

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**KÜRE ÜZERİNDE ÖZEL TİPTEN
EĞRİLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşegül BULUT

DANIŞMAN

Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ

OCAK – 2015

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KÜRE ÜZERİNDE ÖZEL TİPTEN EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ayşegül BULUT
(111121110)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 07.01.2015
Tezin Savunulduğu Tarih: 23.01.2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ *Mün*
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ *MBektaş*
: Doç. Dr. Mahmut IŞIK *Mahmut*

OCAK – 2015

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen saygı değer hocam Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ 'a sonsuz teőekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayşegül BULUT



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
1.BÖLÜM.....	1
1.1. GİRİŞ.....	1
2.BÖLÜM.....	2
2.1. Temel Kavramlar	2
3. BÖLÜM.....	11
3.1. Kürede Bertrand ve İvolüt-Evolüt Eğriler.....	11
4. BÖLÜM.....	15
4.1. Bertrand Eğrileri İçin Bazı Bağntılar	15
5. BÖLÜM.....	21
5.1. E^3 de İvolüt-Evolüt Eğriler.....	28
6.BÖLÜM.....	29
6.1.3-Boyutlu Kürede İvolüt-Evolüt Eğrilerinin İncelenmesi.....	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	36

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde; bu çalışma ile ilgili açıklamalar verilmiştir.

İkinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; küre üzerinde Bertrand ve İvolüt-Evolüt eğrileri ile ilgili açıklamalar yapılmıştır.

Dördüncü bölümde; 4-boyutlu uzayda Bertrand Eğrileri incelenmiş ve özel olarak 3-boyutlu küre üzerinde ele alınarak bazı karakterizasyonlarına yönelik tanım ve teoremler verilmiştir.

Beşinci bölümde; E^3 uzayında İvolüt-Evolüt eğrileri ile ilgili tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Altıncı bölümde; S^1 küresi üzerinde İvolüt-Evolüt eğrileri incelenmiş ve bazı teoremler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler; Bertrand eğrileri, İvolüt-evolüt eğrileri, Serret-Frenet formülleri.

SUMMARY

SOME SPECIFIC CURVES ON SPHERES

This work consists of six chapters:

In the first chapter; the explanations about that work are given.

In the second chapter; basic concepts are given.

In the third chapter; some definitions and explanations are given about that specific curves on spheres.

In the fourth chapter; Bertrand curves on $S^3 \subset E^4$, some theorems and characterizations are examined.

In the fifth chapter; Involute-evolute curves on E^3 are examined.

In the sixth chapter; Involute-evolute curves on S^1 are given and some theorems are given.

Keywords: Bertrand curves, Involute-evolute curves, Serret-Frenet formulas.

1.BÖLÜM

1.1 Giriş

3-boyutlu S^3 küresine daldırılmış olan bir α eğrisi için , bu eğriye birebir karşılık gelen noktalarda, asli normal geodezikleri aynı olan bir β eğrisi varsa , bir Bertrand eğrisidir, denir. α ve β eğrilerine de S^3 de Bertrand eğri çifti denir. S^3 deki Bertrand eğrileri κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve torsiyonu olmak üzere, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ eşitliğini sağlayan λ ve μ sabitlerinin bulunduğu eğrilerdir. Örneğin 3-boyutlu küre üzerinde Barros tarafından tanımlanan genel helisler, Bertrand eğrileridir .

2. 3. ve 4. bölümlerde ; Bertrand eğri çiftleri için birbirine karşılık gelen noktalar arasındaki uzaklığın sabit olduğu ; birbirine karşılık gelen noktalardaki teğet vektörler ve binormal vektörler arasındaki açının sabit olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra Bertrand eğri çiftlerinin eğrilikleri ve torsiyonları arasında bazı bağıntılar bulunmuş ve S^3 deki her yüzey eğrisinin , sonsuz Bertrand yüzey eğrilerine eşlenik olan bir Bertrand eğrisi olduğu sonucu elde edilmiştir. Burada bir yüzey eğrisi 2-boyutlu total geodezik $S^2 \subset S^3$ küresi üzerinde yatan bir egridir. Ayrıca S^3 deki Bertrand eğrileri için klasik olana benzer bir teorem ele alınmıştır. Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve torsiyonu olmak üzere, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda\kappa + \mu\tau = 1$ eşitliğini sağlayan eğriler olduğu ispatlanmıştır. S^3 deki helislerin, Bertrand eğrilerinin sonsuz eşleniğe sahip bükümlü eğriler olarak karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

5. Bölümde, İvolüt-Evolüt eğrileri 3-boyutlu E^3 Öklid uzayında ele alınmış , aralarındaki bağıntılar, Frenet formülleri ve bu eğrilerin eğriliği ve torsiyonları cinsinden incelenmiştir. 6.Bölüm çalışmanın orijinal kısmıdır , İvolüt-Evolüt eğrileri S^1 küresi üzerinde tanımlanmış, daha sonra (Teorem6.1.1)e dayanarak , İvolüt-Evolüt eğrilerinin, S^3 ve S^2 üzerinde var olamayacağı gösterilmiştir. Dolayısıyla bu eğriler , açılabilir bir yüzey olan $S^1(1)$ küresi üzerinde incelenmiş ve buna bağlı olarak bazı teoremler ispatlanmıştır.

2. BÖLÜM

2.1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha : I \xrightarrow{C^\infty} E^n$ fonksiyonuna E^n de eğri denir [1].

Tanım 2.1.2. M , (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. $s \in I$ ya da yay-parametresi adı verilir [1].

Tanım 2.1.3. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayı V olsun. Bu takdirde,

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir .

$$(A1) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2) \quad \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(\overrightarrow{PQ}) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ vardır [1].}$$

Tanım 2.1.4. Reel bir afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzay V olsun. V de bir iç çarpım işlemi,

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{array} \right\}$$

olarak, Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da, uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir böylece A afin uzayı Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [1].

Tanım 2.1.5. $S^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \} \subset E^{n+1}$ cümlesine n -boyutlu küre , n -küre adı verilir [1].

Tanım 2.1.6. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında ; $(n-1)$ -boyutlu bir yüzey genellikle hiperyüzey olarak adlandırılır [1].

Tanım 2.1.7. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{ \alpha', \dots, \alpha^{(r)} \}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(r)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in S_p \{ \psi \}$ olmak üzere

ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı denir. $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. $\forall V_i, 1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü denir [1].

Tanım 2.1.8. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı,

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t)$$

$$N(t) = B(t) \times T(t)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}$$

şeklindedir [1].

Tanım 2.1.9. $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{K(s)} \cdot T'(s)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

şeklindedir [1].

Tanım 2.1.10. $M \subset E^n$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle, \quad 1 \leq i < r$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu denir. $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına, $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir [1].

Tanım 2.1.11. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında i -yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ ve Frenet formülleri,

$$1) V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$2) V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r$$

$$3) V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$$

şeklindedir [1].

1-inci eğrilik olan $k_1(s)$ değeri eğrilik adıyla ve 2-nci eğrilik olan $k_2(s)$ değeri de burulma (torsiyon) adıyla bilinir [1].

Tanım 2.1.12. E^3 uzayında birim hızlı olmayan bir $\alpha : I \xrightarrow{C^\infty} E^3$ eğrisinden elde edilen birim hızlı

$\beta : J \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T', N', B' ile gösterilsin.

$$T(t) = T'(f(t))$$

$$N(t) = N'(f(t))$$

$$B(t) = B'(f(t))$$

Eşitlikleri ile tanımlanan T, N, B vektör alanlarına α eğrisinin Frenet vektör alanları denir.

$\beta : J \rightarrow E^3$ eğrisinin eğrilik ve burulması $k_1 = k$ ve $k_2 = \tau$ ile gösterilsin ;

$$k_1 = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad k_2 = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

şeklindedir [2].

Tanım 2.1.13. $M, N \subset E^n$ eğrileri sırasıyla, (I, α) , (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ $\{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ Frenet r -ayaklıları verildiğinde $\forall s \in I$ için $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise ; (M, N) eğri ikilisine bir Bertrand eğri çifti denir [1].

Tanım 2.1.14. $X : IR^3 \times IR^3 \rightarrow IR^3$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta = \varphi(\alpha \wedge \beta)$$

şeklinde tanımlı \times iç işlemine vektörel çarpım işlemi ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nin vektörel çarpımı denir.

$$\alpha \times \beta = \sum_{i=1}^3 \det(e_i, \alpha, \beta) e_i$$

olarak hesaplanır [1].

Tanım 2.1.15. M bir manifold olmak üzere

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow D(X, Y) = D_X Y$$

dönüşümü,

$$\text{i) } D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$$

$$\text{ii) } D_{(X+Y)}Z = D_X Z + D_Y Z$$

$$\text{iii) } D_{fX} Y = f D_X Y ; \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$\text{iv) } D_X (f Y) = X[f]Y + f D_X Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ; D ye M üzerinde bir afin konneksiyon denir [3].

Tanım 2.1.16. Bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir Riemann konneksiyonu D olsun. D nin M ye ait bir bölge üzerindeki $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için ,

$$\text{i) } D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$$

$$\text{ii) } D_{(X+Y)}Z = D_X Z + D_Y Z$$

$$\text{iii) } D_{fX} Y = f D_X Y$$

$$\text{iv) } D_X (f Y) = X[f]Y + f D_X Y$$

$$\text{v) } D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

$$\text{vi) } Z[\langle X, Y \rangle] = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle$$

özelliklerini sağlayan konneksiyona Riemann konneksiyonu denir [4].

