

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**İKİ BOYUTLU BİR MÜHENDİSLİK PROBLEMİNİN  
TEKRARLAMALI DİFERANSİYEL QUADRATURE  
METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GÖRKEM GÖDE**

**DENİZLİ, EYLÜL - 2021**

**T.C.  
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**



**İKİ BOYUTLU BİR MÜHENDİSLİK PROBLEMİNİN  
TEKRARLAMALI DİFERANSİYEL QUADRATURE  
METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GÖRKEM GÖDE**

**DENİZLİ, EYLÜL - 2021**

**Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.**



**GÖRKEM GÖDE**

## ÖZET

### İKİ BOYUTLU BİR MÜHENDİSLİK PROBLEMİNİN TEKRARLAMALI DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖRKEM GÖDE

PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ.DR. ZEKERİYA GİRGİN)

DENİZLİ, EYLÜL - 2021

Bu çalışmada, Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) çeşitleri, metotlarda kullanılan ağırlıklı katsayıların nasıl hesaplanacağı, diferansiyel denklem sistemlerinin ve mühendislik problemi olan dairesel sektör plakaların ana denklemleri ve tekrarlamalı diferansiyel quadrature metodu ile nasıl çözüleceği incelenmiştir. Burada dördüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem olan yönetim denklemleri (dairesel sektörün yarıçapı ve açısı cinsinden oluşturulan denklemler) hızlı yakınsama ile tekrarlanır. Buna göre literatürde yer alan diğer analitik çözümlerin sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve az hata payıyla doğru sonuçları elde edildiği gözlemlenmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Mühendislik Problemi, Diferansiyel Denklemler, Tekrarlamalı Diferansiyel Quadrature Metodu

## **ABSTRACT**

### **SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL ENGINEERING PROBLEM WITH ITERATIVE DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD**

**MSC THESIS  
GÖRKEM GÖDE**

**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MECHANICAL ENGINEERING  
(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. ZEKERİYA GİRGIN)**

**DENİZLİ, SEPTEMBER 2021**

The aim of this thesis is to run research on Differential Quadrature Method (DQM) types by discovering how to calculate the weighted coefficients, solve the differential equation systems which is the engineering problem of circular sector plates with the main and iterative methods. Hereby the governing equation is the fourth-order partial differential equation that was built by the repeated rapid convergence of the radius and angle of the circular sector. The significance of this study was to compare outputs taken via DQM with the other analytical approaches in the literature. In conclusion, it was observed that besides low-margin of errors the correct results were obtained.

**KEYWORDS:** Engineering Problem, Differential Equations, Iterative Differential Quadrature Method

# İÇİNDEKİLER

Sayfa

|  |             |
|--|-------------|
| <b>ÖZET</b> .....  | <b>i</b>    |
| <b>ABSTRACT</b> .....  | <b>ii</b>   |
| <b>İÇİNDEKİLER</b> .....   | <b>iii</b>  |
| <b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....   | <b>v</b>    |
| <b>TABLO LİSTESİ</b> .....   | <b>vi</b>   |
| <b>SEMBOL LİSTESİ</b> .....  | <b>vii</b>  |
| <b>ÖNSÖZ</b> .....   | <b>viii</b> |
| <b>1. GİRİŞ</b> .....  | <b>1</b>    |
| 1.1 Tezin Amacı .....  | 2           |
| <b>2. LİTERATÜR BİLGİSİ</b> .....  | <b>3</b>    |
| <b>3. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU</b> .....   | <b>6</b>    |
| 3.1 İntegral Quadrature.....   | 6           |
| 3.2 Diferansiyel Quadrature .....  | 7           |
| 3.3 Birinci Mertebeden Türevler İçin Ağırlık Katsayıları Hesabı.....                                     | 8           |
| 3.3.1 Bellman Yaklaşımı .....  | 8           |
| 3.3.1.1 Bellman Birinci Yaklaşımı.....   | 8           |
| 3.3.1.2 Bellman İkinci Yaklaşımı .....   | 9           |
| 3.3.2 Quan-Chang Yaklaşımı.....  | 9           |
| 3.3.3. Shu Genel Yaklaşımı .....   | 10          |
| 3.4 İkinci Mertebeden Türevler İçin Ağırlık Katsayıları Hesabı .....                                     | 11          |
| 3.4.1 İkinci Mertebeden Türevler İçin Ağırlık Katsayıları Hesabı.....                                    | 11          |
| 3.4.1.1 Quan-Chang Yaklaşımı .....   | 12          |
| 3.4.1.2 Shu Genel Yaklaşımı.....   | 12          |
| 3.5 Matris Çarpımı Yaklaşımı .....   | 13          |
| 3.6 Düğüm Noktaları .....  | 15          |
| 3.6.1 Eşit Aralıklı Düğüm Noktaları Dağılımı .....   | 15          |
| 3.6.2 Düzgün Olmayan Düğüm Noktaları Dağılımı.....   | 16          |
| <b>4. TEKRARLAMALI DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMLEMESİ</b> ..... | <b>17</b>   |
| 4.1 Lineer Diferansiyel Denklemin Tekrarlamalı Diferansiyel Quadrature ile Çözümlemesi .....             | 19          |
| 4.2 Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemin Tekrarlamalı Diferansiyel Quadrature İle Çözümlemesi .....     | 22          |
| <b>5. ÇOK BOYUTLU DURUMLAR İÇİN GENİŞLETME</b> .....   | <b>24</b>   |
| 5.1 Düzenli Alan İçin Doğrudan Bağlantı.....   | 24          |
| 5.2 Diferansiyel Küp Yöntemi .....   | 28          |
| 5.3 Kirişlerin Diferansiyel Quadrature Metodu ile Çökme Analizi .....                                    | 29          |
| 5.3.1 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Basit Mesnetli Kirişin Çökme Analizi.....                               | 30          |
| 5.3.2 İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Çökme Analizi.....  | 30          |
| 5.3.3 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kirişin Çökme Analizi .....                                     | 31          |
| 5.3.4 İki Ucu Ankastre Kirişin Çökme Analizi .....   | 31          |
| 5.4 Sabit Kalınlıkta İzotropik Plakanın Çökme Analizi.....   | 32          |
| <b>6. DAİRESEL SEKTÖR PLAKALARININ DİFERANSİYEL QUADRATURE İLE ÇÖKME ANALİZİ</b> .....                   | <b>34</b>   |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 6.1       | Dairesel Sektör Plakalara Genel Bakış.....                          | 34        |
| 6.2       | Dairesel Sektör Plakasının Temel Denklemleri .....                  | 35        |
| 6.3       | Dairesel Sektör Plakasının Diferansiyel Quadrature İle Çözümü ..... | 37        |
| <b>7.</b> | <b>SONUÇLAR.....</b>  | <b>43</b> |
|           | <b>KAYNAKLAR .....</b>  | <b>44</b> |
|           | <b>EKLER.....</b>   | <b>48</b> |
|           | EK A – Ağırlıklı Katsayılar Matrisi .....                           | 48        |



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|  |    |
|--|----|
| Şekil 3.1: $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki integrali.....  | 6  |
| Şekil 5.2: Dikdörtgen için koordinat sistemi gösterimi .....   | 25 |
| Şekil 6.1: Dairesel plaka .....  | 34 |
| Şekil 6.2: Dairesel sektör plaka.....  | 34 |
| Şekil 6.3: Dairesel sektör plaka kesiti ve koordinat düzleminde gösterimi .....  | 35 |
| Şekil 6.4: Dairesel sektör plaka ve koordinat sistemi geometrisi .....   | 38 |
| Şekil 6.5: Dairesel sektör plakanın kenar numaraları ve koordinat sistemi geometrisi .....   | 39 |
| Şekil 6.6: Dört kenarı basit mesnetli 60 derecelik daireysel sektör plakanın geometrisi .....  | 40 |
| Şekil 6.7: Birinci ve üçüncü kenarları ankastre ikinci ve dördüncü kenarları basit mesnetli 60 derecelik daireysel sektör plakanın geometrisi .... | 41 |

## TABLO LİSTESİ

### Sayfa

|   |    |
|---|----|
| Tablo 3.1: N=6 nokta için eşit aralıklı düğüm noktaları dağılımı.....   | 16 |
| Tablo 3.2: N=6 nokta için düzgün olmayan düğüm noktaları dağılımı .....   | 16 |
| Tablo 4.1: Eşit aralıklı N=5 nokta için (4.1) numaralı denklemin türevleri .....  | 18 |
| Tablo 4.2: Eşit aralıklı N=11 nokta için (4.1) numaralı denklemin türevleri ...   | 18 |
| Tablo 4.3: Eşit aralıklı 5 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin<br>sonuçları ve bağıl hatası .....   | 20 |
| Tablo 4.4: Eşit aralıklı 7 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin<br>sonuçları ve bağıl hatası .....   | 21 |
| Tablo 4.5: Eşit aralıklı 9 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin<br>sonuçları ve bağıl hatası .....   | 21 |
| Tablo 4.6: Eşit aralıklı 11 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin<br>sonuçları ve bağıl hatası .....  | 22 |
| Tablo 6.1: Dört kenarı basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakanın<br>düzgün dağılımlı yük altında çökme, radyal ve açısız moment<br>değerleri.....  | 40 |
| Tablo 6.2: Birinci ve üçüncü kenarları ankastre, ikinci ve dördüncü kenarları<br>basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakanın düzgün<br>dağılımlı yük altında çökme, radyal ve açısız moment değerleri... | 41 |
| Tablo 6.3: Dört kenarı basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakanın<br>düzgün dağılımlı yük altında çökme, radyal ve açısız moment<br>değerleri ile ansys ve diğer değerlerinin karşılaştırılması.....    | 42 |

## SEMBOL LİSTESİ

|                          |   |                                    |
|--------------------------|---|------------------------------------|
| <b>N</b>                 | : | Düğüm Sayısı                       |
| <b>DQ</b>                | : | Differential Quadrature            |
| <b>DQM</b>               | : | Differential Quadrature Method     |
| <b>PDQ</b>               | : | Polynomial Differential Quadrature |
| <b>ax</b>                | : | Ağırlıklı Katsayılar Matrisi       |
| <b>E</b>                 | : | Elastisite Modülü ( $N/mm^2$ )     |
| <b>I</b>                 | : | Atalet Momenti ( $mm^4$ )          |
| <b><math>\rho</math></b> | : | Yoğunluk ( $g/mm^3$ )              |
| <b>A</b>                 | : | Kesit Alanı ( $mm^2$ )             |
| <b>D</b>                 | : | Eğilme Rijitliği ( $Nmm$ )         |
| <b><math>\nu</math></b>  | : | Poisson Oranı                      |

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamda rehberliğinden dolayı, bilgi ve deneyimi ile bana yol gösteren tez danışmanım ve değerli hocam sayın Doç.Dr. Zekeriya GİRGIN'e teşekkür ederim.

Her zaman gösterdikleri anlayış, sabır ve desteklerinden dolayı sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.



# 1. GİRİŞ

Günlük hayatta işlerimizi kolaylaştıran ve farkında olmadan defalarca karşılaştığımız birçok makınayı yapabilmek ve üretebilmek için kullanılan problemlerin birçoğu matematiksel modelleme ile çözümü sağlanmaktadır. Matematiksel modelleme yaparken daha çok diferansiyel denklemlerden yararlanır. Uzay bilimlerinde dünya yörüngesinin dışına atılan uydular, roketler, füzeler vb. hava araçları diferansiyel denklemlerden yararlanmaktadır. Bir teleferiğin kurulumunda, teleferik tellerinin başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki gerginlik ayarlamasında ayarlanmasında diferansiyel denklemlerden yararlanır. Bir köprünün yapımında tellerin ve yayların ayarlanmasında diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Mühendislik harikası olan denizaltıların basınç değerleri ve ne kadar derine inebilecekleri konusunda hesaplamalar da diferansiyel denklemlerden yapılan matematiksel modellemeler kullanılarak hesaplanır. Fizik biliminde katı hal fiziği alt bilim dalında ısı, sıcaklık, faz değişikliği gibi bazı deneylerde elde edilen denklemler birden çok değişkene bağlı olduğundan diferansiyel denklemler çok yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Kimyada, zamana bağlı olarak maddelerin çözünmesinde ve radyoaktif maddelerin yarılanma sürelerinde yine diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Biyolojide, laboratuvar ortamlarında incelenen virüslerin, bakterilerin ve hücrelerin bölünme, üreme hızlarının tespitinde de diferansiyel denklemlerden yararlanır. Ekonomide denge fiyatı, arz-talep, borsa vb. yerlerde diferansiyel denklemler kullanılır. Ekosistemdeki tüm canlıların popülasyonu için matematiksel modeller geliştirilmekte ve bu modeller diferansiyel denklemler ile elde edilmektedir.

