



**EKSPONANSİYEL KONVEKS FONKSİYON
SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL
OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER**

PINAR UZMAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR**

**2021
Her hakkı saklıdır**

**AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**EKSPONANSİYEL KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN
KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**



Pınar UZMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI

2021 Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EKSPONANSİYEL KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Pınar UZMAN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tez çalışmasının giriş bölümünde eşitsizlik ve konveks fonksiyon kavramlarının tarihsel gelişiminden bahsedilmektedir. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları üzerine genel bilgiler verilmiştir. Kuramsal Temeller başlığı altında tezde kullanılan temel tanımlar, kavramlar ve teoremlere yer verilmiştir. Materyal ve Yöntem adlı kısımda da Atangana-Baleanu, Caputo-Fabrizio kesirli integralleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve tez çalışmasında kullanılacak lemmalara yer verilmiştir. Son bölüm olan bulgular kısmında Atangana-Baleanu, Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörlerini kullanarak eksponansiyel konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler elde edilmiştir.

2021,65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eksponansiyel konveks fonksiyon, Hölder eşitsizliği, power-mean eşitsizliği, konveks fonksiyonlar, Atangana Baleanu kesirli integral.

ABSTRACT
Master

**INTEGRAL INEQUALITIES FOR THE CLASSES OF EXPONENTIALLY
CONVEX FUNCTIONS INCLUDING FRACTIONAL INTEGRAL
OPERATORS**

Pınar UZMAN

Ağrı İbrahim Çeçen University
Institute of Graduate Studies
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In the introduction of this thesis, the historical development of the concepts of inequality and convex functions is mentioned. General information on the concepts of fractional derivative and fractional integral is given. Under the title of Theoretical Foundations, the basic definitions, concepts and theorems used in the thesis are given. In the section Materials and Methods, general information about Atangana-Baleanu, Caputo-Fabrizio fractional integrals is given and lemmas to be used in the thesis study are given. In the last part that is the findings, inequalities for exponential convex functions are obtained by using Atangana-Baleanu, Caputo-Fabrizio fractional integral operators.

2021,65 pages

Keywords: Exponential convex function, Hölder inequality, Power-mean inequality, convex functions, Atangana-Baleanu fractional integral.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alıŐma Ağrı İbrahim een Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans çalıŐmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalıŐmamı sağlayan, bana rehberlik eden, etkin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalıŐmalarımnda etkin katkısı bulunan ve tüm babacanlığı ile beni her zaman destekleyen ve yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teŐekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez yazım aŐamasında desteklerini esirgemeyen arkadaşım Engül AYBAY'a ve öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüŐ olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Pınar UZMAN, 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	2
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler	2
2.2. Bazı Temel Konveks Fonksiyon Sınıfları.....	3
2.3. Özel Fonksiyonlar	8
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	9
3.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegrali	9
3.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev ve İntegrali	9
3.3. İntegraller için Hölder Eşitsizliği	10
3.4. İntegraller için Power-Mean Eşitsizliği	10
3.5. Hermite Hadamard Tipli Eşitsizlikler	10
3.6. Çeşitli İntegral Özdeşlikler	12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	16
4.1. Eksponansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler	16
4.2. Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Eksponansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler	35
4.3. ABK-Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Eksponansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler	51
4.4. Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Eksponansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler.....	58
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	62
KAYNAKÇA	63

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(\varepsilon)$	Gama fonksiyonu
$B(\varepsilon)$	Normalizasyon fonksiyon
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^n	n –boyutlu Euclidean uzay
I	\mathbb{R} 'de bir aralık
I°	I 'nın içi
$L[\phi, \omega]$	$[\phi, \omega]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_c^p(\phi^p, \omega^p)$	$[\phi, \omega]$ aralığında kompleks değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi
f'	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
max	Maksimum
min	Minimum
$D_t^\alpha f(t)$	Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev operatörü
$I_a^t f(t)$	Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü
$D_t^\alpha f(t)$	Genelleştirilmiş Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev operatörü
${}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t)$	Caputo anlamında Atangana-Balenau kesirli türev operatörü
${}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t)$	Riemann anlamında Atangana-Balenau kesirli türev operatörü
${}^{AB}_a I_t^\alpha \{f(t)\}$	Atangana-Balenau kesirli integral operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks küme.....	2
Şekil 2.2. Konveks olmayan küme	2
Şekil 2.3. Konveks fonksiyon.....	
.....	3

1. GİRİŞ

Eşitsizlik teorisi matematiğin hemen hemen bütün dallarında yer almakla beraber fizik, mühendislik, iktisat gibi alanlarda da yaygın kullanım alanına sahiptir. 18 yy' a kadar bu alanda yapılan çalışmaların sayısı az olup üçgen eşitsizliği, aritmetik-geometrik eşitsizlik gibi birkaç eşitsizlikle sınırlı olmasına rağmen bu yüzyıldan sonra bu alanda yapılan çalışmaların sayısı artmıştır. *Chebyshev, Grüss, Hölder, Minkowski, Young* gibi birçok eşitsizlik literatüre eklenmiştir. 1934 yılında *Hardy* ve arkadaşları tarafından yazılan “*Inequalities*” adlı kitap bu alanda yazılan ilk kitaptır.

Konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinin gelişiminde önemli bir rol almaktadır. Konvekslik kavramının kökleri her ne kadar M.Ö 2000 yıllarına dayansa da ilk çalışmalar 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V *Jensen* tarafından ortaya konmuştur.

Kesirli türev ve kesirli integral konularını içeren kesirli analizin başlangıcı 30 Eylül 1695 tarihinde L'Hospital' in Leibniz'e yazdığı mektupta sorduğu ilginç soruyla başlamıştır. L'Hospital mektupta Leibniz'e n.dereceden $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ türev notasyonunda $n = \frac{1}{2}$ için sonucun nasıl olacağını sormuştur. Leibniz ise “Bir gün faydalı sonuçlar çıkacak açık bir paradokstur” diye cevaplamıştır. Böylelikle kesirli analiz kavramı ortaya çıkmış ve bu alanda 300 yıl boyunca birçok çalışma yapılmıştır öyle ki 21 yüzyılın en önemli analiz konularından biri olmuştur. Günümüze kadar birçok kesirli integral operatörü tanımlanmış ve tanımlanmaya devam etmektedir. *Riemann-Liouville, Hadamard, Raina, Prabhakar ve Katugompola* kesirli integral operatörleri birçok araştırmacı tarafından yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Bu tezin amacı *Atangana –Baleanu ve Caputo-Fabrizio* kesirli integral operatöründen yararlanarak eksponansiyel konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde etmektir.

2. KURAMSAL TEMELLER

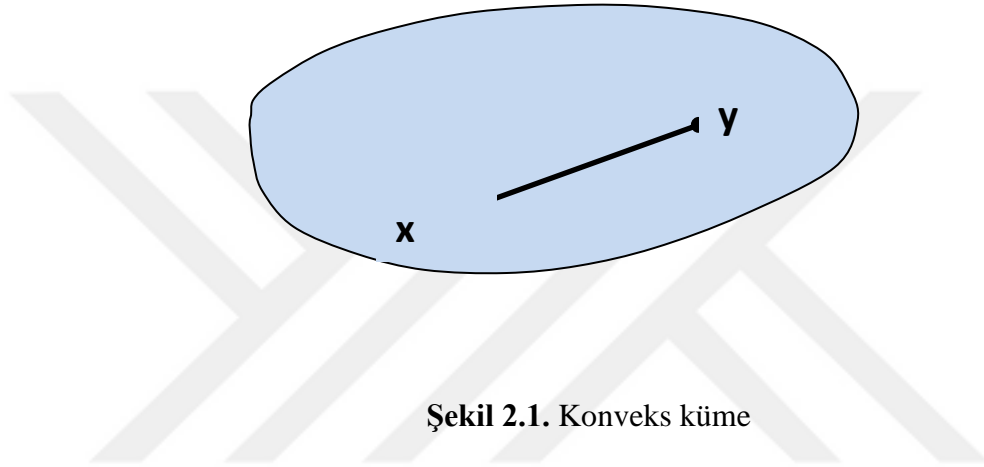
Bu bölümde tezde kullanılacak önemli kavram ve tanımlara yer verilmiştir.

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Tanım ve Özellikler

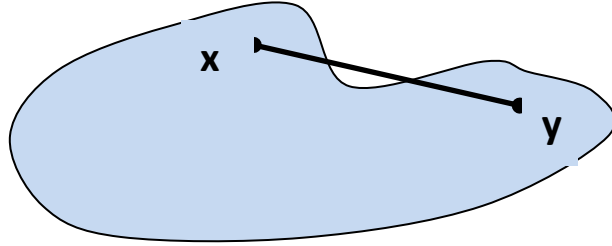
Tanım 2.1.1.(Konveks Küme) R bir lineer uzay $M \subseteq R$ olsun eğer $\varphi, \psi \in M$ $\sigma \in [0,1]$ olmak üzere

$$A = \{z \in R : z = \sigma\varphi + (1-\sigma)\psi\} \subseteq M$$

ise M kümesine konveks küme denir. A kümesine φ ve ψ sınır noktalarına sahip kapalı bölge denir. $z \in A$ ise A 'nın iç noktası olarak adlandırılır (Kreyszig 1978).