Tanım 2.1.17. E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M de bir eğri α ve α nın teğet vektör alanı T olmak üzere, α üzerindeki Y vektör alanı için,

$$D_Y^T = 0$$

ise Y vektör alanına M üzerinde α boyunca bir Levi-Civita anlamında paralel vektör alanı denir. Eğer $D_T^T = 0$ ise α eğrisine M üzerinde bir geodezik eğri denir [3].

Tanım 2.1.18. E^3 de birim hızlı bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$k_g = \|D_T T\| = \left\| \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen E^3 deki geodezik eğriliği denir [4].

Tanım 2.1.19. (Levi-Civita Anlamında Paralel Transport)

Paralelizm öyle bir operatördür ki tanjant vektörleri hiperyüzeyin bir noktasından diğerine ötelir. Bir M hiperyüzeyi üzerinde P ve Q gibi iki nokta verilmiş olsun. M üzerinde P den Q ya bir diferensiyellenebilir parametrik eğri,

$$\alpha : [a, b] \rightarrow M, \quad \alpha(a)=P \text{ ve } \alpha(b)=Q$$

olsun. Burada $[a,b]$ kapalı aralıktır. Kapalı bir aralıkta α nın diferensiyellenebilmesinden kastettiğimiz anlam, $[a,b]$ yi içeren bir açık aralıktan M ye olan bir α dönüşümünün $[a,b]$ ye kısıtlanmasından ibarettir. P den Q ya her bir parametrik $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ eğrisi $P_\alpha(\vec{V}_p) = V(b)$, $\vec{V}_p \in T_M(P)$ ve V de α boyunca $V(a) = \vec{V}_p$ olacak şekildeki tek paralel vektör alanı olmak üzere $P_\alpha(\vec{V}_p) = V(b)$ belli olan bir

$$P_\alpha : T_M(P) \rightarrow T_M(Q)$$

$$\vec{V}_p \rightarrow \vec{V}_q$$

dönüşümünü belirtir. $P_\alpha(\vec{V}_p)$ tanjant vektörüne \vec{V}_p tanjant vektörünün α boyunca Q ya paralel ötelenmesi (paralel transportu) denir [3].

Tanım 2.1.20. E^n , n -boyutlu Öklid uzayında bir $(n-1)$ boyutlu hipersilindir

$$C = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 1 \}$$

biçiminde bir nokta cümlesidir. Bu silindir için kısaca $(n-1)$ -silindir de denir.

C , $(n-1)$ -silindirinin dış normallerini, C üzerindeki birim normal vektör alanı olarak düşünebiliriz. Buna göre, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in C$ için

$$N_p = (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, 0)$$

şeklinde tanımlı N vektör alanı, C nin birim normal vektör alanıdır. Ayrıca,

$$\langle N, e_n \rangle = 0$$

dır [3].

Tanım 2.1.21. \mathbb{R}^3 uzayında bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olsun. T vektör alanı belirli bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine bir helis denir [1].

Tanım 2.1.22. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve $(n+d)$ boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M ve \tilde{M} nin altmanifoldu ve ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve \tilde{M} de kovaryant türevler olsun. Böylece X ve Y , M üzerinde vektör alanları olmak üzere ;

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X, Y)$$

biçiminde Gauss eşitliği elde edilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$, $\bar{\nabla}_X Y$ nin sırasıyla tanjant ve normal bileşenleridir. Bu eşitlik ile tanımlanan h 'ya M nin ikinci temel formu adı verilir. Eğer $h=0$ ise, M ye total geodeziktir, denir [5].

Tanım 2.1.23. $\alpha: I \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu k olmak üzere, $\frac{1}{k}$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu denir ve ρ ile gösterilir. $t \in I$ için, $\rho(t)$ sayısına, $\alpha: I \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik yarıçapı denir [13].

Teorem 2.1.1 $\alpha: I \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $s_0 \in I$ olsun. Bu durumda,

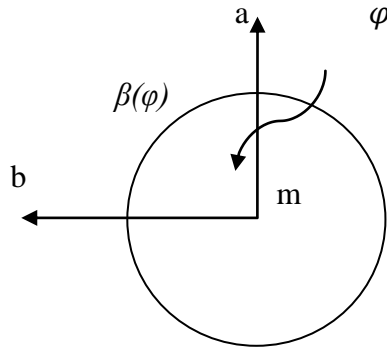
$$\gamma(0) = \alpha(s_0), \quad \gamma'(0) = \alpha'(s_0), \quad \gamma''(0) = \alpha''(s_0)$$

olacak biçimde, birim hızlı bir $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ çemberi vardır. Bu çember,

$$\rho_0 = \rho(s_0), \quad N_0 = N(s_0), \quad T_0 = T(s_0)$$

olmak üzere,

$$\gamma(\theta) = \alpha(s_0) + \rho_0 N_0 + \rho_0 \cdot \cos \frac{\theta}{\rho_0} (-N_0) + \rho_0 \cdot \sin \frac{\theta}{\rho_0} T_0 \quad (2.1.1)$$



Şekil 2.1.1

denklemleriyle verilebilir. Çemberin merkezi $\alpha(s_0) + \rho_0 N_0$ noktasıdır[13].

İspat. Aranılan çemberin merkezi m ve yarıçapı r olsun. Çemberi içinde bulunduran düzlemin ortonormal bir $\{a, b\}$ tabanını göz önüne alalım. Böyle bir çemberin

$$\beta(\varphi) = m + (r \cos \varphi).a + (r \sin \varphi).b$$

biçiminde verilebileceği açıktır.

β eğrisi birim hızlı bir eğri olacak biçimde yeniden parametrelendirilmek üzere, β nın yay uzunluğu fonksiyonu f olsun.

$$f(\varphi) = \int_0^\varphi \|\beta'(u)\| du = \int_0^\varphi r du = r\varphi$$

olur. $f(\varphi) = \theta$ diyelim. $f^{-1}(\theta) = \varphi = \frac{\theta}{r}$ olur. $h = f^{-1}$ olmak üzere, $\beta \circ h$ eğrisi birim hızlı bir eğridir. $\beta \circ h = \gamma$ olsun. $\gamma(\theta) = \beta(h(\theta)) = \beta\left(\frac{\theta}{r}\right)$ olduğundan,

$$\gamma(\theta) = m + \left(r \cos \frac{\theta}{r}\right)a + \left(r \sin \frac{\theta}{r}\right)b \quad (2.1.2)$$

olur. $\gamma(0) = m + ra$ olduğu kolayca görülebilir. $\gamma(0) = \alpha(s_0)$ olmasını istiyoruz. Buna göre, $m + ra = \alpha(s_0)$ dir. Buradan ,

$$m = \alpha(s_0) - ra$$

elde edilir.

$$\gamma'(\theta) = -\left(\sin \frac{\theta}{r}\right)a + \left(\cos \frac{\theta}{r}\right)b$$

olduğundan, $\gamma'(0) = b$ dir. $\gamma'(0) = \alpha'(s_0)$ olmasını istiyoruz. $\alpha'(s_0) = T(s_0)$ olduğundan , $b = T(s_0)$ dir. $T(s_0)$ vektörü kısaca T_0 ile gösterilmek üzere,

$$b = T_0 \quad (2.1.3)$$

dir.

$$\gamma''(\theta) = -\frac{1}{r}\left(\cos \frac{\theta}{r}\right)a - \frac{1}{r}\left(\sin \frac{\theta}{r}\right)b$$

olduğundan, $\gamma''(\theta) = -\frac{1}{r}.a$ dir. $\gamma''(0) = \alpha''(s_0)$ olmasını istiyoruz.

$$\alpha''(s_0) = k(s_0)N(s_0)$$

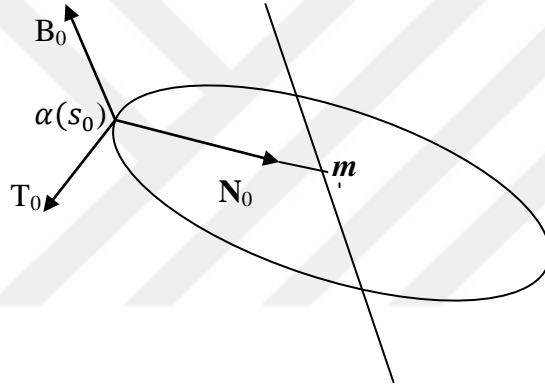
olduğundan, $-\frac{1}{r} \cdot a = k(s_0)N(s_0)$ dir. $r > 0$ ve $k > 0$ olduğundan, $-\frac{1}{r} \cdot a = k_0 N_0$ eşitliğinden, $\frac{1}{r} = k_0$ ve $a = -N_0$ bulunur. O halde ,

$$r = \frac{1}{k_0} = \rho_0 \quad \text{ve} \quad a = -N_0 \quad (2.1.4)$$

dir. (2.1.2) eşitliğinde r ve a yerine (2.1.4) deki eşitler konularak,

$$m = \alpha(s_0) + \rho_0 N_0 \quad (2.1.5)$$

bulunur.



Şekil 2.1.2

Tanım 2.1.25. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında ikinci basamaktan değen yukarıdaki γ çemberine, α eğrisinin, $\alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik çemberi denir.

$\alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik çemberinin merkezine, $\alpha(s_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezi denir.

$\alpha(s_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezinden geçen ve B_0 vektörüne paralel olan doğruya $\alpha(s_0)$ noktasına ilişkin eğrilik ekseni denir[13].

Tanım 2.1.26. Birim hızlı olmayan bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinden elde edilen α o h birim hızlı eğrisi β ile gösterilsin.

$h(s_0) = t_0$ olmak üzere β eğrisinin $\beta(s_0)$ noktasındaki eğrilik çemberine, α eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik çemberi denir.

β nın $\beta(s_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezine, α eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezi denir.

β nın $\beta(s_0)$ noktasına ilişkin eğrilik eksenine, α eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik ekseni denir[13].