Çeşitli alanlarda kullanılan diferansiyel denklemler lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler olarak kullanılmakta ve sonuçları analiz edilmektedir. Fakat karmaşık mühendislik problemlerinde özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü bir hayli zorlaşmakta ve çözülememektedir. Bunun için bunlara alternatif çözüm yolları geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

Birçok mühendislik probleminde Sonlu Elemanlar Metodu ve Sonlu Farklar Metodu gibi çok fazla dgm noktası kullanılarak bilgisayar analiz programları geliştirilmiştir. Fakat bu bilgisayar analiz programları gerçeğe çok yakın sonuç bulabilmesi için çok yüksek kapasiteli bilgisayarlara ihtiyaç vardır. Bunun için yine de problemin çözümü saatler ve günler sürmektedir.

Bundan dolayı sonlu elemanlar ve sonlu farklar metoduna göre daha hızlı ve kısa zamanda çözüm sunan metotlara ihtiyaç duyulmuştur. Bu özm yollarından biri de diferansiyel denklem sistemlerinde kullanılan diferansiyel quadrature metodudur.

Diferansiyel quadrature metodu da diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde kullanılan bir metottur. Bu metot kullanılarak lineer olmayan diferansiyel sistemi bulunan mühendislik problemlerinin daha kısa zamanda ve daha az hata payıyla çözümü mümkündür.

## **1.1 Tezin Amacı**

Bu çalışmanın amacı, diferansiyel denklem hesaplamalarında kullanılan tekrarlamalı diferansiyel quadrature metodu ile iki boyutlu bir mühendislik probleminin nasıl çözüleceğini incelemektir. Bu metot ile çözümlerin gerçek çözümlerle kıyaslanması amaçlanmıştır.

## 2. LİTERATÜR BİLGİSİ

Diferansiyel quadrature metodu daha az düğüm noktası kullanılarak R. E. Bellman ve J. Casti (1971) tarafından geliştirilmiş bir metottur.

Bellman integral quadrature yöntemiyle bu metodu geliştirmiştir. Bellman'a göre bu metotta önemli olan herhangi bir dereceden türev için ağırlıklı katsayılarının hesaplanmasıdır. Birinci metotta cebirsel bir denklem sistemi ile çözülmüş ve kullanılan polinomun derecesi, düğüm sayısının bir eksiğine eşit veya daha küçük olmaktadır. Lineer denklem dizisinin bir tek çözümü vardır. Çünkü matris elemanları Vandermonde matrisinden oluşmuştur. İkinci metotta ise ağırlıklı katsayıların hesabında basit bir cebirsel formülasyon kullanılmıştır. Fakat hesaplama,  $N$ . dereceden ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak seçilen düğüm noktalarının koordinatlarına göre yapılır. Yani eğer düğüm sayısı ( $N$ ) belirlenirse, düğüm noktalarının dağılımı değişik fiziksel problemler veya değişik sınır şartları için olsa dahi sabittir. Bazı mühendislik problemlerinin çözümlerinde sınırlara yakın düğüm noktalarına ihtiyaç olduğundan, bu metodu sınırlamaktadır.

Bellman'ın bu metotları çeşitli mühendislik problemleri ile çözülmüştür. Bu çözümler için genelde birinci metodu kullanmışlardır. Sebebi ise düğüm sayısı ( $N$ ) büyük olduğunda, oluşan Vandermonde matrisinin tersinin hesaplanmasının zor olmasıdır. Bundan dolayı bu metotta fazla sayıda düğüm noktası kullanıldığından ağırlıklı katsayıların elde edilmesi çok zor olduğunu ifade edilmiştir.

Civan, Bellman'ın ilk yaklaşımındaki yüksek düğüm noktalarında ağırlıklı katsayıların hesaplanmasındaki zorluğun Vandermonde matrisinin karakteristiğinden kaynaklandığını öne sürmüştür.

Daha sonra Bellman'ın yaklaşımındaki zorlukları gidermek için Quan ve Chang ikilisi ve Wen ve Yu ikilisi test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon fonksiyonlarını kullanarak, birinci ve ikinci dereceden türev için ağırlık katsayılarını hesaplayan bir formül geliştirmişlerdir.

Shu ve Richards birinci dereceden türevlerin ağırlıklı katsayıları düğüm noktalarında hiçbir kısıtlama yapmadan basit bir formül ile bulunmaktadır. İki veya

daha üst dereceden türevler için de tekrarlamalı çarpım yöntemini geliştirmişlerdir. Bununla birlikte Bellman'ın ikinci metodundaki sınırlamalar ortadan kaldırılmış ve istediğimiz düğüm noktasından işlem yapılabilir hale getirmişlerdir.

Diferansiyel Quadrature Metodunda, bilgisayar analiz programlarına benzer olarak verilen diferansiyel denklemler, çözüm bölgesinde ve düğüm noktalarındaki fonksiyonun değerleri cinsinden cebirsel denklemlere dönüştürülür. Ayrıca sınır şartlarını ifade eden denklemler, diferansiyel quadrature formunda yazılmış denklemlerle değiştirilir ve bu metot uygulanır. Buna karşılık yüksek dereceden diferansiyel denklem çözümlerinde, tek düğüm noktasına birden fazla sınır şartının uygulandığı durumlar ortaya çıkmaktadır. Bu metodun çözümlerinde, aynı noktaya uygulanan birden fazla sınır şartının değerlendirmesi zordur. Bu sorunu ortadan kaldırmak için değişik metotlar geliştirilmiştir. Jang ve diğ. (1989), DQM'nin giriş ve plakların statik analizine uygulanması ile ilgili çalışmalarında,  $\delta$ -tekniki kullanarak bir metot geliştirmiştir.

Bu teknikte düğüm noktasının yakınında iki sınır noktasına  $\delta$  kadar uzaklıkta noktalar alınır ve sınır şartları bu sınır noktasının kendisine ve ona çok yakın olan  $\delta$  noktasına uygulanır. Sonuç olarak sınır şartlarından biri tam olarak sağlanırken diğer  $\delta$  noktasında yaklaşık olarak sağlanır. Bu teknikte iki temel sorun vardır.  $\delta=0.001$  den daha büyük olamaz ve  $\delta$  değerinin daha küçük seçilmesi ağırlık katsayı matrislerinin çözüme uygun bir biçimde çıkmamasına sebep olmaktadır. Sonuç olarak, elde edilen çözümler yeterli doğrulukta değildir.

Elde edilen çözümler yeterli doğrulukta olmadığı için Wang ve Bert (1993) , Malik ve Bert (1996) ağırlıklı katsayılar matrisini düzenleyerek başka bir yaklaşım geliştirme yoluna gitmişlerdir. Bu yaklaşıma göre türevli ifadeler içeren sınır şartları ağırlık katsayılar matrisinde yerine koyularak işlem yapılmıştır. Bu yaklaşım bazı problemlerde doğru sonuçlar vermiştir fakat sınır şartlarında bazı kısıtlamalara sebep olmuştur.

Sınır şartlarındaki bazı kısıtlamaları ortadan kaldırabilmek için Shu (1997) başka bir yaklaşım önermiştir. Bu yaklaşıma göre geliştirdiği formüller ile sınır şartları doğrudan ana denklemde yerine koyularak çözüm yapılmıştır. Bu yöntemde  $\delta$

tekniklerinde ve ağırlıklı katsayılar matrisi tekniklerindeki eksikler giderilmiş ve kısıtlamalar ortadan kalkmıştır.

Shu (2000) diferansiyel quadrature metodu ile ilgili bir kitap yazarak bu konu hakkında tüm detayları anlatmıştır. Bu kitaptan sonra diferansiyel denklemler ve mühendislik problemleri diferansiyel quadrature metodu ile de çözülebilir hale gelmiştir.

Bu metot ile yapılan çalışmalar 2000 yılından sonra hız kazanmıştır. Chen (2003) durum uzay metodunu diferansiyel quadrature metodunu birleştirerek yeni bir metot geliştirmiş ve titreşim problemlerine uygulamıştır. Elde ettiği sonuçlar bu problemlerin çözüme yaklaştığını söylemiştir.

Shu (2003) ağırlıklı katsayılar matrisini radyal tabanlı fonksiyon kullanarak farklı bir yöntem geliştirmiş ve bu yöntemin akışkanlar mekaniğinde kullanılabileceğini göstermiştir.

Shu (2004) ağırlıklı katsayılar matrisini radyal tabanlı fonksiyon kullanarak geliştirdiği yöntemi kullanarak farklı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır. Bu yöntem kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde uygun olduğunu gözlemlemiştir. Shu (2005) aynı yöntemi sıkıştırılmayan bir akış problemi çözümünde denemiştir. Elde ettiği sonuçlar bu yöntemin güvenilir olduğunu göstermiştir.

Liew ve diğ. (2003-2004) yaptıkları çalışmalarda nümerik analiz konusu olan en küçük kareler regresyonu ile diferansiyel quadrature metodunu birleştirerek en küçük kareler diferansiyel quadrature metodunu geliştirmiştir. Bu metot ile aynı noktada çoklu sınır şartını girerek plakaların titreşim problemi çözümünde analiz etmeyi başarmıştır.

Diferansiyel quadrature metodu günümüzde mekanik, akışkanlar mekaniği, enerji, astronomi, yer bilimleri, fizik, kimya, biyoloji ve tıp alanında matematiksel modellenmesi yapılmış tüm problemleri kolaylıkla çözülebilir hale getirmiştir.

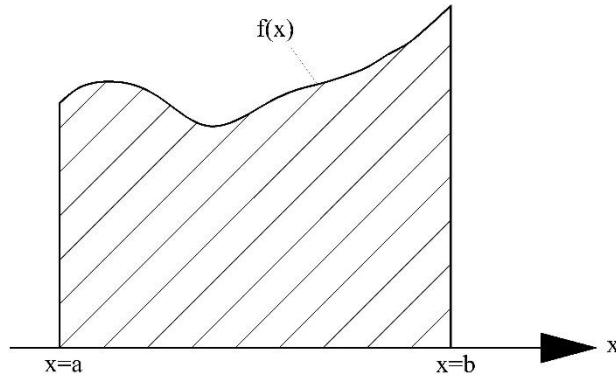
### 3. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU

Diferansiyel quadrature metodu Bellman tarafından geliştirilmiş diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan bir çeşit metottur. Bu metot ilk olarak integral quadrature'den yararlanılarak ortaya çıkarılmış bir metottur.

#### 3.1 İntegral Quadrature

$f(x)$  fonksiyonu,  $[a,b]$  aralığında bir fonksiyon olsun. Bu  $\int_a^b f(x)dx$  integrali

Şekil 3.1'deki  $f(x)$  eğrisinin altında kalan alan integralin değerini gösterecektir.



Şekil 3.1:  $f(x)$  fonksiyonunun  $[a,b]$  aralığındaki integrali

$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  değerleri ağırlıklı katsayıları,  $a = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$  düğüm noktaları ve  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sırasıyla düğüm noktalarındaki fonksiyon değerleri olmak üzere  $\int_a^b f(x)dx$  integrali;

$$\int_a^b f(x)dx = w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3 + \dots + w_n f_n = \sum_{k=1}^n w_k f_k \quad (3.1)$$

olarak hesaplanmakta ve bu ifadeye integral quadrature denilir.

Genel olarak düğüm noktaları düzgün bir dağılım verecek şekilde seçilir. Burada  $i = 2, 3, \dots, n$  ve  $h$  adım büyüklüğü olmak üzere  $x_i = x_{i-1} + h$  olarak bulunmaktadır. Denklem (3.1)'e ait ağırlıklı katsayılar ile ilgili iki özel durum bulunmaktadır. Bunlardan birincisi Yamuk (Trapezoidal) kuralı, diğeri ise Simpson üçte bir kuralıdır.

Yamuk (Trapezoidal) kuralı;

$$w_1 = h/2, w_2 = w_3, \dots, w_{n-1} = h, w_n = h/2 \quad (3.2)$$

Simpson üçte bir kuralı;

$$w_k = \begin{cases} \frac{h}{3}, & k = 1, n \\ \frac{4h}{3}, & k = 2, 4, 6, \dots, n-2 \\ \frac{2h}{3}, & k = 3, 5, 7, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3.3)$$

ile ifade edilmektedir.

### 3.2 Diferansiyel Quadrature

Diferansiyel quadrature metodu integral quadrature metodunu geliştirerek ortaya çıkmış bir metottur.

$f(x)$  fonksiyonu bir fonksiyon ve  $x_i$  düğüm noktaları olsun.

$$f'(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot f(x_j), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

$f(x_j)$ ,  $x_j$  olan her bir düğüm noktasındaki fonksiyon değeridir.  $f'(x_i)$ ,  $x_i$  noktasındaki  $f(x)$  fonksiyonun birinci dereceden türevi demektir.  $a_{ij}$  ise birinci dereceden türevler için ağırlıklı katsayılar ifadesidir. Diferansiyel quadrature metodunda en önemli husus ağırlıklı katsayıların hesaplanmasıdır.

Bu ağırlıklı katsayıların hesaplanmasında farklı yaklaşımlar ortaya atılmıştır.

