve yeterli süre verilmiştir. Araştırmanın dış geçerliğinin sağlanması amacıyla araştırmacı tarafından evreni temsil edecek nitelikte ve yansız bir şekilde örneklem seçimi gerçekleştirilmiştir. Uygulama sırasında öğretmen adaylarına hiçbir müdahalede bulunulmamış ve katılımcıların yanıtları tarafsız olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca araştırmanın geçerliğinin artması için bulgular kısmında öğretmen adaylarının verdiği cevapların doğrudan alıntılara yer verilmiş ve bu alıntılardan yola çıkılarak sonuçlar ayrıntılı biçimde açıklanmıştır.

Nicel araştırmalarda veri toplama aracına ilişkin özellikler ve puanlamadaki nesnellik güvenilirlik üzerinde önemli rol oynamaktadır (Sezgin Selçuk, 2019). Araştırmanın geçerliğini arttıracak düşünülen bütün önlemler, araştırmanın güvenilirliğini de arttıracaktır. Bunun dışında araştırmanın güvenilirliğinin artırılması amacıyla veri toplama aracı özenle hazırlanarak, araçta her bir alt probleme uygun ve yeterli sayıda soruya yer verilmiştir. Öğretmen adaylarına uygulama yapılmadan önce gerekli açıklamalar yapılmış, hazırlanan testte yer alan soru ifadeleri herkes tarafından anlaşılır ve kesin cevaplı olmasına dikkat edilmiştir. Araştırmada her bir alt problem altında değerlendirilen soru sayısının dört veya daha fazla olmasına dikkat edilerek, ilgili alt problem altında yer alan sorular birbirini tamamlayacak ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde hazırlanmıştır. Bu sayede araştırmanın iç tutarlılığın kontrol edilmesi amaçlanmıştır. Çünkü öğrencilerin yanıtları ne kadar tutarlı olursa güvenilirlikte o kadar yüksek olacaktır. Ayrıca araştırmanın kapsam geçerliliğinin sağlanması amacıyla veri toplama aracı hazırlanırken, alanında uzman öğretim üyelerinin görüşleri alınmıştır.

3.7. Araştırmacının Rolü

Bilimsel tüm araştırmalarda olduğu gibi tarama araştırmalarında da dikkatli bir planlama, uygulama ve analiz gerekmektedir. Dolayısıyla bunların temel alındığı tarama araştırmaları, problemin belirlenmesi, evren-örneklem seçimi, veri toplama araçlarının tasarımı, verilerin toplanması, verilerin analizi ve raporlaştırılması şeklinde belirlenmiştir (Creswell, 2012; Sezgin Selçuk, 2019). Bu araştırmada, araştırmacı problemin belirlenmesinden raporlaştırılmasına kadar geçen sürecin her bir aşamasını sırasıyla gerçekleştirmiştir.

Problemin belirlenmesi aşamasında lisans düzeyi matematik derslerine ilişkin öğrencilerin sahip oldukları kavram yanlışları çalışmaları incelenmiş ve Analiz III dersi müfredatında yer alan çok değişkenli fonksiyonların türevi konusuna ilişkin herhangi bir çalışmanın bulunmadığı görülmüştür. Böylece araştırmacı tarafından literatürde var olmayan ve literatüre katkı sağlayacağı düşünülen bir problem seçilmiştir.

İkinci aşamada araştırmanın cevabını aradığı probleme uygun olacak şekilde araştırmanın evreni belirlenmiştir. Fakat tarama araştırmalarında evreni oluşturan tüm bireylerden veri toplamak mümkün olmayacağından, evreni temsil edecek nitelikte örneklem seçimi gerçekleştirilmiştir.

Örneklem belirlendikten sonra araştırmanın yöntem ve desenine uygun olarak veri toplama aracının niteliği belirlenmiştir. Bu aşamada veri toplama aracının içeriği, araştırmanın problem ve alt problemleri uygun bir şekilde hazırlanmıştır. Veri toplama aracında yer alan sorular öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki bilgi düzeylerini ölçmekten çok bu konuda sahip oldukları kavram yanlışlarını ortaya çıkarma amacı ile hazırlanmıştır.

Verileri toplama aşamasında, araştırmacı tarafından geliştirilen “Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanlışlarını Belirleme Testi” adlı araç tüm öğretmen adaylarına belirlenen süre içerisinde uygulanmış ve yüksek oranda yanıt alınmasına dikkat edilmiştir.

Nicel araştırmalarda araştırmacının tarafsızlığı araştırmanın nesnelliği açısından çok önemlidir. Bu nedenle verilerin analizi aşamasında veriler araştırmacı tarafından tarafsız olarak değerlendirilmiştir. Araştırmada kullanılan veri analizi yöntemi, araştırmanın yöntemine uygun bir şekilde seçilmiş ve veri toplama aracının tasarım aşamalarında dikkatlice düşünülmüştür. Verilerin analizi sonucunda lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda sahip oldukları kavram yanlışları belirlenmiştir. Toplanan veriler araştırmacı tarafından dikkatle incelenmiş ve öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışlarının sebeplerinin neler olabileceğine yer verilmiştir. Son olarak öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki var olan kavram yanlışlarının giderilmesi ve oluşabilecek kavram yanlışlarının önlenmesi için bazı önerilerde bulunulmuştur.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde araştırmanın alt problemlerinin incelenmesi sonucu elde edilen bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir. Araştırma sorularının her biri ayrı ayrı incelenmiş ve en sık karşılaşılan kavram yanlışlarına örnek teşkil eden cevaplar sunulmuştur. Bazı kavram yanlışları Zembat'ın (2015b) aktardığı Graeber ve Johnson'ın (1991) sınıflamış olduğu kavram yanlışları türleri göz önüne alınarak yorumlanmıştır. Bu kavram yanlışları türleri aşırı genelleme, aşırı özelleme, yanlış tercüme ve kısıtlı algılamadır. Her bir alt probleme ait sorular tek tek incelendikten sonra, ilgili alt problem kapsamında yer alan soruların analizi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Bulgular araştırmanın alt problemlerine göre sırasıyla sunulmuştur.

Birinci alt problem doğrultusunda matematik öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin, ikinci alt problem doğrultusunda kısmi türev kavramına ilişkin, üçüncü alt problem doğrultusunda yöne göre türev kavramına ilişkin ve dördüncü alt probleme doğrultusunda çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusuna ilişkin sahip oldukları kavram yanlışları ile ilgili bulgular yer almaktadır.

4.1. Birinci Alt Probleme Ait Bulgular

İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin kavram yanlışlarının araştırıldığı birinci alt problem doğrultusunda 1., 2., 3., 4. ve 9. sorular analiz edilmiştir. Analiz sonucu elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

1. soru ile öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyon ve kapalı fonksiyon arasındaki farkı tanımlayıp tanımlayamadıklarının görülmesi ve varsa bu konudaki kavram yanlışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının 1. soruya vermiş olduğu cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

Öğretmen adaylarının 1. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	f	%	f
16,0	13	70,4	57	13,6	11	0	0
						100	81

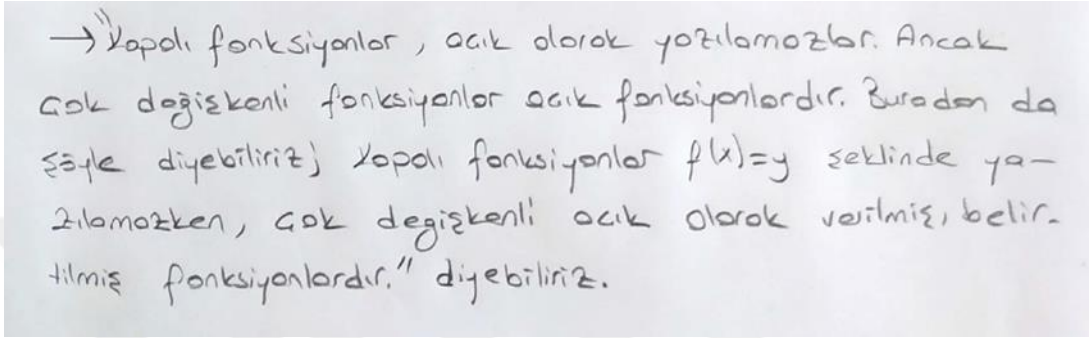
Tablo 1 incelendiğinde, 1. soruya öğretmen adaylarının tamamının yanıt verdiği görülmektedir. Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde ise 57 öğretmen adayının (%70,4) kavram yanılgısına sahip olduğu, 24 öğretmen adayının ise (%29,6) kavram yanılgısına sahip olmadığı tespit edilmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun çok değişkenli fonksiyon ile kapalı fonksiyon kavramlarını anlamlandırmakta zorlandığını ve iki kavram arasındaki farkın ayırt edilmesinde kavram yanılgılarına sahip olduğunu göstermektedir.

① Kapalı fonksiyon ile çok değişkenli fonksiyon arasındaki fark nedir?
 Cevap $\Rightarrow$ Kapalı fonksiyonlar, $f(x,y)=0$ biçimindeki fonksiyonlara kapalı fonksiyon denir.
 Çok değişkenli fonksiyonlar ise iki ya da daha fazla değişkene sahip fonksiyonlardır.
 Aralarındaki fark ise, kapalı fonksiyonlar düzlem belirtirken, çok değişkenli fonksiyonlar vektör belirtir.

Şekil 9. ÖA42 kodlu öğretmen adayının 1. soruya verdiği cevap

Kavram yanılgısı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, bazı öğretmen adaylarının kapalı fonksiyonları yalnızca $F(x,y) = 0$ biçiminde yazılabilen fonksiyonlar olarak düşündüğü görülmektedir. Örnek olarak Şekil 9'da ÖA42 kodlu öğretmen adayının vermiş olduğu cevap sunulmuştur. Bu türden cevap veren öğretmen adaylarının, yalnızca tek değişkenli fonksiyonların kapalı fonksiyon biçiminde yazılabileceği kavram yanılgısına sahip olduğu düşünülmektedir. ÖA42 kodlu öğretmen adayının, "kapalı fonksiyonlar düzlem

belirtir” ifadesinden, kapalı fonksiyonların yalnızca R^2 'de yani iki değişkenli olacağı düşüncesine sahip olduğu görülmektedir. Fakat kapalı fonksiyonlar aslında n değişkenli fonksiyonlardır. Dolayısıyla bu kavram yanılgısı, kapalı fonksiyonların tek değişkenli fonksiyonlara indirgenmesine sebep olduğundan aşırı özelleme türünden kavram yanılgısına örnek gösterilebilir.



→ "Kapalı fonksiyonlar, açık olarak yazılamazlar. Ancak çok değişkenli fonksiyonlar açık fonksiyonlardır. Buradan da şöyle diyebiliriz) Kapalı fonksiyonlar $f(x)=y$ şeklinde yazılamazken, çok değişkenli açık olarak verilmiş, belirtilmiş fonksiyonlardır." diyebiliriz.

Şekil 10. ÖA46 kodlu öğretmen adayının 1. soruya verdiği cevap

Öğretmen adaylarının sahip olduğu “yalnızca tek değişkenli fonksiyonların kapalı fonksiyon biçiminde yazılabileceği” yanılgısını destekler nitelikte, bazı öğretmen adayları ise çok değişkenli fonksiyonların kapalı bir biçimde yazılamayacağını düşünmektedirler. Bu duruma örnek olarak Şekil 10’da ÖA46 kodlu öğretmen adayının cevabı verilmiştir. Fakat tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi çok değişkenli fonksiyonlar da kapalı olarak ifade edilebilmektedir. Bu türden cevap veren öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların, kapalı fonksiyon biçiminde yazılamayacağı kavrayışına sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kavrayış çok değişkenli fonksiyonların yalnızca açık fonksiyon biçiminde yazılabileceği kavram yanılgısını doğurmakta yani ilgili kavram kısıtlı algılanmaktadır. Dolayısıyla bu kavram yanılgısı kısıtlı algılama türünden kavram yanılgısına örnek olarak gösterilebilir. Öğretmen adaylarının kapalı fonksiyon ve çok değişkenli fonksiyona ilişkin belirlenen kavram yanılgılarının nedenlerinden birisinin, lisans birinci sınıf zorunlu derslerinden olan Analiz I dersinde, aslında çok değişkenli fonksiyon olan kapalı fonksiyonların, tek değişkenli fonksiyonlar anlatılırken tanımlanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırmanın 2. sorusunda öğretmen adaylarına altı farklı fonksiyon verilmiş ve onlardan verilen fonksiyonların değişken sayılarını nedenleriyle birlikte belirtmeleri istenmiştir. Bu soru ile öğretmen adaylarının, fonksiyonların değişken sayısını belirleyip belirleyemediklerinin görülmesi ve varsa sahip oldukları kavram yanılgılarının tespit

edilmesi amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının altı şıktan oluşan 2. soruya verdikleri cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2

Öğretmen adaylarının 2. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	f	%	f
a) 60,5	49	38,5	31	1,2	1	0	0
b) 69,1	56	25,9	21	4,9	4	0	0
c) 82,7	67	14,8	12	2,5	2	0	0
d) 65,4	53	32,1	26	2,5	2	0	0
e) 32,1	26	61,7	50	4,9	4	1,2	1
f) 65,4	53	28,4	23	6,2	5	0	0

Araştırmaya katılan 81 lisans öğrencisinin 2. soruya verdiği yanıtlar her şık için ayrı ayrı analiz edilmiştir. Analiz sonuçlarına göre e şikkını boş bırakan bir öğretmen adayı dışında, öğretmen adaylarının tamamının tüm şıklara cevap verdiği görülmektedir. Ayrıca bütün şıklarda, yanlış cevap-kavram yanılgısı yok kategorisinde incelenen cevapların sayısının az olması dikkat çekmektedir. Bu durum yanlış cevap veren çoğu öğretmen adayının kavram yanılgısına sahip olduğunu göstermektedir. Tablo 2 incelendiğinde, en çok öğretmen adayının kavram yanılgısına sahip olduğu şikkın e şikkı (%61,7), en az öğretmen adayının kavram yanılgısına sahip olduğu şikkın ise c şikkı (14,8) olduğu belirlenmiştir. E şikkında en fazla kavram yanılgısına sahip olmalarının nedeninin öğretmen adaylarının belirli integral kavramına ilişkin bilgi eksikliklerinden ya da sahip oldukları kavram yanılgılarından kaynaklandığı düşünülmektedir. En az c şikkında kavram yanılgılarına sahip olmalarının nedeninin ise verilen fonksiyonun girdi ve çıktı değerlerinde yalnızca t parametresinin bulunmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Aşağıda 2. sorunun tüm şıklarında en sık karşılaşılan kavram yanılgılarına örnek cevaplar sunulmuştur.

$X = v \cdot t$ 3 değişkenlidir. Yol, hız ve zamana bağlıdır.
 Yol (x) bağımlı değişken, hız (v) ve zaman (t) bağımsız değişkenlerdir.

Şekil 11. ÖA39 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun a şıkkına verdiği cevap

2. sorunun a şıkkında öğretmen adaylarının %38,5'inin kavram yanılıgısına sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu şıkka dair cevaplar incelendiğinde, kavram yanılıgısına sahip olanların çoğunun $X = v \cdot t$ fonksiyonunu 3 değişkenli bir fonksiyon olarak düşündüğü görülmektedir. Fakat $X = v \cdot t$ fonksiyonu, X (alınan yol) değişkeni, v ve t (hız ve zaman) değişkenlerinin fonksiyonu olup ($X = f(v, t)$), iki değişkenli bir fonksiyondur. Örnek olarak Şekil 11'de ÖA39 kodlu öğretmen adayının verdiği cevap sunulmuştur. Bu şekilde cevap veren öğretmen adayları fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayısının toplamı olacağı kavrayışına sahiptirler. Bu kavrayış, bağımsız değişken sayısı ile belirtilmesi gereken fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı değişkene genellenmesinden dolayı aşırı genelleme türünden kavram yanılıgısına örnek gösterilebilir.

• $w(x) = \ln(x^2 + y^2) \rightarrow x$ ve y 'ye bağı bir fonksiyondur.
 2 bilinmeyen olduğu için 2 değişkenli bir fonksiyondur.

Şekil 12. ÖA65 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun b şıkkına verdiği cevap

2. sorunun b şıkkında öğretmen adaylarının %25,9'unun kavram yanılıgısına sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu şıkka dair cevaplar incelendiğinde a şıkkında tespit edilen, fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayısının toplamı olacağı kavram yanılıgısına sahip öğretmen adaylarının, b şıkkını da benzer şekilde cevapladığı görülmektedir. Bu kavram yanılıgısına sahip öğretmen adayları $w(x)$ fonksiyonunu, $w(x)$ bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere 3 değişkenli olarak belirtmişlerdir.

Bazı öğretmen adaylarının ise soruyu, Şekil 12'de yer alan ÖA65 kodlu öğretmen adayının verdiği cevaba benzer şekilde cevapladığı görülmüştür. Burada öğretmen adaylarının $w(x)$ fonksiyonunun denkleminde yer alan y sabitinin değişken olduğunu düşünerek, $w(x)$ fonksiyonunun 2 değişkenli bir fonksiyon olduğu kavrayışına sahip olduğu görülmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının sabit, değişken ve bilinmeyen kavramlarına ilişkin kavram yanılıgısına sahip olduğu düşünülmektedir. Bahsedilen bu

kavram yanlışsının kullanılan matematiksel dilden yani fonksiyonlarda değişkenlerin genelde x, y, z gibi harfler ile temsil edilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

c) $f(t) = (\tan(t), \cot(t))$, 2 değişkenlidir. t bağımsız değişken, $f(t)$ bağımlı değişken.

Şekil 13. ÖA70 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun c şikkına verdiği cevap

2. sorunun c şikkında öğretmen adaylarının %14,8'inin kavram yanlışsına sahip olduğu tespit edilmiştir. Kavram yanlışsı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, kavram yanlışsına sahip olan öğretmen adaylarının çoğunun verilen parametrik fonksiyonunu, t bağımsız değişkeni, $f(t)$ 'de bağımlı değişkeni olmak üzere 2 değişkenli bir fonksiyon olarak belirttiği görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayısının toplamı olacağı kavram yanlışsına sahip olduğunu göstermektedir. Bu kavram yanlışsına örnek olarak ÖA70 kodlu öğretmen adayının verdiği cevap Şekil 13'te sunulmuştur. Tablo 2 incelendiğinde en az öğretmen adayının kavram yanlışsına sahip olduğu şikkın c şikkı olduğu belirlenmiştir. Bu duruma verilen $f(t)$ fonksiyonunun girdi ve çıktı değerlerinde yalnızca t parametresinin bulunmasının neden olduğu düşünülmektedir.

d) $g(x,y) = \sin^2(5x-6) \rightarrow$ Tek değişkeni vardır. Fonksiyon x 'e bağlıdır. y değerinin değişmesi sonucu değiştirme gereği için y değişken olarak kabul edilmez.

Şekil 14. ÖA16 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun d şikkına verdiği cevap

2. sorunun d şikkında öğretmen adaylarının %32,1'inin kavram yanlışsına sahip olduğu tespit edilmiştir. Kavram yanlışsı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, bazı öğretmen adaylarının a, b ve c şıklarında görüldüğü gibi fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayılarının toplamı olacağı yanlışsı ile $g(x,y)$ bağımlı, x bağımsız olmak üzere fonksiyonun iki değişkenli olduğu düşüncesine sahip olduğu belirlenmiştir. Görüldüğü üzere bu kavram yanlışsına sahip öğretmen adayları, sahip

oldukları kavrayışı tüm şıklarda sürdürmüşlerdir. Bu durum kavram yanlışlarının güçlü ve ısrarcı olduğu özelliği ile örtüşmektedir.