Teorem 2.1.2. Birim hızlı olmayan bir $\alpha: I \rightarrow IR^3$ eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezi m ise,

$$m = \alpha(t_0) + \rho(t_0)N(t_0) \quad (2.1.6)$$

dir[13].

İspat . $\alpha: I \rightarrow IR^3$ eğrisinden elde edilen α o h birim hızlı eğrisi β ile gösterilsin. β nın eğrilik fonksiyonu k_β , Frenet vektör alanları $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ olsun. α eğrisinin Frenet vektör alanları ve eğriliği,

$$T(t) = T_\beta(f(t)), N(t) = N_\beta(f(t)), B(t) = B_\beta(f(t)), k(t) = k_\beta(f(t))$$

eşitlikleriyle tanımlıydı. Buna göre, $\rho(t) = \rho_\beta(f(t))$ olur.

α eğrisinin $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezi m olsun. m, β nın $\beta(s_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezine eşit olarak tanımlandığından,

$$m = \beta(s_0) + \rho_\beta(s_0).N_\beta(s_0)$$

dir. $\beta(s_0) = \alpha(t_0), \rho_\beta(s_0) = \rho(t_0)$ ve $N_\beta(s_0) = N(s_0)$ olduğu göz önüne alınarak,

(1.1.6) eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, birim hızlı olmayan bir $\alpha: I \rightarrow IR^3$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasına ilişkin eğrilik çemberi γ ise,

$$\gamma(\theta) = \alpha(t) + \rho(t)N(t) + \rho(t)\cos\frac{\theta}{\rho(t)}(-N(t)) + \rho(t)\sin\frac{\theta}{\rho(t)}T(t) \quad (2.1.7)$$

dir.

3.BÖLÜM

3.1 Kürede Bertrand ve İvolüt-Evolüt Eğriler

Tanım 3.1.1 \mathbb{R}^4 de r yarıçaplı 3-boyutlu küre S^3 ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır ;

$$S^3(r) = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = r^2 \}, \quad r > 0$$

$\alpha(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^3(r)$, $S^3(r)$ küresine daldırılmış olan bir eğri olsun ve yay uzunluğu t parametresi ile parametrize edilsin. Eğer $\{T, N, B\}$ α boyunca bir Frenet çatısı ise ve ∇ , $S^3(r)$ nin Levi-Civita konneksiyonunu göstermek üzere, α nın Frenet denklemi şöyle yazılabilir ;

$$\nabla_T T = kN$$

$$\nabla_T N = -kT + \tau B$$

$$\nabla_T B = -\tau B$$

Eğer ∇^0 , \mathbb{R}^4 ün Levi-Civita konneksiyonu ise, Gauss formülü gösterir ki ;

$$\nabla_T^0 X = \nabla_T X - \frac{1}{r^2} \langle X, T \rangle \alpha, \quad \forall x \in \psi(\alpha)$$

$$\nabla_T^0 T = kN - \frac{1}{r^2} \alpha,$$

$$\nabla_T^0 N = -kT + \tau B,$$

$$\nabla_T^0 B = -\tau B$$

α eğrisindeki her $\alpha(t)$ noktası için, $S^3(r)$ deki $\alpha(t)$ noktasında başlayan asli normal geodezik, bir geodezik eğri olarak ;

$$\gamma_t^\alpha = \exp_{\alpha(t)}(uN(t)) = \cos\left(\frac{u}{r}\right) \alpha(t) + r \sin\left(\frac{u}{r}\right) N(t), \quad u \in \mathbb{R} \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.2. Eğriliği 0-olmayan bir α eğrisine, $\beta(\sigma): J \subset \mathbb{R} \rightarrow S^3(r)$ olmak üzere α ve β arasında birebir bir dönüşüm varsa; Bertrand eğrisidir denir, öyle ki bu eğrilerin asli normal geodezikleri aynıdır. β eğrisine de α ' nın Bertrand çifti denir.

3-boyutlu bu kürenin $r=1$ yarıçaplı olduğu ve bu Bertrand eğrilerinin yay uzunluğu parametresine sahip olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. $\alpha(s)$ ve $\beta(\sigma)$ eğrileri bir Bertrand eğri çifti olsun. Öyleyse ; diferensiyellenebilir bir $a(s)$ fonksiyonu için

$$\beta(\sigma(s)) = \cos(a(s)) \alpha(s) + \sin(a(s)) N_{\alpha}(s) \quad (3.1.2)$$

yazılabilir. $\{T_{\alpha}, N_{\alpha}, B_{\alpha}\}$ α 'nın Frenet çatısı olmak üzere ; $\beta(\sigma(s))$ β 'da $\alpha(s)$ 'e karşılık gelen nokta olsun. $d(s)$ uzaklık fonksiyonu S^3 de $\alpha(s)$ ve ona karşılık gelen nokta $\beta(\sigma(s))$ arasındaki uzaklık olarak tanımlanabilir. Ayrıca \mathbb{R}^4 de verilen her X, Y, Z üç vektör için $X \times Y \times Z$ karma çarpımı \mathbb{R}^4 te tek vektör olarak şöyle ifade edilir ; $\forall W \in \mathbb{R}^4$ için

$$\langle X \times Y \times Z, W \rangle = \det(X, Y, Z, W) \quad (3.1.3)$$

Önerme 3.1.1 α ve β , S^3 de bir Bertrand eğri çifti olsun. Buna göre ;

- a) $a(s)$ fonksiyonu sabittir.
- b) $d(s)$ uzaklık fonksiyonu sabittir.
- c) Birbirine karşılık gelen noktadaki teğet vektörleri arasındaki açı sabittir.
- d) Binormal vektörler arasındaki açı sabittir.

İspat. (a) α ve β , birbirine karşılık gelen noktalarda aynı asli normal geodeziklere sahip olduğundan , şu eşitliklere sahibiz ;

$$\left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \gamma_s^0(u) = N_{\alpha}(s) \quad \text{ve} \quad \left. \frac{d}{du} \right|_{u=a(s)} \gamma_s^0(u) = N_{\beta}(\sigma(s))$$

daha sonra β eğrisi boyunca $\{T_{\beta}, N_{\beta}, B_{\beta}\}$, Frenet çatısı olmak üzere ;

$$N_{\beta}(\sigma(s)) = -\sin(a(s)) \alpha(s) + \cos(a(s)) N_{\alpha}(s) \quad (3.1.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan , β ya teğet olan vektör ;

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \beta(\sigma) = & -a'(s) \sin(a(s)) \alpha(s) + (\cos(a(s)) - k_{\alpha}(s) \sin(a(s))) T_{\alpha}(s) + a'(s) \cos(a(s)) N_{\alpha}(s) \\ & + \tau_{\alpha}(s) \sin(a(s)) B_{\alpha}(s), \end{aligned}$$

şeklindedir.

\mathbb{R}^4 te diferensiyel d/ds ile ifade edilsin.

$$\frac{d}{ds}\beta(\sigma)=\sigma'(s)T_{\beta}(\sigma(s))$$

yazılır ve dolayısıyla

$$0=\langle \frac{d}{ds}\beta(\sigma), N_{\beta}(\sigma) \rangle = a'(s),$$

olduğu görülür ve ispat biter.

(b) Genelliği bozmadan , varsayalım ki; $0 \leq a(s) \leq 2\pi$ olsun. Dolayısıyla, $\alpha(s)$ ile $\beta(s)$ arasında olan uzaklık fonksiyonu $d(s)$,

$$d(s)=\min\{a(s), 2\pi -a(s)\}$$

olarak verilir, **(a)** şıkkı göz önüne alındığında $d(s)$ in sabit bir fonksiyon olduğu görülebilir.

(c) Basit bir hesaplama ile ;

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle T_{\alpha}(s), T_{\beta}(\sigma(s)) \rangle &= \langle k_{\alpha}(s)N_{\alpha}(s) - \alpha'(s), T_{\beta}(\sigma(s)) \rangle \\ &+ \sigma'(s) \langle T_{\alpha}(s), k_{\beta}(\sigma(s))N_{\beta}(\sigma(s)) - \beta'(\sigma(s)) \rangle \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

elde edilir.

Diğer taraftan ;

$$T_{\beta}(\sigma(s)) = \frac{1}{\sigma'(s)} ((\cos a - k_{\alpha}(s)\sin a) T_{\alpha}(s) + \tau_{\alpha}(s)\sin(a(s))B_{\alpha}(s)),$$

yazılabilir.

(3.1.2), (3.1.4) ve (3.1.5) birlikte düşünülürse ;

$$\frac{d}{ds} \langle T_{\alpha}(s), T_{\beta}(\sigma(s)) \rangle = 0$$

olduğu görülür ki bu iddiayı ispatlar.

(d) θ , $T_{\alpha}(s)$ ve $T_{\beta}(\sigma(s))$ arasındaki açı olsun, dolayısıyla ,

$$T_{\beta}(\sigma(s)) = \cos\theta T_{\alpha}(s) + \sin\theta B_{\alpha}(s) \quad (3.1.6)$$

yazılabilir. \mathbb{R}^4 deki karma çarpım kullanılarak ; bir α eğrisinin binormal vektörü B_α hesaplanabilir.

