

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİSİNİN
İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Reyhan CANATAN İLBAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

26.02.2014

İmza

Reyhan CANATAN İLBEY

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR LINEER POZİTİF OPERATÖR DİZİSİNİN İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Reyhan CANATAN İLBEY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu doktora tezi altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, genel olarak lineer pozitif operatörlerin tanımı ve özellikleri verilmiş ve operatörlerin yakınsaklık özelliklerinin incelenmesinde büyük öneme sahip Korovkin teoremi ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, klasik anlamda yakınsaklık özellikleri incelenmiş olan genelleştirilmiş bir lineer pozitif operatör dizisinin tanımı, önemi ve elde edilmiş bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiş ve önemi bir örnek ile açıklanmış ve ikinci bölümde tanıtılan operatörün istatistiksel yakınsaklık özelliklerine ait sonuçlar ve yaklaşım hızı ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu bölümde Voronovskaja tipli yaklaşım özellikleri de istatistiksel yakınsaklık kullanılarak elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, iki değişkenli genelleştirilmiş bir lineer pozitif operatör dizisi tanıtılıp istatistiksel yakınsaklık özellikleri ve yakınsaklık hızlarına ait sonuçlar elde edilmiş ve kısmi türevli denklemlere bir uygulaması verilmiştir.

Beşinci bölümde, birinci bölümde verilen operatörlere ilişkin direkt ve ters teoremler elde edilmiş ve Zygmund modülü ile yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar yer almaktadır.

Şubat 2014, 47 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer pozitif operatör, Korovkin teoremi, genelleştirilmiş lineer pozitif operatör, iki değişkenli lineer pozitif operatörler, süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli, Lipschitz tipli maksimal fonksiyon, Zygmund modülü

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

STATISTICAL APPROXIMATION PROPERTIES OF A GENERALIZED POSITIVE LINEAR OPERATOR

Reyhan CANATAN İLBEY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This Ph. D. thesis consists of six chapters.

In the first chapter, the definition of linear positive operators is given generally and the Korovkin theorem which has great value in investigation of approximation properties is given.

In the second chapter, the definition, importance and acquired characteristics of the operator which is generalized and investigated by means of classical is given.

In the third chapter, the concept of statistical approximation is given and its importance is explained with an example and the results of statistical approximation properties and rates of statistical convergence of the operator which was given in the second chapter is given in this chapter. In addition, Voronovskaja type approximation properties are also obtained by using statistical approximation in this chapter.

In the fourth chapter, a sequence of generalized bivariate positive linear operators is defined and its statistical approximation properties and the conclusions of the rates of convergence is obtained and an application to partial differential equations of the operators is given.

In the fifth chapter, direct and inverse theorems relating to the operators which was given in the first chapter is acquired and rates of convergence is computed by using Zygmund modulus.

In the last chapter, the conclusions which were obtained in the thesis feature.

February 2014, 47 pages

Key Words: Positive linear operator, Korovkin theorem, generalized positive linear operator, bivariate positive linear operator, modulus of continuity, Peetre's K -functional, Lipschitz type maximal function, Zygmund modulus.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında bana bilgileri, önerileri ve yönlendirmeleriyle destek veren saygıdeğer hocam, Sayın Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL'a (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), tezimin ana konusunu sağlayan desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hem akademik hem beşeri ilişkilerde bilgi ve tecrübesini paylaşan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ogün DOĞRU'ya (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi), bana daima inanan varlıklarıyla güç veren sevgili eşim, canım annem, babam ve kardeşime sonsuz saygılarımı, sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından '2211 Yurt İçi Doktora Burs Programı' ile desteklenmiştir.

Reyhan CANATAN İLBAY
Ankara, Şubat 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİSİ	3
2.1 Operatörün Yakınsaklık Özellikleri.....	4
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	7
3.1 İstatistiksel Yakınsaklık	7
3.2 İstatistiksel Yakınsaklık Özellikleri	8
3.3 İstatistiksel Yaklaşım Hızı.....	10
3.4 Voronovskaja Tipli Yaklaşım Özellikleri	13
4. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİSİ.....	20
4.1 Operatörün İnşası	20
4.2 İki Değişkenli Operatörün İstatistiksel Yakınsaklık Özellikleri	22
4.3 İki Değişkenli Operatörün İstatistiksel Yaklaşım Hızı.....	25
4.4 Kısmi Türevli Denklemlere Uygulama.....	27
5. DİREKT VE TERS TEOREMLER.....	30
5.1 Direkt ve Ters Teorem.....	30
5.2 Genelleştirilmiş Bir Lineer Pozitif Operatör Dizisi için Direkt ve Ters Teoremler.....	30
5.3 Yaklaşım Hızının Zygmund Modülü ile Hesaplanması.....	37
6. SONUÇ.....	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ.....	46