Şekil 2.1. Konveks küme

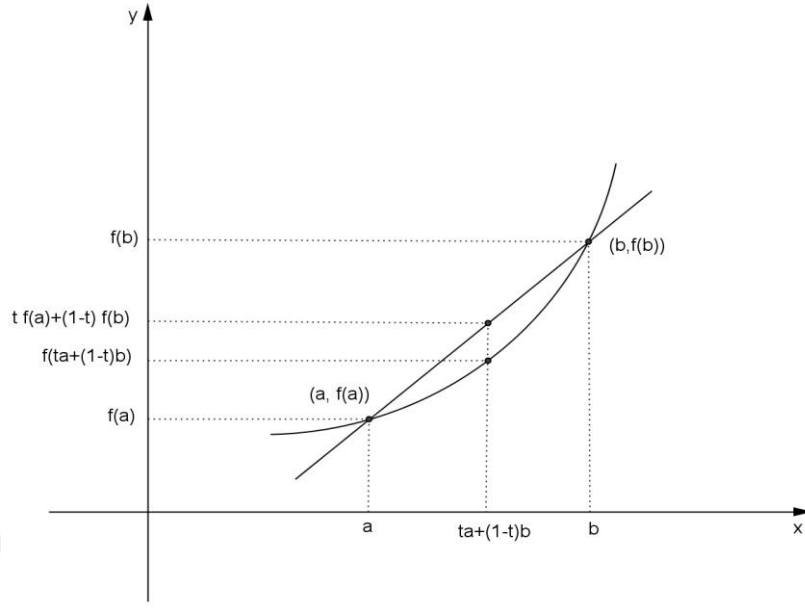


Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (Konveks Fonksiyon) S , \mathbb{R} de bir aralık ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $\phi, \omega \in S$ ve $\sigma \in [0,1]$ için

$$f(\sigma\phi + (1-\sigma)\omega) \leq \sigma f(\phi) + (1-\sigma)f(\omega)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pecaric ve ark. 1992).



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

2.2. Bazı Temel Konveks Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.2.1. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $s \in (0,1]$

$\sigma^s + \psi^s = 1$ olmak üzere her $\phi, \omega \geq 0$ için

$$f(\sigma\phi + \psi\omega) \leq \sigma^s f(\phi) + \psi^s f(\omega)$$

şartı gerçekleşiyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.2. (İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon) $\sigma, \psi \geq 0$, $\sigma + \psi = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $\phi, \omega \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(\sigma\phi + \psi\omega) \leq \sigma^s f(\phi) + \psi^s f(\omega)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir (Breckner 1978).

Tanım 2.2.3 (m-Konveks Fonksiyon) $f: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\tau > 0$ olsun. Her $\phi, \omega \in [0, \tau]$, $\sigma \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$f(\sigma\phi + m(1-\sigma)\omega) \leq \sigma f(\phi) + m(1-\sigma)f(\omega)$$

şartı gerçekleşiyorsa f fonksiyonuna m -konveks fonksiyon denir.

Burada $m=1$ seçilirse yukarıda verilen tanım klasik konveks fonksiyon tanımına dönüşür (Toader 1988).

Tanım 2.2.4. (Quasi-Konveks Fonksiyon) $P \subset \mathbb{R}$ boştan olmayan konveks bir küme $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \phi, \omega \in P$ ve $\sigma \in [0, 1]$

$$f(\sigma\phi + (1-\sigma)\omega) \leq \sup\{f(\phi), f(\omega)\}$$

ise f 'ye *quasi-konveks* denir. Eğer;

$$f(\sigma\phi + (1-\sigma)\omega) < \sup\{f(\phi), f(\omega)\}$$

ise f 'ye kesin *quasi-konveks* fonksiyon denir (Dragomir 1998).

Tanım 2.2.5. (J-Konveks Fonksiyon) S, \mathbb{R}' de bir aralık olmak üzere $\forall \phi, \omega \in S$ için

$$f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \leq \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2}$$

gerçekleniyorsa f fonksiyonuna S üzerinde *Jensen konveks* veya *J-konveks* fonksiyon denir (Mitrinovic 1970).

Tanım 2.2.6. (Godunova-Levin Fonksiyon) Negatif olmayan $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $\phi, \omega \in S$, $\sigma \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\sigma\phi + (1-\sigma)\omega) \leq \frac{f(\phi)}{\sigma} + \frac{f(\omega)}{1-\sigma}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye *Godunova–Levin* fonksiyonu denir (Godunova ve Levin 1985).

Tanım 2.2.7. (Log-Konveks Fonksiyon) S, \mathbb{R}' de bir aralık olmak üzere $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise veya her $\phi, \omega \in S$ ve $\sigma \in (0,1)$ için

$$f(\sigma\phi + (1-\sigma)\omega) \leq [f(\phi)]^\sigma [f(\omega)]^{1-\sigma}$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa ise f fonksiyonuna *log-konveks* fonksiyon denir (Pecaric ve ark. 1992).

Tanım 2.2.8. (Wright-Konveks Fonksiyon) $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\omega > \phi, \alpha > 0$ şartları altında $\forall \omega + \alpha, \phi \in S$ için

$$f(\phi + \alpha) - f(\phi) \leq f(\omega + \alpha) - f(\omega)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $S \subset \mathbb{R}'$ 'de *Wright-konveks* fonksiyon denir (Dragomir 1998).

Tanım 2.2.9. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon) $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\omega > \phi, \alpha > 0$ şartları altında $\forall \phi, \omega, \omega + \alpha \in S$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2} [f(\sigma\phi + (1-\sigma)\omega) + f((1-\sigma)\phi + \sigma\omega)] \leq \sup\{f(\phi), f(\omega)\}$$

veya

$$\frac{1}{2} [f(\omega) + f(\phi + \alpha)] \leq \sup\{f(\phi), f(\omega + t)\}$$

herhangi biri gerçekeniyorsa f 'ye $S \subseteq \mathbb{R}$ 'de *Wright – quasi – konveks* fonksiyon denir (Dragomir 1998).

Tanım 2.2.10. (P –Fonksiyon) $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} 'de negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall \eta, \nu \in S, \sigma \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(\sigma\eta + (1-\sigma)\nu) \leq f(\eta) + f(\nu)$$

gerçekeniyorsa f fonksiyonuna P –fonksiyon denir (Dragomir 1995).

Tanım 2.2.11. (h –Konveks Fonksiyon) $h: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu $\forall \varphi, \psi \in I, \sigma \in [0,1]$ için

$$f(\sigma\varphi + (1-\sigma)\psi) \leq h(\sigma)f(\varphi) + h(1-\sigma)f(\psi)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna h –konveks fonksiyon denir (Varosonec 2007).

Tanım 2.2.12. (Ekspansiyel Konveks Fonksiyon) $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ pozitif değerli bir dönüşüm için eğer

$$e^{f(\tau\phi + (1-\tau)\omega)} \leq \tau e^{f(\phi)} + (1-\tau)e^{f(\omega)} \quad \phi, \omega \in K \quad \tau \in [0,1]$$

gerçekeniyorsa f dönüşümüne K üzerinde ekspansiyel konveks fonksiyon denir (Antczak 2001).

Tanım 2.2.13. (Ekspansiyel s -Konveks Fonksiyon) $s \in [0,1]$ olmak üzere $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için eğer

$$e^{f(\tau\phi + (1-\tau)\omega)} \leq \tau^s e^{f(\phi)} + (1-\tau)^s e^{f(\omega)} \quad \phi, \omega \in K \quad \tau \in [0,1]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyon ekspansiyel s – konveks fonksiyon denir.

Bu tanımda $\tau = \frac{1}{2}$ alınırsa $e^{f(\frac{\phi+\omega}{2})} \leq \frac{1}{2^s} [e^{f(\phi)} + e^{f(\omega)}]$ elde edilir (Antczak 2001).

Tanım 2.2.14. (Eksponansiyel m -Konveks Fonksiyon) $m \in (0,1]$ iken $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon için eğer

$$e^{f((1-\tau)\phi+m\tau\omega)} \leq (1-t)e^{f(\phi)} + m\tau f(\omega) \quad \phi, \omega \in K \quad \tau \in [0,1]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyona eksponansiyel m -konveks fonksiyon denir.

$$\tau = \frac{1}{2} \text{ alınırsa} \quad e^{f\left(\frac{\phi+m\omega}{2}\right)} \leq \frac{e^{f(\phi)}+me^{f(\omega)}}{2} \quad \forall \phi, \omega \in K$$

elde edilir bu fonksiyona Jensen m -konveks denir (Rashid ve ark. 2019).

Tanım 2.2.15. (Eksponansiyel Quasi-Konveks Fonksiyon) K kümesi boş olmayan konveks küme olmak üzere f fonksiyonu için

$$e^{f(\phi+\gamma(\omega-\phi))} \leq \sup\{e^{f(\phi)}, e^{f(\omega)}\} \quad \forall \phi, \omega \in K \quad \gamma \in [0,1]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna eksponansiyel quasi-konveks fonksiyon denir.

Yukarıdaki tanımdan;

$$\begin{aligned} e^{f(\phi+\gamma(\omega-\phi))} &\leq (1-\gamma)e^{f(\phi)} + \gamma e^{f(\omega)} \\ &\leq \sup\{e^{f(\phi)}, e^{f(\omega)}\} \end{aligned}$$

bu da her eksponansiyel konveks fonksiyonun eksponansiyel *quasi*-konveks olduğunu ancak tersinin doğru olmadığını gösterir (Noor 2019).

Eksponansiyel konveks fonksiyon kavramının farklı bir versiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.16. (Eksponansiyel Konveks Fonksiyon) $f: K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\phi, \omega \in K$ $\sigma \in [0,1]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken fonksiyonu eğer;

$$f((1-\sigma)\phi + \sigma\omega) \leq (1-\sigma) \frac{f(\phi)}{e^{\alpha\phi}} + \sigma \frac{f(\omega)}{e^{\alpha\omega}}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna eksponansiyel konveks fonksiyon denir.

$\alpha = 0$ alınırsa eksponansiyel konveks fonksiyon tanımı konveks fonksiyona dönüşür (Awan ve ark. 2018).

Teorem 2.2.1. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f , $[\phi, \omega]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_{\phi}^{\omega} f(\sigma) d\sigma \right| \leq \int_{\phi}^{\omega} |f(\sigma)| d\sigma \quad (\phi < \omega)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic 1970).

2.3.Özel Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1.(Gama Fonksiyonu) $\psi > 0$ için

$$\Gamma(\psi) = \int_0^{\infty} \sigma^{\psi-1} e^{-\sigma} d\sigma$$

ile tanımlanan fonksiyona Gama Fonksiyonu denir (Kannappan 2009).

