T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAHN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN GENİŞLEMELERİ

Mehmet YAĞIZ

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2021

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Hahn Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.. /../ ….

Mehmet YAĞIZ

TEŞEKKÜR

Çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olan, bilgi birikimleriyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca beni destekleyen annem Türkan Yağız'a, babam Habib Yağız'a ve eşim Gonca Yağız'a sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim.

Ağustos, 2021 **Mehmet YAĞIZ**

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\boldsymbol{D_{q,\omega}f(t)}$	: Hahn fark operatörü
$\boldsymbol{E_{q,\omega}(t,z)}$	: $q-\omega$ Üstel fonksiyon
$(\mathbb{C}^{2},\boldsymbol{\Gamma_1},\boldsymbol{\Gamma_2})$	: Sınır değer uzayı
$\boldsymbol{W_{q,\omega}[f,g]}$	: f ile g fonksiyonlarının $q-\omega$ Wronskian'ı
$\mathbf{H}$	: Hilbert Uzayı
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	:Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Hahn Sturm-Liouville Operatörünün Genişlemeleri

Mehmet Yağız

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Ağustos, 2021

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sınır değer uzayı ve disipatif genişlemelerin temel tanım ve özellikleri verilmiştir.

Son olarak, Hahn Sturm-Liouville operatörünün maksimal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hahn kalkulüs**,** Sturm-Liouville operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları.

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Extensions of Hahn Sturm-Liouville Operator

Mehmet YAĞIZ

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

August, 2021

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned and some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, basic definitions and properties of a space of boundary value and dissipative extension are given.

Finally, a description of all maksimal dissipative, accretive, self- adjoint and, other extensions of singular conformable fractional Sturm-Liouville operator is given in terms of boundaryconditions.

Keywords: Hahn calculus, Sturm-Liouville operator, symmetric operators, self-adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions.

1. GİRİŞ

$v(\cdot)$ fonksiyonu [a, b] aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli,, $\lambda \in C$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ve $|a_{i1}| + |a_{i2}| \neq 0, \mathrm{i} = 1, 2$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} -y'' + v(t)y = \lambda y, -\infty \leq a \leq t \leq b \leq \infty, \\ \mathrm{a}_{11}y(a) + \mathrm{a}_{12}y'(b) = 0, \\ a_{21}y(a) + a_{22}y'(b) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

ifadesi ile tanımlanan Sturm-Liouville problemlerini inceleyen Sturm-Liouville teorisi fizikte ve mühendislikte karşılaşılan problemlerin çözümünde önemli bir rol oynar. Ayrıntılı bilgi i için bkz: Coddington ve Levinson, 1955 ; Levitan ve Sargsian, 1991; Zettl, 2005.

2005 yılında, Annaby ve Mansour (Annaby ve Mansour, 2005) (1.1) denklemi ile verilen Sturm-Liouville problemindeki adi türev yerine

$$D_q y(x) \coloneqq \frac{y(qx) - y(x)}{x(1-q)}, 0 < q < 1, \quad (1.2)$$

q-türevini alarak regüler durumda bir q-Sturm-Liouville teorisi geliştirmiştir. Daha sonra pek çok araştırmacı bu konuda çalışmalar yapmıştır (Annaby ve Mansour, 2012, Abreu, 2005, Allahverdiev, 2016, Annaby, 2003, Annaby, vd., 2007, Erylmaz, 2012, Li ve Liu, 2005, Nemri ve Fitouhi, 2010).

Daha sonra 2018 yılında Annaby vd. (Annaby vd., 2018) (1.2) ile verilen q-türevi yerine

$$D_{q,\omega} f(t) \coloneqq \frac{f(qt + \omega) - f(t)}{(qt + \omega) - t}, \quad (1.3)$$

ifadesi ile tanımlanan Hahn türevini alarak, regüler durumda, Hahn Sturm-Liouville problemlerini ele almıştır.

Sturm-Liouville problemleri farklı durumlarda, (Anderson, 2002, Anderson ve Hoffacker, 2003, Anderson ve Avery, 2004, Henderson, 2000)'de olduğu gibi üst mertebe problemlere, (Annaby ve Mansour, 2012, Brown, vd., 1996)'da olduğu gibi singüler problemlere, (Eryılmaz, 2012, Tuna, 2014)'te olduğu gibi genelleştirilmiş sınır şartlarına ve self-adjoint olmayan problemlere, (Brown, vd., 1996, Lavagno, 2009, Suslov, 2003)'te olduğu gibi Askey-Wilson operatörlerine genişletilmiştir. Genelleştirilmiş Sturm-Liouville problemleri (Abreu, 2005, Ahlbrandt, vd., 2000, Annaby, vd., 2012, Annaby, vd., 2007, Atici ve Guseinov, 2002, Lavagno, 2009)'da olduğu gibi matematiksel ve fiziksel problemlerde uygulanmıştır (Annaby, vd., 2018).

Operatörler teorisinin önemli problemlerden birisi de simetrik operatörlerin genişlemesi problemidir. Bu konuda 1929 yılında ilk sonuçlar J. Von Neumann (von Neumann, 1929), tarafından elde etmiştir. Von Neumann simetrik operatörlerin hangi koşullar altında kendine eş genişlemeye sahip olduğu ve bu genişlemenin nasıl yapılacağını göstermiştir. Krein (Krein, 1947, 1952), Rellich (Rellich, 1951), Birman (Birman, 1956), Vishik (Vishik, 1952), Phillips (Phillips, 1959), simetrik operatörlerin genişlemeleri üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

1969 yılında Rofe-Beketov (Rofe-Beketov, 1969) lineer bağıntıları kullanarak simetrik operatörlerin genişlemesini vermiştir. Aynı metodu kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984), Bairamogly (Bairamogly, 1984), Allahverdiev (Allahverdiev,1995, 2013, 2014, 2016, 2019), Tuna (Tuna , 2013), Tuna ve Bayrak (Tuna ve Bayrak, 2018), Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018) ve Kholkin (Kholkin, 1981) dir.

1972 yılında Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk, vd.,1972) disipatif lineer bağıntılar kullanarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemelerini elde etmişlerdir. Daha sonraları birbirinden bağımsız olarak Bruk (Bruk, 1976) ve Kochubei (Kochubei, 1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için bkz: Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk, vd., 1989).

Bu tez çalışmasında, regüler durumda Hahn Sturm-Liouville denklemi ile elde edilen Hahn Sturm-Liouville simetrik operatörü ele alınmıştır. Bu operatör için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, maksimal akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde Hahn kalkülüsün temel kavramları verilecektir.

$q \in (0,1), \omega > 0$, sabit olsun $\omega_0 := \omega/(1-q)$,ve I reel sayılar kümesininin ω_0'ı kapsayan bir alt aralığı olsun. $h(t) := qt + \omega, t \in I$ olsun.

$$\omega_0 = \lim_{k \to \infty} (h \circ h \circ \ \dots \circ h)(t),$$

Olduğu açıktır.

1983 yılında Hahn (Hahn, 1983) tarafından q, ω-Hahn fark operatörü aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.1. f, I aralığı üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. f ω_0'da diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere Hahn fark operatörü

$$D_{q,\omega} f(t) := \begin{cases} \dfrac{f(qt+\omega) - f(t)}{(qt+\omega) - t}, & t \neq \omega_0 \\ \\ f'(\omega_0), & t = \omega_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

İfadesi ile tanımlanır. $D_{q,w} f(\omega_0)$ ifadesine f fonksiyonunun q, ω-türevi denir. Eğer $D_{q,w} f(\omega_0)$ $türevi$ mevcutsa f fonksiyonuna I üzerinde q, ω-diferansiyellenebilir denir.

Eğer $f.g$ $fonksiyonu$, $t \in I$ $noktasın$da q, ω-diferansiyellenebilir aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$D_{q,\omega}(\alpha f+\beta g)(t)=\alpha D_{q,\omega}f(t)+\beta D_{q,\omega}g(t), \alpha,\beta \epsilon \mathbb{C},$$

$$D_{q,\omega}(fg)(t)=D_{q,\omega}\big(f(t)\big)g(t)+f(qt+\omega)D_{q,\omega}g(t),$$

$$D_{q,\omega}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{\left(D_{q,\omega}f(t)\right)g(t)-f(t)D_{q,\omega}g(t)}{g(t)g(qt+\omega)}, g(t)g(qt+\omega)\neq 0,$$

(Annaby, vd., 2012).

$D_{q,\omega}$ fark operatörünün sağ tersi Annaby vd. tarafından (Annaby vd., 2012)'de Jackson – Nörlund toplamları cinsinden şu şekilde tanımlanmıştır (Jordan, 1965).

$a,b\ \in\ I\ ve\ [k]q\coloneqq\frac{1-q^k}{1-q}, k\in\ \mathbb{N}$ olsun. a dan b ye f *fonksiyonunun q, ω*-integrali şu şekilde tanımlanır.

$$\int_a^b f(t)d_{q,\omega}t :=\int_{\omega_0}^b f(t)d_{q,\omega}t-\int_{\omega_0}^a f(t)d_{q,\omega}t, \tag{2.2}$$

$$\int_{\omega_0}^x f(t)d_{q,\omega}t :=\ (x(1-q)-\ \omega\sum_{k=0}^{\infty}q^k f(xq^k+\ \omega[k]_q), \qquad x\epsilon I\ , \tag{2.3}$$

(2.3) eşitliğindeki seriler $x=a\ ve\ x=b$ noktalarında yakınsakdır. Bu durumda, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde *q, ω*-integrallenebilir denir ve (2.3) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam Jackson – Nörlund toplamı olarak adlandırılacaktır. Nörlund toplamları ile fark operatörleri arasındaki ilişki için bkz. (Jordan, 1965).

f,g sürekli fonksiyonları için q,ω- kısmi integrasyon formülü

$$\int_a^b f(t)D_{q,w}g(t)d_{q,\omega}t=f(t)g(t)\,|_a^b\ -\int_a^b D_q,\omega\big(f(t)\big)g(qt+\omega)d_{q,\omega}t, a,b\in I. \tag{2.4}$$

ile verilir (Annaby vd., 2012).

q- kalkulusda (Gasper ve Rahman, 1990, Jackson, 1910) tanımlandığı gibi olduğu gibi, iki tür q, ω – üstel fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$e_{q,\omega}(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z(t(1-q)-\omega)^k}{(q,q)_k}, \quad |t-\omega_0| < \frac{1}{|z(1-q)|}, \tag{2.5}$$

$$E_{q,\omega}(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}k(k-1)}(z(t(1-q)-\omega)^k}{(q,q)_k}, \qquad t \in \mathbb{C}, \tag{2.6}$$

Bu fonksiyonlar

$$D_{q,\omega}e_{q,\omega}(t,z) = ze_{q,\omega}(t,z), e_{q,\omega}(\omega_0,z) = 1, \ \ |t-\omega_0| < \frac{1}{|z(1-q)|},$$

$$D_{q,\omega}E_{q,\omega}(t,z) = -zE_{q,\omega}(qt+\omega,z), \ \ E_{q,\omega}(\omega_0,z) = 1, \quad z,t \in \mathbb{C},$$

birinci mertebeden q, ω- başlangıç değer problemlerini sağlarlar (Annaby vd., 2012). Birinci mertebe q, ω- başlangıç değer problemleri için varlık ve teklik problemleri Hamza ve Ahmed (Hamza ve Ahmed, 2013) incelenmiştir.