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli ve reel değerli fonksiyonlar cümlesi
$C^2[a, b]$	$g, g', g'' \in C[a, b]$ olan fonksiyon uzayı
$C_M[a, b]$	$[a, b]$ de sürekli ve tüm pozitif eksende sınırlı f fonksiyonlarının kümesi
$(f_n(x))$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$K(f; \delta)$	f fonksiyonunun Peetre-K fonksiyoneli
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar
$\tilde{\omega}_\alpha(f; x)$	α -yıncı basamaktan Lipschitz tipli maksimal fonksiyon
$(L_n(f; x))$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$	L_n operatör dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	$K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin yoğunluğu
$\psi_{n,k}$	$\psi_{n,k}(x) = L_n((t-x)^k; x); k = 0, 1, \dots$ k -yinci merkezi moment
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\ \cdot\ _{C[a,b]}$	$C[a, b]$ uzayında $\ \cdot\ = \max_{a \leq x \leq b} \cdot $ ile tanımlı norm
$\ \cdot\ _{C^2[a,b]}$	$\ g\ _{C^2[a,b]} = \ g\ _{C[a,b]} + \ g'\ _{C[a,b]} + \ g''\ _{C[a,b]}$ ile tanımlı norm
$(L_{n,m} f)$	İki değişkenli operatör dizisi
$\omega(f; \delta_1, \delta_2)$	İki değişkenli operatörler için süreklilik modülü
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun Zygmund modülü

1. GİRİŞ

Tanım ve değer kümesi fonksiyonlardan oluşan dönüşümlere operatör adı verilir.

Bir L lineer pozitif operatörü eğer,

α, β skaler ve f ve g birer fonksiyon olmak üzere,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

lineerlik ve,

$$f \geq 0 \text{ için } L(f) \geq 0$$

pozitiflik koşullarının her ikisini de gerçecliyorsa bu operatörlere lineer pozitif operatörler adı verilir.

Kolayca gösterilebilir ki lineer pozitif operatörler monoton artandır ve

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

dir.

Bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir ve bu uzayda tanımlı norm,

$$\|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

dir.

$\forall x \in [a, b]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a, b]} = 0$$

koşulunu sağlayan (f_n) fonksiyonlar dizisine $C[a, b]$ normunda f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.1 P. P. Korovkin Teoremi (1953): $f \in C[a, b]$ ve tüm reel eksen

$$|f(x)| \leq M_f$$

olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ ve L_n lineer pozitif operatörü için,

$$(i) \quad L_n(1; x) \rightrightarrows 1$$

$$(ii) \quad L_n(t; x) \rightrightarrows x$$

$$(iii) \quad L_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$$

koşulları sağlanıyorsa o takdirde her $f \in C[a, b]$ için,

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x), \quad a \leq x \leq b$$

dir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİSİ

O. Doğru tarafından genelleştirilip klasik anlamda yaklaşım özellikleri incelenen ve iyi bilinen operatörlere dönüşebilmesi nedeniyle öne çıkan genelleştirilmiş bir lineer pozitif operatör dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Doğru 2008a):

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \quad (2.1)$$

burada, $a_{n,\nu} = \frac{\varphi_n^{(\nu)}(0)}{\varphi_n^{(\nu-1)}(0)}$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a_{n,\nu}}{\nu} = \mu$, $0 \leq x < \frac{1}{\mu}$ ve $f \in C\left[0, \frac{1}{\mu}\right)$ dir. Ayrıca,

$\varphi_n(x) \in \mathbb{C}^\infty$ aşağıdaki koşulları sağlar:

- (i) $\{\varphi_n\}$ dizisinin her elemanı $B = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\mu}\right\}$ diskini içeren bir D bölgesinde analitiktir.
- (ii) $\varphi_n^{(\nu)}(0) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \varphi_n(x)|_{x=0} > 0$, $\nu = 1, 2, \dots$, için.
- (iii) $\varphi_n(x) > 0$ her $x \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right)$, için.
- (iv) $\left|\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right| \leq c_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşullarını sağlayan bir $\{c_n\}$ dizisi vardır.

Uyarı 2.1 $\varphi_n(x) = (1-x)^{-n-1}$ seçilirse $a_{n,\nu} = \nu + n$, $\mu = 1$ ve $c_n = \frac{1}{n}$ elde edilir ve

böylece (2.1) deki operatör Meyer-König ve Zeller (MKZ) operatörlerinin Cheney ve Sharma tarafından verilen modifiye edilmiş haline dönüşür (Cheney ve Sharma 1964). Bu operatör aşağıdaki gibidir:

$$M_n(f; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{\nu+n}\right) m_{n,\nu}(x), \quad 0 \leq x < 1 \quad (2.2)$$

ve $m_{n,\nu} = \binom{n+\nu}{\nu} x^\nu (1-x)^{n+1}$ dir. Bu operatörler ayrıca literatürde Bernstein kuvvet serileri olarak da anılırlar.