Gerçekten

$$B_\alpha(s) = \alpha(s) \times T_\alpha(s) \times N_\alpha(s)$$

denklemini elde etmek kolaydır. Bu formül kullanılarak

$$B_\beta(\sigma(s)) = -\sin\theta T_\alpha(s) + \cos\theta B_\alpha(s) \quad (3.1.7)$$

formülü bulunur. Buradan ;

$$\frac{d}{ds} \langle B_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s)) \rangle = -\tau_\alpha(s) \langle N_\alpha(s), B_\beta(\sigma(s)) \rangle - \sigma'(s) \tau_\beta(\sigma(s)) \langle B_\alpha(s), N_\beta(\sigma(s)) \rangle = 0$$

elde edilir , bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.1.1 deki iddialar (c) ve (d) için alternatif bir durum ifade edebilir. Bunu yapmak için $P_a^0(\gamma_s^\alpha)$; $\gamma_s^\alpha(a) = \beta(\sigma(s))$ ve $\gamma_s^\alpha(0) = \alpha(s)$ arasındaki paralel transportu ele alalım. Daha sonra , β boyunca her diferensiyellenebilir $Y \in \chi(\beta)$ vektör alanı için, α boyunca bir $X \in \chi(\alpha)$ diferensiyellenebilir bir vektör alanı ;

$$X(s) = P_a^0(\gamma_s^\alpha) Y(\sigma(s))$$

denklemlerle tanımlanabilir.

Bu denklem kısaca , $X=PY$ olarak yazılabilir. Paralel dönüşümlerin ilginç bir özelliği şudur; eğer iki hiperyüzey $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ ve $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ parametrize edilmiş bir α eğrisi boyunca teğetse ve v_0 , $T_{\alpha(s_0)}S_1 = T_{\alpha(s_0)}S_2$ eşitliğini sağlayan bir vektör ise ; $v(s)$ in S_1 hiperyüzeyine göre α boyunca v_0 in paralel transportu olması için gerek ve yeter şart $v(s)$ in S_2 hiperyüzeyine göre α boyunca için v_0 in paralel transportu olmasıdır. Gerçekten V nin kovaryant türevi Dv/ds iki hiperyüzey için de aynıdır.

Bu özellik kullanılarak , bir vektörün $\gamma \subset S^3$ geodeziği boyunca paralel transportu γ' ne ortogonal olan , sabit bir vektör alanıdır, denilebilir. Gerçekten , $\gamma = \gamma(s)$ kürenin bir geodeziği olmak üzere, v_0 da , $p = \gamma(s_0)$ olan noktada S^3 e teğet bir vektör ve $\gamma'(s_0)$ a ortogonal olsun.

$$C = S' \times \mathbb{R}^2$$

hipersilindiri gözönüne alındığında, bu silindir γ boyunca S^3 e teğet olmak üzere; $v(s)=v_0$ sabit vektör alanı hipersilindire göre γ boyunca γ_0 in paralel transportudur.

Ancak yukarıdaki özellikten $v(s)$ in aynı zamanda , S^3 , 3-küresi için de paralel transport olduğu görülebilir. Böylece Önerme 2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.1.2 α ve β , S^3 te bir Bertrand eğri çifti olsun. O zaman , aşağıdaki özellikler sağlanır;

(a) T_α ve PT_β arasındaki açı sabittir.

(b) B_α ve $P B_\beta$ arasındaki açı sabittir.

İspat. $(PT_\beta)_{(s)} = P_a^0(\gamma_s^\alpha) (T_\beta(\sigma(s))) = (T_\beta(\sigma(s)))$ ve

$$(PB_\beta)_{(s)} = B_\beta(\sigma(s)) ,$$

olduğundan , bu sonuç , Önerme 3.1.1 deki (c) ve (d) den görülebilir.

4. BÖLÜM

4.1. BERTRAND EĞRİLERİ İÇİN BAZI BAĞINTILAR

3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrileri için iyi bilinen bir teorem S^3 te aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.1 α ve β , S^3 te bir Bertrand eğri çifti olsun. Aşağıdaki bağıntıları sağlayan a ve θ sabitleri vardır;

- (a) $(\cos a - \sin a k_\alpha) \cdot \sin \theta = \sin a \cdot \cos \theta \cdot \tau_\alpha$,
- (b) $(\cos a + \sin a k_\beta) \cdot \sin \theta = \sin a \cdot \cos \theta \cdot \tau_\beta$,
- (c) $(\cos a - \sin a k_\alpha) \cdot (\cos a + \sin a k_\beta) = \cos^2 \theta$
- (d) $\sin^2 a \cdot \tau_\alpha \tau_\beta = \sin^2 \theta$ [6].

İspat. (a) (3.1.1) in kovaryant türevi alınıp (3.1.6) denklemi kullanılarak ;

$$\frac{d}{ds} \beta(\sigma(s)) = \sigma'(s) \cdot \cos \theta \cdot T_\alpha(s) + \sigma'(s) \cdot \sin \theta \cdot B_\alpha(s)$$

denklemini elde ederiz. Diğer taraftan Frenet denklemleri kullanılarak ve $a(s) = a$ nın sabit olduğu düşünülerek;

$$\frac{d}{ds} \beta(\sigma(s)) = (\cos a - \sin a k_\alpha) \cdot T_\alpha(s) + \sin a \cdot \tau_\alpha(s) \cdot B_\alpha(s)$$

denklemini elde edilebilir. Son iki denklemden

$$\sigma'(s) \cdot \cos \theta = \cos a - \sin a k_\alpha(s) \quad (4.1.1)$$

$$\sigma'(s) \cdot \sin \theta = \sin a \cdot \tau_\alpha(s) \quad (4.1.2)$$

bulunur ki bu da (a) yı ispatlar.

(b) α ' nın Frenet çatısı, β ' nın Frenet çatısı cinsinden yazılırsa;

$$\alpha(s(\sigma)) = \cos a \cdot \beta(\sigma) - \sin a \cdot N_\beta(\sigma) \quad (4.1.3)$$

$$T_\alpha(s(\sigma)) = \cos \theta \cdot T_\beta(\sigma) - \sin \theta \cdot B_\beta(\sigma) \quad (4.1.4)$$

$$N_\alpha(s(\sigma)) = \sin a \cdot \beta(\sigma) + \cos a \cdot N_\beta(\sigma) \quad (4.1.5)$$

$$B_\alpha(s(\sigma)) = \sin \theta \cdot T_\beta(\sigma) + \cos \theta \cdot B_\beta(\sigma) \quad (4.1.6)$$

(a) daki sonuçtan ve aşağıdaki iki denklemlerle (b) şıkkı da ispatlanmış olur ;

$$s'(\sigma) \cdot \cos\theta = \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot k_\beta(\sigma) \quad (4.1.7)$$

$$s'(\sigma) \cdot \sin\theta = \sin\alpha \cdot \tau_\beta(\sigma) \quad (4.1.8)$$

(c) Denklem (4.1.1) ve (4.1.7) ün sonucu olarak bulunabilir.

(d) Denklem (4.1.2) ve (4.1.8) in bir sonucudur.

Eğer α ve β , S^3 de Bertrand eğrileri ise, yukarıdaki teoremin (d) kısmına göre; birbirine karşılık gelen noktalarda α ve β 'nın torsiyonlarının çarpımı sabittir ve negatif değildir.

S^3 deki bir α eğrisine, eğer 2-boyutlu total geodezik $S^2 \subset S^3$ küresi üzerinde yatıyor ise bir düzlem eğrisidir, denir. Bunun bir sonucu olarak, α 'nın torsiyonu tüm noktalarda sıfırdır. Eğriliği ve torsiyonu 0 'dan farklı sabitler olan S^3 deki bir bükümlü eğriye helis denir. Daha genel olarak, bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine eğer α boyunca sabit uzunluğa sahip bir $\nu(s)$ vektör alanı varsa ve α' ile ν arasındaki açı sıfırdan farklı bir sabitse bir genel helis denir.

Düzlem eğrilerinin ve helislerin, genel helislerin aşikar bir örneği olduğu görülebilir;

α eğer bir düzlem eğrisi ise, $V = B$ bir eksen olarak alınabilir; α bir helis ise vektör alanı V ;

$$V(s) = \cos\theta \cdot T(s) + \sin\theta \cdot B(s)$$

alınabilir.

Önerme 4.1.1 (Bertrand Yüzey Eğrileri)

(a) S^3 deki her yüzey eğrisi bir Bertrand eğrisidir ve sonsuz Bertrand eşlenik yüzey eğrisine sahiptir [6].

(b) Eğer bir Bertrand eğrisi α ; düzlem eğrisi olan bir eşlenik Bertrand eğrisi β ya sahipse, α da aynı total geodezik 2-boyutlu küre üzerindeki bir düzlem eğrisidir [6].

İspat. (a) α , S^3 de bir yüzey eğrisi olsun. $\forall a \in \mathbb{R}$ için, β_a eğrisi, S^3 de aşağıdaki biçimde tanımlansın;

$$\beta_a(s) = \cos a \cdot \alpha(s) + \sin a \cdot N_\alpha(s) \quad (4.1.9)$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ için β_a bir Bertrand eşleniğidir. (4.1.9) denkleminin kovaryant türevi alınarak ve Frenet denklemleri kullanılarak,

$$T_{\beta_a}(\sigma(s)) = T_\alpha(s) \quad (4.1.10)$$

$$\sigma'(s) = \cos a - \sin a \cdot k_\alpha(s) \quad (4.1.11)$$

elde edilebilir. Burada $\sigma = \sigma(s)$ ler, β_a nın yay-uzunluğu parametrelerini göstermektedir. (4.1.10) denkleminin tekrar kovaryant türevi alınarak;

$$N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -\sin a \cdot \alpha(s) + \cos a \cdot N_\alpha(s) \quad (4.1.12)$$

$$k_{\beta_a}(\sigma(s)) = \frac{\sin a + \cos a \cdot k_\alpha(s)}{\cos a - \sin a \cdot k_\alpha(s)} \quad (4.1.13)$$

elde edilir.