Abu Risha, vd., ,(Abu Risha vd., 2007), Swarttouw ve Meijer (Swarttouw ve Meijer, 1994) tarafından verilen q - Wronskian tanımına benzer olarak, Hamza ve Ahmed (Hamza ve Ahmed, 2013) tarafından q, ω- Wronskian tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n$ I aralığı üzerinde tanımlı ve (n-1). mertebeden q, ω-diferansiyellenebilir fonksiyon olsunlar . O zaman q, ω- Wronskian

$$W_{q,\omega}(x_1,x_2,\ldots,x_n)(t)$$

$$= \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ D_{q,\omega}x_1(t) & D_{q,\omega}x_2(t) & \ldots & D_{q,\omega}x_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{q,\omega}^{n-1}x_1(t) & D_{q,\omega}^{n-1}x_2(t) & \ldots & D_{q,\omega}^{n-1}x_n(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I,$$

formülü ile verilir.

Şimdi Hahn kalkülüsün temel teoremini ifade edelim.

Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ω_0 noktasında sürekli ve

$$F(t) := \int_{\omega_0}^{t} f(x) d_{q,\omega}x. \qquad t \in I$$

ise F fonksiyonu ω_0'da süreklidir. Ayrıca $D_{q,\omega}F(t)$ her bir $t \in I$ için mevcuttur ve $D_{q,\omega}F(t) = f(t)$dir.

Tersine, her $a, b \in I$ için

$\int_a^b D_{q,\omega} f(t) d_{q,\omega}t = f(b) - f(a)$

dir (Annaby, vd., 2012).

$b > 0$ sabit olsun ve $L^2{}_{q,\omega}(\omega_0, b)$, $[\omega_0, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan ve

$$||f(\cdot)|| = \left(\int_{\omega_0}^{b} |f(t)|^2 d_{q,\omega}t\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Koşulunu sağlayan tüm karmaşık değerli fonksiyonlar kümesi olsun. $L^2{}_{q,\omega}(\omega_0, b)$, $\mathbb{C}$ üzerinde lineer uzaydır.

Teorem:2.2 $L^2{}_{q,\omega}(\omega_0, b)$ uzayı

$$\langle f, g\rangle := \int_{\omega_0}^{b} f(t)\overline{g(t)} d_{q,\omega}t,$$

ile tanımlanan iç çarpım işlemi altında ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır (Annaby vd., 2018).

Teorem:2.3 $f(\cdot), g(\cdot) \in L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$ $fonksiyonları$ $[\omega_0, h^{-1}(b)]$ aralığı üzerinde tanımlı ve ω_0 noktasında da sürekli olsun. $t \in (\omega_0, b)$ olmak üzere

$$(D_{q,\omega}\mathrm{f})\left(h^{-1}(t)\right) = D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} f(t), \qquad (2.7)$$

$$\langle D_{q,\omega}f,g\rangle = f(b)\overline{g(h^{-1}(b))} - f(\omega_0)\overline{g(\omega_0)} + \langle f, -\frac{1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}g\rangle, \tag{2.8}$$

$$\langle -\frac{1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}f,g\rangle = -f(h^{-1}(b))\overline{g(\omega_0)} + f(\omega_0)\overline{g(\omega_0)} + \langle f, D_{q,\omega}g\rangle \tag{2.9}$$

dir (Annaby vd., 2018).

İspat. (2.7) eşitliği doğrudan $D_{q,\omega}$ nin tanımından elde edilir. (2.4) formülünde $u = h(t)$ yazılır ve Hahn kalkülüsün temel teoremini kullanarak

$$\langle D_{q,\omega}f,g\rangle = \int_{\omega_0}^{b} D_{q,\omega}f(t)\overline{g(t)}d_{q,\omega}t$$

$$= f(b)\overline{g(b)} - f(\omega_0)\overline{g(\omega_0)} - \int_{\omega_0}^{b} f\big(h(t)\big)\overline{D_{q,\omega}g(t)}d_{q,\omega}t$$

$$= f(b)\overline{g(b)} - f(\omega_0)\overline{g(\omega_0)} - \int_{\omega_0}^{h(b)} f(u)\frac{1}{q}\overline{D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}g(u)}d_{q,\omega}u$$

$$= f(b)\overline{g(b)} - f(\omega_0)\overline{g(\omega_0)} + \frac{1}{q}\big(b-h(b)\big)f(b)D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}g(b)$$

$$- \int_{\omega_0}^{b} f(u)\frac{-1}{q}\overline{D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}g(u)}d_{q,\omega}u. \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.8) ifadesi (2.7) uygulandıktan sonra (2.10) ifadesinden elde edilir. Ayrıca, (2.9) eşitliği, (2.8) ifadesi kullanılarak elde edilir çünkü

$$\langle \frac{-1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}f,g\rangle = \overline{\langle g, \frac{-1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}f\rangle}$$

$$= \overline{-g\big((b)\big)\overline{f\big(h^{-1}(b)\big)} + g(\omega_0)\overline{f(\omega_0)} + \langle D_{q,\omega}g,f\rangle}$$

$= -\overline{g\big((b)\big)}f\big(h^{-1}(b)\big) + \overline{g(\omega_0)}f(\omega_0) + \langle f, D_{q,\omega}g\rangle$ dir.

Şimdi, kendine eş Hahn Sturm-Liouville problemini $L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$ uzayında tanımlayalım. $\omega_0 \leq t \leq b < \infty \; ve \;\; \lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\ell y(t) \coloneqq \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} y(t) + p(t)y(t) = \lambda y(t), \tag{2.11}$$

$$U_1(y) \coloneqq a_1 y(\omega_0) + a_2 D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(\omega_0) = 0, \tag{2.12}$$

$$U_2(y) \coloneqq b_1(b) + b_2 D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(b) = 0. \tag{2.13}$$

problemini ele alalım. Burada, p(·) fonksiyonu $[\omega_0, b]$ aralığı üzerinde reel-değerli sürekli bir fonksiyondur ve $\{a_i, b_i\}_{i=1,2}$ keyfi reel sayıları $|a_1| + |a_2| = 0 = |b_1| + |b_2|$ koşulunu sağlarlar.

Teorem 2.4. $(2.11) - (2.13)$ ile tanımlı Hahn Sturm–Liouville problemi $L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$ uzayında kendine eşdir (Annaby vd., 2018).

İspat. y(·), z(·) ∈ $L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$ olmak üzere aşağıdaki q, ω-Lagrange özdeşliği

$$\int_{\omega_0}^{b} \ell y(t)\overline{z(t)} \; - y(t)\overline{\ell z(t)}) d_{q,\omega} t = [y, \overline{z}](b) - [y, \overline{z}](\omega_0), \tag{2.14}$$

İle verilir burada

$$[y, z](t) = y(t)\overline{D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z(t)} - D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(t)\overline{z(t)} \tag{2.15}$$

dir.

Gerçekten de (2.9) ifadesinde $f\,(t) = D\,_{q,\omega} y(t)$ ve $g(t) = z(t)$ yazılırsa

$$\langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} y(t), \mathrm{z(t)}\rangle$$
$$= -(D_{q,\omega} y(h^{-1}(b))\overline{z(b)} + D_{q,\omega} y(\omega_0)\overline{z(\omega_0)} + \langle D_{q,\omega} y(t), D_{q,\omega} z(t)\rangle$$

$$= -D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} y(b)\overline{z(b)} + D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} y(\omega_0)\overline{z(\omega_0)} + \langle D_{q,\omega} y(t), D_{q,\omega} z(t)\rangle \qquad (2.16)$$

elde edilir.

Tekrar (2.9) eşitliğinde $f\,(t) = y(t),\ g(t) = D_{q,\omega} z(t)$ yazılırsa,

$$\langle D_{q,\omega} y(t), D_{q,\omega} z(t)\rangle$$
$$= y(b) D_{q,\omega} \overline{z\big(h^{-1}(b)\big)} - y(\omega_0) D_{q,\omega} \overline{z(\omega_0)} + \langle y(t), \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} \mathrm{z(t)}\rangle$$

$$= y(b) D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} \overline{z(b)} - y(\omega_0) D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} \overline{z(\omega_0)} + \langle y(t), \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} \mathrm{z(t)}\rangle \qquad (2.17)$$

bulunur.

(2.16) ve (2.17) ifadeleri birlikte kullanılarak

$$\langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega}, \mathrm{y(t)}, z(t)\rangle$$
$$= [y, z](b) - [y, z](\omega_0) + \langle y(t), \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} \mathrm{z(t)}\rangle \qquad (2.18)$$

elde edilir.

(2.12)-(2.13) sınır koşullarından

$$y(\omega_0) D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} \overline{z(\omega_0)} - \overline{z(\omega_0)} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} y(\omega_0) = 0,$$

$$y(b) D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} \overline{z(b)} - \overline{z(b)} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} y(b) = 0,$$

bulunur.

$p(t)$ reel değerli fonksiyon olduğu için

$$\langle \ell y, z\rangle$$
$$= \langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} \mathrm{y(t)} + p(t)y(t), z(t)\rangle$$

$$= \langle \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} \mathrm{y(t)}, z(t)\rangle + \langle p(t)y(t), z(t)\rangle$$

$$= \langle y, \frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} z(t)\rangle + \langle p(t)y(t), z(t)\rangle$$
$$= \langle y, \ell z\rangle,$$
elde edilir.

Teorem 2.5. (2.11)–(2.13) Hahn Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri (eigendeğer) reel ve geometrik açıdan basittir. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar (eigen fonksiyon) ortogonaldir (Annaby vd., 2018).

İspat. λ_0 bir özdeğer ve $\psi(t)$ karşılık gelen özfonksiyon olsun.

$$\ell\psi(t) = \lambda_0\psi(t), \qquad \overline{\ell\psi(t)} = \overline{\lambda_0\psi(t)},$$

olduğundan

$$\int_{\omega_0}^{b} \ell\psi(t)\overline{\psi(t)}\, d_{q,\omega}t = \int_{\omega_0}^{b} \psi(t)\overline{\ell\psi(t)}\, d_{q,\omega}t$$

dir. Dolayısıyla

$$\lambda_0 \int_{\omega_0}^{b} |\psi(t)|^2\, d_{q,\omega}t = \overline{\lambda_0} \int_{\omega_0}^{b} |\psi(t)|^2\, d_{q,\omega}t,$$

Ve sonuç olarak

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \int_{\omega_0}^{b} |\psi(t)|^2 \, d_{q,\omega}t = 0$$

bulunur. $\psi(t)$ bir özfonksiyon olduğu için, $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$'dır. λ_0, $\phi_1$ve ϕ_2 gibi iki tane özfonksiyonu olan bir özdeğer olsun. ϕ_1, ϕ_2 (2.12) sınır koşulunu sağladığından

$$w_{q,\omega}(\phi_1, \phi_2)(\omega_0) = \phi_1(\omega_0) D_{\,q,\omega}\phi_2(\omega_0) - \phi_2(\omega_0) D_{\,q,\omega}\phi_1(\omega_0)$$

$$= \phi_1(\omega_0) D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}}\phi_2(\omega_0) - \phi_2(\omega_0) D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}}\phi_1(\omega_0)$$

$$=[\phi_1, \phi_2](\omega_0) = 0$$

elde edilir. Son olarak, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ farklı özdeğerler ve $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsunlar. (2.18) özdeşliğinden

$$\lambda_1 \int_{\omega_0}^{b} \psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} \, d_{q,\omega}t = \lambda_2 \int_{\omega_0}^{b} \psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} \, d_{q,\omega}t$$

bulunur. $\lambda_1 = \lambda_2$ olduğu için, istenilen ortogonallik elde edilir.