Tanım 2.3.2. (Beta Fonksiyonu) $\varphi, \psi > 0$

$$\beta(\varphi, \psi) = \int_0^1 \sigma^{\varphi-1} (1-\sigma)^{\psi-1} d\sigma$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir (Rainville 1971).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Atangana-Baleanu Kesirli Türev ve İntegrali

Tanım 3.1.1 (Atangana-Baleanu Kesirli Türev) $f \in L^1(\phi, \omega)$, $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0,1]$ iken

$${}_{\phi}^{AB} D_{\kappa}^{\varepsilon} f(\kappa) = \frac{B(\varepsilon)}{1-\varepsilon} \int_{\phi}^{\kappa} f'(k) E_{\varepsilon} \left[-\varepsilon \frac{(\kappa-k)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)} \right] dk$$

$${}_{\omega}^{AB} D_{\kappa}^{\varepsilon} f(\kappa) = \frac{B(\varepsilon)}{1-\varepsilon} \int_{\kappa}^{\omega} f'(k) E_{\varepsilon} \left[-\varepsilon \frac{(k-\kappa)^{\varepsilon}}{(1-\varepsilon)} \right] dk .$$

Burada $B(\varepsilon)$ normalizasyon fonksiyonu olup; $B(\varepsilon) > 0$, $B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir (Atangana ve Baleanu 2016).

Tanım 3.1.2 (Atangana-Baleanu Kesirli İntegral) $f \in L^1(\phi, \omega)$, $\phi < \omega$,
 $\varepsilon \in [0,1]$ iken

$${}_{\omega}^{AB}I_{\kappa}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} = \frac{1-\varepsilon}{B(\varepsilon)} f(\kappa) + \frac{\varepsilon}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_{\kappa}^{\omega} f(k)(k-\kappa)^{\varepsilon-1} dk$$

Burada $B(\varepsilon)$ normalizasyon fonksiyonu olup; $B(\varepsilon) > 0$, $B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016).

3.2. Caputo-Fabrizio Kesirli Türev ve İntegrali

Tanım 3.2.1 (Caputo-Fabrizio Kesirli Türev) $f \in L(\phi, \omega)$, $\phi < \kappa < \omega$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon \in (0,1)$ olmak üzere ε . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli türevleri

$${}^{CF}D^{\varepsilon} f(\kappa) = \frac{B(\varepsilon)}{1-\varepsilon} \int_{\phi}^{\kappa} \exp\left(\frac{-\varepsilon(\kappa-k)}{1-\varepsilon}\right) f'(k) dk \quad \kappa > \phi$$

$${}^{CF}D^{\varepsilon} f(\kappa) = \frac{B(\varepsilon)}{1-\varepsilon} \int_{\kappa}^{\omega} \exp\left(\frac{-\varepsilon(k-\kappa)}{1-\varepsilon}\right) f'(k) dk \quad \kappa < \omega$$

şeklindedir (Caputo ve Fabrizio 2015).

Tanım 3.2.2 (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali) $f \in L(\phi, \omega)$, $\phi < \kappa < \omega$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon \in [0,1]$ olmak üzere ε . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integralleri

$$({}^{CF}I_{\phi}^{\varepsilon} f)(\kappa) = \frac{1-\varepsilon}{B(\varepsilon)} f(\kappa) + \frac{\varepsilon}{B(\varepsilon)} \int_{\phi}^{\kappa} f(\kappa) dk \quad \kappa > \phi$$

$$({}^{CF}I_{\omega}^{\varepsilon} f)(\kappa) = \frac{1-\varepsilon}{B(\varepsilon)} f(\kappa) + \frac{\varepsilon}{B(\varepsilon)} \int_{\kappa}^{\omega} f(\kappa) dk \quad \kappa < \omega$$

şeklindedir (Caputo ve Fabrizio 2015).

3.3. İntegraller için Hölder Eşitsizliği

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\phi}^{\omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic 1970).

3.4. İntegraller için Power-Mean Eşitsizliği

$q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eğer $f, |f|, g, |g|^q$ $[\phi, \omega]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\phi}^{\omega} |f(k)g(k)| dk \leq \left(\int_{\phi}^{\omega} |f(k)| dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\phi}^{\omega} |f(k)||g(k)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic 1970).

3.5. Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Öncelikle Hermite-Hadamard eşitsizliği hatırlatılacak ardından farklı fonksiyon sınıfları için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilecektir.

$I \subset \mathbb{R}$ ' de bir aralık olsun. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \leq \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \leq \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pecaric ve ark. 1992).

Teorem 3.5.1 $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir bir eksponansiyel konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \leq \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} \frac{f(k)}{e^{\alpha k}} dk \leq \frac{e^{-\alpha \phi} f(\phi) + e^{-\alpha \omega} f(\omega)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Awan ve ark. 2018)

İspat. f eksponansiyel konveks fonksiyon olsun, bu durumda

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{e^{\alpha x}} + \frac{f(y)}{e^{\alpha y}}$$

yazılır.

$x = (1-k)\phi + k\omega$ ve $y = k\phi + (1-k)\omega$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$2f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \leq \frac{f((1-k)\phi + k\omega)}{e^{\alpha((1-k)\phi + k\omega)}} + \frac{f(k\phi + (1-k)\omega)}{e^{\alpha(k\phi + (1-k)\omega)}}$$

Bu ifadenin k 'ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alınır

$$f\left(\frac{\phi+\omega}{2}\right) \leq \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} \frac{f(k)}{e^{\alpha k}} dk \quad (1)$$

eşitsizliği elde edilir.

f fonksiyonu eksponansiyel fonksiyon olduğundan;

$$f((1-k)\phi+k\omega) \leq (1-k) \frac{f(\phi)}{e^{\alpha\phi}} + k \frac{f(\omega)}{e^{\alpha\omega}}$$

yazılır.

Bu eşitsizliğin k 'ye göre $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} \frac{f(k)}{e^{\alpha k}} dk \leq \frac{e^{-\alpha\phi} f(\phi) + e^{-\alpha\omega} f(\omega)}{2} \quad (2)$$

(1) ve (2) eşitsizlikleri toplandığında ispat tamamlanmış olur.

3.6. Çeşitli İntegral Özdeşlikler

Bu bölümde araştırma bulgularını elde etmek için kullanılan integral eşitliklerine yer verilecektir.

Lemma 3.6.1. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun Eğer $f' \in L[\phi, \omega]$ ise

$$\frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk = \frac{(\omega - \phi)}{2} \int_0^1 (1 - 2k) f'(k\phi + (1 - k)\omega) dk$$

eşitliği yazılır (Dragomir, 1998).

Lemma 3.6.2. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[\phi, \omega]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \\ &= \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 (-k) f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) dk + \int_0^1 k f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) dk \right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Alomari ve ark 2010).

Lemma 3.6.3. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. f'' , $[\phi, \omega]$ üzerinde integrallenebiliyorsa

$$\frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk = \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 k(1-k) f''(k\phi + (1-k)\omega) dk$$

eşitliği yazılır (Alomari ve ark. 2010).

Lemma 3.6.4. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun Eğer $f' \in L[\phi, \omega]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{(\omega - x)f(\omega) + (x - \phi)f(\phi)}{\omega - \phi} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \\ &= \frac{(x - \phi)^2}{\omega - \phi} \int_0^1 (k-1) f'(kx + (1-k)\phi) dk + \frac{(\omega - x)^2}{\omega - \phi} \int_0^1 (1-k) f'(kx + (1-k)\omega) dk \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Kavurmacı ve ark. 2011).

Lemma 3.6.5. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $f'' \in L[\phi, \omega]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \\ &= \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 m(k) [f''(k\phi + (1-k)\omega) + f''(k\omega + (1-k)\phi)] dk \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$m(k) = \begin{cases} k^2 & k \in [0, 1) \\ (1-k)^2 & k \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

şeklindedir (Sarıkaya ve ark. 2010).

Lemma 3.6.6. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\kappa \in [\phi, \omega]$ iken Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü için

$$\begin{aligned}
& {}^{AB}I_{\phi}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_{\omega}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon} f(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon} f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \\
&= \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} f'(\phi) + \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} f''(k\kappa + (1-k)\phi) dk \\
&- \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} f'(\omega) + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} f''(k\omega + (1-k)\kappa) dk
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\Gamma(\cdot)$ Gama fonksiyonudur (Set ve ark. 2021).

Lemma 3.6.7. $f: [\phi^p, \omega^p] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\varepsilon \in (0,1)$, $p > 0$ ve $0 \leq \phi < \omega$ olmak üzere $f \in L_c^p(\phi^p, \omega^p)$ iken $g(x) = x^p$ ise ABK-integral operatörü için

$$\begin{aligned}
& \frac{{}^{ABKp}I_{\phi^p}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\omega^p}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^{\varepsilon}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{B(\varepsilon)} \\
&= \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon} k^{p-1} f'(k^p \kappa^p + (1-k^p)\phi^p) \\
&- \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} f'(k^p \omega^p + (1-k^p)\kappa^p) dk
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Butt ve ark. 2021).

Lemma 3.6.8. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0,1]$ ve $\kappa \in [\phi, \omega]$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
& {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} = \\
& \frac{{}^{AB}I_{\frac{\phi+\kappa}{2}}^{\varepsilon} \left\{ f\left(\frac{\phi+\omega}{2}\right) \right\} + {}^{AB}I_{\frac{\phi+\kappa}{2}}^{\varepsilon} \left\{ f\left(\frac{\phi+\omega}{2}\right) \right\} + {}^{AB}I_{\frac{\kappa+\omega}{2}}^{\varepsilon} \left\{ f\left(\frac{\kappa+\omega}{2}\right) \right\} + {}^{AB}I_{\frac{\phi+\kappa}{2}}^{\varepsilon} \left\{ f\left(\frac{\kappa+\omega}{2}\right) \right\}}{2^{\varepsilon}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} [f(\phi) + f(\kappa)] - \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} [f(\kappa) + f(\omega)] - \frac{2(1-\varepsilon)}{B(\varepsilon)} \left[f\left(\frac{\phi+\kappa}{2}\right) + f\left(\frac{\kappa+\omega}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \phi \right) dk \right] \\
&\quad - \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \omega \right) dk \right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Set ve ark. 2021).