Bu kavram yanlışının yanı sıra bazı öğretmen adayları, fonksiyondaki y girdi değeri fonksiyonun sonucunu etkilemediği için verilen $g(x, y)$ fonksiyonunun tek değişkene sahip olduğunu düşünmektedirler. Bu durum öğretmen adaylarının herhangi bir fonksiyonun bağımsız değişkeninin, fonksiyonun sonucunu etkilemesi gerektiği kavram yanlışına sahip olduğunu göstermektedir. Bu kavram yanlışına örnek olarak ÖA16 kodlu öğretmen adayının verdiği cevap Şekil 14'te sunulmuştur. Bu kavram yanlışının, öğretmen adaylarının değişken kavramına ilişkin sahip oldukları bilgi eksikliğinden ya da kavram yanlışlarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

$y = \int_{x_1}^{x_2} t \cdot dt$ fonksiyonu $y = \frac{t^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}$ 'ne eşittir. Fonksiyon, x_2 ve x_1 'e bağlıdır. Fonksiyonun 2 değişkeni vardır.

Şekil 15. ÖA49 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun e şikkına verdiği cevap

2. sorunun e şikkında öğretmen adaylarının %61,7'sinin kavram yanlışına sahip olduğu tespit edilmiştir. Tablo 2 incelendiğinde en fazla öğretmen adayının bu şıkta kavram yanlışına sahip olduğu görülmektedir. Bu soruda bazı öğretmen adaylarının, Şekil 15'te ÖA49 kodlu öğretmen adayının cevabı ile benzer şekilde belirli integralin sınır değerlerinin, fonksiyonun değişkeni olduğu yanlışına sahip olduğu görülmüştür.

Fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayısının toplamı olacağı kavram yanlışına sahip olan öğretmen adaylarının bir kısmı y bağımlı, t bağımsız olmak üzere fonksiyon iki değişkenlidir cevabını, diğer kısmı ise y bağımlı, x_1 ve x_2 sınır değerleri bağımsız değişken olmak üzere fonksiyon 3 değişkenlidir cevabını vermişlerdir. Her iki durumda da öğrencilerin kavram yanlışlarına sahip olduğu ve bu kavram yanlışlarının onları yanlış cevap vermelerine neden olduğu görülmektedir. Ayrıca bazı öğretmen adayları verilen fonksiyonu hem sınır değerlerine hem de t değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak düşünüp, fonksiyonun 3 değişkenli olduğu cevabını vermiştir. Öğretmen adaylarının en fazla bu şıkta kavram yanlışlarına sahip olmasının nedeninin belirli integral kavramında yer alan değişken ve sınır değer kavramlarına ilişkin sahip oldukları bilgi eksikliklerinden veya kavram yanlışlarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Handwritten text: $f) w(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \text{Tek değişkenlidir. } n\text{'in değişmesi sonucu etkiler.}$

Şekil 16. ÖA35 kodlu öğretmen adayının 2. sorunun f şikkına verdiği cevap

2. sorunun f şikkında öğretmen adaylarının %28,4'ünün kavram yanılıgısına sahip olduğu tespit edilmiştir. Kavram yanılıgısı tespit edilen yanıtlar incelendiğinde, bazı öğretmen adaylarının Şekil 16'da gösterilen ÖA35 kodlu öğretmen adayının verdiği cevaba benzer şekilde, verilen w fonksiyonunun, n değerine bağlı olarak değişeceğini düşünmeleri üzerine fonksiyonun tek değişkenli olduğu cevabını vermişlerdir. Öğretmen adaylarını bu hataya sürükleyen kavram yanılıgısının, verilen fonksiyonda yalnızca x parametresinin bulunmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayısının toplamı olacağı kavram yanılıgısına sahip olan öğretmen adaylarının, w fonksiyonunu $n + 1$ değişkenli olarak düşündüğü görülmektedir. Bazı öğretmen adayları ise w fonksiyonunun sonsuz değişkenli olduğu cevabını vermiştir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının sahip olduğu kavram yanılıgısının, karşılaştıkları fonksiyonların genelde iki veya üç bağımsız değişken içermesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

3. soruda öğretmen adaylarının kısmi türev kavram tanımına ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanılıgılarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının 3. soruya vermiş oldukları cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3

Öğretmen adaylarının 3. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılıgısı Yok	Kavram Yanılıgısı Var	Kavram Yanılıgısı Yok	Kavram Yanılıgısı Var	Kavram Yanılıgısı Yok	Kavram Yanılıgısı Var	Kavram Yanılıgısı Yok	Kavram Yanılıgısı Var
%	f	%	f	%	F	%	f
37,0	30	46,9	38	16,0	13	0	0
						100	81

Tablo 3'te öğretmen adaylarının tamamının 3. soruya cevap verdiği görülmektedir. Cevaplar incelendiğinde 38 öğretmen adayının (%46,9) kavram yanlışlığına sahip olduğu, 43 öğretmen adayının (%53,1) ise kavram yanlışlığına sahip olmadığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun kısmi türev kavram tanımına ilişkin kavram yanlışlıklarına sahip olduğunu göstermektedir. Öğretmen adaylarının neredeyse yarısının kavram yanlışlıklarına sahip olmasının nedeninin öğrencilerin verilen kavram tanımlarını anlamlandırmadan, ezberleme yolunu seçmelerinden ve ilgili kavramın soyut olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Ayrıca birçok öğretmen adayının kısmi türevi benzer şekilde tanımladığı görülmüştür. Bu durumun öğretim aşamasında kavram tanımı yapılırken kavramın belirli yönlerine vurgu yapılmasından veya farklı temsil biçimlerine değinilmemesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

3. Sorunun Cevabı :
Kısmi türev verilen herhangi bir fonksiyonun bağımsız değişkenlerinden herhangi biri dışında hepsini sabit tutup, sabit sonrasındaki ise sabit tutmadığımızı değişkene göre türev alarak kısmi türev denir.

Şekil 17. ÖA8 kodlu öğretmen adayının 3. soruya verdiği cevap

Kavram yanlışlığı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, bazı öğretmen adaylarının Şekil 17'de verilen ÖA8 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde, kısmi türevin bütün fonksiyonlar için uygulanabileceği kavrayışına sahip olduğu görülmüştür. Bu kavrayış, öğretmen adaylarının yalnızca çok değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan bir kavramı tüm fonksiyonlara genellemeleri sonucu oluştuğu için aşırı genelleme türünden kavram yanlışlığına örnek gösterilebilir. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının çok değişkenli bir fonksiyonun bağımsız değişkenlerinin birinde meydana gelecek olan değişimi, tüm değişkenlere genellediği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının bu kavrayışı şüphesiz kavram yanlışlığı içerisinde olup aşırı genelleme türünden kavram yanlışlığına örnek gösterilebilir.

4. soruda öğretmen adaylarının kısmi türev ve süreklilik ilişkisine dair varsa sahip oldukları kavram yanlışlıklarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının 4. soruya vermiş oldukları cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4

Öğretmen adaylarının 4. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	f	%	f
51,9	42	34,6	28	12,3	10	1,2	1
						100	81

Tablo 4'te öğretmen adaylarından biri dışında tamamının 4. soruya cevap verdiği görülmektedir. Cevaplar incelendiğinde 28 öğretmen adayının (%34,6) kavram yanılgısına sahip olduğu, 52 öğretmen adayının (%64,2) ise kavram yanılgısına sahip olmadığı belirlenmiştir. Her ne kadar katılımcıların büyük çoğunluğunun kavram yanılgısına sahip olmadığı görülse de, önemli oranda öğretmen adayında kavram yanılgısı tespit edilmiştir. Bu soruda kavram yanılgısına sahip olunmasının nedenlerinden birisinin, tek değişkenli fonksiyonlarda türevin varlığının, sürekliliği gerektirmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Fakat kısmi türevde durum biraz daha farklıdır. Herhangi çok değişkenli bir fonksiyonun, bir noktada sürekli olması gerekmeden, tüm bağımsız değişkenlerine göre kısmi türevleri var olabilir.

4.Soru: Kısmi türev sürekliliği gerektirir mi?

Cevap: Evet gerektirir.

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $A(x_0, y_0) \in D$ olsun

Eğer; $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ oluyorsa f 'ye A noktasında

sürekli denir.

Eğer; f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ nin her noktasında sürekli ise f 'ye $\mathbb{R}^2$ 'de sürekli denir.

Şekil 18. ÖA32 kodlu öğretmen adayının 4. soruya verdiği cevap

Kavram yanılgısı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, birçok öğretmen adayının tek değişkenli fonksiyonların türevinin bulunduğu her noktada sürekli olma şartının, kısmi türev için de gerekli olduğu kavrayışına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu duruma örnek olarak Şekil

18’de ÖA32 kodlu öğretmen adayının verdiği cevap sunulmuştur. Görüleceği üzere ÖA32 kodlu öğretmen adayı süreklilik tanımını, kısmi türevin sürekliliği gerektireceği şeklinde yorumlamıştır. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının bu kavrayış biçimi kavram yanlışlığı içerisinde olup, tek değişkenli fonksiyonların türevi için geçerli olan kuralı, kısmi türeve genellemelerinden dolayı aşırı genelleme türünden kavram yanlışlığına örnek gösterilebilir. Bazı öğretmen adaylarının ise kısmi türevin limit tanımından yararlanabilmek için sürekliliğin var olması gerektiği yanlışlığına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu kavram yanlışlığının limit kavramına ilişkin sahip olunan bilgi eksikliğinden ya da kavram yanlışlıklarından kaynaklandığı düşünülmektedir.

9. soruda öğretmen adaylarının yöne göre türev kavram tanımına ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanlışlıklarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının 9. soruya vermiş oldukları cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 5’te sunulmuştur.

Tablo 5

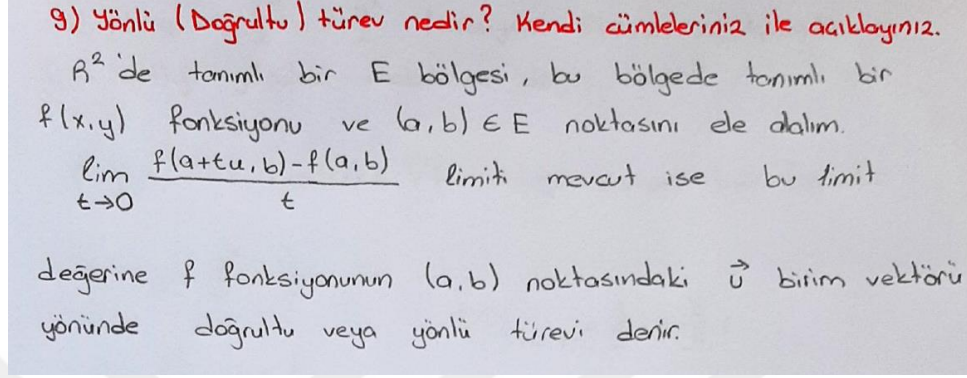
Öğretmen adaylarının 9. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	f	%	f
24,7	20	66,7	54	4,9	4	3,7	3
						100	81

Tablo 5’te öğretmen adaylarının üçü dışında, tamamının 9. soruya cevap verdiği görülmektedir. Cevaplar incelendiğinde 54 öğretmen adayının (%66,7) kavram yanlışlığına sahip olduğu, 24 öğretmen adayının (%29,6) ise kavram yanlışlığına sahip olmadığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun yönlü türev kavram tanımına ilişkin kavram yanlışlıklarına sahip olduğunu göstermektedir. Büyük oranda öğretmen adayının kavram yanlışlığına sahip olmasının sebebinin, öğrencilerin verilen kavram tanımlarını anlamlandırmadan, ezberleme yolunu seçmelerinden ve ilgili kavramın soyut olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Ayrıca birçok öğretmen adayının yöne göre türev kavramını benzer şekilde tanımladığı tespit edilmiştir. Bu durumun, öğretim aşamasında kavram tanımının yapılırken kavramın yalnızca bazı yönlerinin vurgulanmasından ve farklı temsil biçimlerine

değinilmemesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. 9. soruya ilişkin elde edilen bulgular, 3. soruya ilişkin elde edilen bulgular ile benzerlik göstermektedir. Bu durum her iki soruda elde edilen sonuçların birbirini destekler nitelikte olduğu şeklinde yorumlanabilir.



Şekil 19. ÖA35 kodlu öğretmen adayının 9. soruya verdiği cevap

Kavram yanlışlığı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, birçok öğretmen adayının yöne göre türevi, çok değişkenli fonksiyonların türevinin alınmasında kullanılan bir yöntem olarak tanımladığı tespit edilmiştir. Fakat yöne göre türev bir yöntem değil, çok değişkenli fonksiyonların herhangi bir yöndeki değişim hızını bulmamızı sağlayan bir türev türüdür. Öğretmen adaylarının bu kavrayışı, kavramı kısıtlı algılamalarından kaynaklandığı için kısıtlı algılama türünden kavram yanlışlığına örnek gösterilebilir.

Bazı öğretmen adaylarının yöne göre türev kavramını, tüm fonksiyonlara genellediği, bazılarının ise sadece iki ve üç değişkenli fonksiyonlara özellediği görülmüştür. İlk durum öğretmen adaylarının aşırı genelleme türünden kavram yanlışlığına, ikinci durum ise aşırı özelleme türünden kavram yanlışlığına sahip olduğunu göstermektedir. Aşırı özelleme türünden kavram yanlışlığının, öğretmen adaylarının öğretim aşamasında ve ders kitaplarında genelde iki veya üç bağımsız değişkenli fonksiyon örnekleri ile karşılaşmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca yöne göre türev kavramının matematiksel tanımını yapan bazı öğretmen adaylarının Şekil 19'da yer alan ÖA35 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde limit tanımını yanlış yaptığı tespit edilmiştir. ÖA35 kodlu öğretmen adayının cevabı incelendiğinde $f(x,y)$ fonksiyonunun yöne göre türevini, y değişkeni b değerinde sabit tutulurken f 'nin x 'e göre $\vec{u}$ yönündeki değişim oranı olarak tanımlamıştır. Burada yöne göre türev kavramının, kısmi türev kavramına benzer şekilde tek bir değişkende meydana gelecek değişim olarak tanımlandığı görülmektedir. Bahsedilen öğretmen adayının kavram yanlışlığına sahip olduğu açıktır. Öğretmen adayının bu cevabı yöne göre türev kavramının bir yön boyunca tek değişkende meydana gelen

değişim oranı olarak tanımlandığı göz önüne alınırsa aşırı özelleme, kısmi türev kavramına indirgendiği düşünülürse kısıtlı algılama türünden kavram yanılgısına örnek gösterilebilir.

Buraya kadar birinci alt problem doğrultusunda incelenen 1., 2., 3., 4. ve 9. soruların analizi sonucunda elde edilen bulgular incelenmiştir. Şimdi ise öğretmen adaylarının bu sorulara verdiği cevapların ortalamaları alınarak birinci alt probleme dair bulgulara yer verilecektir.

Araştırmanın birinci alt problemi ile öğretmen adaylarının, çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki tanım ve kavramlara ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanılgılarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda her bir öğretmen adayının birinci alt problem kapsamında incelenen beş soruya verdikleri cevapların ortalaması alınmıştır. $1,00 \leq x < 1,50$ aralığında çıkan ortalama sonuçları kavram yanılgısı yok, $1,50 \leq x \leq 2,00$ aralığında çıkan sonuçlar kavram yanılgısı var olarak değerlendirilmiştir. Tablo 6'da birinci alt problem kapsamında incelenen soruların analizi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 6

Öğretmen adaylarının birinci alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

	%	f
Kavram Yanılgısı Var	33	40,7
Kavram Yanılgısı Yok	48	59,3
Toplam	81	100,0

Yapılan analiz sonucunda çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin 33 öğretmen adayının (%40,7) kavram yanılgısına sahip olduğu, 48 öğretmen adayının (%59,3) ise kavram yanılgısına sahip olmadığı belirlenmiştir. Bu sonuç önemli oranda öğretmen adaylarının ilgili konuda çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduğunu göstermektedir.

Elde edilen bulgular birçok öğretmen adayının sahip olduğu kavrayışları benzer sorularda uyguladığını göstermektedir. Örneğin 2. soruda fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı değişken ve bağımsız değişken sayısının toplamı olacağı kavrayışına sahip öğretmen adaylarının, sahip oldukları kavrayışı tüm şıklarda uyguladığı görülmüştür. Benzer şekilde

4. soruda bazı öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların türevinin bulunduğu her noktada sürekli olma şartının, kısmi türev için de gerekli olduğu kavrayışına sahip olduğu görülmektedir. Bu durum kavram yanlışlarının güçlü ve kalıcı özelliğe sahip olduğunu göstermektedir.

Bulgular, öğretmen adaylarının ön bilgilerinde bilgi eksikliklerine ya da kavram yanlışlarına sahip olduğunu göstermektedir. Örneğin 1. soruda öğretmen adaylarının kapalı fonksiyona ilişkin bilgi eksikliklerinin ya da kavram yanlışlarının, 2. sorunun d şikkında ise belirli integral kavramına dair kavram yanlışlarının çok değişkenli fonksiyon kavramına dair yeni yanlışların oluşumuna sebebiyet verdiği görülmektedir.

Ayrıca birçok öğretmen adayının kısmi türev ile yöne göre türev kavramlarını benzer şekilde yani sezgisel olarak tanımladığı görülmüştür. Bu durumun öğretim aşamasında ilgili kavramın tanımı yapılırken farklı temsil biçimlerine değinilmemesinden ya da kavramların daha çok belirli yönlerinin vurgulanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

4.2. İkinci Alt Probleme Ait Bulgular

İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencilerinin kısmi türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarının araştırıldığı ikinci alt problem doğrultusunda 5., 6., 7., 8. ve 16. sorular analiz edilmiştir. Analiz sonucu elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

5. soru kısmi türev ve uygulamaları ile ilgili olup, limit tanımından çözülmesi gereken kısmi türev soruları arasında yer almaktadır. Bu soru ile standart yollarla çözülemeyen kısmi türev sorularına ilişkin öğretmen adaylarının varsa sahip oldukları kavram yanlışlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının 5. soruya vermiş oldukları cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 7’de verilmiştir.

Tablo 7

Öğretmen adaylarının 5. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM			
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok					
%	f	%	f	%	f	%	f		
75,3	61	13,6	11	6,2	5	4,9	4	100	81

Tablo 7’de 81 öğretmen adayından 4’ü dışında tamamının 5. soruya cevap verdiği görülmektedir. Cevaplar incelendiğinde 11 öğretmen adayının (%13,6) kavram yanlışlığına sahip olduğu, 66 öğretmen adayının (%81,5) ise kavram yanlışlığına sahip olmadığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun kavram yanlışlığına sahip olmadığını göstermektedir.

Cevaplar analiz edildiğinde araştırmaya katılan bütün öğretmen adaylarının doğru sonuca ulaştığı tespit edilmiştir. Fakat çözüm aşamaları incelendiğinde 11 öğretmen adayının kavram yanlışlıklarına sahip olduğu, 5 öğretmen adayının ise basit işlem hataları yaptığı belirlenmiştir. Yani öğrencilerin doğru sonuçlara ulaşması matematiksel kavramları her zaman doğru anladıklarını göstermemektedir.