Şimdi, Hahn Sturm–Liouville denklemine ait temel çözümlerin varlığını, tekliğini ve analitik özelliklerini incelim.

$C^2_{q,\omega}(\omega_0, b) = \{y \in L^2_{q,\omega}(\omega_0, b)$: y(·) ve $D_{\,q,\omega}$ y(·) ω_0 noktasında sürekli } olsun.

Hamza ve Ahmed (Hamza ve Ahmed, 2013) (2.11) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümesine sahip olduğunu ispatlamıştır.

q, ω-trigonometrik fonksiyonlarını şu şekilde tanımlanır

$$C_{q,\omega}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} (t(1-q) - \omega)^{2n}}{(q;q)_{2n}}, \tag{2.19}$$

$$S_{q,\omega}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (t(1-q)-\omega)^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}}, \qquad t \in \mathbb{C}. \tag{2.20}$$

$C_{q,\omega}(\cdot)$ ve $S_{q,\omega}(\cdot)$ fonksiyonları

$$\frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} \mathrm{y(t)} = y(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.21}$$

$y(\omega_0) = 1, \quad D_{\,q,\omega}\mathrm{y}(\omega_0) = 0, \quad y(\omega_0) = 0, \quad D_{\,q,\omega}\mathrm{y}(\omega_0) = 1,$

başlangıç değer problemlemini sağlamaktadırlar

Teorem 2.6. (2.11) denkleminin çözümlerinin q, ω-Wronskianı, hem t hem de λ değişkeninden bağımsızdır (Annaby vd., 2018).

Teorem 2.7. $\lambda \in \mathbb{C}$ için, (2.11) denklemi

$$\phi(\omega_0,\lambda) = c_1, \; D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\phi(\omega_0,\lambda) := \lim_{t\to\omega_0^+} \frac{\phi(t,\lambda)-\phi(\omega_0,\lambda)}{t-\omega_0} = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \tag{2.22}$$

başlangıç koşullarına bağlı olarak, tek bir ϕ (t,λ) çözümüne sahiptir. Ayrıca $t \in (\omega_0, b)$ için, $\phi(t,\lambda)$ çözüm fonksiyonu λ değişkenine göre tam fonksiyondur (Annaby vd., 2018).

İspat. $\mu := \sqrt{\lambda}$ olsun. Dolayısıyla

$$x_1(t,\lambda) = C_{q,\omega}(t,\mu) \quad \text{ve} \quad x_2(t,\lambda) = \begin{cases} \frac{S_{q,\omega}(t,\mu)}{\mu}, & \mu \neq 0, \\ t, & \mu = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

fonksiyonları

$$\frac{-1}{q} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}} D_{q,\omega} \mathrm{y(t)} - \lambda y(t) = 0.$$

denkleminin temel bir çözüm kümesi oluştururlar. Burada

$$C_{q,\omega}(t,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} (\mu(1-q)-\omega)^{2n}}{(q;q)_{2n}},$$

$$S_{q,\omega}(t,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (\mu(1-q)-\omega)^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}}, \qquad t \in \mathbb{C},$$

ile tanımlanır. Daha önceki teoremden $W_{q,\omega}\big(x_1(t,\lambda), x_2(t,\lambda)\big) \equiv 1$. Şimdi

$$\varphi_1(t,\lambda) = c_1 x_1(t,\lambda) + c_2 x_2(t,\lambda), \tag{2.24}$$

$$\varphi_{m+1}(t,\lambda) = c_1 x_1(t,\lambda) + c_2 x_2(t,\lambda)$$
$$+q\int_{\omega_0}^{t} [x_2(t,\lambda)x_1(h(s),\lambda) - x_1(t,\lambda)x_2(h(s),\lambda)]p\big(h(s)\big)\varphi_m\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s, \tag{2.25}$$

m = 1, 2, 3, ...

olmak üzere $\{\varphi_m(\cdot,\lambda)\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini tanımlayalım.

Sabit bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için, t değişkeninden bağımsız olarak B(λ) ve A pozitif sayıları

$$|p(t)| \leq A, \quad \text{ve} \quad |x_i(t,\lambda)| \leq \sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}}, \qquad i = 1,2, t \in (\omega_0, b), \tag{2.26}$$

olacak şekilde seçelim.

$$K(\lambda) \coloneqq (|c_1| + |c_2|) \sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}}$$

yazılırsa her $t \in (\omega_0, b)$ için $\varphi_1(t,\lambda) \leq K(\lambda)$ elde edilir.

Şimdi tümevarım kavramını kullanarak

$$|\varphi_{m+1}(t,\lambda) - \varphi_m(t,\lambda)| \leq K(\lambda) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(AB(\lambda)(t(1-q)-\omega))^m}{(q,q)_m}, m = 1,2, \ldots. \tag{2.27}$$

eşitsizliğini ispatlayacağız. İlk olarak, üçgen eşitsizliğinden

$$|\varphi_2(t,\lambda) - \varphi_1(t,\lambda)|$$

$$= q\left|\int_{\omega_0}^{t}[x_2(t,\lambda)x_1(h(s),\lambda)-x_1(t,\lambda)x_2(h(s),\lambda)]p\big(h(s)\big)\varphi_1\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s\right|$$

$$\leq qAK(\lambda)2\left(\sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}}\right)^2\int_{\omega_0}^{t}d_{q,\omega}s$$

$$= qAK(\lambda)B(\lambda)\frac{[t(1-q)-\omega)]}{1-q} \tag{2.28}$$

bulunur. Bazı m sayıları için (2.27) ifadesinin doğruluğunu varsayalım. O zaman

$$|\varphi_{m+2}(t,\lambda)-\varphi_{m+1}(t,\lambda)|$$

$$\leq q\left|\int_{\omega_0}^{t}\begin{matrix}[x_2(t,\lambda)x_1(h(s),\lambda)-x_1(t,\lambda)x_2(h(s),\lambda)]\\ \times p\big(h(s)\big)[\varphi_{m+1}(h(s),\lambda)-\varphi_m(h(s),\lambda)]d_{q,\omega}s\end{matrix}\right|$$

$$\leq qAB(\lambda)\int_{\omega_0}^{t}|\varphi_{m+1}(h^{k+1}(t),\lambda)-\varphi_m(h^{k+1}(t),\lambda)|d_{q,\omega}s$$

$$\leq qK(\lambda)q^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{(AB(\lambda)(t(1-q)-\omega))^{m+1}}{(q,q)_m}\sum_{k=0}^{\infty}q^{k+mk+m}$$

$$\leq K(\lambda)q^{\frac{m^2+3m+2}{2}}\frac{(AB(\lambda)(t(1-q)-\omega))^{m}}{(q,q)_m}.\frac{1}{(1-q^{m+1})}$$

$$\leq K(\lambda)q^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}\frac{(AB(\lambda)(t(1-q)-\omega))^{m}}{(q,q)_{m+1}}, \tag{2.29}$$

elde edilir. Bu nedenle, (2.27) eşitsizliği her bir $m \in \mathrm{N}$ için doğrudur. (2.27) eşitsizliği

$$\varphi_1(t,\lambda)+\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_{m+1}(t,\lambda)-\varphi_m(t,\lambda) \tag{2.30}$$

serisinin (ω_0, b) aralığı üzerinde düzgün yakınsamasını garanti eder. Serinin m'inci kısmi toplamları $\varphi_{m+1}(\cdot,\lambda)$, olduğu için, o halde $\varphi_{m+1}(\cdot,\lambda)$ (ω_0,b) aralığı üzerinde bir $\varphi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Şimdi tümevarımla, $\varphi_m(t,\lambda)$ ve $D_{q,\omega}\varphi_m(t,\lambda)$ fonksiyonları ω_0 noktasında sürekli olduğunu ispatlayalım. m = 1, 2, 3, . . . için

$$D_{q,\omega}\varphi_{m+1}(t,\lambda) = c_1 D_{q,\omega}x_1(t,\lambda) + c_2 D_{q,\omega}x_2(t,\lambda)$$
$$+q\int_{\omega_0}^{t}\left[D_{q,\omega}x_2(t,\lambda)x_1(h(s),\lambda) - D_{q,\omega}x_1(t,\lambda)x_2(h(s),\lambda)\right]p\big(h(s)\big)\varphi_m\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s \quad (2.31)$$

olur. Bu nedenle $\phi(\cdot,\lambda)$ ve $D_{q,\omega}\phi_m(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları $\omega_0'da$ süreklidirler, yani $\phi(\cdot,\lambda) \in C^2_{q,\omega}(\omega_0,b)$. (2.24) eşitliğinde $m \to \infty$ için

$$\phi(t,\lambda) = c_1 x_1(t,\lambda) + c_2 x_2(t,\lambda)$$
$$+q\int_{\omega_0}^{t}[x_2(t,\lambda)x_1(h(s),\lambda) - x_1(t,\lambda)x_2(h(s),\lambda)]p\big(h(s)\big)\phi_m\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s. \quad (2.32)$$

elde edilir. Düzgün yakınsama nedeniyle integrasyon ve limit sırası değiştirilebilir.

Şimdi $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu (2.11) denkleminin (2.22) koşullarına bağlı olarak çözümü olduğunu gösterelim.

$\phi(\omega_0,\lambda) = c_1$ ve

$$D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\phi(\omega_0,\lambda) \coloneqq \lim_{t\to\omega_0^+}\frac{\phi(t,\lambda)-\phi(\omega_0,\lambda)}{t-\omega_0}$$

$$= c_1 D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\phi_1(\omega_0,\lambda) + c_2 D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\phi_2(\omega_0,\lambda) = c_2, \quad (2.33)$$

olur.

$t = \omega_0$ olsun. (2.32) ifadesinden

$$D_{q,\omega}\phi(t,\lambda) = c_1 D_{q,\omega}x_1(t,\lambda) + c_2 D_{q,\omega}x_2(t,\lambda)$$

$$+q\int_{\omega_0}^{t}\left[D_{q,\omega}x_2(t,\lambda)x_1(h(s),\lambda)-D_{q,\omega}x_1(t,\lambda)x_2(h(s),\lambda)\right]p\big(h(s)\big)\phi\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s \quad (2.34)$$

elde edilir. O zaman

$$\frac{-1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}D_{q,\omega}\phi(t,\lambda)$$

$$=\frac{-1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}D_{q,\omega}x_2(t,\lambda)\left(c_1-\ q\int_{\omega_0}^{t}x_1(h(s),\lambda)p\big(h(s)\big)\phi\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s\right)$$
$$-\frac{1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}D_{q,\omega}x_1(t,\lambda)\left(c_2+\ q\int_{\omega_0}^{t}x_2(h(s),\lambda)p\big(h(s)\big)\phi\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s\right)-p(t)\phi(t,\lambda)$$

$$=\lambda\phi(t,\lambda)-p(t)\phi(t,\lambda) \quad (2.35)$$

dir.