Lemma 3.6.9. $f: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\phi < \omega$, $f' \in L_1[\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\kappa \in [\phi, \omega]$, $B(\varepsilon) > 0$ normalizasyon fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega - \phi}{2} \int_0^1 (1-2k) f' (k\phi + (1-k)\omega) dk - \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega - \phi)} f(\kappa) \\
&= \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega - \phi)} \left[({}^{CF}I_\phi^\varepsilon f)(\kappa) + ({}^{CF}I_\omega^\varepsilon f)(\kappa) \right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Gürbüz ve ark. 2020).



4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde klasik integral operatörler yardımıyla eksponansiyel konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikler ispat edilmiştir.

4.1. Eksponansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{8} \left\{ \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| &= \left| \frac{(\omega - \phi)}{2} \int_0^1 (1-2k) f'(k\phi + (1-k)\omega) dk \right| \\ &\leq \frac{(\omega - \phi)}{2} \int_0^1 |(1-2k)| |f'(k\phi + (1-k)\omega)| dk \\ &= \frac{\omega - \phi}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2k) |f'(k\phi + (1-k)\omega)| dk + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2k-1) |f'(k\phi + (1-k)\omega)| dk \right\}. \end{aligned}$$

$|f'|$ eksponansiyel konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| &\leq \frac{\omega - \phi}{2} + \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2k) \left(k \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) dk \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2k-1) \left(k \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) dk \right\} \end{aligned}$$

yazılır ve gerekli işlemler yapıp integraller hesaplandığında

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{8} \left\{ \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun Eğer $|f'|^q$, $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel

konveks fonksiyon ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)}{2^{1+\frac{1}{q}} (p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| = \left| \frac{(\omega - \phi)}{2} \int_0^1 (1-2k) f'(k\phi + (1-k)\omega) dk \right|$$

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)}{2} \int_0^1 (1-2k) |f'(k\phi + (1-k)\omega)| dk.$$

Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)}{2} \left(\int_0^1 |(1-2k)|^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(k\phi + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|$ eksponansiyel konveks olduğundan,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)}{2} \left(\int_0^1 |(1-2k)|^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 k \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)}{2^{1+\frac{1}{q}} (p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun Eğer $|f'|^q$, $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ise $q > 1$ için

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{2^{\frac{2+\frac{2}{q}}{q}}} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| = \left| \frac{(\omega - \phi)}{2} \int_0^1 (1 - 2k) f'(k\phi + (1 - k)\omega) dk \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)}{2} \int_0^1 |(1 - 2k)| |f'(k\phi + (1 - k)\omega)| dk$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe Power –Mean eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)}{2} \left(\int_0^1 |(1 - 2k)| dk \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |(1 - 2k)| |f'(k\phi + (1 - k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks özelliğini kullanarak;

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)}{2} \left(\int_0^1 |(1 - 2k)| dk \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |(1 - 2k)| \left(k \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + (1 - k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right) dk \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{2^{\frac{2+2}{q}}} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right]^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{8} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.2 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
&= \left| \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 (-k) f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) dk + \int_0^1 k f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) dk \right] \right| \\
&\leq \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right| dk + \int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right| dk \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. $|f'|$ eksponansiyel konveks olduğu için,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
&\leq \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 k \left(\frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) dk + \int_0^1 k \left(\frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| + \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \right) dk \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{8} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right]$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ve $p > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
&\leq \frac{\omega - \phi}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left[\frac{3}{4} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{4} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{3}{4} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.2 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
&= \left| \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 (-k) f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) dk + \int_0^1 k f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) dk \right] \right| \\
&\leq \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right| dk + \int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right| dk \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanarak;

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| &\leq \frac{\omega - \phi}{4} \left\{ \left(\int_0^1 k^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\int_0^1 k^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks olduğundan;

$$\left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{4} \left\{ \left(\int_0^1 k^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
\left. + \left(\int_0^1 k^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

yazılır ve gerekli integral hesaplamaları yapıldığında;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
&\leq \frac{\omega - \phi}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left[\frac{3}{4} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{4} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{3}{4} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.6. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks bir fonksiyon ise $q > 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)}{2^{\frac{3-\frac{1}{q}}{q}}} \left\{ \left[\frac{5}{12} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{12} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{12} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{5}{12} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.2 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right|$$

$$= \left| \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 (-k) f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) dk + \int_0^1 k f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) dk \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega - \phi}{4} \left[\int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right| dk + \int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right| dk \right]$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Power-Mean eşitsizliği uygulanarak;

$$\left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{\omega - \phi}{4} \left[\left(\int_0^1 k dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \phi + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 k dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 k \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \omega + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

bulunur. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks olduğu için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{\omega - \phi}{4} \left[\left(\int_0^1 k dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 k \left(\frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right) dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 k dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 k \left(\frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right) dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Gerekli integral hesaplamaları yapıldığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\omega) + f(\phi)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)}{2^{\frac{3-\frac{1}{q}}{q}}} \left\{ \left[\frac{5}{12} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{12} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{1}{12} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{5}{12} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.7. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon ve $|f''|$, $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{24} \left\{ \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} + \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| = \left| \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 k(1-k) f''(k\phi + (1-k)\omega) dk \right| \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 |k(1-k)| |f''(k\phi + (1-k)\omega)| dk \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 (k - k^2) |f''(k\phi + (1-k)\omega)| dk . \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. $|f''|$ fonksiyonu $[\phi, \omega]$ aralığında eksponansiyel konveks olduğundan;

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 (k - k^2) \left[k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1 - k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right] dk$$

olur ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{24} \left[\left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right]$$

elde edilir.

Teorem 4.1.8. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. $|f''|^q, [\phi, \omega]$ üzerinde bir eksponansiyel fonksiyon ve $p > 1$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} \left[\frac{\Gamma(p+1)^2}{\Gamma(2p+2)} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f''(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} + \frac{|f''(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| &= \left| \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 k(1 - k) f''(k\phi + (1 - k)\omega) dk \right| \\ &\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 |k(1 - k)| |f''(k\phi + (1 - k)\omega)| dk \end{aligned}$$

eşitsizlik yazılır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\int_0^1 (k - k^2)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f''(k\phi + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f''|^q$ eksponansiyel konveks olduğundan,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\int_0^1 (k - k^2)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 k \frac{|f''(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} + (1-k) \frac{|f''(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve gerekli işlemler yapıldığında;

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left[\frac{\Gamma(p+1)^2}{\Gamma(2p+2)} \right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{|f''(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} + \frac{|f''(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.9. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. $|f''|^q$, $[\phi, \omega]$ üzerinde bir eksponansiyel fonksiyon ve $q > 1$ ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{6.2^{1+\frac{1}{q}}} \left[\left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| = \left| \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 k(1-k) f''(k\phi + (1-k)\omega) dk \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 |k(1-k)| |f''(k\phi + (1-k)\omega)| dk$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\int_0^1 (k - k^2) dk \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (k - k^2) |f''(k\phi + (1 - k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılır. $|f''|^q$ eksponansiyel konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\int_0^1 (k - k^2) dk \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (k - k^2) \left(k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + (1 - k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right) dk \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

gerekli işlemler yapıldığında istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.10. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. $|f''|^q$, $[\phi, \omega]$ üzerinde bir eksponansiyel fonksiyon ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\frac{\Gamma(p+1)^2}{p\Gamma(2p+2)} + \frac{1}{2q} \left[\frac{|f''(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} + \frac{|f''(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} \right] \right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| = \left| \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 k(1 - k) f''(k\phi + (1 - k)\omega) dk \right| \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \int_0^1 (k - k^2) |f''(k\phi + (1 - k)\omega)| dk \end{aligned}$$

yazılır. Young eşitsizliğini kullanarak;

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\int_0^1 \frac{(k - k^2)^p}{p} + \frac{|f''(k\phi + (1 - k)\omega)|^q}{q} dk \right)$$

elde edilir. $|f|''^q$ 'nun eksponansiyel konvekslik özelliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 (k - k^2)^p dk + \frac{1}{q} \int_0^1 k \frac{|f''(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} + (1-k) \frac{|f''(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} dk \right) \\ & \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left(\frac{\Gamma(p+1)^2}{p\Gamma(2p+2)} + \frac{1}{2q} \left[\frac{|f''(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} + \frac{|f''(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} \right] \right) \end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.11. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ $x \in [\phi, \omega]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega - x)f(\omega) + (x - \phi)f(\phi)}{\omega - \phi} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{1}{6} \frac{|f'(x)|}{e^{\alpha x}} \left[\frac{(x - \phi)^2 + (\omega - x)^2}{\omega - \phi} \right] + \frac{1}{3(\omega - \phi)} \left[\frac{(x - \phi)^2 |f'(\phi)|}{e^{\alpha\phi}} + \frac{(\omega - x)^2 |f'(\omega)|}{e^{\alpha\omega}} \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega - x)f(\omega) + (x - \phi)f(\phi)}{\omega - \phi} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{(x - \phi)^2}{\omega - \phi} \int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\phi)| dk + \frac{(\omega - x)^2}{\omega - \phi} \int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\omega)| dk \end{aligned}$$

