

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**OPERATÖR TIPLI GENEL BÜZÜLME KOŞULUNU SAĞLAYAN ZAYIF
UYUMLU DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Özge BİÇER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

08/07/2014

Özge BİÇER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OPERATÖR TIPLİ GENEL BÜZÜLME ŞARTINI SAĞLAYAN ZAYIF UYUMLU DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Özge BİÇER

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ankara Üniversitesi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, sabit nokta teorisinin temel tanımları ve önemli teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, integral tipi genel büzülme şartını sağlayan zayıf uyumlu dönüşümlerin sabit noktasının varlık ve tekliği incelenmiş, bu dönüşümlerin sabit noktalarının tam uzaylarda ortak olduğu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde ele alınan teorem genişletilerek operatör tipli genel büzülme şartını sağlayan zayıf uyumlu dönüşümler için sabit noktanın varlık ve tekliği incelenmiş, bu konuya ait örnek ve sonuçlar ifade edilmiştir.

Son bölümde ise tezde verilen çalışmalar özetlenmiştir.

Temmuz 2014, 31 sayfa

Anahtar Kelimeler : Sabit nokta teoremi, İntegral tipi büzülmeler, Zayıf uyumlu dönüşümler, Operatör tipi büzülmeler

ABSTRACT

Master Thesis

FIXED POINTS OF WEAKLY COMPATIBLE MAPS SATISFYING A GENERAL CONTRACTIVE CONDITION OF OPERATOR TYPE

Özge BİÇER

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Ankara University

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat OLGUN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and main theorems of fixed point theory have been given.

In the third chapter, the existence and uniqueness of fixed point for weakly compatible maps satisfying general contractive condition of integral type is investigated and in complete space, it is obtained that fixed point of these maps is common.

In the fourth chapter, theorem studying in the previous chapter is expanded and the existence and uniqueness of fixed point for weakly compatible mappings satisfying general contractive condition of operator type is studied and some examples and remarks have been given.

In the last chapter the study are summarized in the thesis

.

July 2014, 31 pages

Key Words: Fixed point theorem, General contractive condition of operator type, Weakly compatible maps, .

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımın her aşamasında beni yönlendiren, karőılaőtıđım zorluklarda değerli yardımlarımı esirgemeyen, hem akademik ortamda hem de beőeri iliőkilerde engin fikirlerinden yararlandığım saygıdeğer hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, araőtırma sürecinde yardımlarımı esirgemeyen Sayın Doç. Dr. İőhak ALTUN (Kırıkkale Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a teőekkürü bir borç bilirim. Son olarak ve en önemlisi, göstermiş oldukları sabır ve vermiş oldukları maddi ve manevi destek için aileme sonsuz teşekkür ederim.

Özge BIÇER

Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER.....	2
3. İNTEGRAL TİPİ GENEL BÜZÜLME ŞARTINI SAĞLAYAN ZAYIF UYUMLU DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI.....	5
4. OPERATÖR TİPİ GENEL BÜZÜLME ŞARTINI SAĞLAYAN ZAYIF UYUMLU DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI.....	14
5. SONUÇ.....	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ.....	31

SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	Pozitif reel sayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
$d(x, y)$	x ile y arasındaki uzaklık
L_1	İntegrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\max A$	A nın en büyük elemanı (Maksimum)
$\{x_n\}$	Dizi
$x_n \rightarrow x$	$\{x_n\}$ dizisi x e yakınsar
\sum	Toplam sembolü

1. GİRİŞ

$X \neq \emptyset$ ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx_0 = x_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa x_0 noktasına T nin bir sabit noktası denir. Yani T dönüşümü altında değişmeyen noktalara T nin sabit noktası denir.

Matematiğin çeşitli dallarında $Sx = 0$ veya $Tx = x$ tipindeki denklemlere sıkça rastlanmaktadır. Bu denklemleri çözmek için bazı metotlar geliştirilmiştir. Sabit nokta teori de bu methodlardan biridir. Örneğin;

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

denkleminin kökleri $x = 1$ $x = 4$ tür. Ayrıca bu denklem

$$x = \frac{x^2 + 4}{5}$$

şeklinde de yazılabilir. Şimdi $Tx = \frac{x^2+4}{5}$ olmak üzere $x = Tx$ olsun. Böylece $x = 1$ ve $x = 4$ T nin birer sabit noktaları olur. O halde $Sx = 0$ gibi bir denklemin çözümünün bulunması problemi $Sx = Tx - x$ şeklinde verilen T dönüşümünün sabit noktasının bulunması problemi ile aynıdır.

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teori çalışmaları 1922'de Banach ile başlamıştır. 2002 yılında Branciari, Banach büzülme dönüşümünü genişleterek integral tip büzülme kavramını ortaya çıkarmıştır. 2006 yılında Aliouche daha genel büzülmeler altında zayıf uyumlu dönüşümler için sabit nokta teoremleri vermiştir.

Bu tez çalışmasında integral tipli genel büzülme şartını sağlayan zayıf uyumlu dönüşümler için elde edilen bazı sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin operatör tipli genel büzülme koşulunu sağlayan zayıf uyumlu dönüşümlere bir genelleştirilmesi verilecektir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, ileride ihtiyaç duyulacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 X boştan farklı bir küme ve $T : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin bir sabit noktası denir.

