



T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü



LİE GRUPLARIN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ VE MEKANİKSEL BAZI LİE GRUP MODELLEMELERİ

Yüksek Lisans Tezi

Deniz POYRAZ

Matematik Anabilim Dalı

İzmir
2021

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

LİE GRUPLARIN DİFERANSİYEL
GEOMETRİSİ VE MEKANİKSEL BAZI LİE
GRUP MODELLEMELERİ

Deniz POYRAZ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı

İzmir
2021

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**LİE GRUPLARIN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ VE MEKANİKSEL BAZI LİE GRUP MODELLEMELERİ**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

03/09/2021

Deniz POYRAZ

ÖZET

LİE GRUPLARIN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ VE
MEKANİKSEL BAZI LİE GRUP MODELLEMELERİ

POYRAZ, Deniz

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

Eylül 2021, 131 sayfa

Bu tezde Lie grupların diferansiyel geometrisi için gerekli olan temel kavramlar sunulmakta ve anti-Kaehler Lie gruplar ayrıntılı olarak çalışılmaktadır.

Birinci bölümde, tezin konusu ile ilgili genel bilgiler sunulmakta ve çalışmanın altında yatan nedenler verilmektedir.

İkinci bölümde, Lie grupların daha kolay anlaşılması için cebirsel kavramlar ve diferansiyellenebilir manifoldlar ve üzerindeki kavramlar verildikten sonra Riemann, yarı-Riemann, kompleks manifoldlar ve anti-Kaehler manifoldlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lie grupların tanımı ve Lie gruplar üzerinde tanımlanan bazı kavramlar verilmiştir. Lie gruplar üzerinde sol-invariant ve bi-invariant metrikler tanımlanıp, bu tür metriklere sahip Lie grupların eğrilikleri incelenmiştir. Sonrasında mekanik ile ilgili temel kavramlar verilerek mekaniksel sistemlerde çok sık kullanılan bazı Lie grup örnekleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise anti-Kaehler manifoldların Lie grup yapısına sahip olma durumu ve bunun getirdiği özellikler tartışılmıştır. Özel olarak sol-invariant anti-Kaehler yapıya sahip 4-boyutlu Lie grupları çalışılmıştır. Daha sonrasında ise Killing Norden metrik ikilileri ve bir bi-invariant kompleks yapı ile donatılmış kompakt Lie cebirlerinin bir 2-parametrelili ailesi üzerinde Norden metrik ile birlikte 6-boyutlu bir Kaehler manifold örneği çalışılmış ve bu manifoldun eğrilikleri incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: Lie gruplar, Lie cebirleri, anti-Kaehler manifoldlar, bi-invariant ve Abel kompleks yapılar, Killing Norden metrikler.

ABSTRACT

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF LIE GROUPS AND SOME
MECHANICAL MODELS OF LIE GROUPS

POYRAZ, Deniz

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

September 2021, 131 pages

In this thesis, basic notions of Lie group theory are presented and anti-invariant Kaehler manifolds endowed with Lie group structure are investigated in details.

In the first section, the motivation of the subject is given in short. In the second section, algebraic notions and differentiable manifolds and the structures on them are given to understand Lie groups, and then Riemann, semi-Riemann, complex manifolds and anti-Kaehler manifolds are given.

In the third section, the definition of Lie groups and related notions defined on Lie groups are given. Left-invariant and bi-invariant metrics are defined on Lie groups, and the curvatures of Lie groups with such metrics are examined. Afterwards, some examples of Lie groups, which are frequently used in mechanical systems are given.

In the fourth section, anti-Kaehler manifolds endowed with Lie group structure are examined. In particular, 4-dimensional Lie groups which admit a left-invariant anti-Kaehler structure are studied. Afterwards, an example of a 6-dimensional Kaehler manifold with Norden metric on a 2-parametric family of compact Lie algebras admitting a bi-invariant complex structure and a pair of Killing Norden metrics are studied and the curvatures of this manifold are investigated.

Key Words: Lie groups, Lie algebras, anti-Kaehler manifolds, bi-invariant and Abel complex structures, Killing Norden metrics.

ÖNSÖZ

Lie grupları, modern matematiğin ve fiziğin birçok bölümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Aynı zamanda çeşitli seviyelerdeki modern geometride büyük bir rol oynamaktadır. Bu güncel konuyu çalışmama olanak sağlayan ve değerli tecrübelerinden faydalandığım çok kıymetli tez danışmanım Prof. Dr. Bayram ŞAHİN' e teşekkürlerimi sunarım.

İZMİR

03/09/2021

Deniz POYRAZ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇ KAPAK	ii
KABUL ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Cebirsel Kavramlar	5
2.2 Diferansiyellenebilir Manifoldlar ve Üzerindeki Kavramlar	11
2.3 Riemann Manifoldları	18
2.4 Yarı-Riemann Manifoldları	22
2.5 Kompleks Manifoldlar	25
2.6 Anti-Kaehler Manifoldlar	28
3 LİE GRUPLARI	33
3.1 Temel Tanımlar	33
3.2 Lie Grupları Üzerinde Tanımlanan Bazı Kavramlar	41
3.3 Lie Grupları Üzerinde Riemann Metrikleri	57
3.4 Bi-invariant Metriğe Sahip Lie Grubun Eğrilikleri	59

3.5	Sol-invaryant Metriğe Sahip Lie Grubun Eğrilikleri	62
3.6	Bazı Lie Grup Modellemeleri	67
4	ANTI-KAEHLER YAPIYA SAHİP LİE GRUPLAR	77
4.1	Anti-Kaehler Manifoldlar ve Lie Gruplar	77
4.2	Anti-Kaehler Yapıya Sahip 4 Boyutlu Lie Gruplar	98
4.3	Killing Norden Metrik ile Birlikte Kaehler Manifold Olarak Lie Grupları	108
5	SONUÇ	123
	KAYNAKLAR DİZİNİ	125
	TEŞEKKÜR	130
	ÖZGEÇMİŞ	131

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1	Diferensiyellenebilir atlas 13
3.1	Bir cismin yönü ve konumunun uzaysal ve cisim referans çatıları ile belirlenmesi.....68
3.2	Bir düzlemsel katı cisim.....70
3.3	İki-bağlantılı manipulator..... 72
3.4	Bir dik dönen disk..... 74
3.5	Döner disk için R matrisini oluşturmada kullanılan işlemler..... 76

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
M, N	Manifold
g	Metrik tensör
$T_p M$	M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanları kümesi
∇	Lineer (afin) konneksiyon
$[,]$	Lie Braket operatörü
$\mathbb{C}^r$	r.mertebeden diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
T	Torsiyon tensörü
R	Riemann eğrilik tensör alanı
S	Ricci tensörü
Ric	Ricci operatör
$K(P)$	P düzlemine göre kesit eğriligi
r	Skaler eğrilik

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
G, H	Lie grup
$\mathfrak{g}$	Lie cebiri
B	Killing form
J	Kompleks yapı
N	Nijenhuis tensör alanı
$\det$	Determinant dönüşümü
iz	İz dönüşümü

1 GİRİŞ

Üç boyutlu uzayda yüzeyler teorisi C. F. Gauss tarafından geliştirilmiştir. Gauss' un bu konudaki en önemli sonuçlarından birisi, bir yüzeyin eğriliğinin yüzeyin içsel bir özelliği olduğunu belirten Gauss Egregium Teoremi' dir. C. F. Gauss' un çalışmalarından sonra geometride iki farklı yol izlenmiştir. Bunlardan ilki, Gauss' un yüzeyler teorisini iki boyuttan daha büyük boyutlara genelleyen B. Riemann' ın çalışmalarıdır. B. Riemann, Gauss' un teorisini, mesafelerin ve açıların ölçülmesine ve eğrilik kavramının tanımlanmasına da olanak sağlayacak şekilde manifold adı verilen daha yüksek boyutlu uzaylara genişletmiştir.

Diğer yol ise geometriyi dönüşüm grupları kavramıyla tanımlayan F. Klein'ın çalışmalarıdır. Klein' a göre, geometri çalışmanın amacı, geometrik şekillerin özel dönüşüm gruplarının etkileri altında invariant kalan özelliklerini incelemektir. Bu nedenle, farklı dönüşüm grupları incelendiğinde, Öklid geometri, afin geometri veya projektif geometri gibi farklı geometriler ortaya çıkar. Örneğin, Öklid geometrisi düzlemin, katı hareketler grubu (Öklid grubu) altında invariant kalan özelliklerini incelemektedir. Klein' ın çeşitli geometrileri belirlemek için kullandığı gruplar, sonrasında Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından geliştirilmiştir ve Lie grupları olarak adlandırılmaktadır.

Lie teorisinin başlangıcı, diferansiyel denklem sistemlerinin simetrileri ve onlar için entegrasyon teknikleri üzerine araştırmalara dayanmaktadır. Sophus Lie o zamanlar bu simetrileri "sürekli gruplar" olarak adlandırmıştı. Aslında asıl amacı, diferansiyel denklemler için Galois teorisinin bir benzerini geliştirmekti.

Lie grupları ilk olarak 1930 yılında E. Cartan tarafından şu şekilde

tanımlanmıştır. G manifoldu

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow xy$$

ve

$$G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow x^{-1}$$

diferansiyellenebilir dönüşümleri ile birlikte bir grup yapısına sahip ise G manifolduna bir Lie grubu denir. Lie grubunun en basit örnekleri n -boyutlu standart reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ ve kompleks n boyutlu standart kompleks vektör uzayı $\mathbb{C}^n$ in grup izometrilidir.

$\mathfrak{g}$ bir vektör uzayı olmak üzere eğer $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ile verilen dönüşüm $\forall u, v, v', w, w' \in \mathfrak{g}$ ve $c, c' \in \mathbb{R}$ sabitleri için

$$(i) \text{ Bilineerlik : } [cv + c'v', w] = c[v, w] + c'[v', w],$$

$$[v, cw + c'w'] = c[v, w] + c'[v, w'],$$

$$(ii) \text{ Ters-simetrik : } [v, w] = -[w, v],$$

$$(iii) \text{ Jacobi özdeşliği : } [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

şartlarını sağlıyor ise $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne Lie braket operatörü denir ve $\mathfrak{g}$ vektör uzayına Lie braket operatörü ile birlikte bir Lie cebir denir. Verilen her Lie cebirine karşılık bir Lie grubu, tersine her Lie grubuna karşılık bir Lie cebiri vardır. Bir lineer uzayın çalışılması daha kolay olacağı için bir vektör uzayı yapısına sahip Lie cebirleri çalışmak daha kolaydır. Böylece bir manifoldu çalışmak yerine onun Lie cebirini çalışıp manifold hakkında da sonuçlar elde edilebilmektedir.

Kaehler manifold, manifoldun tanjant uzayında karesi eksi birime eşit olan $(1, 1)$ tipinde paralel J tensörü ve $g(JX, JY) = g(X, Y)$ şeklinde tanımlanan Hermityen metriği ile donatılmış $2n$ -boyutlu reel diferansiyellenebilir manifold olarak tanımlanmaktadır.

Anti-Kaehler manifold (Norden metriğe sahip Kaehler manifold veya B-manifold), manifoldun teğet uzayında karesi eksi birime eşit olan $(1, 1)$ tipinde paralel J tensörü ve $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ şeklinde tanımlanan anti-Hermityen adı verilen Norden tipli (yani indeksi n olan) yarı-Riemann metriğine sahip $2n$ -boyutlu reel diferansiyellenebilir manifolddur ve ilk olarak 1972 yılında Norden tarafından tanıtılmıştır. Daha sonraki yıllarda Ganchev et al. (1987), Ganchev et al. (1993), Borowiec et al. (2000), Olszak (2005), Sluka (2001) gibi matematikçiler anti-Kaehler manifoldun diferansiyel geometrisi üzerine çeşitli çalışmalarda bulunmuşlardır. 1985' ten beri anti-Hermityen geometri çok kapsamlı bir şekilde incelenmektedir ve kompleks geometri ve matematiksel fizikte yoğun bir ilgi konusu olmaya devam etmektedir. Bulgar geometri okulu tarafından bu alana birçok katkı yapılmıştır (Örneğin, Ganchev and Borisov (1986), Gribachev et al. (1985), Mandev (2002), Mekerov (2009), Mekerov (2010), Teofilova (2012)). Anti-Kaehler manifoldlar matematiksel fizikte de aktif bir araştırma alanı olmaya devam etmektedirler. Borowiec, Francaviglia and Volovich çalışmalarında (Einstein) holomorfik Riemann manifoldları ile (Einstein) anti-Kaehler manifoldlar arasında birebir eşleme olduğunu ispatlamışlardır. Borowiec et al. (2000) Anti-Kaehler manifoldların eğrilik özellikleri Olszak (2005), Sluka (2001), Sluka (2005), İşcan and Salimov (2009) tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada anti-Kaehler metrik ile donatılmış Lie gruplar çalışılmaktadır. Tez aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, tez konusunun seçimi ve önemi üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde, cebirsel kavramlar, diferansiyellenebilir manifoldlar ve üzerindeki kavramlar, Riemann, yarı-Riemann, kompleks manifoldlar ve anti-Kaehler manifoldlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lie grupların tanımı verilmiştir. Lie gruplar üzerinde Riemann metrikleri tanımlanmıştır. Sonrasında ise mekanik ile ilgili temel kavramlar ve mekaniksel sistemlerde çok sık kullanılan Lie grup modellemelerinden bazıları verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Lie gruplar üzerinde sol invaryant geometrik yapılar incelenmiştir. G Lie grubu üzerinde J kompleks yapısının bi-invaryant ve Abel olduğu durumlar ele alınmıştır. Sol-invaryant anti-Kaehler yapıya sahip 4-boyutlu Lie grupları incelenmiştir. Daha sonrasında ise Killing Norden metrik ikilileri ve bir bi-invaryant kompleks yapı ile donatılmış kompakt Lie cebirlerinin bir 2-parametrelili ailesi üzerinde Norden metrik ile birlikte 6-boyutlu bir Kaehler manifold örneği çalışılmış ve bu manifoldun eğrilikleri incelenmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm altı alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde tezde kullanılacak cebirsel kavramlar sunulmaktadır. İkinci alt bölümde diferansiyellenebilir manifoldlar ve üzerindeki kavramlar verilmektedir. Üçüncü alt bölümde Riemann manifoldlar sunulmaktadır. Dördüncü alt bölümde yarı-Riemann manifoldlar tanımlanmakta ve beşinci alt bölümde kompleks manifoldlar ve üzerinde tanımlanan bazı kavramlar verilmektedir. Altıncı alt bölümde ise anti-Kaehler manifoldlar ve tezde kullanılacak özellikleri verilmektedir.

2.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Güney , 1993) $G \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $\star$, G kümesinde bir işlem olsun. Bu durumda

(i) G kümesi $\star$ işlemine göre kapalı,

(ii) G de $\star$ işleminin birleşme özelliği var,

(iii) G de $\star$ işlemine göre birim eleman var,

(iv) G de $\star$ işlemine göre her elemanın tersi var,

özellikleri varsa $(G, \star)$ sistemine bir grup denir.

Tanım 2.1.2. (Güney , 1993) G bir grup olsun. ϕ , G grubundan G grubuna bir izomorfizma ise o zaman ϕ izomorfizmasına otomorfizma adı verilir.

Tanım 2.1.3. (Güney , 1993) G bir grup ve H , G grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H , G grubundaki ikili işleme göre bir grup ise o zaman H kümesine G grubunun altgrubu denir. G grubu ve boş küme G grubunun aşikar altgruplarıdır.

Tanım 2.1.4. (Güney , 1993) G bir grup ve H , G grubunun bir altgrubu olmak üzere, eğer her $x \in G$ için $xH = Hx$ oluyorsa o zaman H altgrubuna G grubunun normal altgrubu denir.

Tanım 2.1.5. (Güney , 1993) Aşık altgruplardan başka hiçbir normal altgrubu olmayan bir gruba basit grup denir.

Tanım 2.1.6. (Girillet , 2007) G bir grup olsun. $Z(G) = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}$ kümesine G grubunun merkezi denir.

Tanım 2.1.7. (Fraleigh , 2003) X bir küme ve G bir grup olsun. G grubunun X üzerinde bir etkisi

$$(1) \forall x \in X \text{ için } ex = x,$$

$$(2) x \in X \text{ ve } \forall g_1, g_2 \in G \text{ için } (g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$$

olacak şekilde bir $*$: $G \times G \rightarrow G$ dönüşümüdür, burada e , G grubunun birim elemanıdır. Bu koşullar altında X bir G -kümedir.

Tanım 2.1.8. (Olver , 1993) $\mathfrak{g}$ bir vektör uzayı olsun. Eğer $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ile verilen dönüşüm $\forall u, v, v', w, w' \in \mathfrak{g}$ ve $c, c' \in \mathbb{R}$ sabitleri için

$$(i) \text{ Bilineerlik: } [cv + c'v', w] = c[v, w] + c'[v', w],$$

$$[v, cw + c'w'] = c[v, w] + c'[v, w'],$$

$$(ii) \text{ Ters-simetrik: } [v, w] = -[w, v],$$

$$(iii) \text{ Jacobi özdeşliği: } [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

şartlarını sağlıyor ise $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne Lie braket operatörü denir ve $\mathfrak{g}$ vektör uzayına Lie braket operatörü ile birlikte bir Lie cebir denir.

Örnek 2.1.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) Tüm $n \times n$ tipindeki reel matrislerin kümesi $M_n \mathbb{R}$ olmak üzere eğer $[A, B] = AB - BA$ ise $M_n \mathbb{R}$ bir Lie cebirdir.

Tanım 2.1.9. (Olver , 1993) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir ve $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ cebirinin bir alt vektör uzayı olsun.

(a) Eğer her $X, Y \in \mathfrak{h}$ için $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ ise $\mathfrak{h}$ uzayına $\mathfrak{g}$ cebirinin bir Lie alt cebiri denir.

(b) Eğer $\forall X \in \mathfrak{h}$ ve $A \in \mathfrak{g}$ için $[A, X] \in \mathfrak{h}$ ise $\mathfrak{h}$ uzayına $\mathfrak{g}$ cebirinde bir ideal denir.

Tanım 2.1.10. (Lee , 2001) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir olsun. $k = 1, 2, \dots$ için

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}]$$

$$\mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^k \supseteq \dots$$

olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin $\mathfrak{g}^k$ ideallerinin serisine $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin türetilmiş serisi denir.

Tanım 2.1.11. (Lee , 2001) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir olsun. Eğer bazı $n > 0$ tamsayısı için $\mathfrak{g}^n = 0$ ise $\mathfrak{g}$ Lie cebirine çözülebilir (solvable) Lie cebir denir.

Tanım 2.1.12. (Lee , 2001) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir olsun. $k = 1, 2, \dots$ için

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}]$$

$$\mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_k \supseteq \dots$$

olacak şekilde tanımlı $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin $\mathfrak{g}_k$ ideallerinin serisine $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin azalan (descending or lower) merkezi serisi denir.

Tanım 2.1.13. (Lee , 2001) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir olsun. Eğer bazı $k \geq 0$ tamsayısı için $\mathfrak{g}_k = 0$ ise $\mathfrak{g}$ Lie cebirine nilpotent Lie cebir denir.

Sonuç 2.1.1. (Lee , 2001) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir olsun. Her $k \geq 0$ için $\mathfrak{g}^k \subseteq \mathfrak{g}_k$ olduğundan nilpotent Lie cebirleri çözülebilirdir.

Örnek 2.1.2. (Arslandoğan , 2015) $\mathbb{R}$ üzerinde tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin vektör uzayı olan $M(n, \mathbb{R})$, $[x, y] = xy - yx$ ile tanımlı Lie parantezi ile bir Lie cebiridir. $n \times n$ tipindeki bir matrise her $1 \leq j < i \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise üst üçgen matris, $1 \leq j \leq i \leq n$ için $a_{ij} = 0$ ise kesinlikle üst üçgen matris denir. $\mathfrak{b}(n, \mathbb{R})$ ile tüm üst üçgen matrisleri ve $\mathfrak{c}(n, \mathbb{R})$ ile tüm kesinlikle üst üçgen matrisleri gösterelim. $\forall x, y \in \mathfrak{b}(n, \mathbb{R})$ için $[x, y] \in \mathfrak{b}(n, \mathbb{R})$ ve $\forall z, t \in \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})$ için $[z, t] \in \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})$ olduğundan $\mathfrak{b}(n, \mathbb{R})$ ve $\mathfrak{c}(n, \mathbb{R})$, $M(n, \mathbb{R})$ Lie cebirinin alt cebirleridir. $n = 2$ alalım ve $\mathcal{L} = \mathfrak{b}(n, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_1 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}] = [\mathfrak{b}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{b}(n, \mathbb{R})] = \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})$ ve $\mathcal{L}_2 = [\mathcal{L}, \mathcal{L}_1] = [\mathfrak{b}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})] = \mathfrak{b}(n, \mathbb{R})$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{L}_m = 0$ olacak şekilde bir m doğal sayısı yoktur. Yani $\mathcal{L}$ cebiri nilpotent değildir. Ancak $\mathcal{L}^1 = [\mathfrak{b}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{b}(n, \mathbb{R})] = \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})$ ve buradan da $\mathcal{L}^2 = [\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^1] = [\mathfrak{c}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})] = 0$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{L}$ cebiri çözülebilirdir. Diğer taraftan $\mathcal{R} = \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $\mathcal{R}_1 = [\mathfrak{c}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{c}(n, \mathbb{R})] = 0$ olduğundan $\mathcal{R}$ cebiri nilpotent cebirdir, dolayısıyla çözülebilir cebirdir.

Tanım 2.1.14. (Hacısalıhoğlu , 1982) Reel sayılar cismi üzerinde r -tane vektör uzayı $V_1, V_2, \dots, V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq r$ için $u_1, v_1 \in V_1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_{i-1}, av_i + bv_i, v_{i+1}, \dots, v_r) &= af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \\ &+ bf(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ise f ye r -lineer fonksiyon denir.

Tanım 2.1.15. (Hacısalıhoğlu , 1982) $V_1, V_2, \dots, V_r$ den $\mathbb{R}$ ye bütün r -lineer fonksiyonların cümlesini

$$L(V_1, \dots, V_r : \mathbb{R})$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla

$\forall (u_1, \dots, u_r) \in V_1 \times V_1 \times \dots \times V_r$ için

$$(f_1 + f_2)(u_1, \dots, u_r) = f_1(u_1, \dots, u_r) + f_2(u_1, \dots, u_r)$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(\lambda f)(u_1, \dots, u_r) = \lambda f(u_1, \dots, u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa bu iki işleme göre $L(V_1, \dots, V_r : \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensörel çarpımı denir ve

$$L(V_1, \dots, V_r) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \dots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r . dereceden bir tensör denir.

$$V_1 = V_2 = \dots = V_r$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r . mertebeden bir kovaryant tensör denir. $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16. (Hacısalıhoğlu , 1982) Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine V^* alınırsa $(V^*)^*$ uzayı V uzayına izomorfik olduğundan V^* üzerinde s -lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya kontravaryant uzay denir. $T_s(V^*)$ veya $\otimes^s V$ ile gösterilir ve bu uzayın elemanlarına s . mertebeden kontravaryant tensörler denir.

Tanım 2.1.17. (Hacısalıhoğlu , 1982) $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V ve V^* , V uzayının duali olsun.

$$L(V^r, V^{*s} : \mathbb{R}) = \{f | f : V^r \times V^{*s} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

cümlesi yukarıda verilen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Buna r . mertebeden kovaryant ve s . mertebeden kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına da (r, r) mertebeli tensör denir. Bu uzay

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V) \quad \text{veya} \quad T_s^r(V)$$

ile gösterilir.

Önerme 2.1.1. (Hacısalıhoğlu , 1982) V bir vektör uzayı ve T_r^1 tensör uzayı olsun. Bu durumda T_r^1 tensörü

$$V \times V \times \dots \times V \rightarrow V$$

bütün r -lineer dönüşümlerin vektör uzayına izomorfiktir.

Tensör alanları kavramı manifoldlar üzerinde tanımlanırken tüm kavramlar $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineer olması şartı altında tanımlanır.

Tanım 2.1.18. (Kobayashi and Nomizu , 1969) Sonlu boyutlu V' reel vektör uzayı üzerindeki J endomorfizması $\forall X \in V'$ için

$$J(J(X)) = -X$$

koşulunu ya da başka bir ifade ile I özdeşlik dönüşümü olmak üzere

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J endomorfizmasına kompleks yapı denir.

Tanım 2.1.18 de verilen kompleks yapı yardımıyla a, b ve $\alpha \in V'$ olmak üzere

$$(a + ib)\alpha = a\alpha + bJ\alpha$$

şeklinde tanımlanan çarpma vasıtasıyla bir kompleks vektör uzayı yapısı tanımlanabilir. Bu durumda V' reel vektör uzayına elde edilen kompleks vektör

uzayın temel uzayı denir. (Şahin , 2000)

V , n -boyutlu kompleks vektör uzayı ve V' , V uzayının temel uzayı olsun.

Bu durumda V uzayı V' uzayının $i = \sqrt{-1}$ ile çarpımından ibarettir. Eğer

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, V' için bir baz ise V uzayının bazı $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, i\alpha_1, \dots, i\alpha_n\}$ olur.

Böylece V , $2n$ -boyutlu olur. Bu karşılaştırmaya göre V uzayının kompleks

boyutu n ise reel boyutu $2n$ dir. (Şahin , 2000)

2.2 Diferansiyellenebilir Manifoldlar ve Üzerindeki Kavramlar

Tanım 2.2.1. (Aslım , 1988) (X, τ) bir topolojik uzay ve, $x \neq y \in X$ olsun. x ve y noktalarının açık komşulukları sırasıyla U ve V olmak üzere $U \cap V = \emptyset$ ise (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff uzayı denir.

Tanım 2.2.2. (Aslım , 1988) (X, τ) topolojik uzayının açık alt kümelerinin sınıfı g olsun. Eğer

$$X = \bigcup_{G \in g} G$$

ise g sınıfına (X, τ) uzayının bir açık örtüsü denir. Eğer g nin bir alt kümesi

X uzayını örterse bu alt kümeye (X, τ) ın bir açık alt örtüsü denir.

Tanım 2.2.3. (Aslım , 1988) (X, τ) topolojik uzayının her g açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına kompakt uzay denir.

Tanım 2.2.4. (Aslım , 1988) (X, τ) topolojik uzayı boş olmayan ayrık açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa (X, τ) uzayına bağlantılıdır denir aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 2.2.5. (Hacısalıhoğlu , 1980) M bir Hausdorff uzayı olsun. $\forall p \in M$ noktası için M de $n \geq 0$ olmak üzere $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayına homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse M uzayına bir n -boyutlu topolojik manifold denir.

Tanım 2.2.6. (Hacısalıhoğlu , 1980) M n -boyutlu topolojik manifold ve U da M manifoldunun bir açık kümesi olsun. Eğer U bir φ homeomorfizması ile $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayının bir W açık alt kümesine eşlenebiliyorsa, (U, φ) ikilisine M manifoldunda bir koordinat komşuluğu (harita) denir.

Tanım 2.2.7. (Şahin , 2012) (V, ψ) bir harita, U ve V açık kümelerinin arakesiti boştan farklı ve bu arakesit kümesinde bir noktanın φ altındaki koordinatları $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ olsun. φ dönüşümünün tersi φ^{-1} olduğundan $U \cap V$ kümesinde tek bir q noktası vardır. Bu q noktasının φ altındaki koordinatları $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ olmak üzere bu koordinatlar arasında

$$y_i = f^i(x_1, x_2, \dots, x_m) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_m))^i$$

$$x_i = g^i(y_1, y_2, \dots, y_m) = (\varphi \circ \psi^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_m))^i$$

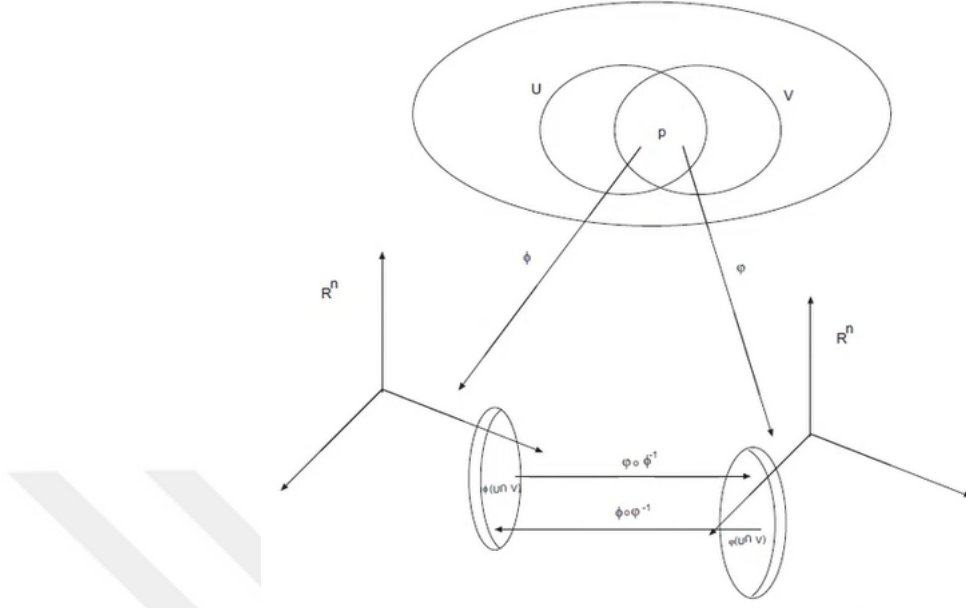
bağıntısı elde edilir, burada $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \varphi(U \cap V)$, $(y_1, y_2, \dots, y_m) \in \psi(U \cap V)$, $i = 1, 2, \dots, m$ ve $()^i$, i . bileşeni göstermektedir. $\psi \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \psi^{-1}$ homeomorfizmaları birbirinin tersi olduğundan, f^i ve g^i fonksiyonları süreklidir. Bu durumda, $U \cap V$ kümesinin boştan farklı olmak üzere $f^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ve $g^i(y_1, y_2, \dots, y_m)$ fonksiyonları r . mertebeden diferensiyellenebiliyorsa (U, φ) ve (V, ψ) haritaları r . mertebeden uyumludur denir.