$\beta_a(\sigma_0)$, $\sigma_0 = \sigma(s_0)$ noktasında başlayan asli normal geodezik aşağıdaki gibidir;

$$\gamma(u) = \cos u \cdot \beta_a(\sigma_0) + \sin u N_{\beta_a}(\sigma_0) = \cos(u+a)\alpha(s_0) + \sin(u+a) \cdot N_\alpha(s_0),$$

Bu $\alpha(s_0)$ da başlayan asli normal geodeziğin tekrar parametrelendirilmesidir. Son olarak (4.1.12) nin kovaryant türevi alınarak ve Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\sigma'(s) \frac{d}{d\sigma} N_{\beta_a}(\sigma(s)) = -(\sin a + \cos a \cdot k_\alpha(s)) \cdot T_\alpha(s),$$

bulunur, bununla beraber (4.1.10) ve (4.1.13) eşitliklerinden $\tau_{\beta_a} = 0$ olduğu görülür,

o halde β_a , S^3 de bir yüzey eğrisidir.

(b) $\tau_\beta = 0$ olduğundan ve Teorem 4.1.1(d) den, $\sin \theta = 0$ (ve böylece $\cos \theta = \pm 1$) elde edilir.

Teorem 4.1.1(a) kullanılarak $\sin a \cdot \tau_\alpha = 0$ bulunur. Eğer $\sin a = 0$ ise, $a = \pm \beta$ dır ve ayrıca aynı total geodezik 2-boyutlu küre üzerinde bir yüzey eğrisidir; aksi halde $\tau_\alpha = 0$ dır ve bu bize aynı sonucu verir.

Teorem 4.1.2. S^3 deki bir α eğrisinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart ; $\tau_\alpha = 0$ olmak üzere, α eğrisinin 2-boyutlu herhangi bir birim küre $S^2(1)$ içinde olmasıdır veya $\lambda \neq 0$ olmak üzere, $\lambda k_\alpha + \mu \tau_\alpha = 1$ eşitliğini sağlayan iki λ ve μ sabitlerinin var olmasıdır [6].

İspat. α , bir Bertrand eğrisi olsun. Eğer α bir düzlem eğrisi değilse , Teorem3.1(a) dan dolayı , $\lambda=\tan a$ ve $\mu=\tan a.\cot\theta$ sabitler olarak alınır ; $\lambda k_{\alpha} + \mu \tau_{\alpha}=1$ denklemi elde edilir. Şimdi , $\lambda k_{\alpha} + \mu \tau_{\alpha}=1$ olduğunu kabul edelim, $\lambda \neq 0$ ve μ sabitleri için , $\lambda=\tan a$ olmak üzere S^3 deki β eğrisi;

$$\beta(s)=\cos a.\alpha(s)+\sin a.N_{\alpha}(s) \quad (4.1.14)$$

olarak tanımlansın. $\beta(\sigma)$ nın bir Bertrand eşleniği olduğu görülecektir. (4.1.14) denklemindeki kovaryant türev alınarak ve Frenet denklemi kullanılarak

$$N_{\beta}(\sigma(s))=-\sin a.\alpha'(s) + \cos a.N_{\alpha}(s) \quad (4.1.15)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra $\beta(\sigma_0)$ noktasında başlayan asli normal geodezik ,

$$\gamma(u) = \cos u.\beta(\sigma_0)+ \sin u N_{\beta}(\sigma_0) = \cos(u+a).\alpha(s_0)+ \sin(u+a).N_{\alpha}(s_0),$$

ile verilsin. Bu denklem $\alpha(s_0)$ ' da başlayan asli normal geodeziğin yeniden parametrelendirilmiş halidir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 4.1.2 α , S^3 de bükümlü bir eğri olsun. Aşağıdaki şartlar birbirine denktir ;

- (a) α , bir helistir ,
- (b) α , sonsuz Bertrand eşlenik eğrilerine sahiptir ,
- (c) α nın iki tane Bertrand eşlenik eğrisi vardır [6].

İspat. (a) \Rightarrow (b) Kabul edelim ki k_{α} , τ_{α} sıfırdan farklı sabitler olsun. Dolayısıyla, bu sabit değişkenler arasında sonlu lineer bir ilişki elde etmek kolaydır; ancak , farklı her lineer bağımlı için farklı bir Bertrand eşlenik eğrisi oluşturabiliriz, ki bu da bir helistir.

(b) \Rightarrow (c) İspat açıktır.

(c) \Rightarrow (a) Eğer α nın β_1 ve β_2 olmak üzere iki Bertrand eşlenik eğrisi varsa, $a_1 \neq 0$ ve $a_2 \neq 0$

θ_1 , θ_2 sabitleri alınabilir.

$$\tan a_1.k_{\alpha}(s)+ \tan a_1.\cot \theta_1.\tau_{\alpha}(s)=1,$$

$$\tan a_2.k_{\alpha}(s)+ \tan a_2.\cot \theta_2.\tau_{\alpha}(s)=1,$$

$a_1 \neq a_2$ dir , çünkü β_1 ve β_2 iki farklı Bertrand eğrileridir. Bu denklemlerdeki kovaryant türev alınarak

$$k'_\alpha(s) + \cot \theta_1 \cdot \tau'_\alpha(s) = 0,$$

$$k'_\alpha(s) + \cot \theta_2 \cdot \tau'_\alpha(s) = 0.$$

elde edilir ;

Böylece , $\theta_1 \neq \theta_2$ (çünkü $a_1 \neq a_2$) olduğundan , $k'_\alpha(s) = \tau'_\alpha(s) = 0$ olarak bulunur. Yani; α , sabit eğrilik ve sabit torsiyona sahiptir. Bu da ispatı sonuçlandırır.



5. BÖLÜM

5.1. E^3 de İvolüt ve Evolüt Eğriler

Tanım 5.1.1 Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow IR^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı

$$\beta: I \rightarrow IR^3$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için , α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\beta(s)$ noktasından geçiyorsa ve

$$\langle T_\alpha(s), T_\beta(s) \rangle = 0$$

ise , β eğrisine α eğrisinin bir involütü denir [13].

Teorem 5.1.1 β eğrisi α eğrisinin bir involütü ise, c sabit bir reel sayı olmak üzere,

$$\beta(s) = \alpha(s) + (-s+c) T_\alpha(s) \quad (5.1.1)$$

dir[13].

İspat. β eğrisi $\beta(s) = \alpha(s) + u(s) T_\alpha(s)$ biçiminde verilebilir. Buradan ,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= \alpha'(s) + u'(s) T_\alpha(s) + u(s) T_\alpha'(s) \\ &= T_\alpha(s) + u'(s) T_\alpha(s) + u(s) k_\alpha(s) N_\alpha(s) \\ &= (1+u'(s)) T_\alpha(s) + u(s) k_\alpha(s) N_\alpha(s) \end{aligned}$$

bulunur. β eğrisi α eğrisinin bir involütü olduğundan, $\langle \beta'(s), T_\alpha(s) \rangle = 0$ dır. Burada $\beta'(s)$ yerine yukarıda bulunan eşitlik yazılarak , $1+u'(s)=0$ ve $u(s) = -s+c$ elde edilir.

Teorem 5.1.2. β eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. β eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ olduğuna göre

$$T_\beta = N_\alpha \quad (5.1.2)$$

$$N_\beta = \frac{-k}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}} T_\alpha + \frac{\tau}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}} B_\alpha \quad (5.1.3)$$

$$B_\beta = \frac{\tau}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}} T_\alpha + \frac{k}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}} B_\alpha \quad (5.1.4)$$

dir[13].

İspat. (5.1.1) eşitliğinden ,

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \alpha'(s) - T_\alpha(s) + (-s+c) T'_\alpha(s) \\ &= T_\alpha(s) - T_\alpha(s) + (-s+c) k_\alpha(s) N_\alpha(s) \\ &= (-s+c) k_\alpha(s) N_\alpha(s)\end{aligned}$$

dir. Buradan, $\|\beta'(s)\| = |(-s+c)k_\alpha|$ elde edilir.

$$\begin{aligned}T_\beta(s) &= \frac{1}{\|\beta'(s)\|} \beta'(s) = \frac{1}{|(-s+c)k_\alpha|} (-s+c) k_\alpha(s) N_\alpha(s) \\ &= \frac{(-s+c) k_\alpha(s)}{|(-s+c)k_\alpha|} N_\alpha(s)\end{aligned}$$

olur. $T_\beta(s) = \frac{(-s+c) k_\alpha(s)}{|(-s+c)k_\alpha|} N_\alpha(s)$ eşitliğinde $T_\beta(s)$ ve $N_\alpha(s)$ vektörleri birim uzunlukta

vektörler olduğundan,

$$T_\beta = N_\alpha \quad \text{veya} \quad T_\beta = -N_\alpha$$

olmak zorundadır. Bundan sonraki işlemler $T_\beta = N_\alpha$ olduğu varsayılarak yapılacaktır. IR üstündeki koordinat fonksiyonun x ile gösterelim. Her $s \in I$ için , $x(s)=s$ dir. Bu durumda

$$\beta'(s) = (-s+c) k_\alpha(s) N_\alpha(s)$$

eşitliği ,

$$\beta'(s) = (-x+c) k_\alpha(s) N_\alpha(s)$$

biçimine girer. $x'=1$ dir. α eğrisi için Frenet vektörlerinden yararlanarak,

$$\beta''(s) = [-(-x+c)k_\alpha^2] T_\alpha + [-k_\alpha + (-x+c)k'_\alpha] N_\alpha + [(-x+c)k_\alpha \tau_\alpha] B_\alpha$$

ve

$$\begin{aligned}\beta'''(s) &= [2k_\alpha^2 - 3(-x+c)k_\alpha k'_\alpha] T_\alpha \\ &\quad + [-(-x+c)k_\alpha^3 - 2k'_\alpha + (-x+c)k''_\alpha - (-x+c)k_\alpha \tau_\alpha] N_\alpha \\ &\quad + [-2k_\alpha \tau_\alpha + 2(-x+c)k'_\alpha \tau_\alpha] B_\alpha\end{aligned}\tag{5.1.5}$$

bulunur.

$$\beta'(s) \times \beta''(s) = (-x+c)^2 k_\alpha^2 \tau_\alpha T_\alpha + (-x+c)^2 k_\alpha^3 B_\alpha\tag{5.1.6}$$

ve

$$\|\beta'(s) \times \beta''(s)\| = \sqrt{(-x+c)^4 + k_\alpha^4 \tau_\alpha^2 + (-x+c)^4 k_\alpha^6} = (-x+c)^2 k_\alpha^2 \cdot \sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}$$

olduğundan,

$$B_\beta = \frac{\beta'(s) \times \beta''(s)}{\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|} = \frac{\tau_\alpha T_\alpha + k_\alpha B_\alpha}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}}$$

bulunur. $N_\beta = B_\beta \times T_\beta$ olduğundan

$$N_\beta = \frac{\tau_\alpha T_\alpha + k_\alpha B_\alpha}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}} \times N_\alpha = \frac{-k}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}} T_\alpha + \frac{\tau}{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}} B_\alpha$$

olur.

