CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SLANT REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİZASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arş. Gör. Onur KAYA

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Geometri

MANİSA 2015

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SLANT REGLE YÜZEYLERİN KARAKTERİZSYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arş. Gör. Onur KAYA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22.12.2014

Tezin Savunulduğu Tarih : 19.01.2015

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖNDER

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT

MANİSA 2015

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

I	: Reel sayılar kümesinin açık bir alt aralığı.
IR	: Reel sayılar kümesi.
IR^3	: 3-boyutlu reel uzay.
IR^n	: n-boyutlu reel uzay.
$\vec{P}$	: n-boyutlu reel uzayda vektör.
$\vec{Q}$	: n-boyutlu reel uzayda vektör.
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı.
E^3	: 3-boyutlu Öklid uzayı.
$\vec{\alpha}(t)$	: Eğrinin parametrik gösterimi.
s	: Birim hızlı eğrinin yay uzunluğu parametresi.
$\vec{T}$	: Bir uzay eğrisinin birim teğet vektörü.
$\vec{N}$	: Bir uzay eğrisinin birim asal normal vektörü.
$\vec{B}$	: Bir uzay eğrisinin birim binormal vektörü.
$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$	: Bir uzay eğrisinin Frenet çatısı.
κ_α	: Bir $\vec{\alpha}$ uzay eğrisinin eğrilik fonksiyonu.
τ_α	: Bir $\vec{\alpha}$ uzay eğrisinin burulma fonksiyonu.
$\vec{W}$	: Darboux vektörü.
$\vec{u}$	: Birim sabit vektör.
$\vec{k}$	: Regle yüzeyin dayanak eğrisi.
$\vec{q}$	: Regle yüzeyin anadoğrularının birim doğrultusu.
θ	: q-slant bir regle yüzeyde $\vec{q}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki açı.

φ	: h-slant bir regle yüzeyde $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki açı.
ϕ	: Darboux slant bir regle yüzeyde $\vec{W}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki açı.
S	: Regle yüzey.
$\vec{r}(s,v)$	: Regle yüzeyin parametrik gösterimi.
$\vec{m}$	: Regle yüzeyin birim normal vektörü.
$\vec{c}$	: Regle yüzeyin boğaz çizgisi.
$\vec{a}$	: Regle yüzeyin birim merkez teğet vektörü.
$\vec{h}$	: Regle yüzeyin birim merkez normal vektörü.
$\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$	Regle yüzeyin Frenet çatısı.
d	: Regle yüzeyin dağıtma parametresi.
C	: Regle yüzeyin boğaz noktası.
$\vec{k}_1$	: Regle yüzeyin birim anadoğrularının küresel göstergesi.
s_1	: $\vec{k}_1$ küresel eğrisinin yay uzunluğu parametresi.
$\vec{k}_3$	: Regle yüzeyin $\vec{a}$ merkez teğet vektörleri tarafından çizilen küresel eğri.
s_3	: $\vec{k}_3$ küresel eğrisinin yay uzunluğu parametresi.
κ	: Regle yüzeyin konisel eğrilik fonksiyonu.
κ_1	: Regle yüzeyin birinci eğriliği.
κ_2	: Regle yüzeyin ikinci eğriliği.
$\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3$	: Reel uzayın baz vektörleri.

ŞEKİL LİSTESİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca danışmanlığımı yapan, desteğini ve tavsiyelerini hiçbir zaman esirgemeyen, çalışma azmiyle bana her zaman örnek olan, her konuda beni yönlendiren ve karşılaştığım her sorunda beni aydınlatan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖNDER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İlkokul yıllarımdan beri her zaman eğitimimi sürdürmem için beni destekleyen, maddi-manevi her anlamda yanımda olan ve zorluklara rağmen pes etmemeyi öğreterek bugünlere gelmemi sağlayan sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diferansiyel geometride sıkça kullanılan E^3 3-boyutlu Öklid uzayı ve bu uzayda eğriler ve regle yüzeyler yer alır. Eğrilerin Frenet çatıları, helisler, slant helisler ve Darboux helisler gibi özel eğriler ve regle yüzeylerin Frenet çatıları ile regle yüzeylerin açılabilir olma şartı hatırlatılır.

İkinci bölümde, regle yüzeylerin yeni bir türü olan slant regle yüzeyler tanımlanır. Slant regle yüzeyler, q-slant, h-slant ve a-slant regle yüzeyler olmak üzere üç çeşit olarak tanımlanır ve bir regle yüzeyin yönlü konisinin Frenet çatısına göre slant regle yüzeyler için karakterizasyonlar verilir.

Üçüncü bölümde, slant regle yüzeylerin yeni bir türü olan Darboux slant regle yüzeylerin tanımı ve karakterizasyonları verilir ve slant regle yüzeylerle Darboux slant regle yüzeyler arasındaki ilişkiler incelenir.

Dördüncü bölüm slant regle yüzeylerin diferansiyel denklem karakterizasyonlarından oluşur. Frenet çatısının vektörleri tarafından üretilen regle yüzeylerin çatıları bulunur ve bu yüzeylerin slant regle yüzey olma şartları diferansiyel denklemlerle incelenir.

Son bölümde ise q-slant ve h-slant regle yüzeylerin konum vektörleri çalışılır. Ayrıca elde edilen sonuçlarla ilgili örnekler ve bu örneklerdeki yüzeylerin grafikleri verilir.

Bu tez çalışmasının orijinal kısımları, ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerin tamamıdır.

ABSTRACT

This thesis consists of five main sections.

In the first section, the Euclidean 3-space E^3 and curves and ruled surfaces in this space are stated. Frenet frames of the curves, special curves such as helices, slant helices and Darboux helices and Frenet frames of ruled surfaces and the condition for ruled surfaces to be developable are reminded.

Second section contains a new kind of ruled surface called slant ruled surfaces. Three types of slant ruled surfaces are defined such as q-slant, h-slant and a-slant ruled surfaces. Then, characterizations for slant ruled surfaces are given with respect to Frenet frames of the directing cone of the ruled surface.

In the third section a new kind of slant ruled surfaces called Darboux slant ruled surface is introduced, some characterizations are given and the relations between slant ruled surfaces and Darboux ruled surfaces are investigated.

Fourth section consists of differential equation characterizations for slant ruled surfaces. Frenet frames are examined for the ruled surfaces generated by the vectors of $\left\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\right\}$ Frenet frame and the conditions for those ruled surfaces to be slant ruled surfaces are given by differential equations.

Finally, the fifth section consists of two subsections and theorems that determines the position vectors of q-slant and h-slant ruled surfaces are studied. Examples for obtained results and graphs of slant ruled surfaces are also given.

The original sections of this thesis are all of Section 2, Section 3, Section 4 and Section 5.

GİRİŞ

Diferansiyel geometride bazı özel eğriler ve özel yüzeyler büyük önem arz eder. Bu eğrilerin en önemlilerinden biri helis eğrisidir. Helisler, birçok farklı bilim dalında çok geniş kullanım alanlarına ve uygulamalara sahiptirler. Tanım olarak bir genel helis, teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan bir eğri olarak verilir. Helisin bu tanımına benzer olarak 2002 yılında Izumiya ve Takeuchi tarafından yeni bir helis türü olan slant helisler tanımlanmıştır. Slant helis, asal normal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan eğri olarak tanımlanmıştır [5]. Slant helisler de helislere benzer olarak yaygın şekilde farklı matematikçiler tarafından çalışılmıştır [7,8]. Ayrıca, Monterde, Salkowski eğrilerini tanımlayarak sabit eğriliğe sahip bu eğrilerin asal normallerinin sabit bir doğrultu ile sabit açı yaptığını, yani aslında bir slant helis olduğunu göstermiştir [9]. Bununla birlikte, Darboux helis adı verilen ve Darboux vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yapan yeni özel eğriler de tanımlanmış ve karakterizasyonları incelenmiştir [17].

Eğrilerde olduğu gibi yüzeyler teorisinde de özel yüzeyler önemli bir yere sahiptir. Ancak yüzeyler iki parametreye bağlı geometrik yapılar olduklarından yüzeyler teorisinde çalışmak eğriler teorisinde çalışmaktan daha zahmetlidir. Dolayısıyla özel yüzeyleri tanımlamak ve onların karakterizasyonlarını bulabilmek çok önemli bir problemdir. Yüzeyler arasında en iyi bilinen ve en yaygın olarak kullanılan tür regle yüzeylerdir. Uzayda bir doğrunun sürekli bir hareketiyle üretilen bu yüzeyler, özellikle mühendislik alanında yaygın bir kullanıma sahiptirler. Bugüne kadar bu yüzeyler incelenirken genel yüzeyler teorisinde olduğu gibi incelemeler yapılmış olup, özel regle yüzey türlerine fazla değinilmemiştir. Sadece, regle yüzeylerin açılabilir yüzey veya aykırı yüzey olması durumları tanımlanmış, regle yüzeylerin Mannheim ve Bertrand ofsetleri gibi yüzey çiftleriyle ilgili karakterizasyonlar verilmiştir [10,14]. Regle yüzeylerin farklı bir sınıflandırması ve bu sınıflandırmaya bağlı karakterizasyonlar ilk kez Önder tarafından tanımlanmıştır [12]. Önder, slant helis kavramından esinlenerek bu yeni regle yüzeyleri slant regle yüzeyler olarak adlandırmış ve slant regle yüzeylerin farklı türlerini tanımlayarak bu yüzeylerin karakterizasyonlarını hem Öklid uzayında hem de Minkowski uzayında vermiştir. Ardından, Önder ve Kaya, Öklid uzayında, slant regle yüzeyler için diferansiyel denklem karakterizasyonlarını vermiştir [13]. Daha sonra yine Önder ve Kaya tarafından slant regle yüzeylerin yeni bir türü olarak Darboux Slant regle yüzeyler tanımlanmış ve bu yüzeylerin diğer slant regle yüzeylerle olan ilişkileri ortaya konmuştur [11].

Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen çalışmalar detaylı olarak incelenmiş ve slant regle yüzeylerin mevcut karakterizasyonlarına ek olarak daha önce verilmemiş daha farklı ve yeni karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca, Ali [1,2] tarafından helislerin ve slant helislerin konum vektörleriyle ilgili yapılan çalışmaların slant regle yüzeylerdeki karşılıkları incelenmiş ve slant regle yüzeylerin parametrizasyonlarıyla ilgili teoremler verilmiştir.

I. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin ileriki bölümlerinde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecek olup, regle yüzeylerin Frenet çatıları ayrıntılı şekilde incelenecektir.

1.1. Öklid Uzayı

$(IR, +, .)$ cismi verilsin.

$$IR^n = IR\times IR\times ...\times IR = \{(p_1,\ p_2,\ ...\ ,p_n): p_i \in IR,\ 1\le i\le n\},$$

cümlesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}&+: IR^n \times IR^n \to IR^n\\ &\quad ((p_1,\ p_2,\ ...\ ,p_n),(q_1,\ q_2,\ ...\ ,q_n)) \to (p_1+q_1, p_2+q_2, ...\ ,\ p_n+q_n),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\cdot: IR\times IR^n \to IR^n\\ &\quad (\lambda, (p_1,\ p_2, ...\ ,\ p_n)) \to (\lambda p_1,\ \lambda p_2,\ ...\ ,\ \lambda p_n),\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Bu ikili işleme göre IR^n, $(IR, +, .)$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [15].

Tanım 1.1.1. IR^n vektör uzayında iki vektör $\vec{P}=\left(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n\right)$ ve $\vec{Q}=\left(q_1,\ q_2,\ \ldots,q_n\right)$ olsun.

$$\left\langle \vec{P},\vec{Q}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n,$$

ile tanımlı $\left\langle\ ,\ \right\rangle : IR^n \times IR^n \rightarrow IR$ fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonu olup , IR^n uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı olarak adlandırılır [15].

Tanım 1.1.2. $\vec{P} \in IR^n$ olmak üzere

$$\left\|\vec{P}\right\| = \sqrt{\left\langle \vec{P},\ \vec{P}\right\rangle},$$

değerine $\vec{P}$ vektörünün normu denir. Bu norm ile birlikte IR^n vektör uzayı bir normlu vektör uzayıdır [15].

Tanım 1.1.3. $\vec{P},\ \vec{Q} \in IR^n$ olmak üzere

$$d\left(\vec{P},\ \vec{Q}\right) = \left\|\vec{P} - \vec{Q}\right\|,$$

metriğiyle birlikte IR^n uzayına Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir [15].

1.2. E^3 3-boyutlu Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 1.2.1. $I \subset IR$ bir açık alt küme olmak üzere, E^3 uzayında bir

$$\vec{\alpha} : I \subset IR \rightarrow E^3, \qquad \vec{\alpha}(t) = \left(\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t)\right),$$

dönüşümüne E^3 uzayında bir eğri denir. $\vec{\alpha}(t)$ eğrisinin $\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \alpha_3(t)$ bileşenlerinin her mertebeden türevleri mevcutsa $\vec{\alpha}(t)$ eğrisi, diferansiyellenebilir eğri adını alır [15].

Tanım 1.2.2. $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(t)$ olmak üzere bir $\vec{\alpha}: I \subset IR \to E^3$ diferansiyellenebilir eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$ oluyorsa $\vec{\alpha}(t)$ eğrisine regüler eğri denir [15].

Tanım 1.2.3. $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(t)$ olmak üzere bir $\vec{\alpha}: I \subset IR \to E^3$ diferansiyellenebilir eğrisi verilsin. $\vec{\alpha}(t)$ eğrisinin $\vec{\alpha}(t_0)$ noktasından itibaren ölçülen yay uzunluğu

$$s=\int_{t_0}^{t}\left\|\vec{\alpha}'(t)\right\| dt,$$

fonksiyonu ile tanımlanır. Burada, s parametresine eğrinin yay uzunluğu parametresi denir. Eğer bir eğri yay uzunluğu parametresiyle verilmişse eğriye birim hızlı eğri denir. Buna göre, $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(t)$ eğrisinin birim hızlı olması için gerek ve yeter şart $\left\|\vec{\alpha}'(t)\right\|=1$ olmasıdır [15].

Tanım 1.2.4. E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{T}(s)=\vec{\alpha}'(\mathrm{s}),$$

ile verilen $\vec{T}(s)$ vektörüne, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [15].

Tanım 1.2.5. E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisi için

$$\kappa_\alpha : I \to IR,\ \ \kappa_\alpha(s)=\left\|\vec{T}'(s)\right\|,$$

İle tanımlı κ_α fonksiyonuna, $\vec{\alpha}$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa_\alpha(s)$ sayısına da eğrinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki eğriliği denir [15].

Tanım 1.2.6. E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{N}(s)=\frac{1}{\kappa_\alpha(s)}\vec{T}'(s),$$

eşitliğiyle verilen $\vec{N}(s)$ vektörüne, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki asal normal vektörü denir [15].

Tanım 1.2.7. E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisi için

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \times \vec{N}(s),$$

eşitliğiyle verilen $\vec{B}(s)$ vektörüne, $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir [15].

Tanım 1.2.8. $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ ve $\vec{B}(s)$ vektörlerine, $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri ve

$$\left\{\vec{T}(s),\ \vec{N}(s),\ \vec{B}(s)\right\},$$

kümesine de $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir [15].

Tanım 1.2.9. E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ ve $\vec{B}(s)$ olmak üzere

$$\tau_\alpha : I \to IR, \qquad \tau_\alpha(s) = -\left\langle \vec{B}'(s),\ \vec{N}(s) \right\rangle,$$

İle tanımlı τ_α fonksiyonuna, $\vec{\alpha}$ eğrisinin burulma fonksiyonu denir [15].

Teorem 1.2.1. *E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ ve $\vec{B}(s)$ olmak üzere $\vec{\alpha}$ eğrisinin Frenet türev formülleri*

$$\begin{cases} \vec{T}' = \kappa_\alpha \vec{N}, \\ \vec{N}' = -\kappa_\alpha \vec{T} + \tau_\alpha \vec{B}, \\ \vec{B}' = -\tau_\alpha \vec{N}, \end{cases}$$

şeklindedir [15].

Tanım 1.2.10. E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ ve $\vec{B}(s)$ olmak üzere, $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s)\}$, $\{\vec{T}(s), \vec{B}(s)\}$ ve $\{\vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ kümelerinin gerdiği düzlemlere, sırasıyla, oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem ve normal düzlem denir [15].

Tanım 1.2.11. E^3 uzayında birim hızlı regüler bir $\vec{\alpha}: I \to E^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ve eğrilik ve burulma fonksiyonları, sırasıyla, κ_α ve τ_α olmak üzere,

$$\vec{W} = \tau_\alpha \vec{T} + \kappa_\alpha \vec{B},$$

vektörüne $\vec{\alpha}$ eğrisinin Darboux vektörü ya da ani dönme vektörü denir [17]. Bu vektör sayesinde Frenet türev formülleri, Frenet vektörlerinin kendileri cinsinden

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \vec{W} \times \vec{T}, \\ \vec{N}' &= \vec{W} \times \vec{N}, \\ \vec{B}' &= \vec{W} \times \vec{B}, \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir.

Tanım 1.2.12. $\vec{\alpha}: I \to E^3$ regüler bir eğri olsun. $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{T}$ teğet vektörü sabit doğrultulu bir $\vec{u}$ birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \cos\theta = \text{sabit}, \qquad \theta \neq \frac{\pi}{2},$$

oluyorsa, $\vec{\alpha}$ eğrisine bir genel helis ya da eğilim çizgisi denir [3,4,16].

Teorem 1.2.2. $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ *eğrisi, eğrilik ve burulması, sırasıyla,* κ_α *ve* τ_α *olan ve üç kez türevlenebilen bir eğri olsun. Bu takdirde,* $\vec{\alpha}$ *eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart* $\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \text{sabit}$ *olmasıdır* [3,16].

Teorem 1.2.3. *Bir* $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(s)$ *eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart* $\det\left(\vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''', \vec{\alpha}^{(4)}\right)=0$ *olmasıdır* [4].

Tanım 1.2.13. $\vec{\alpha}: I \to E^3$ regüler bir eğri olsun. $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{N}$ asal normal vektörü sabit doğrultulu bir $\vec{u}$ birim vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, yani

$$\left\langle \vec{N}, \vec{u} \right\rangle = \cos\theta = \text{sabit}, \qquad \theta \neq \frac{\pi}{2},$$

şartı sağlanıyorsa, $\vec{\alpha}$ eğrisine bir slant helis denir. [5]

Teorem 1.2.4. $\vec{\alpha}: I \to E^3$ *regüler bir eğri olsun.* $\vec{\alpha}$ *eğrisinin eğrilik ve burulması, sırasıyla,* κ_α *ve* τ_α *olmak üzere* $\vec{\alpha}$ *eğrisinin bir slant helis olması için gerek ve yeter şart*

$$\frac{\kappa_\alpha^2}{\left(\kappa_\alpha^2+\tau_\alpha^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' = \text{sabit},$$

olmasıdır [5].