Teorem 2.1 (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$, L Lipschitz sabitine sahip bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda, T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar ve

$$d(T^n x_0, z) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, Tx_0)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.2 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Negatif olmayan $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü, $[0, \infty)$ aralığının her kompakt alt aralığında sonlu integrale sahip Lebesgue integrallenebilir ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$$

koşulunu sağlasın.

Bu durumda her $x, y \in X$ ve $c \in (0, 1)$ için

$$\int_0^{d(Tx, Ty)} \varphi(t) dt \leq c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) dt$$

koşulunu gerçekleyen T dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahip olup her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = z$ sağlanır. (Branciari 2002)

Teorem 2.3 (X, d) bir tam metrik uzay, S ve T , X üzerinde tanımlı iki dönüşüm

olsun.

Negatif olmayan Lebesgue integrallenebilir ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t) dt > 0$$

koşulunu sağlayan $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümlerinin sınıfı Φ ile gösterilsin.

(i) ψ negatif olmayan ve \mathbb{R}^+ da azalmayan

(ii) Her $t > 0$ için $\psi(t) < t$

(iii) Her sabit $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$

özelliklerini sağlayan ψ dönüşümlerinin sınıfı Ψ ile gösterilsin.

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), \frac{[d(x, Ty) + d(y, Sx)]}{2}\}$$

olmak üzere $k \in (0, 1)$ ve her $x, y \in X$ için

$$\int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{M(x, y)} \varphi(t) dt \right)$$

gerçeklensin. O halde S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir (Vijayaraju vd.

2005).

$F([0, \infty))$, $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ şeklindeki tüm dönüşümlerin sınıfını gösterebilirsin.

(i) $O(f; 0) = 0$ ve $t > 0$ için $O(f; t) > 0$

(ii) $t \leq s$ için $O(f; t) \leq O(f; s)$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; t_n) = O(f; \lim_{n \rightarrow \infty} t_n)$

(iv) En az bir $f \in F([0, \infty))$ için $O(f; \max\{t, s\}) = \max\{O(f; t), O(f; s)\}$ özelliklerini gerçekleyen

$$O(\blacklozenge; \cdot) : F([0, \infty)) \longrightarrow F([0, \infty))$$

$$f \quad \longrightarrow \quad O(f; \cdot)$$

şeklindeki O operatörlerinin sınıfı ise \mathbf{O} ile gösterilsin.

Teorem 2.4 (X, d) bir tam metrik uzay $T : X \longrightarrow X$ bir dönüşüm

$$m(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{[d(x, Ty) + d(y, Tx)]}{2}\}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\lambda \in (0, 1)$ ve her $x, y \in X$ için

$$O(f; d(Tx, Ty)) \leq \lambda O(f; m(x, y))$$

gerçeklensin. O halde T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Ayrıca her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = z$ sağlanır (Altun vd. 2007).

Teorem 2.5 A ve S , (X, d) metrik uzayı üzerinde tanımlı iki dönüşüm olsun. A ve S dönüşüm ikilisinin zayıf yerdeğiştirebilir olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için

$$d(ASx, SAx) \leq d(Ax, Sx)$$

olmasıdır.

3. İNTEGRAL TİPİ GENEL BÜZÜLME ŞARTINI SAĞLAYAN ZAYIF UYUMLU DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMİ

Tanım 3.1 $X \neq \emptyset$, $A, S : X \rightarrow X$ dönüşümleri çakışan noktalarında değişebilir ise, yani $Au = Su = w$ olduğunda $ASu = SAu$ ise A, S dönüşümlerine zayıf uyumlu dönüşümler denir.

Lemma 3.1 $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ şartını sağlayan sağdan sürekli bir fonksiyon olsun. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(t) = 0$ dır.

Teorem 3.1 (X, d) metrik uzayı üzerinde tanımlanan $A, B, S, T : X \rightarrow X$ dönüşümlerinin aşağıdaki özellikleri sağladığı kabul edilsin.

- (a) $S(X) \subseteq B(X)$, $T(X) \subseteq A(X)$
(b)

$$M(x, y) = \max \left\{ d(Ax, By), d(Sx, Ax), d(Ty, By), \frac{d(Sx, By) + d(Ty, Ax)}{2} \right\} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlansın. $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ negatif olmayan Lebesgue integrallenebilir her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^\varepsilon \varphi(t) dt > 0 \quad (3.2)$$

ile sağdan sürekli $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü $\psi(0) = 0$, her $s > 0$ için $\psi(s) < s$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{M(x, y)} \varphi(t) dt \right) \quad (3.3)$$

eşitsizliği gerçeklensin.

Bu durumda $A(X)$, $B(X)$, $S(X)$ veya $T(X)$ uzaylarından birisi X in bir tam alt uzayı ise

(1) A ve S bir ortak noktaya sahiptir

veya

(2) B ve T bir ortak noktaya sahiptir.

Ayrıca "S ve A" ile "T ve B" zayıf uyumlu dönüşümler ise

(3) A, B, S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir (Altun vd. 2007).

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. (a) özelliğinden her $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$y_{2n+1} = Sx_{2n} = Bx_{2n+1}, y_{2n+2} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n+2} \quad (3.4)$$

olmak üzere $\{y_n\} \in X$ dizisi tanımlanabilir. Ayrıca $d_n = d(y_n, y_{n+1})$ olarak tanımlansın.

Bazı n ler için $d_{2n} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y_{2n} = y_{2n+1}$ olup

$$Tx_{2n-1} = Ax_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla A ve S çakışan bir noktaya sahip olur.