Tanım 2.2.8. (Şahin , 2012) M , m -boyutlu bir manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların ailesi olan $\mathbb{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \phi), \dots\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{A}$ koleksiyonuna M üzerinde r . mertebeden diferensiyellenebilir yapı (atlas) adı verilir.

(1) $\{U, V, W, \dots\}$ açık kümelerinin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.

(2) $\mathbb{A}$ kümesindeki herhangi iki harita r . mertebeden uyumludur.

(3) $\mathbb{A}$ maksimaldir, yani eğer bir $(\bar{\varphi}, \bar{U})$ haritası $\mathbb{A}$ kümesindeki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $(\bar{\varphi}, \bar{U}) \in \mathbb{A}$ dır.



Şekil 2.1: Diferensiyellenebilir atlas

Tanım 2.2.9. (Şahin , 2012) Bir M manifoldu üzerinde r . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M manifolduna r . mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir.

Tanım 2.2.10. (Hacısalıhoğlu , 1980) M bir manifold olsun.

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{f | f : U \longrightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(U)\}$$

kümesini ele alalım. Bir

$$V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longrightarrow V_p[f] = \sum_{i=1}^n v_i|_p \frac{\delta f}{\delta x_i}|_p$$

dönüşümü için $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$(i) \vec{V}_p(\lambda f + \mu g) = \lambda \vec{V}_p[f] + \mu \vec{V}_p[g]$$

$$(ii) \vec{V}_p(f.g) = \vec{V}_p[f]g(p) + f(p)\vec{V}_p[g]$$

aksiyomları sağlanıyorsa $\vec{V}_p$ fonksiyonuna M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir.

Tanım 2.2.11. (Hacısalıhoğlu , 1980) M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesini

$$T_p M = \{\vec{V}_p \mid \vec{V}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

ile gösterelim. Bu küme

$$(+): T_p(M) \times T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$$

$$(\vec{V}_p, \vec{W}_p) \longrightarrow \vec{V}_p + \vec{W}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{V}_p + \vec{W}_p)[f] = \vec{V}_p[f] + \vec{W}_p[f]$$

ve

$$(\cdot): \mathbb{R} \times T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$$

$$(\lambda, \vec{V}_p) \longrightarrow \lambda \vec{V}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\lambda \vec{V}_p)[f] = \lambda \vec{V}_p[f], \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu uzaya M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı denir.

Tanım 2.2.12. (Hacısalıhoğlu , 1980) M bir manifold ve M manifoldunda bir komşuluk V olsun. Bir $p \in V$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p(V)$ olmak üzere V komşuluğunda bütün p noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{p \in V} T_p(V)$ ile gösterilsin. Bir

$$\pi : \bigcup_{p \in V} T_p(V) \rightarrow V$$

dönüşümü $\forall t_p \in T_p(V)$ tanjant vektörü için

$$\pi(t_p) = p$$

ile tanımlansın. Bu durumda $V \subseteq M$ üzerinde vektör alanı operatörü

$$X : V \rightarrow \bigcup_{p \in V} T_p(V)$$

biçiminde bir fonksiyondur öyle ki

$$\pi \circ X = I : V \rightarrow V$$

dönüşümü özdeşlik fonksiyonudur. M üzerinde vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.13. (Şahin , 2012) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F :$

$M \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasının komşuluğundaki harita (U, ϕ) ve $F(p) \in N$ noktasının komşuluğundaki harita (V, φ) olmak üzere, $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ den $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ kümesine olan $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}$ dönüşümü diferensiyellenebiliyorsa F dönüşümüne $p \in M$ noktasında diferensiyellenebilir dönüşüm denir.

Tanım 2.2.14. (Şahin , 2012) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $X \in T_p M$ için, X vektörü M de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında teğet olsun. Bu durumda $F(p) = F(\alpha(t_0))$ noktasında $F(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $F_*(X)$ vektörünü karşılık getiren $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dönüşümüne, türev dönüşümü denir. Bu dönüşüm aynı zamanda d operatörü ile de gösterilmektedir.

Tanım 2.2.15. (Şahin , 1996) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için $F_*(T_p M)$ uzayının boyutu r ise F dönüşümünün rankı r dir denir.

Tanım 2.2.16. (Şahin , 1996) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için $\text{rank} F = \text{boy} M$ ise $(F_*)_p$ birebirdir.

Tanım 2.2.17. (*Şahin , 1996*) M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dönüşümü birebir ise F dönüşümüne daldırma (immersiyon) denir. Bu durumda M manifolduna daldırılmış (immersed) altmanifold denir.

Tanım 2.2.18. (*Şahin , 1996*) $F : M \rightarrow N$ bir daldırma olsun. Eğer F , birebir ise F dönüşümüne yerleştirme veya gömme (imbedding) denir. Bu durumda M manifolduna gömülü (imbedded) altmanifold denir.

Tanım 2.2.19. (*Şahin , 2012*) M ve N sırasıyla m ve $n \leq m$ boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \rightarrow N$ örten bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için $F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dönüşümünün rankı n ise F dönüşümüne sığdırma veya submersiyon denir.

Tanım 2.2.20. (*Şahin , 1996*) M bir C^∞ manifold olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \kappa & : \mathbb{R} \times M \rightarrow M \\ (t, p) & \rightarrow \kappa(t, p) = \kappa_t(p) \end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\forall t \in \mathbb{R}$ için κ_t , M nın bir transformasyonu

(2) $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad \forall p \in M$ için

$$\kappa(t + s, p) = \kappa(t, \kappa(s, p))$$

$$\kappa_{t+s}(p) = \kappa_t(\kappa_s(p))$$

ise κ dönüşümüne M manifoldunun 1-parametrelî dönüşümlerinin grubu denir.

Tanım 2.2.21. (*Şahin , 1996*) M bir C^∞ manifold olsun. $I_\epsilon \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere

$$\kappa : I_\epsilon \times M \rightarrow M$$

(1) $\forall t \in I_\epsilon$ için κ_t , M manifoldunun bir transformasyonu

(2) $\forall t, s \in I_\epsilon, \quad t + s \in I_\epsilon, \quad \forall p \in M$ için

$$\kappa(t + s, p) = \kappa(t, \kappa(s, p))$$

ise κ dönüşümüne M manifoldunun 1-parametrelili lokal dönüşüm grubu denir.

Tanım 2.2.22. (Yano and Kon , 1984) M diferansiyellenebilir bir manifold ve X , M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. $\alpha(t)$, M üzerinde bir eğri olmak üzere eğer $X_{\alpha(t)}$ vektörü her t için $\alpha(t)$ eğrisine teğet ise o zaman $\alpha(t)$ eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir.

Önerme 2.2.1. (Yano and Kon , 1984) M diferansiyellenebilir bir manifold ve X , M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Her $p \in M$ için $p = \alpha(0)$ olacak şekilde $|t| < \epsilon$ ve bazı $\epsilon > 0$ için X vektör alanının tek bir $\alpha(t)$ integral eğrisi vardır.

Tanım 2.2.23. (Şahin , 1996) M bir manifold olsun. X , M üzerinde bir vektör alanı, κ_t lokal 1-parametrelili grup ve ϕ , M üzerinde bir tensör alanı olsun. Bu durumda

$$(L_X \phi)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi_p - (\kappa_t^* \phi)_p]$$

dönüşümüne ϕ tensör alanının X vektör alanına göre Lie türevi denir.

Tanım 2.2.24. (Do Carmo and Flaherty , 1992) M bir manifold ve manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları ve $f \in \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\nabla : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

ile tanımlı ve

$$(1) \nabla_{X+Y}Z = \nabla_XZ + \nabla_YZ$$

$$(2) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$(3) \nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$$

$$(4) \nabla_XfY = X[f]Y + f\nabla_XY$$

şartlarını sağlıyor ise ∇ dönüşümüne M üzerinde afin konneksiyon veya lineer konneksiyon adı verilir. Ayrıca afin konneksiyon M üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.25. *(Yano and Kon , 1984) M diferansiyellenebilir bir manifold ve ∇ , M üzerindeki afin konneksiyon olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow T(X, Y) = \nabla_XY - \nabla_YX - [X, Y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $(1, 2)$ tensör alanına torsiyon tensörü denir.

Tanım 2.2.26. *(Yano and Kon , 1984) M diferansiyellenebilir bir manifold ve ∇ , M üzerinde afin konneksiyon olsun. $\alpha(t)$, M üzerinde bir eğri olmak üzere eğer α eğrisinin teğet vektör alanı $X(t) = \alpha'(t)$, α boyunca paralel ise yani her t için $\nabla_XX = 0$ ise α eğrisine jeodezik denir.*

2.3 Riemann Manifoldları

Tanım 2.3.1. *(Şahin , 2012) M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun.*

$$X, Y \in \chi(M)$$

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty$$

ile tanımlı g bilineer formu

$$(1) \quad g(X, Y) = g(Y, X)$$

$$(2) \quad g(X, X) \geq 0 \quad (g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0)$$

yukarıda verilen simetriklik ve pozitif tanımlılık şartlarını sağlıyor ise g lineer formuna Riemann metriği, (M, g) ikilisine de Riemann manifoldu denir. Manifold üzerinde Riemann metriğinin tanımlı olması iki vektör alanı arasındaki açının ve vektör alanının uzunluğunun manifoldun herhangi bir noktasında tanımlanmasına olanak sağlar.

X vektör alanının uzunluğu, $p \in M$ için

$$\|X_p\| = \sqrt{g(X_p, X_p)}$$

şeklinde tanımlanır.

Aynı zamanda X ve Y vektörleri arasındaki açı;

$$g(X, Y) = g(X, X)g(Y, Y)\cos\theta$$

şeklinde tanımlanır.

M Riemann manifoldu üzerinde V ve W vektör alanları tanımlansın.

$$g(V, W) = g(dx^i(V)\frac{\partial}{\partial x_i}, dx^j(W)\frac{\partial}{\partial x_j})$$

dır. Bu durumda $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g_{ij}$ olmak üzere yukarıdaki eşitlik

$$g(V, W) = g_{ij}dx^i(V)dx^j(W) \text{ olur.}$$

Bu ifade keyfi her V ve W için doğru olduğundan $g = g_{ij}dx^i dx^j$ elde edilir.

Teorem 2.3.1. (Yano and Kon , 1984) Bir (M, g) Riemann manifoldu ve ∇ , M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(a) [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$(b) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

olacak şekilde tek bir konneksiyon vardır. Bu konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu ya da Riemann konneksiyonu adı verilir.

Teorem 2.3.2. (Şahin , 2012) (M, g) Riemann manifoldu ve ∇ bu manifoldun Riemann konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (1)$$

Bu eşitlik Kozsul formülü' dür.

Tanım 2.3.2. (Yano and Kon , 1984) (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2)$$

ile tanımlanan dönüşüme Riemann eğrilik tensörü adı verilir.

Önerme 2.3.1. (Yano and Kon , 1984) (2. Bianchi Özdeşliği) (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer $X, Y, Z \in \chi(M)$ ise o zaman

$$(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) = 0$$

dır.

Tanım 2.3.3. (Şahin , 2012) (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_p M$ olsun. $T_p M$ uzayının 2-boyutlu bir altuzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler x ve y olmak

üzere

$$K(P) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2} \quad (3)$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği denir.

Tanım 2.3.4. (*Şahin , 2012*) (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortonormal vektör alanları $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \longrightarrow S(X, Y) = \text{iz} R(\cdot, X)Y$$

ile tanımlı $(2, 0)$ mertebeli

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun Ricci Tensörü adı verilir. M manifoldunun Ricci operatörü Ric ise

$$g(\text{Ric}X, Y) = S(X, Y)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.3.5. (*Şahin , 1996*) (M, g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_p M$ olsun. $T_p M$ uzayının 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun skaler eğriliği denir ve r ile gösterilir.

Buna göre $T_p M$ uzayının ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

dır.

Sonuç 2.3.1. (*Şahin , 2012*) (M, g) bir Riemann manifold ve R, M manifoldunun eğrilik tensörü olsun. Eğer M, c sabit kesit eğrilikli ise her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z = c\{g(Z, X)Y - g(Y, Z)X\} \quad (4)$$

dır.

Tanım 2.3.6. (*Yano and Kon , 1984*) (M, g) bir Riemann manifold ve S, M manifoldunun Ricci tensörü olsun. Eğer bazı c sabiti için Ricci tensörü $S(X, Y) = cg(X, Y)$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman (M, g) Riemann manifolduna Einstein manifold denir.

2.4 Yarı-Riemann Manifolrları

Tanım 2.4.1. (*Şahin , 2000*) V reel m -boyutlu bir vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrik bilineer dönüşüm olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere

$$g(\xi, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

ise g simetrik bilineer dönüşümüne V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g dönüşümüne nondejeneredir denir. Buradan görülür ki g dönüşümünün nondejenere olması için gerek ve yeter şart $v \in V$ olmak üzere

$$g(u, v) = 0, \quad \forall u \in V \implies v = 0$$

olmasıdır. Bir V reel vektör uzayı üzerindeki simetrik bilineer form, V uzayının altuzayı üzerine dejenere veya nondejenere bir bilineer form indirger.

Tanım 2.4.2. (*Şahin , 2000*) V bir vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer dönüşüm g olsun. Her $v \in V$ için

1- $g(v, v) < 0$ ise g dönüşümüne negatif tanımlıdır denir.

2- $g(v, v) > 0$ ise g dönüşümüne pozitif tanımlıdır denir.

Tanım 2.4.3. (Şahin , 2000) V bir reel vektör uzayı ve W , V vektör uzayının altuzayı olsun. Bu durumda $W \times W$ üzerinde g dönüşümünün kısıtlanması da W üzerinde simetrik bilinear formdur. Simetrik bilinear formun negatif olduğu en büyük W altuzayının boyutuna V uzayı üzerinde bilinear formun indeksi denir.

Tanım 2.4.4. (Şahin , 2000) V bir vektör uzayı ve V üzerinde nondejenere simetrik bilinear form g olsun. Bu durumda g formuna bir skalar çarpım ve vektör uzayına da yarı-Öklidyen uzay denir. $p, q \neq 0$ durumunda V vektör uzayına özgün (proper) yarı-Öklidyen uzay denir. Simetrik bilinear formun dejenere olması durumunda vektör uzayına ışık benzeri (lightlike) uzay denir.

Tanım 2.4.5. (Şahin , 2000) V, g reel m -boyutlu yarı-Öklidyen uzay ve W da V uzayının altuzayı olsun. Eğer $g|_W$ dejenere ise altuzaya dejenere (lightlike) altuzay denir. Aksi durumda W uzayına nondejenere denir.

Tanım 2.4.6. (Duggal and Şahin , 2010) V bir yarı-Öklidyen uzay ve $x \in V$ olsun.

$g(x, x) > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne uzay benzeri (spacelike)

$g(x, x) < 0$ ise x vektörüne zaman benzeri (timelike)

ve

$g(x, x) = 0$ ise x vektörüne ışık benzeri (lightlike) denir.

Önerme 2.4.1. (Duggal and Şahin , 2010) Boştan farklı yarı-Öklidyen uzayların ortonormal bir bazı vardır.

Tanım 2.4.7. (Şahin , 2000) M bir m -boyutlu reel diferansiyellenebilir manifold ve g , M üzerinde $(0, 2)$ mertebeden simetrik tensör alanı olsun.

Böylece g , manifoldun her p noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayı üzerinde simetrik bilinear form taşır. Bunu g_p ile gösterelim. Eğer manifoldun her p noktası için g_p bilinear formunun indeksi aynı ve g_p , $T_p M$ uzayı üzerinde nondejenere ise bu durumda simetrik bilinear forma yarı-Riemann metrik ve manifoldda da yarı-Riemann manifold denir.

Önerme 2.4.2. (Şahin , 2000) M bir yarı-Riemann manifold ise M manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu vardır.

Tanım 2.4.8. (Şahin , 2000) M , g metriğiyle birlikte bir yarı-Riemann manifold, ∇ manifold üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (5)$$

olmak üzere

$$R(X, Y, Z, U) = g(R(X, Y)Z, U)$$

ile tanımlı $(0, 4)$ tipindeki tensör alanına Riemann eğrilik tensör alanı denir.

Bu durumda

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, U) + R(Y, X, Z, U) &= 0 \\ R(X, Y, Z, U) + R(X, Y, U, Z) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$R(X, Y, Z, U) - R(Z, U, X, Y) = 0$$

dır. Önerme 2.4.1 den dolayı yarı-Riemann manifoldların bir ortonormal bazı vardır. Buradan $\{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ manifoldun ortonormal bazı olmak üzere keyfi bir $X \in \chi(M)$ için

$$g(E_i, E_j) = \epsilon_i \delta_{ij}$$

ve

$$X = \sum_{i=1}^m \epsilon_i g(X, E_i) E_i, \quad (7)$$

burada ϵ_i , $\{E_i\}$ bazının işaretidir. Böylece

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i g(X, E_i) g(Y, E_i)$$

olur. Ayrıca manifoldun Ricci tensör alanı

$$S(X, Y) = \text{iz}\{Z \rightarrow R(X, Y)Z\} \quad (8)$$

ile tanımlanır ve lokal olarak

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^m \epsilon_i R(X, E_i, Y, E_i) \quad (9)$$

dır.

Tanım 2.4.9. (Şahin , 2000) M , g metriğiyle birlikte bir yarı-Riemann manifold, R manifold üzerinde Riemann eğrilik tensör alanı ve ∇ manifold üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $p \in M$ ve P , $T_p M$ uzayında bir nondejenere düzlem olmak üzere kesit eğriliği

$$K(P) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \quad (10)$$

ile tanımlanır. Burada $\{X, Y\}$, P düzleminin bazıdır. Eğer tanjant uzay üzerinde her nondejenere uzay için $K(P) = c$ (sabit) ise manifolda sabit kesit eğrilikli denir. Bu durumda

$$R(X, Y)Z = c\{g(Z, Y)X - g(X, Z)Y\} \quad (11)$$

olur.

2.5 Kompleks Manifolflar

Tanım 2.5.1. (Yano and Kon , 1984) M çift boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M manifoldunun her p noktasındaki J tensör alanı, $J^2 = -I$ için $T_p M$ tanjant uzayından $T_p M$ tanjant uzayına endomorfizma ise J tensör alanına hemen hemen kompleks yapı denir.

Tanım 2.5.2. (Yano and Kon , 1984) Bir manifold hemen hemen kompleks yapıya sahip ise buna hemen hemen kompleks manifold adı verilir.

Teorem 2.5.1. (De and Shaikh , 2009) Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur.

Tanım 2.5.3. (De and Shaikh , 2009) J , M hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. $X, Y \in \chi(M)$ ve $[\cdot, \cdot]$ Lie parantezi olmak üzere

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [JX, JY] + J^2[X, Y] - J[J(X), Y] - J[X, J(Y)] \\ &= [J(X), J(Y)] - [X, Y] - J[J(X), Y] - J[X, J(Y)] \end{aligned}$$

ile tanımlı N vektör değerli bilineer fonksiyonuna J yapısına göre Nijenhuis Tensörü denir.

Tanım 2.5.4. (Yano and Kon , 1984) M bir kompleks manifold, J hemen hemen kompleks yapı ve Z, W , $(1, 0)$ tipinde vektör alanları olsun. Eğer $[Z, W]$, $(1, 0)$ tipinde ise J yapısına integrallenebilirdir denir.

Teorem 2.5.2. (Yano and Kon , 1984) M bir kompleks manifold olsun. J hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır.

Tanım 2.5.5. (Kobayashi and Nomizu , 1969) J ve M sırasıyla hemen hemen kompleks yapı ve hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M kompleks manifoldu meydana getiren $2n$ -boyutlu reel manifold ise hemen hemen kompleks yapısına kompleks yapı denir.

Teorem 2.5.3. (Kobayashi and Nomizu , 1969) M hemen hemen kompleks manifold ve J , M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda J

hemen hemen kompleks yapısının bir kompleks yapı olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır.

Tanım 2.5.6. (*Şahin , 1996*) M hemen hemen kompleks manifold ve J , M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. M üzerinde bir Riemann metriği g olmak üzere $X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

ise g fonksiyonuna Hermityen metrik denir.

Tanım 2.5.7. (*Şahin , 1996*) M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M manifolduna hemen hemen Hermityen manifold denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M manifolduna Hermityen manifold denir.

Tanım 2.5.8. (*Şahin , 1996*) M hemen hemen kompleks manifold, g ve J , M manifoldu üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\phi(X, Y) = g(X, JY)$$

ile tanımlı tensöre temel 2-form denir.

Tanım 2.5.9. (*Şahin , 1996*) M hemen hemen kompleks manifold, g , M manifoldu üzerinde bir Hermityen metrik ve ϕ temel 2-form olsun. Eğer M manifoldu üzerinde tanımlanan ϕ temel 2-formu kapalı ise ($d\phi = 0$) g Hermityen metriğe Kaehler metrik denir.

Tanım 2.5.10. (*Şahin , 1996*) M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M manifolduna hemen hemen Kaehler manifold denir. Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M manifolduna Kaehler manifold denir.

Teorem 2.5.4. (*Şahin , 1996*) M bir Hermityen manifold ve ∇ , M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda M manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart J yapısının paralel olmasıdır, yani $\nabla J = 0$ dır.

2.6 Anti-Kaehler Manifolds

Bu alt bölümde hemen hemen anti-Hermityen manifoldların temel özellikleri verilmektedir.

Tanım 2.6.1. (*Fernández-Culma and Godoy , 2018*) Bir hemen hemen anti-Hermityen manifold bir (M, g, J) üçlüsüdür, burada M , $2n$ -boyutlu bir reel diferansiyellebilir manifold, J , M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı ve g de (M, J) üzerinde bir anti-Hermityen (Norden) metriktir, yani

$$g(JX, JY) = -g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \chi(M) \quad (12)$$

ya da denk olarak, J , g metriğine göre simetriktir.

Tanım 2.6.2. (*Fernández-Culma and Godoy , 2018*) (M, g, J) bir hemen hemen anti-Hermityen manifold olsun. Eğer J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise o zaman (M, g, J) üçlüsüne anti-Hermityen manifold ya da Kompleks Norden manifold denir.

Tanım 2.6.3. (*Fernández-Culma and Godoy , 2018*) (M, g, J) bir hemen hemen anti-Hermityen manifold olsun. Eğer J , (M, g) yarı-Riemann manifoldun Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise o zaman (M, g, J) üçlüsüne bir anti-Kaehler manifold denir.

(M, g, J) bir hemen hemen anti-Hermityen manifold ise o zaman g metriğinin işaretin (n, n) olduğu yani g metriğinin nötr bir metrik olduğu

açıkça görülür. (Fernández-Culma and Godoy , 2018)

(M, g, J) üçlüsü bir hemen hemen anti-Hermityen manifold olsun. Bundan sonra ∇ ile (M, g) manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ve $\nabla_X J$ ile de J yapısının X vektör alanı yönündeki türevi gösterilecektir.

$X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere N Nijenhuis tensörünün J yapısının (M, g) manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre kovaryant türevi ile arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
 N(X, Y) &:= [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] \\
 &= \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX - J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY \\
 &\quad - \nabla_{JY} X) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X), \\
 &= (\nabla_{JX} J)Y - J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JY} J)X + J(\nabla_Y J)X
 \end{aligned} \tag{13}$$

dır. Dolayısıyla bir (M, g, J) hemen hemen anti-Kaehler manifoldu, J yapısının integrallenebilir olmasını sağlar. (Fernández-Culma and Godoy , 2018)

Örnek 2.6.1. (Kartal , 2012) $\mathbb{R}^{2n+2}$, $2(n+1)$ boyutlu Öklid uzayı

$$J(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}) = (x_{n+2}, \dots, x_{2n+2}, -x_1, \dots, -x_{n+1})$$

kanonik kompleks yapısı ve

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i - \sum_{i=n+2}^{2n+2} x_i y_i$$

indeksi $(n+1)$ olan yarı-Öklid metriği ile bir anti-Kaehler manifolddur.

$n = 1$ için $X, Y \in \mathbb{R}^4$, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ olmak üzere kompleks yapının tanımlanışından

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3, x_4, -x_1, -x_2)$$

$$J(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_3, y_4, -y_1, -y_2)$$

dır. g yarı-Öklid metriğin tanımından

$$\begin{aligned}
 g(JX, JY) &= g((x_3, x_4, -x_1, -x_2), (y_3, y_4, -y_1, -y_2)) \\
 &= x_3y_3 + x_4y_4 - x_1y_1 - x_2y_2 \\
 &= -g(X, Y)
 \end{aligned}$$

olduğundan g bir anti-Hermityen metriktir.

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X J)Y &= \nabla_X JY - J\nabla_X Y \\
 &= (y_3[x_1], y_4[x_1], -y_1[x_1], -y_2[x_1]) + (y_3[x_2], y_4[x_2], \\
 &\quad -y_1[x_2], -y_2[x_2]) + (y_3[x_3], y_4[x_3], -y_1[x_3], -y_2[x_3]) \\
 &\quad + (y_3[x_4], y_4[x_4], -y_1[x_4], -y_2[x_4]) - J(y_1[x_1], y_2[x_1], \\
 &\quad y_3[x_1], y_4[x_1]) - J(y_1[x_2], y_2[x_2], y_3[x_2], y_4[x_2]) \\
 &\quad - J(y_1[x_3], y_2[x_3], y_3[x_3], y_4[x_3]) - J(y_1[x_4], y_2[x_4], \\
 &\quad y_3[x_4], y_4[x_4])
 \end{aligned}$$

ve J kompleks yapısının tanımlanışından

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X J)Y &= (y_3[x_1], y_4[x_1], -y_1[x_1], -y_2[x_1]) + (y_3[x_2], y_4[x_2], \\
 &\quad -y_1[x_2], -y_2[x_2]) + (y_3[x_3], y_4[x_3], -y_1[x_3], -y_2[x_3]) \\
 &\quad + (y_3[x_4], y_4[x_4], -y_1[x_4], -y_2[x_4]) - (y_3[x_1], y_4[x_1], \\
 &\quad -y_1[x_1], -y_2[x_1]) - (y_3[x_2], y_4[x_2], -y_1[x_2], -y_2[x_2]) \\
 &\quad - (y_3[x_3], y_4[x_3], -y_1[x_3], -y_2[x_3]) - (y_3[x_4], y_4[x_4], \\
 &\quad -y_1[x_4], -y_2[x_4]) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

dır. Böylece J kompleks yapısı Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olur.

Dolayısıyla $n = 1$ için manifoldun anti-Kaehler olduğu görülür.

Önerme 2.6.1. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (M, g, J) bir hemen hemen anti-Hermitiyen manifold ve ∇ , (M, g) manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $(\nabla_X J)$, g metriğine göre simetrik bir operatördür, yani

$$g((\nabla_X J)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X J)Z), \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M) \quad (14)$$

dır.

İspat. (M, g, J) bir hemen hemen anti-Hermitiyen manifold ise J yapısı g metriğine göre simetriktir yani $g(JY, Z) = g(Y, JZ)$ dır. Eşitliğin her iki tarafının X vektör alanı yönünde türevi alınırsa $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$X(g(JY, Z)) = X(g(Y, JZ))$$

$$g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) = g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X JZ)$$

dır. J yapısının g metriğine göre simetrik olması kullanılırsa

$$g(\nabla_X JY, Z) + g(Y, J\nabla_X Z) = g(J\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X JZ)$$

$$g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) = g(Y, \nabla_X JZ) - g(Y, J\nabla_X Z)$$

$$g(\nabla_X JY - J\nabla_X Y, Z) = g(Y, \nabla_X JZ - J\nabla_X Z)$$

elde edilir. Böylece

$$g((\nabla_X J)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X J)Z)$$

olur ve ispat biter.

Önerme 2.6.2. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (M, g, J) bir hemen hemen anti-Hermitiyen manifold olsun. Bu durumda (M, g, J) manifoldunun bir anti-Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_{JX} J)Y = \varepsilon J(\nabla_X J)Y, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M)$$

olmasıdır, burada ε reel bir sabittir.

İspat. $\alpha(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z)$ olarak tanımlansın. Önerme 2.6.1 den α , son iki değişkenine göre simetrik bir tensördür yani

$$\alpha(X, Y, Z) = \alpha(X, Z, Y) \quad (15)$$

dır. Hipotez altında

$$\begin{aligned} \alpha(JX, Y, Z) &= g((\nabla_{JX} J)Y, Z) \\ &= \varepsilon g(J(\nabla_X J)Y, Z) \\ &= \varepsilon g((\nabla_X J)Y, JZ) \\ &= \varepsilon \alpha(X, Y, JZ) \end{aligned} \quad (16)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \alpha(JX, Y, Z) &= g(J(\nabla_X J)Y, Z) \\ &= -\varepsilon g((\nabla_X J)JY, Z) \\ &= -\varepsilon \alpha(XJ, Y, Z) \end{aligned} \quad (17)$$

elde edilir. (15), (16) ve (17) den

$$\begin{aligned} \alpha(JX, Y, Z) &= \alpha(JX, Z, Y) \\ &= -\varepsilon \alpha(X, JZ, Y) \\ &= -\varepsilon \alpha(X, Y, JZ) \\ &= -\varepsilon \alpha(JX, Y, Z) \end{aligned} \quad (18)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\nabla J = 0$ dır.