Tanım 1.2.14. $\vec{\alpha}: I \to E^3$ regüler bir eğri olsun. $\vec{\alpha}$ eğrisinin $\vec{W}$ Darboux vektörü sabit doğrultulu birim bir $\vec{u}$ vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyorsa, yani

$$\left\langle \vec{W}, \vec{u} \right\rangle = \text{sabit} \neq 0,$$

ise, $\vec{\alpha}$ eğrisine bir Darboux helis denir [17].

1.3. E^3 3-boyutlu Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında yüzeylerin geometrisi için Karger ve Novak [6] tarafından verilen bazı temel tanım ve teoriler verilmiştir.

$\vec{k} = \vec{k}(s)$, E^3 uzayının bir açık alt aralığında tanımlı regüler bir eğri ve $\vec{q} = \vec{q}(s)$, E^3 uzayında yönlü bir doğrunun birim doğrultman vektörü olmak üzere, bir S regle yüzeyi, $\vec{q}$ doğrusunun $\vec{k}$ eğrisine dayanarak sürekli bir hareket yapması sonucu oluşan özel bir yüzeydir ve

$$\vec{r}(s,v) = \vec{k}(s) + v\vec{q}(s),\ v \in IR, \tag{1.1}$$

parametrizasyonu ile verilir. Yüzeyin s-parametre eğrileri yüzey üzerindeki doğrulardır. Bu doğrulara yüzeyin anadoğruları denir. $v = 0$ için elde edilen v-parametre eğrisi $\vec{k} = \vec{k}(s)$ olup, yüzeyin dayanak (üreteç) eğrisi olarak adlandırılır. Özel olarak $\vec{q}$ vektörü sabitse, bu takdirde, yüzeye silindirik regle yüzey, aksi takdirde, silindirik olmayan regle yüzey denir [6].

Bir S regle yüzeyinin birim normal vektörü (1.1) denkleminden

$$\vec{m} = \frac{\vec{r}_s \times \vec{r}_v}{\left\| \vec{r}_s \times \vec{r}_v \right\|} = \frac{\left(\dot{\vec{k}} + v\dot{\vec{q}}\right) \times \vec{q}}{\left\| \left(\dot{\vec{k}} + v\dot{\vec{q}}\right) \times \vec{q} \right\|}, \tag{1.2}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\dot{\vec{k}} = d\vec{k} / ds$ ve $\dot{\vec{q}} = d\vec{q} / ds$ olarak tanımlıdır. Şimdi, yüzeyin aynı anadoğrusunun $v_1 \neq v_2$ gibi farklı iki noktasındaki normal vektörleri düşünülürse, bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$\left[\left(\dot{\vec{k}} + v_1\dot{\vec{q}}\right) \times \vec{q}\right] \times \left[\left(\dot{\vec{k}} + v_2\dot{\vec{q}}\right) \times \vec{q}\right] = \left(v_1 - v_2\right)\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right|\vec{q}, \tag{1.3}$$

bulunur. Burada, $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = \det\left(\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right)$ şeklindedir. Eğer (1.3) denkleminde $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = 0$ ise, aynı anadoğrunun her noktasında normal vektörleri aynı doğrultuda olup yüzeyin tekil olmayan noktalarında teğet düzlemler aynıdır. Dolayısıyla, teğet düzlemin bir anadoğru boyunca yüzeye temas ettiği söylenebilir. Böyle bir anadoğruya torsal anadoğru denir. Eğer $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| \neq 0$ ise aynı anadoğrunun her noktasında yüzeyin teğet düzlemleri farklı olur. Böyle bir anadoğruya da torsal olmayan anadoğru denir [6].

Tanım 1.3.1. Bütün anadoğruları torsal olan bir regle yüzeye açılabilir regle yüzey denir. Aksi halde regle yüzey, aykırı regle yüzey olarak adlandırılır [6].

Teorem 1.3.1. *Bir S regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart* $\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = 0$ *olmasıdır* [6].

Örnek 1.3.1. Bir $\vec{k} = \vec{k}(s)$ birim hızlı uzay eğrisinin teğetleri tarafından üretilen regle yüzey göz önüne alınsın. Bu yüzeye $\vec{k}(s)$ eğrisinin teğetler yüzeyi denir ve parametrik denklemi

$$\vec{r}(s,v) = \vec{k}(s) + v\dot{\vec{k}}(s),$$

ile verilir. Bu durumda, $\vec{q} = \dot{\vec{k}}$ olup, Teorem 1.3.1'den

$$\left|\dot{\vec{k}},\ \vec{q},\ \dot{\vec{q}}\right| = \left|\dot{\vec{k}},\ \dot{\vec{k}},\ \ddot{\vec{k}}\right| = 0,$$

olduğundan, bir uzay eğrisinin teğetler yüzeyi açılabilir bir yüzeydir [6].

Benzer şekilde, koni, silindir ve düzlemlerin açılabilir regle yüzeyler oldukları basitçe görülebilir.

Aykırı bir regle yüzeyin birim normal vektörü $\vec{m}(s,v)$, yüzeyin $s = s_0$ gibi torsal olmayan bir anadoğrusu üzerinde, $v \to \pm\infty$ için $\vec{a}$ vektörüne yakınsasın. Buradan, (1.2) eşitliğinden

$$\vec{a} = \lim_{v\to\pm\infty} \vec{m}(s_0,v) = \frac{\vec{q}\times\dot{\vec{q}}}{\left\|\dot{\vec{q}}\right\|}, \tag{1.4}$$

elde edilir [6].

Tanım 1.3.2. Aykırı bir regle yüzeyin s_0 anadoğrusundan geçen ve (1.4) eşitliği ile verilen $\vec{a}$ vektörüne dik olan düzleme asimptotik düzlem denir. Yüzeyin s_0 anadoğrusundan geçen ve asimptotik düzleme dik olan düzlem ise merkez düzlem olarak adlandırılır. Bu iki düzlemin değme noktası olan C noktasına s_0 anadoğrusunun boğaz noktası adı verilir. C noktasından geçen, asimptotik düzleme ve merkez düzleme dik olan doğrular ise, sırasıyla, merkez teğet ve merkez normal doğruları olarak adlandırılır [6].

$\vec{q}$ ve $\dot{\vec{q}}$ vektörlerinin birbirlerine dik olduğu ve (1.4) eşitliği kullanılarak, $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = \frac{\dot{\vec{q}}}{\left\|\dot{\vec{q}}\right\|}, \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır ve C boğaz noktasının v parametresini belirlemek için $\vec{h} \times \vec{m} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$v = -\frac{\left\langle \dot{\vec{k}}, \dot{\vec{q}} \right\rangle}{\left\langle \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}} \right\rangle},$$

bulunur [6]. Böylece aşağıdaki tanıma ulaşılır:

Tanım 1.3.3. Aykırı bir regle yüzeyin bütün anadoğruları üzerindeki boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz çizgisi (sitriksiyon eğrisi) denir ve bu eğrinin denklemi

$$\vec{c}(s) = \vec{k}(s) - \frac{\left\langle \dot{\vec{k}}, \dot{\vec{q}} \right\rangle}{\left\langle \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}} \right\rangle} \vec{q},$$

ile verilir [6].

Teorem 1.3.2. *Aykırı bir regle yüzeyin dayanak eğrisinin boğaz çizgisi olması için gerek ve yeter şart* $\left\langle \dot{\vec{k}}, \dot{\vec{q}} \right\rangle = 0$ *olmasıdır* [6].

Eğer aykırı bir regle yüzeyde dayanak eğrisi boğaz çizgisi olarak seçilirse, bir $(s,0)$ noktasında normlanmamış yüzey normali $\vec{m}_0$ olmak üzere, (1.2) eşitliğinden

$$\vec{m}_0 = \dot{\vec{k}} \times \vec{q},$$

bulunur. Dolayısıyla, $\vec{h} \times \vec{m}_0 = 0$ olacağından,

$$\dot{\vec{q}}\times\left(\dot{\vec{k}}\times\vec{q}\right)=\left\langle\dot{\vec{q}},\,\vec{q}\right\rangle\dot{\vec{k}}-\left\langle\dot{\vec{q}},\,\dot{\vec{k}}\right\rangle\vec{q}=0,$$

olur ve buradan, $\dot{\vec{q}}$ ve $\dot{\vec{k}}\times\vec{q}$ vektörleri lineer bağımlı olup, d bir reel sayı olmak üzere $\dot{\vec{k}}\times\vec{q}=d\dot{\vec{q}}$ yazılabilir. Böylece, $\left\langle\dot{\vec{k}}\times\vec{q},\,\dot{\vec{q}}\right\rangle=d\left\langle\dot{\vec{q}},\,\dot{\vec{q}}\right\rangle$ yazılabileceğinden

$$d=\frac{\left\langle\dot{\vec{k}}\times\vec{q},\,\dot{\vec{q}}\right\rangle}{\left\langle\dot{\vec{q}},\,\dot{\vec{q}}\right\rangle},$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeye yüzeyin dağıtma parametresi denir [6].

Sonuç 1.3.1. *Bir S regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağıtma parametresinin sıfır olmasıdır* [6].

Tanım 1.3.4. S aykırı bir regle yüzey, C bu yüzeyin bir anadoğrusu üzerindeki boğaz noktası ve $\vec{q}$, $\vec{h}$ ve $\vec{a}$ vektörleri, sırasıyla, anadoğrunun birim doğrultman vektörü, merkez normal ve merkez teğet vektörleri olmak üzere, $\left\{C,\,\vec{q},\,\vec{h},\,\vec{a}\right\}$ ortonormal çatısına S aykırı regle yüzeyinin Frenet çatısı denir [6].

Regüler bir S regle yüzeyinin boğaz çizgisi dayanak eğrisi olarak alınsın. Bu takdirde, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere, S regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}\left(s,v\right)=\vec{c}(s)+v\vec{q}(s)\,,\quad\left\|\vec{q}(s)\right\|=1, \tag{1.6}$$

ile verilir. Eğer S açılabilir bir regle yüzeyse, boğaz çizgisinin teğet vektörleri anadoğrularla çakışır [14]. Bu takdirde, boğaz çizgisinin teğet vektörü için

$$\frac{d\vec{c}}{ds}=\vec{q}, \tag{1.7}$$

yazılabilir.

Eğer S regle yüzeyi üzerindeki bütün anadoğruların $\vec{q}(s)$ vektörleri orijin noktasına bağlanırsa, bu doğrular bir koni oluşturur. Bu koniye S yüzeyinin yönlü konisi denir. Yönlü koni düşüncesi, bir uzay eğrisinin teğetler göstergesi düşüncesinin regle yüzeylere bir uyarlaması olarak düşünülebilir. Dolayısıyla birim doğrultman vektörlerinin uç noktaları birim küre üzerinde küresel bir eğri çizer. Bu eğriye yüzeyin küresel göstergesi denir ve $\vec{k}_1$ ile gösterilir. $\vec{k}_1$ eğrisinin yay uzunluğu parametresi de s_1 ile ifade edilir [6].

Yönlü koninin Frenet çatısı $\{O,\ \vec{q},\ \vec{n},\ \vec{z}\}$ ile tanımlansın. Burada $\vec{n} = \dfrac{d\vec{q}}{ds_1} = \vec{q}\,'$ şeklindedir. (1.5) denkleminden

$$\vec{q}\,' = \frac{\dot{\vec{q}}}{\left\|\dot{\vec{q}}\right\|} = \vec{h},$$

olduğundan, yüzeyin yönlü konisinin teğet düzlemleri regle yüzeyin asimptotik düzlemlerine paraleldir. Son olarak,

$$\vec{z} = \vec{q}\times\vec{n} = \vec{q}\times\vec{h} = \vec{a},$$

olup, buradan, yüzeyin yönlü konisinin Frenet çatısı ile yüzeyin Frenet çatısının aynı olduğu, görülür.

Şimdi, yüzeyin $\vec{k}_1$ küresel göstergesinin s_1 yay uzunluğu parametresine göre $\vec{h}$ ve $\vec{a}$ vektörlerinin türevlerini inceleyelim. $\vec{h}$ vektörü birim olduğundan $\left\langle \vec{h},\ \vec{h} \right\rangle = 1$ olup, bu ifadenin türevinden $\left\langle \vec{h},\ \vec{h}\,' \right\rangle = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\vec{h}\,' = \dfrac{d\vec{h}}{ds_1}$ vektörünün $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemde kaldığı görülür. Buradan, $\xi = \xi(s_1)$ ve $\mu = \mu(s_1)$, s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere

$$\vec{h}\,' = \xi\vec{q} + \mu\vec{a}, \tag{1.8}$$

yazılabilir. $\left\langle \vec{h},\ \vec{q} \right\rangle = 0$ olduğundan, bu ifadenin türevinden

$$\left\langle \vec{h}\,',\ \vec{q} \right\rangle + \left\langle \vec{h},\ \vec{q}\,' \right\rangle = 0, \tag{1.9}$$

olup, $\vec{q}\,' = \vec{h}$ yazılırsa, $\vec{h}$ birim vektör olduğundan (1.9) eşitliği

$$\left\langle \vec{h}\,',\ \vec{q} \right\rangle + 1 = 0, \tag{1.10}$$

halini alır. Diğer yandan, (1.8) eşitliği $\vec{q}$ ile iç çarpılırsa, $\vec{q}$ birim vektör olduğundan

$$\left\langle \vec{h}', \vec{q} \right\rangle = \xi, \tag{1.11}$$

bulunur. Son olarak, (1.10) ve (1.11) ifadelerinden $\xi = -1$ elde edilir. $\mu = \kappa(s_1)$ alınırsa, (1.8) eşitliğinden

$$\vec{h}' = -\vec{q} + \kappa \vec{a},$$

bulunur. $\kappa = \left\langle \vec{h}', \vec{a} \right\rangle$ ile tanımlı κ fonksiyonuna yüzeyin konisel eğrilik fonksiyonu denir.

Benzer şekilde, $\left\langle \vec{h}, \vec{a} \right\rangle = 0$ olduğundan

$$\left\langle \vec{h}', \vec{a} \right\rangle + \left\langle \vec{h}, \vec{a}' \right\rangle = \kappa + \left\langle \vec{h}, \vec{a}' \right\rangle = 0,$$

elde edilir ve böylece

$$\left\langle \vec{h}, \vec{a}' \right\rangle = -\kappa,$$

bulunur. Öte yandan, $\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle = 1$ ve $\left\langle \vec{a}, \vec{q} \right\rangle = 0$ olduğundan, $\left\langle \vec{a}, \vec{a}' \right\rangle = 0$ ve $\left\langle \vec{a}', \vec{q} \right\rangle = 0$ olup, $\vec{a}'$ vektörünün $\vec{h}$ ile lineer bağımlı olduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, $\eta = \eta(s_1)$, s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olmak üzere, $\vec{a}' = \eta \vec{h}$ yazılabilir. Bu ifade $\vec{h}$ vektörü ile iç çarpılırsa,

$$\left\langle \vec{h}, \vec{a}' \right\rangle = \eta = -\kappa,$$

olacağından

$$\vec{a}' = -\kappa \vec{h},$$

elde edilir [6].

Eğer S yüzeyinin Frenet çatısının $\vec{a}(s)$ merkez teğet vektörleri orijin noktasına bağlanırsa, bu vektörlerin uç noktaları birim küre üzerinde yay uzunluğu parametresi s_3 olan bir $\vec{k}_3$ küresel eğrisi çizer. Buradan

$$s_3 = \int_0^{s_1} \|\vec{a}'\| ds_1 = \int_0^{s_1} \kappa ds_1 \;\Rightarrow\; \frac{ds_3}{ds_1} = \kappa,$$

eşitliğine ulaşılır [6].

Teorem 1.3.5. *S aykırı bir regle yüzey olmak üzere, S yüzeyinin yönlü konisinin* $\{O,\ \vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ *Frenet çatısının, $\vec{k}_1$ küresel göstergesinin s_1 yay parametresine göre Frenet türev formülleri,*

$$\begin{cases} \vec{q}' = \vec{h}, \\ \vec{h}' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}, \\ \vec{a}' = -\kappa\vec{h}, \end{cases} \tag{1.12}$$

şeklindedir. Burada $\kappa = \dfrac{ds_3}{ds_1} = \|\vec{a}'\|$ *yüzeyin konisel eğriliğidir* [6].

Tanım 1.3.5. Frenet türev formülleri kinematik olarak şöyle yorumlanabilir: s zaman parametresi olarak alındığında, eğer $\vec{q}$ anadoğruları yönlü koniyi çiziyorsa, bu takdirde, $\{C;\ \vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ hareketli çatısı (1.12) ile verilen çatıya göre hareket eder. Bu hareket, ani bir ötelemeden ziyade,

$$\vec{W} = \kappa\vec{q} + \vec{a},$$

Darboux vektörüyle verilen açısal hızlı bir ani dönme içerir. Darboux vektörünün yönü ani dönme ekseninin yönü ile aynıdır ve uzunluğu

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{1+\kappa^2},$$

kadardır. Böylece, (1.12) ile verilen Frenet türev formülleri

$$\vec{q}' = \vec{W} \times \vec{q}, \qquad \vec{h}' = \vec{W} \times \vec{h}, \qquad \vec{a}' = \vec{W} \times \vec{a},$$

ile de verilebilir.

Aykırı bir S regle yüzeyinin boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi s olsun. Buradan,

$$\kappa = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{ds_3}{ds_1} = \frac{ds_3}{ds}\frac{ds}{ds_1},$$

olup, $\kappa_2 = \dfrac{ds_3}{ds}$ ve $\kappa_1 = \dfrac{ds_1}{ds}$ alınırsa $\kappa = \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}$ olur. Burada, κ_1 ve κ_2 fonksiyonları, sırasıyla, yüzeyin birinci ve ikinci eğrilikleri olarak adlandırılır [6]. Böylece, (1.12) denklemleri $\kappa_1 = ds_1 / ds$ ile çapılarak aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 1.3.6. *S aykırı bir regle yüzey olsun. $\kappa_1 = ds_1 / ds$, $\kappa_2 = ds_3 / ds$ ve s_1 ile s_3, sırasıyla $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ vektörleri tarafından çizilen $\vec{k}_1$ ve $\vec{k}_3$ küresel eğrilerinin yay parametreleri olmak üzere, S yüzeyinin $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısının yüzeyin boğaz çizgisinin s yay parametresine göre Frenet türev formülleri*

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{q}}{ds} = \kappa_1 \vec{h}, \\ \dfrac{d\vec{h}}{ds} = -\kappa_1 \vec{q} + \kappa_2 \vec{a}, \\ \dfrac{d\vec{a}}{ds} = -\kappa_2 \vec{h}, \end{cases} \tag{1.13}$$

ile verilir [6].