### 3.3 Birinci Mertebeden Türevler İçin Ağırlık Katsayıları Hesabı

Bu bölümde birinci mertebeden türevlerin ağırlıklı katsayılar hesabında kullanılan yaklaşımlar ve bunlar arasındaki bağıntıların nasıl olduğu ele alınmıştır.

#### 3.3.1 Bellman Yaklaşımı

Bellman (3.4) eşitliğindeki  $a_{ij}$  ağırlık katsayısının belirlenmesinde iki yaklaşımda bulunmuştur. Bu yaklaşımlarda farklı test fonksiyonları kullanılmıştır.

##### 3.3.1.1 Bellman Birinci Yaklaşımı

Bellman bu yaklaşımda test fonksiyonu olarak;

$$r_k(x) = x^k, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.5)$$

şeklinde bir fonksiyon kullanmıştır. Bu denklem ile N adet test fonksiyonu ortaya çıkacaktır. Eşitlik (3.4)'e göre  $a_{ij}$  ağırlık katsayısındaki i ve j değerleri alınır. Böylece toplam NxN tane ağırlık katsayısı elde edilecektir. Bu ağırlıklı katsayılar N tane test fonksiyonuna N tane düğüm noktası uygulanarak NxN tane denklem elde edilecektir.

Burada oluşan denklemleri sistemi şu şekildedir;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & \dots & x_{N-1} & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & \dots & x_{N-1}^2 & x_N^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \dots & \dots & x_{N-1}^3 & x_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \dots & \dots & x_{N-1}^{N-1} & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_i \\ 3x_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N-1x_i^{N-2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Bu denklem sisteminde ağırlıklı katsayılar matrisi Vandermonde formunda ve tek bir çözümü vardır. N değeri yüksek olursa matrisin determinantı alınırken karışacak ve zorlaşacaktır. Bunun için bu yaklaşımda N değeri 13'ten fazla olmamalıdır.

### 3.3.1.2 Bellman İkinci Yaklaşımı

Bellman bu yaklaşımda test fonksiyonu olarak ötelenmiş Legendre fonksiyonunu kullanmıştır.

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, k=1,2,\dots,N \quad (3.7)$$

Bu denklemde  $L_N(x)$  ötelenmiş Legendre fonksiyonu  $L_N^{(1)}(x)$  ise ötelenmiş Legendre fonksiyonun birinci dereceden türevidir. Burada  $x_k$  ötelenmiş Legendre fonksiyonun köküdür ve ağırlıklı katsayılar N tane düğüm noktasını kullanarak oluşturulur.  $i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$a_{ij} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)L_N^{(1)}(x_j)}, i \neq j \quad (3.8)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$a_{ii} = \frac{1-2x_i}{2x_i(x_i-1)} \quad (3.9)$$

### 3.3.2 Quan-Chang Yaklaşımı

Quan-Chang ikilisi bu yaklaşımda test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomunu kullanmıştır.

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x-x_k)M^{(1)}(x_k)}, k=1,2,\dots,N \quad (3.10)$$

Burada (3.10) eşitliğinde  $M(x)$  ;

$$M(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) \quad (3.11)$$

$M^1(x_k)$ ,  $M(x)$  'in birinci dereceden türevidir. Bu da

$$M^1(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (3.12)$$

şeklindedir.

Test fonksiyonu ile beraber N tane düğüm noktası kullanarak ağırlıklı katsayılar oluşturulur.  $i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$a_{ij} = \frac{1}{(x_j - x_i)} \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{(x_i - x_k)}{(x_j - x_k)}, i \neq j \quad (3.13)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$a_{ii} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_k)} \quad (3.14)$$

### 3.3.3. Shu Genel Yaklaşımı

Shu genel yaklaşımı Bellman'ın yaklaşımı ile ortaya çıkmıştır. Aynı zamanda bu yaklaşım diğer yaklaşımları da içerir. Bu yaklaşım iki sorundan dolayı ortaya çıkmıştır. Bu sorunlardan ilki, Bellman'ın ağırlıklı katsayı hesabında iki yaklaşımı da kullanmasıdır. Diğer sorun ise bu iki yaklaşım ile sonuçların aynı olmasıdır. Shu bunun üzerine bir yöntem geliştirerek başka bir yaklaşım elde etmiştir. Burada Shu aşağıdaki polinomları kullanmıştır;

$$r_k(x) = x^{k-1}, k = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

$$g_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, k = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

$$g_k(x) = \frac{M(x)}{(x-x_k)M^{(1)}(x_k)}, k=1,2,\dots,N \quad (3.17)$$

$$r_1(x) = 1, r_k(x) = (x-x_{k-1})r_{k-1}(x), k=2,3,\dots,N \quad (3.18)$$

Bu polinomlar ile ağırlıklı katsayıları veren denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.  $i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$a_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)M^{(1)}(x_j)}, i \neq j \quad (3.19)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$a_{ii} = \frac{M^{(2)}(x_i)}{2M^{(1)}(x_i)} \quad (3.20)$$

$a_{ii}$  şu şekilde de bulunabilir:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 0 \rightarrow a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} \quad (3.21)$$

### 3.4 İkinci Mertebeden Türevler İçin Ağırlık Katsayıları Hesabı

Bu bölümde ikinci mertebeden türevlerin ağırlıklı katsayılar hesabında kullanılan yaklaşımlar ve bunlar arasındaki bağıntıların nasıl olduğu ele alınmıştır.

#### 3.4.1 İkinci Mertebeden Türevler İçin Ağırlık Katsayıları Hesabı

İkinci mertebeden türevlerin ağırlık katsayıları hesabında birinci mertebede olduğu gibi aşağıdaki yaklaşımla bulunabilir.

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} \cdot f(x_j), i=1,2,\dots,N \quad (3.22)$$

Burada  $f^{(2)}(x_i)$  ,  $(x_i)$  noktasındaki  $f(x)$  denkleminin ikinci mertebeden türevidir.  $a_{ij}^{(2)}$  ise ikinci mertebeden türevler için ağırlık katsayısıdır. Birinci ve ikinci mertebeden türevler arasındaki temel fark ağırlıklı katsayıların hesaplanmasıdır. İkinci mertebeden türevlerin ağırlıklı katsayılar hesabında kullanılan iki yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlar Quan-Chang ve Shu genel yaklaşımıdır.

### 3.4.1.1 Quan-Chang Yaklaşımı

Quan-Chang ikilisi bu yaklaşımda test fonksiyonu olarak Lagrange interpolasyon polinomunu kullanmıştır. Test fonksiyonu ile beraber N tane düğüm noktası kullanarak ağırlıklı katsayılar oluşturulur.  $i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$a_{ij}^{(2)} = \frac{2}{(x_j - x_i)} \left( \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{(x_i - x_k)}{(x_j - x_k)} \right) \left( \sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right), i \neq j \quad (3.23)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$a_{ii}^{(2)} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left[ \frac{1}{(x_i - x_k)} \left( \sum_{l=k+1, l \neq i}^N \frac{1}{(x_i - x_l)} \right) \right] \quad (3.24)$$

### 3.4.1.2 Shu Genel Yaklaşımı

Shu genel yaklaşımında ağırlıklı katsayılar birinci mertebeden türev hesabına benzer şekilde bulunur.

$i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$a_{ij}^{(2)} = 2a_{ij}^{(1)} \left( a_{ii}^{(1)} - \frac{1}{(x_i - x_j)} \right), i \neq j \quad (3.25)$$

$a_{ii}^{(2)}$  şu şekilde de bulunabilir:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} = 0 \rightarrow a_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(2)} \quad (3.26)$$

### 3.5 Matris Çarpımı Yaklaşımı

Diferansiyel operatör tanımıyla aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (3.27)$$

Diferansiyel quadrature form denklemi (3.27) eşitliğinin sol tarafına uygulanırsa denklem şu şekilde olacaktır:

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(2)} \cdot f(x_j), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.28)$$

Diferansiyel quadrature form denklemi (3.27) eşitliğinin sağ tarafına uygulanırsa denklem şu şekilde olacaktır:

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} f_x^{(1)}(x_k) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{kj}^{(1)} f(x_j), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.29)$$

Bu (3.29) eşitliğindeki denklemi sadeleştirirsek;

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)} \right] f(x_j), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.30)$$

Burada (3.29) ve (3.30) eşitliğindeki iki denklem birleştirildiğinde aşağıdaki ana denklem elde edilir:

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)} \quad (3.31)$$

Bu (3.31) eşitliğindeki denklem matris formunda şu şekilde yazılır:

$$[A^{(2)}] = [A^{(1)}][A^{(1)}] \quad (3.32)$$

$f(x)$  denkleminin  $n$ . dereceden türevi de şu şekilde yazılır:

$$\frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^{(n)}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^{(n-1)} f}{\partial x^{(n-1)}} \right) = \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial x^{(n-1)}} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (3.33)$$

$f(x)$  denkleminin  $n$ . dereceden türevi matris formunda şu şekilde yazılır:

$$[A^{(n)}] = [A^{(1)}][A^{(n-1)}] = [A^{(n-1)}][A^{(1)}], n = 2, 3, \dots, k-1 \quad (3.34)$$

Burada örnek olarak 0 ile L arasında 5 düğüm noktası için birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayıları verilmiştir:

$$[A^{(1)}] = L \begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \\ 1/3 & -8/3 & -5/3 & 8/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Burada örnek olarak 0 ile L/2 arasında 5 düğüm noktası için birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayıları verilmiştir:

$$[A^{(1)}] = L/2 \begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \\ 1/3 & -8/3 & -5/3 & 8/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$[A^{(1)}] = L \begin{bmatrix} -50/3 & 32 & -24 & 32/3 & -2 \\ -2 & -20/3 & 12 & -4 & 2/3 \\ 2/3 & -16/3 & -10/3 & 16/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4 & -12 & 20/3 & 2 \\ 2 & -32/3 & 24 & -32 & 50/3 \end{bmatrix}$$

Burada örnek olarak 0 ile  $L/2$  arasında 9 düğüm noktası için (3.35) ve (3.36) numaralı denklemleri kullanarak birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayıları şu şekilde bulunur:

$$[A^{(1)}] = L \begin{bmatrix} -50/3 & 32 & -24 & 32/3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -20/3 & 12 & -4 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -16/3 & -10/3 & 16/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -16/3 & -10/3 & 16/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -16/3 & -10/3 & 16/3 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & -16/3 & -10/3 & 16/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -16/3 & -10/3 & 16/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & 4 & -12 & 20/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -32/3 & 24 & -32 & 50/3 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

### 3.6 Düğüm Noktaları

Bu bölümde diferansiyel quadrature metodunda kullanılan düğüm noktaları üzerinde değinilecektir. Problemlerde sonuçların doğruya yakın ve hassas olmasını istiyorsak düğüm noktaları sayısı ve seçimi çok önemlidir.

#### 3.6.1 Eşit Aralıklı Düğüm Noktaları Dağılımı

Düğüm noktaları seçiminde sık kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde lineer bir düzlem üzerinde bulunan her düğüm noktası arasındaki adım uzunluğu birbirine eşittir. Burada  $N$  düğüm sayısı,  $0 \leq x \leq a$  aralığında ve  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere;

$$x_i = \frac{i-1}{N-1} a \quad (3.38)$$

Eşitlik (3.38) ile her bir düğüm noktasındaki değer hesaplanabilir.

İki düğüm noktası arasındaki fark şu şekilde bulunur:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_n - x_{n-1} \quad (3.39)$$

Daha farklı bir ifade ile şöyle de bulunabilir:

$$x_j - x_i = \Delta x(j-i) \quad (3.40)$$

**Tablo 3.1:** N=6 nokta için eşit aralıklı düğüm noktaları dağılımı

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0.20  | 0.40  | 0.60  | 0.80  | 1     |

Eşit aralıklı düğüm noktaları hesabı pratik ve kolay olduğundan dolayı en çok tercih edilen bir yöntemdir.

### 3.6.2 Düzgün Olmayan Düğüm Noktaları Dağılımı

Burada N düğüm sayısı,  $0 \leq x \leq a$  aralığında ve  $i = 1, 2, \dots, n$  olmak üzere;

$$x_i = \frac{1 - \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{N-1}\right]}{2} a \quad (3.41)$$

Eşitlik (3.41) ile her bir düğüm noktasındaki değer hesaplanabilir.