3 LİE GRUPLARI

Bu bölüm altı alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde Lie grupların temel tanımı ve kavramları sunulmaktadır. İkinci alt bölümde Lie gruplar üzerinde daha sonraki alt bölümlerde de kullanılacak olan kavramlar sunulmaktadır. Üçüncü alt bölümde Lie gruplar üzerinde Riemann metrikleri tanıtılmaktadır. Dördüncü alt bölümde bi-invariant metrikle donatılmış Lie grubunun geometrik özellikleri verilmektedir. Beşinci alt bölümde ise sol-invariant metriğe sahip Lie grupların eğrilik özellikleri incelenmektedir. Altıncı alt bölümde mekanik sistemlerde çok sık kullanılan bazı Lie grup örnekleri sunulmaktadır.

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. (*Arvanitoyeorgos , 2003*) G diferansiyellenebilir bir manifold olsun. O zaman

(a) G bir grup

(b) $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow xy$ ve $G \rightarrow G$, $x \rightarrow x^{-1}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır

şartları sağlanırsa G manifolduna bir Lie Grubu denir.

Örnek 3.1.1. (*Arvanitoyeorgos , 2003*) $\mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir bir manifold ve toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli, birimli ve tersinir olduğundan bir gruptur. $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ için

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(u, v) \mapsto +(u, v) = (u + v) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \mapsto i(u) = -u = (-u_1, \dots, -u_n)$$

işlemleri diferansiyellenebilirdir. O halde $\mathbb{R}^n$ vektör toplamı işlemi altında bir Lie gruptur.

Benzer şekilde $\mathbb{C}^n$ bir kompleks manifolddur ve toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli, birimli ve tersinir olduğundan bir gruptur. $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$+ : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$(x, y) \mapsto +(x, y) = (x + y) = x_1 + y_1 + i(x_2 + y_2)$$

$$i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$x \mapsto i(x) = -x = -x_1 - ix_2$$

işlemleri diferansiyellenebilirdir. O halde $\mathbb{C}^n$ vektör toplamı işlemi altında bir Lie gruptur.

Örnek 3.1.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G ve H iki Lie grup olsun. O zaman G ve H aynı zamanda diferansiyellenebilir manifoldlardır. İki diferansiyellenebilir manifoldun çarpımı da diferansiyellenebilir bir manifold olduğundan $G \times H$ çarpımı da bir diferansiyellenebilir manifolddur. G ve H birer grup olduğundan $G \times H$ çarpımı da bir gruptur. $\odot$ ve $\oplus$ sırasıyla G ve H gruplarının grup işlemi olmak üzere

$$\odot, \oplus : (G \times H) \times (G \times H) \rightarrow (G \times H)$$

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \rightarrow (x_1 \odot y_1^{-1}, x_2 \oplus y_2^{-1})$$

işlemi $G \times H$ grubunun grup işlemidir ve açıkça görülür ki diferansiyellenebilirdir. O halde G ve H iki Lie grup ise $G \times H$ çarpımı da bir Lie gruptur.

Örnek 3.1.3. (Arvanitoyeorgos , 2003) $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{R})$

$$M_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A, n \times n \text{ tipinde bir matris}\}$$

olsun. $M_n(\mathbb{R})$ kümesinin

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\} \subset M_n(\mathbb{R})$$

alt kümesini göz önüne alalım. $M_n\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ ve $\det : M_n\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu n dereceli bir polinom olduğundan süreklidir. $GL_n\mathbb{R} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ ve $\det$ fonksiyonu sürekli olduğundan açığın ters görüntüsü de açıktır. Yani topolojik olarak $GL_n\mathbb{R} \subseteq M_n\mathbb{R}$ açık alt kümesidir. $M_n\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ olduğundan Öklid uzayının açık bir alt kümesi de diferansiyellenebilir manifolddur. Dolayısıyla $GL_n\mathbb{R}$, n^2 boyutlu diferansiyellenebilir bir manifolddur.

Grup işlemi matris çarpımı olmak üzere $GL_n(\mathbb{R})$ grup işlemine göre kapalı ve birleşmelidir, birim elemanı $e = I$ birim matristir ve her elemanın determinantı sıfırdan farklı olduğundan tersinirdir. Dolayısıyla $GL_n(\mathbb{R})$ bir grup yapısı belirtir. Şimdi diferansiyellenebilirlik şartlarını inceleyelim.

$$\cdot : GL_n\mathbb{R} \times GL_n\mathbb{R} \rightarrow GL_n\mathbb{R}$$

$$(A, B) \rightarrow A \cdot B = (ab_{ij}) = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$

A ve B matrislerinin koordinat fonksiyonları diferansiyellenebilir olduğundan $A \cdot B$ matrisinin koordinat fonksiyonları da diferansiyellenebilirdir. Dolayısıyla fonksiyon diferansiyellenebilirdir.

$$i : GL_n\mathbb{R} \rightarrow GL_n\mathbb{R}$$

$$A \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

diferansiyellenebilir fonksiyondur. Dolayısıyla grup işlemleri de diferansiyellenebilirdir. O halde $GL_n\mathbb{R}$ matrislerde çarpma işlemine göre bir Lie grubudur.

Bu gruba "genel lineer grup" adı verilir. $GL_n\mathbb{R}$ bir Lie gruptur fakat değişmeli değildir.

$GL_n\mathbb{R}$ grubunu R^n uzayından R^n uzayına tüm tersinir lineer dönüşümlerin $Aut(R^n)$ otomorfizmalar kümesi olarak da tanımlayabiliriz. Çünkü her tersinir lineer dönüşüme karşılık gelen tersinir bir matris vardır.

Benzer şekilde $GL_n(\mathbb{C})$ kümesi tanımlanabilir.

Tanım 3.1.2. (Helgason , 1979) G bir Lie grubu ve H , G Lie grubunun bir altmanifoldu olsun. Eğer H , G Lie grubunun bir altgrubu ve H bir topolojik manifold yani grup işlemleri H üzerinde sürekli ise H manifolduna G Lie grubunun bir Lie altgrubu denir.

Tanım 3.1.3. (Helgason , 1979) G bir Lie grubu olsun. G Lie grubunda kapalı bir küme olan altgruba G Lie grubunun kapalı bir altgrubu denir.

Teorem 3.1.1. (Helgason , 1979) Eğer H bir G Lie grubunun kapalı bir altgrubu ise bu durumda H , G Lie grubunun bir altmanifoldu ve böylece G Lie grubunun bir (topolojik) Lie alt grubudur.

Örnek 3.1.4. (Arvanitoyeorgos , 2003) $GL_n(\mathbb{R})$ Lie grubunun bir alt kümesi olan

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I_n\} \subset GL(n, \mathbb{R})$$

kümesini göz önüne alalım.

$$f : GL_n\mathbb{R} \rightarrow M_n\mathbb{R}$$

$$A \mapsto A^{-1} - A^t$$

fonksiyonu süreklidir. $M_n\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ ve $0 \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ kapalı olduğundan $0 \subseteq M_n\mathbb{R}$ kapalı olur. $f^{-1}(0) = O(n)$ dir ve $O(n)$, $GL_n\mathbb{R}$ grubunun kapalı alt kümesidir.

$\mathbb{R}_n^n$ üzerindeki tüm ortogonal matrislerin kümesi matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba "ortogonal grup" denir. O halde Teorem 3.1.1 den $O(n)$ bir Lie gruptur.

Örnek 3.1.5. (Arvanitoyeorgos , 2003) $GL_n(\mathbb{C})$ Lie grubunun bir alt kümesi olan

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^{-T} = I_n\} \subset GL(n, \mathbb{C})$$

kümesini göz önüne alalım. Örnek 3.1.4 ile benzer şekilde işlem yapılarak $U(n)$ kümesinin bir Lie grup olduğu gösterilir. Bu gruba "üniter grup" denir.

Örnek 3.1.6. (Arvanitoyeorgos , 2003) $O(n, \mathbb{R})$ kümesinin bir alt kümesi olan

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu gruba "özel ortogonal grup" denir.

Örnek 3.1.7. (Arvanitoyeorgos , 2003) $U(n)$ kümesinin bir alt kümesi olan

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$$

kümesi matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur. Bu gruba "özel üniter grup" denir.

Önerme 3.1.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) S^1 birim çember olmak üzere Örnek 3.1.5 ve Örnek 3.1.6 den $SO(2)$, $U(1)$ ve S^1 Lie grupları izomorftir yani $SO(2) \simeq U(1) \simeq S^1$ dir.

İspat. $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$ de (x, y) noktası ile tanımlanan bir kompleks sayı olsun. O zaman $z = x + iy \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ile

$$A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in M_n \mathbb{R}$$

arasında birebir eşleme vardır. $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ de tanımlanan skaler çarpım $\langle z_1, z_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$, $\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2)$ olarak ifade edilir. $\mathbb{R}^2$ deki matris modelinde bu çarpım $\langle A_1, A_2 \rangle = \frac{1}{2}iz(A_1A_2^T)$ çarpımına denk gelir. Dolayısıyla bir kompleks sayının uzunluğu $|z|^2 = \langle z, z \rangle$, $|A|^2 = \det A$ olur.

$S^1 = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\mathbb{R}^2$ kümesinin matris modelinde

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : \det A = 1 \right\}$$

kümesine karşılık gelir. Matrislerin bu kümesi

$$\{B \in M_n\mathbb{R} : BB^T = I, \det B = 1\}$$

olarak da tanımlanır ve grubun çarpma işlemi ile birlikte $SO(2)$ grubuna izomorftir.

Tanım 3.1.4. (Helgason , 1979) G bir Lie grup olsun. $\forall g \in G$ ve $a, b \in G$ için

$$L_a : G \rightarrow G$$

$$(a, g) \rightarrow L_a(g) = ag$$

ve

$$R_b : G \rightarrow G$$

$$(b, g) \rightarrow R_b(g) = gb$$

dönüşümleri tanımlansın. Burada L_a dönüşümüne "sol öteleme", R_b dönüşümüne "sağ öteleme" adı verilir.

$L_a \circ L_b = L_{ab}$ ve $R_a \circ R_b = R_{ab}$ olduğundan $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$ ve $(R_a)^{-1} = R_{a^{-1}}$ elde edilir. Dolayısıyla L_a ve R_b dönüşümleri birer diffeomorfizmadır. Üstelik $L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$ dır. Ayrıca L_a ve R_a dönüşümleri G üzerinde bir gruptur.

Tanım 3.1.5. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grubu ve X, G üzerinde bir vektör alanı olmak üzere eğer her $a \in G$ için $X \circ L_a = dL_a(X)$ ise, daha açıkça $\forall a, g \in G$ için $X_{ag} = (dL_a)_g(X_g)$ ise X vektör alanına sol-invariant vektör alanı denir.

Teorem 3.1.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grubu ve G üzerinde vektör alanları X, Y olsun. X ve Y sol-invariant vektör alanı ise $[X, Y]$ Lie bracketi de sol invariant bir vektör alanıdır.

İspat. $\mathfrak{g}$, bir G Lie grubu üzerindeki tüm sol-invariant vektör alanlarının kümesini gösterebiliriz. Vektör alanlarının toplama işlemi ve reel sayılarla skalar çarpım işlemi $\mathfrak{g}$ kümesini bir vektör uzayı yapar. X, Y, G üzerinde iki sol-invariant vektör alanı, $a, p \in G$ ve f, G üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. O zaman

$$\begin{aligned} dL_a[X, Y]_p f &= [X, Y]_p(f \circ L_a) = X_p(Y(f \circ L_a)) - Y_p(X(f \circ L_a)) \\ &= X_p(dL_a Y)f - Y_p(dL_a X)f = X_p Y(f) - Y_p X(f) \\ &= (X_p Y - Y_p X)f = [X, Y]_p f \circ L_a, \end{aligned}$$

eşitliğinden, iki sol-invariant vektör alanının bracketi, tekrar bir sol-invariant vektör alanıdır.

Önerme 3.1.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grubu ve e, G Lie grubunun birim elemanı olmak üzere $X \rightarrow X_e$ fonksiyonu $\mathfrak{g}$ Lie cebiri ile G Lie grubunun e noktasındaki tanjant uzayı $T_e G$ arasında bir lineer izomorfizmadır. Yani $\mathfrak{g}$ Lie cebiri ile $T_e G$ uzayı arasında birebir eşleme vardır.

İspat. Fonksiyonun lineer olduğu açıktır. $\forall g \in G$ için eğer $X_e = 0$ ise $X_g = dL_g(X_e) = 0$ olduğundan fonksiyon birebirdir. $v \in T_e G$ olmak üzere, her $g \in G$ için $X_g^v = (dL_g)_e(v)$ olacak şekilde X^v vektör alanını tanımlayalım. O zaman fonksiyon örtendir. Dolayısıyla X^v sol-invarianttır ve $X_e^v = v$ dir.

Sonuç 3.1.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grubu, G Lie grubunun Lie cebiri $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun birim elemanı e ve G Lie grubunun e noktasındaki tanjant uzayı $T_e G$ olmak üzere

$$\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G$$

dır.

Tanım 3.1.6. (Hacısalıhoğlu , 2006) G bir Lie grup olsun. G üzerindeki sol-invariant vektör alanlarının Lie cebirine G Lie grubunun Lie cebiri denir. Bunun yanında G Lie grubunun e birim noktasındaki $T_e G$ tanjant uzayını Lie cebir yapısı ile birlikte G Lie grubunun Lie cebiri olarak alabiliriz.

Bundan sonra aksi söylenmedikçe, Lie grubuna karşılık gelen Lie cebirleri Gotik yazı tipinde göstereceğiz.

Örnek 3.1.8. (Gudmundsson , 2004) $SL_2\mathbb{R}$ özel lineer grubunun $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ Lie cebiri

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tarafından gerilir ve $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ Lie cebirinin Lie braketi

$$[X, Y] = 2Z, \quad [Z, X] = 2Y, \quad [Y, Z] = -2X$$

ile verilir.

Örnek 3.1.9. (Gudmundsson , 2004) $SU(2)$ özel üniter grubunun $\mathfrak{su}(2)$ Lie cebiri

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

tarafından gerilir ve $\mathfrak{su}(2)$ Lie cebirinin Lie braketi

$$[X, Y] = 2Z, \quad [Z, X] = 2Y, \quad [Y, Z] = 2X$$

ile verilir.

Örnek 3.1.10. (Gudmundsson , 2004) $SO(3)$ özel ortogonal grubunun $\mathfrak{so}(3)$

Lie cebri

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tarafından gerilir ve $\mathfrak{su}(2)$ Lie cebri Lie braketini

$$[X, Y] = Z, \quad [Z, X] = Y, \quad [Y, Z] = X$$

ile verilir.

3.2 Lie Grupları Üzerinde Tanımlanan Bazı Kavramlar

Tanım 3.2.1. (Wang , 2006) G bir Lie grubu olsun. $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$ olacak şekilde tanımlanan diferansiyellenebilir

$$\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$$

homomorfizmasına G grubunun bir-parametrelili altgrubu denir.

Dolayısıyla $\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ dönüşümü, $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$, $\phi(0) = e$ ve $\phi(-t) = \phi(t)^{-1}$ olacak şekilde bir eğridir.

Örnek 3.2.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) $\phi(t) = e^{it}$ dönüşümünü ve S^1 çemberini göz önüne alalım.

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto \phi(t) = e^{it}$$

olmak üzere $\forall s, t \in \mathbb{R}$ için $\phi(s+t) = e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it} = \phi(s)\phi(t)$, $\phi(0) = e^0 = 1$, $\phi(-t) = e^{-it} = (e^{it})^{-1} = \phi(t)^{-1}$ olduğundan ϕ bir diferansiyellenebilir diffeomorfizmadır. Dolayısıyla $\phi(t) = e^{it}$ dönüşümü S^1 çemberinin bir bir-parametrelili alt grubudur.

Örnek 3.2.2. (Arvanitoyeorgos , 2003)

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümünü ve $U(2) = \{A \in GL_2\mathbb{C} \mid AA^{-T} = I\}$ üniter grubunu göz önüne alalım. $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \phi(s+t) &= \begin{pmatrix} \cos(s+t) & \sin(s+t) \\ -\sin(s+t) & \cos(s+t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \phi(s)\phi(t), \\ \phi(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \\ \phi(-t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \phi(t)^{-1} \end{aligned}$$

olduğundan ϕ bir diferansiyellenebilir diffeomorfizmadır. Dolayısıyla ϕ dönüşümü $U(2)$ üniter Lie grubunun bir-parametrelili alt grubudur.

Örnek 3.2.3. (Arvanitoyeorgos , 2003) Örnek 3.2.2 e benzer şekilde

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü, $GL_3\mathbb{R}$ Lie grubunun bir-parametrelili alt grubudur.

Teorem 3.2.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup ve ϕ , G Lie grubunun bir-parametrelili alt grubu olsun. $\phi \mapsto d\phi_0(1)$ dönüşümü G Lie grubunun bir-parametrelili alt grupları ile e noktasındaki tanjant uzayı $T_e G$ arasında birebir eşleme tanımlar.

İspat. $v \in T_e G$ olmak üzere, $X_g^v = (dL_g)_e(v)$ de karşılık gelen sol-invaryant vektör alanının değeri olsun. Amacımız $\phi_v : \mathbb{R} \rightarrow G$ diferansiyellenebilir

homomorfizması elde etmektir. Önerme 2.2.1 den $\phi(0) = e$ ve $d\phi_t = X_{\phi(t)}^v$ olacak şekilde X^v vektör alanının tek integral eğrisi $\phi : I \rightarrow G$ olsun. Bu eğri bir homomorfizmadır çünkü $\forall t$ için $s + t \in I$ olacak şekilde $s \in I$ alınrsa o zaman $t \mapsto \phi(s + t)$ ve $t \mapsto \phi(s)\phi(t)$ eğrisi olma şartlarını sağlar. $t = 0$ iken $\phi(s)$ ortak değer olur. Dolayısıyla çözümün tekliğinden

$$\phi(s + t) = \phi(s)\phi(t) \quad (s, t \in I)$$

elde edilir. $\phi_v(t) = \phi(\frac{t}{n})^n$ uygun büyüklükteki n için ϕ dönüşümünü tüm $\mathbb{R}$ için genişletirsek ϕ_v istenilen homomorfizma olur. $v \mapsto \phi_v$ dönüşümü $\phi \mapsto d\phi_0(1)$ dönüşümünün tersidir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. Her $X \in \mathfrak{g}$ için $\phi'_X(0) = X$ olacak şekilde tek bir $\phi_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ bir-parametrelili altgrubu vardır.

Tanım 3.2.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun.

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

$$X \rightarrow \exp(X) = \phi_X(1) \quad (19)$$

ile tanımlanan dönüşüme üstel dönüşüm denir, burada ϕ_X , X vektör alanının bir-parametrelili altgrubudur.

Şimdi, ϕ_X ve ϕ_{sX} ($s \in \mathbb{R}$) arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

$h(t) = \phi_X(st)$ dönüşümünü ele alalım. Burada, $h'(t) = s\phi'_X(st)$ olacak şekilde bir bir-parametrelili altgruptur. Böylece $h'(0) = s\phi'_X(0) = sX$ dir. Diğer taraftan Sonuç 3.2.1 den $X = sX$ aldığımız zaman $\phi'_{sX}(0) = sX$ olur ve dolayısıyla integral eğrisinin tekliğinden

$$\phi_X(st) = \phi_{sX}(t)$$

elde edilir. Eğer s ve t yer değiştirilir ve $s = 1$ alınır

$$\exp(tX) = \phi_{tX}(1) = \phi_X(t)$$

olur ve dolayısıyla aşağıdaki sonuç elde edilir. (Arvanitoyeorgos , 2003)

Sonuç 3.2.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve $\exp$, (19) ile verilen üstel dönüşüm olsun. $\gamma(t) = \exp(tX)$ ($X \in \mathfrak{g}$) eğrisi G Lie grubunda $\gamma'(0) = X$ olacak şekilde tek homomorfizmadır. Ayrıca ϕ_X bir homomorfizma olduğundan $\exp(s+t)X = \exp(sX).\exp(tX)$ ve $(\exp tX)^{-1} = \exp(-tX)$ dir.

Şimdi bu $\exp$ dönüşümünün $\mathfrak{o} \in \mathfrak{g}$ noktasında $(d\exp)_{\mathfrak{o}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ türevini göz önüne alalım.

Teorem 3.2.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve $\exp$, (19) ile verilen üstel dönüşüm olsun. $\mathfrak{o} \in \mathfrak{g}$ olmak üzere $(d\exp)_{\mathfrak{o}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ türev dönüşümü birim dönüşümdür.

İspat. $\alpha(0) = \mathfrak{o}$ ve $\alpha'(0) = X \in \mathfrak{g}$ olacak şekilde $\mathfrak{g}$ de $\alpha(t) = tX$ eğrisini alalım. O zaman

$$\begin{aligned} (d\exp)_{\mathfrak{o}}(X) &= \frac{d}{dt}(\exp \circ \alpha)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp(tX))|_{t=0} \\ &= X \end{aligned}$$

olu. Böylece $(d\exp)_{\mathfrak{o}}$ dönüşümünün birim olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.2 den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.2.3. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve $\exp$, (19) ile verilen üstel dönüşüm olsun. $\exp$ dönüşümü, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinde $\mathfrak{o}$ vektör alanının bir komşuluğundan G Lie grubunda e birim elemanının bir komşuluğuna bir diffeomorfizmadır.

G Lie grubu ve $\phi(t)$, G üzerinde tanımlı bir bir-parametrelili altgrubu olsun. Bu durumda

$$\phi'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\phi(t+h) - \phi(t)]$$

olup $\phi(t)$ bir homomorfizma olduğundan

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\phi(t)\phi(h) - \phi(t)] \\ &= \phi(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\phi(h) - e] \end{aligned}$$

olur. Burada G bir Lie grubu olduğundan koordinatları diferansiyellenebilir olup

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h) - e}{h}$$

limiti mevcuttur. Bu limit değerine A diyelim. Yani

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h) - e}{h}$$

olsun. O zaman

$$\phi'(t) = A\phi(t)$$

elde edilir. Böylece $t = 0$ için

$$A = \phi'(0) = A\phi(0)$$

bulunur. (Arvanitoyeorgos , 2003)

Tanım 3.2.3. (Arvanitoyeorgos , 2003) $\phi(t)$, G Lie grubunun bir-parametrelili altgrubu olsun. $\phi'(t) = A\phi(t)$ ile tanımlanan A değerine $\phi(t)$ bir-parametrelili altgrubunun sonsuz küçük üretici denir.

Örnek 3.2.4. (Arvanitoyeorgos , 2003) $U(2)$ üniter Lie grubunun bir-parametrelili altgrubunun

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre $\phi'(t) = A\phi(t)$ ve $\phi'(0) = A$ olduğundan

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

ve

$$\phi'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

olup

$$\phi'(t) = A\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde $\phi(t)$ bir-parametrelili altgrubunun sonsuz küçük üretici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Burada $\phi'(t) = A\phi(t)$ denkleminin çözümü $\phi(t) = e^{At}$ dir. $\phi'(0) = A$ dır.

Gerçekten de e^{tA} nın taylor seri açılımı

$$e^{tA} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}t^n$$

olup

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{At^n}{n!}$$

ile ifade edilir.

G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri olmak üzere $\phi_X(0) = e$ ve

$\phi'_X(0) = X$ olacak şekilde

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

$$X \mapsto \exp(tX) = \phi_X(t)$$

dönüşümü tanımlansın. O halde

$$\exp(tX) = \phi_X(t) = e^{tX}$$

öyle ki; $\phi'_X(0) = X$ olduğundan $\exp$ dönüşümü yardımıyla bir G Lie grubunun

Lie cebiri bulunabilir. (Arvanitoyeorgos , 2003)

Örnek 3.2.5. (Arvanitoyeorgos , 2003) $G = GL_n\mathbb{R} = \{A \in M_n\mathbb{R} \mid \det A \neq 0\}$

Lie grubunu göz önüne alalım. $A \in M_n\mathbb{R}$ için

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

olduğundan matrislerde normun tanımı,

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

schwarz eşitsizliği ve

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

üçgen eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\|e^A\| \leq 1 + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \dots = e^{\|A\|}$$

dır. Bu ise

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$$

olduğunu gösterir. Böylece e^A serisi mutlak yakınsaktır. e^A 'nın tersi $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ şeklinde tanımlı olup $\exp A \in GL_n\mathbb{R}$ dir. Böylece $\phi(t) = e^{tA}$ olacak şekilde

$$\exp : M_n\mathbb{R} \rightarrow GL_n\mathbb{R}$$

$$A \rightarrow \exp(tA) = e^{tA}$$

tanımlanabilir. Dolayısıyla $GL_n\mathbb{R}$ Lie grubunun Lie cebirinin $M_n\mathbb{R}$ olduğu görülür.

Şimdiki önermede Lie gruplar ile Lie cebirler arasındaki ilk ilişki verilmektedir.

Önerme 3.2.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) $\phi : G \rightarrow H$ bir Lie grup homomorfizması ve $\exp$, (19) ile verilen üstel dönüşüm olsun. O zaman $d\phi_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$

bir Lie cebir homomorfizmasıdır. (Yani bu, G ve H grubundaki Lie braketini koruyan bir vektör uzayı izomorfizmasıdır.) Üstelik,

$$\phi(\exp X) = \exp(d\phi_e(X))$$

dır.

Teorem 3.2.3. (Arvanitoyeorgos , 2003)

(1) *Her bir $\mathfrak{g}$ Lie cebiri için, Lie cebri $\mathfrak{g}$ olacak şekilde en az bir G Lie grubu vardır. (Ancak tek olmak zorunda değildir.)*

(2) *G bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri olsun. H , G grubunun bir Lie altgrubu ve H grubunun Lie cebri $\mathfrak{h}$ ise o zaman $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir Lie alt cebiridir. Tersine $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin her bir $\mathfrak{h}$ Lie alt cebirine karşılık G grubunun tek bir bağlantılı H Lie altgrubu vardır. H grubunun Lie cebiri $\mathfrak{h}$ dir. Üstelik G grubunun normal altgrupları $\mathfrak{g}$ cebirinin ideallerine karşılık gelir.*

(3) *G_1, G_2 Lie grupları ve sırasıyla Lie cebirleri $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ olsun. Eğer $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ (Lie cebir olarak izomorfik) ise o zaman G_1 ve G_2 yerel izomorfiktir. Eğer G_1 ve G_2 Lie grupları basit bağlantılı ise (yani temel grupları aşıkarp grup) o zaman G_1 ve G_2 izomorfiktir.*

Tanım 3.2.4. (Arvanitoyeorgos , 2003) *G ve H birer Lie grubu ve $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ sırasıyla G ve H Lie gruplarına karşılık gelen Lie cebirleri olsun. $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ dönüşümü $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için*

$$\varphi[X, Y] = [\varphi X, \varphi Y]$$

şartını sağlıyorsa φ dönüşümüne bir Lie cebir homomorfizması adı verilir.

Üstelik φ dönüşümü biyektif ise φ dönüşümüne bir Lie cebir izomorfizması adı verilir.

Tanım 3.2.5. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup olsun.

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$$

$$g \rightarrow \phi(g) : V \rightarrow V$$

$$v \rightarrow \phi(g)(v)$$

homomorfizmasına G Lie grubunun bir (sonlu boyutlu) temsili denir, burada V bir sonlu boyutlu vektör uzayıdır. V uzayında G Lie grubunun temsili (G, V) ikilisi ile ifade edilir.

(G, V) , G Lie grubunun bir temsili, $g \in G$ ve $v \in V$ olsun. Bu durumda

$$\Phi : G \times V \rightarrow V$$

$$(g, v) \rightarrow \Phi(g, v) = \phi(g)(v)$$

ile verilen dönüşüm göz önüne alınsın. Eğer $\Phi(g, v) = g \cdot v$ olarak gösterilirse o zaman her $g_1, g_2 \in G$ ve $v \in V$ için $\Phi(e, v) = e \cdot v = v$ ve $\Phi(g_1, \Phi(g_2, v)) = \Phi(g_1, g_2 \cdot v) = g_1 \cdot (g_2 \cdot v) = (g_1 g_2 \cdot v)$ dır. O halde Φ dönüşümü G grubu üzerinde bir etki tanımlar. Sonuç olarak (G, V) temsili bir G -uzay olarak adlandırılır. $\phi(g)(v)$ ve $g \cdot v$ gösterimlerinin ikisi de kullanılabilir. (Arvanitoyeorgos , 2003)

Tanım 3.2.6. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup ve V bir reel (kompleks) vektör uzayı olsun. Eğer $\forall g \in G$ için

$$\Phi : V \rightarrow V$$

$$v \mapsto \Phi(g, v)$$

dönüşümü lineer ise o zaman karşılık gelen temsile reel (kompleks) temsil denir.

Tanım 3.2.7. (Arvanitoyeorgos , 2003) (G, V) bir temsil olsun. V uzayının bir U alt uzayına eğer $\forall g \in G$ için $g \cdot U \subset U$ ise *invariant veya G -invariant alt uzay* denir.

Önerme 3.2.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) Herhangi bir (G, V) temsili $\{0\}$ ve $\{V\}$ olmak üzere en az iki invariant alt uzaya sahiptir. $\{0\}$ uzayına *trivial alt uzay* denir.

Tanım 3.2.8. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup ve (G, V) bir temsil olsun. (G, V) temsilinin invariant alt uzayları sadece $\{0\}$ ve $\{V\}$ ise (G, V) temsiline *indirgenemez* denir.

Tanım 3.2.9. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup olsun. $\forall x \in G$ için

$$\begin{aligned} I_x &: G \longrightarrow G \\ g &\longrightarrow I_x(g) = xgx^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümüne G Lie grubunun iç otomorfizması denir.

Önerme 3.2.3. (Arvanitoyeorgos , 2003) Bir G Lie grubunun iç otomorfizması bir diffeomorfizmadır.