II. BÖLÜM

SLANT REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde, eğriler teorisinin önemli konularından olan “helis” ve “slant helis” kavramlarının regle yüzeyler için düşünülmesiyle tanımlanan slant regle yüzeylerin türlerine göre karakterizasyonları verilmiştir. Slant regle yüzeyler ilk olarak Önder [12] tarafından tanımlanmış ve bu yüzeylerin karakterizasyonları yüzeyin κ_1 ve κ_2 birinci ve ikinci eğrilikleri türünden ifade edilmiştir. Bu bölümde ise slant regle yüzeylerin karakterizasyonları yüzeyin κ konisel eğriliği dikkate alınarak incelenmiş olup, Önder tarafından verilen karakterizasyonlar κ fonksiyonuna göre ifade edilmiştir. Bu özel yüzeyler q-slant, h-slant ve a-slant regle yüzeyler olarak sınıflandırılmış, daha sonra q-slant ve a-slant regle yüzeylerin çakıştığı gösterilerek, [12]’de verilenlere ek yeni karakterizasyonlar da verilmiştir.

2.1. q-slant Regle Yüzeyler

Tanım 2.1.1. S yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $\vec{c}(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s, boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere; S yüzeyi

$$\vec{r}(s,v)=\vec{c}(s)+v\vec{q}(s), \qquad \|\vec{q}(s)\|=1,$$

parametrizasyonuyla verilsin. $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ ve $\kappa\neq 0$, sırasıyla, yüzeyin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, birim ve sabit bir vektör $\vec{u}$ olmak üzere, yüzeyin $\vec{q}$ anadoğruları $\vec{u}$ vektörü ile sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = \cos\theta, \qquad \theta \in \left\{ (0,\, \pi) - \frac{\pi}{2} \right\},$$

ise, S regle yüzeyine q -slant regle yüzey denir [12]. $\vec{u}$ vektörü de q -slant regle yüzeyin ekseni olarak adlandırılır.

Bu tanımdan yola çıkılarak, bir q -slant regle yüzeyin anadoğrularının birim doğrultuları birim kürenin merkezine bağlanırsa bu vektörlerin uç noktalarının küre üzerinde bir çember veya çember yayı çizdiği sezgisel olarak söylenebilir.

Şimdi, q -slant regle yüzeyleri karakterize eden teoremler verilecektir.

Teorem 2.1.1. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. $\vec{u}$, sabit ve birim bir vektör olmak üzere, S yüzeyi q -slant regle yüzeyse*

$$\langle \vec{a},\, \vec{u} \rangle = \frac{1}{\kappa} \langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle,$$

ifadesi sağlanır.

İspat: S yüzeyi q -slant regle yüzey olduğundan, Tanım 2.1.1'den

$$\langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0,$$

olup, bu ifadenin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevinden

$$\langle \vec{q}\,',\, \vec{u} \rangle + \langle \vec{q},\, \vec{u}\,' \rangle = 0, \tag{2.1}$$

bulunur. $\vec{u}$ sabit olduğundan $\vec{u}\,' = 0$ ve Frenet türev formüllerinden $\vec{q}\,' = \vec{h}$ olup, (2.1) eşitliği

$$\langle \vec{h},\, \vec{u} \rangle = 0, \tag{2.2}$$

halini alır. (2.2) eşitliğinin türevinden

$$\langle \vec{h}\,',\, \vec{u} \rangle + \langle \vec{h},\, \vec{u}\,' \rangle = 0, \tag{2.3}$$

elde edilir. $\vec{u}\,' = 0$ ve Frenet türev formüllerinden $\vec{h}\,' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}$ olduğundan, (2.3) eşitliğinden

$$\left\langle -\vec{q}+\kappa\vec{a},\ \vec{u}\right\rangle = 0,$$

bulunur. Bulunan bu ifade düzenlenerek, istenilen

$$\left\langle \vec{a},\ \vec{u}\right\rangle = \frac{1}{\kappa}\left\langle \vec{q},\ \vec{u}\right\rangle,$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.1.2. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. $\vec{u}$, sabit ve birim bir vektör ve $\theta \in \left\{(0,\ \pi) - \frac{\pi}{2}\right\}$ açısı, $\vec{q}$ ile $\vec{u}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse, yüzeyin ekseninin denklemi*

$$\vec{u} = \cos\theta\left(\vec{q} + \frac{1}{\kappa}\vec{a}\right),$$

eşitliği ile verilir.

İspat: S yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Tanım 2.1.1'den

$$\left\langle \vec{q},\ \vec{u}\right\rangle = \cos\theta = \text{sabit} \neq 0, \tag{2.4}$$

eşitliği sağlanır. (2.4) eşitliğinin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa, $\vec{u}$ sabit olduğundan $\vec{u}' = 0$ ve Frenet türev formüllerinden $\vec{q}' = \vec{h}$ olup

$$\left\langle \vec{h},\ \vec{u}\right\rangle = 0, \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.5) eşitliğinden, $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörüne dik olduğu, yani $\vec{u}$ vektörünün $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemde kaldığı görülür. Dolayısıyla, $\lambda_1 = \lambda_1(s_1)$ ve $\lambda_2 = \lambda_2(s_1)$ fonksiyonları s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{q} + \lambda_2\vec{a}, \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. (2.6) ifadesi sırasıyla, $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ vektörleri ile iç çapılır ve Teorem 2.1.1 kullanılırsa

$$\begin{cases} \langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = \lambda_1 = \cos\theta \neq 0, \\ \langle \vec{a},\, \vec{u} \rangle = \lambda_2 = \dfrac{1}{\kappa}\langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = \dfrac{1}{\kappa}\cos\theta \neq 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

bulunur. Son iki eşitlikten bulunan λ_1 ve λ_2 değerleri (2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.1. S *yüzeyi,* E^3 *uzayında,* $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ *Frenet çatısı ve* $\kappa \neq 0$ *konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun.* $\vec{u}$ *, birim ve sabit bir vektör ve* $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ *açısı,* $\vec{q}$ *ile* $\vec{u}$ *vektörleri arasındaki açı olmak üzere,* S *yüzeyi* q *-slant regle yüzeyse, yüzeyin ekseninin ifadesi*

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{q} + \sin\theta\vec{a},$$

şeklindedir.

İspat: S yüzeyi q -slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, (2.2) eşitliğinden

$$\langle \vec{h},\, \vec{u} \rangle = 0, \tag{2.8}$$

olduğunu biliyoruz. (2.8) eşitliğinden, $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ vektörüne dik olduğu, yani $\vec{u}$ vektörünün $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemde kaldığı görülür. Dolayısıyla, $\vec{u}$ vektörü $\vec{q}$ ile sabit açı yaptığından $\vec{a}$ ile de sabit açı yapar ve $\vec{u}$, $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ birim olduklarından

$$\langle \vec{a},\, \vec{u} \rangle = \sin\theta = \text{sabit},$$

elde edilir. Böylece

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{q} + \sin\theta\vec{a},$$

bulunur.

Sonuç 2.1.2. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\kappa = \text{sabit} \neq 0$ olmasıdır.*

İspat: S yüzeyi $\vec{q}$-slant regle yüzey olsun. Sonuç 2.1.1'den

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{q} + \sin\theta\vec{a}, \tag{2.9}$$

olur. Bu ifadenin türevi alınır ve (1.12) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$0 = (\cos\theta - \kappa\sin\theta)\vec{h},$$

bulunur. Bu ifadede, $\vec{h}$ vektörü sıfırdan farklı olduğundan $\cos\theta - \kappa\sin\theta = 0$ olup $\kappa = \cot\theta = \text{sabit} \neq 0$ elde edilir.

Tersine, $\kappa = \cot\theta = \text{sabit} \neq 0$ olsun. $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{q} + \sin\theta\vec{a},\ \ \theta \in \left\{(0,\, \pi) - \frac{\pi}{2}\right\},$$

şeklinde tanımlansın. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$\vec{u}' = (\cos\theta - \kappa\sin\theta)\vec{h}, \tag{2.10}$$

bulunur. $\kappa = \cot\theta$ değeri (2.10) eşitliğinde yerine yazılırsa $\vec{u}' = 0$ olur. Yani $\vec{u}$ vektörü sabit bir vektördür. Diğer yandan, $\vec{u}$ vektörü $\vec{q}$ ile iç çarpılırsa

$$\langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = \cos\theta = \text{sabit},$$

elde edilir. Sonuç olarak, $\vec{q}$ vektörü sabit bir doğrultuyla sabit açı yaptığından dolayı S yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Sonuç 2.1.3. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart*

$$\det(\vec{q}',\, \vec{q}'',\, \vec{q}''') = 0,$$

olmasıdır.

İspat: (1.12) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{q}' = h,$$
$$\vec{q}'' = -\vec{q} + \kappa\vec{a},$$
$$\vec{q}''' = \left(-1-\kappa^2\right)\vec{h} + \kappa' a,$$

olup

$$\det\left(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}'''\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa \\ 0 & -1-\kappa^2 & \kappa' \end{vmatrix} = \kappa' \tag{2.11}$$

bulunur. Buradan, S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\kappa = \text{sabit}$ olduğundan S yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\det\left(\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}'''\right) = \kappa' = 0$ elde edilir.

Sonuç 2.1.4. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin q -slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart*

$$\det\left(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}'''\right) = 0,$$

olmasıdır.

İspat: Frenet türev formüllerinden

$$\vec{a}' = -\kappa\vec{h},$$
$$\vec{a}'' = \kappa\vec{q} - \kappa'\vec{h} - \kappa^2\vec{a},$$
$$\vec{a}''' = 2\kappa'\vec{q} + \left(\kappa^3 + \kappa - \kappa''\right)\vec{h} - 3\kappa\kappa'\vec{a},$$

olur ve $\det\left(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}'''\right) = \kappa'\left(-3\kappa^2 + 2\kappa^3\right)$ bulunur. Buradan, S yüzeyi q-slant regle yüzeyse $\kappa = \text{sabit}$ olup $\det\left(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}'''\right) = 0$ elde edilir. $\det\left(\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}'''\right) = 0$ ise $\kappa' = 0$ veya $\kappa = \dfrac{3}{2}$ olup $\kappa = \text{sabit}$ elde edilir. Yani, S yüzeyi, bir q-slant regle yüzeydir.

2.2. h-slant Regle Yüzeyler

Tanım 2.2.1. S yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $\vec{c}(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olmak üzere, S yüzeyi

$$\vec{r}(s,v)=\vec{c}(s)+v\vec{q}(s), \qquad \|\vec{q}(s)\|=1,$$

parametrizasyonuyla verilsin. $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$ sırasıyla S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, $\vec{u}$, birim ve sıfır olmayan sabit bir vektör olmak üzere, yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörü ile $\vec{u}$ vektörü sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{h},\ \vec{u}\rangle=\cos\varphi=\text{sabit},\ \ \varphi\in\left\{(0,\ \pi)-\frac{\pi}{2}\right\},$$

ise, S regle yüzeyine h-slant regle yüzey denir.

q-slant regle yüzeylerdeki düşünceye benzer olarak, bir h-slant regle yüzeyin $\vec{h}$ merkez normal vektörleri birim kürenin merkezine bağlanırsa, bu vektörlerin uç noktaları, sezgisel olarak, bir çember ya da çember yayı çizerler.

Şimdi, h-slant regle yüzeyleri karakterize eden teoremler verilecektir.

Teorem 2.2.1. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart*

$$\frac{\kappa'}{\left(1+\kappa^2\right)^{3/2}}=\text{sabit}\neq 0, \tag{2.12}$$

olmasıdır.

İspat: S yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, $m \neq 0$ reel bir sabit olmak üzere, Tanım 2.2.1'den

$$\langle \vec{h},\ \vec{u}\rangle=m=\text{sabit}\neq 0,$$

yazılabilir. Buradan, $b_1 = b_1(s_1)$ ve $b_2 = b_2(s_1)$ fonksiyonları s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere, $\vec{u}$ birim vektörü

$$\vec{u} = b_1\vec{q} + m\vec{h} + b_2\vec{a}, \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir. (2.13) ifadesinin türevi alınırsa, $\vec{u}' = 0$ olacağından ve Frenet türev formüllerinden

$$0 = \left(b_1' - m\right)\vec{q} + \left(b_1 - b_2\kappa\right)\vec{h} + \left(b_2' + m\kappa\right)\vec{a}, \tag{2.14}$$

bulunur. $\left\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\right\}$ Frenet çatısının vektörleri lineer bağımsız olduğundan, (2.14) eşitliğinden

$$\begin{cases} b_1' - m = 0, \\ b_1 - b_2\kappa = 0, \\ b_2' + m\kappa = 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

sistemine ulaşılır. (2.15) sisteminin ikinci denkleminden $b_1 = b_2\kappa$ olup, $\left\|\vec{u}\right\| = 1$ olduğundan (2.13) eşitliğinden

$$b_1^2 + m^2 + b_2^2 = 1,$$

elde edilir. Buradan, $1 - m^2 = b_1^2 + b_2^2 = n^2 = \text{sabit}$ olmak üzere, $b_1 = b_2\kappa$ değeri kullanılırsa

$$b_2^2\left(1 + \kappa^2\right) = n^2 = \text{sabit}, \tag{2.16}$$

bulunur. $n = 0$ olursa, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $m = 0$ ve $\vec{u} = 0$ olacağından çelişki elde edilir. Dolayısıyla $n \neq 0$ olmalıdır. (2.16) ifadesinden b_2 fonksiyonu

$$b_2 = \pm\frac{n}{\sqrt{1 + \kappa^2}},$$

olur. Bu ifade (2.15) sisteminin üçüncü denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds_1}\left[\pm\frac{n}{\sqrt{1 + \kappa^2}}\right] = -m\kappa,$$

olup, $p \neq 0$ reel bir sayı olmak üzere

$$\frac{\kappa'}{\left(1+\kappa^2\right)^{3/2}} = \frac{m}{n} = p = \text{sabit} \neq 0,$$

elde edilir.

Tersine,

$$\frac{\kappa'}{\left(1+\kappa^2\right)^{3/2}} = p = \text{sabit} \neq 0, \tag{2.17}$$

olsun ve $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\vec{q} + p\vec{h} + \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\vec{a}, \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlasın. (2.18) ifadesinin türevi alınırsa ve (2.17) kullanılırsa $\vec{u}' = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\vec{u} = \text{sabit}$ olur. Diğer yandan (2.18) eşitliği $\vec{h}$ vektörü ile iç çarpılırsa $\left\langle \vec{h}, \vec{u} \right\rangle = p = \text{sabit} \neq 0$ olur ve buradan S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

Teorem 2.2.2. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, φ açısı, $\vec{h}$ ve $\vec{u}$ vektörleri arasındaki sabit açı olmak üzere, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart*

$$\kappa = \pm \frac{s_1}{\sqrt{\left|\tan^2\varphi - s_1^2\right|}}, \qquad \varphi \in \left\{(0, \pi) - \frac{\pi}{2}\right\},$$

olmasıdır.

İspat: S yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Tanım 2.2.1'den

$$\left\langle \vec{h}, \vec{u} \right\rangle = \cos\varphi = \text{sabit} \neq 0,$$

olur. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\left\langle -\vec{q} + \kappa\vec{a}, \vec{u} \right\rangle = 0, \tag{2.19}$$

olup, (2.19) eşitliği düzenlenirse

$$\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle = \kappa \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle,$$

elde edilir. Burada $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ alınırsa, $\vec{u}$ vektörü için

$$\vec{u} = \kappa x \vec{q} + \cos\varphi \vec{h} + x\vec{a}, \tag{2.20}$$

yazılabilir. $\vec{u}$ vektörü birim olduğundan, (2.20) denkleminden

$$x = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\kappa^2}}, \tag{2.21}$$

bulunur. Bununla birlikte, (2.19) eşitliğinin türevinden

$$\left\langle -\left(1+\kappa^2\right)\vec{h} + \kappa'\vec{a}, \vec{u} \right\rangle = 0,$$

olup, $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = x$ ve $\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \cos\varphi$ olduğu göz önüne alınırsa, son eşitlikten

$$x = \frac{\left(1+\kappa^2\right)\cos\varphi}{\kappa'}, \tag{2.22}$$

elde edilir. (2.21) ve (2.22) denklemlerinde x değerleri birbirine eşitlenirse

$$\frac{\kappa'}{\left(1+\kappa^2\right)^{3/2}} = \cot\varphi,$$

olup, bu ifadenin integralinden, c reel bir sabit olmak üzere

$$\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} = \cot\varphi\left(s_1 + c\right), \tag{2.23}$$

bulunur. $s_1 \to s_1 - c$ parametre değişimi sayesinde c sabiti kolayca elenebilir. Böylece (2.23) ifadesi

$$\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} = \left(\cot\varphi\right)s_1,$$

halini alır. Son ifadeden κ yalnız bırakılırsa istenen sonuca ulaşılır.

Tersine,

$$\kappa = \pm \frac{s_1}{\sqrt{\left|\tan^2 \varphi - s_1^2\right|}}, \tag{2.24}$$

olsun. κ ve x zıt işaretli kabul edilmek üzere

$$x = \mp \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1+\kappa^2}} = \mp \cos \varphi \sqrt{\left|\tan^2 \varphi - s_1^2\right|} \tag{2.25}$$

olarak alalım. Bu durumda

$$\kappa x = -s_1 \cos \varphi, \tag{2.26}$$

bulunur. Şimdi,

$$\vec{u} = -\kappa x \vec{q} + \cos \varphi \vec{h} - x \vec{a}, \tag{2.27}$$

vektörü göz önüne alınsın. $\vec{u}$ vektörünün $\vec{h}$ ile sabit açı yaptığı açıktır. Yani,

$$\left\langle \vec{h}, \vec{u} \right\rangle = \cos \varphi = \text{sabit},$$

olur. Diğer yandan, (2.25) ve (2.26) eşitlikleri (2.27) denkleminde yazılırsa, (2.27) ifadesi

$$\vec{u} = \cos \varphi \left(s_1 \vec{q} + \vec{h} \pm \sqrt{\left|\tan^2 \varphi - s_1^2\right|} \vec{a} \right),$$

halini alır ve bu ifadenin türevinden $\vec{u}' = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $\vec{u}$ vektörü sabit olup S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

2.3. a-slant Regle Yüzeyler

Tanım 2.3.1. S yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $\vec{c}(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s, boğaz çizgisinin yay uzunluğu parametresi olmak üzere, S yüzeyi

$$\vec{r}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \qquad \left\| \vec{q}(s) \right\| = 1,$$

parametrizasyonuyla verilsin. $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$, sırasıyla, S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, $\vec{u}$ birim ve sıfır olmayan sabit bir vektör olmak üzere, yüzeyin $\vec{a}$ merkez teğet vektörü ile $\vec{u}$ vektörü sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{a},\, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0,$$

ise, S regle yüzeyine a-slant regle yüzey denir.

q-slant ve h-slant regle yüzeylerdeki gibi, bir a-slant regle yüzeyde yüzeyin $\vec{a}$ merkez teğet vektörleri birim kürenin merkezine bağlanırsa, bu vektörlerin uç noktaları, sezgisel olarak, küre üzerinde bir çember ya da çember yayı çizerler.