**Tablo 3.2:** N=6 nokta için düzgün olmayan düğüm noktaları dağılımı

| $x_1$ | $x_2$  | $x_3$  | $x_4$  | $x_5$   | $x_6$ |
|-------|--------|--------|--------|---------|-------|
| 0     | 0.0955 | 0.3455 | 0.6545 | 0.90451 | 1     |

Sınır şartlarının tanımlandığı matrise bir örnek ile değerlendirelim:

Örneğin bir fonksiyonun sınır şartının tanımlandığı ilk düğüm noktasındaki türevi sıfır olduğunu varsayalım. Buna göre  $y^{(1)}(1) = 0$  olacaktır. Bu sınır şartlarının girildiği birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayılar matrisi yazımı şu şekilde olacaktır.

$$ax1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

#### 4. TEKRARLAMALI DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMLEMESİ

Önceki bölümlerde ağırlıklı katsayılar matrisinin nasıl bulunduğunu anlatılmıştı. Burada bir diferansiyel denklem sisteminin tekrarlamalı diferansiyel quadrature metodu ile nasıl çözüleceği incelenecektir. Örnek olarak (4.1) numaralı denklemi kullanalım:

$$y = e^x - 2x - 1 \rightarrow x \in [0,1] \quad (4.1)$$

Burada fonksiyonun birinci türevini diferansiyel quadrature metodu formunda yazabilmek için aşağıdaki (4.2) numaralı denklemde görüldüğü gibi “ $ax$ ” ağırlıklı katsayılar matrisi ile çarpılır. Dördüncü mertebeden türev için dört defa ağırlıklı katsayılar matrisi ile çarpılarak bulunur.

$$y^{(1)} = ax.y \quad (4.2)$$

$$y^{(2)} = ax.ax.y \quad (4.3)$$

$$y^{(3)} = ax.ax.ax.y \quad (4.4)$$

$$y^{(4)} = ax.ax.ax.ax.y \quad (4.5)$$

Daha yüksek mertebeden türev için şu şekilde bulunmaktadır.

$$y^{(n)} = ax.ax.ax\dots n(\text{adet})\dots ax.y \quad (4.6)$$

Örnek olarak ele aldığımız (4.1) numaralı denklemin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden türevleri 5 nokta ve 11 nokta dağılımına göre Tablo (4.1) ve Tablo (4.2)'de verilmiştir. Düğüm noktaları arttıkça ağırlıklı katsayılar matrisini hesaplamak zorlaşır ve sonuçlar gerçek değerden uzaklaşabilir. Bunun için ideal nokta dağılımını belirlemek gerekir.

**Tablo 4.1:** Eşit aralıklı N=5 nokta için (4.1) numaralı denklemin türevleri

| N | x    | y           | $y^{(1)}$   | $y^{(2)}$   | $y^{(3)}$  | $y^{(4)}$  |
|---|------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|
| 1 | 0    | 0           | -0.00017274 | -0.98628258 | 0.85091410 | 1.67464411 |
| 2 | 0.25 | -0.02837603 | -0.21579126 | -0.72122142 | 1.26957513 | 1.67464411 |
| 3 | 0.5  | -0.10128326 | -0.35206134 | -0.35149501 | 1.68823616 | 1.67464411 |
| 4 | 0.75 | -0.19561380 | -0.38281666 | 0.12289666  | 2.10689719 | 1.67464411 |
| 5 | 1    | -0.28171817 | -0.28189091 | 0.70195358  | 2.52555822 | 1.67464411 |

**Tablo 4.2:** Eşit aralıklı N=11 nokta için (4.1) numaralı denklemin türevleri

| N  | x   | y           | $y^{(1)}$       | $y^{(2)}$   | $y^{(3)}$  | $y^{(4)}$  |
|----|-----|-------------|-----------------|-------------|------------|------------|
| 1  | 0   | 0           | -8.87068197e-14 | -0.99999999 | 0.99999999 | 1.00000054 |
| 2  | 0.1 | -0.00482908 | -0.09482908     | -0.89482908 | 1.10517092 | 1.10517091 |
| 3  | 0.2 | -0.01859724 | -0.17859724     | -0.77859724 | 1.22140276 | 1.22140275 |
| 4  | 0.3 | -0.04014119 | -0.25014119     | -0.65014119 | 1.34985881 | 1.34985881 |
| 5  | 0.4 | -0.06817530 | -0.30817530     | -0.50817530 | 1.49182470 | 1.49182469 |
| 6  | 0.5 | -0.10127873 | -0.35127873     | -0.35127873 | 1.64872127 | 1.64872127 |
| 7  | 0.6 | -0.13788120 | -0.37788120     | -0.17788120 | 1.82211880 | 1.82211880 |
| 8  | 0.7 | -0.17624729 | -0.38624729     | 0.01375271  | 2.01375271 | 2.01375270 |
| 9  | 0.8 | -0.21445907 | -0.37445907     | 0.22554093  | 2.22554092 | 2.22554093 |
| 10 | 0.9 | -0.25039689 | -0.34039689     | 0.45960311  | 2.45960311 | 2.45960311 |
| 11 | 1   | -0.28171817 | -0.28171817     | 0.71828183  | 2.71828181 | 2.71828123 |

#### 4.1 Lineer Diferansiyel Denklemin Tekrarlamalı Diferansiyel Quadrature ile Çözülmesi

Düğüm sayısı ve ağırlıklı katsayılar matrisi kullanarak lineer diferansiyel sistemi istenilen aralıkta çözümü yapılmaktadır. Örnek olarak (4.7) numaralı denklemi kullanalım:

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 2x + 1 \rightarrow y(0) = 1 \quad (4.7)$$

Örnek olarak alınan (4.7) numaralı lineer denklemin  $y(0) = 1$  değerine göre gerçek çözümü (4.8) numaralı denklemde verilmiştir:

$$y(x) = -x + e^{2x} \quad (4.8)$$

Diferansiyel quadrature metodu ile gerçekleştirilen adi diferansiyel denklemin çözümünde fonksiyonun düğüm noktalarındaki değerlerini bulmak için Newton-Raphson İterasyon metodu kullanılır. Buna Newton-Raphson diferansiyel quadrature metodu veya tekrarlamalı diferansiyel quadrature metodu denilir. Buna ait denklem şu şekildedir:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (4.9)$$

Burada belirtilen fonksiyonun  $x_i$  noktasındaki türevine Frechet türevi denilir.

Newton-Raphson iterasyon metodunda bulunan sonuçlar ile gerçek sonuçlar arasındaki bağıl hata şu şekilde hesaplanır:

$$\mathcal{E} = \frac{|y_{gerçek} - y_{hesaplanan}|}{y_{gerçek}} \quad (4.10)$$

Örnek olarak alınan (4.7) numaralı denklemin diferansiyel quadrature metodunda yazımı şu şekildedir:

$$f(x_i) = ax.y + 2y - 2x + 1 \quad (4.11)$$

Newton-Raphson metodu formunda olduğu gibi (4.11) numaralı denklemin türevli hali şu şekilde olacaktır.

$$f'(x_i) = ax.f(x_i) = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial(x_i)} \quad (4.12)$$

(4.12) numaralı denklemde farklı ifade edilen kısım Newton-Raphson metodu formunda buna “Jacobien matrisi” olarak adlandırılır. Diferansiyel quadrature metodu formunda yazılan (4.7) numaralı denklem sisteminin çözümü (4.13) numaralı denklem ile tekrarlamalı diferansiyel quadrature metodu şeklinde gösterilmiştir.

$$y_{i+1}(x) = y_i(x) - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (4.13)$$

Örnek olarak verdiğimiz (4.7) numaralı denklem birinci mertebeden lineer bir diferansiyel sistemi olduğundan tekrarlamaya gerek duymadan 5 düğüm noktası ve 11 düğüm noktası ile elde edilen sonuçlar gerçek sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. (4.10) numaralı denklem ile bağıl hatası hesaplanmış ve bu veriler Tablo (4.3), Tablo (4.4), Tablo (4.5) ve Tablo (4.6) numaralı tablolarda gösterilmiştir. Bu tablolarda gösterilen değerler virgülden sonraki 8 hane alınarak elde edilmiştir.

**Tablo 4.3:** Eşit aralıklı 5 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin sonuçları ve bağıl hatası

| N | x    | Gerçek Sonuç | Hesaplanan Sonuç | Bağıl Hata    |
|---|------|--------------|------------------|---------------|
| 1 | 0    | 1            | 1                | -             |
| 2 | 0.25 | 1.39872127   | 1.40834273       | 0.00687875434 |
| 3 | 0.5  | 2.21828182   | 2.23045296       | 0.00548674199 |
| 4 | 0.75 | 3.73168907   | 3.74759358       | 0.00426201372 |
| 5 | 1    | 6.38905609   | 6.42633591       | 0.00583494956 |

**Tablo 4.4:** Eşit aralıklı 7 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin sonuçları ve bağıl hatası

| N | x   | Gerçek Sonuç | Hesaplanan Sonuç | Bağıl Hata    |
|---|-----|--------------|------------------|---------------|
| 1 | 0   | 1            | 1                | -             |
| 2 | 1/6 | 1.22894575   | 1.22900469       | 4.79598062e-5 |
| 3 | 2/6 | 1.61440070   | 1.61445663       | 3.46444349e-5 |
| 4 | 3/6 | 2.21828182   | 2.21836958       | 3.95621509e-5 |
| 5 | 4/6 | 3.12700122   | 3.12713505       | 4.27981924e-5 |
| 6 | 5/6 | 4.46115671   | 4.46131453       | 3.53764753e-5 |
| 7 | 1   | 6.38905609   | 6.38933687       | 4.39470238e-5 |

**Tablo 4.5:** Eşit aralıklı 9 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin sonuçları ve bağıl hatası

| N | x     | Gerçek Sonuç | Hesaplanan Sonuç | Bağıl Hata    |
|---|-------|--------------|------------------|---------------|
| 1 | 0     | 1            | 1                | -             |
| 2 | 0.125 | 1.15902541   | 1.15902569       | 2.41582467e-7 |
| 3 | 0.25  | 1.39872127   | 1.39872153       | 1.85884068e-7 |
| 4 | 0.375 | 1.74200001   | 1.74200040       | 2.23880596e-7 |
| 5 | 0.5   | 2.21828182   | 2.21828231       | 2.20891632e-7 |
| 6 | 0.625 | 2.86534295   | 2.86534356       | 2.12889002e-7 |
| 7 | 0.75  | 3.73168907   | 3.73168989       | 2.19739637e-7 |
| 8 | 0.875 | 4.87960267   | 4.87960365       | 2.00836024e-7 |
| 9 | 1     | 6.38905609   | 6.38905762       | 2.39471994e-7 |

**Tablo 4.6:** Eşit aralıklı 11 düğüm noktası için (4.7) numaralı denklemin sonuçları ve bağıl hatası

| N  | x   | Gerçek Sonuç | Hesaplanan Sonuç | Bağıl Hata    |
|----|-----|--------------|------------------|---------------|
| 1  | 0   | 1            | 1                | -             |
| 2  | 0.1 | 1.12140275   | 1.12140276       | 8.91740296e-9 |
| 3  | 0.2 | 1.29182469   | 1.29182470       | 7.7409884e-9  |
| 4  | 0.3 | 1.52211880   | 1.52211880       | 8.5866495e-10 |
| 5  | 0.4 | 1.82554092   | 1.82554093       | 5.47782857e-9 |
| 6  | 0.5 | 2.21828182   | 2.21828183       | 4.50799716e-9 |
| 7  | 0.6 | 2.72011692   | 2.72011693       | 3.67631254e-9 |
| 8  | 0.7 | 3.35519996   | 3.35519997       | 2.98044828e-9 |
| 9  | 0.8 | 4.15303242   | 4.15303243       | 2.40787909e-9 |
| 10 | 0.9 | 5.14964746   | 5.14964747       | 1.94188049e-9 |
| 11 | 1   | 6.38905609   | 6.38905610       | 1.56517642e-9 |

Bu tablolara göre 5 düğüm noktası alınan verilerdeki sonuçlar gerçek sonuca göre virgülden sonra bir haneye kadar doğru sonucu vermiştir. 11 düğüm noktası alınan verilerdeki sonuçlar ise gerçek sonuca göre virgülden sonra yedi haneye kadar ve bağıl hataya göre de doğru sonucu verdiği tespit edilmiştir. Bu tablolardan anlaşılacağı üzere düğüm noktası ne kadar çok olursa istenilen sonuç o kadar yakın olmaktadır. Önceki bölümlerde düğüm noktaları arttıkça katsayılar matrisini hesaplamak zorlaştığını söylemiştik bu da yanlış yapma ihtimalini artırır bunun için düğüm noktaları için ideal nokta dağılımının belirlenmesi gerekir.