yazılır. $|f'|$ fonksiyonun eksponansiyel konveks olduğu için,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega - x)f(\omega) + (x - \phi)f(\phi)}{\omega - \phi} - \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\ & \leq \frac{(x - \phi)^2}{\omega - \phi} \int_0^1 (1-k) \left(k \frac{|f'(x)|}{e^{\alpha x}} + (1-k) \frac{|f'(\phi)|}{e^{\alpha\phi}} \right) dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \int_0^1 (1-k) \left(k \frac{|f'(x)|}{e^{\alpha x}} + (1-k) \frac{|f'(\omega)|}{e^{\alpha \omega}} \right) dk \\
& \leq \frac{1}{6} \frac{|f'(x)|}{e^{\alpha x}} \left[\frac{(x-\phi)^2 + (\omega-x)^2}{\omega-\phi} \right] + \frac{1}{3(\omega-\phi)} \left[\frac{(x-\phi)^2 |f'(\phi)|}{e^{\alpha \phi}} + \frac{(b-x)^2 |f'(\omega)|}{e^{\alpha \omega}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.12. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ $x \in [\phi, \omega]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
& \leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} (\omega-\phi)} \left[(x-\phi)^2 \left(\left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha \phi}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (\omega-x)^2 \left(\left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha \omega}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
& \leq \frac{(x-\phi)^2}{\omega-\phi} \int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\phi)| dk + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\omega)| dk
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk \right| \\
& \leq \frac{(x-\phi)^2}{\omega-\phi} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(kx + (1-k)\phi)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(kx + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir, $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon olduğundan;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k)dk \right| \\ & \leq \frac{(x-\phi)^2}{\omega-\phi} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 k \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 k \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{1}{q}} (\omega-\phi)} \left[(x-\phi)^2 \left(\left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (\omega-x)^2 \left(\left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.13. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ $x \in [\phi, \omega]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° 'de diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $q > 1$ ve $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k)dk \right| \\ & \leq \frac{1}{2^{1-\frac{1}{q}} (\omega-\phi)} \left[(x-\phi)^2 \left(\frac{1}{6} \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \frac{1}{3} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (\omega-x)^2 \left(\frac{1}{6} \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \frac{1}{3} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k)dk \right| \\ & = \left| \frac{(x-\phi)^2}{\omega-\phi} \int_0^1 (k-1) f'(kx + (1-k)\phi) dk + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \int_0^1 (1-k) f'(kx + (1-k)\omega) dk \right| \\ & \leq \frac{(x-\phi)^2}{\omega-\phi} \int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\phi)| dk + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\omega)| dk \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Power-Mean eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k)dk \right| \\ & \leq \frac{(x-\phi)^2}{\omega-\phi} \left(\int_0^1 (1-k) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\phi)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \left(\int_0^1 (1-k) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-k) |f'(kx + (1-k)\omega)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k)dk \right| \\ & \leq \frac{(x-\phi)^2}{\omega-\phi} \left(\int_0^1 (1-k) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-k) \left(k \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(\omega-x)^2}{\omega-\phi} \left(\int_0^1 (1-k) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-k) \left(k \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli işlemler yapıldığında;

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega-x)f(\omega) + (x-\phi)f(\phi)}{\omega-\phi} - \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k)dk \right| \\ & \leq \frac{1}{2^{1-\frac{1}{q}}(\omega-\phi)} \left[(x-\phi)^2 \left(\frac{1}{6} \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \frac{1}{3} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (\omega-x)^2 \left(\frac{1}{6} \left| \frac{f'(x)}{e^{\alpha x}} \right|^q + \frac{1}{3} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.14. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun Eğer $f'' \in L[\phi, \omega]$ ve $|f''|, [\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k)dk - f\left(\frac{\phi+\omega}{2}\right) \right| \leq \frac{3(\omega-\phi)}{16} \left[\left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right]$$

elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.5 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir

$$\left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} k^2 [|f''(k\phi + (1-k)\omega)| + |f''(k\omega + (1-k)\phi)|] dk \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 [|f''(k\phi + (1-k)\omega)| + |f''(k\omega + (1-k)\phi)|] dk \right.$$

yazılır. $|f''|$, eksponansiyel konveks olduğundan,

$$\left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right|$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{1}{2}} k^2 \left(k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1-k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) dk \\
& + \int_0^{\frac{1}{2}} k^2 \left(k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \right) dk \\
& \leq \frac{(\omega-\phi)^2}{2} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 \left(k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1-k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) dk \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 \left(k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \right) dk \right\} \\
& \leq \frac{3(\omega-\phi)}{16} \left[\left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.15. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $|f''|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon ve $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\omega-\phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi+\omega}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\omega-\phi)^2}{2^{2p+1}(2p+1)} \left\{ \left[\frac{1}{8} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{3}{8} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{3}{8} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{8} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.6.5 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} k^2 [|f''(k\phi + (1-k)\omega)| + |f''(k\omega + (1-k)\phi)|] dk \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 [|f''(k\phi + (1-k)\omega)| + |f''(k\omega + (1-k)\phi)|] dk \right.$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliğini uygulanırsa,

$$\left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f''(k\phi + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f''(k\omega + (1-k)\phi)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^{2p} dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f''(k\phi + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^{2p} dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f''(k\omega + (1-k)\phi)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

elde edilir. $|f''|^q$ eksponansiyel konveks olduğundan;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^{2p} dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^{2p} dk \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır ve gerekli işlemler yapıp integraller hesaplandığında;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2^{2p+1}(2p+1)} \left\{ \left[\frac{1}{8} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{3}{8} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{3}{8} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{8} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.16. $\phi, \omega \in I$ ve $\phi < \omega$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de ikinci mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $f'' \in L[\phi, \omega]$, $q > 1$ ve $|f''|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{24^{\frac{1}{q}}} \left\{ \left[\frac{5}{192} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{64} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{5}{192} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + \frac{1}{64} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 3.6.5 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} k^2 [|f''(k\phi + (1-k)\omega)| + |f''(k\omega + (1-k)\phi)|] dk \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 [|f''(k\phi + (1-k)\omega)| + |f''(k\omega + (1-k)\phi)|] dk \right.$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Power-Mean eşitsizliğini uygulanırsa,

$$\left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} k^2 |f''(k\phi + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} k^2 |f''(k\omega + (1-k)\phi)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 |f''(k\phi + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 |f''(k\omega + (1-k)\phi)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

elde edilir, $|f''|^q$ 'nin eksponansiyel konveks özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} k^2 \left[k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (k^2) dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} k^2 \left[k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 \left[k \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-k)^2 \left[k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıp integraller hesaplandığında;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\omega - \phi} \int_{\phi}^{\omega} f(k) dk - f\left(\frac{\phi + \omega}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \phi)^2}{24^{\frac{1-\frac{1}{q}}{q}}} \left\{ \left[\frac{5}{192} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \frac{1}{64} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{5}{192} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + \frac{1}{64} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Bu kısımda Atangana-Baleanu kesirli integral operatörler yardımıyla elde edilen bazı integral eşitsizlikler sunulmuştur.

4.2. Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Ekspansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ $\phi < \omega$ olmak üzere (ϕ, ω) açık aralığının alt kümesi olan I^{α} 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L_1[\phi, \omega]$ ve $|f''|^q$ fonksiyonu $[\phi, \omega]$ aralığında ekspansiyel konveks fonksiyon ise Atangana – Baleanu kesirli integraller için $\kappa \in [\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_{\phi}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_{\omega}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon} f(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon} f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon + 1} f'(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon + 1} f'(\omega)}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1 - \varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon + 2}}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \frac{1}{(\varepsilon + 2)(\varepsilon + 3)} + \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \frac{1}{(\varepsilon + 3)} \right] \\
& + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon + 2}}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \frac{1}{(\varepsilon + 3)} + \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \frac{1}{(\varepsilon + 2)(\varepsilon + 3)} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\Gamma(x)$ Euler gama ve $B(\varepsilon)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.6.6 ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_{\phi}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_{\omega}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon} f(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon} f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon + 1} f'(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon + 1} f'(\omega)}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1 - \varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon + 2}}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1 - k)^{\varepsilon + 1} |f''(k\kappa + (1 - k)\phi)| dk + \\
& \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon + 2}}{(\varepsilon + 1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (k)^{\varepsilon + 1} |f''(k\omega + (1 - k)\kappa)| dk
\end{aligned}$$

yazılır. $|f''|$ fonksiyonu $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks olduğundan;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\omega)\} - \frac{(\kappa - \phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega - \kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{\frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)}} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} + \int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} \left[k \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \right] dk + \\
& \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} + \int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} \left[k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| + (1-k) \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \right] dk \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} + \left[\frac{1}{(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)} \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \frac{1}{(\varepsilon+3)} \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \right] \\
& + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} + \left[\frac{1}{(\varepsilon+3)} \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| + \frac{1}{(\varepsilon+2)(\varepsilon+3)} \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi < \omega$ olmak üzere (ϕ, ω) açık aralığının alt kümesi olan I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L_1[\phi, \omega]$ ve $|f''|^q$ fonksiyonu $[\phi, \omega]$ aralığında eksponansiyel konveks fonksiyon ise Atangana –Baleanu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{(\varepsilon p + p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(\omega-\kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{(\varepsilon p + p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ve $\kappa \in [\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$ ve $B(\varepsilon)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.6.6 ve integraller için mutlak değer özelliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} |f''(k\kappa + (1-k)\phi)| dk \\
& + \frac{(\omega-\kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} |f''(k\omega + (1-k)\kappa)| dk
\end{aligned}$$

Yazılır. Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^{(\varepsilon+1)p} dk \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |f''(k\kappa + (1-k)\phi)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \frac{(\omega-\kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 k^{(\varepsilon+1)p} dk \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |f''(k\omega + (1-k)\kappa)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. $|f''|^q$ fonksiyonun $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveksliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f''(k\kappa + (1-k)\phi)|^q dk & \leq \int_0^1 \left[k \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right] dk \\
\int_0^1 |f''(k\omega + (1-k)\kappa)|^q dk & \leq \int_0^1 \left[k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q \right] dk
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Gerekli integraller hesaplanırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.3. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi < \omega$ olmak üzere (ϕ, ω) açık aralığının alt kümesi olan I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L_1[\phi, \omega]$ ve $|f''|^q$ fonksiyonu $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ise Atangana –Baleanu kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)\mathcal{B}(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon p + p + 1)} + \frac{\left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q}{2q} \right)$$

$$+ \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)\mathcal{B}(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon p + p + 1)} + \frac{\left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q}{2q} \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ve $\kappa \in [\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$ ve $\mathcal{B}(\varepsilon)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.6.6 ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left| \frac{{}^{AB}I_{\kappa}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_{\omega}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon} f(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon} f(\omega)}{\mathcal{B}(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{\frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)\mathcal{B}(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{\mathcal{B}(\varepsilon)}} \right|$$

$$\leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)\mathcal{B}(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} |f''(k\kappa + (1-k)\phi)| dk$$

$$+ \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)\mathcal{B}(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} |f''(k\omega + (1-k)\kappa)| dk$$

yazılır. Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\omega)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{\frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)}} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 (1-k)^{(\varepsilon+1)p} dk + \frac{1}{q} \int_0^1 |f''(k\kappa + (1-k)\phi)|^q dk \right] \\
& + \frac{(\omega-\kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 (k)^{(\varepsilon+1)p} dk + \frac{1}{q} \int_0^1 |f''(k\omega + (1-k)\kappa)|^q dk \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $|f''|^q$ fonksiyonun $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\omega)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{\frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)}} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 (1-k)^{(\varepsilon+1)p} dk + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(k \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q \right) dk \right] \\
& + \frac{(\omega-\kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 (k)^{(\varepsilon+1)p} dk + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(k \left| \frac{f''(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q + (1-k) \left| \frac{f''(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q \right) dk \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integraller hesaplanırsa istenilen sonuç bulunur.