İspat. I_x, G Lie grubunun iç otomorfizması olsun. Her $g_1, g_2, x \in G$ için $I_x(g_1, g_2) = x(g_1g_2)x^{-1} = xg_1x^{-1}xg_2x^{-1} = I_x(g_1)I_x(g_2)$ olduğundan I_x bir homomorfizmadır ve $I_x = R_{x^{-1}} \circ L_x$ ve R_x ve L_x birer diffeomorfizma olduğundan I_x bir diffeomorfizmadır.

Tanım 3.2.10. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup ve $\mathfrak{g}, G$ Lie grubunun Lie cebiri olsun.

$$\mathbf{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

$$g \rightarrow \mathbf{Ad}(g) = (dI_g)_e(g)$$

dönüşümüne G Lie grubunun ek (adjoint) temsili denir.

$I_{xy} = I_x \circ I_y$ eşitliği türev alınınca $\mathbf{Ad}_{xy} = \mathbf{Ad}_x \circ \mathbf{Ad}_y$ eşitliğini gerçeklediğinden $\mathbf{Ad}$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Ayrıca $dI_x = dR_{x^{-1}} \circ dL_x$ ve $dR_{x^{-1}}$ ve dL_x diffeomorfizma olduğundan $\mathbf{Ad}$ dönüşümü de bir diffeomorfizmadır.

Tanım 3.2.11. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grubu ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. Bu durumda

$$\mathbf{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$$

$$X \longrightarrow \mathbf{ad}(X) = (d\mathbf{Ad})_e(X)$$

homomorfizmasına $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin ek (adjoint) temsili denir.

Önerme 3.2.4. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bağlantılı bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. G Lie grubunun ve $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin merkezi sırasıyla $Z(G)$ ve $Z(\mathfrak{g})$ olmak üzere $\text{Çek}\mathbf{Ad} = Z(G)$ ve $\text{Çek}\mathbf{ad} = Z(\mathfrak{g})$ dır. Üstelik $Z(G)$ merkezinin Lie cebiri $Z(\mathfrak{g})$ dır.

İspat. $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ otomorfizmalar kümesinin birimi I_g olmak üzere

$$\text{Çek}\mathbf{Ad} = \{g \in G \mid \mathbf{Ad}(g) = I_g\}$$

dır. $\mathbf{Ad}(g) = (dI_g)_e$ olduğundan $\forall X \in \mathfrak{g}$ için $(dI_g)_e(X) = X$ dır. Buradan $X = (dR_{g^{-1}} \circ dL_g)(X) = dR_{g^{-1}}(dL_g X) = dR_{g^{-1}}(X \circ L_g) = (X \circ L_g) \circ R_{g^{-1}} = (X \circ L_g) \circ (R_g)^{-1}$ elde edilir.

$$\text{Çek}\mathbf{Ad} = \{g \in G \mid X \circ L_g = X \circ R_g\}$$

$$= \{g \in G \mid gX = Xg\}$$

dır. $Z(G)$ merkezinin tanımından $\text{Çek}\mathbf{Ad} = Z(G)$ bulunur. Diğerleri de benzer şekilde gösterilir.

Teorem 3.2.4. (Arvanitoyeorgos , 2003) $\mathfrak{g}$ bir Lie cebir olmak üzere $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\mathbf{ad}(X)Y = [X, Y]$$

dır.

İspat. Ek temsil tanımından $\forall g \in G$ ve $Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{Ad}(g)Y &= dI_g(Y) \\ &= dR_{g^{-1}}dL_g(Y) \\ &= dR_{g^{-1}}(Y) \end{aligned}$$

dır. $x_t = \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$ olsun. X bir sol-invaryant vektör alanı olduğundan $\forall y \in G$ için $L_y \circ x_t = x_t \circ L_y$ dır. Buradan $x_t(y) = x_t(L_y(e)) = L_y(x_t(e)) = yx_t(e) = R_{x_t(e)}(y)$ elde edilir ve böylece $dx_t = dR_{x_t(e)}$ olur. Önerme 3.2.1 den

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(Y - dx_t(Y)) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(R_{x_t(e)}(Y) - Y) \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\mathbf{Ad}(x_t^{-1}(e))Y - Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\mathbf{Ad}(x_t(e))Y - Y) \\ &= \mathbf{ad}(X)Y \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.12. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve $\mathbf{Ad}$, ek temsil olsun. Eğer G Abel bir Lie grup ise o zaman $\forall g \in G$ için $I_g = Id$ ve dolayısıyla $\mathbf{Ad}_g = Id$ olacağından yukarıdaki teoremden $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için $[X, Y] = 0$ dır. Bu özelliği sağlayan bir Lie cebire Abel Lie cebir denir.

Önerme 3.2.5. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve $\mathbf{Ad}$, ek temsil olsun. Eğer G bir matris grup ise o zaman $\forall g \in G$

, $X \in \mathfrak{g}$ için

$$\mathbf{Ad}(g) = gXg^{-1}$$

dır. Burada çarpım matris çarpımıdır.

İspat. $t \mapsto \exp(tX)$, türevi $t = 0$ da X olan X in bir-parametrelili alt grubu olsun. G matris grup için $\exp(tX) = e^{tX}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{Ad}(g)X &= (dI_g)_e(X) = \frac{d}{dt}I_g(\exp tX)|_{t=0} = \frac{d}{dt}g(\exp tX)g^{-1}|_{t=0} \\ &= g \frac{d}{dt}e^{tX}|_{t=0}g^{-1} = gXg^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.6. (Arvanitoyeorgos , 2003) $G = SU(2)$ Lie grubu ve bu grubun

$$\begin{pmatrix} is & z \\ -\bar{z} & -is \end{pmatrix}$$

formundaki matrisleri içeren $\mathfrak{su}(2)$ Lie cebirini göz önüne alalım.

$\mathbf{Ad} : SU(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{su}(2))$ dönüşümünü bulalım.

$$A = \begin{pmatrix} x + iy & u + iv \\ -u + iv & x - iy \end{pmatrix} \in SU(2)$$

olsun. $\mathbf{Ad}(A)$ nın $\mathfrak{su}(2)$ üzerinde $\mathbf{Ad}(AB) = A\mathbf{B}A^{-1}$ şeklinde tanımlanan tekil olmayan (non-singüler) bir lineer dönüşüm olduğu açıktır. Bu dönüşümü bulmak için $\mathfrak{su}(2)$ nin

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bazı kullanılacaktır. Böylece

$$\begin{aligned} &\mathbf{Ad} \begin{pmatrix} x + iy & u + iv \\ -u + iv & x - iy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + iy & u + iv \\ -u + iv & x - iy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + iy & -u - iv \\ u - iv & x + iy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ix^2 + iy^2 - iu^2 - iv^2 & -2ixu + 2uy + 2xv + 2ivy \\ 2iux + 2xv - 2uy + 2ivy & iu^2 + iv^2 - ix^2 - iy^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde diğer bazlar da hesaplandığı zaman

$$\begin{aligned} \mathbf{Ad} \begin{pmatrix} x + iy & u + iv \\ -u + iv & x - iy \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 - v^2 & -2xv + 2uy & 2xu + 2yv \\ 2uy + 2xv & x^2 - y^2 + u^2 - v^2 & -2xy + 2uv \\ -2xu + 2yv & 2xy + 2uv & x^2 - y^2 - u^2 + v^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.13. (Arvanitoyeorgos , 2003) Bir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin Killing formu

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longrightarrow B(X, Y) = \text{iz}(\mathbf{ad}X \circ \mathbf{ad}Y) \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlanır.

Önerme 3.2.6. (Arvanitoyeorgos , 2003) Bir $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin Killing formu

aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(a) $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde simetrik bilinear formdur.

(b) Eğer $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri ise o zaman B , $\mathbf{Ad}$ -invarianttır yani;

$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ ve $\forall g \in G$ için $B(X, Y) = B(\mathbf{Ad}(g)X, \mathbf{Ad}(g)Y)$ dır. Başka

bir deyişle, $g \in G$ için her $\mathbf{Ad}(g)$ bir B -ortogonaldır.

(c) Her $\mathbf{ad}(Z)$, B dönüşümüne göre ters simetriktir, yani;

$$B(\mathbf{ad}(Z)X, Y) = -B(X, \mathbf{ad}(Z)Y)$$

ya da

$$B([X, Z], Y) = B(X, [Z, Y])$$

dır.

İspat. (a) *Bilineerlik* $X \mapsto \mathbf{ad}(X)$ in lineerliğinden ve iz dönüşümünün lineerliğinden simetriklik de $\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$ eşitliğinden açıktır.

(b) Eğer $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir otomorfizması ise (yani $\sigma[X, Y] = [\sigma X, \sigma Y]$ olacak şekilde bir lineer izomorfizma) o zaman $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\sigma[X, Y] = \sigma \circ \mathbf{ad}(X)(Y)$$

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma \circ \mathbf{ad}(X)(Y)$$

$$\mathbf{ad}(\sigma X)(\sigma Y) = \sigma \circ \mathbf{ad}(X)(Y)$$

$$\mathbf{ad}(\sigma X) \circ \sigma = \sigma \circ \mathbf{ad}(X)$$

$$\mathbf{ad}(\sigma X) = \sigma \circ \mathbf{ad}(X) \circ \sigma^{-1}$$

dır. $\sigma = \mathbf{Ad}(g)$ alınırsa

$$\begin{aligned} B(\mathbf{Ad}(g)X, \mathbf{Ad}(g)Y) &= \text{iz}(\mathbf{ad}(\mathbf{Ad}(g)X) \circ \mathbf{ad}(\mathbf{Ad}(g)Y)) \\ &= \text{iz}(\mathbf{Ad}(g) \circ \mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{Ad}(g)^{-1} \\ &\quad \circ \mathbf{Ad}(g) \circ \mathbf{ad}(Y) \circ \mathbf{Ad}(g)^{-1}) \\ &= \text{iz}(\mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(Y)) \\ &= B(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

(c) Jacobi özdeşliği iki kez kullanılıp uygulanırsa:

$$\begin{aligned} [Z, [X, [Y, W]]] &= [[Z, X], [Y, W]] + [X, [Z, [Y, W]]] \\ &= [[Z, X], [Y, W]] + [X, [[Z, Y], W]] + [X, [Y, [Z, W]]] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{ad}(Z) \circ \mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(Y) &= \mathbf{ad}(\mathbf{ad}(Z)X) \circ \mathbf{ad}(Y) \\ &+ \mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(\mathbf{ad}(Z)Y) \\ &+ \mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(Y) \circ \mathbf{ad}(Z), \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} [\mathbf{ad}(Z), \mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(Y)] &= \mathbf{ad}(\mathbf{ad}(Z)X) \circ \mathbf{ad}(Y) \\ &+ \mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(\mathbf{ad}(Z)Y) \\ &+ \mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(Y) \circ \mathbf{ad}(Z) \end{aligned}$$

dır. $\text{iz}([A, B]) = 0$ olduğundan

$$B(\mathbf{ad}(Z)X, Y) + B(X, \mathbf{ad}(Z)Y) = 0$$

elde edilir.

Tanım 3.2.14. (Arvanitoyeorgos , 2003) Eğer bir G Lie grubunun Killing formu nondejenere ise G Lie grubuna yarı basit denir.

Önerme 3.2.7. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve $Z(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ cebirinin merkezi olsun. Eğer G bir yarı basit Lie grup ise o zaman $Z(\mathfrak{g}) = 0$ dır.

İspat. $X \in Z(\mathfrak{g})$ olsun. O zaman her $Y \in \mathfrak{g}$ için $[X, Y] = 0$ olur. Dolayısıyla $\mathbf{ad}(X)$ bir sıfır operatördür. Böylece B , G grubunun Killing formu olmak üzere

$$B(X, X) = \text{iz}(\mathbf{ad}X, \mathbf{ad}X) = 0$$

elde edilir. G yarı basit olduğundan $X = 0$ olur ve ispat biter.

Teorem 3.2.5. (Arvanitoyeorgos , 2003) Eğer G kompakt bir yarı basit Lie grup ise o zaman G Lie grubunun Killing formu negatif tanımlıdır.

İspat. Eğer G Lie grubu kompakt ise $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde $\mathbf{Ad}$ -invariant iç çarpım vardır, dolayısıyla $\mathbf{Ad}(g)$, $\mathfrak{g}$ cebirinin ortogonal bir dönüşümüdür. Önerme 3.2.6 de (c) şikkına benzer şekilde ispatlanarak $\mathbf{ad}(X)$ dönüşümünün, B Killing formuna göre ters-simetrik olduğu gösterilir. Buradan $\mathbf{ad}(X) = (a_{ij})$, $\mathfrak{g}$ cebirinin ortonormal bir bazıyla ilişkilendirilsin. O zaman

$$B(X, X) = \text{iz}(\mathbf{ad}(X) \circ \mathbf{ad}(X)) = \sum_i \sum_j a_{ij} a_{ji} = - \sum_{ij} (a_{ij})^2 \leq 0$$

olur. G grubu yarı basit olduğundan B Killing formu nondejenere değildir. Dolayısıyla toplam sıfır olamaz. O halde toplam kesinlikle sıfırdan küçüktür.

Teorem 3.2.6. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir bağlantılı Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri olsun. Eğer B , $\mathfrak{g}$ üzerinde negatif tanımlı ise o zaman G Lie grubu kompakt ve yarı basittir.

3.3 Lie Grupları Üzerinde Riemann Metrikleri

G Lie grubu bir grup olduğu gibi aynı zamanda diferansiyellenebilir bir manifold olduğundan G grubunu, onun grup yapısıyla bağlayan Riemann metrikleri kullanılmaktadır. Bu alt bölümde bu metrikler tanıtılmaktadır.

Tanım 3.3.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) G bir Lie grup ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$, G Lie grubu üzerinde Riemann metriği olsun. Her $a, x \in G$ ve $u, v \in T_x G$ için

$$\langle u, v \rangle_x = \langle (dL_a)_x u, (dL_a)_x v \rangle_{L_a(x)}$$

ise o zaman metriğe sol-invariant metrik denir. Her noktadaki tanjant uzayı, grubun birim elemanındaki tanjant uzayına dönüştürülebildiğinden yukarıdaki ilişki sol-invariantlık için $\langle u, v \rangle = \langle (dL_a)(u), (dL_a)(v) \rangle$ şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde eğer her bir $R_a : G \rightarrow G$ sağ dönüşümü bir izometri ise o zaman Riemann metriği sağ-invarianttır.

Önerme 3.3.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) Bir G Lie grubu üzerindeki sol-invaryant metriklerle, G Lie grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebri üzerindeki skaler çarpımlar arasında birebir eşleme vardır.

İspat. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, G Lie grubu üzerinde bir sol-invaryant metrik ve $X, Y \in \mathfrak{g}$ olsun.

O zaman $\langle \cdot, \cdot \rangle : G \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu G grubu üzerinde sabittir. $\forall a \in G$ için sol-invaryant vektör alanı ve sol-invaryant metrik tanımından

$$\langle X, Y \rangle(a) = \langle X_a, Y_a \rangle = \langle dL_a X_e, dL_a Y_e \rangle = \langle X_e, Y_e \rangle = \langle X, Y \rangle_e$$

elde edilir. Dolayısıyla $\langle X, Y \rangle$, G Lie grubu üzerinde bir skaler çarpım tanımlar.

Dolayısıyla G bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, G Lie grubu üzerinde sol-invaryant metrik ve ∇ , manifoldun Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$0 = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (20)$$

ve Kozsul özdeşliğinden

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \} \quad (21)$$

dır.

Tanım 3.3.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G Lie grubu üzerinde hem sol-invaryant hem sağ-invaryant olan metriğe bi-invaryant metrik denir.

Teorem 3.3.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) Her kompakt Lie grubu bir bi-invaryant metriğe sahiptir.

Önerme 3.3.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G Lie grubu üzerindeki bi-invaryant metrikler ile her $g \in G$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ için $\langle \mathbf{Ad}(g)X, \mathbf{Ad}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$ olacak

şekilde $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerindeki **Ad**-invariant skaler çarpımlar arasında birebir eşleme vardır. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle \quad (22)$$

dır.

İspat. Her $a \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ için $\mathbf{Ad}(g) = dR_{a^{-1}}X$ idi. Dolayısıyla sağ-invariantlık kullanılarak

$$\langle \mathbf{Ad}(g)X, \mathbf{Ad}(g)Y \rangle = \langle dR_{a^{-1}}X, dR_{a^{-1}}Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

elde edilir. Diğer ilişkiyi göstermek için $\exp(tX)$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], Z \rangle &= \langle \mathbf{ad}_X Y, Z \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{Ad}(\exp tX) Y \Big|_{t=0}, Z \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \mathbf{Ad}(\exp tX) Y, Z \right\rangle \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

ve iç çarpımın **Ad**-invariantlığından

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], Z \rangle &= \frac{d}{dt} \langle Y, \mathbf{Ad}(\exp(-tX)) Z \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle Y, -\mathbf{ad}_X Z \rangle \\ &= -\langle Y, [X, Z] \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

3.4 Bi-invariant Metriğe Sahip Lie Grubun Eğrilikleri

Bu alt bölümde bi-invariant metriğe sahip bir Lie grubunun geometrik özellikleri incelenecektir.

Önerme 3.4.1. (Arvanitoyeorgos , 2003) G , bi-invariant metriğe sahip bir Lie grup, e , G grubunun birim elemanı ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. O zaman

(a) $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için Riemann konneksiyonu

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

dır.

(b) G Lie grubunun e noktasında başlayan jeodezikleri, G grubunun bir-parametrelili altgruplarıdır.

İspat. (a) Önerme 3.3.1 in ispatından $\langle X, Y \rangle$ iç çarpımının sabit bir fonksiyon olduğunu biliyoruz, dolayısıyla her $Z \in \mathfrak{g}$ için $Z\langle X, Y \rangle = 0$ dır. Bu durum (1) deki Kozsul formülünde ilk üç terimin sıfır olması anlamına gelir ve

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle$$

elde edilir. Önerme 3.3.2 daki (22) eşitliğinden ilk iki terim birbirini sıfırlar ve $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ elde edilir.

(b) α , X sol-invaryant vektör alanına karşılık gelen bir-parametrelili altgrup olsun. O zaman $\nabla_{\alpha'} \alpha' = \nabla_X X|_{\alpha} = 0$ dır, dolayısıyla Tanım 2.2.26 den α bir jeodeziktir.

Önerme 3.4.2. (Arvanitoyeorgos , 2003) G , bi-invaryant metriğe sahip bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

(a) Eğrilik tensörü

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$$

dır.

(b) Kesitsel eğriligi

$$K = \frac{1}{4} \frac{\langle [X, Y], [X, Y] \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

dır.

(c) Ricci eğriliği

$$S(X, Y) = -\frac{1}{4} \sum_i \langle [X, E_i], [Y, E_i] \rangle$$

dır, burada $\{E_i\}$, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir ortonormal bazıdır.

(d) Eğer G Lie grubu kompakt ve bi-invaryant metrik Killing formdan gelen metrik ise o zaman skaler eğrilik

$$r = \frac{1}{4} \dim(G)$$

dır.

İspat. (a) Önerme 3.4.1 den $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ dır, dolayısıyla (2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= -\nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \\ &= -\frac{1}{2}[[X, Y], Z] + \frac{1}{4}[X, [Y, Z]] - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]] \end{aligned}$$

elde edilir. Jacobi özdeşliğinden $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ olduğundan yukarıdaki son iki toplamdan $\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$ elde edilir ve buradan $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$ bulunur.

(b) (22) denkleminde ve (a) şikkından

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle = -\frac{1}{4} \langle [[X, Y], Y], X \rangle = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [X, Y] \rangle$$

elde edilir. (3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} K &= \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\langle [X, Y], [X, Y] \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \end{aligned}$$

dır.

(c) Ricci eğriliği tanımı ve (22) denkleminde

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= \text{iz}\{Z \mapsto R(Z, X)Y\} = \sum_i \langle R(E_i, X)Y, E_i \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \sum_i \langle [[X, E_i], Y], E_i \rangle = -\frac{1}{4} \sum_i \langle [X, E_i], [Y, E_i] \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

(d) (4) eşitliği ve (22) denkleminde

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1} \langle R(E_i, E_j)E_j, E_i \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [[E_i, E_j], E_j], E_i \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle [E_i, E_j], [E_i, E_j] \rangle = \frac{1}{4} \dim G \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.4.3. (Arvanitoyeorgos , 2003) G , yarı basit, kompakt ve bi-invariant metriğe sahip bir Lie grup ve S, G Lie grubunun Ricci tensörü olsun.

O zaman

$$S(X, Y) = \frac{1}{4} B(X, Y)$$

dır. Böylece G , Killing form metriğe göre bir Einstein manifolddur.

İspat. Önerme 3.4.2 ve Killing form tanımından

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= \text{iz}(\mathbf{ad}X \circ \mathbf{ad}Y) = \sum_i \langle [[X, Y], E_i], E_i \rangle \\ &= -\sum_i \langle [Y, E_i], [X, E_i] \rangle = 4S(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.5 Sol-invariant Metriğe Sahip Lie Grubun Eğrilikleri

Bir önceki alt bölümdeki sonuçlar, G Lie grubu üzerindeki bi-invariant Riemann metriği için geçerlidir veya $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerindeki iç çarpıma göre

Ad-invarianttır. Eğer G Lie grubu sol-invariant metriğe sahip ise aşağıdaki bağıntılar geçerli olmaktadır.

Önerme 3.5.1. (*Arvanitoyeorgos , 2003*) G , sol-invariant metriğe sahip bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için Riemann konneksiyonu

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X, Y] - (\mathbf{ad}_X)^* Y - (\mathbf{ad}_Y)^* X)$$

dır, burada T^* , T lineer dönüşümünün adjointini temsil etmektedir.

İspat. Önerme 3.4.1 in ispatından elde edilen $2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle$ eşitliği

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= -\langle X, \mathbf{ad}_Y Z \rangle - \langle Y, \mathbf{ad}_X Z \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \\ &= -\langle (\mathbf{ad}_Y)^* X, Z \rangle - \langle (\mathbf{ad}_X)^* Y, Z \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \end{aligned}$$

olduğundan

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X, Y] - (\mathbf{ad}_X)^* Y - (\mathbf{ad}_Y)^* X)$$

eşitliğini verir, burada T^* , T lineer dönüşümünün adjointini temsil etmektedir.

Önerme 3.5.2. G , sol-invariant metriğe sahip bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

(a) Eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= -\frac{1}{2}([X, Y], Z] - (\mathbf{ad}_Z)^*[X, Y] - (\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Z) \\
&+ \frac{1}{4}([X, [Y, Z]] - (\mathbf{ad}_X)^*[Y, Z] - (\mathbf{ad}_{[Y, Z]})^*X) \\
&- \frac{1}{4}([X, (\mathbf{ad}_Z)^*Y] - (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Z)^*Y \\
&- (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Z)^*Y})^*X) - \frac{1}{4}([X, (\mathbf{ad}_Y)^*Z] \\
&- (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Y)^*Z - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*Z})^*X) \\
&- \frac{1}{4}([Y, [X, Z]] - (\mathbf{ad}_Y)^*[X, Z] - (\mathbf{ad}_{[X, Z]})^*Y) \\
&+ \frac{1}{4}([Y, (\mathbf{ad}_X)^*Z] - (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_X)^*Z \\
&- (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_X)^*Z})^*Y) + \frac{1}{4}([Y, (\mathbf{ad}_Z)^*X] \\
&- (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_Z)^*X - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Z)^*X})^*Y)
\end{aligned}$$

dır.

(b) Kesitsel eğriliği

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{1}{2} \frac{\langle [[X, Y], Y], X \rangle + \langle [X, [X, Y], Y] \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\
&- \frac{\langle [X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y], X \rangle + \frac{1}{4} \langle [(\mathbf{ad}_X)^*Y + (\mathbf{ad}_Y)^*X, Y], X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\
&- \frac{1}{4} \frac{\langle [(\mathbf{ad}_X)^*Y + (\mathbf{ad}_Y)^*X, X], Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}
\end{aligned}$$

dır.

İspat. (a) (2) eşitliğinden ve Önerme 3.5.1 den

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= -\nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \\
&= -\frac{1}{2}([X, Y], Z] - (\mathbf{ad}_Z)^*[X, Y] - (\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Z) \\
&+ \frac{1}{2} \nabla_X ([Y, Z] - (\mathbf{ad}_Z)^*Y - (\mathbf{ad}_Y)^*Z) \\
&- \frac{1}{2} \nabla_Y ([X, Z] - (\mathbf{ad}_Z)^*X - (\mathbf{ad}_X)^*Z)
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= -\frac{1}{2}([X, Y], Z] - (\mathbf{ad}_Z)^*[X, Y] - (\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Z) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\nabla_X[Y, Z] - \nabla_X(\mathbf{ad}_Z)^*Y - \nabla_X(\mathbf{ad}_Y)^*Z) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\nabla_Y[X, Z] - \nabla_Y(\mathbf{ad}_X)^*Z - \nabla_Y(\mathbf{ad}_Z)^*X) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X, Y] - (\mathbf{ad}_X)^*Y - (\mathbf{ad}_Y)^*X)$ olduğundan

$$\nabla_X[Y, Z] = \frac{1}{2}([X, [Y, Z]] - (\mathbf{ad}_X)^*[Y, Z] - (\mathbf{ad}_{[Y, Z]})^*X)$$

$$\nabla_Y[X, Z] = \frac{1}{2}([Y, [X, Z]] - (\mathbf{ad}_Y)^*[X, Z] - (\mathbf{ad}_{[X, Z]})^*Y)$$

$$\nabla_X(\mathbf{ad}_Z)^*Y = \frac{1}{2}([X, (\mathbf{ad}_Z)^*Y] - (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Z)^*Y - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Z)^*Y})^*X)$$

$$\nabla_X(\mathbf{ad}_Y)^*Z = \frac{1}{2}([X, (\mathbf{ad}_Y)^*Z] - (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Y)^*Z - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*Z})^*X)$$

$$\nabla_Y(\mathbf{ad}_X)^*Z = \frac{1}{2}([Y, (\mathbf{ad}_X)^*Z] - (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_X)^*Z - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_X)^*Z})^*Y)$$

$$\nabla_Y(\mathbf{ad}_Z)^*X = \frac{1}{2}([Y, (\mathbf{ad}_Z)^*X] - (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_Z)^*X - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Z)^*X})^*Y)$$

elde edilir. Dolayısıyla metrik sadece sol-invaryant ise eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= -\frac{1}{2}([X, Y], Z] - (\mathbf{ad}_Z)^*[X, Y] - (\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Z) \\ &\quad + \frac{1}{4}([X, [Y, Z]] - (\mathbf{ad}_X)^*[Y, Z] - (\mathbf{ad}_{[Y, Z]})^*X) \\ &\quad - \frac{1}{4}([X, (\mathbf{ad}_Z)^*Y] - (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Z)^*Y - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Z)^*Y})^*X) \\ &\quad - \frac{1}{4}([X, (\mathbf{ad}_Y)^*Z] - (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Y)^*Z - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*Z})^*X) \\ &\quad - \frac{1}{4}([Y, [X, Z]] - (\mathbf{ad}_Y)^*[X, Z] - (\mathbf{ad}_{[X, Z]})^*Y) \\ &\quad + \frac{1}{4}([Y, (\mathbf{ad}_X)^*Z] - (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_X)^*Z - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_X)^*Z})^*Y) \\ &\quad + \frac{1}{4}([Y, (\mathbf{ad}_Z)^*X] - (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_Z)^*X - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Z)^*X})^*Y) \end{aligned}$$

dır.