Sonuç 2.1.1'den görüldüğü üzere, S yüzeyinin a-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır. Dolayısıyla q-slant regle yüzeyler için verilen karakterizasyonlar a-slant regle yüzeyler için de geçerlidir.

S_1 ve S_2 iki regle yüzey, $\{\vec{q}_1,\, \vec{h}_1,\, \vec{a}_1\}$ ve $\{\vec{q}_2,\, \vec{h}_2,\, \vec{a}_2\}$, sırasıyla, bu regle yüzeylerin Frenet çatıları olsunlar. Eğer $\vec{h}_1 = \vec{h}_2$ ise S_1 ve S_2 yüzeylerine Bertrand ofsetleri denir [14]. Eğer $\vec{a}_1 = \vec{h}_2$ ise S_2 yüzeyi S_1 yüzeyinin Mannheim ofseti olarak adlandırılır [10]. Bu durumda, S_1 ve S_2 Mannheim ofsetleri adını alırlar. Bu bilgiler göz önüne alındığında aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 2.3.1. S_1 yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_1 yüzeyinin Bertrand ofsetleri bir h-slant regle yüzey ailesi oluşturur.

Sonuç 2.3.2. *S_1 ve S_2 Mannheim ofsetleri olsunlar. Bu takdirde, S_1 yüzeyinin q-slant (a slant) regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_2 yüzeyinin h-slant regle yüzey olmasıdır.*

2.4. Örnekler

Örnek 2.4.1. S regle yüzeyi,

$$\vec{r}(s,v)=\left(\frac{1}{3}(1+s)^{3/2}+v\frac{1}{2}(1+s)^{1/2},\ \frac{1}{3}(1-s)^{3/2}-v\frac{1}{2}(1-s)^{1/2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}s+v\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

parametrizasyonu ile verilsin. $\det(\vec{q}',\vec{q}'',\vec{q}''')=0$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, Sonuç 2.1.3'ten S yüzeyi q-slant regle yüzeydir. q-slant regle yüzeyler aynı zamanda a-slant regle yüzey olduklarından, S yüzeyi aynı zamanda bir a-slant regle yüzeydir. Bu yüzeyin grafiği Şekil 2.1 ile verilmiştir.

Örnek 2.4.2. S regle yüzeyi,

$$\begin{aligned}
r_1(s,v)&=\frac{25}{612}\sin(18s)-\frac{9}{1700}\sin(50s)+v\left[\frac{50}{68}\cos(18s)-\frac{18}{68}\cos(50s)\right],\\
r_2(s,v)&=-\frac{25}{612}\cos(18s)+\frac{9}{1700}\cos(50s)+v\left[\frac{50}{68}\sin(18s)-\frac{18}{68}\sin(50s)\right],\\
r_3(s,v)&=\frac{15}{272}\sin(16s)+v\frac{15}{17}\cos(16s),
\end{aligned}$$

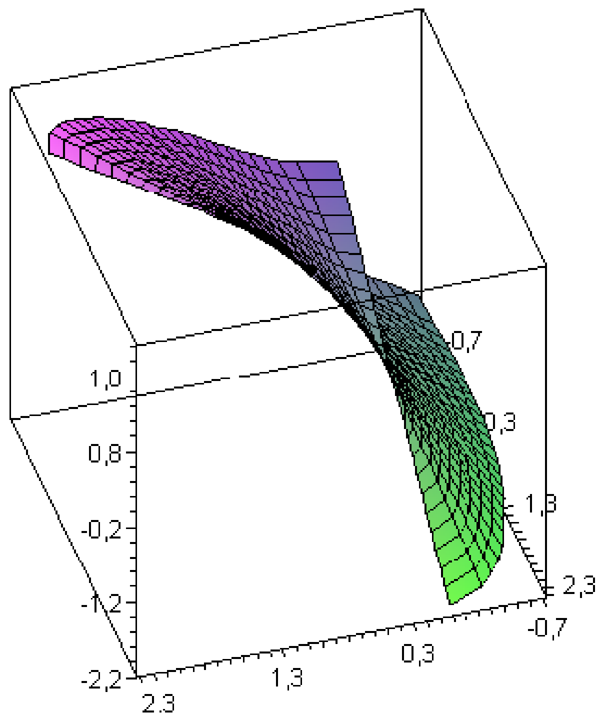
olmak üzere,

$$\vec{r}(s,v)=(r_1,\ r_2,\ r_3),$$

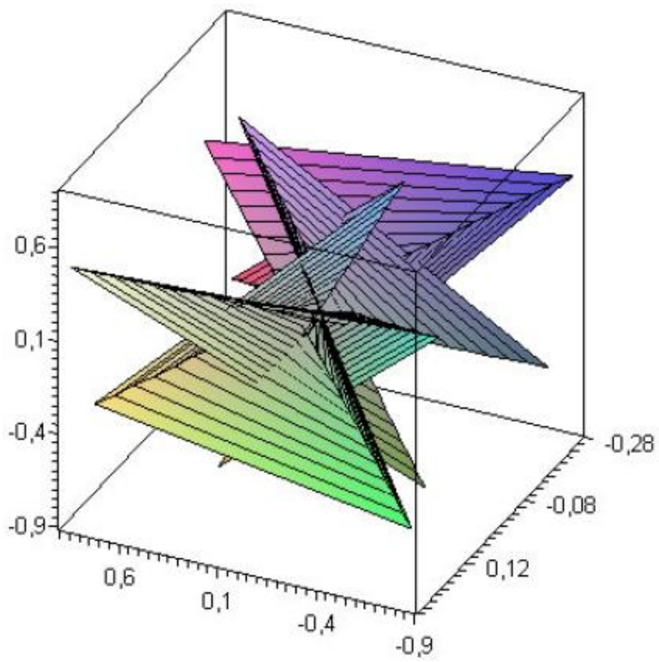
şeklinde verilsin. Buradan $\kappa=\cot(16s)$ olup, Teorem 2.2.1 gereğince

$$\frac{\kappa'}{\left(1+\kappa^2\right)^{3/2}}=-16=\text{sabit},$$

bulunur. Dolayısıyla, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir. Bu yüzeyin grafiği Şekil 2.2 ile verilmiştir.



Şekil 2.1



Şekil 2.2

III. BÖLÜM

DARBOUX SLANT REGLE YÜZEYLER

Slant helislerin bir özel türü Darboux slant helislerdir. Bu eğriler ilk defa Zıplar, Şenol ve Yaylı tarafından tanımlanmıştır [17]. Bu bölümde Darboux helis kavramı regle yüzeylere uyarlanmış ve bu yüzeyler Darboux slant regle yüzeyler olarak adlandırılmıştır. Birinci bölümden bilindiği üzere, Frenet çatısı $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ ve konisel eğriliği κ olan bir S regle yüzeyinin Darboux vektörü $\vec{W} = \kappa\vec{q} + \vec{a}$ şeklindedir. Bu vektör dikkate alınarak Darboux slant regle yüzeyler aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1. S yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. $\vec{c}(s)$, S yüzeyinin boğaz çizgisi ve s, boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere, S yüzeyi

$$\vec{r}(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{q}(s), \quad \|\vec{q}(s)\| = 1,$$

parametrizasyonuyla verilsin. $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ ve $\kappa \neq 0$, sırasıyla, S yüzeyinin Frenet çatısı ve konisel eğrilik fonksiyonu olsun. Bu takdirde, $\vec{u}$ birim ve sıfırdan farklı bir sabit vektör olmak üzere, yüzeyin $\vec{W}$ Darboux vektörü ve $\vec{u}$ vektörü sabit açı yapıyorsa, yani

$$\langle \vec{W},\, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0,$$

ifadesi sağlanıyorsa, S yüzeyine Darboux slant regle yüzey denir.

Teorem 3.1. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S yüzeyi Darboux slant regle yüzeyse κ sabittir.*

İspat: S yüzeyi, Darboux slant regle yüzey olsun. Tanım 3.1'den, $\vec{u}$ birim ve sabit bir vektör olmak üzere

$$\langle \vec{W},\, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0, \tag{3.1}$$

olur. (3.1) ifadesinin türevi alınırsa, $\vec{u}$ sabit olduğundan

$$\langle \vec{W}',\, \vec{u} \rangle = 0, \tag{3.2}$$

olup, (1.12) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa (3.2) eşitliğinden

$$\kappa' \langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = 0,$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

$$\begin{cases} \kappa = \text{sabit}, \\ \langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = 0. \end{cases}$$

Eğer $\langle \vec{q},\, \vec{u} \rangle = 0$ ise, bu takdirde, $\vec{u}$ vektörü $\vec{q}$ vektörüne dik olacağından, $a_1 = a_1(s_1)$ ve $a_2 = a_2(s_1)$ fonksiyonları s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere, $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = a_1 \vec{h} + a_2 \vec{a}, \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) eşitliğinin türevi alınır ve (1.12) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$-a_1 \vec{q} + (a_1' - \kappa a_2)\vec{h} + (a_2' + \kappa a_1)\vec{a} = 0 \tag{3.4}$$

bulunur. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısının vektörleri lineer bağımsız olduğundan, (3.4) eşitliğinden aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_1' - \kappa a_2 = 0, \\ a_2' + \kappa a_1 = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

$\kappa \neq 0$ olduğundan, (3.5) sisteminden $a_1 = a_2 = 0$ bulunur ve bu da $\vec{u} = 0$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\langle \vec{q}, \vec{u} \rangle \neq 0$ olup, $\kappa = \text{sabit}$ bulunur.

Teorem 3.1'in tersi aşağıdaki özel durumda sağlanır:

Sonuç 3.1. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa = \text{sabit} \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S regle yüzeyinin Darboux slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{W}$ ile $\vec{u}$ vektörleri arasındaki ϕ açısının sıfırdan farklı ve sabit bir açı olmasıdır.*

İspat: S Darboux slant regle yüzey olsun. Böylece, Tanım 3.1.1'den $\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0$ olur. $\vec{W}$ ile $\vec{u}$ vektörleri arasındaki açı ϕ olmak üzere, iç çarpım tanımından

$$\|\vec{W}\| \|\vec{u}\| \cos\phi = \langle \vec{W}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0, \tag{3.6}$$

bulunur. $\vec{u}$ birim vektör olduğundan $\|\vec{u}\| = 1$ ve $\|\vec{W}\| = \sqrt{1+\kappa^2}$ olup, $\kappa = \text{sabit} \neq 0$ olduğundan, (3.6) eşitliğinden, x sıfırdan farklı reel bir sabit olmak üzere

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{1+\kappa^2}} = \text{sabit},$$

elde edilir. Böylece ϕ açısı sabittir.

Tersine, $\vec{W}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin arasındaki ϕ açısı sabit olsun. Bu takdirde, $\|\vec{u}\| = 1$ olmak üzere iç çarpım tanımından

$$\cos\phi = \frac{\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle}{\sqrt{1+\kappa^2}} = \text{sabit} \neq 0,$$

elde edilir. $\kappa = \text{sabit} \neq 0$ olduğundan, son eşitlikten, $\langle \vec{W}, \vec{u} \rangle = \text{sabit}$ bulunur. Böylece S regle yüzeyi Darboux slant regle yüzeydir.

Bu sonuca ek olarak, Teorem 3.1'den aşağıdaki sonuçlar da elde edilir:

Sonuç 3.2. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S Darboux slant regle yüzeyse $\det(\vec{W}, \vec{W}', \vec{W}'') = 0$ olur.*

İspat: Darboux vektörünün türevleri alınır ve (1.12) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \kappa\vec{q} + \vec{a}, \\ \vec{W}' &= \kappa'\vec{q}, \\ \vec{W}'' &= \kappa''\vec{q} + \kappa'\vec{h}, \end{aligned}$$

olup, $\det(\vec{W}, \vec{W}', \vec{W}'') = (\kappa')^2$ bulunur. S yüzeyi Darboux slant regle yüzeyse, Teorem 3.1'den $\kappa = \text{sabit}$ olduğundan, $\kappa' = 0$ olur ve $\det(\vec{W}, \vec{W}', \vec{W}'') = 0$ elde edilir.

Sonuç 3.3. *$\kappa \neq 0$ olmak üzere her Darboux slant regle yüzey aynı zamanda bir q-slant regle yüzeydir.*

İspat: S yüzeyi Darboux slant regle yüzey olsun. Teorem 3.1 gereğince $\kappa = \text{sabit}$ olur ve Sonuç 2.1.2'den $\kappa = \text{sabit}$ ise q-slant regle yüzey olduğundan, S Darboux slant regle yüzeyi aynı zamanda bir q-slant regle yüzeydir.

Teorem 3.2. *Eğer S bir h-slant regle yüzey ise aynı zamanda, aynı eksenli bir Darboux slant regle yüzey olamaz.*

İspat: S bir h-slant regle yüzey ve yüzeyin ekseni $\vec{u}$ olsun. Bu takdirde, Tanım 2.2.1'den

$$\langle \vec{h}, \vec{u} \rangle = \text{sabit} \neq 0,$$

eşitliği sağlanır. Bununla birlikte, Teorem 2.2.1'den bilindiği üzere h-slant regle yüzeyin ekseni,

$m=\frac{\kappa'}{\left(1+\kappa^2\right)^{3/2}}=\text{sabit}$ olmak üzere

$$\vec{u}=\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\vec{q}+m\vec{h}+\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\vec{a}, \tag{3.7}$$

ile verilir. (3.7) eşitliği ve $\vec{W}=\kappa\vec{q}+\vec{a}$ Darboux vektörü göz önüne alınırsa

$$\vec{u}=\frac{\vec{W}}{\left\|\vec{W}\right\|}+m\vec{h}, \tag{3.8}$$

elde edilir. Eğer (3.8) eşitliği Darboux vektörü ile iç çarpılırsa

$$\left\langle\vec{W},\vec{u}\right\rangle=\left\|\vec{W}\right\|=\sqrt{1+\kappa^2},$$

bulunur. Böylece, son eşitlikten, S , h-slant regle yüzeyinin aynı zamanda bir Darboux slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şartın $\kappa=\text{sabit}$ olması gerektiği görülür. Ancak $\kappa=\text{sabit}$ olursa, (3.7) eşitliğinden $\left\langle\vec{h},\,\vec{u}\right\rangle=m=0$ olur ve bu, Tanım 2.2.1 ile çelişir. Dolayısıyla, bir S h -slant regle yüzeyi aynı zamanda aynı eksenli bir Darboux slant regle yüzey olamaz.

IV. BÖLÜM

SLANT REGLE YÜZEYLERİN DİFERANSİYEL DENKLEM KARAKTERİZASYONLARI

Birinci bölümde, bir S regle yüzeyi alındığında, bu yüzeyin $\vec{q}$ anadoğruları birim çemberin merkezine taşınırsa bu vektörlerin uç noktalarının birim küre üzerinde regle yüzeyin küresel göstergesi denilen bir $\vec{k}_1$ eğrisi çizdiği ve bu eğrinin eğrilik fonksiyonunun κ, yay parametresinin ise s_1 olduğu söylenmiş, bu eğri ve $\vec{q}$ anadoğrularıyla tanımlı yönlü koninin Frenet türev formülleri (1.12) denklemleriyle verilmişti. Ayrıca bu çatıya regle yüzeyin yönlü konisinin Frenet çatısı denilmişti.

Bu bölümde bir S regle yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normalinin ve $\vec{a}$ merkez teğetinin çizdikleri regle yüzeyler dikkate alınacak olup, bu yüzeylerin küresel göstergeleri ile Frenet türev formülleri hesaplanacak ve S yüzeyinin türüyle bağlantılı olarak bu regle yüzeylerin slant regle yüzeyler olup olmadığının incelenebilmesi için diferansiyel denklem karakterizasyonları verilecektir.

Bir $S = S_q$ regle yüzeyinin yönlü konisinin Frenet çatısı $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$, konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa = \kappa_q$ ve yay uzunluğu parametresi $s_1 = s_q$ olsun. Böylece (1.12) ile verilen Frenet türev formülleri, $\kappa_q(s_q) = \left\| d\vec{a} / ds_q \right\|$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} d\vec{q} / ds_q \\ d\vec{h} / ds_q \\ d\vec{a} / ds_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_q \\ 0 & -\kappa_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{h} \\ \vec{a} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

halini alır. S_q regle yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normali ve $\vec{a}$ merkez teğeti tarafından çizilen regle yüzeyler S_h, S_a ve bu yüzeylerin küresel göstergelerinin yay parametreleri, sırasıyla, s_h, s_a, Frenet çatıları ve konisel eğrilik fonksiyonları da, sırasıyla, $\left\{\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h\right\}$, κ_h ve $\left\{\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a\right\}$, κ_a olsun. Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 4.1. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q ve S_h regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasındaki ilişki*

$$\kappa_h = \frac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}}, \tag{4.2}$$

şeklinde olup, S_h yüzeyinin yönlü konisinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_h / ds_h \\ d\vec{h}_h / ds_h \\ d\vec{a}_h / ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & -\kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_h \\ \vec{h}_h \\ \vec{a}_h \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

ile verilir.