⑤ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunda $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ nedir?

$$f_x = \frac{(x^2+y^2) \cdot y - (2x) \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} \quad f_y = \frac{(x^2+y^2) \cdot x - (2y) \cdot xy}{(x^2+y^2)^2}$$

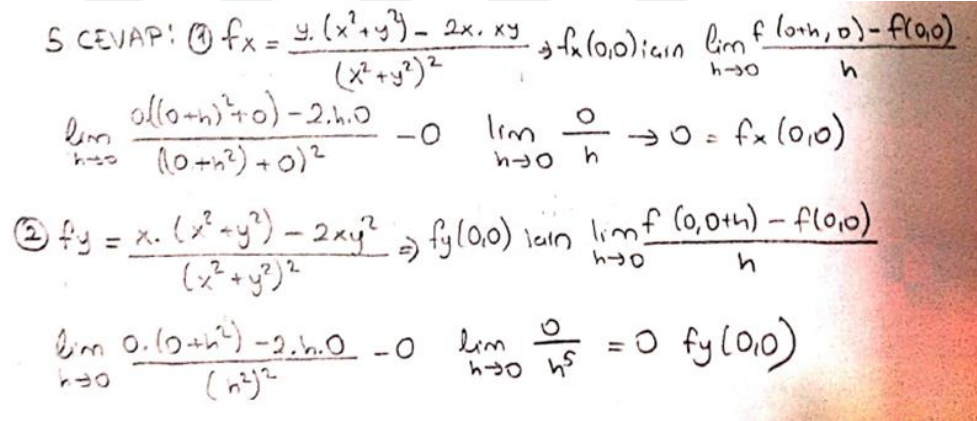
$$f_x(0,0) = 0 \quad f_y(0,0) = 0$$

Şekil 20. ÖA21 kodlu öğretmen adayının 5. soruya verdiği cevap

Kavram yanlışlığı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, bazı öğretmen adaylarının soruyu Şekil 20’de yer alan ÖA21 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde cevapladığı belirlenmiştir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının kısmi türev ve uygulamalarının çözümünde kullanılan algoritmayı ($f(x,y)$ fonksiyonunda, f_x ’i bulmak için y ’yi sabit tut, x ’e göre türev al; f_y ’yi bulmak için x ’i sabit tut, y ’e göre türev al) uyguladığı görülmektedir. Fakat elde edilen f_x ve f_y fonksiyonlarında $(0,0)$ noktası yerine koyulduğunda belirsizlik durumu elde edilmektedir. Bu sonuç bize algoritmanın işlemediğini ve başka bir çözüm yolu kullanılması gerektiğini göstermektedir. Fakat bazı öğretmen adayları $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin 0 sonucunu verdiği, dolayısıyla $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ ’ın 0 olduğu sonucuna ulaştığı belirlenmiştir. Sorunun doğru çözümünde de her ne kadar f_x , f_y fonksiyonları $(0,0)$ noktasında 0 sonucunu verse de, bu şekilde cevap veren öğretmen

adaylarının kavram yanlışlığına sahip olduğu ve yanlışlıkla doğru sonuca ulaştığı görülmektedir.

5. soruda, birkaç öğretmen adaylarının ise limit tanımını yanlış fonksiyon üzerinde kullanımlarından kaynaklanan kavram yanlışlığına sahip olduğu görülmüştür. Bu duruma Şekil 21’de yer alan ÖA81 kodlu öğretmen adayının cevabı örnek verilmiştir. Cevap incelendiğinde, öğretmen adayının soruyu kısmi türevin limit tanımından çözmesi gerektiğinin farkına vardığı açıktır. Fakat sahip olduğu kavram yanlışlığı dolayısıyla limit tanımını $f(x,y)$ fonksiyonuna uygulayıp f_x ve f_y kısmi türevlerini elde etmesi gerekirken, f_x ve f_y fonksiyonları üzerine uygulamış ve sırasıyla f_{xx} ve f_{yy} ’nin sonuçlarına ulaşmıştır. Burada ÖA81 kodlu öğretmen adayı aslında f ’nin ikinci mertebe kısmi türevini almış fakat birinci mertebe kısmi türevini aldığını düşünmektedir. Her ne kadar doğru sonuca ulaşılmış olsa da bu kavrayışa sahip öğretmen adaylarının kavram yanlışlığına sahip olduğu açıkça görülmektedir.



5 CEVAP: ① $f_x = \frac{y \cdot (x^2 + y^2) - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f_x(0,0)$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot ((0+h)^2 + 0) - 2 \cdot h \cdot 0}{((0+h)^2 + 0)^2} = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \rightarrow 0 = f_x(0,0)$

② $f_y = \frac{x \cdot (x^2 + y^2) - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f_y(0,0)$ için $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot (0+h^2) - 2 \cdot h \cdot 0}{(h^2)^2} = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^2} = 0 = f_y(0,0)$

Şekil 21. ÖA81 kodlu öğretmen adayının 5. soruya verdiği cevap

6. soru ile öğretmen adaylarının kısmi türev ile tek değişkenli fonksiyonlarda türev arasındaki sembol kullanımının farkında olup olmadıklarının görülmesi ve varsa sahip oldukları kavram yanlışlıklarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Öğretmen adaylarının 6. soruya vermiş oldukları cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8

Öğretmen adaylarının 6. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	f	%	f
0	0	97,5	79	0	0	2,5	2
						100	81

Tablo 8’de 2’si dışında tüm öğretmen adaylarının 6. soruya cevap verdiği görülmektedir. Cevaplar incelendiğinde, 79 öğretmen adayının (%97,5) kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu sonuç katılımcıların ikisi dışında tamamının kısmi türev ile normal türev arasındaki sembol farkını belirleyemediğini göstermektedir. Bu denli yüksek oranda öğretmen adayının kavram yanılgısına sahip olmasına, öğretim aşamasında, kısmi türevleri normal türevlerden ayırt etmek için kullanılan ∂ sembolüne gerekli vurgu yapılmamasının neden olduğu düşünülmektedir. Sonuç olarak katılımcıların neredeyse tamamının d sembolünü ∂ sembolünden ayırt edemediği ve semboller arası geçişlerde kavram yanılgısına sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu kavram yanılgısı işlem, formül, sembol gibi değişik formlar arası geçişlerde yapılan kavram yanılgılarına örnek olması nedeniyle, yanlış tercüme türünden kavram yanılgısına örnek gösterilebilir.

$$z = txy^2, x = t + \ln(y + t^2), y = e^t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = ?$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= ty^2 \cdot \left(1 + \frac{2t}{y + t^2}\right) + 2xyt \cdot e^t //$$

Şekil 22. ÖA10 kodlu öğretmen adayının 6. soruya verdiği cevap

6. soruda z fonksiyonunun normal türevi sorulmasına karşın, cevaplar analiz edildiğinde öğretmen adaylarının tamamının çok değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralını uyguladığı belirlenmiştir. Bu duruma örnek olarak Şekil 22’de yer alan ÖA10 kodlu

öğretmen adayının cevabı verilmiştir. Cevaplar incelendiğinde, ÖA10 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde bazı öğretmen adaylarının zincir kuralını uygularken yalnızca d sembolünü kullandığı, bazılarının ise yalnızca ∂ sembolünü kullandığı görülmüştür. d sembolünü kullanan öğretmen adaylarının, d sembolü ile ∂ sembolünü ayırt edemediği, yani normal türev için kullanılan sembolün kısmi türev içinde kullanılabileceği kavram yanlışlığına sahip olduğu düşünülmektedir. ∂ sembolünü kullanan öğretmen adaylarının ise kısmi türev ile normal türevi ayırt etmek için kullanılan sembollerin farkında olduğu fakat soruda verilen forma uygulayamadığı düşünülmektedir. Her iki durumda da öğretmen adaylarının sembollerin değişik formlar arası geçişini sağlayamadığı görülmektedir.

7. soru ile öğretmen adaylarının, iki değişkenli bir f fonksiyonunda zincir kuralını uygulayıp uygulayamadıklarının görülmesi ve varsa sahip oldukları kavram yanlışlıklarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bunun yanı sıra f fonksiyonuna bağlı olan x ve y fonksiyonlarının biri tek biri iki değişkenli verilerek, öğretmen adaylarının sembol kullanımına ilişkin kavram yanlışlıkları tespit edilmeye çalışılmıştır. 7. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 9’da verilmiştir.

Tablo 9

Öğretmen adaylarının 7. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP				BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok					
%	f	%	f	%	f	%	f	%	f
4,9	4	93,8	76	1,2	1	0	0	100	81

Tablo 9 incelendiğinde tüm katılımcıların 7. soruyu cevapladığı görülmektedir. Ayrıca 76 öğretmen adayının (%93,8) kavram yanlışlığına sahip olduğu, 5 öğretmen adayının (%6,1) ise kavram yanlışlığına sahip olmadığı belirlenmiştir. 7. soruda kavram yanlışlığına sahip olan öğretmen adaylarının cevapları analiz edildiğinde, 64’ünün doğru sonuca ulaştığı, 12’sinin ise işlem hataları sebebiyle yanlış sonuca ulaştığı tespit edilmiştir. Fakat bahsedilen öğretmen adaylarının tamamının, tek değişkenli fonksiyonların türevi ile kısmi türevi ayırt etmek için kullanılan sembollerini yanlış kullandığı belirlenmiştir. Bu sonuç 6. sorunun

bulguları ile benzerlik göstermekte olup, öğretmen adaylarının semboller arası geçişlerde kavram yanlışlığına sahip olduğunu göstermektedir. Bu durum kavram yanlışlıklarının giderilmediği sürece güçlü ve ısrarcı özelliğe sahip olduğunu göstermektedir. Belirlenen kavram yanlışlığı her ne kadar 7. soru için öğretmen adaylarının doğru sonuca ulaşmasına neden olsa da, 6. soru da yanlış sonuca ulaşmasına neden olmuştur.

Soru 7:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = y \cdot e^{xy} \cdot u + x \cdot e^{xy} \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = e^{xy} \left(yu - \frac{x}{t^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = y \cdot e^{xy} \cdot t$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = y \cdot e^{xy} \cdot t$$

Şekil 23. ÖA43 kodlu öğretmen adayının 7. soruya verdiği cevap

Şekil 23'te ÖA43 kodlu öğretmen adayının, zincir kuralını hatırlamanın bir yolu olan ağaç diyagramını kullandığı görülmektedir. Öğretmen adayı, çizdiği diyagramda her ne kadar y fonksiyonunu t 'ye bağlı tek değişkenli bir fonksiyon olduğunu belirlese de, işlemlerinde tek değişkenli y fonksiyonunun türevini alırken kısmi türev için kullanılan ∂ sembolünü kullandığı görülmektedir. Bu durum öğretmen adayının semboller arası geçişlerde kavram yanlışlığına sahip olduğunu göstermektedir.

Cevaplar analiz edildiğinde bazı öğretmen adaylarının, ÖA43 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde kısmi türev ya da normal türev fark etmeksizin tüm ifadelerde ∂ sembolünü kullandığı görülürken, bazılarının tüm ifadelerde d sembolünü kullandığı görülmüştür. Bazı öğretmen adaylarının ise f fonksiyonun türevini alırken ∂ , ara değişkenler olan x ve y fonksiyonlarının türevini alırken d sembolünü kullandığı tespit edilmiştir. Buradan anlaşılabileceği üzere öğretmen adaylarının kısmi türev ve normal türevi ayırt etmek için kullanılan sembollere ilişkin kavram yanlışlıklarına sahip olduğu açıktır. Bu kavram yanlışlıklarının, ilk olarak kısmi türevin öğretim aşamasında ∂ ve d sembollerine gerekli vurgu yapılmamasından, ikinci olarak ise çok değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralı uygulamaları yapılırken ara değişkenlerin tümünün, bağımsız değişken sayısı aynı olan fonksiyonlar şeklinde verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırmanın 8. sorusunda öğretmen adaylarının, istenen noktada süreksiz ve parçalı bir f fonksiyonunun ikinci mertebe kısmi türevini alırken varsa sahip oldukları kavram yanlışlarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. 8. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 10’da verilmiştir.

Tablo 10

Öğretmen adaylarının 8. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP				BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok					
%	f	%	f	%	F	%	f	%	f
50,6	41	25,9	21	6,2	5	17,3	14	100	81

Tablo 10 incelendiğinde 14 öğretmen adayının (%17,3) 8. soruya cevap vermediği görülmektedir. Ayrıca 21 öğretmen adayının (%25,9) kavram yanılgısına sahip olduğu, 46 öğretmen adayının (%56,8) ise kavram yanılgısına sahip olmadığı belirlenmiştir. Kavram yanılgısı tespit edilmeyen cevaplar incelendiğinde, 5 öğretmen adayının işlem hataları sebebiyle yanlış sonuca ulaşırken, 41 öğretmen adayının doğru sonuca ulaştığı tespit edilmiştir.

Kavram yanılgısı tespit edilen cevaplar incelendiğinde ise bazı öğretmen adaylarının f_x fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki değeri 0 olduğu için, $f_{xy}(0,0)$ değerinin de 0 olduğunu kavrayışına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu cevabı veren öğretmen adayları, istenen bir noktadaki f_x fonksiyonunun değerinin y 'ye göre kısmi türevi alındığında o noktadaki f_{xy} değerini vereceği yanılgısına sahip olduğu düşünülmektedir.

Bazı öğretmen adaylarının, f_{xy} fonksiyonunda yerine koydukları $(0,0)$ noktasının $\frac{0}{0}$ belirsizliğini vermesine karşın $f_{xy}(0,0)$ 'ın 0 olduğu cevabını verdiği görülmüştür. Bu cevabı veren öğretmen adaylarının $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin 0 olduğu kavrayışına sahip olduğu söylenebilir. Bu yanlış kavrayışın ise belirsizlik ve limit kavramına ilişkin sahip olunan kavram yanlışlarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca 8. soruya bu şekilde cevap verenlerin, 5. soruya da aynı kavrayış biçimiyle yanıt verdiği ve kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir.

Cevap 8:

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

(0,0)'da $\frac{\partial f}{\partial x}$ 'i bulmak için $y=0$ 'da sabit tutmalıyız.

Her x için $f(x,0) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$ için $f_x(x,0) = 0$ olarak bulunur

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (0) = 0 \quad \text{yani} \quad f_{xy}(0,0) = 0 \text{ dur}$$

Şekil 24. ÖA38 kodlu öğretmen adayının 8. soruya verdiği cevap

Cevaplar incelendiğinde öğretmen adaylarından bazılarının ise soruyu Şekil 24'te yer alan ÖA38 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde cevapladığı görülmektedir. Burada öğretmen adaylarının f fonksiyonunda yerine koydukları bir noktanın, f_x fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olduğu kavram yanılgısına sahip olduğu görülmektedir. Buraya kadar 8. soruda en sık karşılaşılan kavram yanılgılarına yer verilmiştir. Bu yanılgıların, öğrencilere fonksiyonun aşına olmadıkları bir şekilde verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca soruda verilen fonksiyonun parçalı ve istenilen noktada süreksiz olması boş cevap sayısındaki artışa da sebep olduğu söylenebilir. Bu durumun öğretim aşamasında ikinci veya daha yüksek mertebeli kısmi türevler için standart örnek çözümünden kaynaklandığı düşünülmektedir.

16. soruda üç farklı fonksiyon verilerek, bu fonksiyonların birbirleri ile fonksiyonel bağımlı olup olmadığı sorulmuştur. Burada öğretmen adaylarının, fonksiyonel determinanın özelliklerinden olan, verilen fonksiyonların jakobieninin sıfır olmasını gerektiren fonksiyonel bağımlılık kavramına ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanılgılarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. 16. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 11'de verilmiştir.

Tablo 11

Öğretmen adaylarının 16. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok	Kavram Yanılgısı Var	Kavram Yanılgısı Yok					
%	F	%	f	%	f	%	f
48,1	39	19,8	16	1,2	1	30,9	25
						100	81

Tablo 11 incelendiğinde 25 öğretmen adayının (%30,9) soruya cevap vermediği görülmektedir. Bu durum, ciddi oranda öğretmen adayının kısmi türevin uygulamalarından olan fonksiyonel bağımlılık kavramına ilişkin bilgi eksikliğine sahip olduğunun göstergesidir. Cevaplar analiz edildiğinde, 16 öğretmen adayının (%19,8) kavram yanılıgına sahip olduğu, 40 öğretmen adayının (%49,3) ise kavram yanılıgına sahip olmadığı belirlenmiştir. Bu sonuç her ne kadar katılımcıların yarıya yakınının kavram yanılıgına sahip olmadığını gösterse de, diğer yarısının kavram yanılıgına sahip olduğunu ya da soru hakkında bilgi eksikliğine sahip olduğunu göstermektedir.

16) $x^2 + y^2 = z$

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$

$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = z$
 $r^2 = z$

olduğundan fonksiyon bağımlıdır.

Şekil 25. ÖA50 kodlu öğretmen adayının 16. soruya verdiği cevap

Kavram yanılıgına sahip olan öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde, birkaç öğretmen adayının x ve y fonksiyonlarının her ikisinde r bağımsız değişkeni bulunmasından dolayı fonksiyonel bağımlı, z fonksiyonunda r değişkeni bulunmamasından dolayı fonksiyonel bağımsız olduğu cevabını vermiştir. Bu cevabı veren öğretmen adaylarının aynı bağımsız değişkene sahip fonksiyonların bağımlı olduğu kavram yanılıgına sahip olduğu söylenebilir. Bazı öğretmen adaylarının ise Şekil 25'te yer alan ÖA50 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde cevap verdiği görülmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının, verilen x ve y fonksiyonlarını yarıçapı r olan merkezli çember denkleminin bileşenleri olduğu kavrayışına sahip olduğu görülmektedir. Burada öğretmen adaylarının fonksiyonel bağımlılık kavramına ilişkin kavram yanılıgına sahip olduğu açıktır. Bu kavram yanılıgının, matematikte karşılaşılan formül, kural, denklem ya da özdeşliklerde yer alan değişkenlerin genelde benzer harf ile temsil edilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Buraya kadar ikinci alt problem doğrultusunda incelenen 5., 6., 7., 8. ve 16. soruların analizi sonucunda elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Şimdi ise öğretmen adaylarının bu sorulara verdiği cevapların ortalamaları alınarak ikinci alt probleme dair bulgulara yer verilecektir.

Araştırmanın ikinci alt problemi ile öğretmen adaylarının, kısmi türev kavramına ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanlışlarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda her bir öğretmen adayının ikinci alt problem kapsamında incelenen beş soruya verdiği cevapların ortalaması alınmıştır. $1,00 \leq x < 1,50$ aralığında çıkan ortalama sonuçlar kavram yanlışlığı yok, $1,50 \leq x \leq 2,00$ aralığında çıkan sonuçlar kavram yanlışlığı var olarak değerlendirilmiştir. Tablo 12’de ikinci alt problem kapsamında incelenen soruların analizi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 12

Öğretmen adaylarının ikinci alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

	%	f
Kavram Yanılgısı Var	37	45,7
Kavram Yanılgısı Yok	44	54,3
Toplam	81	100,0

İkinci alt problem kapsamında incelen soruların analizi sonucunda 37 öğretmen adayının (%45,7) kavram yanlışlığına sahip olduğu, 44 öğretmen adayının (%54,3) ise kavram yanlışlığına sahip olmadığı belirlenmiştir. Bu sonuç öğretmen adaylarının yarıya yakınının ilgili konuda çeşitli kavram yanlışlıklarına sahip olduğunu göstermektedir.