(b) (22) denkleminde ve (a) şikkından

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Y &= -\frac{1}{2}([X, Y], Y) - (\mathbf{ad}_Y)^*[X, Y] - (\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Y \\
&+ \frac{1}{4}([X, [Y, Y]] - (\mathbf{ad}_X)^*[Y, Y] - (\mathbf{ad}_{[Y, Y]})^*X) \\
&- \frac{1}{4}([X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y] - (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Y)^*Y - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*Y})^*X) \\
&- \frac{1}{4}([X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y] - (\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Y)^*Y - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*Y})^*X) \\
&- \frac{1}{4}([Y, [X, Y]] - (\mathbf{ad}_Y)^*[X, Y] - (\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Y) \\
&+ \frac{1}{4}([Y, (\mathbf{ad}_X)^*Y] - (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_X)^*Y - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_X)^*Y})^*Y) \\
&+ \frac{1}{4}([Y, (\mathbf{ad}_Y)^*X] - (\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_Y)^*X - (\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*X})^*Y)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Y &= -\frac{1}{2}([X, Y], Y) + \frac{1}{2}(\mathbf{ad}_Y)^*[X, Y] + \frac{1}{2}(\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Y \\
&- \frac{1}{2}[X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y] + \frac{1}{2}(\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Y)^*Y + \frac{1}{2}(\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*Y})^*X \\
&- \frac{1}{4}[Y, [X, Y]] + \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_Y)^*[X, Y] + \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Y \\
&+ \frac{1}{4}[Y, (\mathbf{ad}_X)^*Y] - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_X)^*Y - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_X)^*Y})^*Y \\
&+ \frac{1}{4}[Y, (\mathbf{ad}_Y)^*X] - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_Y)^*X - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*X})^*Y
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Y &= -\frac{1}{4}([X, Y], Y) + \frac{3}{4}(\mathbf{ad}_Y)^*[X, Y] + \frac{3}{4}(\mathbf{ad}_{[X, Y]})^*Y \\
&- \frac{1}{2}[X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y] + \frac{1}{2}(\mathbf{ad}_X)^*(\mathbf{ad}_Y)^*Y + \frac{1}{2}(\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*Y})^*X \\
&+ \frac{1}{4}[Y, (\mathbf{ad}_X)^*Y] - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_X)^*Y - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_X)^*Y})^*Y \\
&+ \frac{1}{4}[Y, (\mathbf{ad}_Y)^*X] - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_Y)^*(\mathbf{ad}_Y)^*X - \frac{1}{4}(\mathbf{ad}_{(\mathbf{ad}_Y)^*X})^*Y
\end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Y, X \rangle &= -\frac{1}{4}\langle [[X, Y], Y], X \rangle + \frac{3}{4}\langle [X, Y], [Y, X] \rangle \\
&+ \frac{3}{4}\langle Y, [[X, Y], X] \rangle - \frac{1}{2}\langle [X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y], X \rangle \\
&+ \frac{1}{2}\langle X, [(\mathbf{ad}_Y)^*Y, X] \rangle + \frac{1}{4}\langle [Y, (\mathbf{ad}_X)^*Y], X \rangle \\
&- \frac{1}{4}\langle Y, [X, [Y, X]] \rangle - \frac{1}{4}\langle Y, [(\mathbf{ad}_X)^*Y, X] \rangle \\
&+ \frac{1}{4}\langle [Y, (\mathbf{ad}_Y)^*X], X \rangle - \frac{1}{4}\langle X, [Y, [Y, X]] \rangle \\
&- \frac{1}{4}\langle Y, [(\mathbf{ad}_Y)^*X, X] \rangle
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Y, X \rangle &= -\frac{1}{2}\langle [[X, Y], Y], X \rangle - \frac{1}{2}\langle [X, [X, Y]], Y \rangle \\
&- \langle [X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y], X \rangle \\
&- \frac{1}{4}\langle [(\mathbf{ad}_X)^*Y + (\mathbf{ad}_Y)^*X, Y], X \rangle \\
&- \frac{1}{4}\langle [(\mathbf{ad}_X)^*Y + (\mathbf{ad}_Y)^*X, X], Y \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla kesitsel eğrilik

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\langle [[X, Y], Y], X \rangle + \langle [X, [X, Y]], Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\
&\quad - \frac{\langle [X, (\mathbf{ad}_Y)^*Y], X \rangle + \frac{1}{4}\langle [(\mathbf{ad}_X)^*Y + (\mathbf{ad}_Y)^*X, Y], X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{\langle [(\mathbf{ad}_X)^*Y + (\mathbf{ad}_Y)^*X, X], Y \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}
\end{aligned}$$

dır.

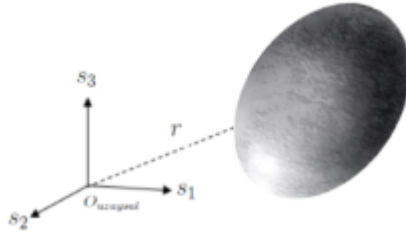
3.6 Bazı Lie Grup Modellemeleri

Bu alt bölümdeki ana kaynak Bullo and Lewis (2019) kitabıdır. Bu alt bölümde mekaniksel sistemlerde çok sık kullanılan bazı Lie grup örnekleri, modellemede verilen konfigürasyon manifoldu olarak sunulacaktır.

Bir parçacık kütle ve konuma sahip, hacmi olmayan bir nesnedir. Bir katı cisim de birbirlerine göre konumları sabit olan parçacık topluluğudur. Parçacık ya da katı cismin konumunu tanımlamak için uzaklık veya açı kavramlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla uzayda bir $\sum_{uzaysal} = (O_{uzaysal}\{s_1, s_2, s_3\})$ referans çatısı belirlenir. (Bullo and Lewis , 2019)

Bir parçacığın konumunun tek türlü belirlenmesi için uzayda yalnızca bir noktanın belirlenmesi gerekmektedir. Bunu yapmak için de $O_{uzaysal}$ dan parçacığın konumuna kadar bir r vektörü belirlenir ve bu vektör $\{s_1, s_2, s_3\}$ bazına göre yazılır. Bir katı cismin konumunun tek türlü belirlenmesi için genel olarak cisimdeki tek bir noktanın konumu gibi yönünün de belirlenmesi gerekmektedir. Bu nedenle cisim ile birlikte hareket eden bir $\sum_{cisim} = (O_{cisim}\{b_1, b_2, b_3\})$ çatısı seçilir. (Bullo and Lewis , 2019)

$O(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid RR^T = I_n\}$, $SO(n) = \{R \in O(n) \mid \det R = \mp 1\}$ sırasıyla ortogonal matrislerin kümesi ve özel ortogonal matrislerin kümesi olmak üzere cismin konumunun belirlenmesi için bileşenleri $\{s_1, s_2, s_3\}$ bazına göre bir $r = O_{cisim} - O_{uzaysal}$ vektörü ve i . sütununu b_i nin $\{s_1, s_2, s_3\}$ bazındaki bileşenlerinin oluşturduğu $R \in O(3)$ matrisi belirlenir. Eğer $\{s_1, s_2, s_3\}$ ve $\{b_1, b_2, b_3\}$ bazları aynı yönü paylaşıyorlarsa o zaman $R \in SO(3)$ dir. Bundan sonra böyle olduğunu kabul edilecektir ve bu durum Şekil 3.1 de gösterilmektedir. (Bullo and Lewis , 2019)



Şekil 3.1: Bir cismin yönü ve konumunun uzaysal ve cisim referans çatıları ile belirlenmesi

Tanım 3.6.1. (Bullo and Lewis , 2019) N_p parçacık ve N_b katı cisim ile oluşturulan $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \{1, \dots, N_p\}} \cup \{B_\beta\}_{\beta \in \{1, \dots, N_b\}}$ sistemine bir serbest mekanik sistem denir.

Tüm parçacık ve cisimlerin mümkün konumları

$$Q_{serbest} = \underbrace{(SO(3) \times \mathbb{R}) \times \dots \times (SO(3) \times \mathbb{R})}_{N_b \text{ tane}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{N_p \text{ tane}}$$

kümesi ile tanımlanmaktadır.

$Q_{serbest}$ kümesinin bu belirlenişi $a \in \{1, \dots, k\}$ olmak üzere her bir cisim için $\sum_{cisim,a}$ cisim çatısının ve $\sum_{uzaysal}$ uzaysal çatının seçilimine bağlıdır. Farklı seçimler aynı $Q_{serbest}$ kümesini vermektedir fakat $Q_{serbest}$ kümesindeki noktalar arasındaki ilişki ve cisim ve parçacıkların konfigürasyonları farklı olacaktır.

Tanım 3.6.2. (Bullo and Lewis , 2019) Hareketleri $Q_{serbest}$ kümesinin bir Q altmanifoldu üzerinde kısıtlanmış N_b katı cisim ve N_p parçacık ile oluşturulan $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \{1, \dots, N_p\}} \cup \{B_\beta\}_{\beta \in \{1, \dots, N_b\}}$ sistemine birbirine bağlı mekanik sistem denir. Burada Q manifolduna sistemin konfigürasyon manifoldu denir. Eğer $\dim(Q) = n$ ise sisteme n serbestiyet dereceli (n degrees-of-freedom) sistem denir.

Bir başka ifadeyle bir mekanizmanın konfigürasyonunu düzenlerken ihtiyaç duyulan parametre sayısını, mekanizmanın bağlantı (link) sayısı, eklem (joint) sayısı ve her bir noktada müsaade edilen hareket (serbestiyet) sayısı cinsinden ifade etmek zorunluluktur. Bu sayı serbestiyet derecesi veya mobility (devingenlik) olarak adlandırılır. (Aydın , 2002)

$Q_{serbest}$ kümesinin bir altmanifoldu olan Q manifoldunun daldırılmış olduğu fakat gömülü olmadığı durumlar da mümkündür. Basitlik için konfigürasyon manifoldları gömülü olarak düşünülecektir fakat diferansiyellenebilir

yapıya sahip olmaları sebebiyle daldırılmış olarak da düşünülebilmektedir.

(Bullo and Lewis , 2019)

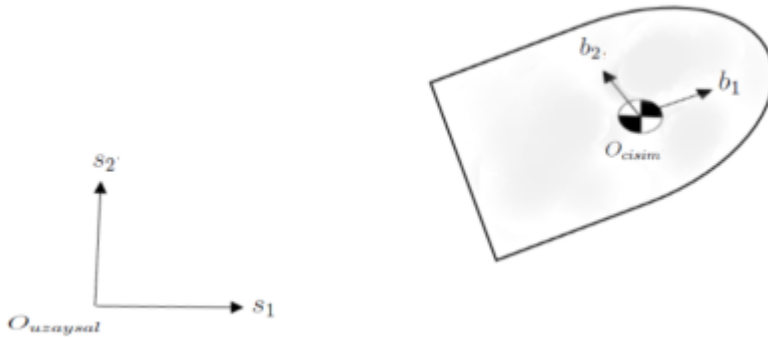
Bir mekanik sistemin konfigürasyonlarıyla birebir eşlemede olan Q kümesi bir diferansiyellenebilir manifold olmayabilir. Örneğin eğer konfigürasyonlar üzerinde eşitsizlik kısıtlamaları var ise o zaman konfigürasyon manifoldu kenarlara sahip olabilir ve bu kenarlar diferansiyellenebilir olmayabilir, örneğin köşelere sahip olabilir. Bunun gibi bir sistem için kenarları (boundaries) olan bir manifolddan bahsedilebilir. (Bullo and Lewis , 2019)

Bu alt bölümde konfigürasyon manifoldu, kenarlara sahip olmayan bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold olan sistemler ele alınacaktır.

Şimdi birbirine bağlı mekanik sistemlerin birkaç örneğini ele alacağız ve şunu göreceğiz ki; verilen bir fiziksel sistemde tüm konfigürasyon manifoldları diffeomorfik olsa bile Q manifoldunun tanımlanması ve cisimdeki konfigürasyon ile Q manifoldundaki bir noktanın ilişkilendirilmesi farklı şekillerde yapılabilir.

Örnek 3.6.1. (Bullo and Lewis , 2019) Şekil 3.2 de gösterilen, düzlemde hareket eden bir katı cisim göz önüne alınsın.

Bu sistem tek bir cisimden oluşmaktadır ve P ile cismin hareket ettiği düzlem



Şekil 3.2: Bir düzlemsel katı cisim

ifade edilmektedir. Bu durumda

1. $O_{uzaysal}, O_{cisim} \in P,$

2. s_3 ve b_3 vektörleri, P düzlemine ortogonal

olacak şekilde bir $(O_{uzaysal}\{s_1, s_2, s_3\})$ ve $(O_{cisim}\{b_1, b_2, b_3\})$ uzaysal ve cisim referans çatısı seçilsin. Uzaysal ve cisim referans çatılarının diğer seçimleri de mümkündür, ancak yukarıdaki özelliklere sahip çatılar en kullanışlı olanıdır.

$Q_{serbest} = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ dir. Cismin P düzlemindeki hareketi sınırlandırılmıştır yani $r = O_{cisim} - O_{uzaysal}$ vektörü $(x, y, 0)$ formundadır. Cismin gerçekleşebilir bir hareketi için $b_3 = s_3$ alınmaktadır. Bu nedenle $R \in SO(3)$ matrisi

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

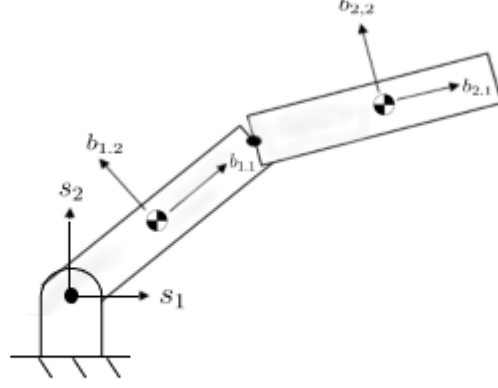
formundadır, burada $\theta \in \mathbb{R}$ dir. Bu matris özel ortogonal grubun uzaysal referans sisteminin s_3 bileşenini sabitleyen matrislerinden oluşan alt kümesinin bir elemanı olarak düşünülebilir. Bu da açık olarak $SO(2)$ grubuna diffeomorfik olan $SO(3)$ grubunun bir altmanifoldudur. (23) eşitliğinde verilen R ile birlikte

$$SO(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^3$$

$$\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, (x, y) \right) \mapsto (R, (x, y, 0))$$

dönüşümü $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ uzayından sistem için geçerli konfigürasyonlarının gösterimi olan Q altmanifolduna bir gömme (imbedded) dönüşümüdür. Bu yüzden basitçe $Q = SO(2) \times \mathbb{R}^2$ olacak şekilde tanımlanabilir. Önerme 3.1.1 den $SO(2) \simeq S^1$ olduğundan $Q = S^1 \times \mathbb{R}^2$ alınarak tanımlanması da mümkündür. Dolayısıyla Q manifoldunun inşa edilmesinde farklı tercihler söz konusu olabilmektedir. Bu tercihler esasen $(O_{uzaysal}\{s_1, s_2, s_3\})$ ve $(O_{cisim}\{b_1, b_2, b_3\})$ çatılarının seçimindeki çeşitliliklerle tanımlanmaktadır.

Örnek 3.6.2. (Bullo and Lewis , 2019) Bu örnek Şekil 3.3 de gösterilen iki birbirine bağlı bağlantıdır (interconnected link).



Şekil 3.3: İki-bağlantılı manipulator.

Şekil 3.3 de en soldaki bağlantı ilk bağlantı olsun. İlk bağlantının baz noktasının uzayda sabitlenmiş olduğunu ve iki bağlantının birbirine tutturulmuş olduğunu kabul edelim. İlk olarak uzaysal ve cisim referans çatılarını seçelim. Bir ucu uzayda sabitlenmiş cisim 'cisim 1', diğeri de 'cisim 2' olacak şekilde adlandırıl-sın. $(O_{cisim}\{b_1, b_2, b_3\})$ uzaysal referans çatısı $O_{uzaysal}$, cisim 1' in sabitlendiği noktada olacak şekilde seçilir ve s_3 eklem mükün kıldığı harekete dik olan doğrultuyu göstermektedir. $(O_{cisim,a}\{b_{a,1}, b_{a,2}, b_{a,3}\})$, $a \in \{1, 2\}$ cisim referans çatısı O_{cisim} , cisim a ' nın kütle merkezinde olacak şekilde seçilir ve $b_{a,3}$, $a \in \{1, 2\}$ vektörleri eklem izin verdiği hareket düzlemine diktir. Eklemi kütle merkezine bağlayan doğru boyunca belirtmesi için $b_{1,1}$ ve benzer şekilde de $b_{2,1}$ seçilir. Ayrıca cisim 1' in kütle merkezinin iki eklem arasındaki doğru üzerinde bulunduğunu kabul ediyoruz. Bu seçimler Şekil 3.3 de gösterilmektedir.

Açık bir şekilde görülür ki $Q_{serbest} = (SO(3) \times \mathbb{R}^3) \times (SO(3) \times \mathbb{R}^3)$ dır. Cisim

1 için $\theta_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

formundaki R_1 matrisi cismin yönünü belirtir. Dolayısıyla R_1 , $SO(2)$ nin bir elemanı olarak düşünülebilir. $r_1 = O_{cism,1} - O_{uzaysal}$ vektörünün uzunluğu $\tilde{r}_1$ olmak üzere r_1 sabit uzunlukta olacaktır ve referans çatısının seçiliminden dolayı

$$r_1 = \tilde{r}_1 R_1 s_1$$

formunda olacaktır. Bu yüzden cisim 1' in yönü ve konumu $R_1 \in SO(2)$ ile belirlenir. Cisim 2 için $\theta_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

dır. Bu yüzden R_2 , $SO(2)$ nin bir elemanı olarak düşünülebilir. l_1 ile cisim 1 deki iki eklem arasındaki uzaklık ve $\tilde{r}_2$ ile eklemde cisim 2 deki $O_{cism,2}$ noktasına kadar olan uzaklık gösterilirse o zaman

$$r_2 = l_1 R_1 s_1 + \tilde{r}_2 R_2 s_1$$

elde edilir. Böylece $R_1, R_2 \in SO(3)$ için

$$\begin{aligned} SO(2) \times SO(2) &\longrightarrow (SO(3) \times \mathbb{R}^3)^2 \\ \left(\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \right) &\mapsto ((R_1, \tilde{r}_1 R_1 s_1), \\ &\quad (R_2, l_1 R_1 s_1 - \tilde{r}_2 R_2 s_1)) \end{aligned}$$

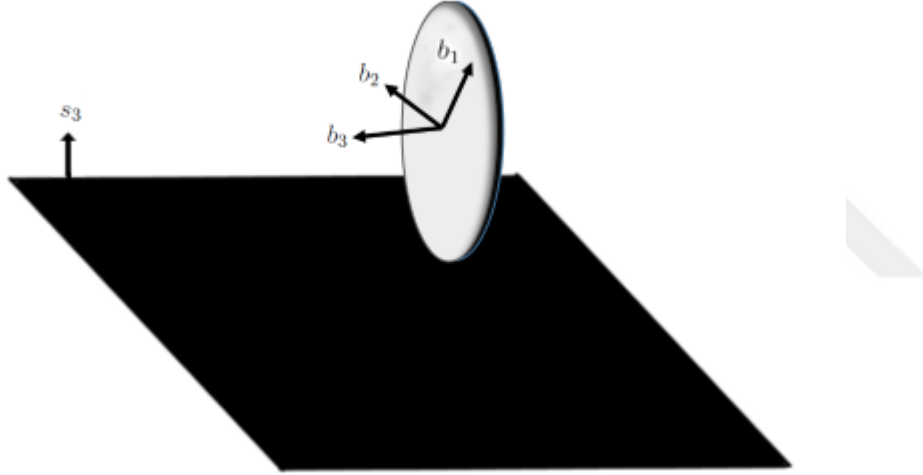
dönüşümü (24) ve (25) eşitliklerindeki gibi tanımlanır ve $SO(2) \times SO(2)$ nin sistemin geçerli konfigürasyonlarının $Q \subset Q_{serbest}$ altmanifoldu içine bir gömme dönüşümüdür. Dolayısıyla $Q = SO(2) \times SO(2)$, sistem için bir

konfigürasyon manifoldudur denir. Önerme 3.1.1 den $SO(2) \times SO(2) = S^1 \times S^1$ olduğundan $Q = S^1 \times S^1$ şeklinde de yazılabilir.

Düzlemsel cisim örneğinde de olduğu gibi burada da uzaysal ve cisim referans çatılarının seçiminde bazı serbestlikler mevcuttur.

Bu alt bölümde son olarak dik dönen disk göz önüne alalım.

Örnek 3.6.3. (Bullo and Lewis , 2019) Dönen disk, Şekil 3.4 de gösterilen dik pozisyonda kalmasıyla sınırlandırılmış, bir P düzleminde yuvarlanan disk olarak göz önüne alınan sistemdir. Yine uzaysal ve cisim çatılarının seçimi ile başlanacaktır.



Şekil 3.4: Bir dik dönen disk

Bu durumda

1. $O_{uzaysal} \in P$;
2. O_{cisim} cismin dönme merkezinde ;
3. s_3 , P düzlemine dik ;
4. b_3 , P düzlemine paralel ve düzlemde diskin yuvarlanma hareketinin yönüne dik

olacak şekilde $(O_{uzaysal}, \{s_1, s_2, s_3\})$ ve $(O_{cisim}, \{b_1, b_2, b_3\})$ çatıları seçilsin. Yine burada da seçimler tek değildir, bu bizim seçimimiz. Bu seçimler ile birlikte $r = O_{cisim} - O_{uzaysal} = (x, y, \rho)$ olur, burada ρ disk'in yarıçapı ve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ keyfidir. Bu örnekte çatıların yönünü belirleyen R matrisini yazmak çok kolay değildir. Bu tür yapılarda deneyim kazanıldıktan sonra sisteme bakarak uygun dönme matrisi yazılabilmektedir. Şimdi bunu sistematik bir şekilde burada yapacağız. Amaç $\{b_1, b_2, b_3\}$ bazı ile $\{s_1, s_2, s_3\}$ bazını ilişkilendirmektir. b_3, s_1 ve s_2 tarafından gerilen alt uzayda olduğundan

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $R_1 b_3 = -s_2$ özelliğine sahip R_1 matrisi alınabilir. Şimdi $i \in \{1, 2, 3\}$ için $b'_i = R_1 b_i$ ile gösterilsin. b'_1 ve b'_2, s_1 ve s_3 tarafından gerilen alt uzaydadır. Üstelik, $\{b'_1, b'_2\}$ vektörleri ile $\{s_1, s_3\}$ vektörlerinin aynı yönde olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $R_2 b'_1 = s_1$ ve $R_2 b'_2 = s_3$ olacak şekilde

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi & 1 & \sin\phi \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi vardır. Şimdi $i \in \{1, 2, 3\}$ için $b''_i = R_2 b'_i$ tanımlayalım. Son olarak

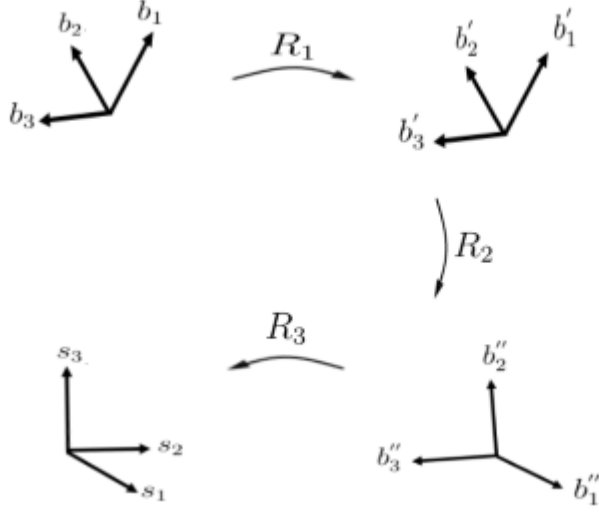
$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

alınarak $i \in \{1, 2, 3\}$ için $R_3 = b_1 z'' = s_2$ olduğu görülür. Bu yüzden $i \in \{1, 2, 3\}$ için $b_i = R_1^T R_2^T R_3^T s_i$ elde edilir. Böylece $i \in \{1, 2, 3\}$, b_i vektörünün $\{s_1, s_2, s_3\}$ bazına göre bileşenleri $R_1^T R_2^T R_3^T$ matrisinin i . sütunun bileşenleridir. Buradan

$$R = R_1^T R_2^T R_3^T \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\theta & \sin\phi \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\phi \sin\theta & \sin\phi \sin\theta & -\cos\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

elde edilir.

Şekil 3.5 de $\{b_1, b_2, b_3\}$ bazından $\{s_1, s_2, s_3\}$ bazına geçerken kullanılan işlem sırası gösterilmektedir.



Şekil 3.5: Dönen disk için R matrisini oluşturmada kullanılan işlemler

(26) eşitliğinde

$$\mathbb{R}^2 \times SO(2) \times SO(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

$$\left((x, y), \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \right) \mapsto ((x, y, \rho), R)$$

ile tanımlanan R dönüşümü, $\mathbb{R}^2 \times SO(2) \times SO(2)$ uzayından geçerli konfigürasyonun Q altmanifolduna bir gömme dönüşümü belirtir. Dolayısıyla $Q \simeq \mathbb{R}^2 \times SO(2) \times SO(2)$ elde edilir ve Önerme 3.1.1 den de $Q = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$ şeklinde ifade edilebilir.

4 ANTİ-KAEHLER YAPIYA SAHİP LİE GRUPLAR

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde verilen bir Lie grup üzerinde anti-Hermityen yapının varlığı ve buna bağlı kavramlar verilmektedir. İkinci alt bölümde anti-Kaehler yapıyla donatılmış 4-boyutlu Lie grupları ve bu Lie grupların Lie cebirleri incelenmektedir. Üçüncü alt bölümde ise anti-Kaehler yapı içeren Lie grupların Killing olma durumları incelenmektedir.

4.1 Anti-Kaehler Manifolddlar ve Lie Gruplar

Bu alt bölümde sol-invariant geometrik yapılarla birlikte Lie gruplarını göz önünde bulunduruyoruz.

Tanım 4.1.1. *(Fernández-Culma and Godoy , 2018) G bir Lie grubu ve J, G grubu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Eğer her $p \in G$ için*

$$(dL_p) \circ J = J \circ (dL_p)$$

ise o zaman J yapısına bir sol-invariant hemen hemen kompleks yapı denir.

$X \in \mathfrak{g}$ için

$$(dL_p) \circ J \circ X = J \circ (dL_p) \circ X$$

ve X bir sol-invariant vektör alanı olduğundan

$$(dL_p) \circ (J \circ X) = (J \circ X) \circ L_p$$

bulunur. Böylece denk olarak her $X \in \mathfrak{g}$ için $J \circ X \in \mathfrak{g}$ ise o zaman J yapısına bir sol-invariant hemen hemen kompleks yapı denir.

Dolayısıyla $J, J_e : T_e G \rightarrow T_e G$ lineer kompleks yapısıyla birlikte tanımlanır. Tersine $T_e G$ üzerindeki her lineer kompleks dönüşüm, G üzerinde bir J sol-invaryant hemen hemen kompleks yapısını tanımlar.

Tanım 4.1.2. *(Fernández-Culma and Godoy , 2018) G bir Lie grubu ve J, G üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen kompleks yapı olsun. Eğer*

$$[JX, JY] = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad (27)$$

ise o zaman J yapısına Abel kompleks yapı denir.

Bir G Lie grubu üzerinde bir J kompleks yapısı Abel ise Nijenhuis tensör alanı sıfır olur ve kompleks yapı integrallenebilirdir. Dolayısıyla (G, J) bir kompleks manifolddur. (Fernández-Culma and Godoy , 2018)

Tanım 4.1.3. *(Fernández-Culma and Godoy , 2018) G bir Lie grubu ve J, G üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen kompleks yapı olsun. Eğer*

$$[JX, Y] = J[X, Y](= [X, JY]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad (28)$$

ise o zaman J yapısına bi-invaryant kompleks yapı ve bi-invaryant kompleks yapıya sahip G Lie grubuna kompleks Lie grup denir.

Bir G Lie grubu üzerinde J kompleks yapısı bi-invaryant ise Nijenhuis tensör alanı sıfır olur. Böylece kompleks yapı integrallenebilirdir ve (G, J) bir kompleks Lie gruptur. Ayrıca J Abel kompleks yapısı ile birlikte bir G Lie grubunun kompleks Lie grup olması G Lie grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin abel olması ile mümkün olmaktadır. (Fernández-Culma and Godoy , 2018)

Tanım 4.1.4. *(Fernández-Culma and Godoy , 2018) G bir Lie grup olsun. g ve J , sırasıyla G üzerinde sol-invaryant metrik ve sol-invaryant kompleks yapı olmak üzere (G, g, J) bir hemen hemen anti-Hermityen manifold ise o*

zaman (g, J) yapısına G Lie grubu üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen anti-Hermityen yapı denir. Ek olarak eğer (G, g, J) bir anti-Kaehler manifold ise o zaman (g, J) yapısına G üzerinde bir sol-invaryant anti-Kaehler yapı denir.

Önerme 4.1.1. *(Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g, J) bir G Lie grubu üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen anti-Hermityen yapı olsun. Eğer*

$$\nabla_{JX}Y = -J\nabla_XY, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad (29)$$

$$\nabla_{JX}Y = J\nabla_XY, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad (30)$$

koşullarından herhangi biri sağlanırsa o zaman (G, g, J) bir anti-Kaehler manifolddur, hatta eğer (29) şartı sağlanırsa J bir Abel kompleks yapıdır, eğer (30) sağlanırsa J bir bi-invaryant kompleks yapıdır.

İspat. *Öncelikle*

$$(\nabla_{JX}J)Y = \varepsilon J(J\nabla_XY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

eşitliği (29) şartı sağlandığı zaman $\varepsilon = -1$ ile birlikte sağlanır ve diğer şart sağlandığı zaman $\varepsilon = 1$ ile birlikte sağlanır.

$B(X, Y) = (\nabla_{JX}J)Y - \varepsilon J(\nabla_XJ)Y$, G üzerinde bir $(2, 1)$ -tensör alanı olduğundan her $X, Y \in \mathfrak{g}$ için B sıfır olur. Önerme 2.6.2 den (G, g, J) bir anti-Kaehler manifolddur. Şimdi önermenin son kısmıyla devam edelim. Eğer (29) şartı sağlanırsa $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned} [JX, JY] &= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX \\ &= -J\nabla_XJY + J\nabla_YJX \\ &= \nabla_XY - \nabla_YX \\ &= [X, Y] \end{aligned}$$

elde edilir, dolayısıyla J Abel kompleks yapıdır.

Eğer (30) şartı sağlanırsa $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned}
 [JX, Y] &= \nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX \\
 &= J\nabla_X Y - \nabla_Y JX \\
 &= J\nabla_X Y - J\nabla_Y X \\
 &= J[X, Y]
 \end{aligned}$$

elde edilir, dolayısıyla J bi-invariant kompleks yapıdır.

Önerme 4.1.2. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g, J) bir G Lie grubu üzerinde J bir Abel kompleks yapı olacak şekilde bir sol-invariant anti-Kaehler yapı olsun. O zaman (G, g, J) , (29) şartını sağlar yani

$$\nabla_{JX}Y = -J\nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

dır.