Benzer şekilde eğer $d_{2n+1} = 0$ ise $y_{2n+1} = y_{2n+2}$ olur. Burada

$$Sx_{2n} = Bx_{2n+1} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n+2}$$

olduğundan B ile T çakışan bir noktaya sahiptir.

Kabul edelim ki her bir n için $d_n \neq 0$ olsun. O halde (b) den

$$\int_0^{d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{M(x_{2n}, x_{2n+1})} \varphi(t) dt \right) \quad (3.5)$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} M(x_{2n}, x_{2n+1}) &= \max \left\{ \begin{array}{l} d(Ax_{2n}, Bx_{2n+1}), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), \\ d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), \\ \frac{d(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}) + d(Tx_{2n+1}, Ax_{2n})}{2} \end{array} \right\} \\ &= \max \{d_{2n}, d_{2n+1}\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

olmak üzere (3.5) eşitsizliğinden

$$\int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{\max\{d_{2n}, d_{2n+1}\}} \varphi(t) dt \right) \quad (3.7)$$

elde edilir. Eğer $d_{2n+1} > d_{2n}$ ise

$$\begin{aligned} \int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t) dt &\leq \psi \left(\int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t) dt \right) \\ &< \int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $d_{2n} > d_{2n+1}$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\int_0^{d_{2n+1}} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{d_{2n}} \varphi(t) dt \right) \quad (3.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^{d_{2n}} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{d_{2n-1}} \varphi(t) dt \right) \quad (3.10)$$

yazılabilir. (3.9) ve (3.10) ifadeleri birlikte düşünülürse her $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\int_0^{d_n} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{d_{n-1}} \varphi(t) dt \right) \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.11) den

$$\begin{aligned}
\int_0^{d_n} \varphi(t) dt &\leq \psi \left(\int_0^{d_{n-1}} \varphi(t) dt \right) \\
&\leq \psi^2 \left(\int_0^{d_{n-2}} \varphi(t) dt \right) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\leq \psi^n \left(\int_0^{d_0} \varphi(t) dt \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. Son ifadede $n \rightarrow \infty$ için limit alınıp Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{d_n} \varphi(t) dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n \left(\int_0^{d_0} \varphi(t) dt \right) = 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^\varepsilon \varphi(t) dt > 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0 \tag{3.14}$$

elde edilir.

Şimdi $\{y_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. Bunun için $\{y_{2n}\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki $\{y_{2n}\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. O halde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır ve her bir $2k$ tamsayısı için $2m(k) > 2n(k) > 2k$ olmak üzere

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \geq \varepsilon \tag{3.15}$$

sağlanır. Her $2k$ tamsayısı için $2m(k)$, $2n(k)$ tamsayısını geçen en küçük pozitif

tamsayı olmak üzere

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}) < \varepsilon \quad (3.16)$$

eşitsizliği gerçekleşir. (3.15) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} 0 < \delta &:= \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt \\ &\leq \int_0^{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})} \varphi(t) dt \\ &\leq \int_0^{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}) + d_{2m(k)-2} + d_{2m(k)-1}} \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. O halde (3.14), (3.15), ve (3.16) dan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})} \varphi(t) dt = \delta \quad (3.18)$$

bulunur. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden

$$\left| d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \right| \leq d_{2m(k)-1} \quad (3.19)$$

$$\left| d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \right| \leq d_{2m(k)-1} + d_{2n(k)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})} \varphi(t) dt \right| &\leq \int_0^{d_{2m(k)-1}} \varphi(t) dt \\ \left| \int_0^{d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})} \varphi(t) dt \right| &\leq \int_0^{d_{2m(k)-1} + d_{2n(k)}} \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.18) eşitsizliğinden

$$\int_0^{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1})} \varphi(t) dt \rightarrow \delta \quad (3.21)$$

$$\int_0^{d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1})} \varphi(t) dt \rightarrow \delta$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \leq d_{2n(k)} + d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}) \leq d_{2n(k)} + d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1}) \quad (3.22)$$

olduğundan

$$\int_0^{d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})} \varphi(t) dt \leq \int_0^{d_{2n(k)} + d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1})} \varphi(t) dt \quad (3.23)$$

bulunur. Son eşitsizliğin iki tarafında $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\delta \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1})} \varphi(t) dt \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi \left(\int_0^{M(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1})} \varphi(t) dt \right) \quad (3.24)$$

bulunur.

$$M(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}) = \max \left\{ d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}), d_{2n(k)}, d_{2m(k)-1}, \frac{d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) + d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})}{2} \right\} \quad (3.25)$$

olduğundan (3.14), (3.15), (3.16), (3.18) ve (3.21), (3.24) ile birlikte

$$\delta \leq \psi(\delta) < \delta \quad (3.26)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\{y_{2n}\}$ bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla $\{y_n\}$ Cauchy dizisi olarak bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $A(X)$ tam olsun. $\{y_{2n}\}$ dizisi $A(X)$ tarafından içerildiğinden $A(X)$ te bir limiti vardır. Bu limite u diyelim. $v \in A^{-1}u$ olup $Av = u$ dur. Kabul

edelim ki $r = d(Sv, u) > 0$ olsun. Teoremin (b) şartında $x = v$ ve $y = x_{2n-1}$ alınırsa

$$\int_0^{d(Sv, y_{2n})} \varphi(t) dt = \int_0^{d(Sv, Tx_{2n-1})} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{M(v, x_{2n-1})} \varphi(t) dt \right) \quad (3.27)$$

elde edilir.

$$M(v, x_{2n-1}) = \max \left\{ \begin{array}{l} d(u, y_{2n-1}), \\ d(Sv, u), \\ d(y_{2n}, y_{2n-1}), \\ \frac{d(Sv, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, u)}{2} \end{array} \right\} \quad (3.28)$$

olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Sv, y_{2n}) = r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(u, y_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_{2n}, y_{2n-1}) = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [d(Sv, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, u)] = r$$

olduğundan

$$\int_0^r \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^r \varphi(t) dt \right) < \int_0^r \varphi(t) dt \quad (3.29)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla (3.2) den $Sv = u$ olup A ve S dönüşümleri çakışan bir noktaya sahip olur.