Eğer $t=\omega_0$ ise, o zaman

$$D^2y(\omega_0)-qp(\omega_0)y(\omega_0)=q\lambda y(\omega_0) \quad (2.36)$$

dir. Doğrudan hesaplamalarla

$$D_{q,\omega}^2\phi(\omega_0,\lambda)=c_1D_{q,\omega}^2x_1(\omega_0,\lambda)+c_2D_{q,\omega}^2x_2(\omega_0,\lambda)+qp(\omega_0)\phi(\omega_0,\lambda)$$

$$-q\lambda c_1x_1(\omega_0,\lambda)-q\lambda c_1x_1(\omega_0,\lambda)+qp(\omega_0)\phi(\omega_0,\lambda)$$

$$=-q\lambda\phi(\omega_0,\lambda)+qp(\omega_0)\phi(\omega_0,\lambda), \quad (2.37)$$

olduğu görülür. Yani, $\phi(t,\lambda)$ fonksiyonu (2.11) denklemini $t=\omega_0$ noktasında sağlar.

Şimdi çözümün tekliğini gösterelim. $\Psi_i(t,\lambda)$,

i=1,2, (2.11),(2.22) probleminin iki çözümü olduğunu farz edelim.

$\Upsilon(t,\lambda)=\Psi_1(t,\lambda)-\Psi_2(t,\lambda),\ t\in(\omega_0,b)$

olsun. O zaman $\Upsilon(t,\lambda)$ (2.11) denkleminin

$\Upsilon(\omega_0,\lambda) = D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Upsilon(\omega_0,\lambda) = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümüdür. q,-ω kısmi integrasyonu iki kez (2.11) denklemine uygulanırsa

$$\Upsilon(\omega_0,\lambda) = \int_{\omega_0}^{t}(t-s)\big(\lambda-p(s)\big)\Upsilon(s,\lambda)d_{q,\omega}s. \tag{2.38}$$

elde edilir.

$\Upsilon(t,\lambda)\ ve\ p(t)$ fonksiyonları ω_0 noktasında sürekli oldukları için,

$$P_{\lambda,t} = \max_{n\in N}|\Upsilon(h^n(t),\lambda)|, \qquad R_{\lambda,t} = \max_{n\in N}\big|\lambda-p\big(h^n(t)\big)\big|, \tag{2.39}$$

olacak şekilde pozitif sayılar $P_{t,\lambda}, R_{t,\lambda}$ mevcuttur.

Tekrar matematiksel tümevarımla,

$$|\Upsilon(t,\lambda)| \le P_{\lambda,t}R_{\lambda,t}^{k}q^{k^2}(1-q)^{2k}\frac{(t-\omega_0)^{2k}}{(q,q)_{2k}}, \quad k\in N, \quad t\in(\omega_0,b), \tag{2.40}$$

bulunur.

Nitekim eğer (2.40) ifadesi $k\in N$ içinde sağlanırsa, o zaman (2.38) denkleminden

$$|\Upsilon(t,\lambda)| \le P_{\lambda,t}R_{\lambda,t}^{k+1}q^{k^2}\frac{(1-q)^{2k}}{(q,q)_{2k}}\int_{\omega_0}^{t}(t-s)(s-\omega_0)^{2k}d_{q,\omega}s$$

$$= P_{\lambda,t}R_{\lambda,t}^{k+1}q^{k^2}\frac{(1-q)^{2k}}{(q,q)_{2k}}\sum_{n=0}^{\infty}q^n(t(1-q)-\omega)\,(t-h^n(t))(h^n(t)-\omega_0)^{2k}$$

$$= P_{\lambda,t}R_{\lambda,t}^{k+1}q^{k^2}\frac{(1-q)^{2k}}{(q,q)_{2k}}\sum_{n=0}^{\infty}q^n(1-q)\,(t-\omega_0)(1-q^n)(t-\omega_0)(q^n(t-\omega_0))^{2k}$$

$$= P_{\lambda,t}R_{\lambda,t}^{k+1}q^{k^2}\frac{(1-q)^{2k+1}(t-\omega_0)^{2k+2}}{(q,q)_{2k}}\sum_{n=0}^{\infty}q^{(2k+1)n}(1-q^n)$$

$$= P_{\lambda,t}R_{\lambda,t}^{k+1}q^{k^2}\frac{(1-q)^{2k+1}(t-\omega_0)^{2k+2}}{(q,q)_{2k}}\left(\frac{q^{(2k+1)}(1-q)}{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n+2})}\right)$$

$$= P_{\lambda,t} R_{\lambda,t}^{k+1} q^{(k+1)^2} \frac{(1-q)^{2k+2}(t-\omega_0)^{2k+2}}{(q,q)_{2k+2}},$$

bulunur. Dolayısıyla, (2.40) k + 1 için geçerli olur. Sonuç olarak, (2.40) tüm $k \in N$ değerleri için doğrudur.

$$\lim_{k\to\infty} P_{\lambda,t} R_{\lambda,t}^{k} q^{k^2} (1-q)^{2k} \frac{(t-\omega_0)^{2k}}{(q,q)_{2k}} = 0$$

olduğundan her $t \in (\omega_0, b)$ için $\Upsilon(t,\lambda) = 0$ olur. Bu çözümün tekliğini ispatlıyor.
Son olarak, $\phi(t,\lambda)$,$t \in (\omega_0, b)$ λ değişkenine göre tam fonksiyon olduğunu ispatlayalım. $t \in [\omega_0, b]$ için, keyfi bir pozitif ρ için $\phi(t,\lambda)$ fonksiyonun her
$D_\rho \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \le p\}$
diskinde analitik olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $t \in [\omega_0, b]$ için hem $\varphi_m(t,\lambda)$ hem de $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_m(t,\lambda)$ D_ρ diski üzerinde analitik ve tüm $\lambda \in D_\rho$, için $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_m(t,\lambda)$ (ω_0, λ) noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $t \in (\omega_0, b)$ için $x_1(t,\lambda)\ ve\ x_2(t,\lambda)\ \lambda$ değişkenine göre tam fonksiyonlarıdır. Ayrıca her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\frac{\partial}{\partial\lambda}X_i(t,\lambda)$ (ω_0, λ)'da süreklidirler. Dolayısıyla $m = 1$ için ifade doğrudur. İfadenin $m \ge 1$ için doğru olduğunu varsayalım. O zaman $t_0 \in (\omega_0, b)$, $\lambda_0 \in D_\rho$ için

$$\left.\frac{\partial\varphi_{m+1}(t_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$

$$= q \left.\frac{\partial x_2(t_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \int_{\omega_0}^{t_0} x_1(h(t),\lambda)\varphi_m(h(t),\lambda) d_{q,\omega}t + \left.\frac{\partial\varphi_1(t_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$$
$$- q \left.\frac{\partial x_1(t_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \int_{\omega_0}^{t_0} x_2(h(t),\lambda)\varphi_m(h(t),\lambda) d_{q,\omega}t$$
$$+ q x_2(t_0,\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\left(\int_{\omega_0}^{t_0} x_1(h(t),\lambda)\varphi_m(h(t),\lambda) d_{q,\omega}t\right)\right|_{\lambda=\lambda_0}$$
$$- q x_1(t_0,\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda}\left.\left(\int_{\omega_0}^{t_0} x_2(h(t),\lambda)\varphi_m(h(t),\lambda) d_{q,\omega}t\right)\right|_{\lambda=\lambda_0} \qquad (2.41)$$

elde edilir.

Tümevarımdan $\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(X_i(t,\lambda)\varphi_m(h(t),\lambda)\big), i=1,2,\ \ (\omega_0,\lambda_0)$'da sürekli olduğu elde edilir. Bu nedenle, $D_\eta(\lambda_0)=\{z\in\mathbb{C}: |z-\lambda_0|<\eta\}$ olmak üzere

$$\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(x_i(h^n(t_0),\lambda)\varphi_m(h^n(t_0),\lambda)\big)\right| < M, n\in N, \qquad \lambda\in D_\eta(\lambda_0), \tag{2.42}$$

$M,\eta>0$ sabitleri mevcuttur. Dolayısıyla her $\lambda\in D_\eta(\lambda_0)$ için

$$(t_0(1-q)-\omega)q^n\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(x_i(h^{n+1}(t_0),\lambda)\varphi_m(h^{n+1}(t_0),\lambda)\big)\right|$$
$$\le (t_0(1-q)-\omega)q^n M, \quad n\in N,$$

olur.

Buna bağlı olarak,

$$\int_{\omega_0}^{t_0}\frac{\partial}{\partial\lambda}(x_i(h(t),\lambda)\varphi_m(h^m(t),\lambda)d_{q,\omega}t, \ \ i=1,2, \tag{2.43}$$

$\mathrm{q},\omega-$ integrallerine karşılık gelen seriler $\lambda=\lambda_0$ bir komşuluk bölgesinde düzgün yakınsaktır. O zaman $\varphi_{m+1}(t_0,\lambda)$ λ_0'da analitiktir. Şimdi (2.41)'deki diferansiyel ve integrasyon işlemlerininin sırasını değiştirebiliriz.

$t_0, ile\ \lambda_0$ keyfi olduğundan her $t\in(\omega_0,b),\ \lambda\in\Omega_M$ için

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_{m+1}(t,\lambda)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(t,\lambda)+q\int_{\omega_0}^{t}\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(x_2(t,\lambda)x_1(h(s),\lambda)\varphi_m(h(s),\lambda)\big)p\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s$$
$$-\ q\int_{\omega_0}^{t}\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(x_1(t,\lambda)x_2(h(s),\lambda)\varphi_m(h(s),\lambda)\big)p\big(h(s)\big)d_{q,\omega}s \tag{2.44}$$

dir. Yine, tümevarımdan, (2.44)'daki integraller (ω_0,λ)'da süreklidirler. Sonuç olarak $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_{m+1}(t,\lambda)$ (ω_0,λ)'da süreklidirler. $t_0\in[\omega_0,b]$ keyfi olsun. O zaman

$$|x_i(t_0,\lambda)|\le\sqrt{\tfrac{\Upsilon(t_0)}{2}}, i=1,2, \qquad |\varphi_1(t_0,\lambda)|\le\beta(t_0), \qquad \lambda\in D_\rho, \tag{2.45}$$

olacak şekilde $\Upsilon(t_0),\beta(t_0)>0$ mevcuttur.