Teorem 5.1.3 β eğrisi α eğrisinin bir involütü olsun. β eğrisinin eğrilik ve burulması

k_β ve τ_β olduğuna göre,

$$k_\beta = \frac{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}}{|(-s+c)k_\alpha|} \quad (5.1.7)$$

$$\tau_\beta = \frac{k_\alpha \tau'_\alpha - k'_\alpha \tau_\alpha}{(-s+c)k_\alpha(k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)} \quad (5.1.8)$$

dır[13].

İspat. $k_\alpha(s) = \frac{\|\beta'(s) \times \beta''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3} = \frac{(-x+c)2k_\alpha^2 \cdot \sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}}{|(-s+c)k_\alpha|^3} = \frac{\sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}}{|(-s+c)k_\alpha|}$

bulunur. (5.1.5) ve (5.1.6) eşitliklerinden yararlanarak,

$$\langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle = (-x+c)^3 k'_\alpha (k_\alpha \tau'_\alpha - k'_\alpha \tau_\alpha)$$

elde edilir.

$$\|\beta'(s) \times \beta''(s)\| = (-x+c)^2 k_\alpha^2 \cdot \sqrt{k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \text{ dir.}$$

$$\tau_\beta = \frac{\langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = \frac{k_\alpha \tau'_\alpha - k'_\alpha \tau_\alpha}{(-s+c)k_\alpha(k_\alpha^2 + \tau_\alpha^2)}$$

bulunur.

Tanım 5.1.2. Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı

$$\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle T_\beta(s), T_\alpha(s) \rangle = 0$ ise, β eğrisine, α eğrisinin bir evolütü denir[13].

Teorem 5.1.4. β eğrisi , α eğrisinin bir evolütü ise,

$$c \in \mathbb{R} \text{ ve } \varphi(s) = \int_0^s \tau(u) du$$

olmak üzere,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \rho(s)N_\alpha(s) - \rho(s) \cdot \tan[\varphi(s) + c]B_\alpha \quad (5.1.9)$$

dir. Ayrıca, $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlemde , birinci kenarı $\beta(s) - \alpha(s)$, ikinci kenarı $N_\alpha(s)$ olan yönlü açının ölçüsü $\varphi(s) + c$ dir.

İspat. β eğrisinin , $\beta(s)$ noktasındaki teğeti , $T_\beta(s)$ vektörünün gerdiği doğrudur. Bu doğru $\alpha(s)$ noktasından geçtiğinden, $\beta(s) - \alpha(s)$ vektörü de $T_\alpha(s)$ vektörüne dik olur. Buna göre,

$$\beta(s) - \alpha(s) = \lambda(s) N_\alpha(s) + \mu(s) B_\alpha(s)$$

biçimindedir. Öyleyse , $\beta(s)$ vektörü ,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s) N_\alpha(s) + \mu(s) B_\alpha(s)$$

biçimindedir. Buradan ,

$$\begin{aligned} \beta' &= \alpha' + (\lambda(s))' N_\alpha + \lambda(s) (-k_\alpha(s) T_\alpha + \tau_\alpha(s) B_\alpha) + (\mu(s))' B_\alpha + \mu(s) (-\tau_\alpha N_\alpha) \\ &= (1 - \lambda(s) k_\alpha(s)) T_\alpha + ((\lambda(s))' - \mu \tau_\alpha) N_\alpha + (\lambda(s) \tau_\alpha(s) + (\mu(s))') B_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Evolüt tanımına göre, $\langle \beta'(s) , T_\alpha(s) \rangle = 0$ olduğundan, $(1 - \lambda(s) k_\alpha(s)) = 0$ olur.

Böylece ,

$$\beta' = ((\lambda(s))' - \mu \tau_\alpha) N_\alpha + (\lambda(s) \tau_\alpha(s) + (\mu(s))') B_\alpha$$

olur. $(1 - \lambda(s) k_\alpha(s)) = 0$ eşitliğinden, $\lambda(s) = \frac{1}{k_\alpha}$ bulunur. $\frac{1}{k_\alpha} = \rho$ idi. Böylece ,

$$\lambda(s) = \rho$$

bulunur. Evolüt tanımına göre, β' vektör alanı , $\beta(s) - \alpha(s)$ vektör alanına paraleldir.

Öyleyse ,

$$\beta' = ((\lambda(s))' - \mu \tau_\alpha) N_\alpha + (\lambda(s) \tau_\alpha(s) + (\mu(s))') B_\alpha \text{ ve}$$

$\beta(s) - \alpha(s) = \lambda(s) N_\alpha(s) + \mu(s) B_\alpha(s)$ olduğu göz önüne alınarak,

$$\frac{\lambda(s)'}{\lambda(s)} - \frac{\mu\tau_\alpha}{\lambda(s)} = \frac{\lambda(s)\tau_\alpha}{\mu} - \frac{\mu'}{\mu}$$

elde edilir.

Bu eşitlikte $\lambda(s)$ yerine ρ konulup, τ_α hesaplanarak,

$$\tau_\alpha = \frac{\mu\rho' - \mu'\rho}{\mu^2 + \rho^2} = [\arctan(-\frac{\mu}{\rho})]'$$

bulunur. Öyleyse ,

$$\int_0^s \tau(u)du + c = \arctan(-\frac{\mu}{\rho})$$

demektir. $\int_0^s \tau(u)du = \varphi(s)$ diyelim. Böylece ,

$$\mu = -\rho \tan(\varphi + c)$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \rho N_\alpha(s) - \rho \tan(\varphi + c) B_\alpha(s)$$

elde edilir. Her bir c reel sayısı için bir evolüt eğrisi elde edilir. Buradaki $\alpha(s) + \rho N_\alpha(s)$ noktası, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezidir. $\beta(s), m, \alpha(s)$ noktalarının belirttiği üçgende , köşesi m olan açı dik açıdır. Aynı üçgende köşesi $\alpha(s)$ olan açının tanjantı,

$$\frac{\rho(s)\tan(\varphi+c)}{\rho(s)}$$

dir. Öyleyse , $\beta(s) - \alpha(s)$ vektörü ile $N_\alpha(s)$ vektörünün belirttiği açının ölçüsü $\varphi(s) + c$ dir.

Teorem 5.1.5. $\beta: I \rightarrow IR^3$ eğrisi, birim hızlı $\alpha: I \rightarrow IR^3$ eğrisinin bir evolütü olsun. $\beta(s)$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ olduğuna göre,

$$T_\beta = \cos(\varphi + c) N_\alpha - \sin(\varphi + c) B_\alpha \quad (5.1.10)$$

$$N_\beta = -T_\alpha \quad (5.1.11)$$

$$B_\beta = \sin(\varphi + c) N_\alpha + \cos(\varphi + c) B_\alpha \quad (5.1.12)$$

dır[13].

İspat. β eğrisinin Frenet vektör alanları $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ olsun.

$\beta(s) = \alpha(s) + \rho N_\alpha(s) - \rho \tan(\varphi + c) B_\alpha(s)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= T_\alpha + \rho' N_\alpha + \rho N_\alpha' - \rho' \tan(\varphi + c) B_\alpha(s) - \rho \varphi'(1 + \tan^2(\varphi + c)) B_\alpha(s) \\ &\quad - \rho \tan(\varphi + c) B_\alpha'(s) \\ &= \frac{\rho' + \rho \tau \tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)} [\cos(\varphi + c) N_\alpha - \sin(\varphi + c) B_\alpha] \end{aligned}$$

bulunur.

$$\|\beta'(s)\| = \frac{\rho' + \rho \tau \tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)} \quad (5.1.13)$$

olduğu kolayca görülebilir. $T_\beta = \frac{1}{\|\beta'(s)\|} \beta'(s)$ olduğundan,

$$T_\beta = [\cos(\varphi + c) N_\alpha - \sin(\varphi + c) B_\alpha]$$

olur. Böylece (5.1.10) eşitliği elde edilmiş olur.

$\beta(s)$ eğrisi birim hızlı değildir. (5.1.10) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= -\varphi'(\sin(\varphi + c) N_\alpha + \cos(\varphi + c) (-k_\alpha(s) T_\alpha + \tau_\alpha(s) B_\alpha) - \varphi' \cos(\varphi + c) B_\alpha \\ &\quad + \sin(\varphi + c) \tau_\alpha N_\alpha \\ &= -k_\alpha(s) \cos(\varphi + c) T_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Frenet eşitliklerine göre ,

$$(T_\beta(s))' = \|\beta'(s)\| k_\beta(s) N_\beta(s)$$

dır. Öyleyse ,

$$\|\beta'(s)\| k_\beta(s) N_\beta(s) = -k_\alpha(s) \cos(\varphi + c) T_\alpha \quad (5.1.14)$$

olmak zorundadır.