$\varphi_n(x) = (1+x)^n$ seçilirse, $a_{n,\nu} = n - \nu + 1$ elde ederiz ve böylece belirtilen operatör Bleimann, Butzer ve Hahn (BBH) operatörlerine dönüşür (Bleimann vd. 1980) ve aşağıdaki gibidir:

$$B_n(f; x) = (1+x)^{-n} \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n-\nu+1}\right) \binom{n}{\nu} x^\nu. \quad (2.3)$$

$\varphi_n(x) = e^{nx}$ seçilirse, $a_{n,\nu} = n$, $\mu = 0$ ve $c_n = \frac{1}{n}$ olur ve operatör Szász operatörlerine dönüşür (Szász 1950) ve bu operatör,

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right) \frac{(nx)^\nu}{\nu!} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2.1 Operatörün Yakınsaklık Özellikleri

Bu bölümde Doğru (2008a) tarafından ifade ve ispat edilen lemmalar ve bir teorem verilecektir.

Lemma 2.1.1 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0, a] \left(0 < a < \frac{1}{\mu} \right)$, olmak üzere,

$$L_n(1; x) = 1 \quad (2.5)$$

dir.

İspat:

$$L_n(1; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} = 1$$

olup istenilen elde edilir.

Lemma 2.1.2 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0, a] \left(0 < a < \frac{1}{\mu} \right)$, olmak üzere,

$$L_n(t; x) = x \quad (2.6)$$

dir.

İspat: Açıktır ki,

$$L_n(t; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \quad (2.7)$$

dir. $a_{n,\nu} = \frac{\varphi_n^{(\nu)}(0)}{\varphi_n^{(\nu-1)}(0)}$ eşitliği (2.7) de kullanılırsa (2.6) elde edilir.

Lemma 2.1.3 $\forall n \in \mathbb{N}, x \in [0, a] \left(0 < a < \frac{1}{\mu} \right)$, olmak üzere,

$$\left| L_n(t^2; x) - x^2 \right| \leq c_n x \quad (2.8)$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} L_n(t^2; x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{a_{\nu,n}^2} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{a_{\nu,n}} \varphi_n^{(\nu-1)}(0) \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\ &= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu+1}{a_{\nu+1,n}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu+1}{a_{\nu+1,n}} - \frac{\nu}{a_{\nu,n}} \right] \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{a_{\nu,n}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \end{aligned}$$

olur. (iv) koşulu kullanılarak istenilen elde edilir.

Teorem 2.1.1 (Doğru 2008a) $f \in C[0, a]$ ve lineer pozitif operatör dizisi (i)-(iv) koşullarıyla birlikte (2.1) deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; \cdot) - f\|_{C[0,a]} = 0 \quad (2.9)$$

dir.

İspat: Lemma 2.1.1, Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 kullanılarak Korovkin teoreminden teoremin ispatı gerçekleştirilir.

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde İstatistiksel yakınsaklık kavramı yer alacak ve (2.1) ile tanımlı $(L_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisinin istatistiksel yakınsaklık özelliklerine ve yakınsaklık hızına ait teoremler ifade ve ispat edilecektir.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında Fast tarafından tanımlanmış ve son zamanlarda aktif bir çalışma alanı olmuştur. Özellikle 2002 yılında Gadjiev ve Orhan istatistiksel yakınsaklığı yaklaşımlar teorisinde kullanmışlar ve Bohman-Korovkin tipli teoremi istatistiksel yakınsaklık için ifade ve ispat etmişlerdir.

Tanım 3.1.1 Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0 \quad (3.1)$$

olmasıdır. Burada $\delta(K)$, $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\delta(K) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

olup, $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin yoğunluğudur (Niven ve Zuckerman 1980). Burada $A \subseteq \mathbb{N}$ için $|A|$ ile A kümesinin eleman sayısı gösterilmektedir.

Örnek 3.1.1 $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(2k : k \in \mathbb{N}) = \frac{1}{2}$, $\delta(k^2 : k \in \mathbb{N}) = 0$ dir.

Uyarı 3.1.1 Herhangi yakınsak bir dizi istatistiksel olarak yakınsak olmasına rağmen bu durumun tersi doğru değildir. Örneğin;

$$x_n = \begin{cases} L_1, & n = m^2 \\ L_2, & n \neq m^2 \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

dizisi istatistiksel olarak L_2 sayısına yakınsaktır. Ancak açıkça görüldüğü gibi $L_1 \neq L_2$ durumunda klasik anlamda yakınsaklık söz konusu değildir.

Örnekte de görüldüğü gibi istatistiksel yakınsaklık daha geniş bir çalışma alanı sağlaması açısından önem taşımaktadır.