Sonuç olarak, tümevarımdan

$$|\varphi_{m+1}(t_0,\lambda) - \varphi_m(t_0,\lambda)|$$
$$\leq \beta(t_0) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(A\Upsilon(t_0)(t(1-q)-\omega))^m}{(q,q)_m}, \qquad m = 1,2,\ldots. \tag{2.46}$$

elde edilir. (2.30) serileri $t = t_0$ için D_ρ'de $\phi(t_0,\lambda)$'ya düzgün olarak yakınsar. Dolayısıyla $\phi(t_0,\lambda)$ D_ρ'de analitiktir, yani tamdır.

$\phi_1(\cdot,\lambda)$ ve $\phi_2(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları

$\phi_1(\omega_0,\lambda) = 1, \quad D_{q,\omega}\phi_1(\omega_0,\lambda) = 0; \quad \phi_2(\omega_0,\lambda) = 0, \quad D_{q,\omega}\phi_2(\omega_0,\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

başlangıç koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözüm olsunlar.

B_1, B_2 rastgele sabitler olmak üzere (2.11) denkleminin her çözümü

$$y(t,\lambda) = B_1\phi_1(t,\lambda) + B_2\phi_2(t,\lambda), \tag{2.47}$$

şeklinde yazılabilir

(2.11) denkleminin bir $y(\cdot,\lambda)$ çözümü, (2.12)–(2.13) sınır koşullarını sağlıyorsa, yani,

$$B_1U_1(\phi_1) + B_2U_1(\phi_2) = 0, \tag{2.48}$$
$$B_1U_2(\phi_1) + B_2U_2(\phi_2) = 0. \tag{2.49}$$

lineer sistemi için aşikar olmayan bir çözüm elde edilebilirse öz fonksiyon olacaktır.

Bu nedenle, λ bir öz değerdir ancak ve ancak

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix} = 0.$$

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonu (2.11)- (2.13) probleminin karakteristik determinantı olarak adlandırılır. $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları tam olarak (2.11)–(2.13) probleminin özdeğerleridir. Her bir sabit $t \in [\omega_0, b]$ için $\phi_1(t,\lambda)$ ve $\phi_2(t,\lambda)$ fonksiyonları λ değişkenine göre tam oldukları için, $\Delta(\lambda)$ de tamdır. Bu nedenle, problemin özdeğerleri, sonlu limit noktaları olmaksızın sayılabilir sayıdadırlar.

Teorem 2.8. (2.11)–(2.13) probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$'nın basit sıfırlarıdır (Annaby vd., 2018).

İspat. $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\Theta_1(t,\lambda)$ ve $\Theta_2(t,\lambda)$ fonksiyonlarını

$$\Theta_1(t,\lambda) \coloneqq U_1(\phi_2)\phi_1(t,\lambda) - U_1(\phi_1)\phi_2(t,\lambda),$$
$$\Theta_2(t,\lambda) \coloneqq U_2(\phi_2)\phi_1(t,\lambda) - U_2(\phi_1)\phi_2(t,\lambda). \qquad (2.50)$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Dolayısıyla $\Theta_1(t,\lambda)$ ve $\Theta_2(t,\lambda)$ (2.11) denkleminin

$$\Theta_1(\omega_0,\lambda) = a_2, \qquad D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta_1(\omega_0,\lambda) = -a_1,$$
$$\Theta_2(b,\lambda) = b_2, \qquad D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta_2(b,\lambda) = -b_1. \qquad (2.51)$$

koşullarını sağlayan çözümleridirler.

$$W_{q,\omega}\big(\Theta_1(\ \cdot\ ,\lambda),\Theta_2(\ \cdot\ ,\lambda)\big)(t,\lambda) = \Delta(\lambda)W_{q,\omega}(\phi_1,\phi_2)(t,\lambda) = \Delta(\lambda). \qquad (2.52)$$

olduğu gösterilebilir.

$$W_{q,\omega}(\phi_1,\phi_2)(t,\lambda) = W_{q,\omega}(\phi_1,\phi_2)(\omega_0,\lambda) = 1$$

olduğundan

$$W_{q,\omega}\big(\Theta_1(\ \cdot\ ,\lambda),\Theta_2(\ \cdot\ ,\lambda)\big)(t,\lambda) = \Delta(\lambda)W_{q,\omega}(\phi_1,\phi_2)(t,\lambda) = \Delta(\lambda) \qquad (2.53)$$

elde edilir.

λ_0 (2.11)–(2.13) probleminin bir özdeğeri olsun. Böylece λ_0 bir gerçek sayıdır ve dolayısıyla da $\Theta_i(t,\lambda_0)$, $i = 1,2$ gerçek değerli olarak alınabilir. Ayrıca, $\Delta(\lambda_0) = 0$ dir. (2.52) ifadesinden

$$W_{q,\omega}\big(\Theta_1(t,\lambda_0),\Theta_2(t,\lambda_0)\big) = 0,$$

elde edilir, yani,

$$\Theta_1(t,\lambda_0)D_{q,\omega}\Theta_2(t,\lambda_0) - \Theta_2(t,\lambda_0)D_{q,\omega}\Theta_1(t,\lambda_0) = 0.$$

Geometrik basitlik kavramından

$$\Theta_1(t,\lambda_0) = k_0\Theta_2(t,\lambda_0), \tag{2.54}$$

Olacak biçimde sıfır olmayan bir k_0 sabiti vardır. Yani, $\Theta_1(t,\lambda_0), \Theta_2(t,\lambda_0)$ lineer bağımlı özfonksiyonlardır. (2.54) ifadesinden

$$\Theta_1(b,\lambda_0) = k_0 a_{22} = k_0\Theta_2(b,\lambda), \tag{2.55}$$
$$D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta 1(b,\lambda_0) = -k_0 a_{21} = D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta 1(b,\lambda). \tag{2.56}$$

elde edilir.

(2.18) *q, ω*-Lagrange's özdeşliğinden ve $z(t) = \Theta_1(t,\lambda)$ ve $y(t) = \Theta_1(t,\lambda_0)$ alarak

$$(\lambda-\lambda_0)\int_{\omega_0}^{b}\Theta_1(t,\lambda_0)\,\Theta_1(t,\lambda)d_{q,\omega}t$$

$$= \Theta_1(b,\lambda)D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta_1(b,\lambda_0) - \Theta_1(b,\lambda_0)D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta_1(b,\lambda)$$

$$= k_0\big(\Theta_1(b,\lambda)\big)D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta_2(b,\lambda) - \Theta_2(b,\lambda)D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}\Theta_1(b,\lambda))$$

$$= k_0 W_{q,\omega}\big(\Theta_1(\,\cdot\,,\lambda),\Theta_2(\,\cdot\,,\lambda)\big)\big(h^{-1}(b)\big)$$

$$= k_0\Delta(\lambda). \tag{2.57}$$

elde edilir.

$\Delta(\lambda)$ λ değişkenine göre tam fonksiyon olduğu için

$$\Delta'(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_0} = \frac{1}{k_0}\int_{\omega_0}^{b}\Theta_1(t,\lambda_0)^2\,d_{q,\omega}t \neq 0. \tag{2.58}$$

Dolayısıyla λ_0 $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir basit sıfırıdır.

Tanım 2.9. Lineer uzaylarda tanımlanmış olan dönüşümlere operatör denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.10. U, bir kompleks lineer uzay olsun. Her u,v∈ U ve $\lambda \in \mathbb{K}$için

1. $(u,u) \geq 0; (u,u) = 0 \;\Leftrightarrow u\; = 0$

2. $(u,v) = \overline{(v,u)}$

3. $(\lambda u, v) = \lambda(u,v)$

4. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$

Şartlarını sağlayan ve (u,v) ile gösterilen kompleks sayısına u ve v elemanlarının iç çarpımı denir ve U lineer uzayına da iç çarpım uzayı denir:

Ayrıca verilen bu özellikleri dikkate aldığımızda $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u,v)$ ve

$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de yazılabilir. (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.11. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} \tag{2.59}$$

normuna göre tam ise, yani $\big(U, (.,.)\big)$içindeki her Cauchy dizisi *U'* nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı denir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.12. H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan bir *T* lineer operatörü verilsin. Her $u \in H$ için,

$$\|Tu\| \leq k\|u\|, \tag{2.60}$$

eşitsizliğini sağlayan bir *k* sayısı varsa T ye *sınırlı lineer operatör* denir. Bu *k* sayılarının en küçüğüne *T* sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| \qquad (2.61)$$

ile verilir **(**Kreyszig, 1978**)**.

Tanım 2.13. *H* bir Hilbert uzayı ve *T* bu uzayda bir lineer operatör olsun. *T* nin tanım kümesi *$\mathcal{D}$(T), H* Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^{*}t) \qquad (2.62)$$

eşitliğini saplayan T^{*} operatörüne T operatörünün eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in$ H vektörlerinden oluşan kümeye T^{*} operatörünün tanım kümesi denir ve D(T^{*}) ile gösterilir. T^{*} operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

i. $(T^{*})^{*} = T$

ii. $(\lambda T)^{*} = \bar{\lambda} T^{*}$

iii. $(T + L)^{*} = T^{*} + L^{*}$

iv. $(T)^{*} = L^{*}T^{*}$

v. $\|T^{*}\| = \|T\|$ $(T\ sınırlı\ iken)$

(Naimark, 1968).

Tanım 2.14. $T^{*} = T$ ise, *T'* ye kendine eş operatör adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.15. *A* lineer operatörünün tanım kümesi *D(A), H* Hilbert uzayında yoğun olsun.

Her $f \in D(A)$ için

$$\forall f \in D(A), Im(Af, f) \geq 0 \tag{2.63}$$

ise, A operatörüne disipatif operatör denir.
Her $f \in D(A)$ için

$$Im(Af, f) \leq 0 \tag{2.64}$$

ise, A operatörüne akretif operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Eğer A disipatif (akretif) operatörü kendinden farklı disipatif (akretif) genişlemeye sahip değilse A operatörüne maksimal disipatif (akretif) operatör denir.

Tanım 2.16. Tanım kümesin $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için, $f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa, A operatörüne Hermitian denir (Naimark,1968).

Tanım 2.17. $A: D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun $\left(\overline{D(A)} = H\right)$. Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise, yani $A \subset A^*$ ise, A ya simetrik operatör denir (Naimark,1968).

Tanım 2.18. $D(U), U$ operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(U_x, U_y) = (x, y)$$

İse, U ya izometrik operatör denir (Akhiezer and Glazman, 1963).

Tanım 2.19. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm H Hilbert uzayına eşit ise, U operatörüne üniter operatör denir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart

$U^*U = UU^* = I$ olmasıdır (Akhiezer and Glazman, 1963).

Tanım 2.20. $f \in D(A)$ için,

$$\tilde{A}f = Af$$

ve $D(\tilde{A}) \subset D(A)$ oluyorsa, A operatörüne $\tilde{A}$ operatörünün genişlemesidir denir. $\tilde{A}$ operatörüne ise A operatörünün kısıtlamasıdır denir. Eğer A operatörü, simetrik $\tilde{A}$ operatörünün bir simetrik genişlemesi ise, $A \subset \tilde{A}^*$ dır. Yani, $\tilde{A}$ operatörünün her simetrik genişlemesi, $\tilde{A}^*$ operatörünün bir kısıtlamasıdır (Naimark,1968).

