КЫРГЫЗ-ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ

ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЖАЛПЫЛАНГАН ТРАПЕЦИЯ МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

Даярдаган
Акак Шадыканова

Жетекчиси
Ф.-м.и.д.,профессор Авыт Асанов

Магистрдик диссертация

Июнь 2021
КЫРГЫЗСТАН/БИШКЕК

КЫРГЫЗ-ТҮРК “МАНАС” УНИВЕРСИТЕТИ
ТАБИГЫЙ ИЛИМДЕР ИНСТИТУТУ
МАТЕМАТИКА БАГЫТЫ

ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЖАЛПЫЛАНГАН ТРАПЕЦИЯ МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

Магистрдик диссертация

Даярдаган
Акак Шадыканова

Жетекчиси
Ф.-м.и.д., профессор Авыт Асанов

Июнь 2021
КЫРГЫЗСТАН/БИШКЕК

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ

Бул иште бардык тиешелүү илимий маалыматтар туура, этикалык эрежелерге ылайык келгендигин жана техникалык маселесинин так көрсөтүлгөнүн билдирем. Темага байланыштуу материалдар изилденип жана жана эч кайсы бир жерден плагиат жасалбагандыгына ынандырып кетем. Теманын алкагында жыйынтык изилденгенин билдирүү менен сунуштайм.

Аты – жөнү: Акак Шадыканова

Колу:

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı Soyadı: Akak ŞADIKANOVA

İmza:

ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК

“Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу” аттуу магистрдик иш, Кыргыз – Түрк “Манас” Университетинин магистрдик иш мыйзамдарынын жана магистрдик иш жазма куралдарынын чегинде жазылды.

Даярдаган:

Акак Шадыканова

Колу:

Илимий жетекчиси:

Ф.-м.и.д., профессор Авыт Асанов

Колу:

Математика багытынын мүдүрү

Ф.-м.и.д., профессор Анаркүл Урдалетова

Колу:

YÖNERGEYE UYGUNLULUK

"Genelleştirilmiş yamuk yöntemi kullanılarak artan fonksiyonun türevleri ile doğrusal olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü" adlı Yüksek Lisans Tezi, Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi hazırlayan	Danışman
Akak ŞADIKANOVA	Prof.Dr. Avıt ASANOV
İmza:	İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof.Dr. Anarkül URDALETOVA

İmza:

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ

Ф.- м.и.д., профессор Авыт Асанов жетекчилигинде Акак Шадыканова тарабынан даярдалган “Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу” аттуу темада магистрдик иш комиссия тарабынан Кыргыз - Түрк “Манас” Университети Табигый илимдер институту, Математика бөлүмүнүн илимий багытында магистрдик иш болуп кабыл алынды.

……….. /…… / ………..

Комиссия:

Төрагасы:	Ф.-м.и.д., профессор Чекеев Асылбек	………..
Мүчө:	Ф.-м.и.д., профессор Өмүралиев Асан	……….
Мүчө:	PhD., профессор Мухаммет Камали	……….
Мүчө:	Ф.-м.и.д., профессор Асанов Авыт	……….
Мүчө:	Ф.-м.и.к., доцент Матанова Калыскан	……….
Мүчө:	Ф.-м.и.к., доцент Абдылдаева Элмира	……….

ЧЕЧИМ:

Бул магистрдик иштин кабыл алынышы Институт башкаруу кеңешинин

…………… датасында жана.....................санындагы чечими менен бекитилди.

………. /……../ ………

PhD,доцент Исмет Алтынташ

Институт мүдүрү

KABUL VE ONAY

Prof. Dr. Avıt ASANOV danışmanlığında Akak ŞADIKANOVA tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş yamuk yöntemi kullanılarak artan fonksiyonun türevleri ile doğrusal olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü" adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

……….. /…… / ………..

JÜRİ:

Komisyon başkanı:	Prof. Dr. Asılbek ÇEKEEV	……….
Üye:	Prof. Dr. Asan ÖMÜRALİEV	……….
Üye:	PhD. Prof. Muhammet KAMALİ	……….
Üye:	Prof. Dr. Avıt ASANOV	……….
Üye:	Doç.Dr. Kalıskan MATANOVA	……….
Üye:	Doç.Dr. Elmira ABDILDAEVA	……….

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ………..… tarih ve.......................... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

………. /……../ ………

Doç.Dr. Ismet ALTINTAŞ

Enstitü Müdürü

АЛГАЧ СӨЗ / ЫРААЗЫЧЫЛЫК

Билим алууда салымы чоң, магистрдик иштин толугу менен бүтүшүнө өз эмгегин жана жардамын аябаган жетекчиме физика-математика илимдеринин доктору профессор Авыт Асанов агайыма жана ушул диссертациялык ишимди жазууда баалуу кеңештерин берген мугалимдер жааматына терең ыраазычылыгымды билдиремин.

Айрыкча ушул изилдөө убакыт ичинде ар тараптан колдоо көрсөткөн үй-бүлөмө жана жакындарыма терең ыраазычылык билдиремин.

Акак Шадыканова

Бишкек

ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЖАЛПЫЛАНГАН ТРАПЕЦИЯ МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

Акак Шадыканова

Кыргыз – Түрк “Манас” университети, Табигый илимдер институту

Магистрдик иш, июнь 2021

Илимий жетекчиси: Ф.-м.и.д., проф. Авыт Асанов

АННОТАЦИЯ

Математикада кеңири колдонууга ээ болгон дифференциалдык теңдемелер физикада, механикада, экономикада, биологияда жана башка илимдин ар кандай тармактарында колдонулат. Көптөгөн маселелердин математикалык модели дифференциалдык теңдемелерге алынып келинет. Дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу үчүн ар кандай методтор сунушталган [23], [24]. Дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу абдан татаал юолгон учурлар болот, кээде болсо мүмкүн болбогон учурлар да болот. Мындай учурларда жакындаштырып чыгаруу методтору колдонулат.

Бул диссертациялык иште өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши меселесинин чыгарылышын жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу маселеси изилденди. Берилген Коши маселеси Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине алынып келинет. Сунушталган метод менен бир мисал чыгарылды.

Ачкыч сөздөр: Өсүүчү функция боюнча туунду, сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме, Вольтерра-Стильтестин интегралдык теңдемеси, жалпыланган трапеция методу

GENELLEŞTİRİLMİŞ YAMUK YÖNTEMİ KULLANILARAK ARTAN FONKSİYONUN TÜREVLERİ İLE DOĞRUSAL OLMAYAN IKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Akak ŞADIKANOVA

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2021

Danışman: Prof. Dr. Avıt ASANOV

GENİŞ ÖZET

Matematikte yaygın olarak kullanılan diferansiyel denklemler fizik, mekanik, ekonomi, biyoloji ve diğer çeşitli bilim alanlarında kullanılmaktadır. Birçok problemin matematiksel modeli diferansiyel denklemlere indirgenir. Diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli yöntemler önerilmiştir [23], [24]. Diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunması çok zor ve bazen imkansız olduğu durumlar vardır. Bu gibi durumlarda, yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılır.

Artan fonksiyona göre türev kavramı [1] makalesinde ele alınmıştır. Bu makaleye dayanarak, [3] ve [6] bilimsel çalışmalarda, Stieltjes integralini yaklaşık olarak hesaplamak için genelleştirilmiş yamuk yöntemi ve genelleştirilmiş orta nokta yöntemleri önerilmiştir. Avıt Asanov'un [2] çalışmasında artan fonksiyonun türevi kavramı yardımıyla, ikinci türüden Volterra-Stieltjes doğrusal ve doğrusal olmayan integral denklemleri incelenmiştir. [4] ve [7] makalelerinde, ikinci türden Volterra-Stiltjes lineer integral denklemlerinin yaklaşık çözüm problemi, genelleştirilmiş yamuk yöntemi ile araştırılmıştır. Ama ikinci türden doğrusal olmayan Volterra-Stiltjes integral denklemlerinin yaklaşık çözüm problemi, genelleştirilmiş yamuk yöntemi ile araştırılmamıştır.

Volterra-Stieltjes integral denkleminin bir çözümü olduğu bilinse bile, bunu hesaplamak her zaman mümkün değildir. Bu nedenle, integralin yaklaşık hesaplama yöntemleri kullanılır. Stieltjes integralinin yaklaşık hesaplanmasında kullanılan

genelleştirilmiş yamuk yöntemi [3], [19], ikinci türden Volterra-Stieltjes integral denklemine uygulanabilir [4], [7]. Volterra integral denkleminin çalışmasına adanmış birçok çalışmalar var [9]-[11]. Bununla birlikte, Volterra-Stieltjes integral denklemi, genel olarak konuşursak, her zaman Volterra integral denklemine indirgenmez ve Stieltjes integral denklemi her zaman Riemann veya Lebesgue integral denklemine indirgenmez [13]. Bu nedenle Volterra - Stieltjes integral denkleminin araştırılması özellikle ilgi çekicidir. Volterra-Stieltjes integral denklemleri, bilim ve teknolojinin birçok dallarında süreçleri tanımlamak, incelemek ve tahmin etmek için daha kullanışlı matematiksel modeller haline gelmektedir. Örneğin, Volterra-Stieltjes integral denklemler, optimal kontrol süreçlerinde [15], saçılma teorisinin ters problemlerinde [14], dürtü etkisi ile süreçlerin stabilitesini incelemek için matematiksel modelleme için [16] ve klasik ve kuantum sistemlerine kinetik denklemlerin dinamik teorisinde süreçlerde [17] kullanılır.

İlk bölümde çalışmanın amacı, artan fonksiyona göre türev kavramı incelenmiştir. Artan fonksiyona göre fonksiyonun türevini alma yöntemleri ve bazı teoremler verilmiştir.

Tanım 1: Fonsiyonun $t \in (t_0, T)$ noktasında $\varphi(t)$ türevi denir, argümenin artması $\Delta t \to 0$ yaklaşırsa, $\Delta f(t)$ artmasının $\Delta\varphi(t)$ artmasına olan oranın limiti denir (eğer bu limit varsa).

$$f'_\varphi(t) = \frac{df}{d\varphi}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}.$$

$\varphi(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında artan sürekli bir fonksiyon, $f(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $t \in (t_0, T)$ noktasında $\varphi(t)$ foksiyona göre türevi varsa, bu durumda $f(t)$ foksiyonu o noktada $\varphi(t)$ foksiyona göre differensiyellenebilir denir. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $\varphi(t)$ foksiyona göre, aralığın her noktasında differensiyellenebilir ise, $f(t)$ fonksiyonu $\varphi(t)$ fonksiyona göre (t_0, T) aralığında differensiyellenebilir denir.

$f(t)$ fonksiyonu $\varphi(t)$ fonksiyona göre (t_0, T) aralığın her noktasında

differensiyellenebilir olsun. O zama her $t \in (t_0, T)$ noktasına туура келген ошол чекиттеги $f_\varphi'(t)$ туундусун алууга болот. Elde edilen fonksiyon $\varphi(t)$ fonksiyona göre türevi denir ve $f_\varphi'(t)$ şeklinde belirlenir. Bu fonksiyon kendisi de $\varphi(t)$ foksiyona göre türeve sahip olması mümkündür. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonu $\varphi(t)$ fonksiyona göre ikinci türevi denir ve aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$f_\varphi''(t) = (f_\varphi'(t))_\varphi'$$

Bu şekilde üçüncü, dördüncü ve sonrski türevleri aşağıdaki gibidir:

$$f_\varphi'''(t) = (f_\varphi''(t))_\varphi', \ldots, f_\varphi^{(n)}(t) = (f_\varphi^{(n-1)}(t))_\varphi'$$

$$f_\varphi^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{d\varphi^n(t)} = D_\varphi^n f(t).$$

Teorem 1 (Genelleştirilmiş kısmi integrasyon kuralı)**:** $\varphi(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında artan sürekli bir fonksiyon, $f_\varphi'(t)$ ve $g_\varphi'(t)$ fonksiyonları $[t_0, T]$ aralığında sürekli foksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki formül

$$\int_{t_0}^{T} f(t) g_\varphi'(t) d\varphi(t) = \left[f(t)\left(g(t)+c\right)\right]\Big|_{t_0}^{T} - \int_{t_0}^{T} \left(g(t)+c\right) f_\varphi'(t) d\varphi(t),$$

sağlanmaktadır. Burada c - herhangi bir sabittir [1].

Tanım 2: $\varphi(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ kapalı aralığında artan sürekli bir fonksiyon, burada $G = [t_0, T]$ $(t_0 < T < \infty)$ veya $G = [t_0, T]$ $(T \le \infty)$. Aşağıda tanımlanan integral denklem

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s, u(s)) d\varphi(s) + f(t), \quad t \in G,$$

ikinci türden doğrusal olmayan Volterra-Stieltjes integral denklemi denir [2].

Burada $K(t, s, u(s))$ fonksiyonu $G_1 = \{(t, s) : t_0 \le s \le t \le T\} \times \mathbb{R}$ tanımlı sürekli bir fonksiyon, $f(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon, $\varphi(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında artan ve sürekli bir fonksiyon. $u(t)$, $[t_0, T]$ aralığında aranan foksiyon.

İkinci bölümde, genel probleme bir çözüm elde etmek için kullanılan integral denklemler verilmiştir. Genel anlamda integral denklem kavramı, sınıflandırılması ve türleri sunulmuştur. İkinci türden ve birinci birinci türden Volterra-Stıeltjes integral denklemlerinin kısa bir açıklaması verilmiştir

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş yamuk yönteminin kullanımı verilmiştir. Genelleştirilmiş yamuk yönteminin Stieltjes integral denklemine ve ikinci türün Volterra-Stieltjes lineer integral denklemine uygulanması düşünülmüştür.

Dördüncü bölümde, tezin ana amacı olan artan fonksiyonun türevleri ile doğrusal olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklemi incelenmiştir. Artan fonksiyonun türevleri ile doğrusal olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklem için Cauchy problemi ele alınmaktadır:

$$u'_{\varphi(t)}(t) = p(t)u'_{\varphi(t)}(t) + F(t,u(t)) + g(t), \quad (t,u) \in [t_0,T] \times \mathbb{R} \tag{1}$$

$$u(t_0) = \alpha, \quad u'_{\varphi}(t_0) = \beta, \quad \varphi(t_0) = 0 . \tag{2}$$

Burada $\varphi(t)$ foksiyonu $[t_0,T]$ aralığında artan sürekli bir fonksiyon, $g(t)$ ve $p(t)$ fonksiyonları $[t_0,T]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar, $F(t,u(t))$ sürekli bir fonksiyon. $u(t)$ ise $[t_0,T]$ kapalı aralığında aranan fonksiyondur.

(1)-(2) Cauchy problemi aşağıdaki gibi ikinci türden doğrusal olmayan Volterra-Stieltjes integral denkleme indirgenir.

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)u(s)d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t} [\varphi(t) - \varphi(s)]\left[F(s,u(s)) - p'_{\varphi}(s)u(s)\right]d\varphi(s) + f(t), \tag{3}$$

Burada $f(t) = [\beta - \alpha p(t_0)]\varphi(t) + \alpha + \int_{t_0}^{t} [\varphi(t) - \varphi(s)]g(s)d\varphi(s).$

Bu (3) integral denklemin çözümü genelleştirilmiş yamuk yöntemi kullanılarak araştırılmaktadır. Bir örnek önerilen yöntem kullanılarak çözülür.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ТРАПЕЦИЙ

Акак Шадыканова

Кыргызско-Турецкий университет «Манас», Институт Естественных наук

Магистерская диссертация, июнь 2021

Научный руководитель: Док. ф.м.н.,проф. Асанов Авыт

АННОТАЦИЯ

Дифференциальные уравнения, которые имеют широкое применение в математике, в физике, в механике, в экономике, в биологии и других различных областях науки. Математическая модель многих задач сводится к дифференциальным уравнениям. Различные методы были предложены для решения дифференциальных уравнений [23], [24]. Бывают случаи, когда решение дифференциальных уравнений очень сложно найти, а иногда и невозможно. В таких случаях используются методы приближенного решение.

В данной диссертационной работе исследована проблема приближенное решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с производной по возрастающей функции с помошью обобщенного метода трапеций. Данная задача Коши сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры-Стильеса второго рода. Один пример решается с использованием предложенного метода.

Ключевые слова: Производная по возрастающей функции, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса, обобщенный метод трапеций.

APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DERIVATIVES IN INCREASING FUNCTION WITH A GENERALIZED TRAPEZOID METHOD

Akak Shadykanova

Kyrgyzstan-Turkey Manas University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2021

Supervisor: Prof. Dr. Avyt Asanov

ABSTRACT

Differential equations are widely used in mathematics,in physics, in mechanics, in economics, in biology, and in various other fields of science. The mathematical model of many problems is reduced to differential equations. Various methods have been proposed for solving differential equations [23], [24]. There are cases when the solution of differential equations is very difficult to solve, and sometimes impossible. In such cases, approximate solution methods are used.

In this dissertation, the problem of approximate solution of the Cauchy problem for a second-order nonlinear differential equation with an increasing function derivative using the generalized trapezoid method is investigated. This Cauchy problem reduces to a nonlinear Volterra-Stiles integral equation of the second kind. One example is solved employing the proposed method.

Key words: The derivative of an increasing function, nonlinear second-order differential equation, nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation, generalized trapezoid rule.

МАЗМУНУ

ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЖАЛПЫЛАНГАН ТРАПЕЦИЯ МЕТОДУ МЕНЕН ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

Бет

ПЛАГИАТ ЖАСАЛБАГАНДЫГЫ ТУУРАЛУУ БИЛДИРҮҮ I

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK II

ЭРЕЖЕГЕ ЫЛАЙЫКТУУЛУК III

YÖNERGEYE UYGUNLULUK IV

КАБЫЛ АЛУУ ЖАНА БЕКИТҮҮ V

KABUL VE ONAY VI

АЛГАЧ СӨЗ / ЫРААЗЫЧЫЛЫК VII

АННОТАЦИЯ VIII

GENİŞ ÖZET IX

АННОТАЦИЯ XIII

ABSTRACT XIV

МАЗМУНУ XV

КИРИШҮҮ 1

1- БӨЛҮМ. ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ФУНКЦИЯНЫН ТУУНДУСУ

1.1 Функциянын $\varphi(x)$ боюнча туундусу жана дифференциалы 5

1.2. $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөө эрежелери 9

1.3. $\varphi(x)$ боюнча татаал функцияны дифференцирлөө 9

1.4. Жогорку тартиптеги туунду жана дифференциалдар 10
1.5. Функциянын чекиттеги өсүүсү жана кемүүсү 11
1.6. Өсүүчү функциянын туундусу 13
1.7. Экстремумдар 20
1.8. $\mathbb{R}^n$ де дифференцирленүүчү функция 23
1.9. Татаал функциянын дифференциалы 27

2-БӨЛҮМ. ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КЛАССИФИКАЦИЯСЫ

2.1. Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеси 32
2.2.1. Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси 33
2.1.2. Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси 37
2.2. Вольтерра- Стилтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси 39
2.2.1. Вольтерра- Стилтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси 40
2.2.2. Вольтерра- Стилтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси 44

3-БӨЛҮМ. СТИЛТЬЕСТИН ИНТЕГРАЛЫ ЖАНА ЖАЛПЫЛАНГАН ТРАПЕЦИЯ МЕТОДУ

3.1. Стилтьестин интегралы 48

3.2. Стилтьестин интегралына жалпыланган трапеция методун колдонуу 51

3.2. Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу 52

4-БӨЛҮМ. ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

4.1 Өсүүчү функция боюнча туундулу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине келтирип изилдөө 57

4.2 Өсүүчү функция боюнча туундулу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу 61

ЖЫЙЫНТЫК 68

АДАБИЯТТАР 69

ӨМҮР БАЯН 71

КИРИШҮҮ

Дифференциалдык теңдемелер жана интегралдык теңдемелер математиканын эң көп көңүл бурулган бөлүмдөрү болуп саналат. Математикалык эсептөөлөрдө жана математика колдонулган көп тармактарда берилгени функциянын туундуларын алуу же интегралын эсептөөнү талап кылат. Бирок функциянын туундусун алуу же интегралын эсептөө дайыма эле мүмкүн боло бербейт. Мындай учурларда башка бир функцияга карата туунду алынганда функциянын туундуларын алууга мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн [1]. Мындай туунду алуу Стилтьес интегралынын тескери операциясы экендиги көрсөтүлгөн.

Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемесинин чыгарылышы бар экендиги билинсе дагы, аны эсептөө ар дайым мүмкүн боло бербейт. Ошондуктан интегралды жакындаштырып эсептөө методдору колдонулат. Стилтьестин интегалын жакындаштырып эсептөөдө колдонулган жалпыланган трапеция методу Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесине колдонууга мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн [4].

Вольтерранын интегралдык теңдемесин изилдөөгө арналган көпгөгөн эмгектер бар [9]-[11]. Бирок Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемеси жалпылап айтканда дайыма эле Вольтерранын интегралдык теңдемесине алынып келинбейт, ошондой эле Стилтьестин интегралдык теңдемеси дайыма эле Римандын же Лебеганын интегралдык теңдемесине алынып келинбейт [13]. Ошон үчүн Вольтерра- Стилтьестин интегралдык теңдемесин изилдөө өзгөчө кызыгууну жаратат. Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин чыгаруу үчүн ар кандай жакындаштырылган ыкмалар көптөгөн эмгектерде изилденген [18]. Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемелери көптөгөн илимий тармакатарда жана техникада процесстерди изилдөөдө, прогноздоодо жана математикалык моделин түзүүгө ыңгайлуу болуп жатат. Мисал үчүн, Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемелери, оптималдуу башкаруу процесстеринде [15], таралуу теориясынын тескери маселелеринде [14], импульстук таасир менен берилген процесстердин туруктуулугун изилдөө үчүн математикалык моделин түзүүдө [16], динамикалык теориялардын процесстеринде [17] колдонулат.

М. Абдужаббаров тарабынан Стилтьес интегралын жакындаштырып эсептөө үчүн жалпыланган орто чекит методу изилденген [20]. Ал эми Али Чалыш тарабынан Риман интегралын жакындаштырып эсептөөдө колдонулган трапеция методу Стилтьестин интегралын жакындаштырып эсептөөгө колдонууга мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн [19]. М. Гаппаров тарабынан Фредгольм-Стилтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган Эйлердин методу менен жакындаштырып чыгаруу меселеси каралган [22]. Өсүүчү функция боюнча туунду түшүнүгү [1] макалада каралган. Бул макаланын негизинде [3] жана [6] илимий эмгектерде Стилтьес интегралын жакындаштырып эсептөө үчүн жалпыланган трапеция методу менен жалпыланган орто чекит методдору сунушталган. Авыт Асановдун [2] эмгегинде өсүүчү функциянын туундусу түшүнүгүнүн жардамы менен Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелери изилденди. Абсамат к Элиза тарабынан Вольтерра-Стилтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классынын чыгарылыштары каралган [21].

Буга чейин [4] жана [7] макалаларда, Вольтерра- Стильтестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чыгарылыштарын жакындаштырып чыгаруу маселеси жалпыланган трапеция методу менен изилденген. Бирок, Вольтерра-Стильтестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык тендемелеринин чыгарылыштарын жакындаштырып чыгаруу маселеси жалпыланган трапеция методу менен изилденген эмес. Биз бул диссертациялык иште өсүүчү функция боюнча туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесин Вольтерра-Стильтестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине алып келип изилдейбиз.

Биринчи бөлүмдө, иштин максаты жанан өсүүчү функция боюнча туунду түшүнүгүнө токтолдук. Өсүүчү функция боюнча функцияны дифференцирлөө эрежелери жана кээ бир теоремалары каралды.

Экинчи бөлүмдө, маселени чыгарылышын алууда колдонулган интералдык теңдемелер каралды. Жалпысынан интегралдык теңдемелер жөнүндө түшүнүктөр жана алардын классификациясы каралды. б.а. Вольтерра-Стилтьестин

биринчи жана экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелерине маалыматтар келтирилди.

Үчүнчү бөлүмдө, жалпыланган трапеция методунун колдонулушу каралды. Стилтьестин интегралдык теңдемесине жана Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесине жалпыланган трапеция методун колдонулушу каралды.

Төртүнчө бөлүмдө, диссертациянын негизги маселеси болгон өсүүчү функция боюнча туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин жакындатылган чыгарылышы табуу маселеси изилденди.

Теманын актуалдуулугу: Экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеменин жалпы учуру болгондугу өсүүчү функция боюнча туундулуу экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин керектүүлүгүн көрсөтөт. Адабий изилдөөлөрдүн натыйжасында, өсүүчү функция боюнча туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин жакындаштырып чыгаруу маселесин изилдөө актуалдуу болуп саналат.

Иштин максаты: Өсүүчү функция боюнча туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышын жалпыланган трапеция методун колдонуп жакындаштырылган чыгарылышын табуу.

Иштин жаңылыгы: Өсүүчү функция боюнча туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемени Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине келтирүү. Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чыгарылышын жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу.

Иштин практикалык мааниси: Алынган анык формулага жараша мисалдарды келтирүү жана алардын чыгарылыштарын көрсөтүү. Өсүүчү функция боюнча туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемени Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине келтирип изилдөө.

Иштин көлөмү жана структурасы: Диссертациялык иш киришүү, төрт негизги бөлүмдөн, жыйынтыктан жана колдонулган адабияттардын тизмесинен турат.

1-БӨЛҮМ ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ФУНКЦИЯНЫН ТУУНДУСУ

Бул бөлүмдө өсүүчү функция боюнча функциянын туундусу түшүнүгүнө токтолобуз. Көптөгөн эмгектерде функциянын туундусу жана дифференциалы жөнүндө классикалык түшүнүктөр берилген [12], [13]. Бул түшүнүктөргө жаңы аныктама берилет. Бул түшүнүктөр функциянын туундусунун жана дифференциалынын жашашын аныктайт. Бул аныктамалардын негизинде математикалык анализдин классикалык теоремалары колдонулат [1].

1.1 Функциянын $\varphi(x)$ боюнча туундусу жана дифференциалы

$f(x)$ жана $\varphi(x)$ функциялары $(a,\, b)$ интервалында аныкталган болсун. $\varphi(x)$ функциясы $(a,\, b)$ интервалында так өсүүчү, үзгүлтүксүз функция болсун дейли. $x\in(a,b)$ чекитин алалы. x маанисине $\Delta x\neq 0$ өсүндүсүн берсек, анда $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын өсүндүлөрү $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ жана $\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$ болот.

Аныктама 1.1: Функциянын $x\in(a,b)$ чекитиндеги $\varphi(x)$ боюнча туундусу деп, аргументтин $\Delta x\to 0$ умтулганда, $\Delta f(x)$ өсүндүсүнүн $\Delta\varphi(x)$ өсүндүсүнө болгон катышынын предели аталат (эгерде бул предел жашаса).

$$f'_{\varphi}(x)=\frac{df}{d\varphi}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}, \qquad (1.1)$$

$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусун табууну бул функциянын $\varphi(x)$ боюнча дифференциалы деп атасак болот. Эгерде $f(x)$ функциясы $x\in(a,\, b)$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча акыркы туундуга ээ болсо, анда $f(x)$ функциясы ошол чекитте $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленүүчү деп аталат. $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча интервалдын бардык чекитинде дифференцирленүүсү $\varphi(x)$ боюнча $(a,\, b)$ да дифференцирленет деп аталат.

Теорема 1.1: Эгерде $f(x)$ функциясынын $x_0 \in (a,b)$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча туундусу болсо, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот.

Далилдөө: Шарт боюнча $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин б.а. акыркы предели жашасын

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta \varphi(x_0)} = \frac{df}{d\varphi}(x_0) = f'_{\varphi}(x_0)$$

мында $\frac{df}{d\varphi}(x_0)$ -турактуу чоңдук, Δx тен көз каранды эмес. Анда теореманын негизинде функциянын чексиз кичине байланышы жөнүндө төмөнкүдөй

$$\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} = f'_{\varphi}(x_0) + \alpha(\Delta x) \tag{1.2}$$

түрдө жазууга болот, мында $\alpha(\Delta x)$ -чексиз кичине чоңдук, $\Delta x \to 0$ же $\Delta f(x_0) = f'_{\varphi}(x_0)\Delta\varphi(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta\varphi(x_0)$ болгондо. Мындан, $\Delta x \to 0$ чексиз кичине касиетинин негизинде $\Delta f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0) \to 0$ го коёбуз, демек, $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз.

Функцияны $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөөдө функциянын үзгүлтүксүздүгү зарыл, бирок жетиштүү эмес шарт экендигин көрүүгө болот.

Түшүндүрмө: Үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу сөзсүз түрдө үзгүлтүксүз болушу шарт эмес. Эгерде функция (a, b) интервалында $\varphi(x)$ боюнча үзгүлтүксүз туундуга ээ болсо, анда $f(x)$ функциясы (a, b)интервалында $\varphi(x)$ боюнча жылмакай деп аталат. Эгерде $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу үзүлүү чекитинин акыркы маанисине ээ болсо (биринчи түрдө), анда $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында $\varphi(x)$ боюнча бөлүктүү-жылмакай деп аталат.

Аныктама 1.2: Сызыктуу $g(\Delta\varphi) = c\Delta\varphi$ функциясы $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча $x = x_0$ чекитиндеги дифференциалы деп аталат, эгерде $\Delta x \to 0$ умтулганда

$$\Delta f(x_0) \sim c\Delta\varphi(x_0)$$

болсо,б.а.

$$\Delta f(x_0) = c\Delta\varphi(x_0) + \gamma(\Delta x)\Delta\varphi(x_0)$$

мында $\Delta x \to 0$ умтулганда $c \in \mathbb{R}$ жана $\gamma(\Delta x) \to 0$.

$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча x чекитиндеги дифференциалы $d_\varphi f(x)$ же $d_\varphi f$ деп белгиленет. Аныктамадан төмөнкү барабардык келип чыгат

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = c,$$

б.а.

$$d_\varphi f(x) = f_\varphi'(x)\Delta\varphi \tag{1.3}$$

$\varphi(x)$ функциясынын дифференциалын аныктасак,

$$d_\varphi f(x) = d\varphi(x) = (\varphi(x))_\varphi'\Delta\varphi = \Delta\varphi$$

анда (1.3) төн

$$d_\varphi f(x) = f_\varphi'(x)d\varphi(x) \tag{1.4}$$

алабыз.

Мисал: $f(x) = |x|$ функциясы $x = 0$ чекитинде дифференцирленбейт. Эгерде

$$\varphi \quad \begin{cases} -|x|^{\frac{1}{3}}, x < 0, \\ |x|^{\frac{1}{3}}, \quad x \geq 0, \end{cases}$$

болсо, анда $\varphi(x)$ функциясы $(-\infty, \infty)$ аралыгында үзгүлтүксүз өсүүчү функция болот. $f(x) = |x|$ функциясы $x \in (-\infty, +\infty)$ ар бир чекитинде $\varphi(x)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз туундуга ээ болоорун көрсөтөлү.

$x < 0$ болсун дейли, анда Аныктама 1.1 ден,

$$f_\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^3}{-\left(|x + \Delta x|^{\frac{1}{3}} - |x|^{\frac{1}{3}}\right)} =$$

$$
=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)\left(|x+\Delta x|^{\frac{2}{3}}+|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}|x|^{\frac{1}{3}}+|x|^{\frac{2}{3}}\right)^{3}}{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}=-3|x|^{\frac{2}{3}}.
$$

Эгерде $x>0$ болсо, анда $f'_{\varphi}(x)=3|x|^{\frac{2}{3}}$ болоорун $x<0$ болгон учурунда далилдеген сыяктуу далилдесек болот.

$x=0$ жана $\Delta x>0$ болсун. Анда

$$
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}=0
$$

болот. Эгерде $x=0$ жана $\Delta x<0$ болсо, анда

$$
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{-|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}=0
$$

болот. б.а. $f'_{\varphi}(0)=0$ келип чыгат.

Ушундай жол менен $f(x)=|x|$ функциясынын $\varphi(x)$ функциясы боюнча туундусу төмөнкү формуладагыдай аныкталат:

$$
f'_{\varphi}(x)=\begin{cases}-3|x|^{\frac{2}{3}}, & x<0,\\ 3|x|^{\frac{2}{3}}, & x\geq 0.\end{cases}
$$

Мындан $f'_{\varphi}(x)$ функциясынын $(-\infty,\infty)$ интервалында үзгүлтүксүз экендигин көрүүгө болот, б.а. $f(x)=|x|$ функциясы $(-\infty,\infty)$ интервалында $\varphi(x)$ боюнча жылмакай болот.

1.2 $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөө эрежелери

1. Турактуунун $\varphi(x)$ боюнча туундусу нөлгө барабар, б.а.

$(C)'_{\varphi} = 0$, мында C – каалагандай турактуу чоңдук.

2. Дифференцирленүүчү функциянын $\varphi(x)$ боюнча алгебралык суммасынын туундусу алардын ар биринин $\varphi(x)$ боюнча туундусунун суммасына барабар, б.а.

$$(u+v)'_{\varphi} = u'_{\varphi} + v'_{\varphi}.$$

3. Дифференцирленүүчү эки функциянын $\varphi(x)$ боюнча туундусу алардын биринчи функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундуусун экинчисине болгон көбөйтүндүсү менен биринчисин экинчи функциянын $\varphi(x)$ боюнча тундуусуна болгон көбөйтүндүсүнүн суммасына барабар, б.а.

$$(uv)'_{\varphi} = u'_{\varphi}v + uv'_{\varphi}.$$

Натыйжа: С турактуу чоңдугун $\varphi(x)$ боюнча туунду белгисинин астына чыгарып алууга болот, б.а.

$$(Cu)'_{\varphi} = Cu'_{\varphi}.$$

4. Дифференцирленүүчү эки функциянын катышынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу

$$\left(\frac{u}{v}\right)'_{\varphi} = \frac{u'_{\varphi}v - uv'_{\varphi}}{v^2}.$$

формуласы менен эсептелет. Бул эреженин далилдөөсү дифференцирлөөнүн эрежелеринин аналогиясы болот.

1.3 $\varphi(x)$ боюнча татаал функцияны дифференцирлөө

Теорема 1.2: $u(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча $x = x_0$ чекитинде дифференцирленсин дейли. $u(x_0) = u_0$, $u'_{\varphi}(x_0) = \alpha$ болсун. Ал эми $f(u)$ функциясы u боюнча чекитинде дифференцирленсин, анда $f'(u_0) = \beta$ болот. Ошондой эле $v(x) = f(u(x))$ татаал функциясынын $\varphi(x)$ боюнча $x = x_0$ чекитинде дифференциалы

$$v'_{\varphi}(x_0) = f'(u_0)u'_{\varphi}(x_0) = \beta\alpha$$

болот.

Далилдөө: $f(u)$ функциясын дифференцирлөөдөн жана $u(x)$ функциясын $\varphi(x)$ боюнча дифференцирлөөдөн төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\Delta u(x_0) = \alpha\Delta\varphi(x_0) + \alpha_1(\Delta x)\Delta\varphi(x_0) \tag{1.5}$$

$$\Delta f(u(x_0)) = \Delta f(u_0) = \beta\Delta u(x_0) + \beta_1(\Delta u(x_0))\Delta u(x_0)\,, \tag{1.6}$$

мында Δx – бул x аргументинин өсүндүсү, $\alpha_1(\Delta x)$ – бул $\Delta x \to 0$ чексиз кичине жана $\beta_1(\Delta u(x_0))$ – бул $\Delta u(x_0)$ да чексиз кичине. (1.5) жана (1.6) формулаларын эске алып,

$$\Delta f(u(x_0)) = [\beta + \beta_1(\Delta u(x_0))][\alpha + \alpha_1(\Delta x)]\Delta\varphi(x_0)$$

алабыз.

Мындан функциянын чексиз кичине пределенин байланышы жөнүндөгү тереманын негизинде төмөнкү формуланы алабыз.

$$v'_{\varphi}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u(x_0))}{\Delta\varphi(x_0)} = \beta\alpha\,.$$

1.4 Жогорку тартиптеги туунду жана дифференциалдар

$f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча (a,b) интервалынын ар бир чекитинде дифференцирленген болсун. Анда ар бир $x \in (a,b)$ чекитине туура келген ошол чекиттеги $f'_{\varphi}(x)$ туундусун алууга болот. Алынган функция $\varphi(x)$ боюнча функциянын туундусу деп аталат жана $f'_{\varphi}(x)$ түрүндө белгиленет. Ал функция өзү дагы $\varphi(x)$ боюнча туундуга ээ болушу мүмкүн. Анда ал $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча экинчи туундусу деп аталат жана төмөнкү түрдө белгиленет:

$$f''_{\varphi}(x) = (f'_{\varphi}(x))'_{\varphi}$$

Ушул сыяктуу эле үчүнчү, төртүнчү жана андан кийинки туундулары төмөнкү түрдө берилет:

$$f'''_{\varphi}(x) = (f''_{\varphi}(x))'_{\varphi}, \ldots, f_{\varphi}^{(n)}(x) = (f_{\varphi}^{(n-1)}(x))'_{\varphi}$$

$$f_{\varphi}^{(n)}(x)=\frac{d^{n}f(x)}{d\varphi^{n}(x)}=D_{\varphi}^{n}f(x).$$

Теорема (Лейбництин жалпыланган формуласы): $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $\varphi(x)$ боюнча n -тартиптеги туундуга ээ болсун. Анда төмөнкү формуланы алабыз:

$$f_{\varphi}^{(n)}(x)g(x)+nf_{\varphi}^{(n-1)}g_{\varphi}^{'}(x)+\frac{n(n-1)}{2}f_{\varphi}^{(n-2)}(x)g_{\varphi}^{'}(x)+\ldots+f(x)g_{\varphi}^{(n)}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}C_{n}^{m}f_{\varphi}^{(m)}(x)g_{\varphi}^{(n-m)}(x),$$

мында $f^{(0)}(x)=f(x),\ g^{(0)}(x)=g(x)$.

Эгерде $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча эки жолу дифференцирленсе,

$$f_{\varphi}''(x)d\varphi^{2}=f_{\varphi}''(x)(d\varphi(x))^{2}$$

$f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча экинчи дифференциалы деп аталат жана $d_{\varphi}^{2}f(x)$ деп белгиленет, б.а.

$$d_{\varphi}^{2}f(x)=d_{\varphi}(d_{\varphi}f(x))=f_{\varphi}''(x)d\varphi^{2}$$

жана ушул сыяктуу эле үчүнчү, төртүнчү жана андан кийинки бардык дифференциалдар төмөнкүдөй болот:

$$d_{\varphi}^{3}f(x)=d_{\varphi}(d_{\varphi}^{2}f(x))=f_{\varphi}'''(x)d\varphi^{3}$$

....

$$d_{\varphi}^{n}f(x)=d_{\varphi}(d_{\varphi}^{n-1}f(x))=f_{\varphi}^{(n)}(x)d\varphi^{n}.$$

Мындай аныктамалардан кийин төмөнкү барабардыкты жазсак болот.

$$f_{\varphi}^{(n)}(x)=\frac{d_{\varphi}^{n}f(x)}{d\varphi^{n}}.$$

5 Функциянын чекиттеги өсүүсү жана кемүүсү

x_0 чекити $f(x)$ функциясынын аныкталган областында ички чекит болсун.