İspat. $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde g metriği ile indirgenen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reel iç çarpımı göz önüne alınsın. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\alpha(X, Y, Z) = \langle \nabla_{JX}Y + J\nabla_X Y, Z \rangle$$

tanımlansın. (20) eşitliğinden, J yapısının Abel olmasından ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ için simetrik olmasından α nın son iki değişkenine göre ters-simetrik olduğu elde edilir. Böylece

$$\alpha(X, Y, Z) = -\alpha(X, Z, Y) \quad (31)$$

dır. J bir Abel kompleks yapı olduğundan

$$\begin{aligned} [JX, Y] &= -[X, JY] \\ \nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX &= -\nabla_X JY + \nabla_{JY}X \\ \nabla_{JX}Y - J\nabla_Y X &= -J\nabla_X Y + \nabla_{JY}X \\ \nabla_{JX}Y + J\nabla_X Y &= J\nabla_Y X + \nabla_{JY}X \end{aligned}$$

dır ve dolayısıyla α ilk iki değişkenine göre simetriktir, yani

$$\alpha(X, Y, Z) = \alpha(Y, X, Z) \quad (32)$$

olur. (31) ve (32) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y, Z) &= -\alpha(X, Z, Y) \\ &= -\alpha(Z, X, Y) \\ &= \alpha(Z, Y, X) \end{aligned} \quad (33)$$

dır. Böylece α , ilk ve son değişkenlerine göre simetriktir. Son olarak (31), (32) ve (33) eşitliklerinden

$$\alpha(X, Y, Z) = \alpha(Y, X, Z) = \alpha(Z, X, Y) = \alpha(X, Z, Y) \quad (34)$$

bulunur. Böylece α son iki değişkenine göre simetriktir. Dolayısıyla (31) ve (34) eşitliklerinden $\alpha = 0$ elde edilir.

Önerme 4.1.3. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g, J) bir G Lie grubu üzerinde J bir bi-invaryant kompleks yapı olacak şekilde bir sol-invaryant anti-Kaehler yapı olsun. O zaman (G, g, J) , (30) şartını sağlar yani

$$\nabla_{JX}Y = J\nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için $[JX, Y] = J[X, Y]$ olduğundan $\nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX = J(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$ dir. $\nabla J = 0$ olduğundan $\nabla_Y JX = J\nabla_Y X$ dır ve böylece $\nabla_{JX}Y = J\nabla_X Y$ elde edilir.

Önerme 4.1.4. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g, J) bir G Lie grubu üzerinde J bi-invariant kompleks yapı olacak şekilde bir sol-invariant hemen hemen anti-Hermityen yapı olsun. O zaman (G, g, J) bir anti-Kaehler manifolddur.

İspat. $(\nabla J)(\cdot, \cdot)$, G üzerinde bir tensör alanı olduğundan $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için $\nabla_X JY = J\nabla_X Y$ olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi bir $Z \in \mathfrak{g}$ için (21) eşitliğinden

$$2g(\nabla_X JY, Z) = g([X, JY], Z) - g([JY, Z], X) + g([Z, X], JY)$$

dır. (12) ve (28) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X JY, Z) &= g(J[X, Y], Z) - g([Y, JZ], X) + g(J[Z, X], Y) \\ &= g([X, Y], JZ) - g([Y, JZ], X) + g([JZ, X], Y) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X JY, Z) &= 2g(\nabla_X Y, JZ) \\ &= 2g(J\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat biter.

Önerme 4.1.5. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G , J bi-invariant yapısı içeren bir yarı basit Lie grup olsun. Eğer g , $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin Killing formu tarafından indirgenen G grubu üzerinde bir bi-invariant metrik ise o zaman (G, g, J) sıfırdan farklı bir sabit ile birlikte bir anti-Kaehler Einstein manifolddur.

İspat. g bi-invariant metrik ise Önerme 3.4.2 den

$S(X, Y) = -\frac{1}{4} \sum_i \langle [X, E_i], [Y, E_i] \rangle$ dir. Killing form tanımından

$$\begin{aligned}
 B(X, Y) &= iz(\mathbf{ad}X \circ \mathbf{ad}Y) \\
 &= \sum g([X, [Y, E_i]], E_i) \\
 &= -\sum g([Y, E_i]X, E_i) \\
 &= -\sum g([Y, E_i], [X, E_i]) \\
 &= 4S(X, Y)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden $g, \mathfrak{g}$ cebirinin B Killing formu tarafından indirgenen G üzerinde bir bi-invariant metrik ise

$$S(X, Y) = cg(X, Y) \quad c \neq 0$$

olduğundan G bir Einstein manifold olur. J bir bi-invariant kompleks yapı ise G anti-Kaehler manifold olduğundan (G, g, J) anti-Kaehler Einstein manifolddur.

Önerme 4.1.6. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G, g bi-invariant metrik ve sıfırdan farklı sabit ile birlikte (g, J) sol-invariant anti-Kaehler Einstein yapısı içeren bir Lie grup olsun. O zaman G bir yarı basit Lie gruptur ve J, G üzerinde bir bi-invariant kompleks yapıdır.

İspat. g, bi -invariant metrik ise

$$S(X, Y) = \frac{1}{4}B(X, Y)$$

olduğundan

$$B(X, Y) = \sum g([X, E_i], [Y, E_i])$$

elde edilir. g metriği nondejenere olduğundan B Killing formu da nondejenere olur. Tanım 3.2.14 den $\mathfrak{g}$ Lie cebri yarı basittir. (G, g, J) anti-Kaehler

olduğundan $\nabla J = 0$ dır ve Riemann eğrilik tensörünün ikilileri simetrik olduğundan $R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z$ bulunur. g yarı basit ise $Z(\mathfrak{g}) = 0$ olduğu bilinmektedir. O halde $[JX, JY] = -[X, Y]$ bulunur. J sol-invaryant kompleks yapı olduğundan $N(X, Y) = 0$ dır. Buradan $\forall X \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[JX, Y] \\ &= -2[X, Y] - 2J[JX, Y] \end{aligned}$$

ve $N(X, Y) = 0$ olduğundan $J[X, Y] = [JX, Y]$ elde edilir. O halde J bi-invaryant kompleks yapıdır.

Önerme 4.1.7. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G üzerinde bir J Abel kompleks yapısıyla birlikte bir (g, J) sol-invaryant anti-Kaehler yapısını içeren bir Lie grup olsun. O zaman (G, g) manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu J kompleks yapısı ve $\mathfrak{g}$ Lie cebri ile birlikte $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X, Y] - J[X, JY])$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. $(\nabla J) = 0$ ve ∇ torsiyonsuz olduğundan $\forall X, Y \in \chi(G)$ için

$$[JX, Y] = \nabla_{JX} Y - J\nabla_Y X$$

$$J[X, Y] = J\nabla_X Y - J\nabla_Y X$$

dır. Bu ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa

$$[JX, Y] - J[X, Y] = \nabla_{JX} Y - J\nabla_X Y$$

elde edilir. Önerme 4.1.2 ve (27) eşitliğinden

$$\begin{aligned} J[JX, Y] + [X, Y] &= J\nabla_{JX}Y + \nabla_XY \\ -J[X, JY] + [X, Y] &= -J^2\nabla_XY + \nabla_XY \\ -J[X, JY] + [X, Y] &= 2\nabla_XY \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\nabla_XY = \frac{1}{2}([X, Y] - J[X, JY])$$

bulunur.

Sonuç 4.1.1. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G, J Abel kompleks yapısı ile birlikte (g, J) sol-invariant anti-Kaehler yapısı içeren bir Lie grup olsun. Eğer g, G üzerinde bir bi-invariant metrik ise o zaman G grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebri değişmelidir.

İspat. g, G Lie grubu üzerinde bir bi-invariant metrik ise $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\nabla_XY = \frac{1}{2}[X, Y]$$

idi. Bir önceki önermeden J bir Abel kompleks yapı ise

$$\nabla_XY = \frac{1}{2}([X, Y] - J[X, JY])$$

dır. Bu iki eşitlikten

$$J[X, JY] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

elde edilir. Bu da ancak Lie operatörünün sıfır olmasıyla yani Lie cebirin değişmeli olmasıyla mümkündür.

Önerme 4.1.8. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) Eğer G, J Abel kompleks yapısıyla birlikte g, J sol invariant anti-Kaehler yapısı içeren $2n$ -boyutlu bir Lie grup ise o zaman G grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebiri unimodular Lie

cebiridir yani $\forall X \in \mathfrak{g}$ için

$$iz(\mathbf{ad}_X) = 0$$

dır.

İspat. (20) eşitliğinden $\forall Y \in \mathfrak{g}$ için $g(Y, Y)$ sabit fonksiyon olduğundan $X(g(Y, Y)) = 0$ dır. Yani

$$g(\nabla_X Y, Y) + g(Y, \nabla_X Y) = 0$$

dır. Buradan

$$2g(\nabla_X Y, Y) = 0$$

elde edilir. Son eşitliği bir önceki önermede yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &= 2g\left(\frac{1}{2}([X, Y] - J[X, JY]), Y\right) \\ 0 &= g([X, Y], Y) - g([X, JY], JY) \end{aligned} \quad (35)$$

elde edilir. $\mathfrak{g}$ üzerinde g sol-invariant metriği tarafından indirgenen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımını göz önüne alalım. $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n}\}$, $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nin ortonormal bazı olsun. $\forall X \in \mathfrak{g}$ için

$$iz(\mathbf{ad}_X) = \sum_{i=1}^{2n} \langle Y_i, Y_i \rangle \langle [X, Y_i], Y_i \rangle \quad (36)$$

ve diğer taraftan $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nin $\{JY_1, JY_2, \dots, JY_{2n}\}$ ortonormal bazını kullanarak

$$\begin{aligned} iz(\mathbf{ad}_X) &= \sum_{i=1}^{2n} \langle JY_i, JY_i \rangle \langle [X, JY_i], JY_i \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^{2n} \langle Y_i, Y_i \rangle \langle [X, JY_i], JY_i \rangle \end{aligned} \quad (37)$$

elde edilir. 36 ve 37 eşitlikleri toplanırsa $\forall X \in \mathfrak{g}$ için

$$2iz(\mathbf{ad}_X) = \sum_{i=1}^{2n} \langle Y_i, Y_i \rangle (\langle [X, Y_i], Y_i \rangle - \langle [X, JY_i], JY_i \rangle)$$

ve 35 eşitliğinden $iz(\mathbf{ad}_X) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla ispat biter.

Sonuç 4.1.2. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) Eğer G , J Abel kompleks yapısıyla birlikte bir (g, J) sol-invaryant anti-Kaehler yapısı içeren bir Lie grup ise o zaman

$$B(JX, JY) = -B(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

dır, burada B , $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin Killing formudur.

İspat. $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ için

$$\mathbf{ad}_{J[X,Y]} = -\mathbf{ad}_{[X,Y]}J = \mathbf{ad}_Y\mathbf{ad}_XJ - \mathbf{ad}_X\mathbf{ad}_YJ \quad (38)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} B(JX, Y) &= B(Y, JX) \\ &= iz(\mathbf{ad}_Y\mathbf{ad}_{JX}) \\ &= -iz(\mathbf{ad}_Y\mathbf{ad}_XJ) \end{aligned}$$

dır. Bir önceki önermeden ve 38 eşitliğinden

$$\begin{aligned} B(JX, Y) &= -iz(\mathbf{ad}_X\mathbf{ad}_YJ) \\ &= iz(\mathbf{ad}_X\mathbf{ad}_{JY}) \\ &= B(X, JY) \end{aligned}$$

dır. O halde $B(JX, JY) = -B(X, Y)$ elde edilir.

Önerme 4.1.9. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) Eğer G , J Abel kompleks yapısıyla birlikte (g, J) sol-invaryant anti-Kaehler yapısı içeren bir Lie grup ise o zaman $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_Y \nabla_X Z$$

dır.

İspat. $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ olsun. Önerme 4.1.7 den

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y Z &= \frac{1}{2} \nabla_X ([Y, Z] - J[Y, JZ]) \\
&= \frac{1}{4} ([X, [Y, Z] - J[Y, JZ]] - J[X, J([Y, Z] - J[Y, JZ])]) \\
&= \frac{1}{4} ([X, [Y, Z]] - [X, J[Y, JZ]] - J[X, J[Y, Z]] - J[X, [Y, JZ]])
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (27) denkleminde ve Jacobi özdeşliğinden

$$\begin{aligned}
&4(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) \\
&= [X, [Y, Z]] - [X, J[Y, JZ]] - J[X, J[Y, Z]] - J[X, [Y, JZ]] \\
&\quad [Y, [X, Z]] + [Y, J[X, JZ]] + J[Y, J[X, Z]] + J[Y, [X, JZ]]
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
&4(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) \\
&= [X, [Y, Z]] - [JX, [JY, Z]] + J[JX, [JY, JZ]] - J[X, [Y, JZ]] \\
&\quad - [Y, [X, Z]] + [JY, [JX, Z]] - J[JY, [JX, JZ]] + J[Y, [X, JZ]]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&4(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) \\
&= [[X, Y], Z] + [[JY, JX], Z] + J[[JX, JY], JZ] + J[[Y, X], JZ] \\
&= [[X, Y], Z] + [[Y, X], Z] + J[[X, Y], JZ] + J[[Y, X], JZ] \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.1.1. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) J bir Abel kompleks yapı olacak şekilde (g, J) bir G Lie grubu üzerinde bir sol-invariant anti-Kaehler yapı olsun. O zaman (G, g) bir flat yarı-Riemann Lie gruptur.

İspat. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için $R(X, Y)Z = 0$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$ ve bir önceki önermeden $\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_Y \nabla_X Z$ olduğundan $R(X, Y)Z = -\nabla_{[X, Y]}Z$ olur ve dolayısıyla

$$R(JX, JY)Z = -\nabla_{[JX, JY]}Z = -\nabla_{J[X, Y]}Z = R(X, Y)Z \quad (39)$$

elde edilir. Diğer taraftan (G, g) grubunun Riemann eğrilik tensörünün ikililerinin simetrikliğinden ve $(\nabla J) = 0$ olmasından $\forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned} g(R(JX, JY)Z, W) &= g(R(Z, W)JX, JY) \\ &= g(JR(Z, W)X, JY) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} g(R(JX, JY)Z, W) &= -g(R(Z, W)X, Y) \\ &= -g(R(X, Y)Z, W) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$R(JX, JY)Z = -R(X, Y)Z \quad (40)$$

elde edilir. 39 ve 40 eşitliklerinden $R(X, Y)Z = 0$ elde edilir.

Sonuç 4.1.3. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) J bir Abel kompleks yapı olacak şekilde (g, J) bir G Lie grubu üzerinde bir sol-invaryant anti-Kaehler yapı ve $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$[J[X, Y], Z] = J[[X, Y], Z]$$

dır.

İspat. J Abel kompleks yapı ise Önerme 4.1.7 den ve bir önceki önermeden $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\nabla_{[X, Y]}Z = \frac{1}{2}([[[X, Y], Z] - J[[X, Y], JZ]]) = 0$$

dır. Buradan J yapısı Abel kompleks yapı olduğundan

$$[[X, Y], Z] = J[[X, Y], JZ]$$

$$J[[X, Y], Z] = J^2[[X, Y], JZ]$$

olur. Böylece

$$J[[X, Y], Z] = -[[X, Y], JZ]$$

$$J[[X, Y], Z] = [J[X, Y], Z]$$

elde edilir.

Örnek 4.1.1. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) Bir nilpotent N Lie grubu

$$\mathfrak{n}_7 := \begin{cases} [X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5, [X_1, X_4] = X_6, \\ [X_2, X_3] = X_6, [X_2, X_4] = -X_5 \end{cases}$$

Lie cebiri ile göz önüne alınsın. N Lie grubunun Abel kompleks yapısı $\mathfrak{n}_7$

üzerinde $J := J_{-1}$ lineer kompleks yapısıyla birlikte

$$JX_1 = X_2, \quad JX_3 = X_4, \quad JX_5 = -X_6$$

olacak şekilde tanımlansın. N üzerinde

$$\{X_1 + X_5, X_1 - X_5, X_2 + X_6, X_2 - X_6, X_3, X_4\}$$

bir ortonormal çatı olacak şekilde g metriğini göz önüne alınsın, burada

$\{X_1 + X_5, X_2 + X_6, X_3\}$ uzay benzeri vektör alanları ve $\{X_1 - X_5, X_2 - X_6, X_4\}$

zaman benzeri vektör alanlarıdır. $\{X_1, \dots, X_6\}$ çatısında $g(X_i, X_j)$ formundaki

tüm sıfırdan farklı fonksiyonlar

$$g(X_1, X_5) = \frac{1}{2}, \quad g(X_2, X_6) = \frac{1}{2}, \quad g(X_3, X_3) = 1, \quad g(X_4, X_4) = -1$$

dır. Buradan

$$\nabla_{X_1} X_1 = -\frac{1}{2}X_3, \quad \nabla_{X_1} X_2 = -\frac{1}{2}X_4, \quad \nabla_{X_1} X_3 = -X_5, \quad \nabla_{X_1} X_4 = -X_6,$$

$$\nabla_{X_2}X_1 = -\frac{1}{2}X_4, \quad \nabla_{X_2}X_2 = -\frac{1}{2}X_3, \quad \nabla_{X_2}X_3 = X_6, \quad \nabla_{X_2}X_4 = -X_5,$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_1}J)X_2 &= \nabla_{X_1}JX_2 - J\nabla_{X_1}X_2 \\ &= -\nabla_{X_1}X_1 - J(-\frac{1}{2}X_4) \\ &= \frac{1}{2}X_3 + \frac{1}{2}JX_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde işlem yapılır. Böylece $(\nabla J) = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (N, g, J) bir anti-Kaehler manifolddur.

G , bir (g, J) sol-invariant anti-Kaehler yapısına sahip bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri olsun. $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerindeki bilineer dönüşümlerin bir ailesini tanımlayalım:

$\{a_1, \dots, a_4\}$ reel sabitler olsun ve $D : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$,

$$D(X, Y) = a_1\nabla_X Y + a_2\nabla_{JX} Y + a_3J\nabla_X Y + a_4J\nabla_{JX} Y \quad (41)$$

olacak şekilde $\mathfrak{g}$ üzerinde bir lineer dönüşüm olsun. $\mathfrak{g}$ üzerinde metrik tarafından indirgenen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımını göz önüne alalım ve δ , $\mathfrak{g}$ üzerinde her $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\delta(X, Y, Z) = \langle D(X, Y), Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \quad (42)$$

olacak şekilde tanımlanan kovaryant 3-tensör olsun. (Fernández-Culma and Godoy , 2018)

Önerme 4.1.10. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G , bir (g, J) sol-invariant anti-Kaehler yapısına sahip bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için (42) eşitliğinde tanımlanan δ kovaryant 3-tensörü son iki değişkenine göre ters-simetriktir.

İspat. (20) eşitliği ve Önerme 2.6.2 den

$$\begin{aligned}
\langle D(X, Y), Z \rangle &= -a_1 \langle Y, \nabla_X Z \rangle - a_2 \langle Y, \nabla_{JX} Z \rangle + a_3 \langle \varepsilon \nabla_{JX} Y, Z \rangle \\
&\quad + a_4 \langle \varepsilon \nabla_{J^2 X} Y, Z \rangle \\
&= -a_1 \langle Y, \nabla_X Z \rangle - a_2 \langle Y, \nabla_{JX} Z \rangle - a_3 \langle Y, \varepsilon \nabla_{JX} Z \rangle \\
&\quad - a_4 \langle Y, \varepsilon \nabla_{J^2 X} Z \rangle \\
&= -a_1 \langle Y, \nabla_X Z \rangle - a_2 \langle Y, \nabla_{JX} Z \rangle - a_3 \langle Y, J \nabla_X Z \rangle \\
&\quad - a_4 \langle Y, J \nabla_{JX} Z \rangle
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\langle D(X, Y), Z \rangle = -\langle D(X, Z), Y \rangle$$

elde edilir.

Şimdi, (41) eşitliğinde $a_2 = a_3 = 1$ ve $a_1 = a_4 = 0$ alalım. Bu durumda

$$D^*(X, Y) = \nabla_{JX} Y + J \nabla_X Y \quad (43)$$

tensör alanını tanımlayalım.

Önerme 4.1.11. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G , bir (g, J) sol-invariant anti-Kaehler yapısına sahip bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri ve D^* , (43) ile tanımlanan tensör alanı olsun. O zaman $D^*(JX, Y) = D^*(X, JY)$, $D^*(JX, Y) = JD^*(X, Y)$ ve $\delta, \mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde bir pür tensördür.

İspat. Anti-Kaehler yapıdan

$$D^*(JX, Y) = \nabla_{JX} JY + J \nabla_{JX} Y = J \nabla_{JX} Y + J \nabla_{JX} Y$$

$$D^*(X, JY) = \nabla_{JX} JY + J \nabla_X JY = J \nabla_{JX} Y + J \nabla_X JY$$

dır. Dolayısıyla $D^*(JX, Y) = D^*(X, JY)$ elde edilir.

(43) den $D^*(JX, Y) = -\nabla_X Y + J \nabla_{JX} Y$ ve $JD^*(X, Y) = J \nabla_{JX} Y - \nabla_X Y$

olduğundan $D^*(JX, Y) = JD^*(X, Y)$ olduğu açıktır.

Bu iki eşitlikten ve J , g metriğine göre simetrik olduğundan

$$\delta(JX, Y, Z) = \langle D^*(JX, Y), Z \rangle = \langle D^*(X, JY), Z \rangle = \delta(X, JY, Z),$$

$$\delta(JX, Y, Z) = \langle D^*(JX, Y), Z \rangle = \langle JD^*(X, Y), Z \rangle = \langle D^*(X, Y), JZ \rangle = \delta(X, Y, JZ) \text{ bulunur. Böylece}$$

$$\delta(JX, Y, Z) = \delta(X, JY, Z) = \delta(X, Y, JZ)$$

elde edilir. O halde δ pür tensördür, dolayısıyla θ , $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde bir pür ters-simetrik 3-tensördür.

Şimdi D^* yardımıyla

$$\theta(X, Y, Z) = \langle D^*(X, Y), Z \rangle + \langle D^*(Y, Z), X \rangle + \langle D^*(Z, X), Y \rangle \quad (44)$$

olacak şekilde θ 3-tensör alanı tanımlansın. Bu tensör alanı aşağıdaki özelliklere sahiptir. (Fernández-Culma and Godoy , 2018)

Sonuç 4.1.4. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G , bir (g, J) sol-invaryant anti-Kaehler yapısına sahip bir Lie grup, $\mathfrak{g}$, G grubunun Lie cebiri ve D^* , (43) ile tanımlanan tensör alanı olsun. O zaman Önerme 4.1.10 ve Önerme 4.1.11 den θ , $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde bir pür ters-simetrik tensördür.

Önerme 4.1.12. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G , bir (g, J) sol-invaryant anti-Kaehler yapısına sahip bir Lie grup $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. (44) ile tanımlanan θ tensör alanı $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\theta(X, Y, Z) = \langle [JX, Y], Z \rangle + \langle [JY, Z], X \rangle + \langle [JZ, X], Y \rangle \quad (45)$$

dır.

İspat. (44) denkleminde $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\theta(X, Y, Z) = \langle D^*(X, Y), Z \rangle + \langle D^*(Y, Z), X \rangle + \langle D^*(Z, X), Y \rangle$$

olur, (43) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\theta(X, Y, Z) &= \langle \nabla_{JX}Y + J\nabla_XY, Z \rangle + \langle \nabla_{JY}Z + J\nabla_YZ, X \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{JZ}X + J\nabla_ZX, Y \rangle \\
&= \langle \nabla_{JX}Y, Z \rangle + \langle J\nabla_XY, Z \rangle + \langle \nabla_{JY}Z, X \rangle \\
&\quad + \langle J\nabla_YZ, X \rangle + \langle \nabla_{JZ}X, Y \rangle + \langle J\nabla_ZX, Y \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. (20) denklemi göz önüne alınır ve J yapısının g metriğine göre simetrik olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\theta(X, Y, Z) &= \langle \nabla_{JX}Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_XJZ \rangle + \langle \nabla_{JY}Z, X \rangle \\
&\quad - \langle Z, \nabla_YJX \rangle + \langle \nabla_{JZ}X, Y \rangle - \langle X, \nabla_ZJY \rangle
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\theta(X, Y, Z) = \langle [JX, Y], Z \rangle + \langle [JY, Z], X \rangle + \langle [JZ, X], Y \rangle$$

elde edilir.

Önerme 4.1.13. (Fernández-Culma and Godoy, 2018) $G, (g, J)$ sol-invariant anti-Kaehler yapısına sahip bir Lie grup olsun. Eğer G grubunun boyutu 4 ya da J kompleks yapısı Abel ise o zaman (44) ile tanımlanan θ tensör alanı sıfırdır.

İspat. J bir Abel kompleks yapı olsun. (44) den $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\theta(X, Y, Z) = \langle D^*(X, Y), Z \rangle + \langle D^*(Y, Z), X \rangle + \langle D^*(Z, X), Y \rangle$$

dır. (43) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\theta(X, Y, Z) &= \langle \nabla_{JX}Y + J\nabla_XY, Z \rangle + \langle \nabla_{JY}Z + J\nabla_YZ, X \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{JZ}X + J\nabla_ZX, Y \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Önerme 4.1.2 den

$$\begin{aligned}
\theta(X, Y, Z) &= \langle -J\nabla_X Y + J\nabla_X Y, Z \rangle + \langle -J\nabla_Y Z + J\nabla_Y Z, X \rangle \\
&\quad + \langle -J\nabla_Z X + J\nabla_Z X, Y \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer G grubunun boyutu 4 ise baz olarak $\{X, JX, Y, JY\}$ seçildiğinde $\theta = 0$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.2. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g, J) bir G Lie grubu üzerinde bir sol-invariant hemen hemen anti-Hermityen yapı, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve θ , (44) ile verilen birleşmeli 3-tensör olsun. O zaman (G, g, J) manifoldunun bir anti-Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart θ tensörünün $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde ters-simetrik ve pür olmasıdır, yani $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\theta(X, Y, Z) = -\theta(X, Z, Y) \quad (46)$$

ve

$$\theta(JX, Y, Z) = \theta(X, JY, Z) \quad (47)$$

dır.

İspat. Sonuç 4.1.4 den ilk kısım açıktır. Diğer taraftan (46) ve (47) eşitliklerinin gerçekleştiğini kabul edelim, o halde $(\nabla J) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için $\alpha(X, Y, Z) = \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle$ eşitliği göz önüne alınsın. α tensörünün $\mathfrak{g}$ üzerinde sıfır olduğu gösterilmelidir. Önerme 2.6.1 den α son iki değişkenine göre simetriktir, yani, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için $\alpha(X, Y, Z) = \alpha(X, Z, Y)$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\alpha(X, Y, JZ) &= \langle (\nabla_X J)Y, JZ \rangle \\
&= \langle \nabla_X JY - J\nabla_X Y, JZ \rangle
\end{aligned}$$

ve J yapısı g metriğine göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
 \alpha(X, Y, JZ) &= \langle J\nabla_X JY + \nabla_X Y, Z \rangle \\
 &= -\langle (\nabla_X J)JY, Z \rangle \\
 &= -\alpha(X, JY, Z)
 \end{aligned}$$

dır. Buradan $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\alpha(X, Y, JZ) = -\alpha(X, JY, Z) \quad (48)$$

elde edilir. Aynı zamanda (44) eşitliğinden $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned}
 \theta(X, Z, Y) &= \langle D^*(X, Z), Y \rangle + \langle D^*(Z, Y), X \rangle \\
 &\quad + \langle D^*(Y, X), Z \rangle \\
 &= \langle \nabla_{JX} Z + J\nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_{JZ} Y + J\nabla_Z Y, X \rangle \\
 &\quad + \langle \nabla_{JY} X + J\nabla_Y X, Z \rangle \\
 &= \langle \nabla_{JX} Z, Y \rangle + \langle J\nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_{JZ} Y, X \rangle + \langle J\nabla_Z Y, X \rangle \\
 &\quad + \langle \nabla_{JY} X, Z \rangle + \langle J\nabla_Y X, Z \rangle,
 \end{aligned}$$

olur. (20) denklemi göz önüne alınır ve J yapısının g metriğine göre simetrik olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 \theta(X, Z, Y) &= -\langle Z, \nabla_{JX} Y \rangle + \langle \nabla_X Z, JY \rangle - \langle Y, \nabla_{JZ} X \rangle + \langle \nabla_Z Y, JX \rangle \\
 &\quad - \langle X, \nabla_{JY} Z \rangle + \langle \nabla_Y X, JZ \rangle \\
 &= -\langle Z, \nabla_{JX} Y \rangle - \langle Z, \nabla_X JY \rangle - \langle Y, \nabla_{JZ} X \rangle - \langle Y, \nabla_Z JX \rangle \\
 &\quad - \langle X, \nabla_{JY} Z \rangle - \langle X, \nabla_Y JZ \rangle \\
 &= \langle Z, -\nabla_{JX} Y - \nabla_X JY \rangle + \langle Y, -\nabla_{JZ} X - \nabla_Z JX \rangle \\
 &\quad + \langle X, -\nabla_{JY} Z - \nabla_Y JZ \rangle
 \end{aligned}$$

elde edilir. (46) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
0 &= \theta(X, Y, Z) + \theta(X, Z, Y) \\
&= \langle D^*(X, Y), Z \rangle + \langle D^*(Y, Z), X \rangle + \langle D^*(Z, X), Y \rangle + \theta(X, Z, Y) \\
&= \langle \nabla_{JX}Y + J\nabla_XY, Z \rangle + \langle \nabla_{JY}Z + J\nabla_YZ, X \rangle \\
&\quad + \langle \nabla_{JZ}X + J\nabla_ZX, Y \rangle + \langle Z, -\nabla_{JX}Y - \nabla_XJY \rangle \\
&\quad + \langle Y, -\nabla_{JZ}X - \nabla_ZJX \rangle + \langle X, -\nabla_{JY}Z - \nabla_YJZ \rangle
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= -\langle \nabla_XJY - J\nabla_XY, Z \rangle - \langle \nabla_YJZ - J\nabla_YZ, X \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_ZJX - J\nabla_ZX, Y \rangle \\
&= -\langle (\nabla_XJ)Y, Z \rangle - \langle (\nabla_YJ)Z, X \rangle - \langle (\nabla_ZJ)X, Y \rangle \\
&= -\alpha(X, Y, Z) - \alpha(Y, Z, X) - \alpha(Z, X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$\alpha(X, Y, Z) + \alpha(Y, Z, X) + \alpha(Z, X, Y) = 0 \quad (49)$$

dır. Benzer şekilde (47) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
0 &= \theta(X, JY, Z) - \theta(JX, Y, Z) \\
&= \langle \nabla_{JX}JY + J\nabla_XJY, Z \rangle + \langle -\nabla_YZ + J\nabla_{JY}Z, X \rangle \\
&\quad + \langle J\nabla_{JZ}X - \nabla_ZX, Y \rangle + \langle -J\nabla_{JX}Y + \nabla_XY, Z \rangle \\
&\quad + \langle -J\nabla_{JY}Z + \nabla_YZ, X \rangle - \langle \nabla_{JZ}JX + J\nabla_ZJX, Y \rangle \\
&= \langle \nabla_{JX}JY - J\nabla_{JX}Y, Z \rangle + \langle \nabla_XY + J\nabla_XJY, Z \rangle \\
&\quad + \langle J\nabla_{JZ}X - \nabla_{JZ}JX, Y \rangle - \langle \nabla_ZX + J\nabla_ZJX, Y \rangle \\
&= \alpha(JX, Y, Z) - \alpha(X, JY, Z) - \alpha(JZ, X, Y) + \alpha(Z, JX, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ya da son eşitliğin her iki tarafına $\alpha(Y, Z, JX)$ eklenilerek ve (49) eşitliği kullanılarak

$$\alpha(Y, Z, JX) = -\alpha(X, JY, Z) - \alpha(JZ, X, Y)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik ve (48) eşitliğinden

$$-\alpha(Y, JZ, X) = \alpha(X, Y, JZ) - \alpha(JZ, X, Y)$$

ve (49) eşitliğinden $\alpha(X, Y, JZ) = -\alpha(Y, JZ, X) - \alpha(JZ, X, Y)$ olduğundan

$$-\alpha(Y, JZ, X) = -\alpha(Y, JZ, X) - \alpha(JZ, X, Y) - \alpha(JZ, X, Y)$$

bulunur. Böylece $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için $\alpha(JZ, X, Y) = 0$ elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 4.1.5. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g, J) bir G Lie grubu üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen anti-Hermityen yapı, $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri ve θ , (44) ile verilen birleşmeli 3-tensör olsun. Eğer θ tensörü sıfır ise o zaman (G, g, J) bir anti-Kaehler manifolddur.