Cevaplar incelendiğinde çoğu öğretmen adayının sahip olduğu yanlış kavrayışlarını, benzer sorularda da uyguladığı görülmüştür. Örneğin 5. sorunun çözümünde $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin 0 sonucunu verdiği kavrayışına sahip olan öğretmen adayları 8. soruyu da aynı şekilde yanıtlamışlardır. Benzer şekilde 6. soruda normal türev ile kısmi türev arasındaki farkı ayırt etmek için kullanılan d ve ∂ sembollerine dair kavram yanlışlığı, 7. soruda da görülmüştür. Soruların analizinde dikkat çekici bir detay ise öğrencilerin d ve ∂ sembollerine ilişkin kavrayışlarının 6. soruda yanlış sonuç vermelerine neden olurken, 7. soruda doğru sonuca ulaşmalarına neden olmasıdır. Benzer şekilde 5. soruda tüm öğretmen adaylarının doğru sonuca ulaştığı, fakat bazılarının kavram yanlışlığına sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu durum kavram yanlışlıklarının yanlışlıkla doğru sonuçlara neden olabileceğini göstermektedir. Ayrıca bu alt problemde öğretmen adaylarının yarısının, kısmi türevin uygulamalarından olan fonksiyonel bağımlılık kavramına ilişkin kavram yanlışlığına ya da bilgi eksikliğine sahip olduğu belirlenmiştir.

4.3. Üçüncü Alt Probleme Ait Bulgular

İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencilerinin yönlü türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarının araştırıldığı üçüncü alt problem doğrultusunda 10., 11., 12. ve 13. sorular analiz edilmiştir. Analiz sonucu elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

Araştırmanın 10. sorusunda, bir f fonksiyonunun P_0 noktasında $\overrightarrow{P_0P_1}$ yönündeki yöne göre türevini bulmaları istenmiştir. Verilen bilgiler ışığında öğretmen adaylarının soruyu, diferansiyellenebilir bir f fonksiyonunun yöne göre türevini hesaplamak için kullanılan gradyan vektörünü kullanarak çözmeleri beklenmektedir. Dolayısıyla bu soruda öğretmen adaylarının yönlü türev uygulamalarına ek olarak gradyan vektörüne ilişkin sahip oldukları kavram yanlışlarının da belirlenmesi amaçlanmıştır. 10. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 13'te sunulmuştur.

Tablo 13

Öğretmen adaylarının 10. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	f	%	f
63,0	51	24,7	20	6,2	5	6,2	5
						100	81

Tablo 13 incelendiğinde 5 öğretmen adayının (%6,2) soruya yanıt vermediği görülmektedir. Soruya cevap veren 76 öğretmen adayının cevapları incelendiğinde ise büyük oranda (%69,2) kavram yanlışına sahip olunmadığı görülse de, önemli oranda öğretmen adayının (%24,7) kavram yanlışına sahip olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla kavram yanlışları tespit edilen cevaplar analiz edilerek sahip olunan kavrayışlar belirlenmeye çalışılmıştır.

10. SORU: $f(x,y,z) = \ln x + 2y + e^{1-z^2}$, $P_0(1,0,1)$ ve $P_1(3,1,3)$ olsun.
 f fonksiyonunun P_0 noktasında $\overrightarrow{P_0P_1}$ yönündeki yönlü
 türevi nedir?

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (2,1,2) \Rightarrow 2i + j + 2k$$

$$|\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \quad u = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k \text{ birim vektör.}$$

$$f_x = \frac{1}{x} \quad f_y = 2 \quad f_z = -2z \cdot e^{1-z^2}$$

$$\nabla f|_{P_0} \Rightarrow \frac{1}{1} = 1 \quad f_y|_{P_0} \Rightarrow 2 \quad f_z|_{P_0} \Rightarrow -2 \cdot 1 \cdot e^0 = -2$$

$$(1, 2, -2) \cdot \left\langle \frac{2}{3}i, \frac{1}{3}j, \frac{2}{3}k \right\rangle \Rightarrow \boxed{\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{4}{3}k} \text{ olur.}$$

Şekil 26. ÖA52 kodlu öğretmen adayının 10. soruya verdiği cevap

Başta da belirtildiği gibi öğretmen adaylarının bu soruyu gradyan vektörünü kullanarak çözmeleri beklenmektedir. Nitekim cevap veren tüm öğretmen adaylarının soruyu beklenen şekilde çözdüğü görülmüştür. Fakat 20 öğretmen adayının kavram yanlışlığına sahip olduğu tespit edilmiştir. Kavram yanlışlığı tespit edilen öğretmen adaylarının birçoğunun, Şekil 26'da ÖA52 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde cevap verdiği görülmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının bir f fonksiyonunun P_0 noktasındaki gradyanının vektör olmadığı, dolayısıyla yöne göre türevin bir skaler çarpım olmadığına yönelik bir kavrayışa sahip olduğu görülmektedir. Bu kavrayışın şüphesiz gradyan vektörüne ilişkin sahip olunan kavram yanlışlarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Kavram yanlışlığına sahip olan bazı öğretmen adaylarının ise fonksiyonda istenen nokta yerine, yön vektörünü kullandığı, dolayısıyla skaler bir cevap elde etmediği görülmüştür. Bu durum, bazı öğretmen adaylarının vektör ile nokta kavramlarına ilişkin kavram yanlışlığına sahip olduğunu göstermektedir.

Araştırmanın 11. sorusunda üç değişkenli bir f fonksiyonunun P_0 noktasında, pozitif x, y, z eksenleri ile açı yapan doğrultudaki, türevini bulmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının bu soruda öncelikle yön vektörünü belirlemeleri, sonrasında ise fonksiyonun istenen noktada ve belirlenen yöndeki değerini hesaplamaları istenmiştir. Dolayısıyla burada yönlü türev uygulamalarına ek olarak yön vektörünü belirleyebilmelerine ilişkin sahip oldukları kavram yanlışlığının tespit edilmesi amaçlanmıştır. 11. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 14'te sunulmuştur.

Tablo 14

Öğretmen adaylarının 11. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	F	%	f	%	f
46,9	38	24,7	20	11,1	9	17,2	14
						100	81

Tablo 14 incelendiğinde 14 öğretmen adayının (%17,2) soruya cevap vermediği görülmektedir. Bu durum, benzer şekilde sorulan 10. sorunun boş cevap sayısı ile karşılaştırıldığında, boş cevap sayısında artış belirlenmiştir. Bunun nedeninin 11. soruda yön vektörünün kapalı bir şekilde verilmiş olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Soruya cevap veren öğretmen adaylarının cevapları analiz edildiğinde 47 öğretmen adayının (%58) kavram yanılgısına sahip olmadığı, 20 öğretmen adayının ise (%24,7) kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir.

$$\begin{aligned}
 D_{\vec{u}}f &= f_x \cdot \cos \alpha + f_y \cdot \cos \beta + f_z \cdot \cos \gamma \\
 D_{\vec{u}}f &= \left(2x \cdot e^{1-y} + \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \right) \cdot \cos 60^\circ + \left(-x^2 \cdot e^{1-y} - z^2 \cdot e^{1-y} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \right) \cdot \cos 45^\circ \\
 &\quad + \left(2z \cdot e^{1-y} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2} \right) \cdot \cos 60^\circ \\
 D_{\vec{u}}f(2,1,1) &= \left(4 + \frac{4}{6} \right) \cdot \frac{1}{2} + \left(-5 + \frac{2}{6} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(2 + \frac{2}{6} \right) \cdot \frac{1}{2} \\
 D_{\vec{u}}f(2,1,1) &= \frac{14}{6} - \frac{14\sqrt{2}}{6} + \frac{7}{6} \\
 \boxed{D_{\vec{u}}f(2,1,1) &= \frac{21 - 14\sqrt{2}}{6}}
 \end{aligned}$$

Şekil 27. ÖA53 kodlu öğretmen adayının 11. soruya verdiği cevap

Kavram yanılgısına sahip olan öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde birçok öğretmen adayının yönlü türevi, $D_{\vec{u}}f = f_x \cdot \cos \alpha + f_y \cdot \cos \beta + f_z \cdot \cos \theta$ şeklinde formülize

ettiği görülmektedir. Bu duruma örnek olarak Şekil 27’de ÖA53 kodlu öğretmen adayının verdiği cevap sunulmuştur. Soruda sırasıyla x, y, z eksenleriyle yaptığı açıları verilen yön vektörünün birim vektör çıkmasından dolayı, bu şekilde cevap veren öğretmen adayları her ne kadar doğru sonuca ulaşsa da yanlış bir kavrayışa sahip oldukları açıktır. Öğretmen adaylarının bu kavrayışının, ya eksenlerle yaptığı açıları verilen vektörü belirlemeye ilişkin sahip oldukları bilgi eksikliğinden ya da soruyu yönlü türevin özelliklerinden olan, u ve ∇f vektörleri arasındaki açı α olmak üzere $D_{\vec{u}}f = |\nabla f||u|\cos\alpha$ formülüne benzetmelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Her ne olursa olsun bu durumun, yönlü türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarının oluşumuna yol açtığı açıktır. Görüldüğü üzere öğrencilerin sahip olduğu kavram yanlışları onları yanlış formül uygulamaya itse de doğru sonuca ulaşmalarına sebep olmuştur.

Araştırmanın 12. sorusunda parçalı bir f fonksiyonunun, P_0 noktasında u yönünde nasıl değiştiği sorulmuştur. Bu soru ile öğretmen adaylarının hem yöne göre türev kavramını sezgisel olarak değişim oranı temsili ile ilişkilendirip ilişkilendiremediklerinin görülmesi hem de parçalı bir f fonksiyonunun yöne göre türevini bulmaya ilişkin sahip oldukları kavram yanlışlarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. 12. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 15’te sunulmuştur.

Tablo 15

Öğretmen adaylarının 12. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok	Kavram Yanılgısı Var	Kavram Yanılgısı Yok					
%	f	%	f	%	f	%	f
30,9	25	16,0	13	3,7	3	49,4	40
						100	81

Tablo 15 incelendiğinde katılımcılarının yarısının (%49,4) 12. soruya cevap vermediği görülmektedir. Bu durumun, öğretmen adaylarının ya bu zamana kadar karşılaştıkları yöne göre türev sorularında parçalı fonksiyon ile karşılaşmamalarından ya da soruda fonksiyonun değişimini bulmak için türev almaları gerektiğinin direkt olarak belirtilmemesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Gerekçesi ne olursa olsun, bu sonuç önemli oranda öğretmen adayının yöne göre türev kavramını, farklı durumlara transfer

edemediğini göstermektedir. 12. soruya cevap veren 41 öğretmen adayının cevapları analiz edildiğinde, 28 öğretmen adayının (%34,6) kavram yanılıgına sahip olmadığı, 13 öğretmen adayının (%16,0) ise kavram yanılıgına sahip olduğu görülmektedir. Kavram yanılıgına sahip olmayan öğretmen adaylarının tamamının yöne göre türevi, gradyan vektörünü kullanarak hesapladığı görülmüştür. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının yalnızca üçünün işlem hatası yaparak yanlış sonuca ulaştığı geri kalan 25'inin ise doğru sonuca ulaştığı belirlenmiştir.

12. Sorunun Cevabı

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0+s \cdot 3, 0+s \cdot 4) - f(0,0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(3s, 4s) - f(0,0)}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (3s)^2 \cdot 4s}{(3s)^4 + (4s)^2} - 0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{18s^2}{81s^4 + 16s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{18s^2}{s^2(81s^2 + 16)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{18}{81s^2 + 16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \quad \text{olduğundan değişim oranı } \frac{9}{8} \text{ 'dir.}$$

Şekil 28. ÖA69 kodlu öğretmen adayının 12. soruya verdiği cevap

Kavram yanılıgı tespit edilen öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde, çoğunun soruyu yöne göre türevin limit tanımını kullanarak çözmeye çalıştığı belirlenmiştir. Soruyu bu şekilde çözen öğretmen adaylarının tamamının, Şekil 28'de ÖA69 kodlu öğretmen adayına benzer şekilde, $u = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ yön vektörünün birim vektöre çevirmediği tespit edilmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının yöne göre türevin limit tanımı kullanırken, verilen yön vektörünün birim vektör olma şartının olmadığı kavrayışına sahip olduğunu göstermektedir. Bu kavrayışa sahip öğrencilerin yöne göre türev sorularında belirtilen yönün, yalnızca gradyan vektörün kullanıldığı çözümlerde birim vektöre çevrilmesi gerektiği kavram yanılıgına sahip olduğu düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının belirli bir sınıfta uygulanması gereken kuralın, daha özel bir alt sınıfa kısıtlanmasından dolayı oluşan bu kavram yanılıgı, aşırı özelleme türünden kavram yanılıgılarına örnek gösterilebilir. Belirlenen bu kavram yanılıgının, öğretim aşamasında limit tanımından çözülen yöne göre türev sorularında verilen yön vektörünün, kendiliğinden birim vektör olarak verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Limit tanımı kullanılan o şekilde bir soru ile yön vektörünün, birim vektöre çevrilmesine gerek kalmayacak ve öğrencilerde bahsedilen kavram yanılıgının oluşumuna neden olacaktır.

u ve ∇f vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos \theta$ yöne göre türevinin özelliklerinden birisi f fonksiyonunun en fazla $\cos \theta = 1$ iken veya $\vec{u}$, ∇f yönünde iken arttığıdır. Araştırmanın 13. sorusunda bir f fonksiyonunun, P_0 noktasında en hızlı arttığı yöndeki maksimum değeri sorularak, öğretmen adaylarının yöne göre türevin bahsedilen özelliğine ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanlışlarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. 13. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 16’te sunulmuştur.

Tablo 16

Öğretmen adaylarının 13. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok	Kavram Yanılgısı Var	Kavram Yanılgısı Yok					
%	f	%	f	%	f	%	f
37,0	30	27,2	22	23,5	19	12,3	10
						100	81

Tablo 16 incelendiğinde 10 öğretmen adayının (%12,3) soruya cevap vermediği görülmektedir. Soruya cevap veren 71 öğretmen adayından, 49’unun (%60,5) kavram yanlışına sahip olmadığı, 22’sinin (%27,2) ise kavram yanlışına sahip olduğu belirlenmiştir. Kavram yanlışına sahip olmayan ve yanlış cevap veren öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde bazı öğretmen adaylarının türev alırken işlem hatası yaparak yanlış sonuca ulaştığı, bazılarının ise gradyan vektörünü bularak işlemi yarım bıraktığı görülmüştür. İkinci durumun bilgi eksikliğinden kaynaklandığı düşünüldüğü için yanlış cevap-kavram yanlışlığı yok kategorisinde değerlendirilmiştir.

Kavram yanlışına sahip olan öğretmen adaylarının cevapları analiz edildiğinde, bazı öğretmen adaylarının Şekil 29’da yer alan ÖA58 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde, fonksiyonun $P(1,1)$ noktasındaki maksimum değerini bulmak için fonksiyonun en hızlı arttığı yön vektörünü bulduğu ve bu yön vektörünü $(1,1)$ noktası ile skaler çarpıldığı görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının, çok değişkenli bir fonksiyonun istenen bir P_0 noktasında en hızlı arttığı yöndeki maksimum değerinin, istenen nokta ile yön vektörünün skaler çarpımına $(D_{\vec{u}}f = P_0 \cdot \vec{u})$ eşit olduğu yanlışına sahip olduğunu göstermektedir. Ayrıca bu yanlış onların vektörler arasında uygulanan skaler çarpımın,

nokta ve vektör arasında uygulanabileceği kavrayışına sahip olduklarını da göstermektedir. Bu kavrayış belirli bir sınıfta uygulanması gereken kuralın, daha geniş bir sınıfa genellemelerinden kaynaklandığı için aşırı genelleme türünden kavram yanılgısına örnek gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
 \text{Cevap 13} &= f(x,y) = y \cdot \frac{x^2}{2} + x \cdot \frac{y^2}{2} \\
 f_x &\rightarrow y \cdot \frac{2x}{2} + \frac{y^2}{2} \rightarrow yx + \frac{y^2}{2} & f_x(1,1) &= \frac{3}{2} \\
 f_y &\rightarrow \frac{x^2}{2} + xy & f_y(1,1) &= \frac{3}{2} \\
 P(1,1) \text{ noktasında maksimum değer} &\downarrow \\
 \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} i + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} j \right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j \right) & P(1,1) \text{ noktasında} &= 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & & &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \\
 & & &= \sqrt{2} //
 \end{aligned}$$

Şekil 29. ÖA58 kodlu öğretmen adayının 13. soruya verdiği cevap

13. soruda bazı öğretmen adaylarının P noktasını, yön vektörü olarak değerlendirdiği ve birim vektöre çevirdiği görülmüştür. Bu kavrayış onları her ne kadar doğru sonuca ulaşmalarına sebep olsa da kavram yanılgısına sahip oldukları açıktır. Bu kavram yanılgısının, bir f fonksiyonunun en fazla u vektörünün ∇f yönünde iken arttığının bilinmemesinden, dolayısıyla soruyu çözebilmek için gereken yön vektörünü verilen bilgilerden elde etmeye çalışmalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Tespit edilen her iki kavram yanılgısında da öğretmen adaylarının, farklı durumlarda bir P_0 noktasını vektör olarak ele aldığı görülmektedir. Bu duruma soruda yön vektörünün verilmemesinin ve genelde öğrencilerin, yalnızca soruda verilen bilgilerle işlem yapmaya aşına olmalarının neden olduğu düşünülmektedir.

Buraya kadar üçüncü alt problem doğrultusunda incelenen 10., 11., 12. ve 13. soruların analizi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Şimdi ise öğretmen adaylarının bu sorulara verdikleri cevapların ortalamaları alınarak üçüncü alt probleme dair bulgulara yer verilecektir.

Araştırmanın üçüncü alt problemi ile öğretmen adaylarının, yöne göre türev kavramına ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanılgılarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda her bir öğretmen adaylarının üçüncü alt problem kapsamında incelenen dört soruya verdikleri cevapların ortalaması alınmıştır. $1,00 \leq x < 1,50$ aralığında

çıkan ortalama sonuçları kavram yanlışlığı yok, $1,50 \leq x \leq 2,00$ aralığında çıkan sonuçlar kavram yanlışlığı var olarak değerlendirilmiştir. Tablo 17’de üçüncü alt problem kapsamında incelenen soruların analizi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 17

Öğretmen adaylarının üçüncü alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

	f	%
Kavram Yanlışlığı Var	24	29,6
Kavram Yanlışlığı Yok	57	70,4
Toplam	81	100,0

Tablo 17 incelendiğinde, 24 öğretmen adayının (%29,6) yöne göre türev kavramına ilişkin kavram yanlışlıklarına sahip olduğu, 57 öğretmen adayının (%70,4) ise kavram yanlışlıklarına sahip olmadığı belirlenmiştir. Bu sonuç önemli oranda öğretmen adayının yöne göre türev kavramına ilişkin çeşitli kavram yanlışlıklarına sahip olduğunu göstermektedir.

Yöne göre türev, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun P_0 noktasında, sadece $u = \hat{i}$ ve $u = \hat{j}$ iken değil, herhangi bir $\vec{u}$ yönündeki değişim oranıdır. Bu türev, $f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevlerinin P_0 noktasında hesaplanmasıyla elde edilen gradyan vektör ve u ’nun skaler çarpımı ile hesaplanmaktadır. Tanımdan görüleceği üzere yöne göre türev kavramının anlamlandırılabilmesi için öğrencilerin vektör bilgilerine de ihtiyaç vardır. Fakat incelenen yöne göre türev sorularında, bazı öğretmen adaylarının gradyan vektör, yön vektörü ve iki vektörün çarpımını gerektiren skaler çarpım kavramlarına ilişkin kavram yanlışlıklarına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum matematikte öğrenilen her kavramın, başka bir kavramı etkilediğini açık bir şekilde ortaya koymaktadır.