$S(X) \subseteq B(X)$ olduğundan $Sv = u$ ve $u \in B(X)$ tir. $w = B^{-1}u$ olsun. O halde $Bw = u$ yazılabilir. Kabul edelim ki $r = d(Tw, u) > 0$ olsun. (b) de $y = w$ ve $x = x_{2n} = y_{2n+1}$ alınsın. Önceki bölümlerle benzer işlemler yapılarak $Tw = u$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla B ile T dönüşümleri çakışan bir noktaya sahiptir. Aynı sonuç $A(X)$ in tamlığı yerine $B(X)$ in tamlığı kabul edilirse de sağlanır.

S ile A ve B ile T dönüşümleri zayıf uyumlu alınırsa

$$u = Sv = Av = Tw = Bw \quad (3.30)$$

olduğundan

$$Au = ASv = SAV = Su$$

$$Bu = BTw = TBw = Tu \quad (3.31)$$

elde edilir. Eğer $Tu \neq u$ ise (b), (3.30) ve (3.31) den

$$\begin{aligned} \int_0^{d(u,Tu)} \varphi(t) dt &= \int_0^{d(Sv,Tu)} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{M(v,u)} \varphi(t) dt \right) \\ &= \psi \left(\int_0^{d(u,Tu)} \varphi(t) dt \right) < \int_0^{d(u,Tu)} \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tu = u$ olmalıdır. Benzer işlemler yapılarak $Su = u$ bulunabilir. O halde (3.31) den u , A, B, S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliği gösterilecektir. Kabul edelim ki S ve T dönüşümlerinin iki farklı sabit noktası u ve z olsun.

$$\begin{aligned} M(u, z) &= \max\{d(Au, Bz), d(Su, Au), d(Tz, Bz), \frac{d(Su, Bz) + d(Tz, Au)}{2}\} \\ &= d(u, z) \end{aligned}$$

olmak üzere (b) den

$$\begin{aligned} \int_0^{d(Su,Tz)} \varphi(t) dt &\leq \psi \left(\int_0^{M(u,z)} \varphi(t) dt \right) \\ &< \int_0^{d(u,z)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla sabit nokta tektir.

Örnek 3.1 $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ Euclid metriğiyle birlikte verilsin. S, T, A ve B dönüşümleri X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{n}\right) &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n+2} & n \text{ çift ise} \\ 0 & n = \infty \end{cases} & T\left(\frac{1}{n}\right) &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n \text{ çift ise} \\ \frac{1}{n+2} & n \text{ tek ise} \\ 0 & n = \infty \end{cases} \\ A\left(\frac{1}{n}\right) &= B\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

$S(X) \subseteq B(X)$ ve $T(X) \subseteq A(X)$ olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca $A(X)$, X in bir tam altuzayı ve A ile S ve B ile T zayıf uyumludur.

Şimdi $\varphi(t) = \max\{0, t^{\frac{1}{\tau}-2}[1 - \log t]\}$, $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ tanımlansın. O halde bir $\tau \in (0, e)$ için

$$\int_0^{\tau} \varphi(t) dt = \tau^{\frac{1}{\tau}} \quad (3.34)$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\forall x, y \in X$, sağdan sürekliliği olan $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $s > 0$ için

$\psi(s) < s$ ve $\psi(0) = 0$ olmak üzere

$$(d(Sx, Ty))^{\frac{1}{d(Sx, Ty)}} \leq \psi(M(x, y))^{\frac{1}{M(x, y)}} \quad (3.35)$$

eşitsizliği gösterilmelidir. $\psi(s) = \frac{s}{2}$ ile birlikte (3.35) sağlanır. Her $x, y \in X$ için

$$(d(Sx, Ty))^{\frac{1}{d(Sx, Ty)}} \leq \frac{1}{2}(M(x, y))^{\frac{1}{M(x, y)}} \quad (3.36)$$

olduğunu kabul edelim. $\tau \rightarrow \tau^{\frac{1}{\tau}}$ fonksiyonu azalmayan olduğundan (3.36) yerine

$$d(Sx, Ty)^{\frac{1}{d(Sx, Ty)}} \leq \frac{1}{2}(d(x, y))^{\frac{1}{d(x, y)}} \quad (3.37)$$

olduğu gösterilirse Teorem 3.1 in şartları sağlanmış olur.

4. OPERATÖR TİPİ GENEL BÜZÜLME ŞARTINI SAĞLAYAN ZAYIF UYUMLU DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMİ

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ şeklindeki tüm dönüşümlerin sınıfı $F([0, \infty))$ ile gösterilsin.