Teorem 4.2.4. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi < \omega$ olmak üzere (ϕ, ω) açık aralığının alt kümesi olan I° 'de diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f'' \in L_1[\phi, \omega]$ ve $|f''|^q$ fonksiyonu $[\phi, \omega]$ aralığında eksponansiyel konveks fonksiyon ise *Atangana – Baleanu* kesirli integraller için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\omega)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f''(\kappa)|^q}{e^{\alpha\kappa}} + \frac{|f''(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \frac{(\omega-\kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|f''(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} + \frac{|f''(\kappa)|^q}{e^{\alpha\kappa}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\kappa \in [\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $q \geq 1$ ve $B(\varepsilon)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.6.6 ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_K^\varepsilon \{f(\omega)\} - \frac{(\kappa-\phi)^\varepsilon f(\phi) + (\omega-\kappa)^\varepsilon f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega-\kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa-\phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} |f''(k\kappa + (1-k)\phi)| dk \\
& + \frac{(\omega-\kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} |f''(k\omega + (1-k)\kappa)| dk
\end{aligned}$$

yazılır. Power- Mean eşitsizliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_{\kappa}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_{\omega}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon} f(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon} f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{\frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)}} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} |f''(k\kappa + (1-k)\phi)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \left(\frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \right) \left[\left(\int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} |f''(k\omega + (1-k)\kappa)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f''|^q$ fonksiyonun $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{AB}I_{\kappa}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} + {}^{AB}I_{\omega}^{\varepsilon} \{f(\kappa)\} - \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon} f(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon} f(\omega)}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}}{\frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1} f'(\phi) + (\omega - \kappa)^{\varepsilon+1} f'(\omega)}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa)}{B(\varepsilon)}} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-k)^{\varepsilon+1} [k|f''(\kappa)|^q + (1-k)|f''(\phi)|^q] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \left(\frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+2}}{(\varepsilon+1)B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \right) \left[\left(\int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} dk \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (k)^{\varepsilon+1} [k|f''(\omega)|^q + (1-k)|f''(\kappa)|^q] dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve integraller hesaplandığında istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.5. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f''|$ eksponansiyel konveks ve $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$ ve $\kappa \in [\phi, \omega]$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|}{\varepsilon + 1} \right] + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|}{\varepsilon + 1} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.8 kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\ & \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \phi \right) \right| dk \right] \\ & \quad + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \omega \right) \right| dk \right] \end{aligned}$$

yazılır. $|f'|$ fonksiyonun eksponansiyel konveksliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\ & \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left(\frac{1-k}{2} \right) \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \right] dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{1-k}{2} \right) \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left(\frac{1+k}{2} \right) \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \right] dk \right] \\ & \quad + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{1+k}{2} \right) \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left(\frac{1-k}{2} \right) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right] dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{1-k}{2} \right) \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left(\frac{1+k}{2} \right) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right] dk \right] \\ & \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{4} \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon + k^{\varepsilon+1}) dk + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon - k^{\varepsilon+1}) dk \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon - k^{\varepsilon+1}) dk + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon + k^{\varepsilon+1}) dk \right] \\ & \quad + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{4} \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon + k^{\varepsilon+1}) dk + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon - k^{\varepsilon+1}) dk \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon - k^{\varepsilon+1}) dk + \frac{1}{4} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \int_0^1 (k^\varepsilon + k^{\varepsilon+1}) dk \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|}{\varepsilon + 1} \right] + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|}{\varepsilon + 1} \right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.6. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon, $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$ ve $\kappa \in [\phi, \omega]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q > 1$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\ & \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{2^p (\varepsilon p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{3|f'(\kappa)|^q + |f'(\phi)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{|f'(\kappa)|^q + 3|f'(\phi)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{2^p (\varepsilon p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{3|f'(\kappa)|^q + |f'(\omega)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{|f'(\kappa)|^q + 3|f'(\omega)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.8 kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\ & \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \phi \right) \right| dk \right] \\ & + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \omega \right) \right| dk \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Hölder eşitsizliğini kullanılarak

$$\left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} + \int_0^1 \left(\left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} + \int_0^1 \left(\left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. $|f'|^q$ fonksiyonun eksponansiyel konveksliği kullanılarak;

$$\left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha \kappa}} \right| + \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha \phi}} \right| dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$+ \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 \frac{1-k}{2} \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha \kappa}} \right| + \frac{1+k}{2} \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha \omega}} \right| dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{2^p (\varepsilon p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{3|f'(\kappa)|^q + |f'(\phi)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{|f'(\kappa)|^q + 3|f'(\phi)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{2^p (\varepsilon p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{3|f'(\kappa)|^q + |f'(\omega)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{|f'(\kappa)|^q + 3|f'(\omega)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.7. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon, $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$ ve $\kappa \in [\phi, \omega]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q > 1$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\frac{1}{2^{p-1} p (\varepsilon p + 1)} \right) + \frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha \kappa}} \right|^q + \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha \phi}} \right|^q}{q} \right] \\
& + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon+1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\frac{1}{2^{p-1} p (\varepsilon p + 1)} \right) + \frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha \kappa}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha \omega}} \right|^q}{q} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \phi \right) \right| dk \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \omega \right) \right| dk \right]$$

yazılır ve Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\left| {}^{AB} I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\frac{1}{p} \int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right|^q dk \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{p} \int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \phi \right) \right|^q dk \right)$$

$$+ \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\frac{1}{p} \int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right|^q dk \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{p} \int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(\left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \omega \right) \right|^q dk \right)$$

elde edilir. $|f'|^q$ nun eksponansiyel konveks oluşunu kullanıp gerekli hesaplamalar yapıldığında istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.8. $f: [\phi, \omega] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon, $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$ ve $\kappa \in [\phi, \omega]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ $q > 1$ olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{\varepsilon+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{(2\varepsilon+3) \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q}{4(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + (2\varepsilon+3) \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q}{4(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{\varepsilon+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left(\frac{(2\varepsilon+3) \left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q}{4(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left| \frac{f'(\kappa)}{e^{\alpha\kappa}} \right|^q + (2\varepsilon+3) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q}{4(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.8 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \phi \right) \right| dk \right] \\
& + \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right| dk + \int_0^1 \frac{k^\varepsilon}{2} \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \omega \right) \right| dk \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Power –mean eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{f(\kappa, \varepsilon, \phi, \omega)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa - \phi)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{1-\frac{1}{q}} + \int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right) \left(\left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \phi \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& + \left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{1-\frac{1}{q}} + \int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right) \left(\left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \phi \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(\omega - \kappa)^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{1-\frac{1}{q}} + \int_0^1 \left(\left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1+k}{2} \kappa + \frac{1-k}{2} \omega \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\left[\left(\int_0^1 \left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right)^p dk \right)^{1-\frac{1}{q}} + \int_0^1 \left(\left(\frac{k^\varepsilon}{2} \right) \left| f' \left(\frac{1-k}{2} \kappa + \frac{1+k}{2} \omega \right) \right|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

bulunur. $|f'|^q$ nun eksponansiyel konveks oluşunu kullanıp gerekli hesaplamalar yapıldığında istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.9. $f: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ eksponansiyel konveks fonksiyon, $\phi < \omega$, $f' \in L_1[\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\kappa \in [\phi, \omega]$, $B(\varepsilon) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_\phi^\varepsilon f)(\kappa) + ({}^{CF}I_\omega^\varepsilon f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{(\omega-\phi) \left(\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right)}{8}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.9 ve $|f'|$ eksponansiyel fonksiyonu kullanılarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_\phi^\varepsilon f)(\kappa) + ({}^{CF}I_\omega^\varepsilon f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \int_0^1 (1-2k) \left| f'(k\phi + (1-k)\omega) \right| dk$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \int_0^1 (1-2k) \left(k \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) dk$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega - \phi}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2k) \left(k \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2k-1) \left(k \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + (1-k) \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right) \right] \\
&= \frac{(\omega - \phi)}{8} \left\{ \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right| + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right| \right\}
\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

4.3. ABK-Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Ekspansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler

Bu bölümde Atangana-Baleanu kesirli integral operatörüne nazaran daha genel sonuçlar üreten ABK kesirli integral operatörler kullanılmıştır.