11. soruda sırasıyla x, y, z eksenleriyle yaptığı açıları verilen yön vektörünün birim vektör çıkmasından dolayı kavram yanlışlığına sahip olan birçok öğretmen adayının doğru sonucu ulaştığı belirlenmiştir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adayları her ne kadar doğru sonuca ulaşsa da yanlış bir kavrayışa sahip oldukları görülmektedir. 12. soruda ise elde edilen bulgular, öğrencilerin yarısının soruya cevap vermediğini göstermektedir. Bu duruma, öğrencilere sorunun aşına olmadıkları bir tarzda sorulmasının neden olduğu düşünülmektedir. Ayrıca kavram yanlışlığına sahip olan öğretmen adaylarının çoğunun yöne

göre türevin limit tanımını kullandığı fakat çözümlerinde yön vektörünü birim vektöre çevirmediği görülmüştür. Bu durum kavram yanlışlığına sahip olan öğrencilerin benzer hatalar yaptığını ya da soruları benzer şekilde cevaplandırıldığını göstermektedir.

4.4. Dördüncü Alt Probleme Ait Bulgular

İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2. sınıf lisans öğrencilerinin, çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusuna ilişkin kavram yanlışlıklarının araştırıldığı dördüncü alt problem doğrultusunda 14., 15., 17. ve 18. sorular analiz edilmiştir. Analiz sonucu elde edilen bulgular aşağıda sunulmuştur.

Dördüncü alt problem kapsamında incelenen 14. soru öğretmen adaylarının, iki değişkenli bir f fonksiyonunun varsa yerel ekstremum değerlerini ve eyer noktasını belirleyip belirleyemediklerinin görülmesi ve f 'nin ikinci türev testi sonucunda diskriminantının sıfır olması ($f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$) durumunda sahip oldukları kavram yanlışlıklarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. 14. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 18'de sunulmuştur.

Tablo 18

Öğretmen adaylarının 14. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	F	%	f
11,1	9	19,8	16	58,0	47	11,1	9
						100	81

Tablo 18 incelendiğinde 9 öğretmen adayının (%11,1) 14. soruya cevap vermediği görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının büyük çoğunluğunun soru hakkında fikir sahibi olduğunu göstermektedir. Fakat analiz sonucunda, öğretmen adaylarının yarıdan fazlasının (%58,0) yanlış cevap-kavram yanlışlığı yok kategorisinde yer alan cevaplar verdiği görülmüştür. Bu sonuç büyük oranda öğretmen adayının bilgi eksikliğine sahip olduğunu ya da dikkatsizlik yaşadığını göstermektedir. Çünkü cevaplar incelendiğinde, bir takım öğretmen adaylarının dikkatsizlik sonucu meydana gelen işlem hatalarından dolayı yanlış

sonuca ulaştığı, diğerlerinin ise f fonksiyonunun diskriminantının sıfır çıkması durumunda sahip oldukları bilgi eksikliğinden dolayı soruyu yarıda bıraktığı görülmüştür.

Cevaplar incelendiğinde yalnızca 9 öğretmen adayının (%11,1) diskriminantın sıfır çıkması durumunda, belirlenen kritik noktanın yerel minimum noktası olduğunu uygun çözüm yolu ile açıkladığı görülmüştür. Bu sonuca, birçok öğretmen adayının daha önceden diskriminantın sıfır olması durumu ile karşılaşmalarının sebep olduğu düşünülmektedir.

Tablo 18 incelendiğinde, 16 öğretmen adayının ise (%19,8) kavram yanılgısına sahip olduğu görülmektedir. Kavram yanılgısı tespit edilen öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde, bazılarının belirlenen kritik noktada yani $(0,0)$ 'da, diskriminantın sıfır $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0)$ olması durumunda, fonksiyonun o noktada, eyer noktası bulunduğu cevabını vermiştir. Bu durum öğretmen adaylarının $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ durumunda var olan eyer noktasını, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \leq 0$ durumunda da var olacağı kavrayışına sahip olduğu göstermektedir. Fakat $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ durumunda, iki değişkenli fonksiyonlarda yerel ekstremum değerleri için kullanılan ikinci türev testi sonuç vermemektedir. Bu şekilde cevap veren öğrenciler fonksiyonun diskriminantının sıfırdan küçük olması durumunda var olan eyer noktasını, sıfırdan küçük eşit olması durumuna genelledikleri için belirlenen kavram yanılgısı aşırı genelleme türünden kavram yanılgısına örnek verilebilir.

Cevap 14: $\nabla f = (f_x, f_y) = (0,0)$

$f_x = 4x^3 + 2x + 2y = 0$

$f_y = 2x + 2y = 0$

$f_{xx} = 12x^2 + 2$

$f_{yy} = 2$

$f_{xy} = 2$

$(0,0)$ kritik noktadır

$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24x^2$

$D(0,0) = 0$ olduğundan test sonucusuz

Max, min ve eyer nok. yoktur.

Şekil 30. ÖA38 kodlu öğretmen adayının 14. soruya verdiği cevap

İkinci türev testi sonuç vermediğinde, f 'nin belirlenen kritik noktadaki davranışını belirlemek için yerel maksimum ve yerel minimum tanımlarını kullanmaları gerekmektedir. Fakat bazı öğretmen adayları belirlenen kritik noktada fonksiyonun, yerel ekstremum ve eyer noktasına sahip olmadığı cevabını vermiştir. Bu duruma örnek olarak Şekil 30'da ÖA38 kodlu öğretmen adayının verdiği cevap verilmiştir. Bu şekilde cevap veren öğretmen

adayları ikinci türev testinin sonuç vermediği, yani diskriminantın sıfır olması durumunda, fonksiyonun belirlenen kritik noktada yerel ekstremum ve eyer noktasına sahip olmayacağı kavrayışına sahiptir. Bu kavrayışa sahip öğretmen adaylarının, bir f fonksiyonunun kritik noktasındaki davranışını belirlemek için yalnızca ikinci türev testinin kullanılabileceği kavram yanlışlığına sahip olduğu düşünülmektedir. Bu kavram yanlışlığı aşırı özelleme türünden kavram yanlışlığına örnek gösterilebilir.

Birkaç öğretmen adayının ise $f_{xx} > 0$ olmasından dolayı fonksiyonun yerel minimuma sahip olduğunu belirtmişlerdir. Fakat fonksiyonun $f_{xx} > 0$ olması yerel minimuma sahip olduğu anlamına gelmemektedir. Bir fonksiyonun bir (a, b) noktasında yerel minimuma sahip olması için $f_{xx} > 0$ ve $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ olması gerekmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının $f_{xx} > 0$ olan tüm fonksiyonların yerel minimuma sahip olduğu kavrayışına sahiptirler. Dolayısıyla öğretmen adaylarının bu kavrayışı, aşırı genelleme türünden kavram yanlışlığına örnek gösterilebilir.

15. soru öğretmen adaylarının, kısıtlama altında bir fonksiyonun maksimum değeri istenen bir problemi çözüp çözemediklerinin görülmesi ve varsa sahip oldukları kavram yanlışlıklarının belirlenmesi amaçlanmıştır. 15. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 19’da verilmiştir.

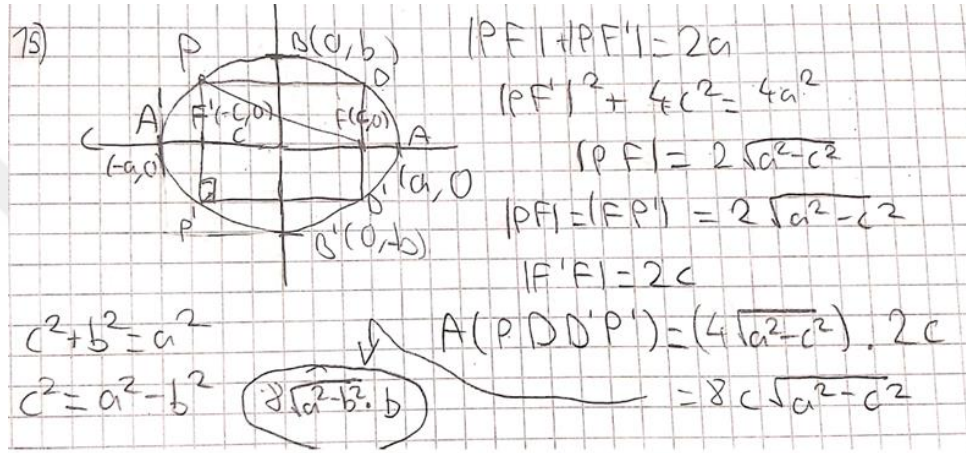
Tablo 19

Öğretmen adaylarının 15. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP				BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok					
%	f	%	f	%	F	%	f	%	f
76,5	62	3,7	3	3,7	3	16,0	13	100	81

Tablo 19 incelendiğinde 13 öğretmen adayının (%16,0) soruya cevap vermediği görülmektedir. Cevap veren öğretmen adaylarının ise 65’inin (%79,8) kavram yanlışlığına sahip olmadığı, yalnızca 3’ünün (%3,7) kavram yanlışlığına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum çoğu öğretmen adayının bir kısıtlama altında alan problemine dair kavram yanlışlığına sahip olmadığını göstermektedir.

Cevaplar incelendiğinde kavram yanılıgına sahip olmayan tüm öğretmen adaylarının soruyu, dikdörtgenin alan fonksiyonunu, tek değişkenli fonksiyona dönüştürerek çözdüğü görülmektedir. Kısıtlanmış bir fonksiyonun ekstremum değerlerini bulmak için Lagrange Çarpanı yöntemi de kullanılabilmesine karşın hiçbir öğretmen adayının bu yöntemi kullanmadığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların ekstremum değerlerini bulmaya daha aşina olmalarından ya da Lagrange Çarpanı yöntemini kullanmaya yeterince hakim olmamalarından kaynaklandığı düşünülmektedir.



Şekil 31. ÖA62 kodlu öğretmen adayının 15. soruya verdiği cevap

Kavram yanılıgı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, öğretmen adaylarından birisinin elips denkleminin kısmi türevlerini sıfıra eşitlediği ve elipsin ekstremum nokta ya da noktalarını belirlemeye çalıştığı görülmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adayının elipsin maksimum ve minimum noktalarından çizilecek dikdörtgenin maksimum alanlı olacağı kavram yanılıgına sahip olduğu görülmektedir. Diğer iki öğretmen adayının ise koordinat düzleminde bir elips içerisine dikdörtgen çizerek, şekil üzerinden maksimum hacimli dikdörtgeni elde etmeye çalıştığı belirlenmiştir. Buna örnek olarak Şekil 31'de ÖA62 kodlu öğretmen adayının cevabı verilmiştir. Bu şekilde cevap veren iki öğretmen adayının elips üzerindeki herhangi dört noktaya sahip dikdörtgenin maksimum alana sahip olacağı kavram yanılıgına sahip olduğu düşünülmektedir.

17. soru ile öğretmen adaylarından uzayda düzgün bir yüzey üzerindeki bir noktadan geçen teğet düzlemi ve normal doğrusunun denklemlerini bulmaları istenmiş ve varsa sahip oldukları kavram yanılıgılarının belirlenmesi amaçlanmıştır. 17. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 20'de verilmiştir.

Tablo 20

Öğretmen adaylarının 17. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok		Kavram Yanılgısı Var		Kavram Yanılgısı Yok			
%	f	%	f	%	F	%	f
19,8	16	42,0	34	18,5	15	19,8	16
						100	81

Tablo 20 incelendiğinde 16 öğretmen adayının (%19,8) 17. soruya cevap vermediği görülmektedir. Soruyu yanıtlayan öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde ise 31'inin (%38,3) kavram yanılgısına sahip olmadığı, 34'ünün (%42,0) ise kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum soruyu cevaplayanların yarısından fazlasının kavram yanılgısına sahip olduğunu göstermektedir.

Kavram yanılgısı tespit edilmeyen cevaplar incelendiğinde 31 öğretmen adayından 16'sının doğru çözüm yolu kullanarak doğru sonuca ulaştığı belirlenmiştir. 15 öğretmen adayının ise bazılarının işlem hatası nedeniyle yanlış sonuca ulaştığı, bazılarının ise bilgi eksikliği nedeniyle fonksiyonun kısmi türevlerini bularak soruyu yarım bıraktığı görülmüştür. Birkaç öğretmen adayının ise fonksiyonun teğet düzlem denklemini bulduğu fakat normal doğrusunun denklemini bulamadığı belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının uzayda düzgün bir yüzeyin normal doğrusunun denklemini dair bilgi eksikliğine sahip olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla bu şekildeki cevaplar yanlış cevap-kavram yanılgısı yok kategorisinde incelenmiştir.

$$\begin{aligned}
 \text{Cevap 17} &= f(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\
 f_x &\rightarrow -\frac{\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y} \quad f_x(\pi,2) = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{1}{2} \\
 f_y &\rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot x}{y^2} \quad f_y(\pi,2) = \frac{\sin\frac{\pi}{2} \cdot \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\
 \text{Teget düzlemi} &\Rightarrow -\frac{1}{2}(x-\pi) + \frac{\pi}{4}(y-2) = 0 \\
 \text{Normal doğrusunun denklemi} &\Rightarrow x = \pi + \left(-\frac{1}{2}\right)t \quad y = 2 + \frac{\pi}{4}t
 \end{aligned}$$

Şekil 32. ÖA58 kodlu öğretmen adayının 17. soruya verdiği cevap

Soruda f fonksiyonunun $(\pi, 2)$ noktasında teğet olan düzlem ve normal doğrusunun denklemlerinin bulunması istenmiştir. İstenen denklemlerin yazılabilmesi için öncelikle f fonksiyonunun uzayda $z = f(x, y)$ yüzeyini belirttiği gözlemlenerek, $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (\pi, 2, 0)$ noktasının belirlenmesi gerekmektedir. Fakat kavram yanılgısı tespit edilen cevaplar incelendiğinde, çoğunun soruyu z_0 değerini belirlemeden, Şekil 32’de yer alan ÖA58 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde cevapladığı görülmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adayları (x_0, y_0) noktasının $z = f(x, y)$ yüzeyinin üzerinde olacağı kavram yanılgısına sahiptirler. Belirlenen bu kavram yanılgısının, öğretmen adaylarının öğretim aşamasında ya da ders kitaplarında karşılaştığı sorularda verilen noktanın çoğunlukla yüzeyin bir noktası olarak yani (x_0, y_0, z_0) şeklinde verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

$$\begin{aligned}
 f'(x, y) &= \frac{-f_x}{f_y} = - \frac{-\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y}}{-\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y}} \\
 &= \frac{-\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = -2 = m_{\text{teğet}} \\
 y - 2 &= -2(x - \pi) \text{ teğet denklemi} \\
 m_T \cdot m_N &= -1 \quad -2 \cdot m_N = -1 \quad m_N = \frac{1}{2} \\
 y - 2 &= \frac{1}{2}(x - \pi) \text{ normal denklemi}
 \end{aligned}$$

Şekil 33. ÖA48 kodlu öğretmen adayının 17. soruya verdiği cevap

Kavram yanılgısı tespit edilen cevaplar incelendiğinde bazı öğretmen adaylarının ise Şekil 33’te ÖA48 kodlu öğretmen adayının cevabına benzer şekilde, tek değişkenli fonksiyonlar için koordinat düzleminde, eğri üzerindeki bir noktada teğet ve normal doğru tanımına benzer şekilde ($y = f(x)$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki teğetinin ve normalinin bulunması) çözmeye çalıştığı görülmüştür. Bu durum soruda verilen $(\pi, 2)$ noktasında, z_0 değerinin bulunmamasından, yani verilen noktanın bir eğrinin noktası olarak

algılanmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının bir eğri veya yüzey üzerindeki noktalara ilişkin kavram yanlışlarına sahip olduğu görülmektedir. Sahip olunan bu kavram yanlışları ise herhangi bir yüzey üzerindeki bir noktadan geçen teğet düzlem ve normalini bulmaya ilişkin yeni kavram yanlışlarının oluşumuna sebep olduğu düşünülmektedir.

18. soruda f ve g olmak üzere iki farklı yüzey denklemi verilerek, öğrencilerden bir P noktasında yüzeylerin birbirlerine teğet olduğunu göstermeleri istenmiştir. Sorunun çözümü için öğrencilerin, iki yüzeyin verilen noktada teğet düzlemlerinin aynı olduğunu göstermeleri gerekmektedir. Bu soru ile öğretmen adaylarının istenen bağlantıyı kurup kuramadıklarının görülmesi ve varsa sahip oldukları kavram yanlışlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. 18. soruya verilen cevapların yüzde ve frekans değerleri Tablo 21’de verilmiştir.

Tablo 21

Öğretmen adaylarının 18. soruya verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

DOĞRU CEVAP		YANLIŞ CEVAP		BOŞ		TOPLAM	
Kavram Yanılgısı Yok	Kavram Yanılgısı Var	Kavram Yanılgısı Yok					
%	f	%	f	%	F	%	f
53,1	43	3,7	3	8,6	7	34,6	28
						100	81

Tablo 21 incelendiğinde 28 öğretmen adayının (%34,6) 18. soruyu boş bıraktığı görülmektedir. Bu duruma, büyük oranda öğretmen adayının çözüm için beklenen bağlantıyı kurmakta zorlanmasının neden olduğu düşünülmektedir. Cevap veren öğretmen adaylarının ise yalnızca 3’ünün (%3,7) kavram yanlışına sahip olduğu belirlenirken, 50’sinin (%61,7) kavram yanlışına sahip olmadığı belirlenmiştir. Kavram yanlışına sahip olmayan 7 öğretmen adayı (%8,6) verilen noktada yüzeylerin teğet düzlem denklemlerini belirlemiş fakat teğet olmalarına ilişkin açıklama yapamamışlardır. Dolayısıyla bu cevaplar yanlış cevap-kavram yanlışsı yok kategorisinde incelenmiştir. Kavram yanlışsı tespit edilmeyen 43 öğretmen adayının (%53,1) ise doğru cevap verdiği tespit edilmiştir. Sonuçlar büyük oranda öğretmen adayının ya çözüm için gerekli bağlantıyı kuramayıp soruyu boş

bıraktığını ya da iki yüzeyin teğet olduğunu göstermek için verilen noktada teğet düzlemlerinin aynı olduğunu göstermeleri gerektiği bilgisine sahip olduğu görülmektedir.

Kavram yanlışlığı tespit edilen cevaplar incelendiğinde 3 öğretmen adayının kavram yanlışlığına sahip olduğu tespit edilmiştir. Şekil 34'te kavram yanlışlığına rastlanan ÖA75 kodlu öğretmen adayının cevabına yer verilmiştir. Öğretmen adayının iki fonksiyonun türevi verilen noktada eşit olduğu için yüzeylerin birbirlerine teğet olduğu kavrayışına sahip olduğu görülmektedir. Fakat yüzeylerin birbirine teğet olabilmesi için her iki yüzeyin teğet düzlemi, aynı nokta ve doğrultu katsayıları birbiriyle aynı ya da orantılı olan normal doğru ile oluşturulması yani teğet düzlemlerinin aynı olması gerekmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayının verilen noktada türevleri eşit olan iki fonksiyonun teğet olduğu kavram yanlışlığına sahip olduğu söylenebilir.

Bir diğer öğretmen adayının ise verilen noktada f ve g yüzeylerinin birinci mertebeden kısmi türevlerinin yüzey denklemlerini sağladığı için iki yüzeyin teğet olduğu kavrayışına sahip olduğu görülmüştür. Fakat bulunan kısmi türevlerin yüzey denklemlerini sağlaması gibi bir durum söz konusu değildir. İki yüzeyin teğet olması için verilen noktadaki teğet düzlemlerinin aynı olması gerekmektedir. Dolayısıyla öğretmen adayının sahip olduğu kavrayışın, kavram yanlışlığı içerisinde olduğu açıktır.