(i) $O(f; 0) = 0$ ve $t > 0$ için $O(f; t) > 0$

(ii) $t \leq s$ için $O(f; t) \leq O(f; s)$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; t_n) = O(f; \lim_{n \rightarrow \infty} t_n)$

(iv) En az bir $f \in F([0, \infty))$ için $O(f; \max\{t, s\}) = \max\{O(f; t), O(f; s)\}$ özelliklerini gerçekleyen

$$O(\bullet; \cdot) : F([0, \infty)) \rightarrow F([0, \infty))$$

$$f \rightarrow O(f; \cdot)$$

O operatörlerinin sınıfı \mathbf{O} ile gösterilsin.

Örnek 4.1. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $t > 0$ için $f(t) > 0$ ve $f(0) = 0$ şartlarını sağlayan azalmayan, sürekli bir fonksiyon olmak üzere.

$$O(f; t) = f(t)$$

şeklinde tanımlanan operatör (i)-(iv) koşullarını sağlar. Gerçekten

(i) $t > 0$ için $O(f; t) = f(t) > 0$ ve $t = 0$ için $O(f; 0) = 0$ bulunur.

(ii) $t \leq s$ için f azalmayan olduğundan

$$f(t) \leq f(s)$$

$$O(f; t) \leq O(f; s)$$

elde edilir.

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n) = O(f; \lim_{n \rightarrow \infty} t_n)$$

bulunur.

(iv) Bazı $f \in F([0, \infty))$ için

$$\begin{aligned} O(f; \max\{t, s\}) &= f(\max\{t, s\}) \\ &= \begin{cases} t > s & ; f(t) \\ s > t & ; f(s) \end{cases} \\ &= \max\{O(f; t), O(f; s)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.2 Eğer $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan, sürekli bir fonksiyon ve $t > 0$ için $f(t) > 0$ ve $f(0) = 0$ ise

$$O(f; t) = \frac{f(t)}{1 + f(t)}$$

operatörü (i)-(iv) koşullarını sağlar. Gerçekten

(i) $t > 0$ için $O(f; t) = \frac{f(t)}{1+f(t)} > 0$ ve $t = 0$ için $O(f; 0) = \frac{f(0)}{1+f(0)} = 0$ elde edilir.

(ii) $t \leq s$ için f azalmayan olduğundan

$$f(t) \leq f(s)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) + f(t).f(s) &\leq f(s) + f(t).f(s) \\ \Rightarrow f(t)[1 + f(s)] &\leq f(s)[1 + f(t)] \\ \Rightarrow \frac{f(t).[1 + f(s)]}{[1 + f(t)].[1 + f(s)]} &\leq \frac{f(s)[1 + f(t)]}{[1 + f(t)].[1 + f(s)]} \\ \Rightarrow \frac{f(t)}{1 + f(t)} &\leq \frac{f(s)}{1 + f(s)} \\ \Rightarrow O(f; t) &\leq O(f; s) \end{aligned}$$

bulunur.

(iii)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(t_n)}{1 + f(t_n)} \\ &= \frac{f(\lim t_n)}{1 + f(\lim t_n)} \\ &= O(f; \lim_{n \rightarrow \infty} t_n)\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) Bazı $f \in F([0, \infty))$ için

$$\begin{aligned}O(f; \max\{t, s\}) &= \frac{f(\max\{t, s\})}{1 + f(\max\{t, s\})} \\ &= \begin{cases} t > s & ; \quad \frac{f(t)}{1+f(t)} \\ s > t & ; \quad \frac{f(s)}{1+f(s)} \end{cases} \\ &= \max\{O(f; t), O(f; s)\}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.3 $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ negatif olmayan, $[0, \infty)$ un her kompakt alt kümesinde sonlu integrali olan Lebesque integrallenebilir bir dönüşüm olmak üzere her $t > 0$ için

$$\int_0^t f(s) ds > 0$$

sağlansın.

$$O(f; t) = \int_0^t f(s) ds$$

(i)-(iv) koşullarını sağlar. Gerçekten

$$(i) \ t > 0 \text{ için } \int_0^t f(s) ds > 0 \text{ ve } t = 0 \text{ için } O(f; 0) = \int_0^0 f(s) ds = 0$$

(ii) $t \leq s$ için

$$\begin{aligned} O(f; s) &= \int_0^s f(y)dy = \int_0^t f(y)dy + \int_t^s f(y)dy \\ O(f; s) &= O(f; t) + \int_t^s f(y)dy \end{aligned}$$

olup $O(f; t) \leq O(f; s)$ bulunur.

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \alpha$$

olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} f(s)ds = \int_0^{\alpha} f(s)ds = O(f; \lim_{n \rightarrow \infty} t_n)$$

sağlanır.

(iv)

$$\begin{aligned} O(f; \max\{t, s\}) &= \int_0^{\max\{t, s\}} f(y)dy \\ &= \begin{cases} t > s & ; \int_0^t f(y)dy = O(f; t) \\ s > t & ; \int_0^s f(y)dy = O(f; s) \end{cases} \\ &= \max\{O(f; t), O(f; s)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1 (X, d) metrik uzayı üzerinde tanımlı A, B, S ve T dönüşümlerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

a) $S(X) \subseteq B(X), T(X) \subseteq A(X)$

b) $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sağdan sürekli bir fonksiyon, $\psi(0) = 0$ ve $s > 0$ için $\psi(s) < s$ olsun.

Her $x, y \in X$ için

$$M(x, y) = \max \left\{ d(Ax, By), d(Sx, Ax), d(Ty, By), \frac{d(Sx, By) + d(Ty, Ax)}{2} \right\} \quad (4.1)$$

olmak üzere

$$O(f; d(Sx, Ty)) \leq \psi(O(f; M(x, y)))$$

eşitsizliği sağlansın.