Аныктама 1.3: $f(x)$ функциясы $x=x_0$ чекитинде өсүүчү болот, эгерде ошол

чекиттин кандайдыр бир аймагы жашаса:

1) $x > x_0$ болгондо $f(x) > f(x_0)$;

2) $x < x_0$ болгондо $f(x) < f(x_0)$;

Аныктама 1.4: $f(x)$ функциясы $x = x_0$ чекитинде кемүүчү болот, эгерде кандайдыр бир төмөнкүдөй аймагы жашаса:

1) $x > x_0$ болгондо $f(x) < f(x_0)$;

2) $x < x_0$ болгондо $f(x) > f(x_0)$;

Аныктама 1.5: Эгерде $x = x_0$ чекиттин кандайдыр бир аймагында $f(x_0) > f(x)$ (тиешелүү түрдө $f(x_0) < f(x)$) барабарсыздыгы аткарылса, анда $f(x)$ функциясы $x = x_0$ чекитинде локалдык максимумга (локалдык минимумга) ээ болот.

Аныктам 1.6: $f(x)$ функциясы $x = x_0$ чекитинде локалдык экстремумга ээ болот, эгерде ошол чекитте анын локалдык максимуму же локалдык минимуму бар болсо.

Теорема 1.3: $\varphi(x)$ функциясы $f(x)$ функциясынын аныкталуу областында өсүүчү, үзгүлтүксүз функция болсун.

1) Эгерде $\frac{df}{d\varphi}(x_0) = c > 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекити $f(x)$ функциясынын өсүү чекити болот.

2) Эгерде $\frac{d}{d\varphi}(x_0) = c < 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекитинде $f(x)$ функциясы кемийт.

Далилдөө:

$$\frac{df}{d\varphi}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}$$

үчүн нөлдөн чоң сан жашаса, анда $x = x_0$ чекитинин δ аймагынын бардык чекиттеринде

$$- \qquad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} \quad c \right| < \frac{c}{2}$$

барабарсыздыгы аткарылса. Бул аймактан

$$0 < \frac{c}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} < \frac{3c}{2}$$

алабыз. Ошондой эле $\Delta\varphi(x_0) = \varphi(x) - \varphi(x_0)$ ошол эле белгини алат, $\Delta x = x - x_0$ үчүн. $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ ошол эле белгини алат, $\Delta x = x - x_0$ үчүн, б.а. x_0 - өсүү чекити. 2-учур $f(x)$ ти $(-f(x))$ алмаштыруудан 1-учурга келет.

1.6 Өсүүчү функциянын туундусу

Ферманын жалпыланган теоремасы: x_0 чекити $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясында аныкталган функциянын локалдык экстремум чекити жана $\exists \frac{df}{d\varphi}(x_0)$ болсун. Мында $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция. Мындан $\frac{df}{d\varphi}(x_0) = 0$ алабыз.

Далилдөө: x_0 чекити өсүү (кемүү) чекити болушу мүмкүн эмес. Анда ошол чекиттеги δ-аймагы үчүн $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)} > 0$ (тиешелүү түрдө $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)} < 0$) болот.

Бирок $\frac{df}{d\varphi}(x_0) > 0$ барабарсыздыгы болушу мүмкүн эмес. $\frac{df}{d\varphi}(x_0) = 0$ формуланы кабыл алып, далилдөө керек болот.

Роллдун жалпыланган теоремасы: $y = f(x)$ функциясы төмөнкү шарттарды канааттандырсын:

1) $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз;
2) (a,b) интервалында өсүүчү $\varphi(x)$ функциясында дифференцирленет;
3) кесиндинин акыркы чекитинде бирдей маанини алат, б.а. $f(a) = f(b)$;

Анда кесиндинин ичинде $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусу нөлгө барабар болгон жок дегенде бир $\xi \in (a, b)$ чекити жашайт.

$$\frac{df}{d\varphi}(\xi)=0\,.$$

Далилдөө: Вейерштрасстын теоремасынын негизинде функция кесиндиде үзгүлтүксүз жана анда өзүнүн эң чоң M, ошондой эле эң кичине m маанисине умтулат. Эгерде алар $[a,b]$ кесиндисинин акыркы чекитине умтулса, анда эреже боюнча алар барабар болот (б.а. $M=m$), бул функциянын $[a,b]$ кесиндисинде дайыма бирдей экенин билдирет. Анда

$$\frac{df}{d\varphi}(x)$$

туундусу кесиндинин бардык чекиттеринде нөлгө барабар. Эгерде максималдык же минималдык маанилердин жок дегенде бири кесиндинин ичиндеги чекитке умтулса (б.а $m<M$) болсо, анда $\frac{df}{d\varphi}(x)$ туундусу Ферманын жалпыланган теоремасынын негизинде тиешелүү чекитте нөлгө барабар.

Кошинин жалпыланган теоремасы: $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүкүз жана анын ичинде $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы боюнча дифференцирленсин. Бардык $x\in[a,b]$ үчүн $\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\neq 0$ болсун. Анда (a,b) интервалында

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\left[\frac{df(c)}{d\varphi(c)}\Big/\frac{dg(c)}{d\varphi(c)}\right]$$

түрүндөгү c чекити табылат.

Далилдөө: $\frac{dg(c)}{d\varphi(c)}\neq 0$ экендигин эске алып, талап кылынган барабардыкты ага эквиваленттүү түрдө

$$(f(a)-f(b))\frac{dg(c)}{d\varphi(c)}-(g(a)-g(b))\frac{df(c)}{d\varphi(c)}=0$$

алабыз. Акыркы барабардыктын сол жагынан $H(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусунун $x=c$ чекитиндеги маанисин көрүүгө болот. Мында

$$H(x)=g(x)(f(a)-f(b))-f(x)(g(a)-g(b))$$

Ушундай жол менен $H'(x)=0$ болгондо, бизге c чекитинин бар экенин далилдөө жетиштүү болот. Бирок $H(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинин ички чекиттеринде дифференцирленет жана

$$H(a)=H(b)=-g(a)f(b)+f(a)g(b)$$

болот. Ошондуктан Роллдун жалпыланган теоремасынан $c\in[a,b]$ чекити жашайт жана $H'(c)=0$ далилденет.

Натыйжа 1 (Лагранждын жалпыланган теоремасы): $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана $\varphi(x)$ өсүүчү функциясы (a,b) интервалында дифференцирленсин. Анда төмөнкү формула

$$f(a)-f(b)=\frac{df(c)}{d\varphi(c)}(\varphi(a)-\varphi(b)),$$

орун алат. Мында c - бул кесиндидеги кандайдыр бир ички чекит.

Далилдөө: $g(x)=\varphi(x)$ болгондо Кошинин жалпыланган теоремасынын айрым бир учуру болот. Бул натыйжа жалпыланган чектүү өсүндү формуласы деп атайбыз.

Эми $\varphi(x)$ функциясы$[a,b]$ кеиндисинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун дейли.

Теорема 1.4: Бардык $x\in(a,b)$ үчүн $\frac{df}{d\varphi}(x)=0$ болсун. Анда $f(x)=const=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ болот.

Далилдөө: Лагранждын жалпыланган теоремасынан

$$\Delta f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{df}{d\varphi}(c)\left(\varphi(x)-\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

алабыз.Мындан

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad x\in(a,b)$$

келип чыгат. Теорема далилденди.

Теорема 1.5: $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча (a,b) интервалында дифференцирленсин. $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында кемибеши үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x) \geq 0\,, \quad \forall x \in (a,\, b)$$

аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Далилдөө: Зарыл шарт: $f(\,x)$ функциясынын кемибөөсүнүн шарты

$$\frac{\Delta f\,(x)}{\Delta \varphi(x)} \geq 0$$

эквиваленттүү. Барабарсыздыкта пределге өтүп,

$$\frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} \geq 0$$

алабыз.

Жетиштүү шарт: Эгерде

$$\frac{df}{d\varphi}(x) \geq 0$$

болсо, анда Лагранждын жалпыланган теоремасынын негизинде $c \in (a, b\,)$ үчүн

$$\frac{f\,(x + \Delta x) - f\,(x)}{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)} = f^{'}(c) \geq 0$$

болот, $f(\,x)$ функциясы $(a,\, b)$ интервалында кемибейт. Теорема далилденди.

Теорема 1.6: Эгерде $(a,\, b)$ интервалында

$$\frac{df}{d\varphi}(x) > 0$$

болсо, анда $f(\,x)$ функциясы $(a,\, b)$ интервалында монотондуу өсөт.

Далилдөө: Лагранждын жалпыланган теоремасынын негизинде $\Delta x > 0$ үчүн

$$\Delta f\,(x) = \frac{df}{d\varphi}(c)\Delta\varphi(x) > 0$$

болорун далилдөө керек.

Теорема 1.7: $f(x)$ функциясы (a,b) интервалында $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин. Анда $(a,\, b)$ интервалында $f(x)$ функциясы так өсүүчү болушу үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x) \geq 0$$

шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү, ошондой эле $\frac{df}{d\varphi}(x)$, (a,b) интервалынын ичинде жаткан эч кандай $[a_1, b_1]$ кесиндисинде нөл болбойт.

Далилдөө: Зарыл шарт (карама-каршылыктан): Эгерде теореманын шарты аткарылбаса, анда кээ бир $x_0 \in (a, b)$ чекити үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x_0) < 0$$

же бардык $x \in [a_1, b_1]$ үчүн

$$\frac{df}{d\varphi}(x) \equiv 0$$

болот. Анда биринчи учурда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын өсүүчү, экинчи учурда $[a_1, b_1]$ кесиндисинде $f(x) = const$ болот. Бул $f(x)$ функциясынын өсүү шартына карама-каршылык.

Жетиштүү шарт. Каалагандай $a_1 < b_1$ үчүн төмөнкү

$$\frac{df}{d\varphi}(x) \geq 0$$

шарттан

$$f(b_1) - f(a_1) = \frac{df}{d\varphi}(c)(\varphi(b_1) - \varphi(a_1)) \geq 0$$

алабыз. Мында $a_1, b_1 \in (a, b)$, б.а. $f(x)$ функциясы кемибейт.

$f(x)$ функциясынын өсүүчү экенин көрсөтөлү. $b_1 > a_1$ үчүн $f(a_1) = f(b_1)$ болбосун. $[a_1, b_1]$ кесиндисинде $f(x)$ функциясынын кемибешинен $f(x) = const$ андан (a_1, b_1) де

$$\frac{df}{d\varphi}(x) = 0$$

алабыз. Бул теореманын шартына карама-каршы. Ошентип, Теорема 1.7 толук далилденди.

Тейлордун жалпы түрдөгү калдык мүчөнү камтыган жалпыланган формуласы:

$f(x)$ функциясы (a, b) интервалында $n-1$ даражада дифференцирленсин. x_0 жана x_1 чекиттери бул интервалдын каалагандай эки чекити болсун. Анда x_0 жана x_1 чекиттеринин арасында каалагандай оң c чекити үчүн

$$r_n(x_1) = f(x_1) - f_n(x_0, x_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)-\varphi(c)}\right)^{\alpha}(\varphi(x_1)-\varphi(c))^{n+1}\frac{f_{\phi}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

жашайт. Эске салсак,

$$f_n(x_0, x_1) = f(x_0) + \frac{f_{\varphi}'(x_0)}{1!}\left(\varphi(x)-\varphi(x_0)\right) + \ldots + \frac{f_{\varphi}^{(n)}(a)}{n!}\left(\varphi(x)-\varphi(x_0)\right)^n .$$

Далилдөө: $x_1 > x_0$ болсун. H менен төмөнкү барабардыкты белгилейли.

$$H = \frac{f(x_1) - f_n(x_0, x_1)}{(\varphi(x_1) - \varphi(x_0))^n}$$

Бизге, (x_0, x_1) интервалында төмөнкү түрдөгү c чекити бар экенин далилдөө керек.

$$H = \frac{n+1}{\alpha}\left(\varphi(x_1)-\varphi(c)\right)^{n+1-\alpha}\frac{f_{\varphi}^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

Муну Роллдун жалпыланган теоремасына таянып далилдейбиз. H менен белгиленген барабардыкты төмөнкү түрдө жазып алсак болот:

$$f(x_1) - f_n(x_0, x_1) - H\left(\varphi(x_1) - \varphi(x_0)\right)^{\alpha} = 0$$

$[x_0, x_1]$ де аныкталган $\psi(x)$ функциясын карайлы.

$$\psi(x) = f(x_1) - f_n(x, x_1) - H\left(\varphi(x_1) - \varphi(x)\right)^{\alpha} = 0$$

Анда $\psi(x_0) = 0$ экенин көрүүгө болот. Андан башка $\psi(x)$ функциясы (x_0, x_1) де $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин жана $[x_0, x_1]$ де үзгүлтүксүз. Ошондой эле $\psi(x_1) = 0$ дө $f_n(x_1, x_1) = f(x_1)$ барабардыгы орун алат. Ошондой эле Роллдун жалпыланган теоремасы боюнча (x_0, x_1) интервалынын кээ бир c чекитинде $\psi'_{\varphi}(x)$ туундусу нөлгө барабар, б.а. $c = 0$, $c \in (x_0, x_1)$ болгондо $\psi'_{\varphi}(x) = 0$.

$\psi'_{\varphi}(x)$ туундуну толук түрдө жазып алалы:

$$\psi'_{\varphi}(x) = \left(f(x) + \frac{f_{\varphi}(x)}{1!}(\varphi(x_1) - \varphi(x)) + \ldots + \frac{f_{\varphi}^{(n)}(x)}{n!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^n \right)$$

$s = 1, ..., n$ болгондо,

$$\left(\frac{f_{\varphi}^{(s)}(x)}{s!} (\varphi(x_1) - \varphi(x))^s \right)'_{\varphi} = \frac{f_{\varphi}^{(s+1)}(x)}{s!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^s - \frac{f_{\varphi}^{(s)}(x)}{(s-1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^{s-1}$$

анда

$$\psi'_{\varphi}(x) = \alpha H(\varphi(x_1) - \varphi(x))^{\alpha-1} - \frac{f_{\varphi}^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x))^n.$$

Мындан $x = c$ чекитин алабыз

$$H = \frac{n+1}{\alpha}(\varphi(x_1) - \varphi(c))^{n+1-\alpha} \frac{f_{\varphi}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$x_1 < x_0$ учуру да ушул сыяктуу далилденет. Теорема далилденди.

Тейлордун жалпыланган формуласынын жекече учуру:

1. Лагранждын жалпыланган формадагы калдык мүчөсү $(\alpha = n+1)$. Бул учурда

$$r_n(x_1) = \frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - (x_0))^{n+1} \, .$$

2. Кошинин жалпыланган формадагы калдыгы ($\alpha = 1$) .

$$r_n(x_1) = \frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x_0))(\varphi(x_1) - \varphi(c))^n \, ,$$

$$c = x_0 + \theta\,(x_1 - x_0), \quad 0 < \theta < 1, \; 1 - \theta = (x_1 - c)\,/\,(x_1 - x_0) \, .$$

Тейлордун жалпыланган формуласынын Пеано түрүндөгү калдык мүчөсү менен колдонуу пределди эсептөөгө ыңгайлуу.

Экстремумдар

Биздин андан аркы максатыбыз маселени чыгарууда берилген теорияны колдонуу, изилдөөгө байланыштуу функцияга кайрылуу. Алардын бири- функциянын локалдык жана глобалдык экстремум маселесин табуу. Буга чейин катар сыяктуу берилгендерди далилдедик. Эске салсак, бул түшүктөрдү алдыда колдонобуз.

1. $f_\varphi'(x) = 0$ болсо, x чекити стационардык чекит болот($f(x)$ боюнча).
2. (a,b) интервалында функциянын $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленишинин кемибешинин критерийи: (a,b) интервалында $f(x)$ функциясын кемибешинин зарыл жана жетиштүү шарты болуп, (a, b) интервалында $f_\varphi'(x) \geq 0$ болушу эсептелет.
3. Өсүүчү болушунун критерийи: $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында өсүшүнүн зарыл жана жетиштүү шарты болуп, (a,b) интервалында $f_\varphi'(x) \geq 0$ болушу жана андан сырткары $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ интервалында $f_\varphi'(x) \neq 0$ болушу эсептелет.
4. $f(x)$ функциясынын өсүүчү болушунун жетиштүү шарты болуп, бардык $x \in (a,b)$ үчүн $f_\varphi'(x) > 0$ болушу эсептелет.

Теорема 1.8: $f(x)$ функциясы стационардык x_0 чекитинин кээ бир аймагында $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин. б.а. $f'_{\varphi}(x_0)=0$. Анда

1) эгерде x_0 чекитинин сол жагында $f'_{\varphi}(x)>0$ жана x_0 чекитинин оң жагында $f'_{\varphi}(x)<0$ болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын локалдык максимум чекити деп аталат.
2) эгерде x_0 чекитинин сол жагында $f'_{\varphi}(x)<0$ жана x_0 чекитинин оң жагында $f'_{\varphi}(x)>0$ болсо, анда x_0 чекити $f(x)$ функциясынын локалдык минимум чекити деп аталат.
3) эгерде x_0 чекитинде $f'_{\varphi}(x)$ функциясы оң жана сол жагында бирдей белгиге ээ болсо, анда x_0 чекити экстремум чекитке ээ болбойт.

Далилдөө:

1) Лагранждын жалпыланган теоремасынан,

$$f(x)=f(x_0)+f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))$$

алабыз. Мында c чекити x_0 жана x чекиттеринин арасында жатат. Шарттан

$$f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))<0$$

келип чыгат. Мындан $f(x)<f(x_0)$ алабыз. Талап кылынган далилдөө.

Далилдөө 2) ушул далилдөөнүн аналогиясы болот.

3) Эгерде x_0 чекитинин оң жана сол жагында $f'_{\varphi}(x)>0$ болсо, анда сол жагында $f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))<0$, оң жагында $f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))>0$ болот. Мындан $x_1<x_0<x_2$ үчүн $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ талап кылынган далилдөөнү алабыз.

$f'(x)<0$ учуру буга аналогия катары каралат.

Теорема 1.9: $f(x)$ функциясы x_0 чекитинин кээ бир аймагында үзгүлтүксүз болсун жана ал чекиттин проколотой аймагында $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин. Эгерде $f'_{\varphi}(x)$ функциясы x_0 чекитинин сол жагынан оң жагына өткөндө белгисин + тан – ка өзгөртсө, $f(x)$ локалдык максимумга ээ,

эгерде – тан + ка өзгөртсө, анда $f(x)$ локалдык минимумга ээ, эгерде белгисин өзгөртпөсө, анда локалдык экстремуму жок.

Бул теореманын далилдөө Теорема 1.8 ди далилдөө сыяктуу болот. Биз $x = x_0$ чекитинде $f(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ боюнча туундусунун жашашын эч жерде колдоно элекбиз.