18) $z_x = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}$ $z_y = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}$

$f(x,y,z) \Rightarrow z_x = \frac{4x}{-4z}$ $z_y = \frac{8y}{-4z}$

$g(x,y,z) \Rightarrow z_x = \frac{-2x+4}{4z-6}$ $z_y = \frac{2y+4}{4z-6}$

$f(x,y,z) \Rightarrow z_x = \frac{4 \cdot 1}{-4 \cdot 1} = -1$ $z_y = \frac{8 \cdot 2}{-4 \cdot 1} = -4$

$g(x,y,z) \Rightarrow z_x = \frac{(-2) \cdot 1 + 4}{4 \cdot 1 - 6} = -1$ $z_y = \frac{2 \cdot 2 + 4}{4 \cdot 1 - 6} = -4$

$\Rightarrow$ İki fonksiyonun türevi verilen noktada eşit çıktığı için teğettir.

Şekil 34. ÖA75 kodlu öğretmen adayının 18. soruya verdiği cevap

Buraya kadar dördüncü alt problem doğrultusunda incelenen 14., 15., 17. ve 18. soruların analizi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Şimdi ise öğretmen adaylarının bu sorulara verdikleri cevapların ortalamaları alınarak dördüncü alt probleme dair bulgulara yer verilecektir.

Araştırmanın dördüncü alt problemi ile öğretmen adaylarının, çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusuna ilişkin varsa sahip oldukları kavram yanlışlarının tespit edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda her bir öğretmen adaylarının dördüncü alt problem kapsamında incelenen dört soruya verdiği cevapların ortalaması alınmıştır. $1,00 \leq x < 1,50$ aralığında çıkan ortalama sonuçları kavram yanlışlığı yok, $1,50 \leq x \leq 2,00$ aralığında çıkan sonuçlar kavram yanlışlığı var olarak değerlendirilmiştir. Tablo 22’de dördüncü alt problem kapsamında incelenen soruların analizi sonucu elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Tablo 22

Öğretmen adaylarının dördüncü alt problem kapsamında incelenen sorulara verdiği cevaplarla oluşturulmuş yüzde ve frekans tablosu

	%	F
Kavram Yanlışlığı Var	16	19,8
Kavram Yanlışlığı Yok	65	80,2
Toplam	81	100,0

Tablo 22 incelendiğinde, 16 öğretmen adayının (%19,8) çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamalarına ilişkin kavram yanlışlığına sahip olduğu, 65 öğretmen adayının (%80,2) ise kavram yanlışlığına sahip olmadığı belirlenmiştir. Araştırmanın diğer alt problemleri ile karşılaştırıldığında, en az kavram yanlışlığına sahip olunan alt problemin bu olduğu tespit edilmiştir.

14. soruda birçok öğretmen adayının ikinci türev testi sonucu diskriminantın sıfır çıkması durumunda soruyu yarım bıraktığı ya da yanlış kavrayışlara sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durumun öğrencilerin daha önceden, öğretim aşamasında ya da ders kitaplarında, diskriminantın sıfır olması durumu ile karşılaşmamalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bazı kavram yanlışlarının ise öğrencilerin ön bilgilerinde sahip olduğu bilgi eksikliklerinden ya da kavram yanlışlarından kaynaklandığı belirlenmiştir. Örneğin bazı öğretmen adaylarının 17. soruyu tek değişkenli fonksiyonlar için koordinat düzleminde,

eğri üzerindeki bir noktada teğet ve normal doğru tanımlarını kullanarak çözmeye çalıştığı belirlenmiştir. Bu durumun öğretmen adaylarının ön bilgilerindeki bilgi eksikliklerinden ya da kavram yanılgılarından kaynaklandığı görülmektedir. 15. soruda ise birçok öğretmen adayının kavram yanılgısına sahip olmadığı belirlense de, hiçbirinin kısıtlama altındaki bir fonksiyonun ekstremum değerlerini bulmak için Lagrange Çarpanı yöntemini kullanmaması dikkat çekmektedir.



BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma

Bu araştırmada İlköğretim Matematik Öğretmenliği lisans 2. sınıf öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda, öğretmen adaylarının sırasıyla çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin, kısmi türev kavramına ilişkin, yöne göre türev kavramına ilişkin ve geometrik uygulamalar konusuna ilişkin sahip oldukları kavram yanlışları incelenmiştir.

Araştırmanın birinci alt problemi kapsamında çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin sorulara verilen cevaplar değerlendirilmiştir. Değerlendirme sonucunda %40,7 oranında öğretmen adayının kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Literatürdeki benzer çalışmalarda öğretmen adaylarının kavram tanımlarını yapmakta zorlandığı ve kavram yanlışlarına sahip olduğu ortaya koyulmuştur. Koçak'ın (2020) çalışmasında öğretmen adaylarının üstel belirsizlikler ve diferansiyel konularını öğrenme düzeyleri belirlenerek, bu konulardaki hata ve kavram yanlışları ortaya çıkarılmıştır. Öğretmen adaylarının üstel belirsizlikler ile diferansiyelin geometrik tanımını yapmakta zorlandığı ve aşırı genelleme sonucu kavram yanlışlarına sahip olduğu tespit edilmiştir. Benzer şekilde Dereli'nin (2015) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının dizi ve seri kavramlarının tanımlarını yaparken zorlandığı ve kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir.

Vinner'a (2002) göre kavram tanımları matematik öğreniminde ciddi sorunlara neden olmaktadır. Çünkü matematik, doğası gereği içeriğinde birçok soyut kavramı barındırmaktadır. Kavramların soyut nitelikte olması, öğrenilecek kavramın temel bir parçası yani doğasında var olduğu söylenebilir. Fakat öğrenciler soyut kavramları anlamlandırmakta zorluk çekmektedir. Öğrenciler anlamlandıramadığı kavramları, ezberleme yoluna giderler (Yenilmez ve Yaşa, 2008). Fakat bir kavram tanımını ezberlemek, kavramın anlaşılmasını sağlamamaktadır. Ezberlenen kavramlar içselleştirilemediği için anlamlı öğrenme gerçekleşmemekte ve bu durum yanlış anlamalara veya kavram yanlışlarına sebep olabilmektedir. Bu nedenle matematik eğitiminde, öğrenme ve ilişki kurma arasında köprü vazifesi görecektir olan kavram tanımları çok önemli yere sahiptir. Araştırmamızda öğretmen adaylarının tanım ve kavram tanımlarını ifade etmekte zorlandığı ve kavram yanlışlarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu duruma birçok öğretmen adayının verilen kavram

tanımlarını anlamlandırmadan, matematiksel sembollerin ve mantıksal açıklamaların formel tanımını ezberleme yolunu seçmelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Öğrencilerin görmüş oldukları matematiksel kavramları, bilgileri ya da kuralları, doğru terminoloji ve doğru içerik ile kullanması, etkili matematik öğretiminin gerçekleşmesinin önemli parçalarından birisidir (Yeşildere, 2007). Fakat araştırmamızda öğretmen adaylarının ilgili tanım ve kavramları açıklarken alan dilindeki eksiklikleri dikkat çekmektedir. Bulgular incelendiğinde öğretmen adaylarının matematiksel alan dilindeki eksikliklerinin matematiksel kavramlara ait kavram yanlışlarına sebep olduğu ya da matematiksel kavramlara ait kavram yanlışlarının matematiksel alan dilini etkili kullanımlarına engel olduğu düşünülmektedir. Yeşildere (2007) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel alan dilini kullanma yeterliklerini belirlemek ve matematiksel alan dilinin doğru kullanımının önemini vurgulamayı amaçladığı çalışmasında öğretmen adaylarının matematiksel dil kullanımında yetersiz olduğu sonucuna ulaşmıştır. Matematiğin yığılmalı bir disiplin olmasından dolayı öğrenilen her yeni kavramın bir diğer kavramı etkilediği düşünüldüğünde, matematiksel dilin doğru kullanımının kavram yanlışlarını önleyeceği düşünülmektedir. Yılmaz ve Türkmen (2019) çalışmalarında 7. Sınıf öğrencilerinin doğrular ve açılar konusunda matematiksel dil kullanım düzeylerinin, matematik başarılarına göre anlamlı bir farklılık gösterdiği belirlenmiştir. Ayrıca yapılan araştırmalar matematik başarıları yüksek olan öğrencilerin, düşük başarı sağlayan öğrencilere göre daha az kavram yanlışına sahip olduğunu göstermektedir (Yenilmez ve Yaşa, 2008; Li ve diğerleri, 2017). Buradan hareketle alan dilinin doğru kullanımının kavram yanlışlarını daha aza indirgeyeceği düşünülmektedir. Dolayısıyla öğretmenlerin derslerde matematiksel dili doğru kullandıklarından emin olması ve öğrencileri matematiksel sözcükleri öğrenirken dikkatli olmaları konusunda uyarması, çok değişkenli fonksiyonlarda türev gibi içeriğinde birçok soyut kavramı barındıran ve Analizin önemli konularından olan bir konuda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin kavram yanlışlarının önlenmesi adına oldukça önemlidir.

Bu alt problem altında cevaplar incelendiğinde, birçok öğretmen adayının kavramları benzer şekilde tanımladığı görülmüştür. Örneğin kısmi türev tanımını yapan çoğu öğretmen adayının, kısmi türevi sezgisel olarak tanımladığı belirlenmiştir. Bu durumun öğretim aşamasında ilgili kavram tanımlarına yer verilirken yalnızca belirli yönlerinin vurgulanmasından ya da farklı temsil biçimlerine yer verilmemesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Katılımcıların geleceğin matematik öğretmenleri olacakları düşünüldüğünde, matematiksel temsil biçimlerini kullanma noktasında yetersiz oldukları

görülmektedir. Çoklu temsil biçimlerinin kullanımı kavram tanımlarını doğru bilmeyi gerektirir. Dolayısıyla kavramların zihinde anlamlandırılabilmesi ve kavram yanlışlarının önlenmesi için öğretimde çoklu temsil biçimlerine yer verilmesi büyük önem taşımaktadır. Tablo, grafik, sözel betimleme ve matematiksel sembol gibi çoklu temsillerin kullanıldığı bir öğretimde, aynı sınıf içerisinde farklı öğrenme stillerine sahip olan öğrencilere hitap edilmesi mümkün olabilecektir (Bingölbalı, 2015). Bu nedenle kavram yanlışlarının önüne geçebilmek için çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan, örneğin kısmi türev ve yöne göre türev kavramları anlatılırken sadece sezgisel değil, grafiksel, sembolik ve fiziksel temsil biçimlerine de yer verilmesi oldukça önemlidir.

Yenilmez ve Yaşa'ya (2008) göre öğrencilerin daha önce edindikleri kavramların yanlış veya eksik algılanması, yeni kavram yanlışlarının oluşumuna neden olabilmektedir. Çok değişkenli fonksiyonlarda türev konusu içerisinde fonksiyon, limit, süreklilik, türev gibi birçok kavramı barındırmaktadır. Dolayısıyla öğrencilerin istenen tanım ve kavramları açıklayabilmeleri için bu kavramları bilmeleri gerekmektedir. Fakat öğrencilerin bahsedilen alt kavramlara ait kavram yanlışları, yeni kavram yanlışlarının oluşumuna sebebiyet verecektir. Örneğin 2. soruda bağımlı değişken ve bağımsız değişken kavramlarına dair kavram yanlışlarının, fonksiyonların değişken sayılarını belirlemeye ilişkin yeni kavram yanlışlarına, 1. soruda ise öğretmen adaylarının kapalı fonksiyona ilişkin kavram yanlışlarının, çok değişkenli fonksiyon kavramına dair yeni kavram yanlışlarının oluşumuna neden olduğu görülmektedir. Benzer şekilde 4. soruda bazı öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların türevinin bulunduğu her noktada sürekli olma şartının, kısmi türev için de gerekli olduğu kavrayışına sahip olduğu belirlenmiştir. Barak (2007) çalışmasında limit konusundaki kavram yanlışlarını belirlemeyi amaçlamasına karşın bazı öğrencilerin ön bilgilerinde (fonksiyon, fonksiyonların tanım kümeleri, trigonometri) eksiklikler olduğu ortaya çıkmıştır. Görüldüğü üzere öğrencilerin ön bilgileri, yeni edinilen bilgilerle karıştırılarak, değiştirilerek veya kişisel kavramlarını oluşturmak için uyarlanarak (Cornu, 1991) yeni kavram yanlışlarının oluşumuna neden olduğu düşünülmektedir.

Araştırmanın ikinci alt problemi doğrultusunda öğretmen adaylarının kısmi türev sorularına verdiği cevaplar analiz edilmiştir. Analiz sonucunda öğretmen adaylarının %45,7'sinin kavram yanlışına sahip olduğu belirlenmiştir. Diğer alt problemler ile karşılaştırıldığında en fazla öğretmen adayının bu alt problem kapsamında kavram yanlışına sahip olduğu görülmektedir. Kısmi türev bünyesinde fonksiyon, limit, süreklilik, türev gibi birçok kavramı barındırmaktadır. Literatürde öğretmen adaylarının bu kavramlara ilişkin kavram yanlışlarına sahip olduğuna dair birçok çalışma yapılmıştır (Barak, 2007;

Özmantar ve Yeşildere, 2015; Bingölbali, 2015; Baştürk ve Dönmez, 2011; Kula ve Güzel, 2013; Gökçek ve Açıkyıldız, 2015). Öğrencilerin bu kavramlara ilişkin sahip olduğu bilgi eksiklikleri ve kavram yanlışları, kısmi türev kavramına ilişkin yeni kavram yanlışlarının oluşumuna neden olduğu düşünülmektedir.

Kısmi türeve ilişkin kavram yanlışları incelendiğinde öğretmen adaylarının neredeyse tamamının normal türev ile kısmi türevi ayırt etmek için kullanılan d ve ∂ sembollerine ilişkin kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu kavram yanlışları öğrencilerin neredeyse tamamının 6. soruda yanlış cevap vermesine neden olurken, 7. soruda doğru cevap vermesine neden olmuştur. Li ve diğerlerine (2017) göre kavram yanlışları yanlışlıkla doğru sonuçlara neden olabilmektedir. Dolayısıyla kavram yanlışları ayrıntılı gözlem yapılmadan tespit edilemezler. Eğer ki yanlışlıkla doğru sonuçlara neden olan kavram yanlışları fark edilmez ise ileride daha güçlü kavram yanlışlarının oluşumuna neden olacaktır. Bu nedenle kavram yanlışlarının önüne geçebilmek için öğretilecek konuya ilişkin öğrencilerin sahip olabileceği yanlışların farkında olarak öğretimin planlanması oldukça önemlidir.

Matematiksel açımları destekleyecek olan sembollerin ne anlama geldiğini kavramadan kullanılması, matematiksel düşünmeyi oluşturmak için yeterli değildir. Sembollerin öğrenciler tarafından doğru anlamlandırılması, onların doğru kavramsallaştırmalara ulaşmalarını sağlayacaktır (Yeşildere, 2007). Dolayısıyla matematiksel sembollerin yanlış anlamlandırılması kavram yanlışlarına neden olabilmektedir. Araştırmamızda öğretmen adaylarının neredeyse tamamının d ve ∂ sembollerine ilişkin kavram yanlışlarına sahip olduğunu belirtmiştik. Bu durumda normal türev ile kısmi türevi ayırt etmek için kullanılan sembol kullanımının öğretmen adaylarının kavramsal gelişimlerine engel olmaktadır. Sembollere ilişkin belirlenen bu kavram yanlışına, öğretim aşamasında sembol kullanımına yeterince vurgu yapılmamasının neden olduğu düşünülmektedir. Bu kavram yanlışının önüne geçilebilmesi için öğrencilerin bu sembollerin farkını ayırt edebileceği sorulara yer verilmesi ve matematiksel sembol kullanımına dikkat edilmesi oldukça önemlidir.

Kısmi türeve ilişkin kavram yanlışları incelendiğinde, bir takım öğretmen adayının kısmi türev algoritmasının $(f(x, y))$ fonksiyonunda, f_x 'i bulmak için y 'yi sabit tut, x 'e göre türev al; f_y 'yi bulmak için x 'i sabit tut, y 'e göre türev al) sonuç vermediği durumda, $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin 0 sonucunu verdiği kavrayışına sahip olduğu belirlenmiştir. Belirsizlik ve tanımsızlık kavramları öğrenciler için anlaşılması güç kavramlardandır. (Özmantar, 2015). Öğretmen adaylarının bu kavrayışı doğru sonuca ulaşmalarına sebep olsa da yanlış bir

kavrayışa sahip oldukları açıktır. Burada öğretmen adaylarının belirsizlik durumlarına ilişkin yanlış kavrayışlarının kısmi türev konusunda kavram yanlışlarına sebep olduğu görülmektedir. Bu kavram yanlışısının sebepleri arasında algoritmanın uygulanması sonucunda karşılaşılan belirsizliğin ne anlama geldiğinin tam olarak anlaşılmaması ve tanımsızlık ile belirsizliğin ifade ettiği anlamların tam olarak bilinmemesinin yer aldığı düşünülmektedir.

Araştırmanın üçüncü alt problemi doğrultusunda öğretmen adaylarının yöne göre türev sorularına verdiği cevaplar analiz edilmiştir. Analiz sonucunda öğretmen adaylarının %29,6'sının kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Kısmi türev, yöne göre türevin özel bir hali olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durum öğrencilerin yöne göre türev kavramını zihinlerinde oluşturabilmeleri için kısmi türev kavramını anlamlandırmaları gerekliliğini ortaya koymaktadır. Fakat araştırmanın ikinci alt problemi kapsamında, öğretmen adaylarının neredeyse yarısının kısmi türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Kısmi türev kavramına dair bu sonucun, yöne göre türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarını da beraberinde getirdiği düşünülmektedir. Dolayısıyla bu kavram yanlışlarının önlenmesi için, öncelikle kısmi türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarının giderilmesi gerekmektedir.

Yöne göre türev, bir $f(x, y)$ fonksiyonunun P_0 noktasında, sadece $u = \hat{i}$ ve $u = \hat{j}$ iken değil, herhangi bir $\vec{u}$ yönündeki değişim oranıdır. Bu türev, $f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevlerinin P_0 noktasında hesaplanmasıyla elde edilen gradyan vektörü ve u 'nun skaler çarpımı ile hesaplanmaktadır. Anlaşılabileceği üzere yöne göre türev kavramının anlamlandırılabilmesi için öğrencilerin vektör bilgilerine ihtiyaç vardır. Fakat yöne göre türev sorularında bir takım öğretmen adayının, bir f fonksiyonunun P_0 noktasındaki gradyanının, vektör olmadığı kavrayışına sahip olduğu belirlenmiştir. Appova ve Berezovski (2013) çalışmalarında öğrencilerin vektörler ve vektörel işlemlere dair sahip oldukları kavram yanlışları araştırılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin %35'inin vektörler ile skalerlere ilişkin kavram yanlışları olduğu ve bu öğrencilerin vektörler ile skalerleri ayırt edemediği belirlenmiştir. Bu sonuç araştırmamızın bulguları ile benzerlik göstermekte olup, öğretmen adaylarının vektörlere ilişkin kavram yanlışlarının, yöne göre türeve ilişkin yeni kavram yanlışlarının oluşumuna neden olduğu düşünülmektedir.

Üçüncü alt problemin analizi sonucunda yöne göre türevin limit tanımını kullanan öğretmen adaylarının, soruda verilen yön vektörünü birim vektöre çevirmediği belirlenmiştir. Bu şekilde cevap veren öğretmen adaylarının limit tanımının kullanıldığı yöne göre türev sorularında belirtilen yönün, birim vektör olması gerekmediği kavram yanlışına sahip

olduğu belirlenmiştir. Bu durumun öğretmen adaylarının öğretim aşamasında ya da ders kitaplarında karşılaştığı limit tanımının kullanıldığı yöne göre türev sorularında, yön vektörünün birim vektör olarak verilmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu tarz sorular öğrencilerin sahip olduğu yanlışları ortaya çıkarmadığı gibi daha da güçlendirmektedir.