Teorem 4.3.1. $f: [\phi^p, \omega^p] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in (0,1)$, $p > 0$ ve $0 \leq \phi < \omega$ olmak üzere $f \in L_c^p(\phi^p, \omega^p)$ iken $|f'|$ ekspansiyel konveks fonksiyon ise ABK-kesirli integral operatörler için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{{}^{ABKp}I_{\kappa^+}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\kappa^-}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^{\varepsilon} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{\mathbf{B}(\varepsilon)} \right| \\
&\leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{p(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} |f'(\kappa^p)| + \frac{1}{p(\varepsilon+2)} |f'(\phi^p)| \right] \\
&+ \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{p(\varepsilon+2)} |f'(\omega^p)| + \frac{1}{p(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} |f'(\kappa^p)| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Lemma 3.6.7 ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{ABKp}I_{\phi^+}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\omega^-}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^{\varepsilon}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon} k^{p-1} \left| f'(k^p \kappa^p + (1-k^p)\phi^p) \right| dk \\
& \quad + \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} \left| f'(k^p \omega^p + (1-k^p)\kappa^p) \right| dk
\end{aligned}$$

yazılır. $|f'|$ fonksiyonunun eksponansiyel konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{ABKp}I_{\phi^+}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\omega^-}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^{\varepsilon}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon} k^{p-1} \left[k^p \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right| + (1-k^p) \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha \phi^p}} \right| \right] dk \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} \left(k^{\varepsilon} \left| \frac{f'(\omega^p)}{e^{\alpha \omega^p}} \right| + \int_0^1 (1-k^p) k^{p\varepsilon} k^{\varepsilon-1} \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right| \right) dk \right] \right.
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{ABKp}I_{\phi^+}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\omega^-}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^{\varepsilon}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{B(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 u^{\varepsilon} (1-u) \frac{-du}{p} \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right| + \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha \phi^p}} \right| \int_0^1 u^{\varepsilon+1} \frac{du}{p} \right] \\
& \quad + \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \left| \frac{f'(\omega^p)}{e^{\alpha \omega^p}} \right| (u)^{\varepsilon+1} \frac{du}{p} + \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right| \int_0^1 u^{\varepsilon} (1-u) \frac{du}{p} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha\phi^p}} \right| (u)^{\varepsilon+1} \frac{du}{p} + \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha\kappa^p}} \right| \int_0^1 u^\varepsilon (1-u) \frac{du}{p} \right] \\
&+ \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\int_0^1 \left| \frac{f'(\omega^p)}{e^{\alpha\omega^p}} \right| (u)^{\varepsilon+1} \frac{du}{p} + \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha\kappa^p}} \right| \int_0^1 u^\varepsilon (1-u) \frac{du}{p} \right] \\
&= \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{p(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha\kappa^p}} \right| + \frac{1}{p(\varepsilon+2)} \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha\phi^p}} \right| \right]
\end{aligned}$$

yazılır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. $f: [\phi^p, \omega^p] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in (0,1)$, $p > 0$ ve $0 \leq \phi < \omega$ olmak üzere $f \in L_c^p(\phi^p, \omega^p)$ iken $|f'|^r$ eksponansiyel konveks fonksiyon ise ABK- kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{{}^{ABKp}I_{\kappa^+}^\varepsilon \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\kappa^-}^\varepsilon \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^\varepsilon B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{B(\varepsilon)} \right| \\
&\leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon s + 1)} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha\kappa^p}} \right|^r + \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha\phi^p}} \right|^r}{2p} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&+ \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1}B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon s + 1)} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{\left| \frac{f'(\omega^p)}{e^{\alpha\omega^p}} \right|^r + \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha\kappa^p}} \right|^r}{2p} \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ ve $t^p \in [\Phi^p, \omega^p]$, $r > 1$ şeklindedir.

İspat: Lemma 3.6.7 ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{ABKp}_{\phi^+} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}_{\omega^-} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^{\varepsilon} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{\mathbf{B}(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon} k^{p-1} \left| f'(k^p \kappa^p + (1-k^p) \phi^p) \right| dk \\
& \quad + \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} \left| f'(k^p \omega^p + (1-k^p) \kappa^p) \right| dk
\end{aligned}$$

yazılır. Hölder eşitsizliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{{}^{ABKp}_{\phi^+} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}_{\omega^-} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\}}{p^{\varepsilon} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{\mathbf{B}(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon s} k^{p-1} dk \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^1 k^{p-1} \left| f'(k^p \kappa^p + (1-k^p) \phi^p) \right|^r dk \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad + \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\int_0^1 k^{p\varepsilon s} k^{p-1} dk \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^1 k^{p-1} \left| f'(k^p \omega^p + (1-k^p) \kappa^p) \right|^r dk \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

bulunur. $|f'|^r$ eksponansiyel konveksliğini kullanılarak,

$$\left(\int_0^1 k^{p-1} \left| f'(k^p \kappa^p + (1-k^p) \phi^p) \right|^r dk \right) \leq \int_0^1 k^{p-1} \left[k^{pr} \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right| + (1-k^p) \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha \phi^p}} \right| \right] dk$$

$$\left(\int_0^1 k^{p-1} \left| f'(k^p \omega^p + (1-k^p) \kappa^p) \right|^r dk \right) \leq \int_0^1 k^{p-1} \left[k^p \left| \frac{f'(\omega^p)}{e^{\alpha \omega^p}} \right| + (1-k^p) \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right| \right] dk$$

yazılır gerekli hesaplamalar yapılırsa istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.3. $f: [\phi^p, \omega^p] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in (0,1)$, $p > 0$ ve $0 \leq \phi < \omega$ olmak üzere $f \in L_c^p(\phi^p, \omega^p)$ iken $|f'|^r$ ekspanansiyel konveks fonksiyon ise ABK kesirli integral operatörleri için

$$\left| \begin{aligned} & {}^{ABKp}_{\phi^+} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}_{\omega^-} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} - \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon} f(\phi^p) + (\omega^p - \kappa^p) f(\omega^p)}{p^{\varepsilon} B(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon) f(\kappa^p)}{B(\varepsilon)} \end{aligned} \right|$$

$$\leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} B(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{ps(\varepsilon s + 1)} + \frac{\left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right|^r + \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha \phi^p}} \right|^r}{2pr} \right)$$

$$+ \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} B(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{ps(\varepsilon s + 1)} + \frac{\left| \frac{f'(\omega^p)}{e^{\alpha \omega^p}} \right|^r + \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right|^r}{2pr} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ ve $t^p \in [\Phi^p, \omega^p]$, $r > 1$ şeklindedir.

İspat: Lemma 3.6.7 ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left| \begin{aligned} & {}^{ABKp}_{\phi^+} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}_{\omega^-} I_{\kappa}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} - \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon} f(\phi^p) + (\omega^p - \kappa^p) f(\omega^p)}{p^{\varepsilon} B(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon) f(\kappa^p)}{B(\varepsilon)} \end{aligned} \right|$$

$$\leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} B(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon} k^{p-1} \left| f'(k^p \kappa^p + (1-k^p) \phi^p) \right| dk$$

$$+ \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} B(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} \left| f'(k^p \omega^p + (1-k^p) \kappa^p) \right| dk$$

yazılır. Young eşitsizliğini kullanarak;

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{ABKp}I_{\kappa^+}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\omega^-}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} - \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon} f(\phi^p) + (\omega^p - \kappa^p) f(\omega^p)}{p^{\varepsilon} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{\mathbf{B}(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left[\frac{1}{s} \int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon s} k^{p-1} dk + \frac{1}{r} \int_0^1 k^{p-1} \left| f'(k^p \kappa^p + (1-k^p)\phi^p) \right|^r \right] \\
& \quad + \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{s} \int_0^1 k^{\varepsilon p s} k^{p-1} dk + \frac{1}{r} \int_0^1 k^{p-1} \left| f'(k^p \omega^p + (1-k^p)\kappa^p) \right|^r dk \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında istenen sonuç bulunur.

Teorem 4.3.4. $f: [\phi^p, \omega^p] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in (0,1)$, $p > 0$ ve $0 \leq \phi < \omega$ olmak üzere $f \in L_c^p(\phi^p, \omega^p)$ iken $|f'|^r$ eksponansiyel konveks fonksiyon ise ABK kesirli integral operatörleri için

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{ABKp}I_{\kappa^+}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\omega^-}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} - \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon} f(\phi^p) + (\omega^p - \kappa^p) f(\omega^p)}{p^{\varepsilon} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{\mathbf{B}(\varepsilon)} \right| \\
& \leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon+1)} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{p(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right|^r + \frac{1}{p(\varepsilon+2)} \left| \frac{f'(\phi^p)}{e^{\alpha \phi^p}} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \quad + \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon+1)} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\frac{1}{p(\varepsilon+1)} \left| \frac{f'(\omega^p)}{e^{\alpha \omega^p}} \right|^r + \frac{1}{p(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} \left| \frac{f'(\kappa^p)}{e^{\alpha \kappa^p}} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve burada $t^p \in [\Phi^p, \omega^p]$, $r > 1$ şeklindedir.

İspat. Lemma 3.6.7 ve Power -Mean eşitsizliğini kullanarak

$$\left| {}^{ABKp}I_{\kappa^+}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}I_{\omega^-}^{\varepsilon} \{(f \circ g)(\kappa)\} - \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon} f(\phi^p) + (\omega^p - \kappa^p) f(\omega^p)}{p^{\varepsilon} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon)f(\kappa^p)}{\mathbf{B}(\varepsilon)} \right|$$

$$\leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\int_0^1 (1-k^p)^\varepsilon k^{\varepsilon-1} dk \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 (1-k^p)^\varepsilon k^{p-1} \left| f'(k^p \kappa^p + (1-k^p) \phi^p) \right|^r dk \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+ \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} dk \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} \left| f'(k^p \omega^p + (1-k^p) \kappa^p) \right|^r dk \right)^{\frac{1}{r}}$$

yazılır. $|f'|^r$ fonksiyonun eksponansiyel konveksliği kullanılarak

$$\left| {}^{ABKp}_{\phi^p} I_{\kappa^p}^\varepsilon \{(f \circ g)(\kappa)\} + {}^{ABKp}_{\omega^p} I_{\kappa^p}^\varepsilon \{(f \circ g)(\kappa)\} - \frac{(\kappa^p - \phi^p)^\varepsilon f(\phi^p) + (\omega^p - \kappa^p) f(\omega^p)}{p^\varepsilon \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} - \frac{2(1-\varepsilon) f(\kappa^p)}{\mathbf{B}(\varepsilon)} \right|$$

$$\leq \frac{(\kappa^p - \phi^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon+1)} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 (1-k^p)^\varepsilon k^{p-1} \left[k^p \frac{|f'(\kappa^p)|^r}{e^{\alpha \kappa^p}} + (1-k^p) \frac{|f'(\phi^p)|^r}{e^{\alpha \phi^p}} \right] dk \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+ \frac{(\omega^p - \kappa^p)^{\varepsilon+1}}{p^{\varepsilon-1} \mathbf{B}(\varepsilon) \Gamma(\varepsilon)} \left(\frac{1}{p(\varepsilon+1)} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 k^{\varepsilon p} k^{p-1} \left[k^p \frac{|f'(\omega^p)|^r}{e^{\alpha \omega^p}} + (1-k^p) \frac{|f'(\kappa^p)|^r}{e^{\alpha \kappa^p}} \right] dk \right)^{\frac{1}{r}}$$

yazılır. Burada,

$$\int_0^1 (1-k^p)^\varepsilon k^{p-1} k^p dk = \int_0^1 u^\varepsilon (1-u) \frac{du}{p} = \frac{1}{p(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}$$

$$\int_0^1 (1-k^p)^{\varepsilon+1} k^{p-1} dk = \int_0^1 u^{\varepsilon+1} \frac{du}{p} = \frac{1}{p(\varepsilon+2)}$$

$$\int_0^1 k^{\varepsilon p} k^p k^{p-1} dk = \int_0^1 u^{\varepsilon+1} \frac{du}{p} = \frac{1}{p(\varepsilon+2)}$$

$$\int_0^1 (1-k^p) k^{p-1} k^{\varepsilon p} dk = \int_0^1 u^\varepsilon (1-u) \frac{du}{p} = \frac{1}{p(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)}$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra istenilen sonuç elde edilir.