Теорема 1.10: $f'_{\varphi}(x_0) = 0$ болсун жана $f_{\varphi}^{'}(x_0)$ жашасын. Анда,

1) эгерде $f'_{\varphi}(x_0) < 0$ болсо, анда x_0-локалдык максимум чекити болот.
2) эгерде $f'_{\varphi}(x_0) > 0$ болсо, анда x_0-локалдык минимум чекити болот.

Далилдөө:

$f'_{\varphi}(x_0) < 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекитинде $f'_{\varphi}(x)$ кемийт жана $f'_{\varphi}(x_0) = 0$ болгондо $f'_{\varphi}(x)$ функциясы x_0 дун сол жагынан оң жагына өткөндө белгисин + тан – ка өзгөртөт. Ошондуктан, Теорема 1.9 да x_0 чекити локалдык максимум болот.

$f'(x_0) > 0$ болсо, анда $x = x_0$ чекитинде $f'_{\varphi}(x)$ өсөт. Теорема 1.9 дан x_0 чекити локалдык минимум чекити болот. Теорема далилденди.

Теорема 1.11:

$$f'_{\varphi}(x_0) = \cdots = f_{\varphi}^{(2k-1)}(x_0) = 0, \quad f_{\varphi}^{(2k)}(x_0) \neq 0$$

болсун, анда

1) эгерде $f_{\varphi}^{(2k)}(x_0) < 0$ болсо, анда x_0 -локалдык максимум чекити болот.

2) эгерде $f_{\varphi}^{(2k)}(x_0) > 0$ болсо, анда x_0 -локалдык минимум чекити болот.

Далилдөө:

1) $k = 1$ болгондо Теорема 1.10 го келет. $k > 1$ болсун. $f'_{\varphi}(x)$ функциясын Тейлордун жалпыланган формуласынын негизинде төмөнкүдөй жазып алабыз.

$$f'_{\varphi}(x) = f'_{\varphi}(x_0) + \frac{f'_{\varphi}(x_0)}{1!}(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \ \dots \ + \frac{f_{\varphi}^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-3)!}(\varphi(x) - \varphi(x_0))^{2k-3} +$$

$$+ \frac{f_{\varphi}^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-2)!}(\varphi(x) - \varphi(x_0))^{2k-2}.$$

Мындан

$$f'_{\varphi}(x) = \frac{f_{\varphi}^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(\varphi(x) - \varphi(x_0))^{2k-2}$$

болот. Демек,

$f_{\varphi}^{(2k)}(x_0) < 0$ болгондо $f_{\varphi}^{(2k-1)}(x)$ кемийт, $f_{\varphi}^{(2k-1)}(x)$ функциясы x_0 чекитинде белгисин + тан – ка өзгөртсө, анда $f'_{\varphi}(x)$ белгисин + тан – ка өзгөртөт. Ошондуктан,

x_0 - локалдык максимум чекити болот. 2-учур ушуга аналогия катары каралат. Теорема далилденди.

1.8 $\mathbb{R}^n$ де дифференцирленүүчү функция

$f(x)$ функциясы $x = a \in \mathbb{R}^n$ чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталган болсун. Мында $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ функциясы $x = a \in \mathbb{R}^n$ чекитинин кандайдыр бир аймагында аныкталган өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун.

Аныктама 1.7: $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги $\Delta f(x)$ өсүндүсү деп, $\Delta f(x) = f(x) - f(a)$ айырмасы аталат. Δx айырмасы x аргументтин өсүндүсү деп аталат, ал эми $\Delta\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ айырмасы $\varphi(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))$ вектор-функциянын өсүндүсү деп аталат. Мында $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Δx векторунун узундугу $|\Delta x|$ менен белгиленет жана төмөнкүгө барабар.

$$\rho(x,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2}.$$

Аныктама 1.8: $\Delta\varphi(x)$ өсүндүсүнөн сызыктуу функция деп, $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги $\varphi(x)$ боюнча $d_\varphi f(x)$ дифференциалы деп аталат, эгерде $\Delta f(x)$ өсүндүсү $\Delta x \to 0$ болсо, анда

$$\Delta f(x) = d_\varphi f(x) + o\left(\left|\Delta\varphi(x)\right|\right)$$

түрүндө жазууга болот.

Эгерде $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча $d_\varphi f(x)$ дифференциалы жашаса, анда $f(x)$ функциясы $\varphi(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n))$ боюнча дифференцирленет дейбиз.

Лемма 1.1: $f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсе, анда ошол чекитте үзгүлтүксүз деп аталат.

Далилдөө: $\Delta x \to 0$ умтулганда $\Delta f(x)$ да нөлгө умтуларын көрүүгө болот. $d_\varphi f(x)$ сызыктуу функция болгондуктан, аны төмөнкү түрдө жазып алууга болот.

$$d_\varphi f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta\varphi_i(x_i),$$

мында, A_i-чыныгы сандар жана $\Delta\varphi_i(x_i) = \varphi_i(x_i) - \varphi_i(a_i)$

Эгерде $f(x) = \varphi_i(x_i)$ болсо, анда $d_\varphi f(x) = d\varphi_i = \Delta\varphi_i(x_i)$ болот.

Теорема 1.15: $f(x)$ функциясы $x = a$ чекитинде $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленсин, анда $x_i = a_i$, $i = 1,...,n$ чекитинде координаталык $\psi_1(x_i) = f(a_1,..., x_i, ...a_n)$ функциясы $\varphi_i(x_i)$ боюнча дифференцирленсин. Ошондой эле

$$A_i = \frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i).$$

Далилдөө: Формулада $x = a$ чекитинде $\Delta f(x)$ өсүндүсү үчүн ал аркылуу дифференциал алып $x_r = a_r$ алабыз, мында $r \neq i$. Мындан

$$\Delta f(x) = A_i \Delta\varphi_i(x_i) + o\left(\left|\Delta\varphi_i(x_i)\right|\right)$$

алабыз. Анда $\psi_1(x_i)$ функциясынын аныктамасына таянсак,

$$f(x) - f(a) = \psi_1(x_i) - \psi_1(a_i) = A_i \Delta\psi_1(x_i) + o\left(\left|\Delta\psi_1(x_i)\right|\right)$$

келип чыгат, б.а.

$$A_i = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\psi_i(x_i) - \psi_i(a_i)}{\varphi_i(x_i) - \varphi_i(a_i)} = \frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i).$$

болот.

Аныктама 1.9: $\frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i)$ туундусу жашаса, анда $x = a$ чекитинде $f(x)$ функциясынын $\varphi_i(x_i)$ боюнча жекече туундусу деп аталат. Биринчи өзгөрмөсү боюнча төмөнкүдөй белгиленет.

$$\frac{d\psi_i}{\partial\varphi_i}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial\varphi_i}(\mathrm{a}) = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial\varphi_i}\right|_{x=a}.$$

Натыйжа 1.3: $f(x)$ функциясынын $x = a$ чекитиндеги $\varphi(x)$ боюнча дифференциалын бир мааниде төмөнкүдөй жазып алсак болот.

$$\left.d_\varphi f(x)\right|_{x=a} = \frac{\partial f(a)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1 + \ldots + \frac{\partial f(a)}{\partial\varphi_n}\Delta\varphi_n$$

Далилдөөсү ачык көрүнүп турат. Демек, функциянын $\varphi(x)$ боюнча чекитте дифференцирлөөнүн зарыл шартынан ошол чекитте $\varphi_i(x_i)$ боюнча бардык жекече туундулары жашайт десек болот.

Теорема 1.16: $x = a$ чекитинин кээ бир аймагында анын бардык жекече туундулары $\frac{\partial f(x)}{\partial\varphi_i}$, $i = 1,\ldots,n$, жашасын, анда бул туундулар $x = a$ чекитинде үзгүлтүксүз болот. Анда $f(x)$ функциясы $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленет.

Далилдөө: Жөнөкөйлүк үчүн $n = 2$ деп алалы. $f(x, y)$ функциясынын (a, b) чекитиндеги $\Delta f(x, y)$ өсүндүсүн төмөнкү түрдө жазып алсак болот:

$$\Delta f(x,y) = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - \big(f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y)\big) - \big(f(a, b+\Delta y) - f(a,b)\big)$$

Эки кашаанын айырмасынын ар биринен Лагранждын жалпыланган чектер формуласын колдонууга болот, каралган аймакта $f(x)$ функциясы (a, b) чекитинде $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(y)$ боюнча үзгүлтүксүз жекече туундуга ээ болот, мында $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(y)$ функциялары үзгүлтүксүз, өсүүчү функция. Мындан

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a+\xi\,\Delta\varphi_1, b+\Delta y)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1 + \frac{\partial f(a_1, b+\eta\,\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2$$

алабыз. Мында $\Delta\varphi_1 = \varphi_1(a+\Delta x) - \varphi_1(a)$, $\Delta\varphi_2 = \varphi_2(b+\Delta y) - \varphi_2(b)$, ξ, η - каалагандай турактуу, $0 < \xi, \eta < 1$.

Андан кийин $\Delta x \to 0$ жана $\Delta y \to 0$ болгондо жекече туундунун үзгүлтүксүздүгүнөн

$$\frac{\partial f(a+\xi\;\Delta\varphi_1, b+\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_1} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1} + o(1),$$

$$\frac{\partial f(a, b+\eta\,\Delta y)}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_2} + o(1).$$

алабыз. Мындан төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1 + \frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2 + o\big(|\Delta\varphi_1| + |\Delta\varphi_2|\big).$$

себеби,

$$|\Delta\varphi_1| \le |\Delta\varphi|, \quad |\Delta\varphi_2| \le |\Delta\varphi|, \qquad \Delta\varphi = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2), \quad |\Delta\varphi| = \sqrt{|\Delta\varphi_1|^2 + |\Delta\varphi_2|^2},$$

Анда

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1 + \frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2 + o\big(|\Delta\varphi|\big) = d_\varphi f(x,y) + o\big(|\Delta\varphi|\big),$$

алабыз. б.а. $f(x)$ функциясы $(x,y) = (a,b)$ чекитинде дифференцирленет. Теорема далилденди.

1.2 Татаал функциянын дифференциалы

Теорема 1.17: $u(x)=(u_1(x),u_2(x),...,u_m(x))$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ чагылдырууу менен берилген $x=a=(a_1,..., a_n)$ чекитинин аймагында аныкталган жана ошол чекитте $\varphi(x)$ функциясы боюнча дифференцирленген функция болсун. Каалагандай $\varepsilon>0$ саны үчүн $u(x)$ чагылдыруусу кээ бир δ–аймагында $o(a,\delta)$, ε-аймагындагы $b=u(a)$ чекитин камтыйт. Бардык $y=o(b,\varepsilon)$ чекити үчүн b чекитинде дифференцирленген сандык $f(y)$ функциясы аныкталган. Анда $x=a$ чекитинде $h(x)=f(u(x))$ татаал функциясы $\varphi(x)$ боюнча дифференцирленет, себеби төмөнкү барабардыкка ээ.

$$\frac{\partial h(x)}{\partial \varphi_s}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \varphi_s}+...+\frac{\partial f}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial \varphi_s}, \qquad s=1,...,n.$$

Мында $\varphi_s(x)$ боюнча жекече туунду $x=a$ чекитинде, y_l, $l=1,...,m$ боюнча жекече туунду $y=b$ чекитинде каралган.

Далилдөө: $y=b$ чекитинде $f(y)$ функциясын эске алып, аргументтин каалагандай $\Delta y=y-b$ өсүндүсү үчүн функциянын Δf өсүндүсүн төмөнкү түрдө жазууга болот.

$$\Delta f=df+o(|\Delta y|) \tag{1.7}$$

Мында

$$df=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_i.$$

Бирок $\Delta y=(\Delta y_1,..., \Delta y_m)$, $b=(b_1,..., b_m)$,

$$\Delta y_i=u_i(x)-u_i(a)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial u_i(a)}{\partial \varphi_s}\Delta\varphi_s+o(|\Delta\varphi|). \tag{1.8}$$

Анда (1.7) жана (1.8) формуласын эске алып,

$$\Delta h(x) = \Delta f = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial \varphi_s}\right)\Delta\varphi_s + o(\Delta\varphi)$$

алабыз.

Мындан теорема тастыктоо келип келип чыгат. Теорема 1.17 далилденди.

Натыйжа 1.4 (Дифференцирлөө эрежеси)**:** Төмөнкү формулалар орун алат.

1) $d_\varphi(Cu) = Cd_\varphi u, \ \forall C \in \mathbb{R};$

2) $d_\varphi(u \pm v) = d_\varphi u \pm d_\varphi v;$

3) $d_\varphi(uv) = ud_\varphi v + vd_\varphi u;$

4) $d_\varphi\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vd_\varphi u - ud_\varphi v}{v^2}, \ v(a) \neq 0.$

Далилдөө: Формула 3- нү далилдөө менен гана чектелебиз.

$z = z(u, v) = uv$ болсун, анда

$$d_\varphi z = \frac{\partial z}{\partial u}d_\varphi u + \frac{\partial z}{\partial v}d_\varphi v = vd_\varphi u + ud_\varphi v$$

болот. 3-касиет далилденди [1].

2-БӨЛҮМ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КЛАССИФИКАЦИЯСЫ

Математиканын бир бөлүмү болгон интегралдык эсептөөлөр - ар түрдүү математикалык жана физикалык маселелерди чыгарууда колдонулат. Интегралдык тендемелер ар түрдүү өзгөчөлүктөрүнө жараша сызыктуу жана сызыктуу эмес, бир тектүү жана бир тектүү эмес, түзүлүшүнө карата түрлөргө бөлүнөт. Биз бул бөлүмдө Вольтерра-Стилтьестин биринчи жана экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелерине токтолобуз [10]. Өсүүчү функциянын туундусу түшүнүгүнүн жардамы менен Вольтерра-Стилтьестин биринчи жана экинчи түрдөгү интегралдык тендемелерине аныктама берилген [2]. Ал эми өсүүчү функциянын туундусу түшүнүгүнө биринчи бөлүмдө токтолдук.

Теорема 2.1: $\varphi(t)$ функциясы G- да өсүүчү функция болсун. Ал эми $f(t,s)$ жана $f'_{\varphi(t)}(t,s)$, $G_1=\{(t,s): t_0 \le s \le t \le T\}$ областында же $G_2=\{(t,s): t_0 \le s \le t < T\}$ областында үзгүлтүксүз болсун. Анда бардык $t \in G$ үчүн

$$F(t)=\int_{t_0}^{t} f(t,s)d\varphi(s),$$

болот. Мында $f'_{\varphi(t)}(t,s)$- $\varphi(t)$ функциясы боюнча туунду б.а.

$$f'_{\varphi(t)}(t,s)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t,s)-f(t,s)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}.$$

Анда $F'_{\varphi}(t)$ туундусу жашайт б.а. $F(t)$ функциясынын $\varphi(t)$ функциясы боюнча туундусу болот жана

$$F'_{\varphi}(t)=f(x,x)+\int_{t_0}^{t} f'_{\varphi(t)}(t,s)d\varphi(s), \quad t\in G, \tag{2.1}$$

формуласы орун алат. Мында

$$F'_{\varphi}(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{F(t_0+\Delta t)-F(t_0)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}, \quad F'_{\varphi}(T)=\lim_{\Delta t\to 0^-}\frac{F(T+\Delta t)-F(T)}{\varphi(T+\Delta t)-\varphi(T)},$$

$$f'_{\varphi(t)0}(t,s)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{f(t_0+\Delta t,s)-f(t_0,s)}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)},\quad f'_{\varphi(t)}(T,s)=\lim_{\Delta t\to 0^-}\frac{f(T+\Delta t,s)-f(T,s)}{\varphi(T+\Delta t)-\varphi(T)}.$$

Далилдөө: $\varphi(t)$ боюнча туундунун аныктамасынын негизинде

$$F'_{\varphi}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int_{t_0}^{t+\Delta t}\left[f(t+\Delta t,s)-f(t,s)\right]d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t+\Delta t}f(t,s)d\varphi(s)+\right\}\Big/\left[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int_{t_0}^{t+\Delta t}\frac{f(t+\Delta t,s)-f(t,s)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}d\varphi(s)+f(t,t)+\right.$$

$$\left.+\left[\int_{t_0}^{t+\Delta t}\left(f(t,s)-f(t,t)\right)d\varphi(s)\right]\Big/\left[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\right]\right\}=$$

$$=f(t,t)+\int_{t_0}^{t}f'_{\varphi(t)}(t,s)d\varphi(s)+\lim_{\Delta t\to 0}\psi(t,\Delta t),$$

алабыз. Мында

$$\psi(t,\Delta t)=\left(\int_{t}^{t+\Delta t}\left(f(t,s)-f(t,t)\right)d\varphi(s)\right)\Big/\left[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\right].$$

Мындан, $\varphi(t)$ функциясы G - да өсүүчү функция экендигин эске алып, төмөнкүнү алабыз.

$$\psi(t,\Delta t)\le\left[\omega_f(\Delta t)\left(\int_{t}^{t+\Delta t}d\varphi\right)\right]\Big/\left[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\right]=\omega_f((\Delta t)),$$

мында $\omega_f(\delta)$ - $f(t,s)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн модулу, б.а.

$$\omega_f(\delta)=\sup_{|x-y|\le\delta}\left|f(x)-f(y)\right|,$$

$$x=(t_1,s_1),\qquad y=(t_2,s_2),\qquad |x-y|=\sqrt{(t_1-t_2)^2+(s_1-s_2)^2}.$$

Бизге $\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0$ белгилүү. Ошон үчүн

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\psi(t,\Delta t)\right|\le\lim_{\Delta t\to 0}\omega_f\left(|\Delta t|\right)=0$$

болот. Мындан (2.1) формуласы далилденди.

Теорема 2.2 (Дирихленин жалпыланган формуласы): $\varphi(t)$ функциясы G - да өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун. Ал эми $f(t,s)$ $G_1=\{(t,s): t_0\le s\le t\le T\}$ областында же $G_2=\{(t,s): t_0\le s\le t<T\}$ областында үзгүлтүксүз болсун. Анда бардык $t\in G$ үчүн

$$\int_{t_0}^{t}\left[\int_{0}^{s} f(s,\tau)d\varphi(\tau)\right]d\varphi(s)=\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} f(s,\tau)d\varphi(s)\right]d\varphi(\tau) \qquad (2.2)$$

формуласы орун алат.

Далилдөө: (2.2) формуласынын оң жагын $u(t)$ менен , ал эми сол жагын $v(t)$ менен белгилейбиз. Бизге бардык $t\in G$ үчүн $u(t)=v(t)$ экендигин далилдөө жетиштүү.

$$u_{\varphi}'=\left(\int_{0}^{t}\left[\int_{0}^{t} f(s,\tau)d\varphi(\tau)\right]d\varphi(s)\right)'_{\varphi(t)}=\int_{0}^{t} f(t,\tau)d\varphi(\tau),$$

$$v_{\varphi}'=\left(\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} f(s,\tau)d\varphi(s)\right]d\varphi(\tau)\right)'_{\varphi(t)}=\left(\int_{t_0}^{t}\left[\int_{\tau}^{t} f(s,\tau)d\varphi(s)\right]'_{\varphi(t)}d\varphi(\tau)\right)=\int_{t_0}^{t} f(t,\tau)d\varphi(\tau).$$

Мындан бардык $t\in G$ үчүн $\left[u(t)-v(t)\right]'_{\varphi(t)}=0$ экендиги келип чыгат. Анда биринчи бөлүмдөгү теореманын негизинде $u(t)-v(t)=C$, $C-const$ алабыз. Бирок $u(t_0)-v(t_0)=0$ болот. Ошондуктан бардык $t\in G$ үчүн $u(t)-v(t)=0$ болот. Теорема 2.2 далилденди.