Araştırmamızın 11. sorusunda elde edilen bulgular bu düşünceyi destekler niteliktedir. 11. soruda kavram yanlışısına sahip olan birçok öğretmen adayının, çözüm için yanlış bir formül uyguladığı belirlenmiştir. Öğretmen adayları her ne kadar yanlış bir kavrayışa sahip olsalar da soruda yön vektörünün, birim vektör olarak verilmesinden dolayı bu şekilde cevap verenler doğru sonuca ulaşmışlardır. Belirlenen bu kavrayış öğretmen adaylarının doğru sonuca ulaşmasına neden olsa da kavram yanlışısına sahip oldukları açıktır. Bu durum fark edilmez ve önüne geçilmezse şüphesiz ileride daha güçlü kavram yanlışılarının oluşumuna sebep olacaktır. Jones ve Tanner'a (2000) göre öğrencilerin kavram yanlışılarını önlemek için ilgili kavramın farklı yönlerini ele alan ve kavram yanlışıları mevcut olduğunda mantıksız sonuçlara yol açarak bilişsel çatışmaya neden olan sorular seçilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla öğretmenlerin, öğretimin planlaması aşamasında problem seçimine dikkat etmesi ve öğrencilerin olası kavram yanlışılarının farkında olarak bir plan hazırlaması oldukça önemlidir.

Araştırmanın dördüncü alt problemi kapsamında öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusuna ilişkin sorulara verdiği cevaplar analiz edilmiştir. Analiz sonucunda öğretmen adaylarının %19,8'inin kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Araştırmanın diğer alt problemleri ile karşılaştırıldığında, en az kavram yanlışısına sahip olunan alt problemin bu olduğu tespit edilmiştir. Bu durumun, teğet düzlem, normal doğru, yerel ekstremum ve eyer noktası gibi çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusunda yer alan kavramların görsel temsillerinin fazla olmasından ve bu kavramların, tek değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamalarında yer alan kavramlar ile benzerlik göstermesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Çoklu temsillerin kullanıldığı bir öğretimde, grafik, tablo, sözel betimleme gibi farklı gösterimlerden yararlanılması, aynı sınıf içerisinde farklı öğrenme stili ve zeka türlerine sahip öğrencilere hitap eden bir öğretim sağlayacaktır. Aspinwall ve Shaw (2002) öğrenciler matematiksel kavramların farklı temsil biçimleri ile karşılaştıklarında matematiksel kavramları daha iyi anlayacaklarını belirtmiştir. Aksi takdirde, öğrenciler sadece öğretmenin

tercih ettiği temsil biçimi ile karşı karşıya kalır ve çözmeye çalıştıkları probleme uygun şemayı seçmek veya oluşturmak yerine, öğretmenin tercih ettiği temsil biçimini ezberlemek zorunda kalırlar. Buradan anlaşılacağı üzere öğrenciler, öğretilen kavramın tek bir temsil biçimiyle karşılaştıklarında sınırlı bir anlayış geliştirirler. Çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusunda yer alan kavramların görsel temsillerinin daha fazla olması, öğrencilerin matematiksel kavramların farklı yönlerini görmelerini sağladığı için kavram yanılgılarını daha aza indirdiği düşünülmektedir.

Bu alt problem kapsamında incelenen sorularda dikkat çeken bulgulardan birisi, büyük oranda öğretmen adayının, ikinci türev testi sonucu diskriminantın sıfır çıkması durumunda bilgi eksikliğine ya da kavram yanılgılarına sahip olmasıdır. Kavram yanılgıları incelendiğinde bazı öğretmen adaylarının belirlenen kritik noktanın, eyer noktası olduğunu, bazılarının fonksiyonun yerel ekstremumum ve eyer noktasına sahip olmadığını, bazılarının ise $f_{xx} > 0$ olmasından dolayı fonksiyonun yerel minimuma sahip olduğunu belirtmişlerdir. Bu duruma birçok öğretmen adayının daha önceden diskriminantın sıfır olması durumu ile karşılaşmamalarının sebep olduğu düşünülmektedir. Çünkü bazı ders kitaplarında ikinci türev testi sonucu diskriminantın sıfır olması durumunda testin sonuç vermediği ve fonksiyonun kritik noktadaki davranışını belirlemek için başka bir yol bulunması gerektiği belirtilmiş, fakat o durumda ne yapılacağına değinilmemiştir (Thomas, 2010; Karadeniz, 1988). Eğer ki öğretmen adayları öğretim aşamasında da bu durum ile karşılaşmamışsa belirlenen kavram yanılgısının oluşumu kaçınılmazdır. Dolayısıyla bu kavram yanılgılarının önüne geçebilmek için ders kitaplarında ve öğretim aşamasında ikinci türev testi sonucu diskriminantın sıfır çıkması durumunda fonksiyonun kritik noktadaki davranışının belirlenmesi gerekmektedir.

Ayrıca büyük oranda öğretmen adayının kısıtlanmış bir fonksiyonun ekstremum değerlerini bulmak için soruyu dikdörtgenin alan fonksiyonunu tek değişkenli fonksiyona dönüştürerek çözdüğü tespit edilmiştir. Bu tür sorularda Lagrange Çarpanı yöntemi de kullanılabilmesine karşın, hiçbir öğretmen adayının bu yöntemi kullanmadığı belirlenmiştir. Her ne kadar soruda iki değişkenli olan alan fonksiyonunu tek değişkene indirgeyerek soruyu çözmek karmaşık olmasa da, kısıtlama altındaki üç değişkenli bir fonksiyonu iki değişkene indirgeyerek soruyu çözmek her zaman kolay olmamaktadır. Dolayısıyla öğretim aşamasında kısıtlanmış fonksiyonların ekstremum değerlerini bulmak için güçlü bir yöntem olan Lagrange Çarpanları yöntemine dikkat çekilmesi gerektiği düşünülmektedir.

Bu alt problem kapsamında birçok öğretmen adayının, $z = f(x, y)$ yüzeyinin üzerindeki bir noktanın (x_0, y_0) olacağı kavrayışına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu kavrayış,

öğretmen adaylarının uzayda düzgün bir yüzey üzerindeki bir noktadan geçen teğet düzlemi ve normal doğrusunun denklemlerine ilişkin yeni kavram yanlışlarının oluşumuna sebep olmuştur. Buradan anlaşılacağı üzere öğrencilere kazandırılması istenen yeni bilgiler, ön bilgileri ile çatışmakta ve yeni kavram yanlışlarına yol açmaktadır. Bu yüzden öğrencilerin mevcut bilgi birimi ile varsa kavram yanlışlarının belirlenmesi ve sonrasında bunlar dikkate alınarak öğretim etkinliklerinin planlanması, öğretimin kalitesi açısından çok önemlidir (Gilbert, Osborne ve Fensham, 1982, aktaran Yenilmez ve Yaşa, 2008).

5.2. Sonuç ve Öneriler

5.2.1. Sonuç

Matematiğin birikimli bir yapıya sahip olmasından dolayı öğrenilen her bir kavram bir sonraki kavram öğrenimini etkilemektedir. Herhangi bir kavramın öğrenilmesinde yaşanan güçlük ve yanlış öğrenmeler, öğrencilerin sonraki kavramların öğreniminde kavram yanlışlarına sebep olabilmektedir. Dolayısıyla anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesi ve öğrencilerin güçlü matematik becerilerine sahip olması için kavram yanlışlarının giderilmesi gerekmektedir. Kavram yanlışlarının önlenmesi ya da var olan yanlışların giderilmesi için ilk olarak kavram yanlışlarını belirlenmesi gerekir. Fakat matematiksel kavram yanlışlarına yönelik yayınlanmış yüksek lisans ve doktora tezleri incelendiğinde, lisans düzeyinde yapılan çalışmaların lisans matematik derslerine yönelik olanlarının sayısının oldukça az olduğu belirlenmiştir (Mutlu ve Söylemez, 2018). Geleceğin matematik öğretmenleri olacak öğrencilerin kavram yanlışlarının belirlenmesi, gelecekte yapacak oldukları öğretimlerle yakından ilişkilidir. Buradan hareketle araştırmamızın hem literatüre katkı sağlayacağı hem de söz konusu konunun, öğretim üyeleri tarafından anlatılması sırasında dikkat edilmesi gereken noktaların neler olduğu konusunda önemli bilgiler vereceği düşünülmektedir.

İlköğretim Matematik Öğretmenliği lisans öğrencilerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışlarının araştırıldığı çalışmamızda, öğretmen adaylarının konu hakkında birçok kavram yanlışına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavramsal öğrenmelerinin istenilen düzeyde olmadığını göstermektedir. Özel olarak öğretmen adaylarının %40,7'sinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin, %45,7'sinin kısmi türev kavramına ilişkin, %29,6'sının yöne göre türev kavramına ilişkin ve %19,8'inin çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusuna ilişkin kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir.

Yapılan araştırma öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusuna ilişkin çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğunu göstermektedir. Elde edilen bulgular özetlenecek olursa:

(i) Çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda yer alan tanım ve kavramlara ilişkin kavram yanlışlarının araştırıldığı birinci alt problem doğrultusunda, birçok öğretmen adayının kapalı fonksiyon ile çok değişkenli fonksiyon kavramlarına, bağımlı değişken ve bağımsız değişken kavramlarına, kısmi türev ile süreklilik ilişkisine dair çeşitli kavram yanlışlarına sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca 2. soruda öğretmen adaylarının yanlış kavrayışlarını, karşılaştıkları şıkların tümüne uygulamaya çalıştığı görülmüştür. Örneğin tespit edilen “fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayılarının toplamı olacağı” kavrayışına sahip öğretmen adayları, bu kavrayışı 2. sorunun tüm şıklarına uygulamıştır. Bunlara ek olarak öğretmen adaylarının tanım sorularında, benzer tanımlar kullandığı, alan dilinde eksikliklere sahip olduğu ve ön bilgilerinde bilgi eksikliklerine ya da kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir.

(ii) En fazla öğretmen adayının kavram yanlışına sahip olduğu, kısmi türeve dair kavram yanlışlarının araştırıldığı ikinci alt problem doğrultusunda, öğretmen adaylarının neredeyse tamamının d ve ∂ sembollerine ilişkin kavram yanlışına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu kavram yanlışları öğretmen adaylarının 7. soruda doğru cevap vermesine neden olurken, 6. soruda yanlış cevap vermelerine neden olmuştur. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin 0 sonucunu verdiği yanlışına sahip olduğu belirlenmiştir. Bu yanlışla sahip öğretmen adaylarının algoritmanın sonuç vermediği benzer sorularda da bu kavrayışı uyguladığı görülmüştür. Bu kavram yanlışları öğretmen adaylarının 5. soruda doğru sonuca ulaşmalarına neden olmuştur.

(iii) Yöne göre türev kavramına ilişkin kavram yanlışlarının araştırıldığı üçüncü alt problem doğrultusunda bir takım öğretmen adayının gradyan vektörünün vektör olmadığı, yöne göre türevin limit tanımı kullanıldığında yön vektörünü birim vektör olması gerekmediği ve fonksiyon üzerindeki bir noktanın, yön vektörü olduğu kavram yanlışlarına sahip olduğu belirlenmiştir. Bazı öğretmen adaylarında eksenlerle yaptığı açıları verilen vektörü belirlemeye ilişkin kavram yanlışlarına rastlanmıştır. Ayrıca 11. soruda kavram yanlışları tespit edilen birçok öğretmen adayının, çözüm için yanlış bir formül uyguladığı belirlenmiştir. Bu durum onların doğru sonuca ulaşmasına neden olmuştur.

(iv) En az öğretmen adayının çok değişkenli fonksiyonlarda türevin geometrik uygulamaları konusunda kavram yanlışlarına sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu kapsamda,

birçok öğretmen adayının diskriminantın sıfır olması durumunda bilgi eksikliğine ya da kavram yanılgısına sahip olduğu ve $z = f(x, y)$ yüzeyi üzerindeki bir noktanın (x_0, y_0) olacağı yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir. Ayrıca birçok öğretmen adayının kısıtlama altındaki bir fonksiyonun maksimum değerini, fonksiyonu tek değişkene dönüştürerek çözdüğü görülmüştür. Burada hiçbir öğretmen adayının bu yöntemden daha güçlü bir yöntem olan Lagrange Çarpanı yöntemini kullanmaması dikkat çekmektedir.

Araştırmamız geleceğin matematik öğretmenlerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduğunu göstermektedir. Sonradan düzeltilebilme imkanı olsa da bu yanılgıları gidermek hiç de kolay değildir. Çünkü kavram yanılgılarının ortadan kaldırılabilmesi için mevcut bilgilerin yeniden yapılandırılması gerekmektedir. Bunun için öğretmen adaylarının mevcut kavramlarının yetersiz olduğunu kabul etmesi ve yeniden yapılandırma için çaba göstermesi gerekir. Bu noktada çalışmamızın matematik öğretmeni adaylarının ilgili konuda sahip oldukları kavram yanılgılarını fark etmeleri adına, farkındalık yaratacağı düşünülmektedir.

Araştırmamız öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram yanılgılarının yanlışlıkla doğru sonuçlara neden olabileceğini göstermektedir. Fakat bu yanılgıların fark edilerek öğretimin şekillendirilmesi o kadar kolay değildir. Çünkü doğru sonuca neden olan kavram yanılgılarının tespit edilebilmesi için ayrıntılı gözlem yapılması gerekmektedir. Dolayısıyla bu yanılgıların önlenbilmesi için araştırmamız öğrencilerin olası kavram yanılgılarını sunarak, öğrencilerin kavram yanılgılarının farkında olarak öğretim planı hazırlanması ve öğretim aşamasında sahip olunan kavram yanılgılarını ortaya çıkaracak sorulara yer verilmesi adına önemli bilgiler vermektedir. Ayrıca çok değişkenli fonksiyonların türevi gibi içeriğinde birçok soyut kavramı barındıran bir konuda farklı öğrenme stiline sahip öğrenciler için çoklu temsil biçimlerine yer verilmesi, kavram tanımları yapılırken matematiksel dil kullanımına özen gösterilmesi, ilgili kavramın içselleştirilmesini sağlayacak örneklerle yer verilmesi ve öğrencilerin kavram tanımlarını ve çözümlerini kendi cümleleriyle ifade etmelerinin sağlanması çok önemlidir.

Araştırmamızda “fonksiyonun değişken sayısının, bağımlı ve bağımsız değişken sayılarının toplamı olacağı” kavrayışına sahip öğretmen adaylarının, bu kavrayışı ilgili sorunun tüm şıklarına uyguladığı belirlenmiştir. Benzer şekilde $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin 0 sonucunu verdiği yanılgısına sahip olan bazı öğretmen adaylarının, algoritmanın sonuç vermediği benzer sorularda, aynı kavram yanılgısı tespit edilmiştir. Elde edilen bu bulgular, Lannin ve diğerlerinin (2007) çalışması ile birbirini destekler niteliktedir. Lannin ve diğerleri, çalışmalarına katılan iki öğrencinin belirli problem durumunda işleyen yanlış kavrayışlarını,

karşılaşılan problemin tüm durumlarına uygulamaya çalıştığı belirlenmiştir. Bu durum kavram yanlışlarının ısrarcı olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla kavram yanlışlarının üstesinden gelebilmek için öğrencilere yanlış kavrayışlarını genellemeyeceği sorular sorularak, kavramsal şemalarının yeniden yapılandırılması gerekmektedir (Lannin ve diğerleri, 2007).

Ayrıca araştırmamız yüksek oranda öğretmen adayının kavram yanlışlarına sahip olmasına, ön bilgilerindeki (vektörler ve vektörel işlemlere, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına, kapalı fonksiyon tanımına ve süreklilik kavramına ilişkin) bilgi eksikliklerinin ve kavram yanlışlarının da neden olabileceğini göstermektedir. Bu durum öğretim aşamasında öğrencilerin ön bilgilerindeki kavram yanlışlarının da dikkate alınarak bir öğretim gerçekleşmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Tüm bunlara ek olarak çok değişkenli fonksiyonlarda türev kavramı içerisinde limit, türev, süreklilik, sonsuzluk gibi tarihsel gelişim sürecinde bilim insanlarının bile zorluklarla karşılaştığı birçok kavramı barındırmaktadır. Tüm bu kavramları kapsayan bir konuda öğrencilerin zorluk çekmesi ve kavram yanlışlarına sahip olması kaçınılmazdır. Dolayısıyla öğrencilerin çok değişkenli fonksiyonlarda türev konusuna dair kavram yanlışlarına sahip olmasının nedenlerinden birisinin kavramın doğasında var olan zorluklar olduğu düşünülmektedir. Fakat her ne kadar kaçınılmaz olsa da, bu kavram yanlışlarını en aza indirmek mümkündür. Dolayısıyla araştırmamızın gelecekte yapılacak olan Analiz III dersi öğretim planlarına yön vereceği düşünülmektedir.

5.2.2. Öneriler

Bu bölümde araştırma sonucunda elde edilen bulgulara dayanarak yeni yapılacak olan araştırmalara yol göstermesi adına uygulayıcılara ve konunun öneminin kavranması adına öğretime yönelik geliştirilen önerilere yer verilmiştir.

5.2.2.1. Uygulayıcıya yönelik öneriler

- Yapılan hataların nedenleri üzerine daha derinlemesine inceleme yapmak adına öğrencilerle klinik mülakatlar gerçekleştirilebilir.
- Bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki kavram yanlışları tespit edilmiştir. Benzer şekilde Analiz III dersinde yer alan çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konusunda da öğrenci hataları ve kavram yanlışları belirlenebilir.
- Matematik öğretmen adaylarının çok katlı integral konusundaki hataları ve kavram yanlışları araştırılabilir.

- Bu çalışmada öğretmen adaylarının sahip oldukları kavram yanlışları araştırılmış olup, yapılacak diğer çalışmalarda öğretim üyelerinin çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunun öğretiminde karşılaştıkları sorunlar araştırılabilir.
- Öğretmen adaylarının çok değişkenli fonksiyonların türevi konusundaki alan dili kullanım becerileri incelenebilir.
- Çok değişkenli fonksiyonların türevi konusunda öğrencilerin kavram imajları araştırılabilir.

5.2.2.2. Öğretime yönelik öneriler

- Çok değişkenli fonksiyonlarda türev konusu içerisinde yer alan kavramlar ile tek değişkenli fonksiyonların türevi konusu içerisinde yer alan kavramlar ilişkilendirilerek ve bu iki kavram arasındaki bağ açıklanarak, kavramlar arası ilişkinin kurulması sağlanmalıdır.
- Sınıflarda çok değişkenli fonksiyonlarda türevin grafiksel, sözel, fiziksel ve sembolik temsil biçimlerine yer verilerek, öğrenciler açısından kavramın anlaşılması ve anlamlandırılması için avantaj sağlanmalıdır.
- Öğretim sürecinde karşılaşılan zorluklar ve kavram yanlışlarının belirlenmesi ve çözüm yollarının geliştirilmesi öğretimi olumlu yönde etkilemektedir. Dolayısıyla ilgili konuda olası kavram yanlışlarının ve tarihsel süreç içerisinde karşılaşılan zorlukların farkında olarak öğretimin planlanması gerekmektedir.
- Farklı öğrenme stiline sahip öğrenciler için öğretimde hem sözel açıklamalara hem de tablo, grafik ve görsel temsillere yer verilmelidir.
- Öğrencilerin 3 boyutlu cisimlerin grafiklerini zihinlerinde canlandırmakta zorlandığı bilinmektedir. Bu durumun öğrencilerin ilgili kavramları anlamlandırmakta güçlük çekmelerine neden olduğu düşünülmektedir. Bu kavramların anlamlandırılabilmesi için dinamik geometri yazılımlarının kullanılarak, soyut kavramların somutlaştırılması gerekmektedir.
- Öğretimde öğrencilere sahip oldukları kavram yanlışları ile yüzleşebileceği sorulara yer verilmelidir. Bu şekilde bilişsel çatışma ortamı sağlanarak öğrencilere hataları fark ettirmeye çalışılmalıdır.