Eğer $A(X)$, $B(X)$, $S(X)$ veya $T(X)$ ten biri X in bir tam altuzayı ise

(1) A ve S çakışan bir noktaya sahiptir

veya

(2) B ve T çakışan bir noktaya sahiptir.

Ayrıca eğer A ve S ile T ve B zayıf uyumlu ise

(3) A , B , S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir (Altun vd. 2013).

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. (a) özelliğinden her $n = 0, 1, 2, \dots$ için X te bir $\{y_n\}$ dizisi inşa edilebilir.

$$y_{2n+1} = Sx_{2n} = Bx_{2n+1}, y_{2n+2} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n+2}$$

olmak üzere $\{y_n\} \in X$ dizisi tanımlanabilir. Ayrıca $d_n = d(y_n, y_{n+1})$ olarak tanımlansın.

Bazı n ler için $d_{2n} = 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $y_{2n} = y_{2n+1}$ olup

$$Tx_{2n-1} = Ax_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla A ve S çakışan bir noktaya sahip olur. Benzer şekilde eğer $d_{2n+1} = 0$ ise $y_{2n+1} = y_{2n+2}$ olur. Bu durumda

$$Sx_{2n} = Bx_{2n+1} = Tx_{2n+1} = Ax_{2n+2}$$

bulunur. Dolayısıyla B ile T çakışan bir noktaya sahiptir.

Kabul edelim ki her bir n için $d_n \neq 0$ olsun. O halde (b) özelliğinde $x = x_{2n}$ ve $y = x_{2n+1}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
M(x_{2n}, x_{2n+1}) &= \max\{d(Ax_{2n}, Bx_{2n+1}), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \\
&\quad \frac{d(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}) + d(Ax_{2n}, Tx_{2n+1})}{2}\} \\
&= \max\{d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n+1}, y_{2n+2}), \frac{d(y_{2n}, y_{2n+2})}{2}\} \\
&= \max\{d_{2n}, d_{2n+1}\}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$O(f; d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1})) \leq \psi(O(f; M(x_{2n}, x_{2n+1}))) \quad (4.2)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.2) eşitsizliğinden

$$O(f; d_{2n+1}) \leq \psi(O(f; \max\{d_{2n}, d_{2n+1}\})) \quad (4.3)$$

bulunur. Eğer bazı n ler için $d_{2n+1} > d_{2n}$ ise (4.3) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
O(f, d_{2n+1}) &\leq \psi(O(f; d_{2n+1})) \\
&< O(f; d_{2n+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde her n için $d_{2n} > d_{2n+1}$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$O(f; d_{2n+1}) \leq \psi(O(f; d_{2n}))$$

bulunur. Benzer biçimde

$$O(f; d_{2n}) \leq \psi(O(f; d_{2n-1}))$$

bulunur. Genel olarak her $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$O(f, d_n) \leq \psi(O(f; d_{n-1})) \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
O(f; d_n) &\leq \psi(O(f; d_{n-1})) \\
&\leq \psi^2(O(f; d_{n-2})) \\
&\quad \vdots \\
&\leq \psi^n(O(f; d_0))
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; d_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(O(f; d_0)) = 0$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) özelliklerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0 \quad (4.5)$$

bulunur.

Şimdi $\{y_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. Bunun için $\{y_{2n}\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir.

Kabul edelim ki $\{y_{2n}\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. O halde en az bir $\varepsilon > 0$ ve her $2k$ tamsayısı için $2m(k) > 2n(k) > 2k$ olmak üzere

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \geq \varepsilon \quad (4.6)$$

sağlanır. Her $2k$ tamsayısı için $2m(k)$, (4.6) eşitsizliğini sağlayan ve $2n(k)$ tamsayısını geçen en küçük pozitif tamsayı olmak üzere

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}) < \varepsilon \quad (4.7)$$

eşitsizliği gerçekleşir. (4.6) dan

$$\begin{aligned}
0 &< \delta := O(f, \varepsilon) \leq O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})) \\
&\leq O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}) + d_{2m(k)-2} + d_{2m(k)-1})
\end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.5), (4.6) ve (4.7) birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}
\delta &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})) \\
&\leq O(f; \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2})) \\
&= O(f; \varepsilon) = \delta
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})) = \delta \quad (4.8)$$

bulunur. Ayrıca üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$|d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})| \leq d_{2m(k)-1}$$

ve

$$|d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})| \leq d_{2m(k)-1} + d_{2n(k)}$$

bulunur. (ii) özelliğinden

$$O(f; |d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})|) \leq O(f; d_{2m(k)-1})$$

ve

$$O(f; |d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})|) \leq O(f; d_{2m(k)-1} + d_{2n(k)})$$

elde edilir. Son eşitsizliklerde $k \rightarrow \infty$ için limit alınıp (i), (ii) ve (iii) özellikleri

gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; |d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})|) \leq O(f; 0) \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})| = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \\
&\Rightarrow O(f; \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1})) = O(f; \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})) = \delta \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1})) = \delta
\end{aligned}$$

olup

$$O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1})) \rightarrow \delta \quad (4.9)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; |d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})|) \leq 0 \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; |d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})|) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})| = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) \\
&\Rightarrow O(f; \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1})) = O(f; \lim_{k \rightarrow \infty} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})) \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1})) = \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})) \\
&\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1})) = \delta
\end{aligned}$$