İspat: $\vec{c}(s)$ eğrisi S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi ve s boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere, S_h regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}_h(s,v) = \vec{c}(s) + v\vec{h}(s), \quad \left\|\vec{h}(s)\right\| = 1,$$

şeklindedir. S_h regle yüzeyinin Frenet çatısı $\left\{\vec{q}_h, \vec{h}_h, \vec{a}_h\right\}$ olduğundan

$$\vec{q}_h = \vec{h}, \tag{4.4}$$

yazılabilir. (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri ve (4.4) eşitliği kullanılırsa, S_h regle yüzeyinin merkez normal vektörü

$$\vec{h}_h = \frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \frac{d\vec{q}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h} = \frac{d\vec{h}}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h} = (-\vec{q} + \kappa_q \vec{a})\frac{ds_q}{ds_h}, \tag{4.5}$$

şeklinde elde edilir. $\vec{h}_h$ vektörü birim olduğundan, (4.5) eşitliğinin normu alınırsa

$$\frac{ds_q}{ds_h} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}},$$

bulunur. Böylece (4.5) eşitliğinden

$$\vec{h}_h = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}(-\vec{q} + \kappa_q \vec{a}), \tag{4.6}$$

elde edilir. $\vec{q}_h = \vec{h}$ olduğundan, (4.6) eşitliğinden $\vec{a}_h$ merkez teğet vektörü

$$\vec{a}_h = \vec{q}_h \times \vec{h}_h = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}(\kappa_q \vec{q} + \vec{a}),$$

olur ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa_h = \left\| d\vec{a}_h / ds_h \right\|$ ile tanımlı olduğundan, son eşitlikten $\kappa_q' = \dfrac{d\kappa_q}{ds_q}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\kappa_h &= \left\| \frac{d\vec{a}_h}{ds_h} \right\| = \left\| \frac{d\vec{a}_h}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_h} \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{d}{ds_q}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}(\kappa_q \vec{q} + \vec{a}) \right) \right) \frac{1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}} \right\| \\
&= \left\| \frac{\kappa_q' \vec{q}\sqrt{1+\kappa_q^2} - \dfrac{\kappa_q \kappa_q'}{\sqrt{1+\kappa_q^2}}\left(\kappa_q \vec{q} + \vec{a}\right)}{1+\kappa_q^2} \frac{1}{\sqrt{1+\kappa_q^2}} \right\| \\
&= \frac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}},
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, S_h yüzeyinin yönlü konisinin Frenet türev formülleri ise, $\kappa_h = \dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_h / ds_h \\ d\vec{h}_h / ds_h \\ d\vec{a}_h / ds_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_h \\ 0 & -\kappa_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_h \\ \vec{h}_h \\ \vec{a}_h \end{bmatrix},$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.1'den aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.2. *S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.*

İspat: S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 2.2.1'den $\dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}} = \text{sabit}$ olur. Aynı zamanda, Teorem 4.1'den $\kappa_h = \dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}}$ olduğundan $\kappa_h = \text{sabit}$ bulunur ve Sonuç 2.1.2 gereğince $\kappa_h = \text{sabit}$ olduğundan S_h regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_h regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 2.1.2'den $\kappa_h = \text{sabit}$ olur. Teorem 4.1'den ise $\kappa_h = \dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}}$ olduğundan, $\dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}} = \text{sabit}$ olup Teorem 2.2.1 gereğince S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.3. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q ve S_a regle yüzeylerinin konisel eğrilik fonksiyonları arasındaki ilişki*

$$\kappa_a = \frac{1}{\kappa_q}, \tag{4.7}$$

şeklinde olup, S_a yüzeyinin yönlü konisinin Frenet türev formülleri

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a / ds_a \\ d\vec{h}_a / ds_a \\ d\vec{a}_a / ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & -\kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

ile verilir.

İspat: $\vec{c}(s)$ eğrisi S_q regle yüzeyinin boğaz çizgisi ve s boğaz çizgisinin yay parametresi olmak üzere, S_a regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}_a(s,v) = \vec{c}(s) + v\,\vec{a}(s), \quad \|\vec{a}(s)\| = 1,$$

şeklindedir. S_a regle yüzeyinin Frenet çatısı $\{\vec{q}_a, \vec{h}_a, \vec{a}_a\}$ olduğundan

$$\vec{q}_a = \vec{a}, \tag{4.9}$$

yazılabilir. (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri ve (4.9) eşitliği kullanılırsa, S_a regle yüzeyinin merkez normal vektörü

$$\vec{h}_a = \frac{d\vec{q}_a}{ds_a} = \frac{d\vec{q}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a} = \frac{d\vec{a}}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a} = -\kappa_q \vec{h}\frac{ds_q}{ds_a}, \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir. $\vec{h}_a$ vektörü birim olduğundan (4.10) eşitliğinin normu alınırsa

$$\frac{ds_q}{ds_a} = \frac{1}{\kappa_q},$$

bulunur. Böylece (4.10) eşitliğinden $\vec{h}_a = -\vec{h}$ elde edilir. $\vec{a}_a$ merkez normal vektörü ise

$$\vec{a}_a = \vec{q}_a \times \vec{h}_a = \vec{a} \times \left(-\vec{h}\right) = \vec{q},$$

olur ve konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa_h = \|d\vec{a}_h / ds_h\|$ ile tanımlı olduğundan, son eşitlikten

$$\kappa_a = \left\|\frac{d\vec{a}_a}{ds_a}\right\| = \left\|\frac{d\vec{a}_a}{ds_q}\frac{ds_q}{ds_a}\right\| = \left\|\frac{d\vec{q}}{ds_q}\frac{1}{\kappa_q}\right\| = \left\|\vec{h}\frac{1}{\kappa_q}\right\| = \frac{1}{\kappa_q},$$

bulunur. Buradan, S_a yüzeyinin yönlü konisinin Frenet türev formülleri ise, $\kappa_a = \dfrac{1}{\kappa_q}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} d\vec{q}_a / ds_a \\ d\vec{h}_a / ds_a \\ d\vec{a}_a / ds_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_a \\ 0 & -\kappa_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{q}_a \\ \vec{h}_a \\ \vec{a}_a \end{bmatrix},$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3'ten aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.4. *S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olmasıdır.*

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 2.1.2'den $\kappa_q = \text{sabit}$ olur. Teorem 4.3'ten $\kappa_a = \dfrac{1}{\kappa_q}$ olduğundan ise $\kappa_a = \text{sabit}$ olur ve dolayısıyla Sonuç 2.1.2'den S_a regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Tersine, S_a regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. Sonuç 2.1.2'den $\kappa_a = \text{sabit}$ olur. Teorem 4.3'ten $\kappa_a = \dfrac{1}{\kappa_q}$ olduğundan ise $\kappa_q = \text{sabit}$ olur ve dolayısıyla Sonuç 2.1.2'den S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.5. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{ \vec{q}, \vec{h}, \vec{a} \right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{q}' = d\vec{q} / ds_q$, $\vec{q}''' = d^3\vec{q} / ds_q^3$ olmak üzere, $\vec{q}$ vektörünün*

$$\vec{q}''' + (1+\kappa_q^2)\vec{q}' = 0, \qquad (4.11)$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. (4.1) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{q}' = \vec{h},$$

ifadesinin s_q yay parametresine göre iki kez türevi alınırsa, sırasıyla,

$$\vec{q}'' = \vec{h}' = -\vec{q} + \kappa_q \vec{a},$$

ve

$$\vec{q}''' = -\vec{h} + \kappa_q' \vec{a} - \kappa_q^2 \vec{h}, \tag{4.12}$$

elde edilir. S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Sonuç 2.1.2'den $\kappa_q = \text{sabit}$ olup $\kappa_q' = 0$ bulunur. Böylece (4.12) eşitliğinden

$$\vec{q}''' + (1 + \kappa_q^2)\vec{q}' = 0,$$

bulunur.

Tersine, (4.11) denklemi sağlansın. (4.1) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}' = -\vec{q} + \kappa_q \vec{a}, \tag{4.13}$$

olup, $\kappa_q \neq 0$ olduğundan, (4.13) eşitliğinden

$$\vec{a} = \frac{1}{\kappa_q}(\vec{h}' + \vec{q}),$$

olur. Bu ifadenin s_q yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\vec{a}' = \frac{1}{\kappa_q}\left(\vec{h}'' + \vec{q}'\right) - \frac{\kappa_q'}{\kappa_q^2}\left(\vec{h}' + \vec{q}\right), \tag{4.14}$$

bulunur. (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri ve (4.11) denklemi kullanılırsa, $\vec{q}'' = \vec{h}'$ ve $\vec{q}''' = \vec{h}''$ olduğundan, (4.14) denkleminden

$$-\kappa_q \vec{h} = \frac{1}{\kappa_q}\left(-\left(1 + \kappa_q^2\right)\vec{q}' + \vec{q}'\right) - \frac{\kappa_q'}{\kappa_q^2}\left(\vec{q}'' + \vec{q}\right),$$

olup, bu ifade düzenlenirse

$$\frac{\kappa_q'}{\kappa_q}\vec{a}=0,$$

elde edilir. Buradan, $\kappa_q'=0$ olup, $\kappa_q=\text{sabit}$ bulunur. Böylece, Sonuç 2.1.2'den S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.6. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q\neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{h}''=d^2\vec{h}/ds_q^2$ olmak üzere, $\vec{h}$ vektörünün*

$$\vec{h}''+(1+\kappa_q^2)\vec{h}=0, \tag{4.15}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. (4.1) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}'=-\vec{q}+\kappa_q\vec{a},$$

dır. Bu eşitliğin s_q yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{h}''=-\vec{h}+\kappa_q'\vec{a}-\kappa_q^2\vec{h}, \tag{4.16}$$

elde edilir. S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Sonuç 2.1.2'den $\kappa_q=\text{sabit}$ olup $\kappa_q'=0$ bulunur. Böylece (4.16) eşitliğinden

$$\vec{h}''+(1+\kappa_q^2)\vec{h}=0,$$

bulunur.

Tersine, (4.15) denklemi sağlansın. (4.1) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}'=-\vec{q}+\kappa_q\vec{a},$$

eşitliği sağlanır. Bu ifadenin s_q yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{q}' = -\vec{h}'' + \kappa_q' \vec{a} - \kappa_q^2 \vec{h}, \tag{4.17}$$

bulunur. Bulunan (4.17) denkleminde, (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri ve (4.15) kullanılırsa $\kappa_q' \vec{a} = 0$ olup, buradan $\kappa_q' = 0$ elde edilir. Böylece $\kappa_q = \text{sabit}$ sonucuna ulaşılır ve Sonuç 2.1.2'den S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.7. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}''' = d^3\vec{a} / ds_q^3$ olmak üzere, $\vec{a}$ vektörünün*

$$\vec{a}''' + (1 + \kappa_q^2)\vec{a}' = 0 \tag{4.18}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. (4.1) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{a}' = -\kappa_q \vec{h}, \tag{4.19}$$

dır. Aynı zamanda, S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Sonuç 2.1.2'den $\kappa_q = \text{sabit}$ olup $\kappa_q' = 0$ bulunur. Dolayısıyla, (4.19) eşitliğinin s_q yay uzunluğu parametresine göre iki kez türevi alınır ve (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{a}''' + (1 + \kappa_q^2)\vec{a}' = 0,$$

elde edilir.

Tersine, (4.18) denklemi sağlansın. (4.1) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{a}' = -\kappa_q \vec{h},$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğin s_q yay uzunluğu parametresine göre iki kez türevi alınır ve (4.1) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{a}'' = -\kappa_q' \vec{h} + \kappa_q \vec{q} - \kappa_q^2 \vec{a},$$

ve

$$\vec{a}''' = -\kappa_q''\vec{h} - \kappa_q'\vec{q} - \kappa_q\kappa_q'\vec{a} + \kappa_q'\vec{q} + \kappa_q\vec{q} - 2\kappa_q\kappa_q'\vec{a} - \kappa_q^2\vec{a}',$$

olup, gerekli sadeleştirmeler yapılır ve (4.18) denklemi kullanılırsa

$$2\kappa_q'\vec{q} - \kappa_q''\vec{h} - 3\kappa_q\kappa_q'\vec{a} = 0, \tag{4.20}$$

elde edilir. $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan

$$2\kappa_q' = 0, \ \kappa_q'' = 0, \ 3\kappa_q\kappa_q' = 0,$$

bulunur. $\kappa_q \neq 0$ olduğundan bu üç eşitlikten $\kappa_q = \text{sabit}$ sonucuna ulaşılır. Böylece, Sonuç 2.1.2'den S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Aşağıdaki teoremlerde, S_q regle yüzeyinin diferansiyel denklem karakterizasyonları S_h ve S_a regle yüzeylerinin Frenet vektörleri kullanılarak verilmiştir.

Teorem 4.8. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h regle yüzeyinin $\vec{q}_h$ vektörünün,*

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (1+\kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0, \tag{4.21}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, Teorem 2.2.1'den $\dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}}$ fonksiyonu sabit bir fonksiyondur ve $\kappa_h = \dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}}$ olduğundan $\kappa_h = \text{sabit}$ bulunur. (4.3) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h,$$

olup, bu ifadenin s_h yay uzunluğu parametresine göre iki kez türevi alınır ve (4.3) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa, $\kappa_h = \text{sabit}$ olduğundan

$$\frac{d^2\vec{q}_h}{ds_h^2} = -\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a},$$

olur. Son ifadenin s_h yay uzunluğu parametresine göre tekrar türevi alınır ve düzenlenirse

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} + (1+\kappa_h^2)\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = 0,$$

elde edilir.

Tersine, (4.21) denklemi sağlansın. (4.3) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} = \vec{h}_h,$$

olup, bu ifadenin s_h yay uzunluğu parametresine göre iki kez türevi alınırsa

$$\frac{d^3\vec{q}_h}{ds_h^3} = -\frac{d\vec{q}_h}{ds_h} + \frac{d\kappa_h}{ds_h}\vec{a} - \kappa_h^2 \frac{d\vec{q}_h}{ds_h}$$

bulunur. (4.21) denklemi son ifadede yerine yazılırsa $\kappa_h' \vec{a}_h = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece $\kappa_h = \text{sabit}$ olup, $\kappa_h = \dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}}$ olduğundan $\dfrac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}} = \text{sabit}$ elde edilir. Dolaysıyla, Teorem 2.2.1'den, S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.9. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı, $\left\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h regle yüzeyinin $\vec{h}_h$ vektörünün*

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (1+\kappa_h^2)\vec{h}_h = 0, \tag{4.22}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. (4.3) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = -\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h,$$

dır. Bu eşitliğin s_h yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = -\vec{h}_h + \frac{d\kappa_h}{ds_h}\vec{a}_h - \kappa_h^2 \vec{h}_h, \tag{4.23}$$

bulunur. S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan, Teorem 2.2.1 ve Teorem 4.1'den

$$\kappa_h = \frac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}} = \text{sabit},$$

ve dolayısıyla $d\kappa_h / ds_h = 0$ olup, (4.23) denkleminden

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (1+\kappa_h^2)\vec{h}_h = 0,$$

elde edilir.

Tersine, (4.22) denklemi sağlansın. (4.3) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_h}{ds_h} = -\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h,$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin s_h yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} = -\vec{h}_h + \frac{d\kappa_h}{ds_h}\vec{a}_h - \kappa_h^2 \vec{h}_h, \tag{4.24}$$

bulunur. (4.22) ifadesi (4.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d\kappa_h}{ds_h}\vec{a}_h = 0,$$

elde edilir ve buradan $\kappa_h = \text{sabit}$ sonucuna ulaşılır. Böylece, Teorem 4.1 ve Teorem 2.2.1'den S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.9 ve Sonuç 2.1.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.1. *S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart, S_h regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonu κ_h olmak üzere, $\dfrac{d^2\vec{h}_h}{ds_h^2} + (1+\kappa_h^2)\vec{h}_h = 0$ diferansiyel denkleminin sağlanmasıdır.*

Teorem 4.10. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{ \vec{q}, \vec{h}, \vec{a} \right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_h regle yüzeyinin $\vec{a}_h$ vektörünün*

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (1+\kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0 \tag{4.25}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzey olsun. (4.3) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = -\kappa_h \vec{h}_h,$$

olur. Bu ifadenin s_h yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} = -\frac{d\kappa_h}{ds_h}\vec{h}_h - \kappa_h\left(-\vec{q}_h + \kappa_h \vec{a}_h\right), \tag{4.26}$$

elde edilir. S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan, Teorem 2.2.1 ve Teorem 4.1.1'den

$$\kappa_h = \frac{\kappa_q'}{\left(1+\kappa_q^2\right)^{3/2}} = \text{sabit},$$

ve dolayısıyla $d\kappa_h / ds_h = 0$ olup, (4.26) denklemi

$$\frac{d^2\vec{a}_h}{ds_h^2} = -\kappa_h\left(-\vec{q}_h + \kappa_h\vec{a}_h\right),$$

halini alır. Bu ifadenin s_h yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve $d\kappa_h / ds_h = 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa, istenilen

$$\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3} + (1+\kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = 0,$$

diferansiyel denklemine ulaşılır.

Tersine, (4.25) denklemi sağlansın. (4.3) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_h}{ds_h} = -\kappa_h\vec{h}_h,$$

olup, bu eşitliğin her iki yanının s_h yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve (4.25) denklemi kullanılırsa

$$\kappa_h\vec{h}_h = 2\frac{d\kappa_h}{ds_h}\vec{q}_h + \left(\kappa_h - \frac{d^2\kappa_h}{ds_h^2}\right)\vec{h}_h - 3\kappa_h\frac{d\kappa_h}{ds_h}\vec{a}_h, \tag{4.27}$$

bulunur. $\left\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısının vektörleri lineer bağımsız olduğundan (4.27) denkleminden

$$\frac{d\kappa_h}{ds_h} = 0,\ \kappa_h\frac{d\kappa_h}{ds_h} = 0,\ \frac{d^2\kappa_h}{ds_h^2} = 0,$$

olup, buradan $\kappa_h = \text{sabit}$ elde edilir. Böylece, Sonuç 2.2.1 ve Teorem 4.1'den S_q regle yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

Teorem 2.2.1 ve Teorem 4.10'dan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2. *S_h regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart, S_h regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonu κ_h olmak üzere, $\frac{d^3\vec{a}_h}{ds_h^3}+(1+\kappa_h^2)\frac{d\vec{a}_h}{ds_h}=0$ diferansiyel denkleminin sağlanmasıdır.*

Teorem 4.11. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{\vec{q},\, \vec{h},\, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a regle yüzeyinin $\vec{q}_a$ vektörünün*

$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3}+(1+\kappa_a^2)\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}=0, \tag{4.28}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. (4.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}=\vec{h}_a,$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğin her iki tarafının s_a yay uzunluğu parametresine göre iki kez türevi alınır ve (4.8) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3}=-\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}+\frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{a}_a-\kappa_a^2\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}, \tag{4.29}$$

elde edilir. S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Sonuç 2.1.2 ve Teorem 4.3'ten $\kappa_a=\text{sabit}$ olup, $\frac{d\kappa_a}{ds_a}=0$ bulunur. Böylece, (4.29) denkleminden

$$\frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3}+(1+\kappa_a^2)\frac{d\vec{q}_a}{ds_a}=0,$$

elde edilir.