## 4.2 Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemin Tekrarlamalı Diferansiyel Quadrature İle Çözülmesi

Düğüm sayısı ve ağırlıklı katsayılar matrisi kullanarak lineer olmayan diferansiyel sistemi istenilen aralıkta çözümü yapılmaktadır. Örnek olarak (4.14) numaralı denklemini kullanalım:

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \rightarrow y(0) = 1, y'(0) = 2 \quad (4.14)$$

Örnek olarak alınan (4.14) numaralı lineer olmayan denklemin gerçek çözümü aşağıdaki (4.15) numaralı denklemde verilmiştir:

$$y(x) = x^2 + 2x + 1 \quad (4.15)$$

Lineer olmayan denklemlerde lineer denklemler gibi (4.14) numaralı denklem ile çözülebilmektedir. Burada tek fark (4.15) numaralı denklemin  $f_1$  ve  $f_2$  değerlerinin aşağıdaki gibi ifade edilmesidir.

$$f_1 = y \cdot (ax \cdot ax \cdot y) + ax \cdot y + y \quad (4.16)$$

$$f_2 = \tilde{y} \cdot ax \cdot ax \cdot y + y \cdot ax \cdot ax \cdot \tilde{y} + ax \cdot \tilde{y} + \tilde{y} \quad (4.17)$$

## 5. ÇOK BOYUTLU DURUMLAR İÇİN GENİŞLETME

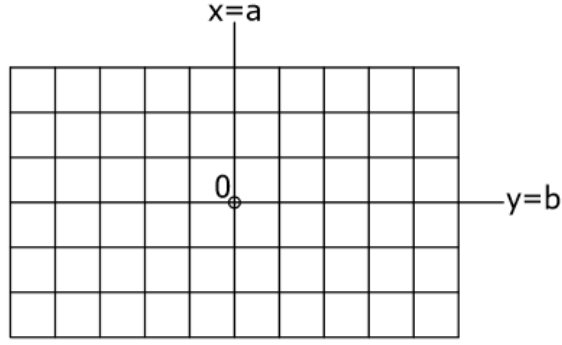
Bir önceki bölümde gösterilen denklemler tek boyutludur. Bu nedenle, tek boyutlu durumdan çok boyutlu durumlara genişletmek gerekecektir. Önce iki boyutlu durumun tek boyutlu durum arasındaki bağıntı incelenecektir. Ardından aynı bağıntılarla üç boyutlu durum bulunacaktır. Bu bölümde çok boyutlu durumlar için genişletmenin nasıl yapılacağı ve aralarındaki bağıntı incelenecektir.

### 5.1 Düzenli Alan İçin Doğrudan Bağıntı

Tek boyutlu ağırlıklı katsayıların matrisleri nasıl bulunacağı Bölüm 5’de açıklanmıştı. Burada iki veya üç boyutlu problemlerde kullanılan ağırlıklı katsayılar matrisi tek boyutlu ağırlık katsayılar matrisi arasındaki doğrudan bağıntıya değinilecektir.

DQ yaklaşımı aslında polinom yaklaşımlarına dayanmaktadır. Düzenli ve düzensiz alanlar için polinom yaklaşımları farklıdır. Bu yüzden DQ yaklaşımının düzenli ve düzensiz alanlara genişletilmesi farklı olacaktır.

Shu (1991) tarafından gösterildiği gibi, tek boyutlu polinomal diferansiyel quadrature (PDQ) formülasyonları, ayrıklaştırma alanı düzenli ise doğrudan çok boyutlu duruma genişletilebilir. Alan olarak üçgen, daire ve dikdörtgen gibi basit şekiller olabilir. Şekil 5.1’deki gibi dikdörtgen örnek verilebilir. Şekil 5.1’deki dikdörtgen bir alanda tanımlanan iki boyutlu bir  $f(x,y)$  fonksiyonu,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağımlı bir fonksiyon olduğu göz önünde bulundurulur. Burada, her yatay ve dikey çizgi boyunca  $x$  ve  $y$  aralığının aynı olduğu, aynı yatay ve dikey çizgilerle  $x$  ve  $y$  koordinat dağılımı için kullanabiliriz.



Şekil 5.1: Dikdörtgen için koordinat sistemi gösterimi

Şekil 5.1'e göre herhangi bir konumunda  $f(x, y)$  fonksiyonunun değeri yaklaşık olarak;

$$f(x, y) \approx P_{NxM}(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \bar{c}_{ij} \cdot x^{i-1} \cdot y^{j-1} \quad (5.1)$$

Burada  $\bar{c}_{ij}$  katsayıdır.  $P_{NxM}(x, y)$  ise  $N \times M$  boyutlu vektör uzayının ( $V_{NxM}$ ) oluşturduğu alandır.

Bu polinomlar ile  $N \times M$  boyutlu vektör uzayının oluşturduğu ağırlıklı katsayıları veren denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Eğer  $i = j = 1, 2, \dots, N$  ise;

$i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$a_{ij}^x = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}, i \neq j \quad (5.2)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$a_{ii}^x = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^x \quad (5.3)$$

Eğer  $i = j = 1, 2, \dots, M$  ise;

$i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$a_{ij}^y = \frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j)P^{(1)}(y_j)}, i \neq j \quad (5.4)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$a_{ii}^y = - \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij}^y \quad (5.5)$$

Benzer şekilde ikinci ve daha yüksek mertebeden türevler için ağırlıklı katsayıların tekrarlama ilişkisi aşağıdaki gibi olacaktır:

Eğer  $n = 2, 3, \dots, N-1$  ise;

$i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$w_{ij}^{(n)} = n \left( a_{ij}^x \cdot w_{ii}^{(n-1)} - \frac{w_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), i \neq j \quad (5.6)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$w_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ij}^{(n)} \quad (5.7)$$

Eğer  $m = 2, 3, \dots, M-1$  ise;

$i \neq j$  olduğu durumda oluşan denklem;

$$\bar{w}_{ij}^{(m)} = m \left( a_{ij}^y \cdot \bar{w}_{ii}^{(m-1)} - \frac{\bar{w}_{ij}^{(m-1)}}{y_i - y_j} \right), i \neq j \quad (5.8)$$

Eğer  $i = j$  ise denklem şu şekilde olacaktır:

$$\bar{w}_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^M \bar{w}_{ij}^{(m)} \quad (5.9)$$

Burada  $w_{ij}^{(n)}$  ve  $\bar{w}_{ij}^{(m)}$ ,  $f(x, y)$  denkleminin n'inci ve m'inci mertebeden türevlerin ağırlıklı katsayılarıdır. Diğer bir deyişle  $f_x^{(n)}(x_i, y_j)$  ve  $f_y^{(m)}(x_i, y_j)$  fonksiyonları sırasıyla  $f(x, y)$  fonksiyonunun  $x$  ve  $y$  koordinatlarındaki  $(x_i, y_j)$  noktalarına göre yazımıdır.

Eğer  $i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N-1; m = 1, 2, \dots, M-1$  olduğu durumda  $f_x^{(n)}(x_i, y_j)$  ve  $f_y^{(m)}(x_i, y_j)$  fonksiyonları şu şekilde ifade edilebilir:

$$f_x^{(n)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^N w_{ik}^{(n)} \cdot f(x_k, y_j) \quad (5.10)$$

$$f_y^{(m)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^M \bar{w}_{jk}^{(m)} \cdot f(x_i, y_k) \quad (5.11)$$

Tüm düğüm noktalarındaki fonksiyonun değerleri elde edilirse, Lagrange interpolasyon polinomları kullanarak herhangi bir yerdeki fonksiyonun değerini bulmak kolaydır. Burada yatay  $y = y_j$  düğüm noktaları boyunca fonksiyonun değeri şu şekilde hesaplanır:

$$f(x, y_j) = \sum_{i=1}^N f(x_i, y_j) r_i(x), j = 1, 2, \dots, M \quad (5.12)$$

Dikeyde  $x = x_i$  düğüm noktaları boyunca fonksiyonun değeri şu şekilde hesaplanır:

$$f(x_i, y) = \sum_{j=1}^M f(x_i, y_j) s_j(y), i = 1, 2, \dots, N \quad (5.13)$$

Koordinat düzleminin herhangi bir yerindeki fonksiyonun değeri şu şekilde hesaplanır:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(x_i, y_j) \cdot r_i(x) \cdot s_j(y) \quad (5.14)$$

(5.12), (5.13) ve (5.14) denklemlerindeki  $r_i(x)$  ve  $s_j(y)$  değerleri Lagrange interpolasyon polinomlarıdır. Bu değerler şu şekilde bulunmaktadır:

$$r_i(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (5.15)$$

$$s_j(y) = \prod_{k=1, k \neq j}^M \frac{y - y_k}{y_j - y_k} \quad (5.16)$$

Genel olarak, geniş düğüm noktaları kullanarak doğru sonuçlar elde edilir. Sonrasında düğüm noktaları arasındaki mesafeyi azaltarak sonuçları yakınlaştırıp daha doğru sonuçlara ulaşmaya çalışılır.

## 5.2 Diferansiyel Küp Yöntemi

Normal alanlar için bir önceki bölümde anlatılan ve gösterilen formüller yeterlidir. Düzensiz bir alanda bu formüller doğrudan uygulanamaz. Uygulanması için bir koordinat dönüşümü gerekmektedir. Koordinat dönüşümü yapıldıktan sonra bir önceki konuda anlatıldığı gibi işlemler uygulanır. Bu bölümde Malik ve Civan'ın önerdiği diferansiyel küp yöntemi değinilecektir.

Diferansiyel küp yöntemini gösterebilmek için iki boyutlu bir durum ele alınacaktır. Bu yöntemde, iki boyutlu bir alandaki herhangi bir düğüm noktasındaki kısmi türevi, tüm iki boyutlu alandaki tüm fonksiyon değerlerinin doğrusal ağırlıklı toplamına yaklaşık olarak eşittir.

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \sum_{j=1}^{NM} c_{ij}^{x,n} \cdot f_j, i = 1, 2, \dots, NM \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^m} = \sum_{j=1}^{NM} c_{ij}^{y,m} \cdot f_j, i = 1, 2, \dots, NM \quad (5.18)$$

Bu yöntem düzensiz geometrik şekillerden oluşan problemlerin çözümü için ideal bir yöntemdir. Bunu yapabilmek için ilk başta (5.17) ve (5.18) denklemlerinde olduğu gibi kısmi türevlerin ayrıklaştırılması gerekmektedir. Bu yöntemde N değeri büyük olduğu zaman elde edilen denklemler sistemi büyük sıkıntıya sebep olmaktadır. Aynı zamanda düğüm noktaları ve test fonksiyonlarının sayısına eşit olması gerekmektedir. Bazı uygulamalarda eşit olmadığından Malik ve Civan bazı test fonksiyonları eklenmesi gerektiğini söylemiştir.

Bu yöntemin uygulanması bahsedilen zorluklar nedeniyle az düğüm noktası kullanan basit geometrik şekillerle sınırlandırılmıştır.

### 5.3 Kirişlerin Diferansiyel Quadrature Metodu ile Çökme Analizi

Euler-Bernoulli kiriş teorisi mühendislikte yaygın olarak kullanılan bir kiriş teorisidir. Bu teori ile kayma şekil yer değişimi ihmal edilerek eğim ve sehim çözümleri elde edilebilmektedir. İnce ve uzun kirişlerde doğal frekans çözümleri doğru olarak bulunurken, kısa ve kalın kirişlerde doğru çözüme ulaşamamaktadır.

Tek boyutlu izotropik bir malzemeden imal edildiği kabul edilen ince uzun kirişin elastiklik eğrisini veren Euler-Bernoulli denklemi (5.19) numaralı denklemde verilmiştir.

$$f(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5.19)$$

Burada E ve I ifadeleri kirişin elastisite modülü ve atalet momentini gösterir ve bu değer sabit kabul edilecek olursa (5.19) numaralı denklem sadeleştirildiğinde (5.20) numaralı denklem elde edilir. (5.20) numaralı denklemde  $q(x)$  kiriş üzerine gelen yayılı yükü ifade etmektedir.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) \quad (5.20)$$

Elastik bir kirişte üç farklı mesnet durumunda sınır şartları aşağıdaki gibi olacaktır. Ankastre mesnet durumunda;

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad (5.21)$$

Basit mesnet durumunda;

$$y = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (5.22)$$

Serbest uç durumunda;

$$y = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} = 0 \quad (5.23)$$

(5.20) numaralı denklemde verilen Euler-Bernoulli kirişinin titreşim ve sehim denklemini genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ifadesi (5.24) numaralı denklemde gösterilmiştir. Kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımını  $\rho A=1$  olarak ele alınıp ve sadeleştirmeler ile matris formunda genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ağırlıklı katsayılarının çarpımı (5.25) numaralı denklemde gösterilmiştir.

$$E \cdot I \cdot ax \cdot ax \cdot ax \cdot ax \cdot y(x) = q(x) \quad (5.24)$$

$$ax \cdot ax \cdot ax \cdot ax \cdot y(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot q(x) \quad (5.25)$$

### 5.3.1 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Basit Mesnetli Kirişin Çökme Analizi

Bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli olan bir Euler-Bernoulli kirişinin sınır şartlarını göz önünde bulundurarak ve kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımını  $\rho A=1$  olarak ele alındığında genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metoduna göre genel denklem (5.26) şu şekilde olacaktır.

$$ax \cdot ax \cdot dx^2 \cdot dx^1 \cdot y = \frac{1}{E \cdot I} \cdot q(x) \quad (5.26)$$

Burada  $dx^2$  ve  $dx^1$  ağırlıklı katsayıları matrislerinin  $ax$  ağırlık katsayıları matrisinin sırasıyla ikinci ve birinci türevlerdeki sınır şartlarının tanımlandığı matrislerdir.