Теорема 2.3 (Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгы): $\varphi(t)$ функциясы G - да өсүүчү - үзгүлтүксүз функция болсун. $u(t)$ - G областында терс эмес үзгүлтүксүз функция болсун жана $t\in G$ үчүн төмөнкү барабарсыздык аткарылат.

$$u(t)\le a+\int_{t_0}^{t} cu(s)d\varphi(s),$$

мында a жана c терс эмес белгилүү турактуулар. Анда бардык $t\in G$ үчүн

$$u(t)\le a\exp\left[c\left(\varphi(t)-\varphi(t_0)\right)\right] \qquad (2.3)$$

барабарсыздыгы орун алат.

Далилдөө: Төмөнкүдөй белгилөө киргизебиз.

$$v(t) = a + \int_{t_0}^{t} cu(s)d\varphi(s), \quad t \in G.$$

Анда Теорема 2.1 – дин негизинде

$$v_{\varphi}(t) = cu(t) \leq cv(t), \quad t \in G.$$

алабыз. Мындан $v(t_0) = a$ жана $t \in G$ үчүн $u(t) \leq v(t)$ экендигин эске алуу менен, 0 дон t га чейин интегралдап, талап кылынган (2.3) барабарсыздыгын алабыз. Теорема 2.3 далилденди.

2.1 Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеси

Аныктама 2.1: $\varphi(t)$ функциясы бардык G -да өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, мында $G = [t_0, T]$ $(t_0 < T < \infty)$ же $G = [t_0, T)$ $(T \leq \infty)$.

Төмөнкү интегралдык тендеме

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)d\varphi(s) + f(t) \tag{2.4}$$

Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси деп аталат.

Мында $K(t,s)$ функциясы $G_1 = \{(t,s) : t_0 \leq s \leq t \leq T\}$ областында үзгүлтүксүз белгилүү функция. $f(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында үзгүлтүкүз белгилүү функция. Ал эми $u(t)$, $[t_0, T]$ интервалында изделүүчү функция.

Аныктама 2.2: $\varphi(t)$ функциясы бардык G -да өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, мында $G = [t_0, T]$ $(t_0 < T < \infty)$ же $G = [t_0, T)$ $(T \leq \infty)$.

Төмөнкү интегралдык тендеме

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} K(t,s,u(s))d\varphi(s)+f(t) \qquad (2.5)$$

Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат.

Мында $K(t,s)$ функциясы $G_1=\{(t,s):t_0\le s\le t\le T\}$ областында үзгүлтүксүз белгилүү функция. $f(t)$ функциясы $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүкүз белгилүү функция. Ал эми $u(t)$, $[t_0,T]$ интервалында изделүүчү функция.

2.2.1. Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси

(2.4) интегралдык теңдемесинин ядросу $K(t,s)$ функциясы $G_1=\{(t,s):t_0\le s\le t\le T\}$ областында үзгүлтүксүз функция болсун жана

$$M=\sup_{(t,s)\in G_1}|K(t,s)|$$

болсун. Анда

$$R(t,s)=\int_{s}^{t} K(t,\tau)R(\tau,s)d\varphi(\tau)+K(t,s), \quad (t,s)\in G_1 \qquad (2.6)$$

интегралдык теңдеменин чыгарылышы болгон $R(t,s)$ - $K(t,s)$ ядросунун резольвентасы деп аталат.

Теорема 2.4: $\varphi(t)$ функциясы G - да өсүүчү - үзгүлтүксүз функция болсун. Ядро $K(t,s)$ функциясы $G_1=\{(t,s):t_0\le s\le t\le T\}$ областында үзгүлтүксүз функция жана $f(t)$ функциясы $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүкүз функция болсун. Анда,

1. (2.6) теңдемеси $C(G_1)$ мейкиндигинде жалгыз $R(t,s)$ чыгарылышына ээ болот;
2. (2.4) теңдемеси $C[t_0,T]$ мейкиндигинде жалгыз $u(t)$ чыгарылышына ээ болот жана ал чыгарылыш төмөнкү түрдө болот.

$$u(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} R(t,\tau) f(\tau) d\varphi(\tau), \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.7}$$

Далилдөө:

1) Биринчи (2.6) теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгын далилдейбиз. $R_1(t, s)$ жана $R_2(t, s)$ - (2.6) теңдемесинин $C(G_1)$ мейкиндигиндеги каалагандай эки чыгарылышы болсун. Анда

$$R_1(t,s) - R_2(t,s) = \int_{s}^{t} K(t,\tau)\left[R_1(\tau,s) - R_2(\tau,s)\right] d\varphi(\tau), \quad (t, s) \in G_1$$

болот. Бул теңдемеден төмөнкүнү алабыз.

$$\left|R_1(t,s) - R_2(t,s)\right| \le \int_{s}^{t} M \left|R_1(\tau, s) - R_2(\tau, s)\right| d\varphi(\tau) + \frac{1}{n},$$

мында $(t,s) \in G_1$, $n \in N$ - натуралдык сандардын көптүгү. Бул жерде Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгын (Теорема 2.3) колдонуп, $n \in N$, бардык $(t, s) \in G_1$ үчүн

$$\left|R_1(\tau, s) - R_2(\tau, s)\right| \le \frac{1}{n} \exp\left\{M\left[\varphi(t) - \varphi(s)\right]\right\} \le \frac{1}{n} \exp\left\{M\left[\varphi(T) - \varphi(t_0)\right]\right\},$$

$n \to \infty$ умтулганда пределге өтүп, акыркы барабарсыздыктан $(t,s) \in G_1$ үчүн $R_1(t,s) - R_2(t,s)$ алабыз.

Эми (2.6) теңдемесинин $C(G_1)$ мейкиндигинде чыгарылышынын жашагандыгын далилдейбиз. (2.6) теңдемесин чыгаруу үчүн удаалаш жакындаштыруу методун колдонобуз.

$$\begin{aligned} &R_0(t, s) = K(t, s), \\ &R_n(t,s) = \int_{s}^{t} K(t,\tau) R_{n-1}(\tau,s) d\varphi(\tau) + K(t,s) \end{aligned} \tag{2.8}$$

мында $n \in N$. Математикалык индукция методу менен (2.8)- дөн бардык $n \in N$ үчүн төмөнкү баалоону алабыз:

$$|R_0(t,s)| \le M,$$
$$|R_n(t,s) - R_{n-1}(t,s)| \le M^{n+1}\frac{[\varphi(t)-\varphi(s)]^n}{n!}.$$
(2.9)

(2.9) баалоосунан бардык $n \in N$ үчүн

$$\sup_{(t,s)\in G_1} |R_n(t,s) - R_{n-1}(t,s)| \le M^{n+1}\frac{[\varphi(T)-\varphi(t_0)]^n}{n!}, \tag{2.10}$$

алабыз. (2.10) баалоосунун негизинде

$$R_0(t,s) + \sum_{n=1}^{\infty}[R_n(t,s) - R_{n-1}(t,s)],$$

бул функционалдык катар G_1 областында $R(t,s)$ ке жакындайт жана $R(t,s)$ (2.6) теңдемесинин $C(G_1)$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышы болот.

2) Биринчи (2.4) теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгын далилдейбиз. Ал үчүн бизге (2.4) теңдемесинин $f(t) \equiv 0$ болгондо нөлдүк гана чыгарылышы бар экендигин далилдөө жетиштүү. $f(t)$ функциясы $[t_0, T]$ областында $f(t) \equiv 0$ болсун. Анда биз (2.4)-төн

$$|u(t)| \le \int_{t_0}^{t} M|u(s)|d\varphi(\tau) + \frac{1}{n}, \quad t \in [t_0, T], n \in N,$$

алабыз. Бул жерде Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгын (Теорема 2.3) колдонуп, $n \to \infty$ пределге өтсөк, $[t_0, T]$ областында $u(t) \equiv 0$ нөлдүк чыгарылышын алабыз.

Эми (2.7) формуласы менен аныкталган $u(t)$ функциясы $C[t_0, T]$ мейкидигинде (2.4) интегралдык теңдемесинин жалгыз чыгарылышы экендигин далилдейбиз.

(2.7) формуласын (2.4) теңдемесине коюуп, $R(t,s)$ (2.6) теңдемесинин чыгарылышы экендигин эске алуу менен Дирихленин жалпыланган формуласын (Теорема 2.2) колдонуп, бардык $t \in [t_0, T]$ үчүн

$$\int_{t_0}^{t} \left| \left[R(t,s) - \int_{s}^{t} K(t,\tau) R(\tau,s) d\varphi(\tau) - K(t,s) \right] \right| f(s) d\varphi(s) = 0,$$

алабыз. Теорема 2.4 далилденди.

Теорема 2.5: $\varphi(t)$ функциясы G - да өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун. $K(t,s)$ функциясы $G_1 = \{(t,s): t_0 \le s \le t \le T\}$ областында үзгүлтүксүз функция жана $f(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында үзгүлтүкүз функция болсун.Анда,

1. (2.6) теңдемесинин чыгарылышы $R(t,s)$ үчүн

$$|R(t,s)| \le M \exp\{M[\varphi(t) - \varphi(s)]\}, \ (t,s) \in G_1$$

баалоосу орун алат.

2. (2.4) теңдемесинин чыгарылышы $u(t)$ үчүн

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t \in [t_0, T]} |u(t)| \le c_0 \|f(t)\|_C \tag{2.11}$$

баалоосу орун алат. Мында $c_0 = \exp\{M[\varphi(t) - \varphi(s)]\}$.

Далилдөө:

1) (2.6) теңдемесинен

$$|R(t,s)| \le \int_{s}^{t} M |R(\tau,s)| d\varphi(\tau) + M, \quad (t,s) \in G_1,$$

алабыз. Бул жерде Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгын (Теорема 2.3) колдонуп, (2.11) баалоосун алабыз.

2) (2.4) теңдемесинен

$$|u(t)| \le \int_{t_0}^{t} M |u(s)| d\varphi(s) + \|f(t)\|_C, \quad t \in [t_0, T]$$

алабыз. Бул жерде Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгын (Теорема 2.3) колдонуп, талап кылынган баалоону алабыз. Теорема 2.5 далилденди.

Теорема 2.6: $\varphi(t)$ функциясы $[t_0, T]$ областында өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун.

$K(t, s) = a(t)b(s)$ жана $a(t), b(t), f(t) \in C\left[t_0, T\right]$ болсун. Анда,

1. (2.6) теңдемесинин чыгарылышы $R(t, s)$ төмөнкү формула менен аныкталат.

$$R(t,s) = a(t)b(s)\exp\left\{\int_s^t a(\tau)b(\tau)d\varphi(\tau)\right\}, \quad (t,s) \in G_1. \tag{2.12}$$

2. (2.4) теңдемесинин чыгарылышы $u(t)$ төмөнкү формула менен аныкталат.

$$u(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} a(t)b(s)\exp\left\{\int_s^t a(\tau)b(\tau)d\varphi(\tau)\right\} f(s)d\varphi(s), \quad t \in \left[t_0, T\right]. \tag{2.13}$$

Далилдөө:

1) (2.12) формуласы менен аныкталган $R(t, s)$ (2.6) теңдемесин канааттандырганын тершеребиз.

$$\int_s^t K(t,\tau)R(\tau, s)d\varphi(s) = \int_s^t a(t)b(\tau)a(\tau)b(s)\exp\left\{\int_s^\tau a(\tau)b(\tau)d\varphi(\tau)\right\} d\varphi(\tau) =$$

$$= a(t)b(s)\exp\left\{\int_s^\tau a(\tau)b(\tau)d\varphi(\tau)\right\}\Bigg|_{\tau=s}^{\tau=t} = R(t,s) - K(t,s).$$

Бул жерде көрүнүп тургандай, $R(t, s)$ (2.6) теңдемесин канааттандырат.

2) Бул формуланын орун алышы (2.7) формуласынан (Теорема 2.4) жана (2.12) формуласынан келип чыгат. Теорема 2.6 далилденди.

2.1.2. Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси

Мындан кийин (2.5) теңдемесинде берилген $K(t, s, u(s))$ функциясы үчүн (M) шарты аткарылат дейбиз, эгерде $K(t, s, u(s))$ - $G_1 \times \mathbb{R}$ областында үзгүлтүксүз функция жана u боюнча L коэффициенти менен Липшицтин шарты аткарылса б.а. каалагандай $(t,s,u_1),(t,s,u_2) \in G_1 \times \mathbb{R}$ үчүн

$$\left|K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)\right| \le L\left|u_1 - u_2\right|.$$

Теорема 2.7: (М) шарты аткарылсын жана $f(t) \in C[t_0, T]$ болсун. Анда,

1. (2.5) теңдемесинин $C[t_0, T]$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ болот.
2. Эгерде $f(t) = f_1(t) \in C[t_0, T]$ болгондо (2.5) теңдемесинин чыгарылышы $u_1(t)$, $f(t) = f_2(t) \in C[t_0, T]$ болгондо (2.5) теңдемесинин чыгарылышы $u_2(t)$ болсо, анда

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_C \le c_1 \|f_1(t) - f_2(t)\|_C \tag{1.14}$$

баалоосу орун алат. Мында $c_1 = \exp\{L[\varphi(T) - \varphi(t_0)]\}$, $\|\cdot\|$- $C[t_0, T]$ мейкиндигинде норма.

Далилдөө:

1) (2.5) теңдемесин чыгаруу үчүн удаалаш жакындаштыруу методун колдонуп чыгарабыз. $n \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0, T]$ үчүн

$$u_0(t) = f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, s, 0)\, d\varphi(s),$$

$$u_n(t) = \int_{t_0}^{t} K(t, s, u_{n-1}(s))\, d\varphi(s) + f(t).$$

(2.15)

(М) шартын эске алып, математикалык индукция методу менен (2.15) – тен төмөнкү баалоону алабыз. $n \in \mathbb{N}$, $t \in [t_0, T]$ үчүн

$$|u_0(t)| \le \sup_{t \in [t_0, T]} \left| f(t) + \int_{t_0}^{t} K(t, s, 0)\, d\varphi(s) \right| = M_0,$$

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \le M_0 L^n \frac{[\varphi(t) - \varphi(t_0)]^n}{n!}.$$

Акыркы баалоонун негизинде төмөнкү функционалдык катар

$$u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(t) - u_{n-1}(t)]$$

$[t_0, T]$ областында $u(t)$ чыгарышка бирдей жакындайт жана $u(t)$ (2.5) интегралдык теңдеменин $[t_0, T]$ областында үзгүлтүксүз чыгарылышы болот. (2.5)

теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгы (2.14) баалоосунан келип чыгат. Андан кийин (2.14) баалоосун далилдейбиз.

2) (M) шартын жана $f(t)=f_1(t), f(t)=f_2(t)$ болгондо тиешелүү түрдө $u_1(t), u_2(t)$ - (2.5) теңдемесинин чыгарылыштары экендигин эске алуу менен (2.5) – тен $t\in[t_0, T]$ үчүн

$$|u_1(t)-u_2(t)|\le\int_{t_0}^{t}L|u_1(s)-u_2(s)|d\varphi(s)+\|f_1(t)-f_2(t)\|_C$$

баалоосун алабыз. Бул жерде Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгын (Теорема 2.3) колдонуп, (2.14) баалоосун алабыз. Теорема 2.7 далилденди.

2.2 Вольтерра- Стилтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси

Аныктама 2.3: $\varphi(t)$ функциясы бардык G - да өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, мында $G=[t_0, T]$ $(t_0<T<\infty)$ же $G=[t_0, T)$ $(T\le\infty)$.

Төмөндө берилген интегралдык тендеме

$$\int_{t_0}^{t}K(t,s)u(s)d\varphi(s)+f(t) \tag{2.16}$$

Вольтерра-Стилтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси деп аталат.

Мында $K(t,s)$ функциясы $G_1=\{(t,s): t_0\le s\le t\le T\}$ областында үзгүлтүксүз белгилүү функция. $f(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында үзгүлтүкүз белгилүү функция, Ал эми $u(t)$, $[t_0, T]$ интервалында изделүүчү функция.

Аныктама 2.4: $\varphi(t)$ функциясы бардык G - да өсүүчү-үзгүлтүксүз функция болсун, мында $G=[t_0, T]$ $(t_0<T<\infty)$ же $G=[t_0, T)$ $(T\le\infty)$.

Төмөндө берилген интегралдык тендеме

$$\int_{t_0}^{t} K\,(t,\, s, u(s))d\varphi(s) + f\,(t) \qquad (2.17)$$

Вольтерра-Стилтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси деп аталат. Мында $K(t,s)$ функциясы $G_1 = \{(t,s): t_0 \le s \le t \le T\}$ областында үзгүлтүксүз белгилүү функция. $f(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында үзгүлтүкүз белгилүү функция. Ал эми $u(t)$, $[t_0, T]$ интервалында изделүүчү функция.

2.2.1. Вольтерра- Стилтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси

(2.16) интегралдык теңдемесин карайбыз. (2.16) теңдемеси үзгүлтүксүз $u(t)$ чыгарылышына ээ болуш үчүн, $f(t_0) = 0$ шартынын аткарылышы зарыл. Эгерде $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\dfrac{\partial K\,(t,\,s)}{\partial\varphi(t)}$ туундусу болсо, анда Теорема 2.1 –дин негизинде (2.16) теңдемесинин сол жагы да $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз туундуга ээ болот. Мындан $f(t)$ функциясы да $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз туундуга $f'_{\varphi}(t)$ ээ болушу керек.

(2.16) теңдемесинин эки тарабын $\varphi(t)$ функциясы боюнча дифференсирлеп жана Теорема 2.1 – ди эске алуу менен,

$$K(t,t)u(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K\,(t,\,s)}{\partial\varphi(t)} u(t)d\varphi(\mathrm{s}) = f'_{\varphi}(t) \qquad (2.18)$$

алабыз. (2.16) теңдемесинин чыгарылышы $u(t)$ (2.18) теңдемесин канааттандырат жана тескерисинче да орун алат.

$K(t,t)$ - $[t_0, T]$ кесиндисинин бир да чекитинде нөлгө барабар болбосун дейли. (2.18) – дин эки тарабын $K(t,t)$ - га бөлсөк, анда

$$u(t)+\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial K(t,s)}{\partial\varphi(t)}\Big/K(t,t)\right]u(s)d\varphi(s)=\frac{f'_\varphi(t)}{K(t,t)}$$

алабыз. Бул алынган акыркы теңдеме Вольтерра – Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси жана бул теңдемеге жогоруда колдонулган теориялар колдонулат. Ошол сыяктуу далилденет.

Теорема 2.8: $\varphi(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\frac{\partial K(t,s)}{\partial\varphi(t)}$ туундуга ээ болсун жана бардык $t\in[t_0, T]$ үчүн $K(t,t)\neq 0$ болсун. Анда (2.16) теңдемеси $[t_0, T]$ интервалында жалгыз чыгарылышка ээ болуу үчүн, $f(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз туундуга $f'_\varphi(t)$ ээ болуусу жана $f(t_0)=0$ зарыл жана жетиштүү.

Эгерде $K(t,t)$ нөлгө барабар болсо, анда (2.18) теңдемеси кайра эле Вольтерра – Стилтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси болот жана бул теңдемени биринчи сыяктуу карайбыз эгерде, $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\frac{\partial K(t,s)}{\partial\varphi(t)}$ туундуга ээ болсо. Ушул эле учурда (2.18) теңдемеси чексиз чыгарылышы болуш үчүн, $f'_\varphi(t_0)=0$ жана $f'_\varphi(t)$ үзгүлтүксүз болуусу зарыл.