Tersine, (4.28) denklemi sağlansın. (4.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = -\vec{q}_a + \kappa_a \vec{a}_a,$$

olup, bu ifadenin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = \frac{d^3\vec{q}_a}{ds_a^3} = -\frac{d\vec{q}_a}{ds_a} - \kappa_a^2\vec{h}_a + \frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{a}_a, \tag{4.30}$$

bulunur. (4.28) denklemi (4.30) ifadesinde yerine yazılırsa, $d\kappa_a / ds_a = 0$ elde edilir. Böylece, $\kappa_a = \text{sabit}$ olup, S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.12. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında, $\left\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\right\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile verilen bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a regle yüzeyinin $\vec{h}_a$ vektörünün*

$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} + (1+\kappa_a^2)\vec{h}_a = 0, \tag{4.31}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. (4.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{h}_a}{ds_a} = -\vec{q}_a + \kappa_a \vec{a}_a,$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve (4.8) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2} = -\frac{d\vec{q}_a}{ds_{a\ a}} + \frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{a}_a - \kappa_a^2\vec{h}_a, \tag{4.32}$$

bulunur. S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Sonuç 2.1.2 ve Teorem 4.3'ten $\kappa_a = \text{sabit}$ olup, $\dfrac{d\kappa_a}{ds_a} = 0$ bulunur. Böylece, (4.32) denkleminden

$$\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2}+(1+\kappa_a^2)\vec{h}_a=0,$$

elde edilir.

Tersine, (4.31) denklemi sağlansın. (4.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{q}_a=\kappa_a\vec{a}_a-\frac{d\vec{h}_a}{ds_a},$$

olup, bu ifadenin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve (4.8) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\vec{h}_a=\frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{a}_a-\kappa_a^2\vec{h}_a-\frac{d^2\vec{h}_a}{ds_a^2},$$

olup, (4.31) eşitliği son ifadede yerine yazılırsa $\frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{a}_a=0$ ve dolayısıyla $\kappa_a=\text{sabit}$ bulunur. Böylece, S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

Teorem 4.13. *S_q yüzeyi, E^3 uzayında tanımlı, $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa_q\neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S_q regle yüzeyinin q-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart S_a regle yüzeyinin $\vec{a}_a$ vektörünün*

$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3}+(1+\kappa_a^2)\frac{d\vec{a}_a}{ds_a}=0, \tag{4.33}$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır.

İspat: S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olsun. (4.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a}=-\kappa_a\vec{h}_a,$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve (4.8) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\vec{a}_a}{ds_a^2} = -\frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{h}_a + \kappa_a\vec{q}_a - \kappa_a^2\vec{a}_a, \tag{4.34}$$

bulunur. S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Sonuç 2.1.2 ve Teorem 4.3'ten $\kappa_a = \text{sabit}$ olup, $\frac{d\kappa_a}{ds_a} = 0$ olur. Böylece (4.34) eşitliğinden

$$\frac{d^2\vec{a}_a}{ds_a^2} = \kappa_a\vec{q}_a - \kappa_a^2\vec{a}_a, \tag{4.35}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.35) ifadesinin s_a yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa $\frac{d\kappa_a}{ds_a} = 0$ olduğundan

$$\frac{d^3\vec{a}_a}{ds_a^3} + (1+\kappa_a^2)\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = 0,$$

bulunur.

Tersine, (4.31) denklemi sağlansın. (4.8) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\frac{d\vec{a}_a}{ds_a} = -\kappa_a\vec{h}_a,$$

eşitliği vardır. Bu ifadenin s_a yay uzunluğu parametresine göre iki kez türevi alınır ve (4.33) kullanılırsa

$$\kappa_a\vec{h}_a = 2\frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{q}_a + \left(\kappa_a - \frac{d^2\kappa_a}{ds_a^2}\right)\vec{h}_a - 3\kappa_a\frac{d\kappa_a}{ds_a}\vec{a}_a, \tag{4.36}$$

bulunur. Frenet çatısının vektörleri lineer bağımsız olduğundan (4.36) ifadesinden

$$\frac{d\kappa_a}{ds_a} = 0, \quad \kappa_a\frac{d\kappa_a}{ds_a} = 0, \quad \frac{d^2\kappa_a}{ds_a^2} = 0,$$

olup, buradan $\frac{d\kappa_a}{ds_a} = 0$ ve böylece $\kappa_a = \text{sabit}$ elde edilir. Bu takdirde, Sonuç 2.1.2 ve Teorem 4.3'ten S_q regle yüzeyi q-slant regle yüzeydir.

V. BÖLÜM

AÇILABİLİR SLANT REGLE YÜZEYLERİN KONUM VEKTÖRLERİ

Bu bölümde, açılabilir q -slant ve h -slant regle yüzeylerin konum vektörleriyle ilgili teoremler verilecektir. Kısım 1.3'te regle yüzeyler verilirken, açılabilir regle yüzeylerden bahsedilmiş ve açılabilir bir regle yüzeyin boğaz çizgisinin teğetlerinin yüzeyin anadoğrularına karşılık geldiği (1.7) eşitliği ile verilmişti.

Açılabilir bir S regle yüzeyinin boğaz çizgisi, yüzeyin yönlü konisinin yay uzunluğu parametresine bağlı olarak verilsin. Yani, $\vec{c}=\vec{c}(s_1)$ olsun. Boğaz çizgisinin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa, $f(s_1)=\dfrac{ds}{ds_1}$ ve $\dfrac{d\vec{c}}{ds}=\vec{q}$ olmak üzere, zincir kuralından

$$\frac{d\vec{c}}{ds_1}=f(s_1)\vec{q}(s_1), \tag{5.1}$$

elde edilir. Bu eşitlik dikkate alınarak, açılabilir slant regle yüzeylerin konum vektörleri iki alt başlık halinde aşağıdaki gibi incelenebilir.

5.1. Açılabilir q -slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Teorem 5.1.1. *S regle yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa\neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı açılabilir bir q -slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, s_1 yay uzunluğu* *parametresine göre* S *regle yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü,* c_1, c_2 *reel sabitler,* $f(s_1) = \dfrac{ds}{ds_1}$ *ve*

$$
\begin{aligned}
z(s_1) = {} & c_1 \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\, s_1\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\, s_1\right) \\
& + \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \Bigg[\left(\int \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\, s_1\right) \left(\int f(s_1) ds_1 \right) ds_1 \right) \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\, s_1\right) \\
& \qquad - \left(\int \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\, s_1\right) \left(\int f(s_1) ds_1 \right) ds_1 \right) \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\, s_1\right) \Bigg],
\end{aligned}
$$

olmak üzere

$$
\vec{c}(s_1) = \left(\kappa z(s_1) + \frac{z''(s_1)}{\kappa} \right) \vec{q}(s_1) - \frac{z'(s_1)}{\kappa} \vec{h}(s_1) + z(s_1)\vec{a}(s_1), \tag{5.2}
$$

ile verilir.

İspat: $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısının vektörleri lineer bağımsız olduklarından, s_1 yay uzunluğu parametresine göre S yüzeyinin boğaz çizgisi, $x(s_1)$, $y(s_1)$ ve $z(s_1)$, s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere

$$
\vec{c}(s_1) = x(s_1)\vec{q}(s_1) + y(s_1)\vec{h}(s_1) + z(s_1)\vec{a}(s_1), \tag{5.3}
$$

şeklinde yazılabilir. S açılabilir regle yüzey olduğundan, $\vec{c}'(s_1) = d\vec{c} / ds_1$ olmak üzere, (5.1) eşitliğinden

$$
\vec{c}'(s_1) = f(s_1)\vec{q}(s_1), \tag{5.4}
$$

olduğunu biliyoruz. (5.3) denkleminin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve (5.4) eşitliği kullanılırsa, $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ Frenet çatısının vektörleri lineer bağımsız olduğundan, aşağıdaki sisteme ulaşılır:

$$
\begin{cases}
x' - y - f = 0, \\
x + y' - z\kappa = 0, \\
y\kappa + z' = 0.
\end{cases} \tag{5.5}
$$

(5.5) sisteminin üçüncü denkleminden

$$y=-\frac{z'}{\kappa}, \tag{5.6}$$

olduğu açıkça görülür. (5.6) eşitliğinin türevi alınır ve elde edilen sonuç (5.5) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$x=z\kappa+\left(\frac{z'}{\kappa}\right)', \tag{5.7}$$

bulunur. Elde edilen (5.6) ve (5.7) denklemleri (5.5) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(z\kappa+\left(\frac{z'}{\kappa}\right)'\right)'+\frac{z'}{\kappa}=f, \tag{5.8}$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. S regle yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, Sonuç 2.1.2'den κ fonksiyonu sabittir. Böylece, (5.8) eşitliği

$$z'''+(1+\kappa^2)z'=\kappa f, \tag{5.9}$$

halini alır ve (5.9) denkleminin integralinden

$$z''+(1+\kappa^2)z=\kappa\int f\,ds_1, \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.10) diferansiyel denkleminin genel çözümü, c_1, c_2 reel sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} z(s_1)&=c_1\cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)+c_2\sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)\\ &+\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left[\left(\int\cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)\left(\int f(s_1)ds_1\right)ds_1\right)\sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)\right.\\ &\left.-\left(\int\sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)\left(\int f(s_1)ds_1\right)ds_1\right)\cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}s_1\right)\right], \end{aligned} \tag{5.11}$$

şeklindedir. Diğer yandan, (5.6) ve (5.7) eşitlikleri (5.3) eşitliğinde yerine yazılırsa, istenilen

$$\vec{c}(s_1)=\left(\kappa z(s_1)+\frac{z''(s_1)}{\kappa}\right)\vec{q}(s_1)-\frac{z'(s_1)}{\kappa}\vec{h}(s_1)+z(s_1)\vec{a}(s_1),$$

denklemi elde edilmiş olur.

Teorem 5.1.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.1.1. S *regle yüzeyi* E^3 *uzayında,* $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ *Frenet çatısı ve* $\kappa \neq 0$ *konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı açılabilir bir* q*-slant regle yüzey, olsun. Bu takdirde,* $z(s_1)$ *fonksiyonu (5.11) eşitliği ile tanımlı olmak üzere,* S *regle yüzeyinin parametrizasyonu Frenet vektörlerine göre*

$$\vec{r}\left(s_1, v\right) = \left(\kappa z(s_1) + \frac{z''(s_1)}{\kappa} + v\right)\vec{q}(s_1) - \frac{z'(s_1)}{\kappa}\vec{h}(s_1) + z(s_1)\vec{a}(s_1),$$

ile verilir.

Sonuç 5.1.2. *Eğer* $z(s_1) = \text{sabit}$ *ise, bu takdirde, yüzeyin konum vektörü yüzeyin* $\vec{W}$ *Darboux vektörüyle lineer bağımlıdır.*

İspat: Teorem 5.1.1'den

$$\vec{c}(s_1) = \left(\kappa z(s_1) + \frac{z''(s_1)}{\kappa}\right)\vec{q}(s_1) - \frac{z'(s_1)}{\kappa}\vec{h}(s_1) + z(s_1)\vec{a}(s_1), \tag{5.12}$$

olur. $z(s_1) = \text{sabit}$ olsun. Bu takdirde, $z = m = \text{sabit}$ alınırsa, (5.12) eşitliği

$$\vec{c}(s_1) = m\left(\kappa\vec{q}(s_1) + \vec{a}(s_1)\right) = m\vec{W}, \tag{5.13}$$

halini alır. Böylece, yüzeyin parametrizasyonu

$$\vec{r}(s_1, v) = (m\kappa + v)\vec{q}(s_1) + m\vec{a}(s_1) = m\vec{W} + v\vec{q},$$

şeklinde olup, buradan S yüzeyinin konum vektörünün $\vec{q}$ ve $\vec{a}$ vektörleri tarafından gerilen düzlemde kaldığı açıktır.

Lemma 5.1.1. S *yüzeyi* E^3 *uzayında* $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ *Frenet çatısı ve* $\kappa \neq 0$ *konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde,* S *regle yüzeyinin anadoğruları*

$$\kappa\vec{q}''' - \kappa'\vec{q}'' + \kappa(1+\kappa^2)\vec{q}' - \kappa'\vec{q} = 0, \tag{5.14}$$

ile verilen üçüncü mertebeden diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: (1.12) ile verilen Frenet türev formüllerinden $\vec{q}' = \vec{h}$ dır. Bu eşitliğin, s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$a = \frac{1}{\kappa}(\vec{q}'' + \vec{q}), \tag{5.15}$$

bulunur. Benzer şekilde, (5.15) ifadesinin s_1 yay uzunluğu parametresine göre türevi alınır ve Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$-\kappa\vec{q}' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}(\vec{q}'' + \vec{q}) + \frac{1}{\kappa}(\vec{q}''' + \vec{q}'),$$

olup, bu ifade düzenlenirse

$$\kappa\vec{q}''' - \kappa'\vec{q}'' + \kappa(1+\kappa^2)\vec{q}' - \kappa'\vec{q} = 0,$$

elde edilmiş olur.

Sonuç 5.1.3. *S yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı açılabilir bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S regle yüzeyinin boğaz çizgisi*

$$\kappa\left(\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)}\right)''' - \kappa'\left(\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)}\right)'' + \kappa(1+\kappa^2)\left(\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)}\right)' - \kappa'\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)} = 0, \tag{5.16}$$

ile verilen dördüncü mertebeden diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: Lemma 5.1.1'den bir regle yüzey için

$$\kappa\vec{q}''' - \kappa'\vec{q}'' + \kappa(1+\kappa^2)\vec{q}' - \kappa'\vec{q} = 0, \tag{5.17}$$

diferansiyel denklemi sağlanır. Diğer yandan, S yüzeyi açılabilir bir regle yüzey olduğundan, (5.1) eşitliğinden

$$\vec{q}(s_1) = \frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)}, \tag{5.18}$$

olup, (5.18) ifadesi (5.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\kappa\left(\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)}\right)''' - \kappa'\left(\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)}\right)'' + \kappa(1+\kappa^2)\left(\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)}\right)' - \kappa'\frac{\vec{c}'(s_1)}{f(s_1)} = 0,$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2. *S yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q},\vec{h},\vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı açılabilir q-slant bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, S yüzeyinin boğaz çizgisinin konum vektörü, s_1 yay uzunluğu parametresine göre*

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\Big(\int \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right) f(s_1)ds_1, \quad \int \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right) f(s_1)ds_1, \quad \kappa\int f(s_1)ds_1\Big), \tag{5.19}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi açılabilir q-slant regle yüzey olduğundan, (5.1) eşitliğinden ve Sonuç 2.1.2'den, sırasıyla, $\vec{c}'(s_1) = f(s_1)\vec{q}(s_1)$ ve κ fonksiyonu sabittir. Bu takdirde, (5.14) eşitliği

$$\vec{q}''' + (1+\kappa^2)\vec{q}' = 0, \tag{5.20}$$

halini alır. $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ vektörleri E^3 uzayının baz vektörleri olmak üzere, yüzeyin $\vec{q}$ anadoğruları

$$\vec{q} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3, \tag{5.21}$$

şeklinde yazılabilir. S yüzeyi q-slant regle yüzey olduğundan, $\vec{q}$ anadoğruları sabit bir doğrultuyla sabit açı yapar. Genelliği bozmadan, bu sabit doğrultuyu $\vec{e}_3$ olarak seçebiliriz. Böylece, θ açısı $\vec{q}$ ile $\vec{e}_3$ vektörleri arasındaki sabit açı ve $n \neq 0$ reel bir sabit olmak üzere olmak üzere

$$q_3 = \langle \vec{q}, \vec{e}_3 \rangle = \cos\theta = n = \text{sabit}, \tag{5.22}$$

bulunur. $\vec{q}$ vektörü birim olduğundan, (5.21) ve (5.22) eşitliklerinden

$$q_1^2 + q_2^2 = 1 - n^2 = \sin^2\theta, \tag{5.23}$$

elde edilir. Buradan, $t = t(s_1)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere, (5.23) denkleminin genel çözümü

$$q_1 = \sin\theta\cos\big(t(s_1)\big), \quad q_2 = \sin\theta\sin\big(t(s_1)\big), \tag{5.24}$$

şeklindedir. Bu takdirde, (5.24) ve (5.21) denklemlerinden

$$\vec{q} = \sin\theta\cos\big(t(s_1)\big)\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\big(t(s_1)\big)\vec{e}_2 + \cos\theta\vec{e}_3,$$

olur. s_1 parametresi, $\vec{q}$ vektörü tarafından çizilen $\vec{k}_1(s_1)$ küresel eğrisinin yay uzunluğu parametresi ve $\|\vec{q}'\| = 1$ olduğundan, son eşitliğin türevinin normu alınırsa $t'\sin\theta = 1$ elde edilir. Buradan, c reel bir sabit olmak üzere

$$t(s_1) = \frac{1}{\sin\theta}s_1 + c,$$

olup, $t \to t + c$ parametre değişimi sayesinde c reel sabiti elenir ve

$$t(s_1) = \frac{1}{\sin\theta}s_1, \tag{5.25}$$

bulunur. Diğer yandan, $\vec{q}$ vektörünün bileşenleri (5.20) diferansiyel denklemini sağlarlar. Böylece, (5.24) eşitlikleri (5.20) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{cases} \left[t''' - (t')^3 + \left(1+\kappa^2\right)t'\right]\sin t + (3t''t')\cos t = 0, \\ -\left[t''' - (t')^3 + \left(1+\kappa^2\right)t'\right]\cos t + (3t''t')\sin t = 0, \end{cases} \tag{5.26}$$

sistemi elde edilir ve bu sistem

$$\begin{cases} t''t' = 0, \\ t''' - (t')^3 + \left(1+\kappa^2\right)t' = 0, \end{cases} \tag{5.27}$$

haline indirgenebilir. t sabit olmadığından dolayı, d_1 ve d_2 reel sabitler olmak üzere (5.27) sisteminin birinci denkleminin genel çözümü

$$t(s_1) = d_1 s_1 + d_2, \tag{5.28}$$

ile verilir. $t \to t + d_2$ parametre değişimi yapılarak d_2 sabiti elenir ve (5.28) denklemi

$$t(s_1) = d_1 s_1, \tag{5.29}$$

halini alır. (5.29) eşitliği (5.27) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$d_1 = \sqrt{1+\kappa^2}, \tag{5.30}$$

bulunur. Bununla birlikte, (5.29), (5.30) ve (5.25) eşitlikleri kullanılarak $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece, $\vec{q}$ vektörünün parametrizasyonu

$$\vec{q}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right),\ \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right),\ \kappa\right),$$

şeklindedir. S yüzeyi açılabilir olduğundan, (5.1) eşitliğinden $\vec{c}\,'(s_1) = f(s_1)\vec{q}(s_1)$ olup son eşitlikten

$$\vec{c}(s_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\int \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right) f(s_1)ds_1,\ \int \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right) f(s_1)ds_1,\ \kappa\int f(s_1)ds_1\right),$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.1.4. *S yüzeyi, E^3 uzayında, $\{\vec{q},\ \vec{h},\ \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı açılabilir bir q-slant regle yüzey olsun. Bu takdirde, $g(s_1) = \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right)$ ve $h(s_1) = \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right)$ olmak üzere, S yüzeyinin s_1 yay uzunluğu parametresine göre parametrizasyonu,*

$$\vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\int (fg)ds_1 + vg,\ \int (fh)ds_1 + vh,\ \left(\int f ds_1 + v\right)\kappa\right), \tag{5.31}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi açılabilir q-slant bir regle yüzey olsun. Teorem 5.1.2'den

$$\begin{cases} \vec{q}(s_1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right),\ \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right),\ \kappa\right), \\ \\ \vec{c}(s_1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\int \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right) f(s_1)ds_1,\right. \\ \qquad\qquad \left.\int \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right) f(s_1)ds_1,\ \kappa\int f(s_1)ds_1\right). \end{cases} \tag{5.32}$$

olup, S yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(s_1, v) = c(s_1) + v\vec{q}(s_1), \tag{5.33}$$

şeklinde verildiğine göre, (5.32) eşitlikleri (5.33)'te yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\Big[& \int f(s_1)\cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right)ds_1 + v\cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right), \\ & \int f(s_1)\sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right)ds_1 + v\sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right), \\ & \kappa\int f(s_1)ds_1 + v\kappa\Big]. \end{aligned} \tag{5.34}$$

bulunur. $g(s_1) = \cos\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right)$ ve $h(s_1) = \sin\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,s_1\right)$ alınırsa, (5.34) ifadesinden

$$\vec{r}(s_1, v) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\int (fg)ds_1 + vg,\ \int (fh)ds_1 + vh,\ \left(\int fds_1 + v\right)\kappa\right),$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.5. *S yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı açılabilir q -slant bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, m integrasyon sabiti olmak üzere, S yüzeyinin parametrizasyonu, s yay uzunluğu parametresine göre*

$$\vec{r}(s, v) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\int gds + vg,\ \int hds + vh,\ (s+m+v)\kappa\right),$$

şeklindedir.