olup

$$O(f; d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1})) \rightarrow \delta \quad (4.10)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}) &\leq d_{2n(k)} + d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}) \\
&\leq d_{2n(k)} + d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1})
\end{aligned}$$

olup

$$O(f; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})) \leq O(f; d_{2n(k)} + d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1}))$$

bulunur. Son eşitsizlikte her iki tarafın $k \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \delta &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} O(f; d(Sx_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1})) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(O(f; M(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}))) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} M(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}) &= \max \left\{ \begin{array}{l} d(Ax_{2n(k)}, Bx_{2m(k)-1}), \\ d(Ax_{2n(k)}, Sx_{2n(k)}), \\ d(Tx_{2m(k)-1}, Bx_{2m(k)-1}), \\ \frac{d(Sx_{2n(k)}, Bx_{2m(k)-1}) + d(Ax_{2n(k)}, Tx_{2m(k)-1})}{2} \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}), \\ d_{2n(k)}, \\ d_{2m(k)-1}, \\ \frac{d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}) + d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)})}{2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olduğundan (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10), (4.11) de kullanılırsa

$$\delta \leq \psi(\delta) < \delta$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\{y_{2n}\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla $\{y_n\}$ Cauchy dizisi olarak bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $A(X)$ tam uzay olsun. $\{y_n\}$ dizisi $A(X)$ tarafından içerilir ve $A(X)$ te bir limiti vardır. Bu limit u olsun. $v \in A^{-1}u$ olup $Av = u$ yazılır. Ayrıca $\{y_{2n-1}\}$ dizisi de u ya yakınsaktır. Şimdi $r = d(Sv, u) > 0$ olduğunu kabul edelim. (b) şartında $x = v$ ve $y = x_{2n-1}$ alınırsa

$$M(v, x_{2n-1}) = \max \left\{ d(u, y_{2n-1}), d(Sv, u), d(y_{2n}, y_{2n-1}), \frac{d(Sv, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, u)}{2} \right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} O(f; d(Sv, y_{2n})) &= O(f; d(Sv, Tx_{2n-1})) \\ &\leq \psi(O(f; M(v, x_{2n-1}))) \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) eşitsizliğinde her tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned} O(f; \lim_{n \rightarrow \infty} d(Sv, y_{2n})) &\leq \psi(O(f; \max\{d(Sv, u), \frac{d(Sv, u)}{2}\})) \\ &= \psi(O(f; d(Sv, u))) \\ &= \psi(O(f; r)) \\ &< O(f; r) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $O(f; r) \leq \psi(O(f; r)) < O(f; r)$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $Sv = u$ olup A ve S dönüşümleri çakışan bir noktaya sahiptir.

$S(X) \subseteq B(X)$ olduğundan $Sv = u \in B(X)$ tir. $w = B^{-1}u$ olsun. O halde $Bw = u$ yazılabilir.

Kabul edelim ki $r = d(Tw, u) > 0$ olsun ve (b) özelliğinde $y = w$ ve $x = x_{2n}$ alınsın. Önceki bölümlerle benzer işlemler yapılarak $Tw = u$ olduğu kolayca görülebilir. Aynı sonuçlar $A(X)$ in tamlığı yerine $B(X)$ in tamlığı alınarak da elde edilir.

S ile A ve T ile B dönüşümleri zayıf uyumlu alınırsa

$$u = Sv = Av = Tw = Bw \quad (4.13)$$

olduğundan

$$Au = ASv = SAV = Su \quad (4.14)$$

ve

$$Bu = BTw = TBw = Tu \quad (4.15)$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $Tu \neq u$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} O(f; d(u, Tu)) &= O(f; d(Sv, Tu)) \\ &\leq \psi(O(f; M(u, v))) \\ &= \psi(O(f; d(u, Tu))) \\ &< O(f; d(u, Tu)) \end{aligned}$$

olup bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tu = u$ bulunur. Benzer işlemler yapılarak $Su = u$ bulunabilir. O halde (4.14) ve (4.15) den u A, B, S ve T nin ortak bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliği gösterilecektir.

Kabul edelim ki S ve T dönüşümlerinin farklı iki sabit noktası u ve z olsun.

$$M(u, z) = \max\{d(Au, Bz), d(Au, Su), d(Tz, Bz), \frac{d(Su, Bz) + d(Tz, Au)}{2}\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} O(f; d(Su, Tz)) &\leq \psi(O(f; M(u, z))) \\ &< O(f; M(u, z)) \\ &= O(f; d(u, z)) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla A, S, B ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Örnek 4.4 $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ kümesini Euclid metriği ile ele alalım. X üzerinde tanımlı A, B, S ve T dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$S\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n+2} & n \text{ çift ise} \\ 0 & n = \infty \end{cases} \quad T\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n \text{ çift ise} \\ \frac{1}{n+2} & n \text{ tek ise} \\ 0 & n = \infty \end{cases}$$

$$A\left(\frac{1}{n}\right) = B\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$S(X) \subseteq B(X)$ ve $T(X) \subseteq A(X)$ olduğu açıkça görülmektedir. Ayrıca $A(X)$, X in bir tam alt uzayı olup A ile S ve B ile T zayıf uyumludur.