### 5.3.2 İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Çökme Analizi

İki ucu basit mesnetli olan bir Euler-Bernoulli kirişinin sınır şartlarını göz önünde bulundurarak ve kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımını  $\rho A=1$  olarak ele

alındığında genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metoduna göre genel denklem (5.27) şu şekilde olacaktır.

$$ax \cdot ax \cdot dx^2 \cdot y = \frac{1}{E \cdot I} \cdot q(x) \quad (5.27)$$

Burada  $dx^2$  ağırlıklı katsayıları matrisinin  $ax$  ağırlık katsayıları matrisinin ikinci türevindeki sınır şartlarının tanımlandığı matristir.

### 5.3.3 Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Kirişin Çökme Analizi

Bir ucu ankastre diğer ucu serbest olan bir Euler-Bernoulli kirişinin sınır şartlarını göz önünde bulundurarak ve kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımı  $\rho A=1$  olarak ele alındığında genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metoduna göre genel denklem (5.28) şu şekilde olacaktır.

$$ax \cdot dx^3 \cdot dx^2 \cdot dx^1 \cdot y = \frac{1}{E \cdot I} \cdot q(x) \quad (5.28)$$

Burada  $dx^3$ ,  $dx^2$  ve  $dx^1$  ağırlıklı katsayıları matrislerinin  $ax$  ağırlık katsayıları matrisinin sırasıyla üçüncü, ikinci ve birinci türevlerdeki sınır şartlarının tanımlandığı matrislerdir.

### 5.3.4 İki Ucu Ankastre Kirişin Çökme Analizi

İki ucu ankastre diğer ucu serbest olan bir Euler-Bernoulli kirişinin sınır şartlarını göz önünde bulundurarak ve kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımı  $\rho A=1$  olarak ele alındığında genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metoduna göre genel denklem (5.29) şu şekilde olacaktır.

$$ax \cdot ax \cdot ax \cdot dx^1 \cdot y = \frac{1}{E \cdot I} \cdot q(x) \quad (5.29)$$

Burada  $dx^1$  ağırlıklı katsayıları matrislerinin  $ax$  ağırlık katsayıları matrisinin birinci türevindeki sınır şartlarının tanımlandığı matristir.

#### 5.4 Sabit Kalınlıkta İzotropik Plakanın Çökme Analizi

Sabit kalınlıkta ince izotropik plakanın çökme denklemi (5.30) numaralı denklemde verilmiştir.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (5.30)$$

Burada  $w = w(x,y)$  çökme denklemini,  $p$  plakanın üzerine uygulanan basıncı,  $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$  plakanın eğilme rijitliğini,  $E$  Elastisite modülünü,  $h$  plakanın kalınlığını ve  $\nu$  ise Poisson oranını gösterir. Burada (5.30) numaralı denklemi kolaylık açısından boyutsuz formda yazmamız gerekmektedir. Bu denklem (5.31) numaralı denklemde gösterilmiştir.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = \frac{pa^4}{D} \quad (5.31)$$

Burada  $W = w/\alpha$  boyutsuz çökme denklemi,  $\alpha$  ise referans uzunluğu  $X = x/a$  ve  $Y = y/b$  boyutsuz koordinatlar  $a$  ve  $b$  plakanın  $x$  ve  $y$  koordinatları boyunca uzunluğu ve genişliğidir. (5.31) numaralı denklem (5.32) numaralı denklemde gösterildiği gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} - \Omega^2 W = 0 \quad (5.32)$$

Burada  $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  ifade edilen değer boyutsuz frekans ve  $\omega$  ise dairesel frekans değeri olarak adlandırılır.

Basit mesnetli ve ankastre sınır şartında, plakanın enine çökmesi sıfır olmaktadır:

$$W=0 \quad (5.33)$$

Basit mesnetli sınır şartında, plakanın momenti x ve y yönlerinde sıfır olmaktadır:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \quad (5.35)$$

Ankastre ve kılavuz mesnet (guided) sınır şartında, plakanın dönmesi x ve y yönlerinde sıfır olmaktadır:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \quad (5.37)$$

Serbest sınır şartında, plakanın momenti x ve y yönlerinde sıfır olmaktadır:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0 \quad (5.38)$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} = 0 \quad (5.39)$$

Serbest ve kılavuz mesnet (guided) sınır şartında, plakanın kesme kuvveti x ve y yönlerinde sıfır olmaktadır:

$$\frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + (2 - \nu) \lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial Y^2} = 0 \quad (5.40)$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial Y} = 0 \quad (5.41)$$

İki bitişik kenarın köşesinde bulunan noktada ek bir sınır şartı tanımlanır:

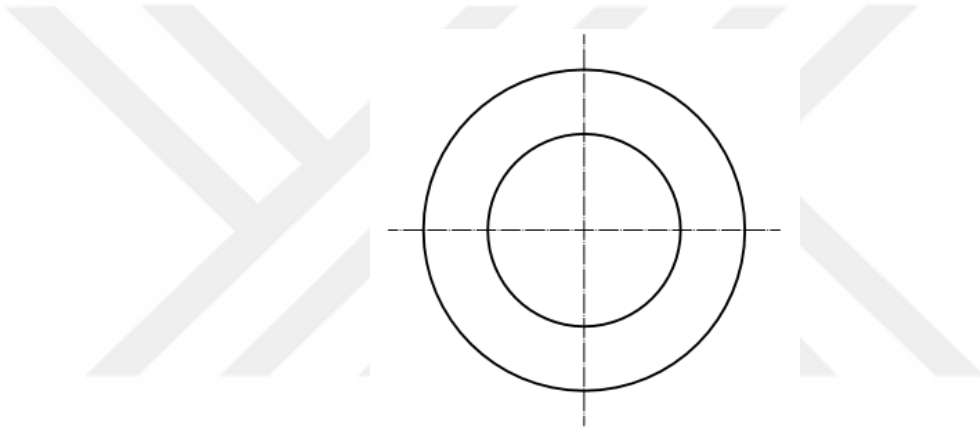
$$\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (5.42)$$

## 6. DAİRESEL SEKTÖR PLAKALARININ DİFERANSİYEL QUADRATURE İLE ÇÖKME ANALİZİ

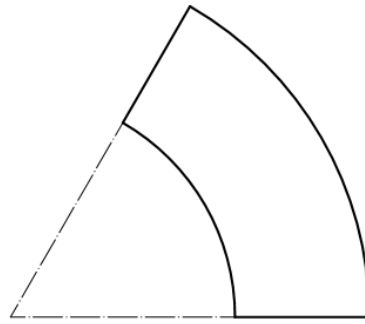
Belli bir kalınlıkta izotropik bir dairesel sektör plakaların çökme ve moment analizleri diferansiyel quadrature metodu ile nasıl yapılacağı incelenecektir.

### 6.1 Dairesel Sektör Plakalara Genel Bakış

Dairesel sektör plakası şekil olarak bir bilgisayar cd 'sinin (Şekil 6.1) belirli bir açıda kesildiği bir plaka (Şekil 6.2) olarak değerlendirilir.



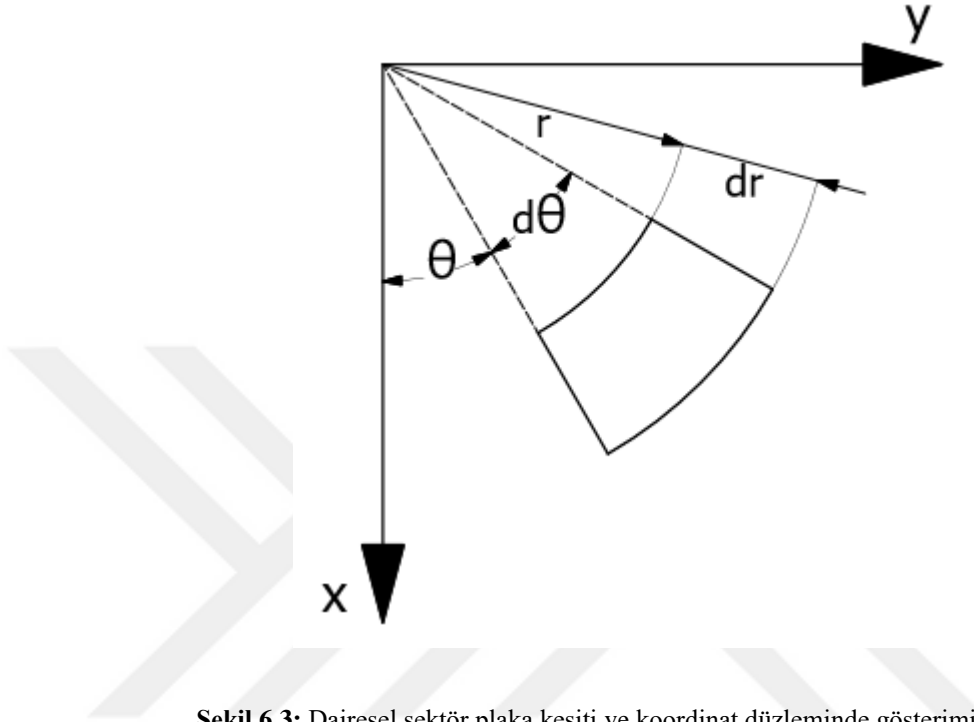
Şekil 6.1: Dairesel plaka



Şekil 6.2: Dairesel sektör plaka

## 6.2 Dairesel Sektör Plakasının Temel Denklemleri

Burada daireysel sektör plakasının sapma, moment ve diferansiyel denklemlerin nasıl elde edildiği anlatılacaktır. Bunun için temel ilişkilere değinilecektir.



Şekil 6.3: Dairesel sektör plaka kesiti ve koordinat düzleminde gösterimi

Şekil 6.3'e göre aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$x = r \cos(\theta) \quad (6.1)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (6.2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (6.3)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6.4)$$

Yukarıdaki şekil ve denklemlere göre;

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos(\theta) \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin(\theta) \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin(\theta)}{r} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos(\theta)}{r} \quad (6.8)$$

Sapma denklemi yarıçap (r) ve açının ( $\theta$ ) fonksiyonu olduğu için;

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin(\theta) \quad (6.9)$$

$\frac{\partial w}{\partial x}$  ifadesi için, w yerine  $\frac{\partial w}{\partial x}$  yazılır;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2(\theta) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2(\theta)}{r} \\ &+ 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Benzer şekilde;

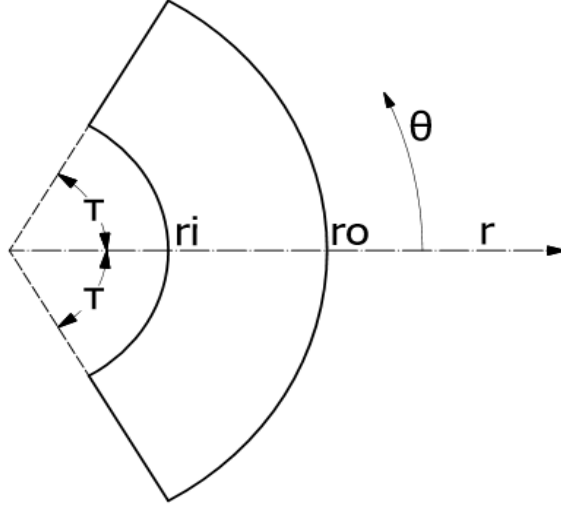
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2(\theta) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2(\theta)}{r} \\ &- 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos(2\theta)}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\ &- \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Bu denklemler birleştirildiğinde laplace operatör denklemine dönüşür;

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (6.13)$$





Şekil 6.4: Dairesel sektör plaka ve koordinat sistemi geometrisi

İnce izotropik bir dairesel sektör plakasının bilinen en iyi denklemi bir önceki başlıkta açıklanmıştı. Bu denklemde;

$w(r, \theta)$  sapmayı,  $q(r, \theta)$  plakanın üzerine uygulanan düzgün dağıtılmış yükü,  $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  eğilme rijitliği,  $E$  Elastisite modülünü,  $h$  plakanın kalınlığını ve  $\nu$  ise Poisson oranını vermektedir.

Ankastre tip için sınır koşulları;

$r = r_i, r = r_o, -\tau \leq \theta \leq \tau$  şartlarıyla;

$$w = \frac{dw}{dr} = 0 \quad (6.19)$$

$\theta = \mp\tau, r_i \leq r \leq r_o$  şartlarıyla;

$$w = \frac{dw}{d\theta} = 0 \quad (6.20)$$

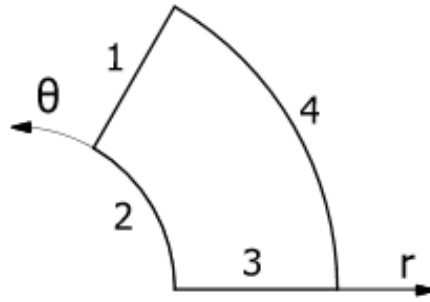
Buna göre ankastre sınır koşulları uygulandığında sapma ve onun birinci dereceden türevi (6.19) ve (6.20)'de olduğu gibi sifıra eşitlenmelidir.