İspat: $f = \dfrac{ds}{ds_1}$ olduğundan, (3.31) denkleminden, istenilen sonuç kolayca elde edilir.

(5.31) denkleminde, κ konisel eğrilik fonksiyonuna ve $f(s_1)$ fonksiyonuna özel değerler verilerek aşağıdaki q -slant regle yüzey örnekleri elde edilebilir.

Örnek 5.1.1. Konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa=\sqrt{3}$ ve $f=2$ olan S regle yüzeyi göz önüne alınsın. $c_1,\ c_2, c_3$ integral sabitleri olmak üzere, $\vec{e}_3$ eksenli, açılabilir q -slant regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}\left(s_1,v\right)=\left(\frac{1}{2}\sin(2s_1)+c_1+\frac{1}{2}v\cos\left(2s_1\right),\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\cos\left(2s_1\right)+c_2+\frac{1}{2}v\sin(2s_1),\ \sqrt{3}s_1+c_3+\frac{1}{2}v\sqrt{3}\right),$$

şeklindedir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 5.1 ile verilmiştir.

Örnek 5.1.2. $\kappa=2\sqrt{2}$ ve $f=3$ alınırsa, $d_1,\ d_2, d_3$ integral sabitleri olmak üzere, $\vec{e}_3$ eksenli, açılabilir q -slant regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}\left(s_1,v\right)=\left(\frac{1}{3}\sin(3s_1)+d_1+\frac{1}{3}v\cos\left(3s_1\right),\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cos\left(3s_1\right)+d_2+\frac{1}{3}v\sin(3s_1),\ 2\sqrt{2}s_1+d_3+\frac{2\sqrt{2}}{3}v\right),$$

şeklindedir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 5.2 ile verilmiştir.

Örnek 5.1.3. $\kappa=1$ ve $f(s_1)=s_1^2$ alınırsa, $m_1,\ m_2, m_3$ integral sabitleri olmak üzere, $\vec{e}_3$ eksenli, açılabilir q -slant regle yüzeyinin parametrizasyonu

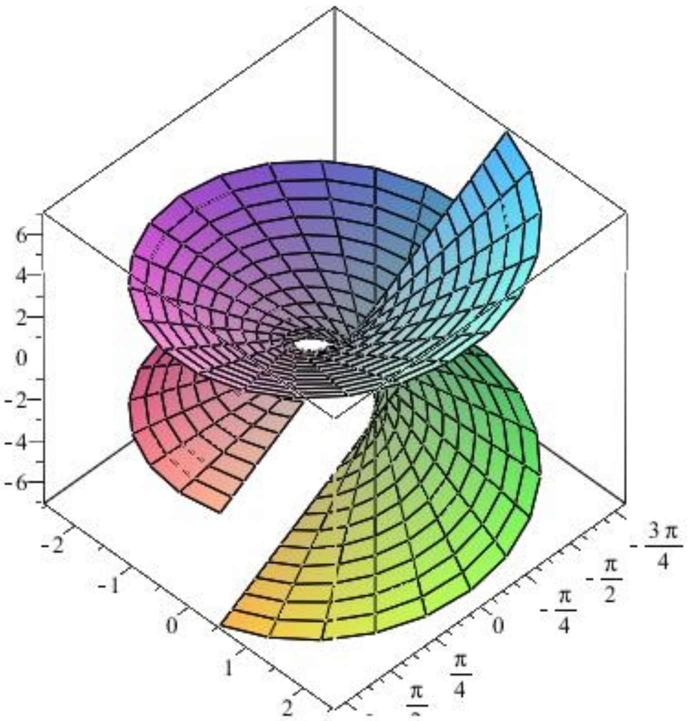
$$\vec{r}\left(s_1,v\right)=\left(\frac{1}{2}s_1^2\sin(\sqrt{2}s_1)-\frac{1}{2}\sin(\sqrt{2}s_1)+\frac{1}{2}\sqrt{2}s_1\cos(\sqrt{2}s_1)+m_1+\frac{1}{2}v\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}s_1),\right.$$
$$-\frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}s_1)s_1^2+\frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}s_1)+\frac{1}{2}\sqrt{2}s_1\sin(\sqrt{2}s_1)+m_2+\frac{1}{2}v\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}s_1),$$
$$\left.\frac{1}{6}\sqrt{2}s_1^3+m_3+\frac{1}{2}v\sqrt{2}\right),$$

şeklindedir ve bu yüzeyin grafiği Şekil 5.3 ile verilmiştir.

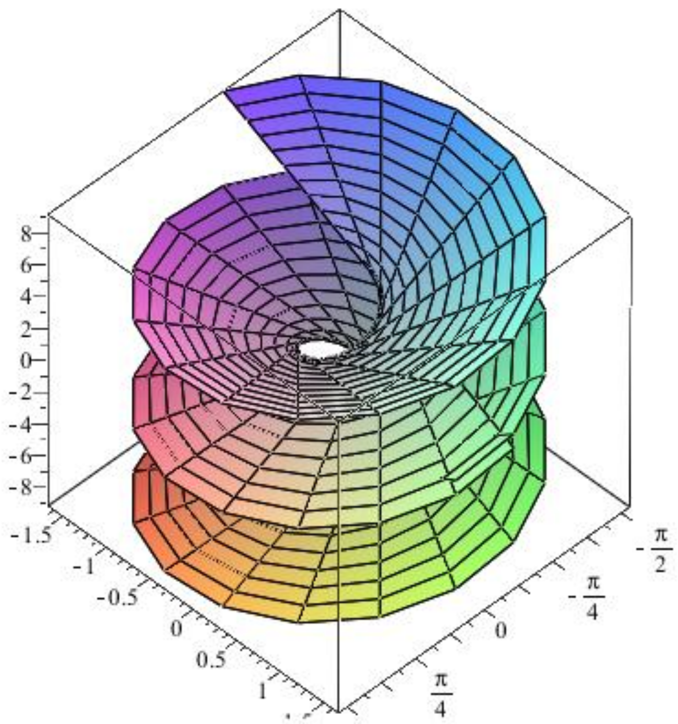
Örnek 5.1.4. Konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa=2$ ve $f(s_1)=e^{s_1}$ alınsın. Bu takdirde, $n_1,\ n_2,n_3$ integral sabitleri olmak üzere, $\vec{e}_3$ eksenli, açılabilir q-slant regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}\left(s_1,v\right)=\left(\frac{1}{30}\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}s_1)e^{s_1}+\frac{1}{6}\sin(\sqrt{5}s_1)e^{s_1}+n_1+\frac{\sqrt{5}}{5}v\cos(\sqrt{5}s_1),\right.$$
$$-\frac{1}{6}\cos(\sqrt{5}s_1)e^{s_1}+\frac{1}{30}\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}s_1)e^{s_1}+n_2+\frac{\sqrt{5}}{5}v\sin(\sqrt{5}s_1),$$
$$\left.\frac{2}{5}\sqrt{5}e^{s_1}+n_3+\frac{2\sqrt{5}}{5}v\right),$$

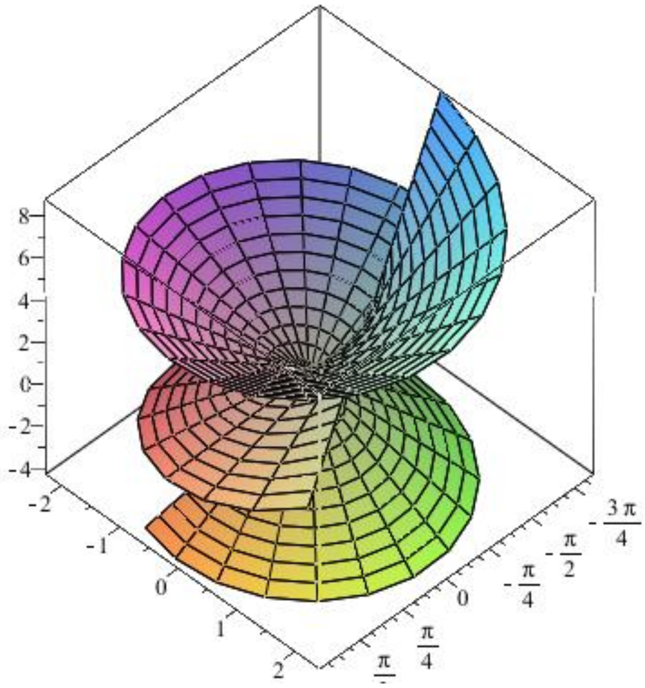
şeklinde olup, bu yüzeyin grafiği Şekil 5.4 ile verilmiştir.



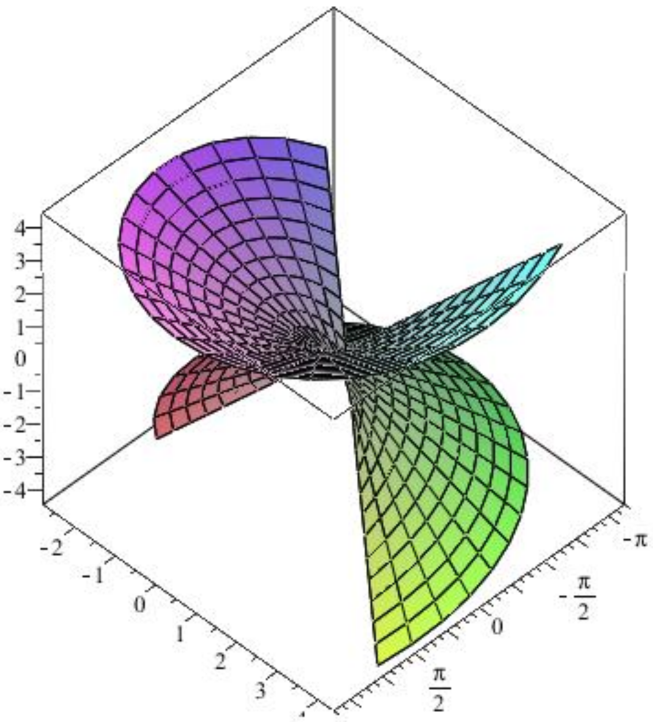
Şekil 5.1



Şekil 5.2



Şekil 5.3



Şekil 5.4

5.2. Açılabilir h-slant Regle Yüzeylerin Konum Vektörleri

Bu bölümde, h-slant regle yüzeylerle ve açılabilir h-slant regle yüzeylerin konum vektörleriyle ilgili karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 5.2.1. *S yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, s_1 yay uzunluğu parametresine göre S yüzeyinin $\vec{h}$ merkez normal vektörü*

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + \left(1+\kappa^2\right)\vec{h}\right)\right]' + \vec{h} = 0, \tag{5.35}$$

ile verilen üçüncü mertebeden diferansiyel denklemi sağlar.

İspat: S yüzeyi E^3 uzayında tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, (1.12) ile verilen Frenet türev formüllerinden

$$\vec{h}' = -\vec{q} + \kappa\vec{a}, \tag{5.36}$$

dir. (5.36) eşitliğinin s_1 parametresine göre türevi alınırsa

$$\vec{a} = \frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + \left(1+\kappa^2\right)\vec{h}\right),$$

bulunur. Bulunan bu denklemin tekrar s_1 parametresine göre türevi alınır ve (1.12) ile verilen Frenet türev formülleri kullanılırsa

$$\frac{1}{\kappa}\left[\frac{1}{\kappa'}\left(\vec{h}'' + \left(1+\kappa^2\right)\vec{h}\right)\right]' + \vec{h} = 0,$$

elde edilir.

Teorem 5.2.2. *S yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, birim ve sabit bir $\vec{u}$ vektörü ve $\vec{h}$ merkez* *normal vektörü arasındaki sabit açı φ olmak üzere, S yüzeyinin h-slant regle yüzey olması için gerek ve yeter şart*

$$\kappa = \pm \frac{\cot\varphi \, \mathrm{s}_1}{\sqrt{\left|1-\left(\cot^2\varphi\right)\mathrm{s}_1^2\right|}}, \tag{5.37}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 2.2.2'den

$$\kappa = \pm \frac{s_1}{\sqrt{\left|\tan^2\varphi - s_1^2\right|}},$$

olup, paydadaki kökün içi $\tan^2\varphi$ parantezine alınırsa, (5.37) bulunur.

Tersine, (5.37) ifadesi sağlansın. $\vec{u}$ vektörü

$$\vec{u} = \cos\varphi\left(s_1\vec{q} + \vec{h} \pm \frac{\sqrt{\left|1-\left(\cot^2\varphi\right)\mathrm{s}_1^2\right|}}{\cot\varphi}\vec{a} \right). \tag{5.38}$$

şeklinde tanımlansın. (5.38) denkleminden $\left\langle \vec{h}, \vec{u} \right\rangle = \mathrm{sabit}$ olduğu açıktır. Bununla birlikte, (5.38) eşitliğinin türevi alınır ve (1.12) ile Frenet türev formülleri kullanılırsa, $\vec{u}' = 0$ olup, buradan, $\vec{u} = \mathrm{sabit}$ elde edilir. Böylece, S yüzeyi h-slant regle yüzeydir.

Teorem 5.2.3. *S yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde, $f = ds/ds_1$, $\gamma = ds/dt$, n reel bir sabit ve φ açısı, birim ve sabit bir $\vec{u}$ vektörü ile $\vec{h}$ merkez normal vektörü arasındaki açı olmak üzere, S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzeyse, S yüzeyinin boğaz çizgisinin $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ konum vektörü*

$$\begin{cases} c_1 = \sin\varphi \int f\left[\int \cos\left[\sec\varphi \arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1\right]ds_1, \\ c_2 = \sin\varphi \int f\left[\int \sin\left[\sec\varphi \arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1\right]ds_1, \\ c_3 = \int f\left[\left(\cos\varphi\right)s_1 + n\right]ds_1, \end{cases}$$

ile, ya da parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = -\sin^2\varphi \int \gamma\left[\int \cos t \sin\left(t\cos\varphi\right)dt\right]dt, \\ c_2 = -\sin^2\varphi \int \gamma\left[\int \sin t \sin\left(t\cos\varphi\right)dt\right]dt, \\ c_3 = \sin\varphi \int \gamma\left[\cos\left(t\cos\varphi\right) + n\right]dt, \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan, Teorem 5.2.2'den

$$\kappa = \pm\frac{\cot\varphi\, s_1}{\sqrt{\left|1-\left(\cot^2\varphi\right)s_1^2\right|}}. \tag{5.39}$$

olur. (5.39) eşitliği (5.35) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1-\left(\cot^2\varphi\right)s_1^2\right)\vec{h}''' - 3\left(\cot^2\varphi\right)s_1\vec{h}'' + \vec{h}' = 0. \tag{5.40}$$

elde edilir. Bununla birlikte, $h_1 = h_1(s_1),\ h_2 = h_2(s_1),\ h_3 = h_3(s_1)$ fonksiyonları s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere, $\vec{h}$ merkez normal vektörü

$$\vec{h} = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2 + h_3\vec{e}_3, \tag{5.41}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, S yüzeyi h-slant regle yüzey olduğundan, genelliği kaybetmeden $\vec{u}$ vektörü $\vec{e}_3$ ekseni olarak seçilsin. Böylece, $h_3 = \cos\varphi$ ve $\vec{h}$ birim vektör olduğundan

$$h_1^2 + h_2^2 = 1-\cos^2\varphi = \sin^2\varphi. \tag{5.42}$$

bulunur. Buradan, (5.42) denkleminin genel çözümü için $t = t(s_1)$ fonksiyonu s_1 yay uzunluğu parametresinin diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olmak üzere,

$$h_1 = \sin\varphi\cos t,\ \ h_2 = \sin\varphi\sin t,$$

yazılabilir. Bu takdirde, (5.41) denklemi

$$\vec{h} = \left(\sin\varphi\cos t,\ \sin\varphi\sin t,\ \cos\varphi\right) \tag{5.43}$$

halini alır ve $\vec{h}$ vektörü (5.40) denklemini sağladığından, $t = t(s_1)$ bağımlı değişkenine bağlı

$$\begin{cases} \left(\cot^2\varphi\right)s_1 t' - \left(1-\left(\cot^2\varphi\right)s_1^2\right)t'' = 0, \\ t' - \left(1-\left(\cot^2\varphi\right)s_1^2\right)\left[\left(t'\right)^3 - t'''\right] - 3\left(\cot^2\varphi\right)s_1 t'' = 0. \end{cases} \tag{5.44}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (5.44) sisteminin birinci denkleminin genel çözümü, $n_1,\ n_2$ reel sabitler olmak üzere

$$t(s_1) = n_2 + n_1 \arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right), \tag{5.45}$$

ya da

$$t(s_1) = n_2 + n_1 \arcsin\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right), \tag{5.46}$$