Tanım 2.21. Simetrik bir A operatörünün uygun bir simetrik genişlemesi yoksa, A operatörü maksimaldir denir (Naimark,1968).

Kendine eş (self-adjoint) her A operatörü, maksimal simetrik bir operatördür.

3. DİSİPATİF GENİŞLEMELER

Bu bölümde Hilbert uzayda simetrik operatörlerin disipatif genişlemeleri ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

3.1. Disipatif Genişlemeler

Teorem 3.1.1. Her disipatif operatör maksimal disipatif genişlemeye sahiptir. Disipatif bir A operatörün maksimal disipatif olması için gerek ve yeter koşul $Im\lambda < 0$ için

$$R(A - \lambda I) = H$$

olmasıdır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: A kapalı disipatif operatör, $Im\lambda < 0$ olsun. O zaman $R(A - \lambda I) = H$ kapalıdır.

$$Im((A - \lambda I)f, f) \geq -Im\lambda(f, f)$$

Olduğu bilinmektedir. Fakat

$$Im((A - \lambda I)f, f) \leq \|(A - \lambda I)f\|\|f\| - Im\lambda \leq \|(A - \lambda I)f\|$$

dir. Öyleyse $R(A - \lambda I) = H$ kapalıdır.

Şimdi iki durum oluşur:

1. $Im\lambda < 0$ için $R(A - \lambda I) = H$ olursa A maksimal disipatif operatör olur. Aksi halde A operatörünün kendisinden farklı disipatif $\tilde{A}$ genişlemesi için bir $f_0 \neq 0$ elemanı bulunur öyle ki $(\tilde{A} - \lambda I)f_0 = 0$ olur. Buradan

$Im(\tilde{A}f_0, f_0) = Im\lambda(f_0, f_0)$

olur ki bu $\tilde{A}$ nın disipatifliği ile çelişir.

2. $R(A - \lambda I) \neq H$ ise A operatörü kendisinden farklı disipatif genişlemeye sahiptir ve bu genişleme şu şekilde yapılır:

$N = H \ominus R(A - \lambda I)$ olmak üzere

$D_{\tilde{A}} = D_A + N,$

$\tilde{A}(f + u) = Af + \bar{\lambda}u, f \in D_A, u \in N$

operatörünü tanımlayalım.

$\tilde{A}$ operatörü doğru tanımlanır: $f + u = 0$ ise

$(Af, f) = (Au, u) = (u, \lambda u) = \lambda(u, u)$

dir. $Im(Af, f) \leq 0$ ise $u = 0, f = 0$ olur.

$\tilde{A}$ operatörü disipatiftir:

$\left(\tilde{A}(f + u), f + u\right) = (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (Af, u) + \bar{\lambda}(u, f)$

$= (Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + (f, A^{*}u) + \bar{\lambda}(u, f)$

$=(Af, f) + \bar{\lambda}(u, u) + \lambda(f, u) + \bar{\lambda}(u, f)$

Buradan

$$Im(\tilde{A}(f+u), f+u) = Im(Af, f) + Im\bar{\lambda}(u,u) \geq 0.$$

Son olarak $R(\tilde{A} - \lambda I) = H$ olduğunu kontrol etmek zor değildir. Yukarıda gösterildiği gibi $\tilde{A}$ operatörü maksimal disipatiftir.

Teorem 3.1.1. den bir operatör maksimal disipatif ve maksimal akretif olması için gerek ve yeter koşul operatörün kendine eş olmasıdır. Maksimal disipatif veya maksimal akretif simetrik operatöre maksimal simetrik operatör denir.

Teorem 3.1.1. den A simetrik operatörü maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul operatörün defekt sayılarından biri sıfıra eşit olmasıdır.

A operatörünün maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul A operatörünün kendinden farklı simetrik genişlemeye sahip olmamasıdır.

Teorem 3.1.2. $\tilde{A}$ operatörü A simetrik operatörünün disipatif (akretif) genişlemesi olsun. O zaman $\tilde{A} \subset A^*$ dır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: Farz edelim ki

$\tilde{A} \supset A$

disipatif bir genişleme olsun. Teorem 3.1.1 ile $\tilde{A}$ operatörünü maksimal disipatif kabul edelim.

$$B = (A - iI)(A + iI)^{-1}, \tilde{B} = \left(\tilde{A} - iI\right)\left(\tilde{A} + iI\right)^{-1} \quad (3.1)$$

operatörlerini ele alalım. $-i$ disipatif (simetrik) operatörün özdeğerin olamayacağından (3.1) anlamlıdır. B operatörü

$R(A + iI)$

uzayını

$R(A - iI)$

uzayına izometrik olarak resmeder. Eğer $f \in R(A + iI),$ yani $f = (A + iI)g, g \in D_A$ ise,

$$\|Bf\|^2 = \|(A - iI)g\|^2 = \big((A - iI)g, (A - iI)\big)$$

$$= (Ag, Ag) - i(g - Ag) + i(Ag, g) + (g, g)$$

$$\|f\|^2 = \|(A + iI)g\|^2 = \big((A + iI)g, (A + iI)\big)$$

$$= (Ag, Ag) + i(g, Ag) - i(Ag, g) + (g, g)$$

dir.

$(g, Ag) = (Ag, g)$ ise
$\|Bf\| = \|f\|$

dir. Benzer şekilde $\tilde{B}$ operatörünün bir büzülme operatörü olduğu gösterilir. (3.1) ifadesinden

$$A = -i(B + I)(B - I)^{-1}, \qquad \tilde{A} = -i(\tilde{B} + I)(\tilde{B} - I)^{-1}$$

dir. Açıktır ki $\tilde{B}$operatörü B operatörünün genişlemesidir. $u \in N_{-i}$olsun. O zaman $u \perp D_B$ dir. $v \in D_B, \xi \in \mathbb{C}$ için

$$\|\xi v + u\|^2 - \left\|\tilde{B}(\xi v + u)\right\|^2 \geq 0 \tag{3.2}$$

dir.

$$\|\tilde{B}v\| = \|Bv\| = \|v\|$$

olduğunu dikkate alınırsa (3.2) ifadesinden

$$\|u\|^2 - \|\tilde{B}u\|^2 - 2Re(\xi(\tilde{B}v, \tilde{B}v)) \geq 0$$

elde edilir. ξ keyfi olduğundan

$$\left(\tilde{B}v, \tilde{B}v\right) = 0$$

olur. Böylece $her\ v \in D_B$ için

$\tilde{B}_u \perp \tilde{B}_v = Bv$

dir. Yani

$\tilde{B}_u \perp R(A - iI), \tilde{B}_u \in N_i$.

Buradan da C, N_{-i} den N_i ye büzülme operatörü olmak üzere

$\tilde{B} = B \oplus C,\ g \in D_{\tilde{A}}$

olsun.

$$f = (\tilde{A} + iI)g$$

$$\tilde{B}f = (\tilde{A} - iI)g$$

olur. Son iki eşitlikten

$f_1 \in R(A + iI), f_2 \in N_{-i}$

olmak üzere

$$g = \frac{1}{2i}\left(f - \tilde{B}f\right) = \frac{1}{2i}(f_1 + f_2 - Bf_1 - Cf_2)$$

$$=\frac{1}{2i}(f_1 - Bf_1) + \frac{1}{2i}(f_2 - Cf_2)$$

dir. B operatörünün tanımından

$f_1 - Bf_1 \in D_A,\ f_2 - Cf_2 \in N_{-i} \oplus N_i$.

Buradan $g \in D_{A^*}$ ve

$$A^{*}g = \frac{1}{2i}(f_1 - Bf_1) + \frac{1}{2i}(f_2 + Cf_2)$$

$$=\frac{1}{2}(f_1+Bf_1)+\frac{1}{2}(f_2+Cf_2)$$

dir. Diğer taraftan

$$\tilde{A}g = A^{*}g$$

dir.

3.2. Lineer Bağıntılar

Tanım 3.2.1. H bir Hilbert uzay olsun. $\theta \in H \oplus H$ keyfi lineer kümesine lineer bağıntı denir. θ_1, θ_2 lineer bağıntılar olsunlar. $\theta_1 \subset \theta_2$ ise θ_2 ye θ_1 in genişlemesi denir. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 3.2.2. θ lineer bağıntısında $\{x, x'\} \in \theta$ için

$$Im(x', x) \geq 0, (\ sırasıyla, Im(x', x) \leq 0, Im(x', x) = 0)$$

oluyorsa θ lineer bağıntısına disipatif (sırasıyla, akretif, simetrik) bağıntı denir. Eğer disipatif (akretif, simetrik) bağıntının kendisinden farklı disipatif genişlemesi yoksa bağıntı maksimal disipatifdir. Aynı anda hem maksimal disipatif hem de maksimal akretif olan simetrik bağıntı kendine eştir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991). θ disipatif bağıntısı ile eşleşen U_θ operatörünü tanımlayalım:

$$D_{U_\theta} = \{x' + ix : \{x, x'\} \in \theta\},$$

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix$$

olsun. U_θ operatörüne θ bağıntısının Cayley dönüşümü denir. U_θ operatörü iyi tanımlanmıştır. Eğer $\{x, x'\} \in \theta, \{y, y'\} \in \theta$ için $x' + ix = y' + iy$ olursa

$$\{x-y, x'-y'\} \in \theta, x'-y' = -i(x-y)$$

olur. Diğer taraftan

$$0 \leq Im(x'-y', x-y) = Im(-i(x-y), x-y) = -\|x-y\|^2$$

dir. Buradan $x = y, x' = y'$ elde edilir.

$$\|U_\theta(x'+ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x)$$

$$\|x'+ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x', x)$$

dir. θ bağıntısı disipatif olduğundan

$$\|U_\theta(x'+ix)\| \leq \|x'+ix\|, \{x, x'\} \in \theta \tag{3.3}$$

elde edilir. θ bağıntısı simetrik ise (3.3) eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.2.3 K, H bir Hilbert uzay üzerinde büzülme operatörü olsun.

$$(K-I)x' + i(K+I)x = 0 \tag{3.4}$$

$$(K-I)x' - i(K+I)x = 0 \tag{3.5}$$

eşitlikleri ile verilen lineer bağıntılar sırasıyla maksimal disipatif ve maksimal akretiftir. Tersine keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı (3.4), (3.5) biçiminde gösterilebilir. K büzülme operatörü bağıntı ile tek türlü belirlenir. Maksimal disipatif (maksimal akretif) bağıntı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul (3.4) ifadesindeki ((3.5) deki) K operatörünün izometrik olmasıdır. Kendine eş bağıntıların genel formu (3.4) veya (3.5) ile verilir, burada K operatörü üniterdir (Gorbachuk and Gorbachuk, 1991).

İspat: (3.4) ile tanımlı θ lineer bağıntısını alalım. $\{x, x'\} \in \theta$ olsun.