S, T, A ve B dönüşümleri Teorem 4.3 ün (b) şartını sağlayan dönüşümler olmak üzere

$$f \in F([0, \infty)), \quad O(f; t) = \int_0^t f(s) ds \text{ ve } f(0) = 0, \quad t > 0 \text{ için}$$

$$f(t) = \max\{0, t^{\frac{1}{t-2}}[1 - \log t]\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\psi(s) = \frac{s}{2}$ alınsın.

$$O(f; t) = \int_0^t f(s) ds = t^{\frac{1}{t}}, \quad t \in (0, e) \text{ olduğundan her } x, y \in X \text{ için}$$

$$(d(Sx, Ty))^{\frac{1}{d(Sx, Ty)}} \leq \frac{1}{2} (M(x, y))^{\frac{1}{M(x, y)}} \quad (4.16)$$

sağlanır.

Durum 1. m çift olmak üzere $y = \frac{1}{m}$, $x = \frac{1}{n} = Ty = \frac{1}{m+1}$ ve $Sx = \frac{1}{m+2}$ olsun.

Buradan

$$d(Sx, Ty) = \left| \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| < d(x, y)$$

bulunur.

Durum 2. m tek olmak üzere $y = \frac{1}{m}$, $x = \frac{1}{n} = Ty = \frac{1}{m+2}$ ve $Sx = \frac{1}{m+3}$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned} d(Sx, Ty) &= \left| \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+2} \right| = \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \\ &\leq \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3} = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| < d(x, y) \end{aligned}$$

bulunur.

Durum 3. n çift olmak üzere $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m} = Sx = \frac{1}{n+2}$ ve $Ty = \frac{1}{n+3}$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned} d(Sx, Ty) &= \left| \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right| = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\ &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right| < d(x, y) \end{aligned}$$

Durum 4. n tek olmak üzere $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m} = Sx = \frac{1}{n+1}$ ve $Ty = \frac{1}{n+2}$ olsun.

Buradan

$$d(Sx, Ty) = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| < d(x, y)$$

bulunur. $t \rightarrow t^{\frac{1}{t}}$ fonksiyonu azalmayan olduğundan (4.16) yerine

$$(d(Sx, Ty))^{\frac{1}{d(Sx, Ty)}} \leq \frac{1}{2} (d(x, y))^{\frac{1}{d(x, y)}} \quad (4.17)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

Örnek 4.1 ve Teorem 4.1 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1 (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) metrik uzayı üzerinde tanımlanan A, B, S ve T dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın.

(a) $S(X) \subseteq B(X)$, $T(X) \subseteq A(X)$

(b) Her $x, y \in X$ için $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sağdan sürekli bir fonksiyon, $\psi(0) = 0$ ve $s > 0$ için $\psi(s) < s$ olsun.

Ayrıca $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan, $t > 0$ için $\varphi(t) > 0$ ve $\varphi(0) = 0$ olacak şekilde

sürekli bir fonksiyon olsun.

$$M(x, y) = \max\{d(Ax, By), d(Sx, Ax), d(Ty, By), \frac{d(Sx, By) + d(Ty, Ax)}{2}\}$$

olmak üzere

$$\varphi(d(Sx, Ty)) \leq \psi(\varphi(M(x, y)))$$

eşitsizliği gerçeklensin.

Eğer $A(X)$, $B(X)$, $S(X)$ veya $T(X)$ X in bir tam alt uzayı ise

- (1) A ve S çakışan bir noktaya sahiptir.
- (2) B ve T çakışan bir noktaya sahiptir.

Ayrıca S ve A ile B ve T zayıf uyumlu ise

- (3) A , B , S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında ilk önce integral tipli genel büzülme şartını sağlayan zayıf uyumlu dönüşümler için sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. Bunun için Banach büzülme prensibinin benzeri, integral tipi eşitsizlikler için verilip zayıf uyumluluk tanımı yapılarak sabit noktanın zayıf uyumlu dönüşümler için verilen şartlar altında ortak olduğu elde edilmiştir. Bu teoreme ait açıklayıcı sonuç ve örnekler verilmiştir.

Diğer taraftan integral tipi genel büzülme şartı genelleştirilerek operatör tipi genel büzülme şartını sağlayan zayıf uyumlu operatörlerin sabit noktasının varlık ve tekliği incelenmiştir. Yine verilen şartlar altında zayıf uyumlu dönüşümlerin ortak bir sabit noktaya sahip olduğu elde edilmiştir. Bu teoreme ilişkin örnek ve bazı sonuçlar verilmiştir.

KAYNAKLAR

- Altun, I. and Turkoglu, D. 2007. "A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of operator type", *J. Comput. Anal. Appl.*, 9 (1), 9-14.
- Altun, I., Turkoglu, D. and Rhoades, B. E. 2007. "Fixed points of weakly compatible maps satisfying a general contractive condition of integral type", *Fixed Point Theory Appl.*, Volume 2007, Article ID 17301, 9 pages.
- Altun, I. and Turkoglu, D. 2013. "A fixed point theorem for weakly compatible mappings satisfying a general contractive condition of operator type", *Ars. Combinatoria*, 110, 289-299
- Branciari, A. 2002. "A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type", *International Journal of Mathematics Sciences*, vol. 29, no. 9, pp.531-536, 2002
- Rhoades, B. E. 2003. "Two fixed-point theorems for mappings satisfying a general contractive condition of integral type", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2003, no. 63, pp. 4007-4013.
- Vijayaraju, P., Rhoades, B. E. and Mohanraj, R. 2005 "A fixed point theorem for a pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2005, no. 15, pp. 2359-2364.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özge BİÇER

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 28/03/1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : İzmir 60.Yıl Anadolu Lisesi (2007)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2012 - Temmuz 2014)