$N_\beta(s)$ ve T_α vektörleri birim uzunlukta vektörler olduğundan ,

$N_\beta(s) = -T_\alpha$ veya $N_\beta(s) = T_\alpha$ elde edilir. $N_\beta(s) = -T_\alpha$ olduğunu varsayalım. Böylece

(5.1.11) eşitliği elde edilmiş olur.

$B_\beta = N_\beta \times T_\beta$ olduğundan ,

$$B_\beta = [\cos(\varphi + c) N_\alpha - \sin(\varphi + c) B_\alpha] \times (-T_\alpha) = \sin((\varphi + c)) N_\alpha + \cos(\varphi + c) B_\alpha$$

elde edilir. Böylece (5.1.12) eşitliği bulunur.

Teorem 5.1.6. $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi, birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir evolütü olsun. β eğrisinin eğrilik ve burulması k_β ve τ_β olduğuna göre,

$$k_\beta = \frac{k_\alpha^3 \cos^3(\varphi + c)}{k_\alpha \tau_\alpha \sin(\varphi + c) - k'_\alpha \cos(\varphi + c)} \quad (5.1.15)$$

$$\tau_\beta = \frac{-k^3 \sin(\varphi + c) \cos^2(\varphi + c)}{k_\alpha \tau_\alpha \sin(\varphi + c) - k'_\alpha \cos(\varphi + c)} \quad (5.1.16)$$

dır[13].

İspat. N_β ve T_α vektörleri birim uzunlukta vektörler olduğundan,

$$\|\beta'(s)\| k_\beta(s) = k_\alpha(s) \cos(\varphi + c)$$

olur. Buradan önce k_β hesaplanıp ,sonra (4.1.13) eşitliği göz önüne alınarak ,

$$k_\beta = \frac{k_\alpha \cos(\varphi + c)}{\|\beta'(s)\|} = \frac{k_\alpha \cos(\varphi + c)}{\frac{\rho' + \rho \tau \tan(\varphi + c)}{\cos(\varphi + c)}} = \frac{k_\alpha^3 \cos^3(\varphi + c)}{k_\alpha \tau_\alpha \sin(\varphi + c) - k'_\alpha \cos(\varphi + c)}$$

elde edilir. Böylece (5.1.15) eşitliği elde edilmiş olur.

$$(B_\beta)' = \varphi' \cos(\varphi + c) \cdot N_\alpha + \sin(\varphi + c) (-k_\alpha(s) T_\alpha + \tau_\alpha(s) B_\alpha) - \varphi' \sin(\varphi + c) B_\alpha$$

$$+ \cos(\varphi + c) (-\tau_\alpha N_\alpha)$$

$$= -k_\alpha(s) \sin(\varphi + c) T_\alpha$$

bulunur. $(B_\beta)' = -\|\beta'(s)\| \cdot \tau_\beta \cdot N_\beta$ olduğundan,

$$-\|\beta'(s)\| \cdot \tau_\beta \cdot N_\beta = -k_\alpha(s) \sin(\varphi + c) T_\alpha$$

elde edilir.

$N_\beta = -T_\alpha$ olduğundan ,

$$\|\beta'(s)\|. \tau_\beta = -k_\alpha(s). \sin(\varphi + c)$$

bulunur. Bu eşitlikten önce τ_β hesaplanıp ,daha sonra (5.1.13) eşitliği kullanılarak,

$$\tau_\beta = \frac{-\sin(\varphi+c)k_\alpha}{\|\beta'(s)\|} = \frac{-\sin(\varphi+c)k_\alpha}{\frac{\rho'+\rho\tau \tan(\varphi+c)}{\cos(\varphi+c)}} = \frac{-k^3 \sin(\varphi+c). \cos^2(\varphi+c)}{k_\alpha \tau_\alpha \sin(\varphi+c) - k'_\alpha \cdot \cos(\varphi+c)}$$

bulunur.



6. BÖLÜM

6.1. 3-Boyutlu Kürede İvolüt-Evolüt Eğrilerinin İncelenmesi

α eğrisindeki her $\alpha(t)$ noktası için , $S^3(r)$ deki $\alpha(t)$ noktasında başlayan teğet normal geodezik , bir geodezik eğri olarak ;

$$\gamma_t^\alpha = \exp_{\alpha(t)}(uT(t)) = \cos\left(\frac{u}{r}\right) \alpha(t) + r \sin\left(\frac{u}{r}\right) T(t) , \quad u \in \mathbb{R} \quad (6.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 6.1.1 Bir yüzey üzerinde, ortogonal geodezik bir sistemin tanımlanabilmesi için ; yüzeyin açılabilir bir yüzey veya bir düzlem olması gerekmektedir [14].

Teorem 6.1.1den ve İvolüt-evolüt eğrilerin tanımından dolayı , bu tip eğriler 3-boyutlu ve 2-boyutlu küre üzerinde tanımlanamazlar. Bu nedenle bu tip eğriler açılabilir bir yüzey olan $S^1(r)$ küresinde ele alınacaktır.

Tanım 6.1.1 Eğriliği 0-olmayan bir α eğrisine , $\beta(\sigma): J \subset \mathbb{R} \rightarrow S^1(r)$ olmak üzere α ve β arasında birebir bir dönüşüm varsa ve bu eğrilerin teğet normal geodeziklerinin iç çarpımları 0 ise; α ve β eğri çiftine İvolüt-evolüt eğri çifti denir.

$S^1(r)$ küresi $r=1$ yarıçaplı ve İvolüt-evolüt eğrileri yay uzunluğu parametresine sahip olmak üzere $\alpha(s)$ ve $\beta(\sigma)$ eğrileri bir İvolüt-evolüt eğri çifti olsun. Öyleyse ; diferensiyellenebilir bir $a(s)$ fonksiyonu için

$$\beta(\sigma(s)) = \cos(a(s)) \alpha(s) + \sin(a(s)) T_\alpha(s) \quad (6.1.2)$$

yazılabilir. $\beta(\sigma(s))$, β' da $\alpha(s)$ ' e karşılık gelen nokta olsun. $d(s)$ uzaklık fonksiyonu S^1 de $\alpha(s)$ ve ona karşılık gelen nokta $\beta(\sigma(s))$ arasındaki uzaklık olarak tanımlanabilir.

Önerme 6.1.1 α ve β , S^1 de bir İvolüt-evolüt eğri çifti olsun. Buna göre ;

- $a(s)$ fonksiyonunun değeri $c-s$ e eşittir.
- $d(s)$ uzaklık fonksiyonu s parametresine bağlıdır.

İspat. (a) α ve β , birbirine karşılık gelen noktalarda iç çarpımları 0 olan teğet normal geodeziklere sahip olduğundan , şu eşitliklere sahibiz ;

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=0} \gamma_s^0(u) = T_\alpha(s) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{du} \Big|_{u=a(s)} \gamma_s^0(u) = T_\beta(\sigma(s))$$

daha sonra Frenet denklemleri kullanılarak ve (6.1.2) denkleminin türevi alınarak ;

$$\frac{d}{ds} \beta(\sigma) = -a'(s) \sin(a(s)) \alpha(s) + \cos(a(s)) \cdot \alpha'(s) + a'(s) \cos(a(s)) T_\alpha(s) + \sin(a(s)) \cdot T_\alpha'(s)$$

$$= -a'(s) \sin(a(s)) \alpha(s) + \cos(a(s)) \cdot T_\alpha(s) + a'(s) \cos(a(s)) T_\alpha(s)$$

$$+ \sin(a(s)) \cdot k_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s)$$

$$= -a'(s) \sin(a(s)) \alpha(s) + \cos(a(s)) \cdot T_\alpha(s) \cdot (1 + a'(s)) + \sin(a(s)) \cdot k_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s)$$

bulunur.

Buradan $\langle \frac{d}{ds} \beta(\sigma), T_\alpha(\sigma) \rangle = 0$ eşitliği kullanılarak;

$$\langle -a'(s) \sin(a(s)) \alpha(s) + \cos(a(s)) \cdot T_\alpha(s) (1 + a'(s)) + k_\alpha(s) \cdot \sin(a(s)) \cdot N_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle = 0$$

$$\langle -a'(s) \sin(a(s)) \alpha(s), T_\alpha(s) \rangle + \langle \cos(a(s)) \cdot T_\alpha(s) (1 + a'(s)), T_\alpha(s) \rangle +$$

$$\langle \sin(a(s)) \cdot k_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s), T_\alpha(s) \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle \cos a(s) T_\alpha(s) (1 + a'(s)), T_\beta(\sigma) \rangle = 0 \text{ şeklinde sadeleştirildiğinde,}$$

buradan $(1 + a'(s))$ in 0 olması gerektiği bulunur, dolayısıyla $a(s)$ in c-s e eşit olduğu görülür ve ispat biter.

(b) Varsayalım ki; $0 \leq a(s) \leq 2\pi$ olsun. Dolayısıyla, $\alpha(s)$ ile $\beta(s)$ arasında olan uzaklık fonksiyonu $d(s)$,

$$d(s) = \min\{a(s), 2\pi - a(s)\}$$

olarak verilir, **(a)** şıkkı göz önüne alındığında $d(s)$ uzaklık fonksiyonunun s parametresine bağlı olarak bulunur.

Teorem 6.1.2 $\alpha(s)$ ve $\beta(\sigma(s))$ eğrileri involüt-evolüt eğri çifti olsun. $\alpha(s) \in \alpha$ ve $\beta(\sigma(s)) \in \beta$ ve $\beta(\sigma(s))$ 'nin eğrilik fonksiyonu $k_\beta(\sigma(s))$ olmak üzere;

$$k_\beta^2(\sigma(s)) = \operatorname{cosec}^2(-s + c) \quad (6.1.3)$$

şeklindedir.