(2.18) теңдемесинин эки тарабын $\varphi(t)$ функциясы боюнча дифференцирлейбиз жана Теорема 2.1 ди эске алып,

$$\left[\frac{\partial K(t,s)}{\partial\varphi(t)}\bigg|_{s=t}\right]u(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial\varphi^2(t)}u(s)d\varphi(s)=f_\varphi{}'(t) \tag{2.19}$$

алабыз.

Эгерде $\left[\left.\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}\right|_{s=t}\right]$, $[t_0, T]$ аралыгында нөлдөн айрымалуу болсо, анда (2.19) теңдемеси сызыктуу Вольтерра – Стилтьестин экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеси болот.

Бул процесс ушул сыяктуу улана берет жана $s=t$ болгондо $\dfrac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial \varphi^{n-1}(t)}$ туундусу нөлгө барабар болбогондо токтойт. Ушул эле учурда (2.16) теңдемесинин чыгарылышы $u(t)\in C[t_0,T]$ жашашы үчүн $f(t)$ функциясынын $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүксүз туундуга $f_\varphi^{(n-1)}(t)$ ээ болушу жана $f(t_0)=f'_\varphi(t_0)=...=f_\varphi^{n-1}(t_0)=0$ болушу шарт.

Эгерде $\dfrac{\partial^n K(t,s)}{\partial \varphi^n(t)}$ туундусу үзгүлтүксүз болсо, анда $f_\varphi^{(n)}(t)$ да үзгүлтүксүз болушу керек жана биз төмөнкү теңдемеге келебиз.

$$\left[\left.\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial \varphi^{n-1}(t)}\right|_{s=t}\right]u(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial^n K(t,s)}{\partial \varphi^n(t)}u(s)d\varphi(s)=f_\varphi^{(n)}(t) \tag{2.20}$$

Көрүнүп тургандай, эгерде $\left[\left.\dfrac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial \varphi^{n-1}(t)}\right|_{s=t}\right]$, $[t_0, T]$ аралыгында нөлгө барабар болбосо, анда (2.20) теңдемеси сызыктуу Вольтерра – Стилтьестин экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеси болот. Бул учурда (2.20) теңдемеси үгүлтүксүз жалгыз чыгарылышка ээ болот жана бул чыгарылыш (2.16) теңдемесин канааттандырат. Теорема 2.8 далилденди.

Теорема 2.9: $\varphi(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында өсүүчү – үзгүлтүксүз функция болсун, $K(t,s)$ ядросу G_1 областында $\varphi(t)$ функциясы боюнча үзгүлтүксүз $\dfrac{\partial^n K(t,s)}{\partial \varphi^n(t)}$ туундуга ээ болсун, $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$. Анда бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн

$$K(t,t)\equiv\left[\left.\frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}\right|_{s=t}\right]\equiv...\equiv\left[\left.\frac{\partial^{n-2}K(t,s)}{\partial \varphi^{n-2}(t)}\right|_{s=t}\right]\equiv 0,\left[\left.\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial \varphi^{n-1}(t)}\right|_{s=t}\right]\neq 0$$

болот. Анда (2.16) теңдемеси $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүксүз жалгыз чыгарылышка ээ болушу үчүн $f(t)$ функциясынын $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүксүз туундуга $f_{\varphi}^{(n-1)}(t)$ ээ болушу жана $f(t_0)=f'_{\varphi}(t_0)=...=f_{\varphi}^{n-1}(t_0)=0$ болушу зарыл жана шарт.

Мисал: Төмөнкү берилген интегралдык теңдемени карайбыз.

$$\int_0^t (1+t^4+s^4)su(s)=f(t), \quad t\in[0,1] \tag{2.21}$$

Чыгаруу: Көрүнүп тургандай берилген теңдемени *t* боюнча дифференцирлесек, анда (2.21) теңдемеси Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемесине алынып келинет.

(2.21) теңдемесин Вольтерра – Стилтьестин теңдемеси түрүндө жазып алабыз.

$$\frac{1}{2}\int_0^t (1+t^4+s^4)u(s)\,d(s^2)=f(t), \quad t\in[0,1]. \tag{2.22}$$

Мында, $\varphi(t)=t^2$, $K(t,s)=\frac{1}{2}(1+t^4+s^4)$, $K(t,t)=\frac{1}{2}$, $\frac{\partial K(t,s)}{\partial\varphi(t)}=t^2$. Теорема 2.8 дин негизинде (2.22) теңдемеси б.а. (2.21) теңдемеси $C[0,1]$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышка ээ болот, качан гана $f(t)$ функциясы $\varphi(t)=t^2$ боюнча үзгүлтүксүз туундуга $f'_{\varphi}(t)$ ээ болгондо жана $f(0)=0$ болсо. $\varphi(t)=t^2$ функциясы боюнча дифференцирлесек, анда (2.22) интегралдык теңдеме төмөнкү экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү теңдемеге алынып келинет.

$$\frac{1}{2}u(t)+\int_0^t u(s)\,d(s^2)=f'_{\varphi}(t), \quad t\in[0,1]$$

2.2.2. Вольтерра- Стилтьестин биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси

(2.17) интегралдык теңдемесин карайбыз.

Төмөнкү шарттар аткарылсын дейли:

I $\varphi(t)$ функциясы $[t_0, T]$ интервалында өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун, $K(t, s, u)$ функциясы жана $\frac{\partial K(t,s,u)}{\partial \varphi(t)}$, $G_1 \times \mathbb{R}$ областында үзгүлтүксүз болсун. $\frac{\partial K(t,s,u)}{\partial \varphi(t)}$ функциясы $G_1 \times \mathbb{R}$ областында u боюнча Липшицтин шартын L коэффициенти менен канааттандырсын.

II Каалагандай $t \in [t_0, T]$ жана каалагандай $v \in \mathbb{R}$ үчүн төмөнкү алгебралык теңдеме

$$K(t,t,u) = v$$

жалгыз чыгарылышка

$$u = F(t,v)$$

ээ. Мында $F(t,v)$ функциясы $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ областында үзгүлтүксүз функция жана v боюнча Липшицтин шартын L_0 коэффициенти менен канааттандырат.

(217) интегралдык теңдемесин $\varphi(t)$ функциясы боюнча дифференцирлесек,

$$K(t,t,u(t)) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s,u(s))}{\partial \varphi(t)} d\varphi(s) = f'_{\varphi}(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{2.23}$$

алабыз. Мындан II шарттын негизинде

$$u(t) = F(t, f'_{\varphi}(t)) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s,u(s))}{\partial \varphi(t)} d\varphi(s), \quad t \in [t_0, T]$$

алабыз. (2.17) теңдемеси (2.23) экинчи түрдөгү интегралдык теңдемеге алынып келинди. Көрүнүп тургандай, эгерде $f'_{\varphi}(t) \in C[t_0, T]$ жана $f(t_0) = 0$ болсо, анда (2.17) жана (2.23) теңдемелери эквиваленттүү болот.

Теорема 2.10: I жана II шарттар аткарылсын , $f'_{\varphi}(t) \in C\left[t_0, T\right]$ жана $f(t_0) = 0$ болсун. Анда (2.17) теңдемесинин $C\left[t_0, T\right]$ мейкиндигинде жалгыз чыгарылышы жашайт.

Далилдөө: (2.17) теңдемесин б.а. (2.23) теңдемесин чыгаруу үчүн удаалаш жакындаштыруу методун колдонобуз. $n \in \mathbb{N}$, $t \in \left[t_0, T\right]$ үчүн

$$\begin{aligned} u_0(t) &= F(t, f'_{\varphi}(t)) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial \varphi(t)} d\varphi(s), \\ u_n(t) &= F(t, f'_{\varphi}(t)) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_{n-1}(s))}{\partial \varphi(t)} d\varphi(s). \end{aligned} \tag{2.24}$$

I жана II шарттарын эске алып жана математикалык индукция методу менен (2.23) теңдемесинен төмөнкү баалоону алабыз.

$$|u_0(t)| \le \sup_{t\in[t_0,T]} \left| F(t, f'_{\varphi}(t)) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial \varphi(t)} d\varphi(s) \right| = F_0,$$

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le L_0 \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial K(t,s,u_0(s))}{\partial \varphi(t)} - \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial \varphi(t)} \right| d\varphi(s) \le$$

$$\le L_0 L F_0 \left[\varphi(t) - \varphi(t_0)\right],$$

$$|u_2(t) - u_1(t)| \le L_0 \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial K(t,s,u_0(s))}{\partial \varphi(t)} - \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial \varphi(t)} \right| d\varphi(s) \le$$

$$\le L_0 L \int_{t_0}^{t} \left| u_1(s) - u_0(s) \right| d\varphi(s) \le F_0 \left(L_0 L\right)^2 \int_{t_0}^{t} \left[\varphi(t) - \varphi(t_0)\right] d\varphi(s) =$$

$$= F_0 \left(L_0 L\right)^2 \frac{\left[\varphi(t) - \varphi(t_0)\right]^2}{2!},$$

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \le F_0 \left(L_0 L\right)^n \frac{\left[\varphi(t) - \varphi(t_0)\right]^n}{n!},$$

мында $n \in \mathbb{N}$, $t \in \left[t_0, T\right]$. Бул жерден төмөнкү барабарсыздыкты алабыз.

$$\left|u_n(t) - u_{n-1}(t)\right| \le F_0 \left(L_0 L\right)^n \frac{\left[\varphi(T) - \varphi(t_0)\right]^n}{n!},$$

мында $n \in \mathbb{N}$, $t \in \left[t_0, T\right]$. Акыркы баалоолордон функционалдыккатар

$$u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(t) - u_{n-1}(t)\right]$$

$\left[t_0, T\right]$ областында бирдей $u(t)$ - га жакындайт жана $u(t)$ - (2.23) теңдемесинин б.а. (2.17) теңдемесинин үзгүлтүксүз чыгарылышы болот.

Эми (2.23) теңдемесинин б.а. (2.17) теңдемесинин чыгарылышынын жалгыздыгын далилдейбиз. $u_1(t)$ жана $u_2(t)$ - (2.23) теңдемесинин $C\left[t_0, T\right]$ мейкиндигинде каалагандай эки чыгарылышы болсун. Анда

$$u_1(t) - u_2(t) = F\left(t, f'_\varphi(t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_1(s))}{\partial \varphi(t)} d\varphi(s)\right) -$$

$$-F\left(t, f'_\varphi(t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_2(s))}{\partial \varphi(t)} d\varphi(s)\right), \quad t \in \left[t_0, T\right].$$

Бул жерде I жана II шарттын негизинде $m \in \mathbb{N}$ жана $t \in \left[t_0, T\right]$ үчүн

$$\left|u_1(t) - u_2(t)\right| \le L_0 L \int_{t_0}^{t} \left|u_1(s) - u_2(s)\right| d\varphi(s) + \frac{1}{m},$$

алабыз. Бул жерде Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгын колдонуп, акыркы барабырсыздыктан $m \in \mathbb{N}$ жана $t \in \left[t_0, T\right]$ үчүн

$$\left|u_1(t) - u_2(t)\right| \le \frac{1}{m} \exp\left\{L_0 L\left[\varphi(T) - \varphi(t_0)\right]\right\}$$

баалоосун алабыз. Мындан $m \to \infty$ умтулганда пределге өтсөк, бардык $t \in \left[t_0, T\right]$ үчүн $\left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|_C = 0$ б.а. $u_1(t) = u_2(t)$ алабыз. Теорема 2.10 далилденди.

Теорема 2.11: : I жана II шарттар аткарылсын жана $u_1(t)$ жана $u_2(t)$ - (2.17) теңдемесинин чыгарылышы болсун, тиешелүү түрдө $f(t) = f_1(t), f(t) = f_2(t)$,

мында $\left(f_1(t)\right)'_{\varphi} \in C\left[t_0,T\right], \left(f_2(t)\right)'_{\varphi} \in C\left[t_0,T\right]$, $f_1(t_0)=0$ жана $f_2(t_0)=0$. Анда төмөнкү баалоо

$$\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|_C \le c_2\left\|\left(f_1(t)\right)'_{\varphi}-\left(f_2(t)\right)'_{\varphi}\right\|_C, \tag{2.25}$$

орун алат. Мында

$$c_2 = L_0 \exp\left\{L_0 L\left[\varphi(T)-\varphi(t_0)\right]\right\}.$$

Далилдөө: Тиешелүү түрдө $f(t)=f_1(t), f(t)=f_2(t)$ үчүн $u_1(t)$ жана $u_2(t)$ - (2.17) теңдемесинин чыгарылышы экендигин эске алып, (2.23) теңдемесинен $t\in\left[t_0,T\right]$ үчүн

$$\left|u_1(t)-u_2(t)\right| \le L_0 L\int_{t_0}^{t}\left|u_1(s)-u_2(s)\right|d\varphi(s) + L_0\left\|\left(f_1(t)\right)'_{\varphi}-\left(f_2(t)\right)'_{\varphi}\right\|_C,$$

Мындан Гронуолла – Беллмандын жалпыланган барабарсыздыгын колдонуп, талап кылынган (2.25) баалоосун алабыз. Теорема 2.11 далилденди.

3-БӨЛҮМ. СТИЛТЬЕСТИН ИНТЕГРАЛЫ ЖАНА ЖАЛПЫЛАНГАН ТРАПЕЦИЯ МЕТОДУ

Бул бөлүмдө Стилтьестин интегралына жана жалпыланган трапеция методунун колдонулушуна токтолобуз. Стильтестин интегралына жана Вольтерра-Стилтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралына жалпыланган трапеция методонунун колдонулушун карайбыз.

3.1 Стилтьестин интегралы

Аныктама 3.1: $f(x)$ функциясы $\left[a, b\right]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болсун, $\varphi(x)$ функциясы $\left[a, b\right]$ кесиндисинде өсүүчү-үзгүлтүксүз функция болсун. Анда төмөнкү интеграл

$$I = \int_a^b f(x)d\varphi(x), \qquad a < b, a,b \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$f(x)$ фунциясынын $\varphi(x)$ функциясы боюнча Стилтьестин интегралы деп аталат.

Теорема 3.1: $f(x)$ функциясы $\left[a,b\right]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болсун, $\varphi(x)$ функциясы $\left[a, b\right]$ кесиндисинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун жана

$$F(x) = \int_a^x f(t)d\varphi(t), \qquad x \in [a,b]$$

аныкталсын. Анда $F(x)$ функциясынын $\varphi(x)$ функциясы боюнча туундусу

$$F'_\varphi(x) = \left(\int_a^x f(t)d\varphi\right)'_\varphi = f(x), \qquad x \in [a, b]$$

болот. Мында,

$$F'_{\varphi}(a) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\varphi(a+\Delta x) - \varphi(a)},$$

$$F'_{\varphi}(b) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{F(b+\Delta x) - F(b)}{\varphi(b+\Delta x) - \varphi(b)}.$$

Далилдөө: $\varphi(x)$ боюнча туунду алуунун аныктамасы боюнча

$$F'_{\varphi}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x) \int_{x}^{x+\Delta x} d\varphi - \int_{x}^{x+\Delta x} (f(x) - f(t)) d\varphi \right) \Big/ [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] = f(x) - \lim_{\Delta x \to 0} \psi(x, \Delta x),$$

алабыз, мында

$$\psi(x, \Delta x) = \left(\int_{x}^{x+\Delta x} (f(x) - f(t)) d\varphi \right) \Big/ [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)].$$

Мындан, $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде өсүүчү функция экендигин эске алып, төмөнкү барабарсыздыкты

$$|\psi(x, \Delta x)| \le \left[\omega_f(\Delta x) \left| \int_{x}^{x+\Delta x} d\varphi \right| \right] \Big/ [\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)] = \omega_f(\Delta x)$$

алабыз. Мында $\omega_f(|\Delta x|)$ - бул $f(x)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн модулу, б.а.

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|t-x| \le \delta} |f(x) - f(t)|$$

болот. Анын предели

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$$

экендиги белгилүү. Ошон үчүн

$$\lim_{\Delta x \to 0} |\psi(x, \Delta x)| \le \lim_{\Delta x \to 0} \omega_f(|\Delta x|) = 0$$

болот. Мындан,

$$F'_{\varphi}(x) = f(x)$$

келип чыгат. Теорема 3.1 далилденди.

Теорема 3.2: (Ньютон-Лейбництин жалпыланган формуласы)

$f'_{\varphi}(x) = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болсун. Анда төмөнкү

$$\int_a^b f'_{\varphi}(x)d\varphi(x) = f(b) - f(a)$$

формуланы колдонууга болот.

Далилдөө: Стильтестин интегралынын аныктамасы боюнча бул интеграл төмөнкүдөй

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f'_{\varphi}(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

сумманын предели катары аныкталат, мында $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots \ < x_n = b$,

ξ_i -бул $[x_{i-1}, x_i]$ интервалында каалагандай сан, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Лагранждын жалпыланган теоремасынын негизинде

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'_{\varphi}(c_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

алабыз. Мында $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Анда ξ_i ни c_i ге алмаштырып S_n ди төмөнкү түрдө жазып алабыз:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$$

Мындан пределге өтсөк, талап кылынган формуланы алабыз. Теорема 3.2 далилденди.

Натыйжа 3.1: $f'_{\varphi}(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсун. Анда төмөнкү формуланы колдонууга болот.

$$\int_a^x f'_{\varphi}(s)d\varphi(s) = f(x) - f(a), \quad \forall x \in [a, b]$$

Теорема 3.3 (Бөлүктөп интегралдоонун жалпыланган эрежеси):

$f'_{\varphi}(x)$ жана $g'_{\varphi}(x)$ функциялары $[a, b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функциялар болсун. Анда төмөнкү формуланы колдонууга болот.

$$\int_a^b f(x)g_\varphi'(x)d\varphi(x) = \left[f(x)g(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f_\varphi'(x)d\varphi(x)$$

Далилдөө: Стильтестин эрежеси боюнча интегралдап

$$\left[f(x)g(x)\right]_\varphi' = f_\varphi'(x)g(x) + f(x)g_\varphi'(x)$$

талап кылынган формуланы алабыз. Теорема 3.3 далилденди.

Лемма 3.1: $F_0(x) = f(x)$ болсун жана $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде өсүүчү үзгүлтүксүз функция болсун жана

$$F_i(x) = \int_a^x F_{i-1}(t)d\varphi(t), \quad x \in [a,b], i = 1,..., n.$$

Анда $F_n(x) \in C_\varphi^{(n)}[a, b]$ болот. Мында $C_\varphi^{(n)}[a, b]$ - $[a,b]$ кесиндисинде аныкталган бардык үзгүлтүксүз $v(x)$ функцияларынын сызыктуу мейкиндиги болуп эсептелет жана $v_\varphi^{(n)}(x) \in C[a, b]$ болот.

3.2 Стилтьестин интегралына жалпыланган трапеция методун колдонуу

$[a, b]$ кесиндисин $a = x_0, x_1, x_2,..., x_n = b$ түрүндө n бөлүккө тең бөлөлү, анда ар бир кадам $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $x_i = x_{i-1} - h$, $i = 0,1,2,...,n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(f(x_{i+1}) + f(x_i)\big)\big(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)\big) + E_T(i). \tag{3.2}$$

Анда (3.1) интегралынын жакындатылган мааниси төмөнкү формула менен аныкталат.