şeklindedir. $t \to t + n_2$ dönüşümü yapılırsa, n_2 sabiti denklemden elenir. (5.45) ya da (5.46) eşitlikleri (5.44) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$d_1 \cot\varphi\left(1+\cot^2\varphi\left(1-n_1^2\right)\right) = 0, \tag{5.47}$$

bulunur. $\cot\varphi \neq 0$ ve $n_1 \neq 0$ olduğundan, (5.47)'ten, $n_1 = \sec\varphi$ elde edilir. Böylece, (5.45) ve (5.46)

$$t(s_1) = \sec\varphi \arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right), \tag{5.48}$$

ve

$$t(s_1) = \sec\varphi \arcsin\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right), \tag{5.49}$$

halini alır. Buradan, (5.48) kullanılırsa, $\vec{h}$ merkez normal vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \sin\varphi\cos\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right], \\ h_2 = \sin\varphi\sin\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right], \\ h_3 = \cos\varphi, \end{cases} \tag{5.50}$$

şekline dönüşür ve benzer şekilde (5.49) kullanılırsa, $\vec{h}$ merkez normal vektörünün bileşenleri

$$\begin{cases} h_1 = \sin\varphi\cos\left[\sec\varphi\arcsin\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right], \\ h_2 = \sin\varphi\sin\left[\sec\varphi\arcsin\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right], \\ h_3 = \cos\varphi, \end{cases} \tag{5.51}$$

halini alır. (1.12) ile verilen Frenet türev formüllerinden $\vec{q}\,' = \vec{h}$ olup, (5.50)'nin integrali alınırsa

$$\begin{cases} q_1 = \sin\varphi\int\cos\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1, \\ q_2 = \sin\varphi\int\sin\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1, \\ q_3 = \left(\cos\varphi\right)s_1 + n, \end{cases} \tag{5.52}$$

bulunur. Burada n integrasyon sabitidir. Şimdi, S regle yüzeyi açılabilir olduğundan (5.1) eşitliğinden $c' = f\vec{q}$ olup, bu ifade (5.52)'de yerine yazılıp integral alınırsa

$$\begin{cases} c_1 = \sin\varphi\int f\left[\int\cos\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1\right]ds_1, \\ c_2 = \sin\varphi\int f\left[\int\sin\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1\right]ds_1, \\ c_3 = \int f\left[\left(\cos\varphi\right)s_1 + n\right]ds_1, \end{cases}$$

elde edilir. Parametre olarak $t(s_1) = \sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)$ seçilirse, istenilen parametrik denklem de bulunur ve ispat tamamlanır.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 5.2.1. *S yüzeyi E^3 uzayında, $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ Frenet çatısı ve $\kappa \neq 0$ konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. S yüzeyi açılabilir h-slant regle yüzeyse, bu takdirde $\vec{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$, $\vec{q} = \left(q_1, q_2, q_3\right)$,*

$$\begin{cases} c_1 = \sin\varphi\int f\left[\int\cos\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1\right]ds_1, \\ c_2 = \sin\varphi\int f\left[\int\sin\left[\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)\right]ds_1\right]ds_1, \\ c_3 = \int f\left[\left(\cos\varphi\right)s_1 + n\right]ds_1, \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = \sin\varphi \int \cos\left[\sec\varphi \arccos\left((\cot\varphi)s_1\right)\right] ds_1, \\ q_2 = \sin\varphi \int \sin\left[\sec\varphi \arccos\left((\cot\varphi)s_1\right)\right] ds_1, \\ q_3 = (\cos\varphi)s_1 + n, \end{cases}$$

olmak üzere, s_1 *yay uzunluğu parametresine göre* S *yüzeyinin parametrizasyonu*

$$\vec{r}(s_1, v) = \vec{c}(s_1) + v\vec{q}(s_1), \tag{5.53}$$

ile verilir.

Sonuç 5.2.2. S *yüzeyi* E^3 *uzayında,* $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ *Frenet çatısı ve* $\kappa \neq 0$ *konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun.* S *yüzeyi açılabilir* h*-slant regle yüzeyse, bu takdirde* $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$

$$\begin{cases} c_1 = -\sin^2\varphi \int \gamma \left[\int \cos t \sin(t\cos\varphi)\, dt\right] dt, \\ c_2 = -\sin^2\varphi \int \gamma \left[\int \sin t \sin(t\cos\varphi)\, dt\right] dt, \\ c_3 = \sin\varphi \int \gamma \left[\cos(t\cos\varphi) + n\right] dt, \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} q_1 = -\sin^2\varphi \int \cos t \sin(t\cos\varphi)\, ds_1, \\ q_2 = -\sin^2\varphi \int \sin t \sin(t\cos\varphi)\, ds_1, \\ q_3 = \sin\varphi \cos(t\cos\varphi) + n, \end{cases}$$

olmak üzere, t *parametresine göre* S *yüzeyinin parametrizasyonu*

$$\vec{r}(t, v) = \vec{c}(t) + v\vec{q}(t), \tag{5.54}$$

ile verilir.

Diğer yandan, (5.51) denklemlerinden aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 5.2.4. S *yüzeyi* E^3 *uzayında,* $\{\vec{q}, \vec{h}, \vec{a}\}$ *Frenet çatısı ve* $\kappa \neq 0$ *konisel eğrilik fonksiyonu ile tanımlı bir regle yüzey olsun. Bu takdirde,* $f = ds/ds_1$, $\gamma = ds/dt$, n *reel bir sabit ve birim ve sabit bir* $\vec{u}$ *vektörü ile* $\vec{h}$ *merkez normal vektörü arasındaki açı* φ *olmak üzere,* S *yüzeyi açılabilir* h*-slant regle yüzeyse,* S *yüzeyinin boğaz çizgisinin* $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *konum vektörü*

$$\begin{cases} c_1 = \sin\varphi \int f \left[\int \cos\left[\sec\varphi \arcsin\left((\cot\varphi) s_1 \right) \right] ds_1 \right] ds_1, \\ c_2 = \sin\varphi \int f \left[\int \sin\left[\sec\varphi \arcsin\left((\cot\varphi) s_1 \right) \right] ds_1 \right] ds_1, \\ c_3 = \int f \left[(\cos\varphi) s_1 + n \right] ds_1, \end{cases}$$

ile, ya da parametrik formda

$$\begin{cases} c_1 = \sin^2\varphi \int \gamma \left[\int \cos t \cos\left(t\cos\varphi \right) dt \right] dt, \\ c_2 = \sin^2\varphi \int \gamma \left[\int \sin t \cos\left(t\cos\varphi \right) dt \right] dt, \\ c_3 = \sin\varphi \int \gamma \left[\sin\left(t\cos\varphi \right) + n \right] dt, \end{cases}$$

ile verilir.

Sonuç 5.2.2'ye göre, κ konisel eğrilik fonksiyonuna ve γ fonksiyonuna özel değerler verilerek bazı açılabilir h-slant regle yüzey örnekleri aşağıdaki gibi verilebilir:

Örnek 5.2.1. Konisel eğrilik fonksiyonu $\kappa = \dfrac{s_1}{\sqrt{1-s_1^2}}$, $-1 < s_1 < 1$ ve $\gamma = 1$ değerlerine sahip olan S regle yüzeyi göz önüne alınsın. Bu takdirde,

$$r_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} + \frac{\sin\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} + v\left(-\frac{\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} - \frac{\cos\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} \right) \right),$$

$$r_2=\frac{1}{4}\left(\frac{\cos\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}-\frac{\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}+v\left(\frac{\sin\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}-\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)t\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}\right)\right),$$

$$r_3=\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}t\right)+v\sin(t)\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}t\right),$$

ve $t(s_1)=\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)$ olmak üzere, $\vec{e}_3$ eksenli açılabilir h-slant S regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(t,v)=(r_1,r_2,r_3),$$

şeklinde olup, S yüzeyinin grafiği Şekil 5.5 ile verilmiştir.

Örnek 5.2.2. $\kappa=\dfrac{\sqrt{3}s_1}{\sqrt{9-3s_1^2}}$, $-\sqrt{3}<s_1<\sqrt{3}$ ve $\gamma=t$ alınırsa, bu takdirde,

$$\begin{aligned}r_1=2t&\left(\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)^2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)+\frac{4}{9}\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)^3\\&-\frac{10}{3}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)-3t\sin\left(\frac{1}{2}t\right)+v\left(-\frac{1}{4}\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)-t+3-4v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_2=-2t&\left(-\frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)^2\cos\left(\frac{1}{2}t\right)-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)-\frac{4}{9}\left(\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)^3\\&-\frac{8}{3}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)+v\left(\frac{3}{4}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)-2t+1,\end{aligned}$$

$$r_3=\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(4\cos\left(\frac{1}{2}t\right)+2t\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)+v\sin(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)+2t-2-2v,$$

ve $t(s_1)=\sec\varphi\arccos\left(\left(\cot\varphi\right)s_1\right)$ olmak üzere, $\vec{e}_3$ eksenli açılabilir h-slant S regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(t,v)=(r_1,r_2,r_3),$$

şeklinde olup, S yüzeyinin grafiği Şekil 5.6 ile verilmiştir.

Örnek 5.2.3. Eğer $\kappa=\dfrac{\sqrt{3}s_1}{\sqrt{1-3s_1^2}}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<s_1<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ve $\gamma=e^t$ alınırsa, bu takdirde,

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^t\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\\
&-\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(\frac{\mathrm{e}^t\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}-\frac{\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^t\cos\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\\
&+\frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\sin\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(\frac{\mathrm{e}^t\cos\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}-\frac{\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\sin\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\right)\\
&+v\left(-\frac{1}{8}\frac{\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}-\frac{1}{8}\frac{\cos\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}+2t-1\right),
\end{aligned}
$$

$$r_2=\frac{1}{2}\frac{\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\cos\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^t\sin\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\cos\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}+\frac{\mathrm{e}^t\sin\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^t\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(\frac{\left(-1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}+\frac{\mathrm{e}^t\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2}\right)$$

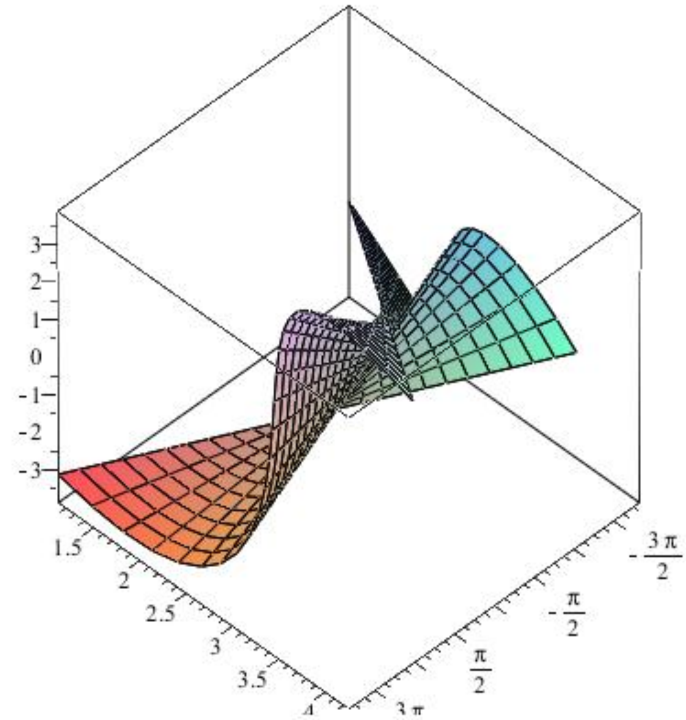
$$+v\left(\frac{1}{8}\frac{\sin\left(\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{-1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}-\frac{1}{8}\frac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)t\right)}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)+t,$$

$$r_3=\frac{2}{7}\mathrm{e}^t\cos\left(\frac{1}{2}t\sqrt{3}\right)+\frac{1}{7}\mathrm{e}^t\sin\left(\frac{1}{2}t\sqrt{3}\right)\sqrt{3}+v\sin(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\sqrt{3}\right),$$

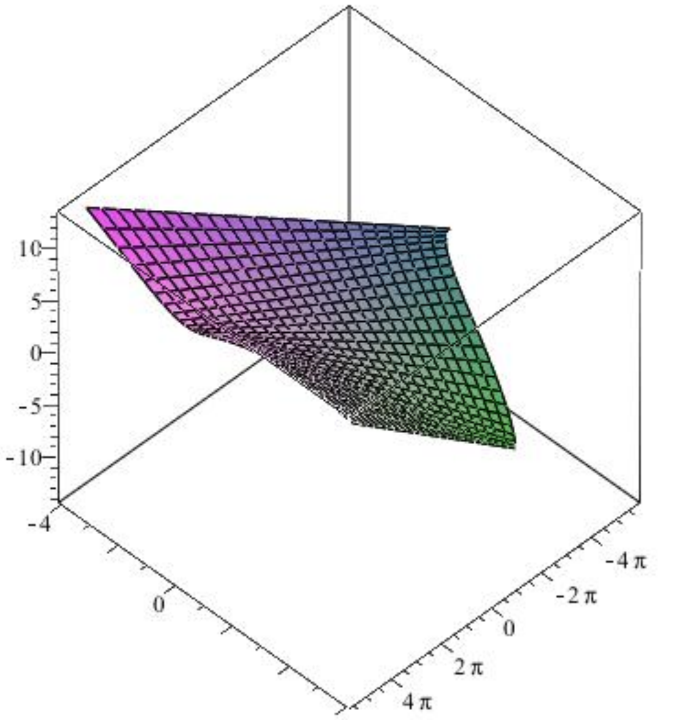
ve $t(s_1)=\sec\varphi\arccos\left((\cot\varphi)s_1\right)$ olmak üzere, $\vec{e}_3$ eksenli açılabilir h-slant S regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\vec{r}(t,v)=(r_1,r_2,r_3),$$

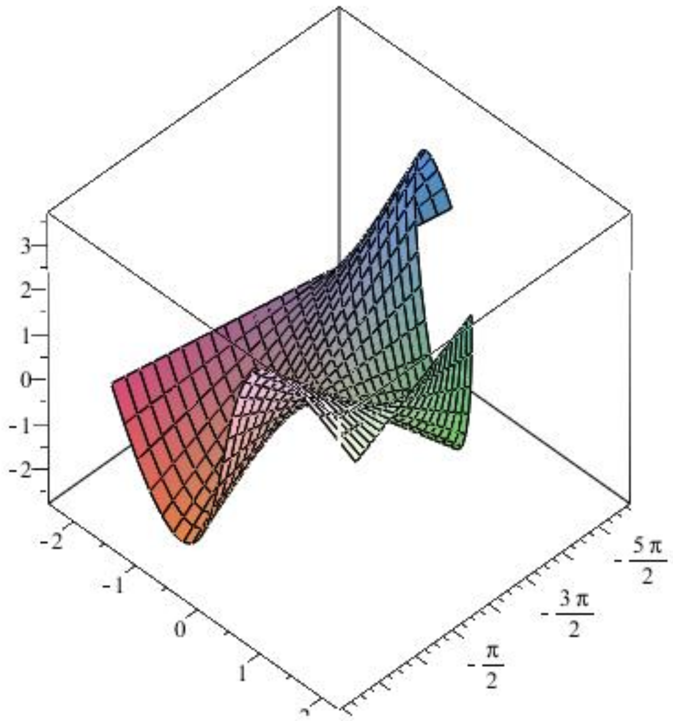
şeklinde olup, S yüzeyinin grafiği Şekil 5.7 ile verilmiştir.



Şekil 5.5



Şekil 5.6



Şekil 5.7

REFERANSLAR

[1] Ali, A.T., Position vectors of slant helices in Euclidean Space E^3, J of Egyptian Math Soc., 20(1), 1-6 (2012).

[2] Ali, A.T., Position Vectors of General Helices in Euclidean 3-space, Bulletin of Math. Analysis and App., 3(2), 198-205 (2011).

[3] Barros, M., General helices and a theorem of Lancret, Proc. Amer. Math., Soc. 125(5), 1503–1509 (1997).

[4] Hacısalihoğlu, H.H., Diferansiyel Geometri, Gazi Üni. Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi (1982).

[5] Izumiya, S., Takeuchi, N., New special curves and developable surfaces, Turk J Math., 28, 153–163 (2004).

[6] Karger, A., Novak, J., Space Kinematics and Lie Groups, Prague, Czechoslovakia STNL Publishers of Technical Lit. (1978).

[7] Kula, L.,Yaylı, Y., On slant helix and its spherical indicatrix, Appl Math Comput., 169, 600-607 (2005).

[8] Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y., İlarslan, K., Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space. Turk J Math., 33, 1–13 (2009).

[9] Monterde, J., Salkowski curves revisted: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion, Comp Aided Geo Design, 26, 271–278 (2009).

[10] Orbay, K., Kasap, E., Aydemir, I., Mannheim Offsets of Ruled Surfaces, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 160917 (2009).

[11] Önder, M., Kaya, O., Darboux Slant Ruled Surfaces, Azerbaijan Journal of Mathematics, 5(1), 64-72 (2015).

[12] Önder, M., Slant Ruled Surfaces in the Euclidean 3-space E^3, arXiv:1311.0627v1 [math.DG] (2013).

[13] Önder, M., Kaya, O., Characterizations of Slant Ruled Surfaces in the Euclidean 3-space, arXiv:1311:6928 [math.DG] (2013).

[14] Ravani, B., Ku, T. S., Bertrand Offsets of ruled and developable surfaces, Comp. Aided Geom. Design, 23(2), 145-152 (1991).

[15] Sabuncuoğlu, A., Diferansiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, 3. Baskı (2006).

[16] Struik, D.J., Lectures on Classical Differential Geometry, 2nd ed. Addison Wesley, Dover, (1988).

[17] Zıplar, E., Şenol, A., Yaylı, Y., On Darboux Helices in Eucledian 3-Space, Global J. of Science Frontier Research, 12(13), 73-80 (2012).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Onur KAYA

Ünvanı **:** Araştırma Görevlisi

Doğum Tarihi **:** 26.09.1988

Doğum Yeri **:** İZMİR

İlköğrenimini 2002 yılında Sadettin Tezcan İlköğretim Okulu'nda ve ortaöğrenimini 2006 yılında Mehmet Seyfi Eraltay Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde tamamladı. 2006 yılında girmiş olduğu Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde bir yıl öğrenim gördükten sonra yatay geçişle Ege Üniversitesi Matematik Bölümü'ne geçerek 2010 yılında lisans eğitimini bitirdi. Avrupa Gönüllü Hizmeti programı kapsamında bir yıl süreyle İspanya'da gönüllü olarak çalıştıktan sonra Türkiye'ye döndü. Askerlik hizmetini tamamladıktan sonra 2013 Ocak'ta Öğretim Üyesi Yetiştirme Programı ile Araştırma Görevlisi olarak Celal Bayar Üniversitesi Matematik Bölümü'ne atandı ve Matematik Anabilim Dalı, Geometri Programında lisansüstü öğrenimine başladı. 2013 yılından bu yana Celal Bayar Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.