İspat. $\beta(\sigma(s)) = \cos(-s+c) \alpha(s) + \sin(-s+c) \cdot T_\alpha(s)$ (6.1.4)

denkleminin s parametresine bağlı türevi alınarak;

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \beta(\sigma(s)) \cdot \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} &= \sin(-s+c) \cdot \alpha(s) + \cos(-s+c) \cdot \frac{d\alpha(s)}{ds} - \cos(-s+c) \cdot T_\alpha(s) + \\ &\quad \sin(-s+c) \cdot \frac{d}{ds} T_\alpha(s) \\ T_\beta(\sigma(s)) \cdot \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} &= \sin(-s+c) \cdot k_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s) \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

elde edilir.

Buradan ;

$$T_\beta(\sigma(s)) = N_\alpha(s) \quad \text{ve} \quad \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} = \sin(-s+c) \cdot k_\alpha(s) \quad (6.1.6)$$

eşitlikleri bulunur.

Son denklemin diferensiyeli alınarak ve Frenet formülleri kullanılarak,

$$\frac{d}{ds} T(\sigma(s)) \cdot \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} = \frac{d}{ds} N_\alpha(s) = -k_\alpha(s) \cdot T_\alpha(s)$$

$$k_\beta(\sigma(s)) \cdot N_\beta(\sigma(s)) \cdot \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} = -k_\alpha(s) \cdot T_\alpha(s)$$

$$k_\beta(\sigma(s)) \cdot N_\beta(\sigma(s)) \cdot \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} = -\frac{1}{\sin(-s+c)} \cdot T_\alpha(s)$$

Buradan,

$$k_\beta^2(\sigma(s)) = \operatorname{cosec}^2(-s + c)$$

olduğu görülür ve ispat biter.

Geodeziklerle ilgili olarak verilen (Teorem6.1.1) göz önüne alındığında, yani eğer bir yüzey ortogonal bir geodezik sisteme sahip ise, sistem ya açılabilir ya da bir düzlemdir, ifadesinden, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.1.4. Birim hızlı $\alpha(s): I \rightarrow S^1(I)$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\beta: I \rightarrow S^1(1) \subset IR^2$ eğrisi verilsin. β eğrisi, α eğrisinin bir evlütü olsun. $S^1(1)$ deki her $\alpha(s)$ eğrisinin düzlemsel evlütüsü, eğrilik merkezinin geometrik yeridir.

İspat.

$$T_\alpha(s) = N_\beta(\sigma(s))$$

olduğundan,

$$\alpha(s) = \cos(a(s)). \beta(\sigma(s)) + \sin(a(s)). T_\beta(\sigma(s)) \quad (6.1.7)$$

$$\cos(a(s)). \beta(\sigma(s)) = \alpha(s) - \sin(a(s)). T_\beta(\sigma(s)) \quad (6.1.8)$$

$$\cos(a(s)). \beta(\sigma(s)) = \alpha(s) - \sin(a(s)). N_\alpha(s) \quad (6.1.9)$$

$$\cos(a(s)). \frac{d}{ds} \beta(\sigma(s)). \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} = T_\beta(\sigma(s)) = T_\alpha(s) - \lambda$$

elde edilir.

(6.1.7) denkleminde $a(s)$ yerine $-s+c$ yazılarak;

$$\alpha(s) = \cos(-s + c). \beta(\sigma(s)) + \sin(-s + c). T_\beta(\sigma(s))$$

$$\cos(-s + c). \beta(\sigma(s)) = \alpha(s) - \sin(-s + c). N_\alpha(s)$$

$$\beta(\sigma(s)) = \frac{\alpha(s)}{\cos(-s+c)} - \tan(-s + c). N_\alpha(s)$$

$$T_\beta(\sigma(s)). \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} = \frac{\alpha'(s). \cos(-s+c) + \sin(-s+c). \alpha(s)}{\cos^2(-s+c)} - (1 + \tan^2(-s + c)). N_\alpha(s) -$$

$$\tan(-s + c). \frac{d}{ds} N_\alpha(s)$$

$$T_{\beta}(\sigma(s)) \cdot \frac{d(\sigma(s))}{d(s)} = T_{\alpha}(s) \frac{1}{\cos(-s+c)} + \tan(-s+c) \cdot \frac{1}{\cos(-s+c)} \alpha(s) \\ - (1+\tan^2(-s+c)) \cdot N_{\alpha}(s) + \tan(-s+c) \cdot k_{\alpha} \cdot T_{\alpha}(s)$$

eşitliği elde edilir.

İnvolut-Evolüt tanımından,

$$\langle T_{\beta}(\sigma(s)), T_{\alpha}(s) \rangle = \langle T_{\alpha}(s) \frac{1}{\cos(-s+c)}, T_{\alpha}(s) \rangle \\ + \tan(-s+c) \cdot \frac{1}{\cos(-s+c)} \langle \alpha(s), T_{\alpha}(s) \rangle \\ - (1+\tan^2(-s+c)) \cdot \langle T_{\alpha}(s), N_{\alpha}(s) \rangle + \tan(-s+c) \cdot k_{\alpha} \cdot \langle T_{\alpha}(s), T_{\alpha}(s) \rangle$$

bulunur.

$$0 = \frac{1}{\cos(-s+c)} + \tan(-s+c) \cdot k_{\alpha} \\ - \frac{1}{\cos(-s+c)} = \tan(-s+c) \cdot k_{\alpha} \\ k_{\alpha} = - \frac{1}{\cos(-s+c)} \frac{1}{\tan(-s+c)} = - \frac{1}{\sin(-s+c)} \\ \sin(-s+c) = - \frac{1}{k_{\alpha}}$$

elde edilir.

O halde

$$\beta(\sigma(s)) = \alpha(s) \cdot \frac{1}{\cos(-s+c)} + \frac{1}{k_{\alpha}} N_{\alpha}(s)$$

olur. Buradan $\beta(\sigma(s)): I \rightarrow S^1 \subset IR^2$ eğrisinin, $\alpha(s)$ eğrisi için eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olduğu görülür.

KAYNAKLAR

- [1] **Hacısalihođlu , H. H. ,** 1998. , Diferensiyel Geometri 1.Cilt , Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [2] **Sabuncuođlu , A. ,** 2007. , Diferensiyel Geometri , Ankara Üniversitesi , Ankara.
- [3] **Hacısalihođlu , H. H. ,** 1994. , Diferensiyel Geometri 2. Cilt , Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [4] **Hacısalihođlu , H. H. ,** 2003. , Diferensiyel Geometri 3. Cilt , Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [5] **Chen , B. Y. ,** 1973. , Geometry of Submanifolds , Pure and Applied Mathematics , Vol.22. , New York.
- [6] **Lucas, P. , Ortega Yagües, J.A. ,** 2012. , Journal of Geometry and Physics , Bertrand curves on 3-dimensional spheres, page 1903-1914, Vol. 62. , Murcia.
- [7] **Görgülü , A. , Özdamar , E. ,** 1986. , A generalization of the Bertrand curves as General inclined curves in E^3 , communications of the faculty of sciences of the University of Ankara , Vol. 35. , Ankara.
- [8] **Ekmekçi , N. , İlarıslan , K. ,** 2001. , On Bertrand curves and their characterization , Differential Geometry –Dynamical Systems.
- [9] **Balgetir , H. , Bektaş , M. , Inoguchi , J-I. ,** 2004 , , Null Bertrand curves in Minkowski 3- space and their characterizations , Vol.23. , Note Di Mathematica.
- [10] **Yılmaz Yıldırım , M. , Bektaş , M. ,** 2008 , General Properties of Bertrand Curves in Riemann-Otsuki space , Vol.69. , Nonlinear Analysis.
- [11] **Öztekin , H. B. ,** 2009. , Weakened Bertrand Curves in The Galilean Spaces G_3 , Journal and Advanced Mathematical Studies.
- [12] **Ersoy , S. , Tosun , M. ,** Timelike Bertrand curves in semi-Euclidean spaces, arXiv:1003-1220 Vol1.[mat.DG.].
- [13] **Sabuncuođlu , A. ,** 2003, Diferensiyel Geometri 2.Cilt, Ankara Üniversitesi, Ankara.
- [14] **Glenn , J. , James, R. ,** 1976, Dictionary of Mathematics, page 174-175.
- [15] **S. Izumiya, N. Takeuchi,** 2002, Generic Properties of helices and Bertrand curves , J. Geom. 74, page 97-109.
- [16] **Y.-M. Cheng, C.-C. Lin,** 2009, On the generalized Bertrand curves in euclidean N - spaces, Note di Matematica , page 33-39, 29(2).

- [17] **Çalışkan, M. , Bilici, M. ,** 2002, Some characterizations for the pair of Involute-Evolute Curves in Euclidean spaces E^3 Bulletin of Pure and App.Sci. , **Vol.21**, page 289-294.
- [18] **Çalışkan , M., Sivridağ, A. , Hacısalihoglu, H.,H.,**1984,Some Characterizations for the Natural lift curves and geodesic sprays , Comm. Fac. Sci. Univ. , Ankara, A1, **Vol.33**, page235-242.
- [19] **Yılmaz , S. , Özyılmaz, E. ,**2009, Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4-space , Int.J. Open Problems Compt. Math. **Vol. 2. ,** No. 2.
- [20] **Turgut, M, Yılmaz, S. ,** 2008, On the Frenet Frame and a Characterization of space-like Involute-Evolute Curve Couple in Minkowski Space-Time, Int. Math. Forum , **Vol. 3** no.16 , page 793-801.