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \int_a^b f(x)d\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_{i+1}) + f(x_i)\right]\left[\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)\right] + E_T. \tag{3.3}$$

Мында

$$\left|f_\varphi'(x)\right| \le M, \qquad x \in [a, b],$$

Бул жерде калдык мүчө төмөнкү түрдө бааланат:

$$\left| E_T(i) \right| \le \frac{M}{12}\left[\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)\right]^3.$$

Белгилөө киргизебиз $E_T = \sum_{i=0}^{n-1} E_T(i).$

$$\left|E_T\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\left|E_T(i)\right| = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M}{12}\left[\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)\right]^3 \le$$

$$\le \frac{M}{12}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sup_{|x-y|\le h}\left(\varphi(x) - \varphi(y)\right)\right]^2\left[\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)\right] =$$

$$= \frac{M}{12}\left[\sup_{|x-y|\le h}\left(\varphi(x) - \varphi(y)\right)\right]^2\sum_{i=0}^{n-1}\left[\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)\right].$$

Мында

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\varphi\left(x_{i+1}\right) - \varphi\left(x_i\right)\right] = \varphi\left(x_n\right) - \varphi\left(x_0\right) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Анда акыркы баалоодон

$$\left|E_T\right| \le \frac{M_0}{12}\left[\varphi(b) - \varphi(a)\right]\left[\omega_\varphi(h)\right]^2, \quad \omega_\varphi(h) = \sup_{|x-y|\le h}\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right|, \; M_0 = \sup_{x\in[a,b]}\left|f_\varphi''(x)\right|.$$

3.2. Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу

Бизге төмөнкү Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси берилсин [2].

$$u(x) = \int_a^x K(x,s)u(s)d\varphi(s) + f(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.4}$$

Мында $\varphi(s)$ - $[a,b]$ интервалында белгилүү өсүүчү үзгүлтүксүз функция, $f(x)$ - $[a,b]$ интервалында белгилүү үзгүлтүксүз функция, $K(x,s)$ - $G = \left\{(x,s) := a \le s \le x \le b\right\}$- да аныкталган үзгүлтүксүз функция болсун. Ал эми $u(x)$ функциясы $[a,b]$ интервалында изделүүчү функция.

(3.4) теңдемесинин чыгарылышын табуу үчүн жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгарабыз. Ал үчүн $[a,b]$ кесиндисин $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ түрүндө n бөлүккө бөлөбүз, анда ар бир кадам

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + kh, \quad k = 0,1,2,...,n, \; n \in \mathbb{N} \quad \text{болот.}$$

(3.4) интегралдык теңдемесинде $x = x_k$ алмаштырып жазып алабыз.

$$\begin{aligned} &u(x_0) = f(x_0), \quad x_0 = a, \\ &u(x_k) = \int_a^{x_k} K(x_k, s)u(s)d\varphi(s) + f(x_k), \quad k = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5) интегралын катардын суммасына ажыратабыз. Катардын суммасы төмөнкүдөй

$$\begin{aligned} &\int_a^{x_k} K(x_k, s)u(s)d\varphi(s) = \\ &= \sum_{j=1} \frac{1}{2}\left[K\left(x_k, x_{j-1}\right)u\left(x_{j-1}\right) + K\left(x_k, x_j\right)u\left(x_j\right)\right] \cdot \left[\varphi\left(x_j\right) - \varphi\left(x_{j-1}\right)\right] + \sum_{j=1} R_j^{(n)}(u), \end{aligned} \tag{3.6}$$

болот. Мында калдык мүчө төмөнкү түрдө бааланат:

$$\left|R_j^{(n)}(u)\right| \leq \frac{M}{12}\left[\varphi\left(x_j\right) - \varphi\left(x_{j-1}\right)\right]^3, \tag{3.7}$$

$$\left[K(x,s)u(s)\right]'_{\varphi(s)} = K'_{\varphi(s)}(x,s)u(s) + K(x,s)u'_{\varphi(s)}(s),$$

$$\left[K(x,s)u(s)\right]''_{\varphi(s)} = K''_{\varphi(s)}(x,s)u(s) + 2K'_{\varphi(s)}(x,s)u'_{\varphi(s)}(s) + K(x,s)u''_{\varphi(s)}(s),$$

$$M = \sup_{(x,s)\in G}\left|\left[K(x,s)u(s)\right]''_{\varphi(s)}\right| = \sup_{(x,s)\in G}\left|K(x,s)u''_{\varphi(s)}(s) + 2K'_{\varphi(s)}(x,s)u'_{\varphi(s)}(s) + K''_{\varphi(s)}(x,s)u(s)\right|.$$

Эми (3.6) катардын суммасын (3.5) –ке алып барып койсок, анда биз төмөнкү системаны алабыз.

$$u(x_0)=f(x_0),\ x_0=a,$$
$$u(x_k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\left[K\left(x_k,x_{j-1}\right)u\left(x_{j-1}\right)+K\left(x_k,x_j\right)u\left(x_j\right)\right]\cdot\left[\varphi\left(x_j\right)-\varphi\left(x_{j-1}\right)\right]+ \tag{3.8}$$
$$+\sum_{j=1}^{k}R_j^{(n)}(u)+f\left(x_k\right),\quad k=1,2,...,n.$$

(3.8)-системадагы $\sum_{j=1}^{k} R_j^{(n)}(u)$ калдык мүчөнү эске албай жана $u_k\approx u(x_k)$ болсун,

анда (3.8)-ден төмөнкү системаны алабыз.

$$\begin{cases} u_0=f(a), \\ u_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\left[K\left(x_k,x_{j-1}\right)u_{j-1}+K\left(x_k,x_j\right)u_j\right]\cdot\left[\varphi\left(x_j\right)-\varphi\left(x_{j-1}\right)\right]+f\left(x_k\right), \end{cases} \tag{3.9}$$

мында $k=1,2,...,n$.

$$\alpha=\frac{1}{2}\sup_{x\in[a,b]}\left|K\left(x,x\right)\right|\omega_\varphi\left(h\right)<1 \tag{3.10}$$

шарты аткарылсын дейли. Мында $\omega_\varphi\left(h\right)$ - φ функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн модулун билдирет жана төмөнкүдөй аныкталат.

$$\omega_\varphi\left(h\right)=\sup_{|x-y|\le h}\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \tag{3.11}$$

(3.10) шарты аткарылсын дейли, анда (3.9) системасы төмөндө формула менен аныкталган жалгыз чыгарылышка ээ болот. $k=1,3,...,n$ үчүн

$$\begin{cases} u_0=f(a), \\ u_k=\dfrac{\frac{1}{2}\sum_{j=1}K\left(x_k,x_{j-1}\right)\left[\varphi\left(x_j\right)-\varphi\left(x_{j-1}\right)\right]u_{j-1}}{1-\frac{1}{2}K\left(x_k,x_k\right)\left(\varphi\left(x_k\right)-\varphi\left(x_{k-1}\right)\right)}+\dfrac{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}K\left(x_k,x_j\right)\left[\varphi\left(x_j\right)-\varphi\left(x_{j-1}\right)\right]u_j+f\left(x_k\right)}{1-\frac{1}{2}K\left(x_k,x_k\right)\left(\varphi\left(x_k\right)-\varphi\left(x_{k-1}\right)\right)}. \end{cases}$$

Мындан улам акыркы формула (3.4) Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесинин жакындатылган чыгарылышын табуунун алгоритми болот.

Мисал : Төмөнкү Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесин карайлы.

$$u(x)=\int_0^x (1+xt)u(t)d\varphi(t)+f(x),\qquad (x,t)\in G=\{0\le t\le x\le 1\},\ \ x\in[0,1]. \qquad (3.12)$$

Мында $\varphi(x)=\sqrt{x},\ \ f(x)=-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{6}+x\sqrt{x}$ болсун.

Бул интегралдык теңдеменин чыгарылышын жалпыланган трапеция методу менен жакындатылган чыгарылышын эсептейбиз. Мында

$a=0,\ \ b=1,\ \ h=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}=0.1,\ x_k=a+kh,\ \ k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.$ болсун.

$x_0=0,\quad x_1=0.1,\qquad u(x_0)=u(a)=u(0)=f(0)=0,$

$$u_1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(1+(0.1)^2\right)\sqrt{0.1}}\left\{0.1\sqrt{0.1}-\frac{(0.1)^2}{4}-\frac{(0.1)^4}{6}\right\}=0.03463755504$$

Берилген интегралдык теңдеменин так чыгарылышы

$$u(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,1].$$

экендиги белгилүү жана берилген теңдемени канааттандырат.

$$\int_0^x (1+xt)\sqrt{t}\,d(\sqrt{t})-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{6}+x\sqrt{x}=\int_0^x\left(\sqrt{t}\right)^3 d\left(\sqrt{t}\right)+\int_0^x\left(\sqrt{t}\right)^5 d\left(\sqrt{t}\right)-$$
$$-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{6}+x\sqrt{x}=\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{6}+x\sqrt{x}=x\sqrt{x}$$

(3.12) Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдеменин жалпыланган трапеция методу менен чыгарылган жакындатылган чыгарылышы менен аналитикалык чыгарылышынын салыштыруусу жана айырмасы төмөнкү таблицада берилди:

t_k	$u(t_k)$	u_k	$\lvert u(t_k) - u_k \rvert$
0.1	0.03162277660	0.03463755504	0.00301477844
0.2	0.08944271910	0.09344063669	0.00399791759
0.3	0.1643167672	0.1691757625	0.0048589953
0.4	0.2529822128	0.2587154296	0.0057332168
0.5	0.3535533906	0.3602344066	0.0066810160
0.6	0.4647580015	0.4725041323	0.0077461308
0.7	0.5856620186	0.5946318027	0.0089697841
0.8	0.7155417528	0.7259384693	0.0103967165
0.9	0.8538149683	0.8658941880	0.0120792197
1	1.000000000	1.014080921	0.014080921
			0.1769182215

Мында каталык 0.1769182215 ти түзөт.

4-БӨЛҮМ. ӨСҮҮЧҮ ФУНКЦИЯ БОЮНЧА ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЖАКЫНДАШТЫРЫП ЧЫГАРУУ

Бул бөлүмдө биз өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесин Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине келтирип изилдейбиз. Алынып келинген Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемесинин жакындатылган чыгарылышын жалпыланган трапеция методу менен чыгарабыз.

4 Өсүүчү функция боюнча туундулу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине келтирип изилдөө

Маселенини коюлушу. Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселеси берилсин:

$$u'_{\varphi(t)}(t) = p(t)u'_{\varphi(t)}(t) + F(t,u(t)) + g(t), \qquad (t,u) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$u(t_0) = \alpha, \quad u'_{\varphi}(t_0) = \beta, \quad \varphi(t_0) = 0. \tag{4.2}$$

Мында $\varphi(t)$ функциясы $[t_0,T]$ интервалында өсүүчү үзгүлтүксүз функция, $g(t)$ жана $p(t)$ функциялары $[t_0,T]$ интервалында үзгүлтүксүз функциялар, $F(t,u(t))$ $[t_0,T]\times\mathbb{R}$ - да үзгүлтүксүз функция, $u(t)$, $[t_0,T]$ интервалында изделүүчү функция.

(4.1)-(4.2) Коши маселесин Вольтерра- Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине келтирүү үчүн алгач (4.1) теңдемесин t_0 дон t га чейин $\varphi(t)$ функциясы боюнча интегралдайбыз. Анда

$$\frac{du(t)}{d\varphi(t)}-\beta=\int_{t_0}^{t}p(s)u'_{\varphi}(s)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}F(s,u(s))d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}g(s)d\varphi(s)$$

$$\frac{du(t)}{d\varphi(t)}=p(s)u(s)\Big|_{s=t_0}^{s=t}-\int_{t_0}^{t}p'_{\varphi}(s)u(s)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}F(s,u(s))d\varphi(s)+\beta+\int_{t_0}^{t}g(s)d\varphi(s)$$

$$u'_{\varphi}(t)=p(t)u(t)-p(t_0)u(t_0)-\int_{t_0}^{t}p'_{\varphi}(s)u(s)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}F(s,u(s))d\varphi(s)$$
$$+\int_{t_0}^{t}g(s)d\varphi(s)+\beta,$$

болот. Баштапкы (4.2) шартын колдонуп,

$$u'_{\varphi}(t)=p(t)u(t)-\int_{t_0}^{t}p'_{\varphi}(s)u(s)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}F(s,u(s))d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}g(s)d\varphi(s)+\beta-\alpha p(t_0) \tag{4.3}$$

алабыз.

Эми (4.3) интегралдык теңдемесин t_0 дон t га чейин $\varphi(t)$ функциясы боюнча дагы бир жолу интегралдайбыз.

$$u(s)\Big|_{s=t_0}^{s=t}=\int_{t_0}^{t}p(s)u(s)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}[\varphi(t)-\varphi(s)]\times\left[F(s,u(s))-p'_{\varphi}(s)u(s)\right]d\varphi(s)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\varphi(t)-\varphi(s)\right]g(s)d\varphi(s)+\left[\beta-\alpha p(t_0)\right]\left(\left[\varphi(t)-\varphi(t_0)\right]\right)$$

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}p(s)u(s)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}[\varphi(t)-\varphi(s)]\times\left[F(s,u(s))-p'_{\varphi}(s)u(s)\right]d\varphi(s)+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\varphi(t)-\varphi(s)\right]g(s)d\varphi(s)+\left[\beta-\alpha p(t_0)\right]\varphi(t)+\alpha.$$

Акыркы теңдемеге төмөнкүдөй белгилөө киргизебиз.

$$f(t)=\left[\beta-\alpha p(t_0)\right]\varphi(t)+\alpha+\int_{t_0}^{t}[\varphi(t)-\varphi(s)]g(s)d\varphi(s),\qquad t\in\left[t_0,T\right].$$

Анда акыркы теңдемеден,

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} p(s)u(s)d\varphi(s)+\int_{t_0}^{t}\left[\varphi(t)-\varphi(s)\right]\left[F(s,u(s))-p'_{\varphi}(s)u(s)\right]d\varphi(s)+f(t), \tag{4.4}$$

алабыз. (4.1)-(4.2)- Коши маселеси (4.4) түрүндөгү Вольтерра – Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине алынып келинди.

(4.4) интегралдык теңдемесине баалоо жүргүзөбүз. Ал үчүн

1) $\left(p(s)u(s)\right)'_{\varphi(s)}$

2) $\left[\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)\left(F(s,u(s))-p'_{\varphi(s)}(s)u(s)\right)\right]'_{\varphi(s)}$

1) $\left(p(s)u(s)\right)'_{\varphi(s)}=p'_{\varphi(s)}(s)u(s)+p(s)u'_{\varphi(s)}(s)$

$$\left(p(s)u(s)\right)'_{\varphi(s)}=p'_{\varphi(s)}(s)u(s)+p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)+p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)+p(s)u'_{\varphi(s)}(s)$$

$$=p'_{\varphi(s)}(s)u(s)+2p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)+p(s)u'_{\varphi(s)}(s)$$

2) $\left[\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)\left(F(s,u(s))-p'_{\varphi(s)}(s)u(s)\right)\right]'_{\varphi(s)}=p'_{\varphi(s)}(s)u(s)-F(s,u(s))+$

$$\left[\varphi(t)-\varphi(s)\right]\left[F'_u(s,u(s))\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+F'_{\varphi(t)}(t,u(s))\Big|_{t=s}-p'_{\varphi(s)}(s)u(s)-p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)\right]$$

$$\left[\left(\varphi(t)-\varphi(s)\right)\left(F(s,u(s))-p'_{\varphi(s)}(s)u(s)\right)\right]'_{\varphi(s)}=p'_{\varphi(s)}(s)u(s)+p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)-$$

$$-F'_u(s,u(s))\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+\left[\varphi(t)-\varphi(s)\right]\left[F'_u(s,u(s))\cdot u'_{\varphi(s)}(s)\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+F'_u(s,u(s))\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+\right.$$

$$+F'_{\varphi(t)u}(t,u(s))\Big|_{t=s}\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+F'_{\varphi(t)\varphi(t)}(t,u(s))\Big|_{t=s}+F'_{\varphi(t)u}(t,u(s))\Big|_{t=s}\cdot u'_{\varphi(s)}(s)-$$

$$\left.-p'_{\varphi(s)}(s)u(s)-p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)-p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)-p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)\right]$$

$$=2\left(p'_{\varphi(s)}(s)u(s)+p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)\right)-2\left(F'_u(s,u(s))\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+F'_{\varphi(s)}(s,u(s))\right)+$$

$$+\left[\varphi(t)-\varphi(s)\right]\left[F'_u(s,u(s))\left(u'_{\varphi(s)}(s)\right)^2+F'_u(s,u(s))\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+2F'_{\varphi(t)u}(t,u(s))\Big|_{t=s}\cdot u'_{\varphi(s)}(s)+\right.$$

$$\left.+F'_{\varphi(t)\varphi(t)}(t,u(s))\Big|_{t=s}-p'_{\varphi(s)}(s)u(s)-p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)-p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)-p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s)\right].$$

болот.

$F(t,u)$ функциясы үчүн Липщицтин шарты аткарылсын:

$$\left|F(t,u_1)-F(t,u_2)\right| \le c_1 \left|u_1-u_2\right| \tag{4.5}$$

мында c_1 - Липщицтин коэффициенти.

Эгерде $F(t,0)=0$ болсо, анда (4.5) шартынан $\left|F(t,u)\right| \le c_1 |u|$ келип чыгат. Анда (4.4) интегралдык теңдемесинен

$$|u(t)| \le \int_{t_0}^{t} c_2 \,|u(s)|\,d\varphi(s) + \gamma \Rightarrow |u(t)| \le \gamma e^{\int_{t_0} c_2 d\varphi(s)} \le \gamma e^{c_2[\varphi(T)-\varphi(t_0)]} = \text{ç} .$$

Мында $c_2 = \sup\limits_{t\in[t_0,T]} |p(t)| + c_1\varphi(T) + \sup\limits_{t\in[t_0,T]} \left|p'_{\varphi}(t)\right|, \quad \gamma = \sup\limits_{t\in[t_0,T]} |f(t)|.$

(4.4) интегралдык теңдемесинен $\varphi(t)$ функциясы боюнча туунду алабыз.

$$u'_{\varphi(t)} = \left(\int_{t_0}^{t} p(s)u(s)d\varphi(s)\right)'_{\varphi(t)} + \left(\int_{t_0}^{t}[\varphi(t)-\varphi(s)]\left[F(s,u(s)) - p'_{\varphi(s)}u(s)\right]d\varphi(s)\right)'_{\varphi(t)} + f'_{\varphi(t)}(t).$$

$$u'_{\varphi(t)} = p(t)u(t) + \int_{t_0}^{t}\left[F(s,u(s)) - p'_{\varphi(s)}u(s)\right]d\varphi(s) + f'_{\varphi(t)}(t), \qquad t\in[t_0,T].$$

Мындан төмөнкү баалоону алабыз.

$$\left|u'_{\varphi(t)}\right| \le \sup_{t\in[t_0,T]}|p(t)|\,|u(t)| + \int_{t_0}^{t}\left|c_1 + \sup_{s\in[t_0,T]}\left|p'_{\varphi}(s)\right|\right| |u(s)|\,d\varphi(s) + \sup_{t\in[t_0,T]}\left|f'_{\varphi(t)}(t)\right|,$$

$$\left|u'_{\varphi(t)}\right| \le \gamma_1 + \int_{t_0}^{t} c_4c_3\,d\varphi(s) = \gamma_1 + c_4c_3\left[\varphi(T)-\varphi(t_0)\right] = c_5,$$

мында $c_4 = c_1 + \sup\limits_{s\in[t_0,T]}\left|p'_{\varphi(s)}(s)\right|, \quad \gamma_1 = \sup\limits_{t\in[t_0,T]}|p(t)|c_3 + \sup\limits_{t\in[t_0,T]}\left|f'_{\varphi(t)}(t)\right|.$

Эми (4.1) теңдемеден төмөнкү баалоону алабыз.

$$\left|u'_{\varphi(t)}(t)\right| \le \sup_{t\in[t_0,T]}|p(t)|\left|u'_{\varphi(t)}\right| + \left|F(t,u(t))\right| + \sup_{t\in[t_0,T]}|g(t)|.$$

Бул баалоодон

$$\left|u'_{\varphi(t)}(t)\right| \le \sup_{t\in[t_0,T]}\left|p(t)\right|\cdot c_5 + c_1\cdot c_3 + \sup_{t\in[t_0,T]}\left|g(t)\right| = c_6 .$$

Лемма 4.1: $p(t), g(t), p'_{\varphi(t)}(t)\in C[t_0,T]$ жана $F(t,u)\in C\left([t_0,T]\times\mathbb{R}\right)$ болсун. Эгерде (4.5) шарты аткарылса, анда төмөнкү баалоолор орун алат:

$$\left\|u(t)\right\| \le \gamma\, e^{c_2[\varphi(T)-\varphi(t_0)]},$$

$$\left\|u'_{\varphi(t)}(t)\right\| \le \gamma_1 + c_4 c_3\left[\varphi(T)-\varphi(t_0)\right],$$

$$\left\|u'_{\varphi(t)}(t)\right\| \le \sup_{t\in[t_0,T]}\left|p(t)\right|\cdot c_5 + c_1\cdot c_3 + \sup_{t\in[t_0,T]}\left|g(t)\right|.$$

Мында c_1, c_2, c_3, c_4, c_6 – каалагандай туруктуулар.