Daha önce açıklanan (6.18) numaralı denklemin Newton-Raphson iterasyon metodunda olduğu gibi denklemin türevli hali (6.21) numaralı denklem elde edilir.

$$f = u_{rrrr} + 2\frac{u_{rrr}}{r} + 2\frac{u_{rr\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_{rr}}{r^2} + 2\frac{u_{r\theta\theta}}{r^3} + \frac{u_{\theta\theta\theta\theta}}{r^4} - \frac{q(r,\theta)}{D} = 0 \quad (6.21)$$

Burada iki farklı şekilde dairesel sektör plakayı ele alacağız:

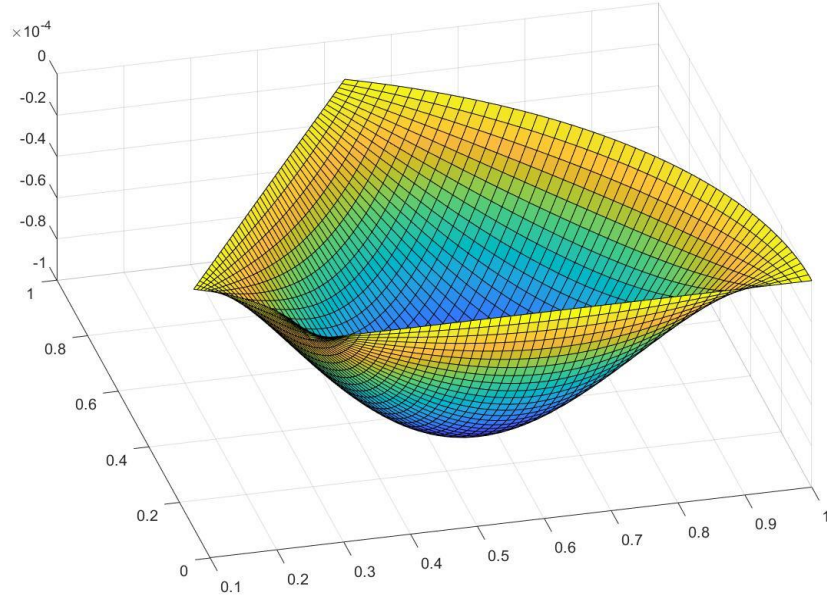
Birinci durumda dört kenarı basit mesnetli (simply supported) olacak şekilde, ikinci durumda iki kenarı basit mesnetli diğer iki kenarı ankastre olarak ele alınacaktır.



**Şekil 6.5:** Dairesel sektör plakanın kenar numaraları ve koordinat sistemi geometrisi

1. Birinci durumda 1-2-3-4 numaralı kenarlar basit mesnetli (simply supported) olarak incelenecektir.
2. İkinci durumda 1-3 numaralı kenarlar ankastre (clamped), 2-4 numaralı kenarlar basit mesnetli (simply supported) olarak incelenecektir.

Birinci durum:



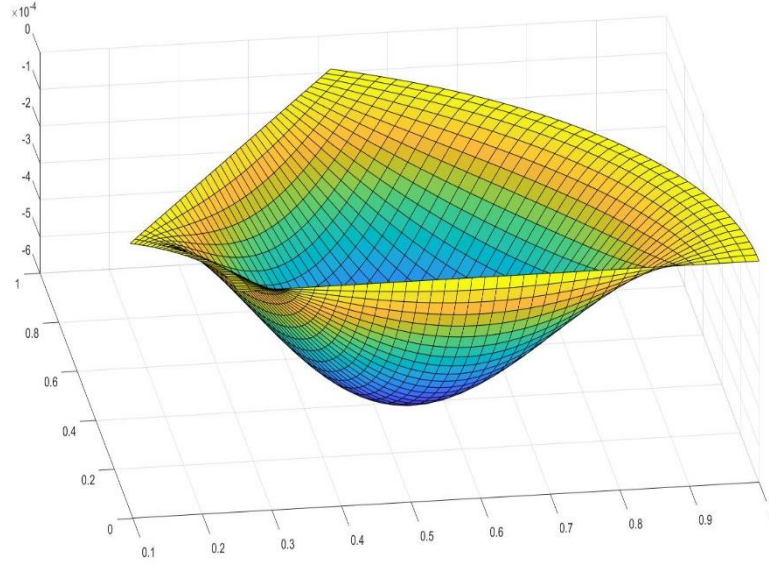
Şekil 6.6: Dört kenarı basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakanın geometrisi

Birinci durum için 60 derecelik dairesel sektör plakanın geometrisi Şekil 6.6 da gösterilmiştir. Buna göre 60 derecelik dairesel sektör plakanın düzgün dağılımlı yük altındaki çökme, radyal ve açısız moment değerleri Tablo 6.1 de verilmiştir.

**Tablo 6.1:** Dört kenarı basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakanın düzgün dağılımlı yük altında çökme, radyal ve açısız moment değerleri

| $\theta$ | $\eta = r_i / r_o$ | $w$          | $M_r$      | $M_\theta$ |
|----------|--------------------|--------------|------------|------------|
| 60°      | 0                  | 0.188961     | 0.00028685 | 0.058153   |
|          | 0.25               | 0.0002831571 | 0.0101739  | 0.0140100  |
|          | 0.5                | 0.0001437161 | 0.0073030  | 0.0053365  |
|          | 0.75               | 0.004941     | 0.00001004 | 0.018166   |

İkinci durum:



**Şekil 6.7:** Birinci ve üçüncü kenarları ankastre ikinci ve dördüncü kenarları basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakanın geometrisi

İkinci durum için 60 derecelik dairesel sektör plakanın geometrisi Şekil 6.7 da gösterilmiştir. Buna göre 60 derecelik dairesel sektör plakanın düzgün dağılımlı yük altındaki çökme, radyal ve açıl moment değerleri Tablo 6.2 de verilmiştir.

**Tablo 6.2:** Birinci ve üçüncü kenarları ankastre, ikinci ve dördüncü kenarları basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakanın düzgün dağılımlı yük altında çökme, radyal ve açıl moment değerleri

| $\theta$ | $\eta = r_i / r_o$ | $w$        | $M_r$    | $M_\theta$ |
|----------|--------------------|------------|----------|------------|
| 60°      | 0                  | 0.00060741 | 0.015903 | 0.023188   |
|          | 0.25               | 0.00052605 | 0.016532 | 0.015709   |
|          | 0.5                | 0.00016102 | 0.010483 | 0.005168   |

**Tablo 6.3:** Dört kenarlı basit mesnetli 60 derecelik dairesel sektör plakasının düzgün dağılımlı yük altında çökme, radyal ve açılma moment değerleri ile ansys ve diğer değerlerinin karşılaştırılması

|            | $\eta = r_i / r_o$ | Hesaplanan Sonuç | Salehi&Turvey | Harik    | Cheung&Chang | ANSYS Değerleri |
|------------|--------------------|------------------|---------------|----------|--------------|-----------------|
| $w$        | 0                  | 0.188961         | 0.000363      | 0.000313 | 0.000308     | 0.000289        |
|            | 0.25               | 0.0002831571     | 0.000341      | 0.000310 | 0.000301     | 0.000284        |
|            | 0.5                | 0.0001437161     | 0.000174      | 0.000155 | 0.000154     | 0.000142        |
|            | 0.75               | 0.004941         | 1.25e-5       | 1.09e-5  | 9.83e-6      | 1.03e-5         |
| $M_r$      | 0                  | 0.00028685       | 0.011110      | 0.010950 | 0.011280     | 0.010981        |
|            | 0.25               | 0.0101739        | 0.011420      | 0.011120 | 0.011640     | 0.011028        |
|            | 0.5                | 0.0073030        | 0.009688      | 0.009531 | 0.010173     | 0.009412        |
|            | 0.75               | 0.00001004       | 0.002686      | 0.002686 | 0.002912     | 0.002622        |
| $M_\theta$ | 0                  | 0.058153         | 0.011370      | 0.011670 | 0.013010     | 0.011637        |
|            | 0.25               | 0.0140100        | 0.011300      | 0.011460 | 0.01640      | 0.011123        |
|            | 0.5                | 0.0053365        | 0.005092      | 0.005249 | 0.006203     | 0.005007        |
|            | 0.75               | 0.018166         | 0.000815      | 0.000815 | 0.000907     | 0.001184        |

## 7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında diferansiyel quadrature metodu kullanılarak kenarlarından farklı şekillerde sabitlenmiş dairesel sektör plakaların nasıl çözüleceği incelenmiştir. Çözümde türev derecesine bağlı olarak ağırlık katsayılar matrisi oluşturulup denklem sistemine uygulanır. Dördüncü mertebeden olan ana denklem  $r$  (yarıçap) ve  $\theta$  (açı) 'ya bağlı olan iki adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür. Burada elde edilen her iki adi diferansiyel denklem sistemi ile kapalı formda tekrarlamalı olarak çözülür ve sonuca hızlı bir şekilde ulaşması sağlanır. Bu metot ile çözüme hızlı ve gerçeğe çok yakın sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca sonlu elemanlar analiz sonuçlarıyla karşılaştırıldığında az hata payıyla doğru tahminler elde edilebildiği görülmüştür.

## KAYNAKLAR

Aghdam, M.M., Mohammadi, M., Erfanian, V., “*Bending Analysis of Thin Annular Sector Plates Using Extended Kantorovich Method*”, *Thin-Walled Structures*, 45, 983-990, (2007).

Aghdam M.M., Shakeri M, Fariborz S.J., “*Solution to the Reissner plate with clamped edges.*”, *American Society of Civil Engineers Journal of Engineering Mechanics*, 122(7), 679–682, (1996).

Bellman, R.E., Casti, J., “*Differential Quadrature and Long Term Integration*”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 34, 235-238, (1971).

Bellman, R.E., Kashef, B.G., Casti, J., “*Differential Quadrature: A Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations*”, *Journal of Computational Physics*, 10, 40-52, (1972).

Bert C.W., Malik M., “*Differential quadrature method in computational mechanics: A review*”, *Applied Mechanics Reviews.*, 49, 1-28, (1996)

Boresi, A.P., Schmidt, R.J., “*Advanced Mechanics of Materials*”, United States of America : John Willey and Sons, 457-501, (2003).

Cheung, M.S., Chan, M.Y.T., “*Static and dynamic of thin and thick sectorial plates by the finite strip method*”, *Computers&Structures*, 14(1-2), 79-88, (1981).

Civan, F., Sliepcevich, C.M., “*Application to differential quadrature to transport processes*”, *Journal of Mathematical Analysis Applied*, 93, 711-724, (1983).

Civan, F., Sliepcevich, C.M., “*Differential quadrature for multidimensional problems*”, *Journal of Mathematical Analysis Applied*, 101, 423-443, (1984).

Girgin, Z., “*Combining Differential Quadrature Method with Simulation Technique to Solve Non-linear Differential Equations*”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75, 722-734, (2008).

Harik, I.E., “*Analytical solution to orthotropic sector*”, *American Society of Civil Engineers Journal of Engineering Mechanics*, 110, 554-568, (1984).

Kerr, A.D., “*An Extended Kantorovich Method For The Solution of Eigenvalue Problems*”, International Journal of Solids and Structures, 5(6), 559-572, (1969).

Liew K.M., Huang Y.Q., Reddy J.N., “*Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2203–2222, (2003).

Liew K.M., Huang Y.Q., Reddy J.N., “*Analysis of general shaped thin plates by the moving least-squares differential quadrature method*”, Finite Elements in Analysis and Design, 40, 1453–1474, (2004).

Liew, K.M., Liu, F.L., “*Differential Quadrature Method for Vibration Analysis of Shear Deformable Annular Sector Plate*”, Journal of Sound and Vibration, 230(2), 335-356, (2000).

Malik, M., Bert, C.W., “*Implementing Multiple Boundary Conditions in The DQ Solution of Higher Order PDE's: Application to Free Vibration of Plates*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39, 1237-1258, (1996).

Malik, M., Civan, F., “*A Comparative-Study of Differential Quadrature and Cubature Methods Vis a Vis Some Conventional Techniques in Context of Convection-Diffusion-Reaction Problems*”, Chemical Engineering Science, 50(3), 531-547, (1995).

Mingle, J.O., “*The Method of Differential Quadrature for Transient Nonlinear Diffusion*”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60, 559-569, (1977).

Naadimuthu, G., Bellman, R., Wang, K. M., Lee, E. S. “*Differential Quadrature and Partial Differential Equations: Some Numerical Results*”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 98, 220-235, (1984).

Quan, J. R., Chang, C. T. “*New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—I. Analysis*”, Computers and Chemical Engineering, 13, 779-788, (1989a).