$K(x' + ix) = x' - ix$

$\|K(x' + ix)\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 - 2Im(x', x)$

$\|x' + ix\|^2 = \|x'\|^2 + \|x\|^2 + 2Im(x', x).$

Yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$4Im(x', x) = \|x' + ix\|^2 - \|K(x' + ix)\|^2 \geq 0 \tag{3.6}$$

elde edilir. θ bağıntısı disipatiftir. $u \in H$ için

$x' = \frac{1}{2}(u + Ku), x = \frac{1}{2i}(u - Ku)$

olsun. O zaman $\{x, x'\} \in \theta, x' + ix = u, x' - ix = Ku$ olur. Bu da $D_{U_\theta} = H, U_\theta = K$ olduğunu gösterir. θ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi ise $U_{\tilde{\theta}} \supset U_\theta$ olur. Bu ise ancak $U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olmasıyla mümkündür. Buradan $\tilde{\theta} = \theta$ olur. Yani θ maksimal disipatifdir. θ keyfi maksimal disipatif bağıntı, $U_\theta$da θ bağıntısının Cayley dönüşümü olsun. O zaman $D_{U_\theta} = H$ dır. Bunu ispatlayalım:

Tersini kabul edelim. $U_\theta, \overline{D_{U_\theta}}$ ya sürekli olarak genişletilebilir. $\overline{D_{U_\theta}} \neq H$ ise $U_\theta,\ H \ominus \overline{D_{U_\theta}}$ üzerinde sıfıra eşitlenerek U_θ, H a genişletilir. Buradan $K \supset U_\theta$ büzülme operatörü tüm uzayda tanımlanır. K operatörünü inşa ederek (3.4) eşitliğine karşılık gelen $\tilde{\theta}$ bağıntısını ele alalım. Yukarıda ispat ettiğimiz gibi $\tilde{\theta}$ bağıntısı disipatif ve $\tilde{\theta} \supset \theta$ dır. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğundan $\tilde{\theta} = \theta, U_{\tilde{\theta}} = U_\theta$ olur buradan bir çelişki elde edilir. Böylece U_θ, H üzerinde büzülme operatörüdür. Cayley dönüşümünün tanımından her $\{x, x'\} \in \theta$ için

$$U_\theta(x' + ix) = x' - ix \tag{3.7}$$

dır. Daha önceden belirttiğimiz gibi (2.7) maksimal disipatif $\tilde{\theta} \supset \theta$ bağıntısını tanımlar. θ bağıntısı maksimal disipatif olduğunda $\tilde{\theta} = \theta$, yani θ bağıntısı (3.4) ile belirlenir. (3.6) dan θ bağıntısı maksimal simetrik olması için gerek ve yeter koşul K izometrik operatör olmasıdır. θ bağıntısı maksimal akretif olsun.

$$\theta_1 = \{\{-x, x'\}: \{x, x'\}\} \in \theta \tag{3.8}$$

bağıntısı maksimal disipatifdir.

$$\{x, x'\} \in \theta_1 \ (veya\{-x, x'\} \in \theta) \ \Leftrightarrow (K - I)x' + i(K + I)(-x) = 0$$

olduğu gösterildi. Bu ifade de (3.5) e denktir. Tersi de benzer şekilde gösterilir. Son olarak θ bağıntısı kendine eş olsun. O zaman K_1, K_2 operatörleri H üzerinde izometrik operatör olmak üzere

$$(K_1 - I)x' + i(K_1 + I)x = 0$$

$$(K_2 - I)x' - i(K_2 + I)x = 0$$

ifadeleri denktir.

$$K_1K_2(x' - ix) = x' + ix, K_2K_1(x' + ix)K_2K_1(x' + ix)$$

elde edilir.

$$\{x' + ix|\{x, x'\} \in \theta\} = \{x' - ix|\{x, x'\} \in \theta\} = H$$

Olduğundan

$K_1K_2 = K_2K_1 = I$ olur,

yani K_1 ve K_2 üniterdir. Tersi aşikardır.

3.3. Sınır Değer Uzayları ve Disipatif Genişlemeler

Tanım 3.3.1. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} \to \mathrm{K}$ lineer dönüşümler olsun.

i. $f, g \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ için

$$(A^* f, g) - (f, A^*) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K;$$

ii. Keyfi $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \in \mathrm{K}$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ vektörü vardır;

şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 3.3.2. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $dimK = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat:

$$\mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} = \mathrm{D}_{\mathrm{A}} \oplus \mathrm{N}_{\mathrm{i}} \oplus \mathrm{N}_{-\mathrm{i}} \tag{3.9}$$

idi. $\mathrm{P}_{-\mathrm{i}}: \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} \to \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}, \mathrm{N}_{\mathrm{i}}$ ve $P_i: \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*} \to \mathrm{N}_{\mathrm{i}}$ izdüşüm operatörleri olsun. $dim\mathrm{N}_{-\mathrm{i}} = dim\mathrm{N}_{\mathrm{i}}$ olduğundan $U: \mathrm{N}_{\mathrm{i}} \to \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}$ izometrik dönüşümü vardır. $K = \mathrm{N}_{-\mathrm{i}}$ alırsak (H dan indirgenen iç çarpıma göre)

$$\Gamma_1 = \mathrm{P}_{-\mathrm{i}} + UP_i, \qquad \Gamma_2 = -i\mathrm{P}_{-\mathrm{i}} + iUP_i$$

ile tanımlayalım. Şimdi (K, Γ_1, Γ_2) nin A operatörünün sınır değer uzayı olduğunu ispatlayalım. (3.9) ifadesinden $f, g \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}^*}$ ise

$$f = f^0 + \mathrm{P}_{-\mathrm{i}}\mathrm{f} + P_i f, \; g = g^0 + \mathrm{P}_{-\mathrm{i}}\mathrm{g} + P_i g, \qquad f_0, g_0 \in \mathrm{D}_{\mathrm{A}}$$

dir.

$A^* P_i = -iP_i, A^* P_{-i} = -iP_{-i}$

ve A operatörünün simetrik olduğunu dikkate alırsak

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_i f, P_i g))$$

dir. Diğer taraftan U operatörünün izometrikliğine denk olarak

$$(\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K = 2i((P_{-i}f, P_{-i}g) - (P_i f, P_i g))$$

dir. Buradan sınır değer uzayının (i) koşulu sağlanır. $F_1, F_2 \in K, f \in D_{A^*}$ alalım.

$$f = f_0 + f_{-i} + f_i, f_0 \in D_A$$

$$f_{-i} = \frac{1}{2i}(iF_1 - F_2) \in N_i, f_i = \frac{1}{2i} U^{-1}(iF_1 + F_2) \in N_i$$

olsun. O zaman $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olur.

Teorem 3.3.3. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 f + i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (3.10)$$

$$(K - I)\Gamma_1 f - i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (3.11)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (3.10) ve (3.11) koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (3.10) , (3.11) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (3.10), (3.11) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(cosC)\Gamma_2 f - (sinC)\Gamma_1 f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \qquad (3.12)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \qquad (3.13)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|K_f\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (2.12), (2.13) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

İspat: $\tilde{A}$, A operatörünün maksimal disipatif genişlemesi olsun. Teorem 3.1.2. ile $\tilde{A} \subset A^*$ dır. (K, Γ_1, Γ_2), A operatörünün sınır değer uzayı olmak üzere

$$\theta = \{\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} : f \in D_{\tilde{A}}\}$$

olsun. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden θ, K da disipatif bağıntıdır. Eğer $\tilde{\theta} \supset \theta$ ve θ disipatif bağıntı ise $\tilde{\tilde{A}}, A^*$operatörünün $D_{\tilde{\tilde{A}}}$={f∈D_{A^*}: $\{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \in \tilde{\theta}\}$ kümesinin kısıtlaması olarak tanımlanan $\tilde{\tilde{A}}$ operatörünün disipatif genişlemesidir. Buradan $\tilde{\tilde{A}}$ =$\tilde{A}$.

Eğer $\{x, x'\} \in \theta$ ise belli bir $f \in D_{A^*}$, için

$$x = \Gamma_2 f,\ x' = \Gamma_1 f$$

olur. Burada $f \in D_{\tilde{\tilde{A}}}$, ve $f \in D_{\tilde{A}.}$, yani, $\{x, x'\} \in \theta$. Böylece $\tilde{\theta} = \theta$ ve θ maksimal disipatif bağıntıdır. Teorem 3.2.3 den istenen sonuçlar elde edilir.

Farz edelim ki $\tilde{A}, A^*$ operatörünün (3.10) koşulunu sağlayan vektörlerin $D_{\tilde{A}}$ kümesine kısıtlaması olsun.

$$\theta = \{\, \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} \;:\; f \in D_{\tilde{A}} \,\}$$

ele alalım. Teorem 3.2.3 göre θ bağıntısı maksimal disipatiftir. (K, Γ_1, Γ_2) nin (i) özelliğinden $\tilde{A}$ disipatiftir.

Farz edelim ki $\tilde{\tilde{A}}$ operatörü $\tilde{A}$ operatörünün disipatif genişlemesi olsun.

$$\tilde{\theta} = \left\{ \{\Gamma_2 f, \Gamma_1 f\} : \quad f \in D_{\tilde{\tilde{A}}} \right\}$$

dır. $\tilde{\theta}$ bağıntısı θ bağıntısının disipatif genişlemesi olduğundan $\tilde{\theta}$=θ dır. Eğer $f \in$ D$_{\tilde{\tilde{A}}}$ ise $g \in D_{\tilde{A}.}$ için

$$\Gamma_2 f = \Gamma_1 g, \Gamma_2 f = \Gamma_2 g \;.$$

olur. O zaman $f - g \in D_{AA}$, ve f∈ $D_{\tilde{A}.}$ Sonuç olarak $\tilde{A}$=$\tilde{\tilde{A}}$ ve $\tilde{A}$ maksimal disipatiftir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde denklemi tarafında üretilen Hahn Sturm-Liouville operatörü ele alınacaktır Hahn Sturm –Liouville. Sınır koşulları kullanılarak bu operatör için sınır değer uzayı inşa edilecektir. Bu kavram yardımıyla Hahn Sturm –Liouville operatörü için tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilecektir.

Hahn Sturm –Liouville denkleminden operatöre geçiş yapmak için,

$$\langle f, g\rangle := \int_{\omega_0}^{b} f(t)\overline{g(t)}d_{q,\omega}t,$$

iç çarpımı yardımıyla $L^2{}_{q,\omega}(\omega_0, b)$, Hilbert uzayını gözönüne alalım.

p(·) fonksiyonu $[\omega_0, b]$ aralığı üzerinde reel-değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$ly = -\frac{1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}D_{q,\omega}y(t) + p(t)y(t) \qquad (4.1)$$

Hahn Sturm-Liouville denklemini göz önüne alalım.