4.2 Өсүүчү функция боюнча туундулу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу

(4.4) Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин жакындатылган чыгарылышы (1)-(2) Коши маселесинин жакындатылган чыгарылышы болот. Эми (4.4) интегралдык теңдемени жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгарабыз. Ал үчүн $[t_0,T]$ кесиндисин $t_0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T$ түрүндө n бөлүккө тең бөлөбүз, анда ар бир кадам $n\in\mathbb{N}$ үчүн $h=\dfrac{T-t_0}{n}$, $t_k = t_0 + kh$, $k=1, 2,..., n$, болот.

(4.4) теңдемесинде $t = t_k$ алмаштырып жазып алабыз, анда

$$u(t_0) = f(t_0), t \in [t_0, T]$$

$$u(t_k) = \int_{t_0}^{t_k} p(s)u(s)d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t_k} [\varphi(t_k) - \varphi(s)]\left[F(s,u(s)) - p'_{\varphi(s)}(s)u(s)\right]d\varphi(s) + f(t_k) \qquad (4.6)$$

болот. Мында k =1, 2,..., n.

(4.6) да интегралдарды катардын суммасына ажыратып жазып алабыз.

$$\int_{t_0}^{t_k} p(s)u(s)d\varphi(s) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2}\left[p(t_{j-1})u(t_{j-1}) + p(t_j)u(t_j)\right]\left[\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\right] + \sum_{j=1}^{k} R_{1j}^{(n)}(u) \qquad (4.7)$$

Мында калдык мүчө төмөнкүдөй бааланат.

$$\left|R_{1j}^{(n)}(u)\right| \le \frac{M_1}{12}\left[\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\right]^3.$$

Бул баалоодо $M_1 = \sup_{s\in[t_0,T]} \left|\left[p(s)u(s)\right]'_{\varphi(s)}\right|.$

$$M_1 = \sup_{s\in[t_0,T]} \left|p(s)u'_{\varphi(s)}(s) + 2p'_{\varphi(s)}(s)u'_{\varphi(s)}(s) + p'_{\varphi(s)}(s)u(s).\right|$$

$$\int_{t_0}^{t_k} [\varphi(t_k) - \varphi(s)]\left[F(s,u(s)) - p'_{\varphi(s)}u(s)\right]d\varphi(s) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2}\Big\{\left[\varphi(t_k) - \varphi(t_{j-1})\right]\left[F(t_{j-1}, u(t_{j-1})) - p'_{\varphi(s)}(t_{j-1})u(t_{j-1})\right] + \qquad (4.8)$$

$$+ \left[\varphi(t_k) - \varphi(t_j)\right]\left[F(t_j, u(t_j)) - p'_{\varphi}(t_j)u(t_j)\right]\Big\}\left[\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\right] + \sum_{j=1}^{k} R_{2j}^{(n)}(u)$$

Мында калдык мүчө төмөнкүдөй бааланат.

$$\left|R_{2j}^{(n)}(u)\right| \le \frac{M_2}{12}\left[\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\right]^3.$$

Бул баалоодо $M_2 = \sup_{t,s\in G} \left|\left\{[\varphi(t) - \varphi(s)]\left[F(s,u(s)) - p'_{\varphi(s)}(s)u(s)\right]\right\}'_{\varphi(s)}\right|.$

$M \le M_1 + M_2.$

Эми (4.7) жанаи (4.8) ди (4.6) интегралдык теңдемесине алып барып койобуз.

$$u(t_k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\Big[p(t_{j-1})u(t_{j-1})+p(t_j)u(t_j)\Big]\Big[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\Big]+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\Big\{\Big[\varphi(t_k)-\varphi(t_{j-1})\Big]\Big[F(t_{j-1},u(t_{j-1}))-p'_{\varphi(s)}(t_{j-1})u(t_{j-1})\Big]+ \tag{4.9}$$
$$+\Big[\varphi(t_k)-\varphi(t_j)\Big]\Big[F(t_j,u(t_j))-p'_{\varphi}(t_j)u(t_j)\Big]\Big\}\Big[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\Big]+\sum_{j=1}\Big(R_{1j}^{(n)}(u)+R_{2j}^{(n)}(u)\Big)+f(t_k),$$

мында $k=1,2,...,n$.

Эми теңдемедеги $\sum_{j=1}^{k}R_{1j}^{(n)}(u)$ жана $\sum_{j=1}^{k}R_{2j}^{(n)}(u)$ калдык мүчөлөрдү эске албай жана $u_k\approx u(t_k)$ деп эсептесек, анда (4.9)-дан төмөнкү системаны алабыз.

$$u_0=f(t_0),\qquad \varphi(t_0)=0,$$
$$u_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\Big[p(t_{j-1})u_{j-1}+p(t_j)u_j\Big]\Big[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\Big]+$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2}\Big\{\Big[\varphi(t_k)-\varphi(t_{j-1})\Big]\Big[F(t_{j-1},u_{j-1})-p'_{\varphi(s)}(t_{j-1})u_{j-1}\Big]+ \tag{4.10}$$
$$+\Big[\varphi(t_k)-\varphi(t_j)\Big]\Big[F(t_j,u_j)-p'_{\varphi}(t_j)u_j\Big]\Big\}\Big[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\Big]+f(t_k),$$

мында $k=1,2,...,n$.

Эгерде $k=1$ десек, анда (4.10)-дон,

$$u_1=\frac{1}{2}\Big[\alpha p(t_0)+p(t_1)u_1\Big]\Big[\varphi(t_1)-\varphi(t_0)\Big]+$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{\Big[\varphi(t_1)-\varphi(t_0)\Big]\Big[F(t_0,u_0)-\alpha p'_{\varphi}(t_0)\Big]+ \tag{4.11}$$
$$+\Big[\varphi(t_1)-\varphi(t_1)\Big]\Big[F(t_1,u_1)-p'_{\varphi}(t_1)u_1\Big]\Big\}\Big[\varphi(t_1)-\varphi(t_0)\Big]+f(t_1)$$

алабыз. (4.11) де $\varphi(t_0)=0$ экендигин эске алсак, анда

$$\left(1-\frac{1}{2}p(t_1)\varphi(t_1)\right)u_1=\frac{1}{2}\alpha p(t_0)\varphi(t_1)+\frac{1}{2}\left(\varphi(t_1)\right)^2\left[F(t_0,u_0)-\alpha p'_{\varphi}(t_0)\right]+f(t_1) \tag{4.12}$$

болот. Эми (4.10) до u_k ларды бир тарапка топтойбуз.

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2}p(t_k)\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]\right)u_k=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2}\left[p(t_{j-1})u_{j-1}+p(t_j)u_j\right]\left[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\right]+\\
&+\frac{1}{2}p(t_{k-1})u_{k-1}\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2}\Big\{\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{j-1})\right]\left[F(t_{j-1},u_{j-1})-p'_{\varphi}(t_{j-1})u_{j-1}\right]+\\
&+\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_j)\right]\left[F(t_j,u_j)-p'_{\varphi}(t_j)u_j\right]\Big\}\left[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]\left[F(t_{k-1},u_{k-1})-p'_{\varphi}(t_{k-1})u_{k-1}\right]\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]+f(t_k),
\end{aligned} \tag{4.13}$$

мында $k=2,3,...,n$.

Эгерде төмөнкү шарт аткарылса,

$$\mu=\sup_{k=1,2,...,n}\frac{1}{2}p(t_k)\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]<1$$

анда (4.10) системанын жалгыз чыгарылышы б.а. (4.4) Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесинин жакындатылып чыгарылган чыгарылышы төмөнкү түрдө болот. (4.12) ден u_1 жана (4.13) төн u_k ны тапсак,

$$u_1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}p(t_1)\varphi(t_1)}\left\{\frac{1}{2}\alpha p(t_0)\varphi(t_1)+\frac{1}{2}\left(\varphi(t_1)\right)^2\left[F(t_0,u_0)-\alpha p'_{\varphi}(t_0)\right]+f(t_1)\right\}. \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
&u_k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}p(t_k)\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]}\Big\{\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2}\left[p(t_{j-1})u_{j-1}+p(t_j)u_j\right]\left[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\right]+\\
&+\frac{1}{2}p(t_{k-1})u_{k-1}\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2}\Big\{\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{j-1})\right]\left[F(t_{j-1},u_{j-1})-p'_{\varphi}(t_{j-1})u_{j-1}\right]+\\
&+\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_j)\right]\left[F(t_j,u_j)-p'_{\varphi}(t_j)u_j\right]\Big\}\left[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\right]^2\left[F(t_{k-1},u_{k-1})-p'_{\varphi}(t_{k-1})u_{k-1}\right]+f(t_k)\Big\},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

болот. Мында $k = 2,3,..., n$.

(4.14) жана (4.15) формуланын жардамы менен өсүүчү функция боюнчатуундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин жакындатылган чыгарылышын табууга болот. Сунуншталган метод менен бир мисал көрсөтөбүз.

Мисал. Төмөнкү өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесин чыгаргыла:

$$u''_{\varphi}(t) + \sqrt{t}\,u'_{\varphi}(t) + \frac{(1+t^2)u}{1+u^2} = 2 + 3t, \quad t \in [0,1], \tag{4.16}$$

$$\varphi(t) = \sqrt{t}, \; u(0) = 0, \quad u'_{\varphi}(0) = 0. \tag{4.17}$$

(4.16)-(4.17) Коши маселесинин так чыгарылышы

$$u(t) = t \tag{4.18}$$

экенидиги белгилүү.

Текшерүү: $u'_{\varphi}(t) = 2\sqrt{t}$, $u''_{\varphi}(t) =$ алынган туундуларды (4.16) теңдемнесине койсок, анда

$$2 + \sqrt{t} \cdot 2\sqrt{t} + \frac{(1+t^2)t}{1+t^2} = 2 + 3t$$

$$2 + 2t + t = 2 + 3t \quad => \quad 2 + 3t = 2 + 3t$$

берилген теңдемени канааттандырганын көрүп турабыз.

Чыгаруу: Эми бул (4.16)-(4.17) Коши маселесинин чыгарылышын жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгарабыз. Ал үчүн (4.16)-(4.17) Коши маселесин (4.4) формуланын жардамы менен Вольтерра-Стилтьестин интегралдык теңдемесине алып келебиз.

Мында $t_0 = 0$, $T = 1$, $n = 20$, $h = \frac{1-0}{20} = 0.05$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ болсун.

$$p(t) = -\sqrt{t}, \quad \varphi(t) = \sqrt{t}, \; F(t, u) = -\frac{(1+t^2)u}{1+u^2}, \quad g(t) = 2 + 3t.$$

$$u(t) = -\int_0^t \sqrt{s}\,u(s)\,d\left(\sqrt{s}\right) + \int_0^t \left[\sqrt{t} - \sqrt{s}\right]\cdot\left(-\frac{(1+s^2)u(s)}{1+(u(s))^2}\right)d\left(\sqrt{s}\right) + f(t), \qquad (4.19)$$

Мында $f(t) = \int_0^t \left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right)(2+3s)\,d\left(\sqrt{s}\right).$

(4.19) Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесинин жакындатылган чыгарылышы (4.16)-(4.17) Коши маселесинин жакындатылган чыгарылышы болот. (4.19) интегралдык теңдемесинин жакындатылган чыгарылышын жалпыланган трапеция методу менен чыгарабыз. Ал үчүн (4.14) жана (4.15) формулаларын колдонобуз.

$$u_1 = \frac{1}{1-0.5\cdot(-0.2236)\cdot 0.2236}\left\{\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0\cdot 0.2236 + \frac{1}{2}\cdot\left(0.2236\right)^2\right\} = 0.4939024390$$

(4.19) интегралдык теңдемесинин жакындатылган чыгарылышы менен так чыгарылышынын салыштыруусу жана айырмасы (катасы) төмөнкү таблицада көрсөтүлдү:

t_k	Так чыгарылышы $u(t_k)$	Сандык чыгарылышы u_k	Ката $\lvert u(t_k) - u_k \rvert$
0.05	0.05000000000	0.04939024390	0.00060975610
0.1	0.1000000000	0.09929953941	0.00070046059
0.15	0.1500000000	0.1492544207	0.0007455793
0.2	0.2000000000	0.1992283133	0.0007716867
0.25	0.2500000000	0.2492126104	0.0007873896
0.3	0.3000000000	0.2992033895	0.0007966105
0.35	0.3500000000	0.3491985174	0.0008014826
0.4	0.4000000000	0.3991966968	0.0008033032
0.45	0.4500000000	0.4491970779	0.0008029221
0.5	0.5000000000	0.4991990730	0.0008009270
0.55	0.5500000000	0.5492022600	0.0007977400
0.6	0.6000000000	0.5992063249	0.0007936751
0.65	0.6500000000	0.6492110313	0.0007889687
0.7	0.7000000000	0.6992161960	0.0007838040
0.75	0.7500000000	0.7492216772	0.0007783228
0.8	0.8000000000	0.7992273622	0.0007726378
0.85	0.8500000000	0.8492331626	0.0007668374
0.9	0.9000000000	0.8992390073	0.0007609927
0.95	0.9500000000	0.9492448414	0.0007551586
1	1	0.9992506194	0.0007493806
			0.01536763539

Бул мисалда каталык 0.01536763539 түздү.

ЖЫЙЫНТЫК

Бул диссертациялык иште өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышы жалпыланган трапеция методу менен жакындаштырып чыгаруу маселеси изилденди жана төмөнкү жыйынтыктар алынды:

- Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемеменин трапеция методу менен жакындатылган чыгарылышын эсептөөнүн формуласы алынды.

- Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине алынып келинди. Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселеси Вольтерра-Стилтьестин экинчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемесине алынып келип изилденди.
- Өсүүчү функция боюнча туундулуу сызыктуу эмес экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени жакындаштырып чыгарууда жалпыланган трапеция методун колдонууга мүмкүн экендиги көрсөтүлдү.

Жогоруда алынган формуланын негизинде мисал чыгарылды. Алынган натыйжалар илимдин жана техниканын ар кандай тармактарында колдонулушу мүмкүн.

АДАБИЯТТАР

[1] Асанов А. Производная функции по возрастающей функции. Табигый илимдер журналы, КТМУ, №1(2) (2001): 18-64.

[2] Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго и первого рода. Табигый илимдер журналы, КТМУ, №2 (2002): 79-95.

[3] Asanov A, Chelik MH and Chalish A. Approximating the Stiltjes integral by using the generalized trapezoid rule . Le Matematiche, 66(2) (2011a): 13–21.

[4] Asanov A, Hazar E, Eroz M, Matanova K and Abdyldaeva E. Approximate solution of Volterra–Stieltjes linear integral equations of the second kind with the generalized trapezoid rule. Adv Math Phys, (2016): 1–6.

[5] Asanov A, Almeida R, Malinowska AB. Fractional differential equations and Volterra–Stieltjes integral equations of the second kind. Computational and Applied Mathematics,2019: 38:160.

[6] Asanov A, Chelik MH and Abdujabbarov MM. Approximating the Stieltjes integral using the generalized midpoint rule. Matematika, 27(2) (2011b):139–148.

[7] Асанов А, Кадырова ГМ. Приближенное вычисление линейного интегрального уравнение Вольтерра-Стилтьеса второго рода обобщенным методом трапеции. Молодой ученый, 65(6) (2014): 3-9.

[8] Cerone P and Dragomir SS. Approximation of the Stieltjes integral and applications in numerical integration. Applications of Mathematics, 51 (1) (2006):37-47.

[9] Federson M, Bianconi R and Barbanti L. Linear Volterra integral equations. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,18(4) (2002): 553–560.

[10] Михлин СГ. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: ГИФМЛ, 234 с. 1956.

[11] Краснов МЛ., Киселев АИ. и Макаренко ГИ. Интегральные уравнения. Москва: Наука, 192 с, 2003.

[12] Рудин У. Основы математического анализа. Москва: Мир, 321 с, 1976.

[13] Натансон ИП. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 480 с, 1974.

[14] Сахнович ЛА. Нелинейные уравнения и обратные задачи на полуоси. Препринт / ИМ АН Укр, ССР, 87 (1987): 30 – 56.

[15] Корытов СГ. К вопросу об оптимальном управлении системами, описываемыми линейными функционально-дифференциальными. Краевые задачи: Межвуз. сб.науч.тр. Пермск.политехн. ин-т, (1986): 36 - 40.

[16] Барбашин ЕА. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 224 с, 1967.

[17] Шелест АВ. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. Москва: Наука, 160 с, 1990.

[18] Манжиров АВ, Полянин АД. Справочник по интегральным уравнением, методы решение. Москва: Факториал Пресс, 384 с, 2000.

[19] Çalış A, Stiltjes integralinde sayısal yaklaşım metodları, Yüksek Lisans Tezi. Manas Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Bişkek, 2010.

[20] Абдужаббаров ММ, Стилтьестин интегралын жакындаштырып эсептөө методу, Магистрдик диссертация. КТУ Манас. Табигый илимдер Институту, Математика багыты, Бишкек, 2010.

[21] Абсамат к Э, Вольтерра-Стилтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин бир классынын чыгарылыштыры, Бүтүрүү иши. КТУ Манас. Табигый Илимдер фак., Математика бөлүмү, Бишкек, 2020.

[22] Гаппаров М, Фредгольм-Стилтьестин II түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерин жалпыланган Эйлердин методу менен жакындаштырып чыгаруу, Магистрдик диссертация. КТУ Манас. Табигый илимдер Институту, Математика багыты, Бишкек, 2015.

[23] Калиткин НН. Численные методы. Москва: Наука, 512 с, 1978.

[24] Ортега Дж, Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 288 с, 1986.