Quan J. R., Chang C. T. “*New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—II. Numerical experiments*”, Computers and Chemical Engineering, 13, 1017-1024,(1989b).

Saidi, A.R., Jomehzadeh, E., Atashipour, S.R., "Exact Analytical Solution for Bending Analysis of Functionally Graded Annular Sector Plates", International Journal of Engineering, 22(3), 307-316, (2009).

Shu, C., *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, London, Springer-Verlag, (2000).

Shu, C., "Generalized Differential-Integral Quadrature and Application to The Simulation of Incompressible Viscous Flows Including Parallel Computation", Ph.D Thesis, University of Glasgow, Glasgow, (1992).

Timoshenko, S.P., Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shell*, McGraw-Hill, New York (1970).

Ugural, A.C., *Stresses in Plates and Shell*, United States of America : McGraw-Hill, (1981).

Wang, X., Bert, C. W., "A New Approach in Applying Differential Quadrature to Static and Free Vibrational Analyses of Beams and Plates", Journal of Sound and Vibration, 162, 566-572, (1993).

Zenkour, A.M., "Bending of Sector-Shaped Annular Plate with Continuous Thickness Variation Along the Radial Direction", The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 57(2), 205-223, (2004).

Zhang, Y., Zong, Z., *Advanced Differential Quadrature Methods*, USA: CRC Press, (2009).



# **EKLER**

## EKLER

### EK A – Ağırlıklı Katsayılar Matrisi

#### N=5 için birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayısı

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \\ 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix}$$

#### N=5 için ikinci dereceden türevin ağırlıklı katsayısı

$$[A^{(2)}] = \begin{bmatrix} 140/3 & -416/3 & 152 & -224/3 & 44/3 \\ 44/3 & -80/3 & 8 & 16/3 & -4/3 \\ -4/3 & 64/3 & -40 & 64/3 & -4/3 \\ -4/3 & 16/3 & 8 & -80/3 & 44/3 \\ 44/3 & -224/3 & 152 & -416/3 & 140/3 \end{bmatrix}$$

#### N=5 için üçüncü dereceden türevin ağırlıklı katsayısı

$$[A^{(3)}] = \begin{bmatrix} -160 & 576 & -768 & 448 & -96 \\ -96 & 320 & -384 & 192 & -32 \\ -32 & 64 & 0 & -64 & 32 \\ 32 & -192 & 384 & -320 & 96 \\ 96 & -448 & 768 & -576 & 160 \end{bmatrix}$$

#### N=5 için dördüncü dereceden türevin ağırlıklı katsayısı

$$[A^{(4)}] = \begin{bmatrix} 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \\ 256 & -1024 & 1536 & -1024 & 256 \end{bmatrix}$$

**N=5 ve M=5 için birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayısı**

$$[C^{(1)}]_{25 \times 25} = \begin{bmatrix} [A^{(1)}]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} \\ [0]_{5 \times 5} & [A^{(1)}]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} \\ [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [A^{(1)}]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} \\ [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [A^{(1)}]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} \\ [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [0]_{5 \times 5} & [A^{(1)}]_{5 \times 5} \end{bmatrix}_{25 \times 25}$$

**N=7 için birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayısı**

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} -147/10 & 36 & -45 & 40 & -45/2 & 36/5 & -1 \\ -1 & -77/10 & 15 & -10 & 5 & -3/2 & 1/5 \\ 1/5 & -12/5 & -7/2 & 8 & -3 & 4/5 & -1/10 \\ -1/10 & 9/10 & -9/2 & 0 & 9/2 & -9/10 & 1/10 \\ 1/10 & -4/5 & 3 & -8 & 7/2 & 12/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/2 & -5 & 10 & -15 & 77/10 & 1 \\ 1 & -36/5 & 45/2 & -40 & 45 & -36 & 147/10 \end{bmatrix}$$

**N=9 için birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayısı**

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} -761/35 & 64 & -112 & 448/3 & -140 & 448/5 & -112/3 & 64/7 & -1 \\ -1 & -446/35 & 28 & -28 & 70/3 & -14 & 28/5 & -4/3 & 1/7 \\ 1/7 & -16/7 & -38/5 & 16 & -10 & 16/3 & -2 & 16/35 & -1/21 \\ -1/21 & 4/7 & -4 & -18/5 & 10 & -4 & 4/3 & -2/7 & 1/35 \\ 1/35 & -32/105 & 8/5 & -32/5 & 0 & 32/5 & -8/5 & 32/105 & -1/35 \\ -1/35 & 2/7 & -4/3 & 4 & -10 & 18/5 & 4 & -4/7 & 1/21 \\ 1/21 & -16/35 & 2 & -16/3 & 10 & -16 & 38/5 & 16/7 & -1/7 \\ -1/7 & 4/3 & -28/5 & 14 & -70/3 & 28 & -28 & 446/35 & 1 \\ 1 & -64/7 & 112/3 & -448/5 & 140 & -448/3 & -112 & -64 & 761/35 \end{bmatrix}$$

**N=11 için birinci dereceden türevin ağırlıklı katsayısı**

$$[A^{(1)}] = \begin{bmatrix} -7381/252 & 100 & -225 & 400 & -525 & 504 & -350 & 1200/7 & -225/4 & 100/9 & -1 \\ -1 & -4609/252 & 45 & -60 & 70 & -63 & 42 & -20 & 45/7 & -5/4 & 1/9 \\ 1/9 & -20/9 & -341/28 & 80/3 & -70/3 & 56/3 & -35/3 & 16/3 & -5/3 & 20/63 & -1/36 \\ -1/36 & 5/12 & -15/4 & -319/42 & 35/2 & -21/2 & 35/6 & -5/2 & 3/4 & -5/36 & 1/84 \\ 1/84 & -10/63 & 15/14 & -40/7 & -11/3 & 12 & -5 & 40/21 & -15/28 & 2/21 & -1/126 \\ -1/126 & 25/252 & -25/42 & 50/21 & -25/3 & 0 & 25/3 & -50/21 & 25/42 & -25/252 & 1/126 \\ 1/126 & -2/21 & 15/28 & -40/21 & 5 & -12 & 11/3 & 40/7 & -15/14 & 10/63 & -1/84 \\ -1/84 & 5/36 & -3/4 & 5/2 & -35/6 & 21/2 & -35/2 & 319/42 & 15/4 & -5/12 & 1/36 \\ 1/36 & -20/63 & 5/3 & -16/3 & 35/3 & -56/3 & 70/3 & -80/3 & 341/28 & 20/9 & -1/9 \\ -1/9 & 5/4 & -45/7 & 20 & -42 & 63 & -70 & 60 & -45 & 4609/252 & 1 \\ 1 & -100/9 & 225/4 & -1200/7 & 350 & -504 & 525 & -400 & 225 & -100 & 7381/252 \end{bmatrix}$$

**N=11 için ikinci dereceden türevin ağırlıklı katsayısı**

$$[A^{(2)}] = \begin{bmatrix} 7732/11 & -61727/16 & 153025/14 & -269946/13 & 168775/6 & -27508 & 174025/9 & -76419/8 & 47317/45 & -13150/21 & 7129/126 \\ 7129/126 & 2255/28 & -10445/14 & 33490/21 & -18845/9 & 3979/2 & -4105/3 & 16623/25 & -3035/14 & 10735/252 & -481/126 \\ -481/126 & 690/7 & -9448/73 & -2440/21 & 335 & -2972/9 & 1355/6 & -760/7 & 4415/126 & -430/63 & 17/28 \\ 17/28 & -2645/252 & 3695/28 & -14465/63 & 505/6 & 109/2 & -895/18 & 535/21 & -235/28 & -415/252 & -37/252 \\ -37/252 & 20/9 & -130/7 & 3280/21 & -5005/18 & 152 & -40/3 & -80/63 & 5/4 & -20/63 & 2/63 \\ 2/63 & -125/252 & 250/63 & -500/21 & 500/3 & -5269/18 & 500/3 & -500/21 & 250/63 & -125/252 & 2/63 \\ 2/63 & -20/63 & 5/4 & -80/63 & -40/3 & 152 & -5005/18 & 3280/21 & -130/7 & 20/9 & -37/252 \\ -37/252 & 415/252 & -235/28 & 535/21 & -895/18 & 109/2 & 505/6 & -14465/63 & 3695/28 & -2645/252 & 17/28 \\ 17/28 & -430/63 & 4415/126 & -760/7 & 1355/6 & -2972/9 & 335 & -2440/21 & -9448/73 & 690/7 & -481/126 \\ -481/126 & 10735/252 & -3035/14 & 16623/25 & -4105/3 & 3979/2 & -18845/9 & 33490/21 & -10445/14 & 2255/28 & 7129/126 \\ 7129/126 & -13150/21 & 47317/15 & -76419/8 & 174025/9 & -27508 & 168775/6 & -269946/13 & 153025/14 & -61727/16 & 7732/11 \end{bmatrix}$$

**N=11 için üçüncü dereceden türevin ağırlıklı katsayısı**

$$[A^{(3)}] = \begin{bmatrix} -69523/5 & 190269/2 & -310508 & 635840 & -896113 & 897750 & -641374 & 320557 & -320360/3 & 21343 & 162875/84 \\ -162875/84 & 81667/11 & -195667/17 & 9425 & -72475/18 & -300 & -3875/2 & -19598/13 & 17475/28 & -5975/42 & 1528/108 \\ 1525/108 & -33509/16 & 73808/9 & -304473/22 & 98593/7 & -10550 & 112025/18 & -24500/9 & 23025/28 & -11591/76 & 2521/193 \\ 2521/193 & -16325/126 & -38525/28 & 66502/11 & -57175/6 & 8050 & -81275/18 & 40175/21 & -15875/28 & 14858/143 & -2225/252 \\ -2225/252 & 2975/27 & -17225/28 & 1700/21 & 56375/18 & -5450 & 23825/6 & -27227/17 & 1825/4 & -5125/63 & 2854/421 \\ 2854/421 & -31525/378 & 13525/28 & -64148/37 & 41725/18 & 0 & -41725/18 & 64148/37 & -13525/28 & 31525/378 & -2854/421 \\ -2854/421 & 5125/63 & -1825/4 & 27227/17 & -23825/6 & 5450 & -56375/18 & -1700/21 & 17225/28 & -2975/27 & 2225/252 \\ 2225/252 & -14858/143 & 15875/28 & -40175/21 & 81275/18 & -8050 & 57175/6 & -66502/11 & 38525/28 & 9199/71 & -2521/193 \\ -2521/193 & 11591/76 & -23025/28 & 24500/9 & -112025/18 & 10550 & -154932/11 & -304473/22 & -73808/9 & 33509/16 & -1525/108 \\ -1525/108 & 5975/42 & -17475/28 & 19598/13 & -3875/2 & 300 & 72475/18 & -9425 & 195667/17 & -81667/11 & 162875/84 \\ 162875/84 & -21344 & 320360/3 & -320557 & 641374 & -897750 & 896113 & -635840 & 310508 & -190269/2 & 69523/5 \end{bmatrix}$$

**N=11 için dördüncü dereceden türevin ağırlıklı katsayısı**

$$[A^{(4)}] = \begin{bmatrix} 451975/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -523124 & 335037/7 \\ 335037/7 & -901498/3 & 875976 & 0 & 0 & 0 & 0 & -603992 & 194476 & -113498/3 & 100873/30 \\ 100873/30 & 32627/3 & -231131/2 & 963524/3 & -483722 & 471667 & -320472 & 459524/3 & -98381/2 & 28627/3 & -8459/10 \\ -8459/10 & 38002/3 & -178244/5 & 384127/16 & -210139/5 & -278750/3 & 727750/9 & -206627/5 & 68006/5 & -503875/189 & 12584/53 \\ 12584/53 & -221291/64 & 128631/5 & -224476/3 & 921250/9 & -203000/3 & 151000/9 & -40127/16 & -45125/21 & 34709/64 & -10250/189 \\ -10250/189 & 157625/189 & -135250/21 & 173373/5 & -463611/5 & 382250/3 & -463611/5 & 173373/5 & -135250/21 & 157625/189 & -6291/116 \\ -6291/116 & 34709/64 & 45125/21 & 40127/16 & 151000/9 & -203000/3 & 151000/9 & -224476/3 & 128631/5 & -221291/64 & 12584/53 \\ 12584/53 & -503875/189 & 68006/5 & -206627/5 & 727750/9 & -278750/3 & 210139/5 & 384127/16 & -178244/5 & 3800/3 & -8459/10 \\ -8459/10 & 28627/3 & -98381/2 & 459524/3 & -320472 & 471667 & -483722 & 963524/3 & -231131/2 & 32627/3 & 100873/30 \\ 100873/30 & -113498/3 & 194476 & -603992 & 0 & 0 & 0 & 0 & 875976 & -901498/3 & 335037/7 \\ 335037/7 & -523124 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 451975/2 \end{bmatrix}$$