4.4. Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Ekspansiyel Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri içeren bazı Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ispat edilmiştir.

Teorem 4.4.1. $f: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyelenebilen bir fonksiyon olsun. $\phi < \omega$ iken $|f'|^q$, $[\phi, \omega]$ üzerinde ekspansiyel konveks fonksiyon ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f' \in L_1[\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\kappa \in [\phi, \omega]$, $B(\varepsilon) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_{\phi}^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}I_{\omega}^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(\phi)|^q}{e^{\alpha\phi}} + \frac{|f'(\omega)|^q}{e^{\alpha\omega}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.9 kullanılarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_{\phi}^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}I_{\omega}^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \int_0^1 |(1-2k)| |f'(k\phi + (1-k)\omega)| dk$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_{\phi}^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}I_{\omega}^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \left(\int_0^1 |(1-2k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(k\phi + (1-k)\omega)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$ eksponansiyel fonksiyon oluşu kullanılıp gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_{\phi}^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}I_{\omega}^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.2. $f: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun $\phi < \omega$ iken $|f'|^q$ $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q > 1$ $f' \in L_1[\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\kappa \in [\phi, \omega]$, $B(\varepsilon) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ise

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_{\phi}^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}I_{\omega}^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.9 kullanılarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}I_{\phi}^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}I_{\omega}^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega - \phi}{2} \int_0^1 |(1-2k)| |f'(k\phi + (1-k)\omega)| dk$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Power-Mean eşitsizliği uygulanıp, $|f'|$ 'nin eksponansiyel konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}_{\phi} I^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}_{\omega} I^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right| \\ & \leq \frac{\omega - \phi}{2} \left(\int_0^1 |(1-2k)| \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |(1-2k)| |f'(k\phi + (1-k)\omega)|^q dk \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\frac{1}{q}} \left[\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.3. $f: K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (ϕ, ω) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\phi < \omega$ iken $|f'|^q$ $[\phi, \omega]$ üzerinde eksponansiyel konveks fonksiyon ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $q > 1$ $f' \in L_1[\phi, \omega]$, $\varepsilon \in [0, 1]$, $\kappa \in [\phi, \omega]$, $B(\varepsilon) > 0$ normalizasyon fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}_{\phi} I^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}_{\omega} I^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right| \\ & \leq \frac{\omega - \phi}{2} \left[\frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{2q} \left(\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.6.9 kullanılarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}_{\phi} I^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}_{\omega} I^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \int_0^1 |(1-2k)| |f'(k\phi + (1-k)\omega)| dk$$

yazılır. Bu eşitsizliğe Young eşitsizliği uygulanarak,

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}_{\phi} I^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}_{\omega} I^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 |(1-2k)|^p + \frac{1}{q} \int_0^1 |f'(k\phi + (1-k)\omega)|^q \right]$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \left[\left(\frac{1}{p} \int_0^1 |(1-2k)|^p \right) + \left(\frac{1}{q} \int_0^1 |f'(k\phi + (1-k)\omega)|^q \right) \right]$$

elde edilir. $|f'|^q$ eksponansiyel konveks fonksiyon olduğundan ve gerekli hesaplamaların yapılması ile

$$\left| \frac{f(\phi) + f(\omega)}{2} + \frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} f(\kappa) - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon(\omega-\phi)} \left[({}^{CF}_{\phi} I^{\varepsilon} f)(\kappa) + ({}^{CF}_{\omega} I^{\varepsilon} f)(\kappa) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \left[\frac{1}{p} \int_0^1 |(1-2k)|^p + \frac{1}{q} \int_0^1 \left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right]$$

$$\leq \frac{\omega-\phi}{2} \left[\frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{2q} \left(\left| \frac{f'(\phi)}{e^{\alpha\phi}} \right|^q + \left| \frac{f'(\omega)}{e^{\alpha\omega}} \right|^q \right) \right]$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik teoriye ilişkin temel bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca son zamanlarda birçok araştırmacı tarafından ilgi odağı haline gelmiş kesirli analizdeki temel bazı kesirli türev ve integral operatörler tanıtılmıştır. Daha sonra temel sonuçları elde etmek üzere kullanılacak olan integral özdeşlikleri verilmiştir. Bu çalışmanın ana motivasyon noktası klasik integral operatörler içeren, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu kesirli integral operatörlerini ihtiva eden bazı lemma ve teoremleri kullanarak eksponansiyel konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde etmektir.

Eksponansiyel konveks fonksiyon sınıfı üzerine çalışma yapan araştırmacılar literatürde yer alan farklı operatörleri kullanarak yeni eşitsizlikler ispatlayabilir ve uygulamalar verebilirler.

KAYNAKÇA

- Alomari, M., Darus, M., & Kırmacı, U. S. (2010). Refinements of Hadamard-Type Inequalities for Quasi-Convex Functions with Applications to Trapezoidal Formula and to Special Means. *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 225-232.
- Antczak, T. (2001). (p,r) -Invex Sets and Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 355-379.
- Atangana, A., Baleanu, D. (2016). New Fractional Derivatives with Non-Local and Non-Singular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model, *Thermal Science*, 20 (2), pp. 757-763.
- Awan, M. U., Noor, M. A., & Noor, K. I. (2018). Hermite -Hadamard Inequalities for Exponentially Convex Functions. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 12 (2), 405-409.
- Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen Für Eine Klasse Verallgemeinerter Konvexer Funktionen in Topologischen Linearen Raumen. *Publications De l'Institut Mathématique*, 23, 13-20.

- Butt, S. I., Yousaf, S., Akdemir, A. O., & Dokuyucu, M. A. (2021). New Hadamard-Type Integral Inequalities via a General Form of Fractional Integral Operators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 148, 111025.
- Caputo M. and Fabrizio M. (2015). A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 1:2, 1-13.
- Dragomir, S. S., & Agarwal, R. P. (1998). Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula. *Appl. Math. Lett.*, 11(5), 91-95.
- Dragomir, S. S., & Gomm, I. (2015). Some Hermite Hadamard Type Inequalities for Functions Whose Products With Exponentials Are Convex. *Scientific Publications*, 145-158.
- Dragomir, S. S., & Pearce, C. M. (1998). Quasi-Convex Functions and Hadamard's Inequality. *1998*, 57, 377-385.
- Dragomir, S. S., Pecaric, J. E., & Persson, L. E. (1995). Some Inequalities of Hadamard Type. *Soochow J. of Math*, 335-341.
- Godunova, E. K., & Levin, V. I. (1985). Neravenstva dlja Funkcii Sirokogo Klassa Soderžaščego Vypuklye, Monotonnye i Nekotorye Drugie Vidy Funkcii. *Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov*, 138-142.
- Gürbüz, M., Akdemir, A. O., Rashid, S., & Set, E. (2020). Hermite-Hadamard Inequality for Fractional Integrals of Caputo-Fabrizio Type and Related Inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, 2020, 1-10.
- Kannappan, P. (2009). *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer US.
- Kavurmacı, H., Avcı, M., & Özdemir, M. E. (2011). New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Convex Functions with Applications . *Journal of Inequalities and Applications*, 2011, 86. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2011-86>.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. New York: John Wiley & Sons. Inc.
- Mitrinovic, D. S. (1970). *Analytic Inequalities*. Berlin: Springer-Verlag.
- Noor, M. A., & Noor, K. I. (2019). On Exponentially Convex Functions. *Journal of Orissa Mathematical Society*, 38, 33-51.

- Orlicz, W. (1961). A Note on Modular Spaces . *I.Bulletin L'Académie Polonoise des Science ,Série des Sciences Mathé -matiques,Astronomiques et Physiques*, 157-162.
- Pecaric, J. E., Proschan, F., & Tong, Y. L. (1992). *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications* (Cilt 187). London: Academic Press.
- Rainville, E. D. (1971). *Special Functions*. Chelsea Pub Co.
- Rashid, S., Noor, M. A., Noor, K. I. and Akdemir A.O. (2019). Some New Generalization for Exponentially s-Convex Functions and Inequalities via Fractional Operators. *Fractal and Fractional*, 3(2), 24; <https://doi.org/10.3390/fractalfract3020024>.
- Sarikaya, M. Z., Sağlam, A., & Yıldırım, H. (2010). New Inequalities of Hermite-Hadamard Type For Functions Whose Second Derivatives Absolute Values are Convex and Quasi-Convex. *Tamkang Journal of Mathematics*, 41(4), 353-359.
- Set, E., Butt, I. S., Akdemir, A. O. , Karaoğlan A. and Abdeljawad T. (2021). New İntegral Inequalities for Differentiable Convex Functions via Atangana-Baleanu Fractional Integral Operators. *Chaos,Solitons and Fractals*, 143, 110554.
- Toader, G. (1988). On Generalization of the Convexity. *Mathematica*, 30(53), 83-87.
- Varošanec, S. (2007). On h-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1), 303-311.