Şimdi bu denkleme karşılık gelen maksimal ve minimal operatörlerin tanım kümelerini verelim.

$$D_{max} = \left\{ y \in L^2{}_{q,\omega}(\omega_0, b): \begin{array}{c} y\ ve\ D_{q,\omega}y\ fonksiyonları\ (\omega_0, b)\ üzerinde\ tanımlı, \\ ve\ \omega_0\ noktasında\ sürekli, \\ l(y) \in L^2{}_{q,\omega}(\omega_0, b) \end{array} \right\}.$$

$$D_{min} = \left\{ y \in D_{max}: y(\omega_0) = D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}y(\omega_0) = y(b) = D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}y(b) = 0 \right\}.$$

D_{max} kümesi üzerinde

$$L_{max}y = ly$$

ile L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım. Eğer L_{max} operatörünü D_{min} kümesine kısıtlarsak L_{min} minimal operatörü elde edilir. $L_{min}{}^* = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatörüdür (Naimark,1968).

ile tanımlanır.

Şimdi

$\Gamma_1, \Gamma_2: D_{max} \to \mathbb{C}^2$,

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y(\omega_0) \\ y(b) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}y(\omega_0) \\ D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}y(b) \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Teorem 4.1. (4.2) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_{min} operatörünün bir sınır değer uzayıdır.

İspat: $\forall y, z \in D_{max}$ için

$$(\Gamma_1 y - \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y - \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -y(\omega_0) \\ y(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z(\omega_0) \\ D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z(b) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} - \left(\begin{pmatrix} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(\omega_0) \\ D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z(\omega_0) \\ z(b) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2}$$

$$= \left(-y(\omega_0) \overline{\left(D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z(\omega_0) \right)} + y(b) \overline{\left(D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z(b) \right)} \right)$$

$$- \left(-D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(\omega_0) \overline{(z(\omega_0))} + D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(b) \overline{(z(b))} \right)$$

$$= D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(\omega_0) \overline{(z(\omega_0))} - y(\omega_0) \overline{\left(D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z(\omega_0) \right)}$$

$$+ y(b) \overline{\left(D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z(b) \right)} - D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} y(b) \overline{(z(b))}$$

$$= [y, z](b) - [y, z](\omega_0)$$

$$= (L_{max} y, z) - (y, L_{max} z)$$

Son eşitlik Green özdeşliği (2.2) yardımıyla elde edildi. Böylece sınır değeri uzayının tanımının ilk koşulunu ispatladık.

Şimdi sınır değer uzayının tanımının ikinci koşulunu ispatlayacağız.

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$y(t) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)v_1 + \alpha_3(t)u_2 + \alpha_4(t)v_2 \in {L^2}_{q,\omega}(\omega_0, b),$

vektör değerli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$\alpha_1\ (\omega_0) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_1(\omega_0) = 0 \quad \alpha_1\ (b) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_1(b) = 0$

$\alpha_2\ (\omega_0) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_2(\omega_0) = 0 \quad \alpha_2\ (b) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_2(b) = 0$

$\alpha_3\ (\omega_0) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_3(\omega_0) = 0 \quad \alpha_3\ (b) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_3(b) = 0$

$\alpha_4\ (\omega_0) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_4(\omega_0) = 0 \quad \alpha_4\ (b) = 1 \quad D_{\frac{1}{q'},\frac{-\omega}{q}}\alpha_4(b) = 0$

Bu durumda bu fonksiyon D_{max} kümesine aittir ve $\Gamma_1 y = u$, $\Gamma_2 y = v$ olduğu açıktır.

Sonuç 4.1. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzülme operatörü ise L_{min} operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \tag{4.3}$$

ve

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \qquad (4.4$$

koşullarını sağlayan $y \in D_{max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla L_{min} operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine L_{min} operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (4.3) ve (4.4) koşulları yardımıyla verilir. K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir.

Eğer (4.3) ve (4.4) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa L_{min} operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer üniter olursa L_{min} operatörünün kendine eş genişlemesini verir. L_{min} operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D(K)$ için,

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

koşulunu sağlayan lineer operatördür.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında,

$$-\frac{1}{q}D_{\frac{1}{q},\frac{-\omega}{q}}D_{q,\omega}y(t)+p(t)y(t), \mathrm{t}\in(\omega_0,b)$$

formundaki Hahn Sturm-Liouville differensiyel denklemleri regüler durumda ele alındı. Buradaki $\boldsymbol{p}(.)$ fonksiyonu, (ω_0,b)aralığı üzerinde tanımlı ω_0 noktasında sürekli reel değerli fonksiyondur. Bu türden denklemlere karşılık gelen minimal ve maksimal operatörler oluşturuldu. Sınır koşulları yardımıyla Hahn Sturm-Liouville operatörünün sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır değer uzayı yardımıyla Hahn Sturm-Liouville simetrik operatörünün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

Bu çalışma aynı türde denklemler için singüler durumda ele alınarak konu genişletilebilir.

KAYNAKLAR

Abreu L. D., 2005. Sampling theory associated with q-difference equations of the Sturm–Liouville type, *Journal of Physics A: Mathematical and* General 38, 10311.

Abu Risha M. H., Annaby M. H., Z. S. İsmail, Mansour, 2007. Linear q-difference equations, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 26, 481–494.

Ahlbrandt C., Bohner M., Ridenhour J., 2000. Hamiltonian systems on time scales, *Journals Mathematical Analysis Applications* 250, 561–578.

Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, Volume I. Frederick Ungar, New York.

Allahverdiev B. P., 2016. Spectral problems of non-self-adjoint q-Sturm–Liouville operators in limit-point case, *Kodai Math. J.* 39, 1–15.

Allahverdiev, B. P., 1995. On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potential, *Izvest. Ross. Akad. Nauk. Ser. Math.* 59, 19-54 (*English transl. Izv. Math.* 59,45-62).

Allahverdiev, B.P., 2013. Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients, *J. Difference Equ. Appl.* 19, no.5, 839-849.

Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operatör, *Linear Multilinear Algebra* 62,no. 9, 1146-1152.

Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales, *Filomat* 30, no. 6, 1475-1484.

Anderson D. R., 2002. Positivity of Green's function for an n-point right focal boundary value problem on measure chains, *Mathematical Computer Modelling* 31, 29–50.

Anderson D. R., Hoffacker J., 2003. Green's function for an even order mixed derivative problem on time scales, *Dynam. Systems Appl.* 12, 9–22.

Anderson D. R., Hoffacker J., 2003. A stacked delta–nabla self-adjoint problem of even order, *Mathematical Computer Modelling* 38, 481–494.

Anderson D. R., Avery R. I., 2004. An even-order three-point boundary value problem on time scales, *J. Math. Anal. Appl.* 291, 514–525.

Annaby M. H., 2003. q-Type sampling theorems, *Result. Math.* 44, 214–225.

Annaby M. H., Hassan H. A., Mansour Z. S., 2012. Sampling theorems associated with singular q-Sturm–Liouville problems, *Results Math.* 62, 121–136.

Annaby M. H., Hamza A. E., Aldwoah K. A., 2012. Hahn difference operatör and associated Jackson–N¨orlund integrals, *J. Optim. Theory Appl.* 154, 133–153.

Annaby M. H., Bustoz J., Ismail M. E. H., 2007. On sampling theory and basic Sturm–Liouville systems, *J. Comput. Appl. Math.* 206, 73–85.

Annaby M. H., Mansour Z. S., Soliman I. A., 2012. q-Titchmarsh–Weyl theory: series expansion, *Nagoya Math. J.* 205, 67–118.

Annaby M. H., Mansour Z. S., 2005. Basic Sturm Liouville problems, *Journal Physics A: Mathematical General* 38, 3775–3797.

Annaby M. H., Mansour Z. S., 2012. q-Fractional Calculus and Equations (Springer, Berlin).

Annaby M. H. Hamza A. E., Makharesh S. D., 2018. A Sturm-Liouville theory for Hahn difference operator, *in: Xin Li, Zuhair Nashed (Eds.), Frontiers of Orthogonal Polynomials and q-Series, World Scientic, Singapore*, 35-84,

Atici G. Sh., Guseinov G. Sh., 2002. On Green's functions and positive solutions for boundary value problem on time scales, *J. Comput. Appl. Math.* 141, 75–99.

Bairamogly, M.,1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, *Izu. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz-Tekhn. Mat. Nauk* 2,140-143.

Birman, M.Sh.,1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators, *Mat. Sb.* 38, 431-450.

Brown B. M., Evans W. D., İsmail M. E. H., 1996. The Askey–Wilson polyno- mials and q-Sturm–Liouville problems, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 119, 1–16.

Bruk, V.M., 1976. On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, *Mat. Sb.*,100, 210-216.

Coddington E. A, Levinson N. 1955, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, New York.

Gasper G., Rahman M., 1990. Basic Hypergeometric Series (Cambridge University Press, New York).

Gorbachuk, M.L, Kochubei, A.N., Rybak M.A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 205,1029-1032 *(English transl., Soviet Math. Dokl.* 13(1972),1063-1067).

Gorbachuk, M. L.,Gorbachuk, V.I., 1984. Boundary Value Problems for OperatorDifferential Equations, Naukova Dumka, Kiev (English transl. 1991,Birkhauser Verlag).

Gorbachuk,M.L. , Gorbachuk, V.I.,Kochubei, A.N., 1989. The theory of extensionsof symmetric operators and boundary-value problems for differential equations,*Ukrain. Mat. Zh.* 41, 1299-1312 (*English transl. in Ukrainian Mathematical Journal* 41, (1989), 1117-1129).

Hamza A. E., Ahmed S. A., 2013. Theory of linear Hahn difference equations, *J. Adv. Math.* 4(2), 440–460.

Hamza A. E., Ahmed S. A., 2013. Existence and uniqueness of solutions of Hahn difference equations, *Adv. Difference Equations* 316, 1–15.

Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications, *I, Mat. Sb.* 20, 431-495; *II, Mat. Sb.* 21, 365-404.

Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval (0,∞), *Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 16,292-324.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Willey and Sons, New York.

Levitan B. M., Sargsian I. S., 1991. Sturm–Liouville and Dirac Operators (Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht).

Naimark., M.A., 1968. Linear Differential Operators, 2nd edn., Nauka, Moscow, (English transl. of 1st. edn., 1,2, 1969, New York.

Neumann, J. von., 1929. AllgemeineEigenwertheorieHermitischerFunctionaloperatoren, *Math. Ann.* 102,49-131.

Rellich, F., 1951. Halbbeschrankte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung',*Math. Ann.* 122,343-368.

Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space ofvector valued functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR 184,1034-1037 (English translet in Soviet Math. Dokl.* 10 (1969),188-192).

Tuna H. 2013, "Lim-3 Durumundaki 4. Mertebe Operatörlerin Dissipatif Genişlemeleri", *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi* , "2(2)", 75-79.

Tuna T., Bayrak S., 2018. On extensions of singular Fourth- Order Dynamic Operators on Time Scales, *Filomat*, 32, 11,. 3843–3851.

Tuna H., Allahverdiev B. P. 2018, Dissipative Extensions of Fourth Order Differential Operators, *Thai Journal of Mathematics*, V 16 (1) ,275-285.

Tuna H., 2014. Completeness of the root vectors of a dissipative Sturm–Liouville operators on time scales, *Appl. Math. Comput.* 228, 108–115.

Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations', *Trudy Moskov. Mat Obshch* 1,187-246.

Weyl H. 1910. On ordinary differential equations with singularities and the associated expansions of arbitrary functions, *Math. Annal.* 68, 222-269. (German).