İspat. $\theta = 0$ olsun. O zaman (46) ve (47) eşitlikleri gerçekleşir ve böylece Teorem 4.1.2 den (G, g, J) bir anti-Kaehler manifolddur.

Sonuç 4.1.6. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g, J) , bir 4-boyutlu G Lie grubu üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen anti-Hermityen yapı ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. O zaman (G, g, J) manifoldunun bir anti-Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart θ bileşmeli 3-tensörünün $\mathfrak{g}$ üzerinde sıfır olmasıdır.

4.2 Anti-Kaehler Yapıya Sahip 4 Boyutlu Lie Gruplar

Teorem 4.2.1. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G , 4-boyutlu bir Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. O zaman G Lie grubunun bir

sol-invaryant anti-Kaehler yapıya sahip olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin Abel olmasıdır ya da

$$\mathfrak{r}_{-1,-1} = \{[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = -e_3, [e_1, e_4] = -e_4,$$

ya da

$$\mathfrak{aff}(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} = \{[e_1, e_3] = e_3, [e_1, e_4] = e_4, [e_2, e_3] = e_4, [e_2, e_4] = -e_3$$

ile izomorfik olmasıdır.

İspat. G bir (g, J) sol-invaryant anti-Kaehler yapı içeren 4-boyutlu reel Lie grup olsun. Daha önce olduğu gibi G üzerindeki sol-invaryant g metriği ile indirgenen $\mathfrak{g}$ üzerindeki iç çarpım $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ile gösterilsin. G grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin $\mathcal{B} = \{X, JX, Y, JY\}$ olacak şekilde ortonormal bazı vardır, burada X ve Y uzay benzeri vektör alanlarıdır, ve böylece

$$[\mathfrak{g}]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$$

ve

$$[J]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(j, j)$$

dır, burada $j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlıdır.

Sonuç 4.1.6 den $\mathfrak{g}$ üzerinde sıfır olan θ 3-formu vardır. Özel olarak $\forall U, V \in \mathfrak{g}$

için $\theta(U, V, JV) = 0$ dır. (45) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \theta(U, V, JV) &= \langle [JU, V], JV \rangle + \langle [JV, JV], U \rangle + \langle [J^2V, U], V \rangle \\ &= \langle [JU, V], JV \rangle - \langle [V, U], V \rangle \end{aligned}$$

olduğundan $\forall U, V \in \mathfrak{g}$ için $\langle [V, U], V \rangle = -\langle [V, JU], JV \rangle$ elde edilir.

Böylece $\mathcal{B}$ bazının elemanları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
\langle [X, Y], X \rangle &= -\langle [X, JY], JX \rangle, \langle [X, Y], JX \rangle = \langle [X, JY], X \rangle, \\
\langle [X, Y], Y \rangle &= -\langle [JX, Y], JY \rangle, \langle [X, Y], JY \rangle = \langle [JX, Y], Y \rangle, \\
\langle [X, JY], Y \rangle &= -\langle [JX, JY], JY \rangle, \langle [X, JY], JY \rangle = \langle [JX, JY], Y \rangle, \quad (50) \\
\langle [JX, Y], X \rangle &= -\langle [JX, JY], JX \rangle, \langle [JX, Y], JX \rangle = \langle [JX, JY], X \rangle, \\
\langle [X, JX], X \rangle &= 0, \langle [X, JX], JX \rangle = 0, \\
\langle [Y, JY], Y \rangle &= 0, \langle YX, JY \rangle, JY \rangle = 0.
\end{aligned}$$

(50) eşitliklerinden $\mathcal{B}$ bazının elemanlarının Lie braketi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}
[X, JX] &= aY + bJY, \\
[X, Y] &= t_1X + t_2JX + t_3Y + t_4JY, \\
[X, JY] &= -t_2X + t_1JX + t_5Y + t_6JY, \quad (51) \\
[JX, Y] &= t_7X + t_8JX - t_4Y + t_3JY, \\
[JX, JY] &= -t_8X + t_7JX - t_6Y + t_5JY, \\
[Y, JY] &= cX + dJX,
\end{aligned}$$

burada a, b, c, d ve $i = 1, \dots, 8$ için t_i ler reel sayıdır.

Ayrıca tekrar θ 3-formu kullanılırsa $U, V \in \mathfrak{g}$ için $\theta(U, U, V) = 0$ olduğundan

$$\langle [JX, X], Y \rangle + \langle [JX, Y], X \rangle + \langle [JY, X], X \rangle = 0$$

$$-a + t_7 + t_2 = 0$$

$$a = t_7 + t_2$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$a = t_2 + t_7, \quad b = t_8 - t_1, \quad c = -(t_4 + t_5), \quad d = t_3 - t_6 \quad (52)$$

elde edilir. Jacobi özdeşliği ve (51) eşitliklerden

$$[[X, JX], Y] + [[JX, Y], X] + [[Y, X], JX] = 0$$

$$b[JY, Y] - (t_8 + t_1)[X, JX] + t_4[X, Y] + t_3([JX, Y]$$

$$- [X, JY]) - t_4[JY, JX] = 0$$

$$-(t_8 + t_1)[X, JX] - b[JY, Y] + t_3\Delta(X, Y) + t_4\Delta(X, JY) = 0$$

elde edilir. $\mathcal{B}$ bazının elemanlarını içeren tüm Jacobi denklemleri hesaplanılarak

$\forall U, V \in \mathfrak{g}$ için

$$-(t_8 + t_1)[X, JX] - b[Y, JY] + t_3\Delta(X, Y) + t_4\Delta(X, JY) = 0,$$

$$(t_2 - t_7)[X, JX] + a[Y, JY] + t_5\Delta(X, Y) + t_6\Delta(X, JY) = 0,$$

$$-d[X, JX] + (t_3 + t_6)[Y, JY] - t_1\Delta(X, Y) + t_2\Delta(X, JY) = 0, \quad (53)$$

$$-c[X, JX] + (t_4 - t_5)[Y, JY] + t_7\Delta(X, Y) - t_8\Delta(X, JY) = 0,$$

elde edilir, burada her $U, V \in \mathfrak{g}$ için $\Delta(U, V) = [JU, V] - [U, JV]$ dir.

Eğer $\{[X, JX], [X, JX], \Delta(X, Y), \Delta(X, JY)\}$ bir lineer bağımsız küme ise o

zaman tüm sabitler sıfırdır ve dolayısıyla $\mathfrak{g}$ 4-boyutlu Abel Lie cebiridir.

Bundan sonra bu kümenin lineer bağımlı olduğu kabul edilecektir. (51) ve (52)

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\Delta(X, Y) &= [JX, Y] - [X, JY] \\
&= t_7X + t_8JX - t_4Y + t_3JY - (-t_2X + t_1JX + t_5Y + t_6JY) \\
&= (t_7 + t_2)X + (t_8 - t_1)JX - (t_4 + t_5)Y + (t_3 - t_6)JY \\
&= aX + bJX + cY + dJY
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\Delta(X, JY) &= [JX, JY] + [X, Y] \\
&= -t_8X + t_7JX - t_6Y + t_5JY + t_1X + t_2JX + t_3Y + t_4JY \\
&= -(t_8 - t_1)X + (t_7 + t_2)JX + (-t_6 + t_3)Y + (t_5 + t_4)JY \\
&= -bX + aJX + dY - cJY
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\Delta(X, Y) = aX + bJX + cY + dJY \quad (54)$$

$$\Delta(X, JY) = -bX + aJX + dY - cJY$$

elde edilir.

Şimdi

$$\lambda_1[X, JX] + \lambda_2[Y, JY] + \lambda_3\Delta(X, Y) + \lambda_4\Delta(X, JY) = 0$$

eşitliğini sağlayan $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ dördlüsünün kümesini çalışıyoruz. $\mathcal{B}$ bazının elemanlarında (51) ve (55) kullanılırsa, bu küme $Ax = 0$ homojen lineer sistemin çözüm kümesiyle çıkarılır, burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & a & -b \\ 0 & d & b & a \\ a & 0 & c & d \\ b & 0 & d & -c \end{bmatrix}$$

dır. Analiz etmemiz gereken iki durum vardır:

Durum 1. Eğer A matrisinin katsayılarından en az bir tanesi sıfırdan farklı ise, $\varepsilon^2 = 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ ($a, b \neq 0$) olmak üzere Lie cebir

$$\mu_{a,b,\varepsilon} = \begin{cases} [X, JX] = aY + bJY \\ [X, Y] = aJX - \varepsilon bJY \\ [X, JY] = -aX + \varepsilon aJY \\ [JX, Y] = bJX + \varepsilon bY \\ [JX, JY] = -bX - \varepsilon aY \\ [Y, JY] = \varepsilon bX - \varepsilon aJX \end{cases} \quad (55)$$

dır.

Bu iddiayı ispatlamak için ilk önce

$$v_1 = \begin{bmatrix} -t_1 - t_8 \\ t_1 - t_8 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} t_2 - t_7 \\ t_2 + t_7 \\ t_5 \\ t_6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} t_6 - t_3 \\ t_3 + t_6 \\ -t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \text{ ve } v_4 = \begin{bmatrix} t_4 + t_5 \\ t_4 - t_5 \\ t_7 \\ t_8 \end{bmatrix}$$

alınsın. Kabulden A matrisinin katsayılarından en az biri sıfırdan farklı olduğundan A matrisinin rankı 3 tür. (53) eşitliklerinden v_1, v_2, v_3, v_4 , A matrisinin bir boyuta sahip çekirdeğindedir. Böylece bu vektörler paraleldir ve aynı anda sıfır değillerdir. v_1 vektörünün sıfırdan farklı olduğu kabul edilsin (kalan durumlar da a, b, c, d ve t_i katsayılarında aynı koşulları verir). Böylece

$$v_2 = \alpha v_1, \quad v_3 = \beta v_1, \quad v_4 = \varepsilon v_1$$

olacak şekilde α, β ve ε reel sayıları vardır. Özel olarak $v_3 = \beta v_1$ eşitliği kullanılarak

$$t_6 - t_3 = \beta(-t_1 - t_8)$$

$$t_3 + t_6 = \beta(t_1 - t_8)$$

$$-t_1 = \beta t_3$$

elde edilir ve buradan $t_6 - t_3 = \beta(\beta t_3 - t_8)$ ve $t_3 + t_6 = \beta(-\beta t_3 - t_8)$ ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa $t_3(1 + \beta^2) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $t_3 = 0$ dır ve $-t_1 = \beta t_3$, $t_5 = \alpha t_3$ ve $t_7 = \varepsilon t_3$ olduğundan $t_1 = t_5 = t_7 = 0$ elde edilir.

(52) eşitlikleri ve yukarıdaki hesaplamalardan

$$\begin{aligned} a &= t_2, & b &= t_8 \\ c &= -t_4, & d &= -t_6 \end{aligned}$$

elde edilir. $v_4 = \varepsilon v_1$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} t_4 + t_5 &= \varepsilon(-t_1 - t_8) \\ t_4 - t_5 &= \varepsilon(t_1 - t_8) \\ t_7 &= \varepsilon t_3 \\ -t_8 &= \varepsilon t_4 \end{aligned}$$

olduğundan

$$c = \varepsilon b$$

$$b = \varepsilon c$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $(\varepsilon^2 - 1)c = 0$ dır yani $c = 0$ ya da $\varepsilon^2 = 1$ dir.

Fakat eğer $c = 0$ olursa $d = \alpha c$, $a = -\beta c$ ve $b = \varepsilon c$ olduğundan tüm katsayılar sıfır elde edilir ve bu hipotezle çelişir. Dolayısıyla $\varepsilon^2 = 1$ dir ve buradan da $c = \varepsilon b$ ve $d = -\varepsilon a$ elde edilir.

Son olarak bu durumda $\mathfrak{r}_{-1,-1}$ Lie cebirine izomorfik olan $\mu_{a,b,\varepsilon}$ Lie cebirlerinin ailesi elde edilir. Tersî

$$\phi^{-1} = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \begin{bmatrix} -\varepsilon a & \varepsilon b & 0 & \varepsilon(a^2 + b^2) \\ -\varepsilon b & -\varepsilon a & -\varepsilon(a^2 + b^2) & 0 \\ b & a & -(a^2 + b^2) & 0 \\ a & b & 0 & -(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

olarak verilen

$$\phi = \begin{bmatrix} -\varepsilon a & -\varepsilon b & b & -a \\ \varepsilon b & -\varepsilon a & a & b \\ 0 & -\varepsilon & -1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi göz önüne alınsın. O zaman

$$\phi(X) = -\varepsilon aX + \varepsilon bJX + \varepsilon JY$$

$$\phi(JX) = -\varepsilon bX - \varepsilon aJX - \varepsilon Y$$

$$\phi(Y) = bX + aJX - Y$$

$$\phi(JY) = -aX + bJX - JY$$

dır. $[X, Y] \in \mu_{a,b,\varepsilon}$ için

$$\begin{aligned} \phi([X, Y]) &= \phi(aJX - \varepsilon bJY) \\ &= a\phi(JX) - b\phi(JY) \\ &= -\varepsilon(a^2 + b^2)JX - \varepsilon aY + \varepsilon bJY \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathfrak{r}_{-1,-1}$ Lie cebiri ele alındığında ise

$$\begin{aligned} [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{r}_{-1,-1}} &= -\varepsilon ab[X, X] - \varepsilon a^2[X, JX] + \varepsilon a[X, Y] \\ &\quad + \varepsilon b^2[JX, X] + \varepsilon ab[JX, JX] - \varepsilon[JX, Y] \\ &\quad + \varepsilon b[JY, X] + \varepsilon a[JY, JX] - \varepsilon[JY, Y] \\ &= -\varepsilon(a^2 + b^2)JX - \varepsilon aY + \varepsilon bJY \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\phi([X, Y]_{\mu_{a,b,\varepsilon}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{r}_{-1,-1}}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde Lie cebirlerin diğer elemanları için de eşitliğin gerçekleştiği görülür. O halde ϕ , $\mu_{a,b,\varepsilon}$ Lie cebiri ile $\mathfrak{r}_{-1,-1}$ Lie cebiri arasında

$\phi([X, Y]_{\mu_{a,b,\varepsilon}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\tau_{-1,-1}}$ olacak şekilde biyektif lineer dönüşüm olduğundan bir izomorfizmadır.

Durum 2. Diğer taraftan, eğer A matrisinin tüm katsayıları sıfır ise $\mathfrak{g}$, 2-boyutlu kompleks $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ Lie cebirinin esas reel Lie cebiridir. Yani $a = b = c = d = 0$ olması $t_5 = -t_4$, $t_6 = t_3$, $t_7 = -t_2$ ve $t_8 = t_1$ eşitliklerini gerektirir ve dolayısıyla

$$\mu_{t_1, t_2, t_3, t_4} = \begin{cases} [X, JX] = 0 \\ [X, Y] = t_1 X + t_2 JX + t_3 Y + t_4 JY \\ [X, JY] = -t_2 X + t_1 JX - t_4 Y + t_3 JY \\ [JX, Y] = -t_2 X + t_1 JX - t_4 Y + t_3 JY \\ [JX, JY] = -t_1 X - t_2 JX - t_3 Y - t_4 JY \\ [Y, JY] = 0 \end{cases} \quad (56)$$

dır. Her $U, V \in \mathcal{B}$ için $J[U, V] = [JU, V]$ olduğundan J , μ_{t_1, t_2, t_3, t_4} Lie cebiri üzerinde bir bi-invaryant kompleks yapıdır.

Son olarak tersi

$$\phi^{-1} = \frac{1}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2} \phi^t$$

olarak verilen

$$\phi = \begin{bmatrix} t_3 & -t_4 & -t_1 & t_2 \\ t_4 & t_3 & -t_2 & -t_1 \\ -t_1 & -t_2 & -t_3 & -t_4 \\ t_2 & -t_1 & t_4 & -t_3 \end{bmatrix}$$

dönüşümün de Durum1 e benzer şekilde hesaplamalar yapılarak μ_{t_1, t_2, t_3, t_4} ile $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ Lie cebiri arasında bir izomorfizma olduğu elde edilir.

Tanım 4.2.1. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) (g_1, J_1) ve (g_2, J_2) sırasıyla G_1 ve G_2 basit bağlantılı Lie grupları üzerinde sol-invaryant anti-Kaehler yapılar olsun. Eğer (G_1, g_1) ve (G_2, g_2) yarı-Riemann manifoldları

arasında bir izometri olacak şekilde bir $\Psi : G_1 \rightarrow G_2$ izomorfizması varsa ve $(d\Psi) \circ J_1 = J_2 \circ (d\Psi)$ ise o zaman (g_1, J_1) , (g_2, J_2) yapısına denktir denir.

Not edelim ki (g_1, J_1) ve (g_2, J_2) anti-Kaehler yapılarının denk olması için gerek ve yeter şart ψ dönüşümünün $(g_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ ve $(g_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ arasında bir (lineer) izometri ve $\psi \circ J_1 = J_2 \circ \psi$ olacak şekilde bir $\psi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ Lie cebir izomorfizmasının var olmasıdır. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, $\mathfrak{g}$ üzerinde sol-invaryant g_i metriği tarafından indirgenen bir iç çarpımdır.

Teorem 4.2.2. (Fernández-Culma and Godoy , 2018) G , bir sol-invaryant anti-Kaehler yapıya sahip 4-boyutlu basit bağlantılı bir Lie grup olsun. Eğer G Lie grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebiri Teorem 4.2.1 de tanımlanan $\mathfrak{r}_{-1,-1}$ Lie cebirine izomorfik ise o zaman G , denklik bağıntısı altında sadece bir tane sol-invaryant anti-Kaehler yapıya sahiptir. (Fernández-Culma and Godoy , 2018)

İspat. İlk olarak (55) eşitliklerinden elde edilen $\mu_{1,0,+1}$ yapısını sabitleyelim. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ($a, b \neq 0$) ve $\varepsilon = \mp 1$ için $\mu_{1,0,+1}$ yapısının $\mu_{a,b,\varepsilon}$ yapısına denk olduğu elde edilmelidir. Tersine

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \begin{bmatrix} \varepsilon ra & \varepsilon sb & -rb & sa \\ -\varepsilon sb & \varepsilon ra & -sa & -rb \\ \varepsilon rb & -\varepsilon sa & ra & sb \\ \varepsilon sa & \varepsilon rb & -sb & ra \end{bmatrix}$$

olarak verilen

$$\varphi = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \begin{bmatrix} \varepsilon ra & \varepsilon sb & \varepsilon rb & -\varepsilon sa \\ -\varepsilon sb & \varepsilon ra & \varepsilon sa & \varepsilon rb \\ -rb & sa & ra & sb \\ -sa & -rb & -sb & ra \end{bmatrix}$$

matrisi göz önüne alınsın, burada $r = a^2 + b^2 + 1$ ve $s = a^2 + b^2 - 1$ dir.

$X \in \mathcal{B}$ alınırsa

$$\varphi(JX) = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} (\varepsilon sbX + \varepsilon raJX + saY - rbJY) = J(\varphi(X))$$

elde edilir. Benzer şekilde her $X \in \mathcal{B}$ için $\varphi(JX) = J(\varphi(X))$ olduğu görülür.

Dolayısıyla φ , J kompleks yapısını korur.

$X, Y \in \mathcal{B}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \varphi(X), \varphi(Y) \rangle &= \frac{1}{4(a^2 + b^2)^2} \langle (\varepsilon r a X - \varepsilon s b J X - r b Y - s a J Y), (\varepsilon r b X \\ &\quad + \varepsilon s a J X + r a Y - s b J Y) \rangle \\ &= 0 \\ &= \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve benzer şekilde her $X, Y \in \mathcal{B}$ için $\langle \varphi(X), \varphi(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$ olduğu görülür. Dolayısıyla φ , iç çarpımı korur. O halde φ , $\mu_{1,0,+1}$ ve $\mu_{a,b,\varepsilon}$ Lie cebirleri arasında bir izomorfizmadır.

4.3 Killing Norden Metrik ile Birlikte Kaehler Manifold Olarak Lie Grupları

Bu alt bölümde anti-Kaehler yapı içeren Lie grupların Killing olma durumları tartışılacaktır. Esas olarak Norden metrik ile anti-Hermityen metrik aynı anlama gelmektedir. Ancak bu alt bölümde Teofilova (2012) kaynağındaki bilgiler derlendiğinden Norden kavramı kullanılacaktır.

Tanım 4.3.1. (Teofilova , 2012) (M, g, J) , Norden metrik ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifold ve R eğrilik tensörü olsun. Eğer $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y, JZ, JU) = -R(X, Y, Z, U) \quad (57)$$

ise R eğrilik tensörüne Kaehler denir.

Önerme 4.3.1. (Teofilova , 2012) (M, g, J) , Norden metrik ile birlikte bir Kaehler manifold ise R eğrilik tensörü Kaehlerdir.

İspat. *Kaehler manifold üzerinde $\nabla J = 0$ olduğundan ve eğrilik tensörü tanımından $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için*

$$R(X, Y, JZ, JU) = g(R(X, Y)JZ, JU) = g(JR(X, Y)Z, JU)$$

ve Norden metrik tanımından

$$R(X, Y, JZ, JU) = -g(R(X, Y)Z, U) = -R(X, Y, Z, U)$$

dır.

Tanım 4.3.2. *(Teofilova , 2012) (M, g, J) , Norden metrik ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifold ve R eğrilik tensörü olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z, U \in \chi(M)$ için*

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, JY) \quad (58)$$

ile tanımlanan $\tilde{g}$ metriğine g ile birleşen metrik denir , ayrıca $\tilde{g}$ bir Norden metriktir. Benzer şekilde

$$R^*(X, Y, Z, U) = R(X, Y, Z, JU) \quad (59)$$

ile tanımlanan R^* tensörüne R ile birleşen tensör denir ve ayrıca R^* , bir Kaehler tensördür.

Tanım 4.3.3. *(Teofilova , 2012) (M, g, J) , Norden metrik ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifold ve R eğrilik tensörü olsun. Eğer $\omega = \{X, Y\}$, $p \in M$ için $X, Y \in T_p M$ vektörleri ile gerilen nondejenere bir düzlem ise ω düzleminin kesit eğrilikleri*

$$K(\omega; p) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}, \quad (60)$$

$$K^*(\omega; p) = \frac{R(X, Y, Y, JX)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

dır. Ricci tensör S ve skaler eğrilikler r ve r^*

$$S(Y, Z) = g^{ij}R(e_i, Y, Z, e_j), \quad r = g^{ij}S(e_i, e_j), \quad r^* = g^{ij}S(e_i, Je_j) \quad (61)$$

dır, burada $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$), M manifoldunun p noktasındaki T_pM tanjant uzayının keyfi bir bazı olmak üzere g^{ij} bileşenleri, $\{e_i\}$ bazına göre g metriğine karşılık gelen matrisin tersinin bileşenleridir.

Tanım 4.3.4. (Teofilova , 2012) (M, g, J) , Norden metrik ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifold, R eğrilik tensörü ve $\omega = \{X, Y\}$, $p \in M$ için $X, Y \in T_pM$ vektörleri ile gerilen nondejenere bir düzlem olsun. ω düzleminin kesit eğriliklerine eğer $J\omega = \omega$ ise holomorfik kesit eğrilikleri ve eğer $J\omega \perp \omega$ ise total reel kesit eğrilikleri denir.

G , $2n$ -boyutlu bir bağlantılı reel Lie grup ve $\mathfrak{g}$, G Lie grubunun Lie cebiri olsun. Eğer $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$, G grubu üzerindeki sol-invaryant vektör alanlarının bir bazı ise

$$\begin{aligned} JX_i &= X_{i+n}, & JX_{i+n} &= -X_i, \\ g(X_i, X_i) &= -g(X_{i+n}, X_{i+n}) = 1, & g(X_j, X_k) &= 0, \quad j \neq k, \\ i &= 1, \dots, n; & j, k &= 1, 2, \dots, 2n \end{aligned} \quad (62)$$

olacak şekilde bir sol-invaryant J hemen hemen kompleks yapısı ve G üzerinde bir sol-invaryant g Norden metriği tanımlanır. O zaman (G, J, g) Norden metrik ile birlikte bir hemen hemen kompleks manifolddur. (Teofilova , 2012)

G grubu üzerinde g metriğinin Levi-Civita konneksiyonu için J yapısının g metriğine göre simetrik olmasından

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{X_i}J)X_j, X_k) &= 2g(\nabla_{X_i}JX_j, X_k) - 2g(J\nabla_{X_i}X_j, X_k) \\ &= 2g(\nabla_{X_i}JX_j, X_k) - 2g(\nabla_{X_i}X_j, JX_k) \end{aligned}$$

dır. (21) eşitliğindeki Kozsul formülünden

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{X_i} J)X_j, X_k) &= g([X_i, JX_j], X_k) - g([JX_j, X_k], X_i) \\ &+ g([X_k, X_i], JX_j) - g([X_i, X_j], JX_k) + g([X_j, JX_k], X_i) - g([JX_k, X_i], X_j) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_{X_i} J)X_j, X_k) &= g([X_i, JX_j] - J[X_i, X_j], X_k) \\ &+ g(J[X_k, X_i] - [JX_k, X_i], X_j) + g([X_k, JX_j] - [JX_k, X_j], X_i) \end{aligned} \quad (63)$$

elde edilir. (Teofilova , 2012)

Tanım 4.3.5. (Teofilova , 2012) G bir Lie grup ve g , G Lie grubu üzerinde bir sol-invariant metrik olsun. Eğer g metriği

$$g([X, Y], Z) = g(X, [Y, Z])$$

eşitliğini sağlayan bir bi-invariant (**ad**-invariant) metrik ise o zaman g metriğine ayrıca Killing metrik de denir.

Önerme 4.3.2. (Teofilova , 2012) G , bir sol-invariant hemen hemen kompleks yapısı ve g ve $\tilde{g}$ sol-invariant Norden metrik ikilileri ile birlikte reel bağlantılı bir Lie grup olsun. O zaman aşağıdaki herhangi iki şart üçüncüyü gerçekleştir:

i J bi-invarianttır;

ii g Killing metriktir;

iii $\tilde{g}$ Killing metriktir.

İspat. (i) ve (ii) şartının (iii) şartını gerçeklediğini gösterelim. J bir bi-invariant kompleks yapı ve g , G üzerinde bir Killing Norden metrik olsun.

O zaman (22) ve (28) eşitliklerinden $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için

$$g(J[X, Y], Z) = -g(J[X, Z], Y)$$

elde edilir. $g(X, Y) = \tilde{g}(X, JY)$ olduğundan bu $\tilde{g}([X, Y], Z) = -\tilde{g}([X, Z], Y)$ eşitliğine denktir ve bu eşitlik Killing metrik olmak için gerek ve yeter koşuldur. Şimdi ise (ii) ve (iii) şartının (i) şartını gerçeklediğini gösterelim. g ve $\tilde{g}$ Killing metrik ise $g(J[X, Y], Z) = -g(J[X, Z], Y)$ ve $\tilde{g}([X, Y], Z) = -\tilde{g}([X, Z], Y)$ dır. Bu iki eşitlikten

$$\begin{aligned}\tilde{g}([X, Y], Z) &= g([X, Y], JZ) = -g([X, JZ], Y) \\ -\tilde{g}([X, Z], Y) &= -g([X, Z], JY) = -g(J[X, Z], Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ için $-g([X, JZ], Y) = -g(J[X, Z], Y)$ olduğundan $[X, JZ] = J[X, Z]$ dır. Dolayısıyla J bi-invarianttır.