KAYNAKÇA

- Akın, M. F., İlhan, A. ve Çelik, H. C. (2019). Matematik Öğretiminde Materyal Kullanımının Matematiksel Düşünme Becerisi ve Kavram Yanılgıları Üzerindeki Rolü. *Elementary Education Online*, 18(3), 1392-1404.
- Appova, A., & Berezovski, T. (2013). Commonly identified students' misconceptions about vectors and vector operations. In *Conference on research in undergraduate mathematics education: Crume* 16(2), 8-17.
- Arslan S. ve Çelik D. (2013). Zor Sanılan İki Kavram: Limit ve Süreklilik. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Kavram ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 463-487). Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Aspinwall, L. ve Shaw, K. L. (2002). Representations in calculus: Two contrasting cases. *The Mathematics Teacher*, 95(6), 434.
- Baki, A. ve Aydın Güç, F. (2014). Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin devirli ondalık gösterimle ilgili kavram yanılgıları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 176-206.
- Barak, B. (2019). *Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi. (UMİ No. 177972).
- Baştürk, S. ve Dönmez, G. (2011). Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 225-249.
- Biber, A. Ç. (2018). *Matematik ve öğretimi*. A. Kaçar (Ed.), İlkokulda Matematik Öğretimi (1. bs, s. 2-11). Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Biber, A. ve Argün, Z. (2012). Matematik öğretmen adaylarında iki değişkenli fonksiyonların limiti kavramının yapılandırılmasının incelenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 56-66.
- Bingölbali, E. (2015) Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (4. Baskı, s. 223-252). Ankara: PegemA Yayıncılık.

- Bingölbali, E. ve Özmantar, M.F. (2009). Matematiksel Kavram Yanılgıları: Sebepleri ve Çözüm Arayışları. Bingölbali, E. & Özmantar, M. F. (Ed.), *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri*, ss.1-30, Pegem A Yayıncılık, Ankara.
- Bukova, E. (2006). *Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme* (Doktora tezi). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi. (UMİ No. 189847)
- Büyüköztürk, Ş. (2019). *Sosyal Bilimler İçin Veri Analizi El Kitabı*. Ankara: Pegem Akademi.
- Caferov, V. (1999). Çok Değişkenli Fonksiyonlar. M. Üreyen (Ed.), *Matematik Öğretmenliği Analiz* (s. 323-341). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.
- Canbazoğlu Bilici, S. (2019). Örneklem Yöntemleri. H. Özmen ve O. Karamustafaoğlu (Ed.) *Eğitimde Araştırma Yöntemleri* (s. 56-78). Ankara: Pegem Akademi
- Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (11. bs., s. 153-166). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational Research Planning, Conducting and Evaluating Quantitative and Qualitative Research* (4. bs., s. 174-203, 375-421). Nebraska: Pearson Education.
- Çetinkaya B., Erbaş A. K. ve Alacacı C. (2013) Değişim Oranı Olarak Türev ve Tarihsel Gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Eds.), *Kavram ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 529-555). Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Çinçin, K. (2016). Matematiksel Soyut Kavramlar İle Somut Kavramların Bilgisi. 21. *Yüzyılda Eğitim Ve Toplum Eğitim Bilimleri Ve Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 5(13), 239-246.
- Dereli, A. B. (2015). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının diziler ve seriler konusundaki hata ve kavram yanılgılarının tespit edilmesi* (yüksek lisans tezi). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi. (UMİ No. 426403).

- Gökçek, T., ve Açıkyıldız, G. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramıyla ilgili yaptıkları hatalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(1), 112-141.
- Graeber, A. O. (1993). Misconceptions about multiplication and division. *Arithmetic Teacher*, 40(7), 408-412.
- Gürel, Z. Ç. ve Okur, M. (2016). Ortaokul 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki kavram yanlışları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 922-952.
- Gürel, Z. Ç., ve Okur, M. (2016). Ortaokul 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki kavram yanlışları. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(2), 922-952.
- Hammer, D. (1996). More than misconceptions: Multiple perspectives on student knowledge and reasoning, and an appropriate role for education research. *American Journal of Physics*, 64(10), 1316-1325.
- Jones, S. ve Tanner, H. & (2000). *Becoming a successful teacher of mathematics* (s. 86-104). London, USA, Canada: RoutledgeFalmer.
- Karaağaç, M. ve Köse, L. (2015). Öğretmen ve öğretmen adaylarının öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanlışları ile ilgili bilgilerinin incelenmesi. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (30), 72-92.
- Karadeniz A. A. (1988). *Yüksek matematik* (5. bs., Cilt. 2, s. 206-273). İstanbul: Çağlayan Basımevi
- Kavram. (t.y.). *Türk Dil Kurumu güncel Türkçe sözlük* içinde. Erişim adresi: <https://sozluk.gov.tr/>
- Koçak, B. (2019). *Matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin üstel belirsizlikler ve diferansiyel konularındaki kavram yanlışlarının incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Kucam, E. ve Demir E. (2020). Kavram yanlışları ile yanıltıcı davranışları arasındaki ilişkilerin matematik okuryazarlığı örneği üzerinde incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 53(1), 157-183.
- Kula, S. ve Güzel, E. B. (2014). Misconceptions emerging in mathematics student teachers' limit instruction and their reflections. *Quality & Quantity*, 48(6), 3355-3372.

- Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2007). How students view the general nature of their errors. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 43-59.
- Li, V. L., Julaihi, N. H. ve Eng, T. H. (2017). Misconceptions and Errors in Learning Integral Calculus. *Asian Journal of University Education*, 13(2), 17-39.
- Macit, E. (2019). 6. Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusundaki İmajlarının Kavram Yanılgıları ve Başarıları ile İlişkisinin İncelenmesi (Doktora Tezi). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi. (UMİ No. 610998).
- Matematik. (t.y.). *Türk Dil Kurumu güncel Türkçe sözlük* içinde. Erişim adresi: <https://sozluk.gov.tr/>
- Merriam, S. B. (2018). *Nitel Araştırma Desen ve Uygulama İçin Bir Rehber*. S. Turan (Ed. Ve Çev.), Ankara: Nobel Yayıncılık
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). *T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.
- Moralı, S., Köroğlu, H., & Çelik, A. (2004). Buca eğitim fakültesi matematik öğretmen adaylarının soyut matematik dersine yönelik tutumları ve rastlanan kavram yanılgıları. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1), 161-175.
- Mutlu, Y., ve Söylemez, İ. (2018). Matematiksel kavram yanılgıları konusunda yapılmış yüksek lisans ve doktora tezlerinin incelenmesi. *Başkent University Journal of Education*, 5(2), 187-197.
- Naseer, M. S. (2015, September). Analysis of Students' Errors and Misconceptions in pre-University Mathematics Courses. In *Proceedings: First International Conference on Teaching & Learning* (pp. 34-39).
- Öksüz, C. ve Başışık, H. (2019). 5. sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konularında sahip oldukları kavram yanılgılarının belirlenmesi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 20, 413-430.
- Önal, H. (2017). *İlkokul 1. ve 2. sınıf öğrencilerinin matematik dersinde dört işlem ile ilgili yaptıkları hatalar ve çözüm önerileri*. (Doktora Tezi). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi. (UMİ No. 490672).

- Özkaya, M. ve İşleyen, T. (2012). Fonksiyonlarla ilgili bazı kavram yanlışları. *Çankırı Karatekin Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 3(1), 1-32.
- Özmantar, M.F. (2015) Sonsuzluk kavramı: Tarihsel gelişimi, öğrenci zorlukları ve çözüm önerileri. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel Kavram Yanlışları ve Çözüm Önerileri* (4. Baskı, s. 151-180). Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Özmantar, M.F., ve Yeşildere, S. (2015) Limit ve Süreklilik konularında kavram yanlışları ve çözüm arayışları. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel Kavram Yanlışları ve Çözüm Önerileri* (4. Baskı, s. 151-180). Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Pesen, C. (2008). Kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki gösteriminde öğrencilerin öğrenme güçlükleri ve kavram yanlışları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(15), 157-168.
- Rakes, C. R. ve Ronau, R. N. (2019). Rethinking Mathematics Misconceptions: Using Knowledge Structures to Explain Systematic Errors within and across Content Domains. *International Journal of Research in Education and Science*, 5(1), 1-21.
- Sezgin Selçuk, G. (2019). Tarama Yöntemi. H. Özmen ve O. Karamustafaoğlu (Ed.) *Eğitimde Araştırma Yöntemleri* (s. 137-162). Ankara: Pegem Akademi.
- Soylu Y. ve Aydın Y. (2006). Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine bir çalışma. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 8(2), 83-95.
- Şimşek, M. G. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının fark etme becerilerinin kavram yanlışları ve öğrenci zorlukları esas alınarak oluşturulan limit dersi videoları kullanılarak incelenmesi*. (Yüksek Lisans Tezi).). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi. (UMİ No. 570736).
- Tanujaya, B. ve Mumu, J. (2020, October). Students' misconception of HOTS problems in teaching and learning of mathematics. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1657, No. 1, p. 012081). IOP Publishing.
- Thomas, G. B. (2010). *Thomas Calculus* (11. bs. Cilt. 2, s. 965-1063). (Çev. R. Korkmaz). İstanbul: Beta Basım A.Ş. (Orijinal yayın tarihi, 2005).

- Türkdoğan, A., Güler M., Bülbül B. Ö., Danişman Ş., (2015). Türkiye’de Matematik Eğitiminde Kavram Yanılgılarıyla İlgili Çalışmalar: Tematik Bir İnceleme. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 215-236.
- Ubuz B. (1999). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanılgıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16(17), 95-104.
- Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (11. bs., s. 65-81). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers’ mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(5), 397-428.
- Yağbasan, R. ve Gülçiçek, Ç. (2003). Fen öğretiminde kavram yanılgılarının karakteristiklerinin tanımlanması. *Pamukkale üniversitesi eğitim fakültesi dergisi*, 13(13), 102-120.
- Yang, D. C., ve Sianturi, I. A. J. (2020). Sixth Grade Students’ Performance, Misconception, and Confidence on a Three-Tier Number Sense Test. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21.
- Yanık B. (2016). *Kavramsal ve işlemsel anlama*. E. Bingölbalı, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (s. 101-114). Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Yavuz İ. (2013). İntegral Kavramı ve Uygulama Alanları. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmentar, E. Bingölbalı, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Kavram ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 557-571). Ankara: PegemA Yayıncılık.
- Yenilmez, K. ve Yaşa, E. (2008). İlköğretim öğrencilerinin geometrideki kavram yanılgıları. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 21(2), 461-483.
- Yeşildere, S. (2007). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel alan dilini kullanma yeterlikleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, 24(2), 61-70.
- Yılmaz, H. Z. (2019). *Altıncı sınıf öğrencilerinin çokgenler ve dörtgenler konusundaki kavram yanılgılarının GeoGebra ile bilişsel çelişki oluşturularak giderilme sürecinin*

incelenmesi. (Yüksek Lisans Tezi).). Ulusal Tez Merkezi veri tabanından erişildi. (UMİ No. 589602).

Yılmaz, S. ve Türkmen, Z. (2019). 7. Sınıf Öğrencilerinin Doğrular ve Açılar Konusunda Matematiksel Dil Kullanım Düzeyleri Ve Dile İlişkin Görüşleri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 13(1), 31-47.

Yükseköğretim Kurumu [YÖK] (2018). *İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı*. Ankara.

Zembat, İ. Ö. (2015a). *Kavram yanılgısı nedir?*. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (4. bs, s. 1-8). Ankara: PegemA Yayıncılık.

Zembat, İ. Ö. (2015b). Sayıların farklı algılanması – Sorun sayılarda mı, öğrencilerde mi yoksa öğretmenlerde mi?. M. F. Özmantar, E. Bingölbali, ve H. Akkoç (Eds.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (4. Baskı, s. 40-60). Ankara: PegemA Yayıncılık.

EKLER

EK 1. Öğrencinin Akademik Özgeçmişi

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Buse Gizem YİTMEZ		
E-postası/Web Sayfası			
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı			
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm	Yıl
Lisans	Akdeniz Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2015-2019
Tez Başlığı	İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi		
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Süha YILMAZ		
Akademik Eserler			
(Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.) Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler			
Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller			

EK 2. Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarını Belirleme Testi

1. Kapalı fonksiyon ile çok değişkenli fonksiyon arasındaki fark nedir?
2. Aşağıdaki fonksiyonlar kaç değişkenlidir. Nedenleriyle birlikte açıklayınız.
 - a. $x = V \cdot t$
 - b. $w(x) = \ln(x^2 + y^2)$
 - c. $f(t) = (\tan(t), \cot(t))$
 - d. $g(x, y) = \sin^2(5x - 6)$
 - e. $y = \int_{x_1}^{x_2} t \cdot dt$
 - f. $w(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$
3. Kısmi türev nedir? Kendi cümleleriniz ile açıklayınız.
4. Kısmi türev sürekliliği gerektirir mi?
5. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonunda $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ nedir?
6. $z = txy^2, x = t + \ln(y + t^2), y = e^t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = ?$
7. $f(x, y) = e^{xy}, x = tu, y = \frac{1}{t}$ ise $\frac{\partial f}{\partial t} = ?$, $\frac{\partial f}{\partial u} = ?$
8. $(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ için $f_{xy}(0,0)$ nedir?
9. Yönlü (Doğrultu) türev nedir? Kendi cümleleriniz ile açıklayınız.
10. $(x, y, z) = \ln x + 2y + e^{1-z^2}$, $P_0 = (1,0,1)$ ve $P_1 = (3,1,3)$ olsun. f fonksiyonunun P_0 noktasında $\overrightarrow{P_0P_1}$ yönündeki yönlü (doğrultu) türevi nedir?

11. $f(x, y, z) = (x^2 + z^2) \cdot e^{1-y} + \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ pozitif x, y, z eksenleri ile sırasıyla $60^\circ, 45^\circ$ ve 60° lik açı yapan doğrultudaki $D_{\vec{u}}f(2,1,1) = ?$

12. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & , (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x, y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu $\vec{u} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ yönünde $P(0,0)$ noktasında nasıl değişmektedir?

13. $f(x, y) = y \cdot \frac{x^2}{2} + x \cdot \frac{y^2}{2}$ fonksiyonu $P(1,1)$ noktasında en hızlı arttığı yöndeki maksimum değeri nedir?

14. $f(x, y) = (x + y)^2 + x^4$ fonksiyonunun varsa yerel ekstremumlarını (maksimum, minimum, eyer(semer) noktalarını) bulunuz.

15. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin alanını bulunuz.

16. $x = r \cdot \cos \theta, y = r \cdot \sin \theta, z = z$ fonksiyonlarının fonksiyonel bağımlı olup olmadığını araştırınız.

17. $f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ fonksiyonunun $(\pi, 2)$ noktasındaki teğet düzlemi ve normal doğrusunun denklemini bulunuz.

18. $f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 8 = 0$ ve $g(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x + 4y - 6z + 12 = 0$ yüzeylerinin $(1,2,1)$ noktasında teğet olduğunu gösteriniz.

EK 3. Uygulama İzinleri

Çok İvedi



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Hukuk Müşavirliği

Sayı : E-87347630-640.99-36404
Konu : Etik Kurul İzni Hk.

30/03/2021

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 05.02.2021 tarih ve E-67493393-302.08.01-13314 sayılı yazınız.

İlgide kayıtlı yazınıza istinaden Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulunun 15.03.2021 tarihli toplantısında alınan 27 sayılı karar ile Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Buse Gizem YİTMEZ'in "İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi" adlı tez çalışmasında uygulayacağı ankette ad-soyad ve işletme unvanı bilgilerinin istenildiği kısımların çıkarılması gerektiğine; ilgili maddelerin çıkarılması halinde anketin etik açıdan uygun olduğuna karar verilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Nükhet HOTAR
Rektör

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Evrakınızı <http://dogrulama.deu.edu.tr> linkinden 7858DF80X9 koda ile doğrulayabilirsiniz.

Dokuz Eylül Üniversitesi Rektörlüğü
Adres: Cumhuriyet Bulvarı No:144 35210 Alsancak / İZMİR
Tel: 0(232) 412 1212 Elektronik Ağı: www.deu.edu.tr
Kep Adresi: dokuzeyuluniversitesi@is01.kep.tr

Bügi için İrtibat:
Merve ÇÜRÜK
Dahili:
E-Posta: merve.curuk@deu.edu.tr

izmir
dijitaldeyir





T.C.
BUCA EĞİTİM FAKÜLTESİ
Buca Eğitim Fakültesi Dekanlığı



Sayı : E-85316909-640.99-57259
Konu : Tez Uygulaması hakkında.

20/05/2021

HUKUK MÜŞAVİRLİĞİNE

İlgi : 30.03.2021 tarih ve 87347630-640.99-36405 sayılı yazınız.

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Buse Gizem YİTMEZ'in "İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi" adlı tez çalışmasını Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde yapması çalışmayı kendisinin takip etmesi koşuluyla uygun görülmüştür. Bilgilerinizi ve gereğini arz ederim.

Prof.Dr. Esra BUKOVA GÜZEL
Dekan

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Eğitimizi <http://dogruyazma.deu.edu.tr/index.html> adresinden C94B3D9E5E kodu ile doğrulayabilirsiniz.

Dokuz Eylül Üniversitesi – Buca Eğitim Fakültesi
Adres: Uğur Mumcu Cad. 135. Sk. No:5 35150 Buca-İZMİR
Tel: 0 232 420 48 82 Elektronik Ağ: <http://bef.deu.edu.tr>
Kep Adresi: dokuzeyuluniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için İrtibat:
Sevgi TİFTİK
Dahili:
E-Posta: sevgi.tiflik@deu.edu.tr



Çok İvedi



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
Hukuk Müşavirliği

Sayı : E-87347630-640.99-59272
Konu : Buse Gizem YİTMEZ

26/05/2021

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : a) 05.02.2021 tarih ve E-67493393-302.08.01-13314 sayılı yazınız.
b) Buca Eğitim Fakültesi Dekanlığının 20.05.2021 tarih ve E-85316909-640.99-57259 sayılı yazısı.

İlgi (a)'da kayıtlı yazınız ile bildirilen Enstitünüz lisansüstü öğrencisi Buse Gizem YİTMEZ'in "İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi" konulu çalışması kapsamında uygulama yapma talebine ilişkin Buca Eğitim Fakültesi Dekanlığından alınan ilgi (b)'de kayıtlı yazı, işbu yazımız ekinde sunulmaktadır.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Nükhet HOTAR
Rektör

Ek: İlgi (b)'de kayıtlı yazı ve ekleri. (2 Sayfa)

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Evrakınızı <http://dogrulama.deu.edu.tr> linkinden C8BB808EXE kodu ile doğrulayabilirsiniz.

Dokuz Eylül Üniversitesi Rektörlüğü
Adres: Cumhuriyet Bulvarı No:144 35210 Alsancak / İZMİR
Tel: 0(232) 412 1212 Elektronik Ağ: www.deu.edu.tr
Kep Adresi: dokuzeyluluniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi İçin İrtibat:
Merve ÇÜRÜK
Dahili:
E-Posta: merve.curuk@deu.edu.tr