Diğer durum da benzer şekilde ispatlanır.

Bundan sonraki kısımda Killing Norden metriklerin bir ikilisi ve bir bi-invariant kompleks yapı ile birlikte kompakt Lie cebirlerin 2-parametrel bir ailesi üzerinde Norden metriğe sahip bir 6-boyutlu Kaehler manifold örneği inşa edilip çalışılacaktır.

Önerme 4.3.3. (Teofilova , 2012) $\mathfrak{g}$, bir G reel bağlantılı Lie grubuna karşılık gelen 6-boyutlu Lie cebiri olsun. Eğer $\{X_1, X_2, \dots, X_6\}$, $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin bir bazı ve $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ ise C_{ij}^k yapısal sabitleri, $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ değişmeli olmayan şartını ve

$$C_{ij}^k C_{ks}^l + C_{js}^k C_{ki}^l + C_{si}^k C_{kj}^l = 0 \quad (64)$$

Jacobi özdeşliğini sağlar.

İspat. $C_{ij}^k X_k = [X_i, X_j] = -[X_j, X_i] = -C_{ji}^k X_k$ olduğundan $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ dir.

Jacobi özdeşliğinden

$$[X_i, [X_j, X_s]] + [X_j, [X_s, X_i]] + [X_s, [X_i, X_j]] = 0$$

dır. Hipotezden

$$[X_i, C_{js}^k X_k] + [X_j, C_{si}^k X_k] + [X_s, C_{ij}^k X_k] = 0$$

ve C_{ij}^k yapısal sabitlerinden

$$C_{js}^k [X_i, X_k] + C_{si}^k [X_j, X_k] + C_{ij}^k [X_s, X_k] = 0$$

olur. Buradan

$$C_{js}^k C_{ik}^l X_l + C_{si}^k C_{jk}^l X_l + C_{ij}^k C_{sk}^l X_l = 0$$

elde edilir. Hipotezden

$$C_{js}^k C_{ik}^l + C_{si}^k C_{jk}^l + C_{ij}^k C_{sk}^l = 0$$

olduğundan

$$-C_{js}^k C_{ki}^l - C_{si}^k C_{kj}^l - C_{ij}^k C_{ks}^l = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla C_{ij}^k yapısal sabitleri Jacobi özdeşliğini sağlar.

(63) eşitliğine benzer şekilde G Lie grubu üzerinde bir sol-invaryant hemen hemen kompleks yapı ve sol-invaryant Norden metrik tanımlayalım, yani

$$\begin{aligned} JX_1 &= X_4, & JX_2 &= X_5, & JX_3 &= X_6 \\ JX_4 &= -X_1, & JX_5 &= -X_2, & JX_6 &= -X_3 \end{aligned} \quad (65)$$

ve

$$\begin{aligned} g(X_1, X_1) &= g(X_2, X_2) = g(X_3, X_3) \\ &= -g(X_4, X_4) = -g(X_5, X_5) = -g(X_6, X_6) = -1 \\ g(X_i, X_j) &= 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \quad (66)$$

tanımlansın. O zaman $\tilde{g}$ metriği sıfırdan farklı bileşenler içerir. $\tilde{g}$ metriğinin tanımından

$$\tilde{g}(X_1, X_4) = g(X_1, JX_4) = g(JX_1, X_4) = -g(X_4, X_4) = -1$$

ve benzer şekilde de

$$\tilde{g}(X_1, X_4) = \tilde{g}(X_2, X_5) = \tilde{g}(X_3, X_6) = -1 \quad (67)$$

elde edilir. (Teofilova , 2012)

J yapısının bi-invaryant olması için (28) şartı $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$ için

$$[X_i, X_j] = -[X_{i+3}, X_{j+3}], \quad [X_i, X_{j+3}] = -[X_j, X_{i+3}] = J[X_i, X_j], \quad (68)$$

$$[X_i, X_{i+n}] = 0$$

eşitliklerini gerçekler. O halde Jacobi özdeşliği ve (68) eşitliklerinden aşağıdakiler elde edilir. (Teofilova , 2012)

Önerme 4.3.4. (Teofilova , 2012) (G, J, g) , (65) ve (66) ile tanımlanan Norden metriği ile birlikte bir 6-boyutlu hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman (G, J, g) manifoldunun bir bi-invaryant kompleks yapı ile birlikte bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart G Lie grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin

$$[X_1, X_2] = -[X_4, X_5] = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5 + \lambda_6 X_6,$$

$$[X_1, X_3] = -[X_4, X_6] = \lambda_7 X_1 + \lambda_8 X_2 - \lambda_2 X_3 + \lambda_9 X_4 + \lambda_{10} X_5 - \lambda_5 X_6,$$

$$[X_1, X_5] = -[X_2, X_4] = -\lambda_4 X_1 - \lambda_5 X_2 - \lambda_6 X_3 + \lambda_1 X_4 + \lambda_2 X_5 + \lambda_3 X_6,$$

$$[X_1, X_6] = -[X_3, X_4] = -\lambda_9 X_1 - \lambda_{10} X_2 + \lambda_5 X_3 + \lambda_7 X_4 + \lambda_8 X_5 - \lambda_2 X_6, \quad (69)$$

$$[X_2, X_3] = -[X_5, X_6] = \lambda_{11} X_1 - \lambda_7 X_2 + \lambda_1 X_3 + \lambda_{12} X_4 - \lambda_9 X_5 + \lambda_4 X_6,$$

$$[X_2, X_6] = -[X_3, X_5] = -\lambda_{12} X_1 + \lambda_9 X_2 - \lambda_4 X_3 + \lambda_{11} X_4 - \lambda_7 X_5 + \lambda_1 X_6,$$

sıfırdan farklı komütatörleri ile birlikte 12-parametrelî Lie cebirlerin ailesine ait olmasıdır, burada $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, 12$ dır.

Şimdi, (G, g, J) Kaehler manifoldunu (69) ile tanımlanan Lie cebir ile birlikte ele alıyoruz ve g metriğinin Killing metrik olmasını istiyoruz. (22), (66) ve (69) şartlarından $C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}$ ve $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ olduğundan $C_{12}^3 = C_{31}^2 = C_{23}^1$ olduğu kolayca görülür. $[X_2, X_3]$ ve $[X_2, X_6]$ eşitliklerinden $\lambda_{11} = C_{23}^1 = -C_{56}^1 = C_{26}^4 = -C_{35}^4$, benzer şekilde $\lambda_8 = C_{13}^2 = -C_{46}^2 = C_{16}^5 = -C_{34}^5$ ve $\lambda_3 = C_{12}^3 = -C_{45}^3 = C_{15}^6 = -C_{24}^6$ elde edilir. Buradan $\lambda_{11} = -\lambda_8 = \lambda_3$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\lambda_{12} = -\lambda_{10} = \lambda_6$ elde edilir. $\lambda_1 = C_{12}^1 = \varepsilon_{121} = 0$ dır. Benzer işlemler yapılarak kalan λ_i lerin sıfır olduğu gösterilir. (Teofilova , 2012)

Önerme 4.3.5. (Teofilova , 2012) (G, J, g) , (65) ve (66) ile tanımlanan Norden metriği ile birlikte bir 6-boyutlu hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman (G, J, g) manifoldunun bir bi-invaryant kompleks yapı ve bir Killing Norden metrik ile birlikte bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart G Lie grubunun $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= -[X_4, X_5] = \lambda X_3 + \mu X_6, \\
[X_1, X_3] &= -[X_4, X_6] = -\lambda X_2 - \mu X_5, \\
[X_1, X_5] &= -[X_2, X_4] = -\mu X_3 + \lambda X_6, \\
[X_1, X_6] &= -[X_3, X_4] = \mu X_2 - \lambda X_5, \\
[X_2, X_3] &= -[X_5, X_6] = \lambda X_1 + \mu X_4, \\
[X_2, X_6] &= -[X_3, X_5] = -\mu X_1 + \lambda X_4.
\end{aligned} \tag{70}$$

sıfırdan farklı komütatörleri ile birlikte 2-parametrelî Lie cebirlerin ailesine ait olmasıdır.

Önerme 4.3.2 e göre $\tilde{g}$ ilişkili Norden metriğinin de bir Killing metrik olduğunu belirtelim.

(70) ile tanımlanan Lie cebirinin Killing formuna karşılık gelen

$$B = \begin{pmatrix} B(X_1, X_1) & B(X_1, X_2) & \dots & B(X_1, X_5) & B(X_1, X_6) \\ B(X_2, X_1) & B(X_2, X_2) & \dots & B(X_2, X_5) & B(X_2, X_6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B(X_6, X_1) & B(X_6, X_2) & \dots & B(X_6, X_5) & B(X_6, X_6) \end{pmatrix}$$

matrisini bulalım. Burada

$$\mathbf{ad}_{X_1} X_1 = [X_1, X_1] = 0$$

$$\mathbf{ad}_{X_1} X_2 = [X_1, X_2] = \lambda X_3 + \mu X_6$$

$$\mathbf{ad}_{X_1} X_3 = [X_1, X_3] = -\lambda X_2 - \mu X_5$$

$$\mathbf{ad}_{X_1} X_4 = [X_1, X_4] = [X_1, JX_1] = J[X_1, X_1] = 0$$

$$\mathbf{ad}_{X_1} X_5 = [X_1, X_5] = -\mu X_3 + \lambda X_6$$

$$\mathbf{ad}_{X_1} X_6 = [X_1, X_6] = \mu X_2 - \lambda X_5$$

olduğundan $\mathbf{ad}_{X_1}$ dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\mathbf{ad}_{X_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \mu \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathbf{ad}_{X_1} \circ \mathbf{ad}_{X_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 - \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \mu^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Killing form tanımından $B(X_1, X_1) = iz(\mathbf{ad}_{X_1} \circ \mathbf{ad}_{X_1}) = 4(\lambda^2 - \mu^2)$ elde edilir. Benzer şekilde her bir X_i için $\mathbf{ad}_{X_i}$ dönüşümüne karşılık gelen matrisler bulunarak $B(X_i, X_j) = iz(\mathbf{ad}_{X_i} \circ \mathbf{ad}_{X_j})$ bileşenleri hesaplanarak Killing forma karşılık gelen matris

$$B = 4 \begin{pmatrix} \mu^2 - \lambda^2 & 0 & 0 & 2\mu\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 - \lambda^2 & 0 & 0 & 2\mu\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 - \lambda^2 & 0 & 0 & 2\mu\lambda \\ 2\mu\lambda & 0 & 0 & \lambda^2 - \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\lambda & 0 & 0 & \lambda^2 - \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu\lambda & 0 & 0 & \lambda^2 - \mu^2 \end{pmatrix} \quad (71)$$

şeklinde elde edilir.

O zaman $\det B = -4096(\lambda^2 + \mu^2)^6$, yani $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ için Killing form negatif tanımlıdır. Teorem 3.2.6 den (70) ile tanımlanan Lie cebirleri kompakttır. (Teofilova , 2012)

Üstelik (66), (67) ve (71) eşitliklerinden B Killing formu g ve $\tilde{g}$ Norden metriklerinin lineer birleşimi olarak

$$B = -4\{(\lambda^2 - \mu^2)g + 2\lambda\mu\tilde{g}\} \quad (72)$$

olacak şekilde gösterilebilir. (Teofilova , 2012)

Önerme 4.3.6. (Teofilova , 2012) (G, J, g) bir Kaehler manifold ve G Lie grubunun Lie cebiri (70) ile tanımlanan Lie cebiri olsun. g Killing metrik, ∇ Livi-Civita konneksiyonu, R eğrilik tensörü ve S Ricci tensörü olmak üzere $\forall X, Y, Z, U \in \mathfrak{g}$ için

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{1}{2}[X, Y], \\ S(X, Y) &= -\frac{1}{4}B(X, Y), \\ R(X, Y, Z, U) &= -\frac{1}{4}g([X, Y], [Z, U]) \end{aligned} \quad (73)$$

dır.

İspat. g Killing metrik olduğundan ilk eşitlik açıktır.

e_i ler bazın elemanları olmak üzere Killing form tanımından ve g metriğinin Killing metrik olmasından

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= iz(\mathbf{ad}_X \circ \mathbf{ad}_Y) = \sum g([X, [Y, e_i]], e_i) \\ &= \sum g([X, e_i], [Y, e_i]) \\ &= \sum g(e_i, [Y, [X, e_i]]) \\ &= \sum g([X, e_i], Y, e_i) \end{aligned}$$

olur. Eğrilik tensörü tanımından

$$\begin{aligned} \sum g([X, e_i], Y, e_i) &= -4 \sum g(R(X, e_i)Y, e_i) \\ &= -4iz\{Z \mapsto R(X, Z)Y\} \end{aligned}$$

olur. Ricci tensörü tanımından

$$\sum g([X, e_i], Y, e_i) = -4S(X, Y)$$

bulunur. J bi-invaryant yapı olduğundan $g(R(X, Y)Z, U) = \frac{1}{4}g([X, Y], Z, U)$

elde edilir. g Killing metrik olduğundan $g([X, Y], Z, U) = -g([Z, U], [X, Y])$

dır ve böylece son eşitlik de gösterilmiş olur.

Önerme 4.3.7. (Teofilova , 2012) (G, J, g) bir Kaehler manifold ve G Lie grubunun Lie cebiri (70) ile tanımlanan Lie cebiri olsun. O zaman (74) yardımıyla R eğrilik tensörünün sıfırdan farklı $R_{ijkl} = R(X_i, X_j, X_k, X_l)$

bileşenleri

$$\begin{aligned}
R_{1221} &= R_{1331} = -R_{1551} = -R_{1661} = R_{2332} \\
&= -R_{2442} = -R_{2662} = -R_{3443} = -R_{3553} = R_{4554} \\
&= R_{4664} = R_{5665} = -R_{1245} = -R_{1346} = R_{2356} \\
&= -R_{1524} = -R_{1634} = -R_{2635} = -\frac{1}{4}(\lambda^2 - \mu^2), \\
R_{1251} &= R_{1361} = -R_{2142} = -R_{2362} = R_{3143} = R_{3253} = -R_{4254} \\
&= -R_{4364} = -R_{5145} = -R_{5365} = -R_{6146} = -R_{6256} = \frac{-1}{2}\lambda\mu
\end{aligned} \tag{74}$$

dır.

İspat. (70) ve (74) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
R_{1221} = R(X_1, X_2, X_2, X_1) &= -\frac{1}{4}g([X_1, X_2], [X_2, X_1]) \\
&= -\frac{1}{4}g(\lambda X_3 + \mu X_6, -(\lambda X_3 + \mu X_6)) \\
&= \frac{1}{4}\lambda^2 g(X_3, X_3) + \mu^2 g(X_6, X_6) \\
&= \frac{1}{4}(\lambda^2 - \mu^2)
\end{aligned}$$

dır ve diğer eşitlikler de benzer şekilde elde edilir.

Önerme 4.3.8. (Teoflova , 2012) (G, J, g) bir Kaehler manifold ve G Lie grubunun Lie cebiri (70) ile tanımlanan Lie cebiri olsun. O zaman (74) ve (71) yardımıyla Ricci tensörünün sıfırdan farklı $S_{ij} = S(X_i, X_j)$ bileşenleri

$$\begin{aligned}
S_{11} &= S_{22} = S_{33} = -S_{44} = -S_{55} = -S_{66} = \lambda^2 - \mu^2 \\
S_{14} &= S_{25} = S_{36} = -2\lambda\mu
\end{aligned} \tag{75}$$

dır.

İspat. (74) ve (71) eşitliklerinden

$$S_{11} = S(X_1, X_1) = -\frac{1}{4}B(X_1, X_1) = -\frac{1}{4}(4(\mu^2 - \lambda^2)) = \lambda^2 - \mu^2$$

dır ve diğer eşitlikler de benzer şekilde elde edilir.

Önerme 4.3.9. (Teofilova , 2012) (G, J, g) bir Kaehler manifold ve G Lie grubunun Lie cebiri (70) ile tanımlanan Lie cebiri olsun. O zaman (61) ve (75) yardımıyla manifoldun skaler eğrilikleri

$$r = 6(\lambda^2 - \mu^2), \quad r^* = -12\lambda\mu \quad (76)$$

dır.

İspat. (61) ve (75) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} r &= g^{11}S_{11} + g^{22}S_{22} + g^{33}S_{33} + g^{44}S_{44} + g^{55}S_{55} + g^{66}S_{66} \\ &= (\lambda^2 - \mu^2) + (\lambda^2 - \mu^2) + (\lambda^2 - \mu^2) - (-\lambda^2 + \mu^2) \\ &\quad -(-\lambda^2 + \mu^2) - (-\lambda^2 + \mu^2) \\ &= 6(\lambda^2 - \mu^2) \end{aligned}$$

ve (63) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} r^* &= g^{11}S_{14} + g^{22}S_{25} + g^{33}S_{36} - g^{44}S_{41} - g^{55}S_{52} - g^{66}S_{63} \\ &= -12\lambda\mu \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.3.10. (Teofilova , 2012) (G, J, g) bir Kaehler manifold ve G Lie grubunun Lie cebiri (70) ile tanımlanan Lie cebiri olsun. $\{X_i, X_j\}$ baz vektörleri ile gerilen ω_{ij} karakteristik düzlemi için $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{26}, \omega_{34}, \omega_{35}, \omega_{45}, \omega_{46}, \omega_{56}$ düzlemleri total reel ve $\omega_{14}, \omega_{25}, \omega_{36}$ düzlemleri

holomorfik düzlemlerdir. Ayrıca (61) ve (74) yardımıyla

$$\begin{aligned}
K(\omega_{12}) &= K(\omega_{13}) = K(\omega_{15}) = K(\omega_{16}) = K(\omega_{23}) \\
&= K(\omega_{24}) = K(\omega_{26}) = K(\omega_{34}) = K(\omega_{35}) = K(\omega_{45}) \\
&= K(\omega_{46}) = K(\omega_{56}) = \frac{1}{4}(\lambda^2 - \mu^2), \\
K^*(\omega_{12}) &= K^*(\omega_{13}) = K^*(\omega_{15}) = K^*(\omega_{16}) = K^*(\omega_{23}) \\
&= K^*(\omega_{24}) = K^*(\omega_{26}) = K^*(\omega_{34}) = K^*(\omega_{35}) = K^*(\omega_{45}) \\
&= K^*(\omega_{46}) = K^*(\omega_{56}) = -\frac{1}{2}\lambda\mu, \\
K(\omega_{14}) &= K(\omega_{25}) = K(\omega_{36}) = K^*(\omega_{14}) = K^*(\omega_{25}) = K^*(\omega_{36}) = 0
\end{aligned} \tag{77}$$

dır.

İspat. Tanım 4.3.4 den $\omega_{14} = \{X_1, X_4\}$ ve $JX_1 = X_4$, $JX_4 = -X_1$ olduğundan ω_{14} düzlemi J yapısı altında invaryant dolayısıyla holomorfik düzlemdir. Benzer şekilde ω_{25}, ω_{36} düzlemlerinin holomorfik ve diğer düzlemlerin de total reel olduğu gösterilir.

(61) ve (74) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
K(\omega_{12}) &= \frac{R(X_1, X_2, X_2, X_1)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{g([X_1, X_2], [X_2, X_1])}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{g(\lambda X_3 + \mu X_6, -\lambda X_3 - \mu X_6)}{1} \\
&= -\frac{1}{4} [-\lambda^2 g(X_3, X_3) - \mu^2 g(X_6, X_6) - 2\lambda\mu g(X_3, X_6)] \\
&= \frac{1}{4}(\lambda^2 - \mu^2)
\end{aligned}$$

dır ve diğer eşitlikler de benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.3.1. (Teofilova , 2012) (G, J, g) bir Kaehler manifold ve G Lie grubunun Lie cebiri (70) ile tanımlanan Lie cebiri olsun. O zaman Tanım 4.3.4 ve Önerme 4.3.10 den manifold sabit total reel kesit eğriliklere sahiptir.

Tanım 4.3.6. (Teofilova , 2012) g ve $\tilde{g}$ Norden metrikleri ile donatılmış bir hemen hemen kompleks manifold üzerinde eğer $S = ag + b\tilde{g}$ ise o zaman manifolda hemen hemen Einstein manifold denir, eğer $S = ag$ ise manifold Einsteindir, burada a, b sabit ve S manifoldun Ricci tensörüdür.

Önerme 4.3.11. (Teofilova , 2012) (65), (66) ve (70) ile tanımlanan 6-boyutlu (G, J, g) Kaehler manifoldu bir hemen hemen Einstein manifolddur.

İspat. (72) ve (74) eşitliklerinden ve Tanım 4.3.6 den

$$S(X, Y) = \frac{-1}{4}B(X, Y) = (\lambda^2 - \mu^2)g + 2\lambda\mu\tilde{g}$$

olduğundan ispat biter.

Sonuç 4.3.2. (Teofilova , 2012) (65), (66) ve (70) ile tanımlanan 6-boyutlu (G, J, g) Kaehler manifoldunun bir Einstein manifoldu olması için gerek ve yeter şart ya $\lambda = 0, \mu \neq 0$ ya da $\mu = 0, \lambda \neq 0$ olmasıdır.

5 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Lie grupları üzerinde sol-invaryant ve bi-invaryant metrikler ve bu metriklere sahip Lie gruplarının eğrilikleri, daha sonrasında ise anti-Kaehler yapıya sahip Lie gruplar incelenmiştir. G Lie grubu üzerinde J kompleks yapısının bi-invaryant ve Abel olduğu durumlar ele alınmıştır. Eğer J bir Abel kompleks yapı ve bir sol-invaryant g metriğinin bir anti-izometrisi ise o zaman (G, g, J) üçlüsünün bir anti-Kaehler manifold olduğu gösterilmiştir. Ayrıca J bi-invaryant kompleks yapısına sahip bir yarı basit G Lie grubun sıfırdan farklı sabit ile birlikte bir anti-Kaehler Einstein manifold olduğu gösterilmiştir, burada g , G Lie grubunun Killing formu tarafından indirgenen bir bi-invaryant metriktir. Daha sonra kompleks yapısı Abel olan Lie gruplar üzerinde sol-invaryant anti-Kaehler yapılar çalışılmıştır. Bu bağlamda J kompleks yapısı Abel olan (g, J) sol-invaryant anti-Kaehler yapıya sahip Lie grubunun Lie cebirinin unimodüler olduğu ve (G, g) manifoldunun bir düzlemsel (flat) yarı-Riemann manifold olduğu gösterilmiştir. Bir G Lie grubu üzerinde verilen bir sol-invaryant anti-Hermityen yapı, onun Lie cebiri üzerinde bir θ kovaryant 3-tensörü ile ilişkilendirilmiş ve böyle bir yapının anti-Kaehler yapı olması için gerek ve yeter şartın θ tensörünün ters simetrik ve pür olması gerektiği gösterilmiştir. Sol-invaryant anti-Kaehler yapıya sahip 4-boyutlu Lie grupların θ tensörünün sıfır olduğu gösterilmiş, bu nedenle bu tür Lie grupların sınıflandırılması ile ilgilenilmiştir ve anti-Kaehler yapıya sahip 4-boyutlu Lie grupları incelenmiştir. Daha sonrasında ise Killing Norden metrik ikilileri ve bir bi-invaryant kompleks yapı ile donatılmış kompakt Lie cebirlerinin bir 2-parametrelili ailesi üzerinde Norden metrik ile birlikte 6-boyutlu bir Kaehler manifold örneği çalışılmış ve bu manifoldun eğrilikleri incelenmiştir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aksu, Ö.**, 2018, Diferensiyellenebilir Manifoldlarda Lie Grup Yapılar, Yüksek Lisans Tezi, Siirt Üniv. Fen Bil. Enst.
- Arslandoğan, N.U.**, 2015, Esaslı Nilpotent Lie Cebirleri İçin Berger-Wang Formülü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Kültür Üniv. Fen Bil. Enst.
- Arvanitoyeorgos, A.**, 2003, An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces, American Mathematical Soc., 22.
- Aslım, G.**, 1988, Genel Topoloji, Fen Fakültesi Yayınları, No:109.
- Aydın, M.**, 2002, Mekanizma Tasarımında Temel Bir Araç Olarak Katı Cisim Yer Değiştirmeleri Lie Grubu, Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniv. Fen Bil. Enst.
- Borowiec, A., Ferraris, M., Francaviglia, M. and Volovich, I.**, 1999, Almost-complex and Almost-product Einstein Manifolds From a Variational Principle, J. Math. Phys., 40(7):3446-3464p.
- Borowiec, A., Francaviglia, M. and Volovich, I.**, 2000, Anti-Kaehlerian Manifolds, Differential Geometry and its Applications, 12(3):281-289p.
- Bullo, F. and Lewis, A. D.**, 2019, Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems, Springer, 49.
- De, U.C. and Shaikh, A.A.**, 2009, Complex Manifolds and Contact Manifolds, Narosa Publishing House.
- Do Carmo, M.P. and Flaherty, J.**, 1992, Riemannian Geometry, 115, Birkhauser, Boston.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Duggal, K.L. and Şahin, B., 2010, Differential Geometry of Lightlike Submanifolds, Springer-Verlag.

Fernández-Culma, E.A. and Godoy, Y., 2018, Anti-Kählerian Geometry on Lie Groups, Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 21(1): 8p.

Fraleigh, J.B., 2003, A First Course In Abstract Algebra 7th Edition, Pearson Education Inc, USA.

Ganchev, G.T. and Borisov, A.W., 1986, Note on the Almost Complex Manifolds with Norden Metric, Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 39(5):31-34p.

Ganchev, G.T., Gribachev, K.I. and Mihova, V., 1987, B-connections and Their Conformal Invariants on Conformally Kaehler Manifolds with B-metric, Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS), 42(56):107-121p.

Ganchev, G.T., Ivanov, S. and Mihova, V., 1993, Curvatures on Anti-Kaehler Manifolds, Riv. Mat. Univ. Parma serie V, 2:249-256p.

Gribachev, K.I., Mekerov, D.G. and Djelepov, G.D., 1985, Generalized B-manifold, Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 38(3):299-302p.

Grillet, P. A., 2007, Abstract Algebra, Springer.

Gudmundsson, S., 2004, An Introduction to Riemannian Geometry, Lecture Notes Version, 1-235p.

Güney, Z., 1993, Soyut Matematiğe Giriş, T.C. Dokuz Eylül Üniversitesi Yayınları.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1980, Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi.
- Hacısalıhoğlu, H.H.**, 1982, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniv. Fen-Ed Fak. Mat No:2.
- Hacısalıhoğlu, H.H.**, 2006, Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fak. Yayınları
- Helgason, S.**, 1979, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic press.
- İşcan, M. and Salimov. A.A.**, 2009, On Kaehler-Norden Manifolds, Proc. Math. Sci., 119(1): 71-80p.
- Kartal M.G.**, 2012, Holomorfik Hiperyüzeylerin Diferansiyel Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniv. Fen Bil. Enst.
- Kobayashi, S. and Nomizu, K.**, 1969, Foundations of Differential Geometry, 2, Interscience Publishers New York.
- Lee, D. H.**, 2001, The Structure of Complex Lie Groups, CRC Press.
- Mandev, M.**, 2002, Classes of Real Isotropic Hypersurfaces of a Kaehler Manifold with B-metric, Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 55(4): 27-32p.
- Mekero, D.**, 2009, Connection with Parallel Totally Skew-symmetric Torsion on Almost Complex Manifolds with Norden Metric, Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 62(12): 1501-1508p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Mekеров, D.**, 2010, On the Geometry of the Connection with Totally Skew-symmetric Torsion on Almost Complex Manifolds with Norden Metric, Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 63(1): 19-28p.
- O'Neill, B.**, 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, 103, Academic press.
- Olszak, K.**, 2005, On the Bochner Conformal Curvature of Kaehler-Norden Manifolds, Central European Journal of Mathematics, 3(2):309-317p.
- Olver, P.J.**, 1993, Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer, New York.
- Sluka, K.**, 2001, On Kaehler Manifolds with Norden Metrics, An. Stiint. Univ." Al. I. Cuza" Iasi, Ser. Ia Mat., in print.
- Sluka, K.**, 2005, On the Curvature of Kaehler-Norden Manifolds, J. Geom. Phys., 54(2):131-145p.
- Şahin, B.**, 1996, CR-Altmanifoldların Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniv. Fen Bil. Enst.
- Şahin, B.**, 2000, Lightlike Altmanifoldların Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, İnönü Üniv. Fen Bil. Enst.
- Şahin, B.**, 2012, Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık.
- Teoflova, M.**, 2012, Lie Groups as Kähler Manifolds with Killing Norden Metric., CR Acad. Bulgare Sci, 65.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Yano, K. and Kon, M., 1984, Structures on Manifolds, World Scientific.

Wang, Z. “Lecture 6: The Exponential Map”,
<http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/13F-Lie/Notes/Lec%2006.pdf>,
(Eriřim tarihi: 19 Haziran 2021).



TEŞEKKÜR

Lisans ve lisansüstü eğitim hayatım boyunca bilgi birikiminden ve çok değerli tecrübelerinden faydalandığım, bu alanda çalışmamı sağlayan ve çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli tez danışmanım Prof. Dr. Bayram ŞAHİN' e en içten duygularımla teşekkür ederim. Ayrıca her zaman yanımda olup, beni destekleyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

03/09/2021

Deniz POYRAZ

ÖZGEÇMİŞ

İlk ve orta öğrenimini Muğla' da tamamladı. 2013 yılında girdiği Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Öğretim Programından 2018 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. Halen Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü' nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Yayınlar

- Yilmaz, A., Poyraz, D., and Sahin, B., 2021, Generic QR-Submanifolds of Quaternion Kaehler Manifolds, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 1-11.

Bildiriler

- Sahin B. and Poyraz D., 2019, Curvatures of Hemi-Slant Submanifolds, International Conference on Mathematics and Mathematics Education(ICMME), Konya, Türkiye.