3.2 İstatistiksel Yakınsaklık Özellikleri

İstatistiksel yakınsaklık özellikleri gösterilirken kullanılan, Gadjiev ve Orhan tarafından 2002 yılında ispatlanan Korovkin tipli istatistiksel yakınsaklık teoremi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 3.2.1 (Gadjiev ve Orhan 2002) Eğer,

$$A_n : C_M[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

lineer pozitif operatör dizisi,

$$st - \lim_n \|A_n(e_\nu) - e_\nu\|_{C[a, b]} = 0, e_\nu(t) = t^\nu, \nu = 0, 1, 2$$

koşullarını sağlarsa her $f \in C_M[a, b]$ fonksiyonu için,

$$st - \lim_n \|A_n(f) - f\|_{C[a, b]} = 0 \quad (3.2)$$

dir. Burada, $[a, b]$ de sürekli ve tüm pozitif ekseninde sınırlı f fonksiyonlarının kümesi $C_M[a, b]$ ile ifade edilmektedir.

Uyarı 3.2.1 (2.1) deki $(L_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisinin istatistiksel yakınsaklık özellikleri incelenirken (iv) deki $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulunu sağlayan bir $\{c_n\}$ dizisi yerine $st - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulunu sağlayan bir $\{c_n\}$ dizisinin varlığı kabul edilecektir.

Teorem 3.2.2 (Canatan ve Doğru 2012) Her $f \in C_M[0, a], \left(0 < a < \frac{1}{\mu}\right)$ için ve

$(L_n(f; x))$ (2.1) deki gibi tanımlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_n \|L_n(f; \cdot) - f\|_{C[0, a]} = 0 \quad (3.3)$$

dir.

İspat: Lemma 2.1.1 ve Lemma 2.1.2 den,

$$\lim_n \|L_n(e_0; \cdot) - e_0\|_{C[0, a]} = 0 \quad (3.4)$$

ve

$$\lim_n \|L_n(e_1; \cdot) - e_1\|_{C[0, a]} = 0 \quad (3.5)$$

olduğu açıktır.

Lemma 2.1.3 den,

$$\|L_n(e_2; \cdot) - e_2\|_{C[0, a]} \leq c_n a \quad (3.6)$$

dir.

Her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$T := \left\{k : \|L_k(e_2; \cdot) - e_2\|_{C[0, a]} \geq \varepsilon\right\} \text{ ve } T_1 := \{k : c_k a \geq \varepsilon\}.$$

(3.6) dan $T \subseteq T_1$ olup böylece,

$$\mathcal{D}\left\{k \leq n : \|L_k(e_2; \cdot) - e_2\|_{C[0, a]} \geq \varepsilon\right\} \leq \mathcal{D}\{k \leq n : c_k a \geq \varepsilon\}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulu kullanılırsa,

$$\lim_n \|L_n(e_2; \cdot) - e_2\|_{C[0, a]} = 0 \quad (3.7)$$

olur. Böylece $\nu = 0, 1, 2$ için,

$$st - \lim_n \|L_n(e_\nu; \cdot) - e_\nu\|_{C[0,a]} = 0 \quad (3.8)$$

yazılabilir ve ispat Teorem 3.2.1 den elde edilir.

3.3 İstatistiksel Yaklaşım Hızı

Bu bölümde istatistiksel yaklaşım hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz tipli maksimal fonksiyon yardımıyla elde edilmeye çalışılacaktır.

Tanım 3.3.1 (Süreklilik Modülü): $f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için f nin $\omega(f; \delta)$ ile belirtilen süreklilik modülü,

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |x-t| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (3.9)$$

dir. Süreklilik modülü aşağıda verilen özelliklere sahiptir.

- (i) $\omega(f; \delta) \geq 0$
- (ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- (iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$
- (iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$
- (v) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0$
- (vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$
- (vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$

Teorem 3.3.1 (Doğru 2008a) $f \in C[0, a]$ ve $(L_n(f; x))$ (2.1) deki gibi tanımlı olsun.

Bu durumda,

$$\|L_n(f; \cdot) - f\|_{C[0,a]} \leq (1 + \sqrt{a}) \omega(f; \sqrt{c_n}) \quad (3.10)$$

dir. Burada $\omega(f; \sqrt{c_n})$ (3.9) daki gibidir.

İspat: O. Doğru tarafından yapılan bu ispatta Popoviciu'nun tekniği kullanılmıştır (Lorentz 1953). $L_n(f; x)$ operatörünün lineer pozitif operatör olmasından dolayı $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, a]$ için,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) \quad (3.11)$$

dir. Süreklilik modülünün (vii) numaralı özelliği (3.11) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left(\frac{L_n(|t - x|; x)}{\delta} + 1 \right) \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.12) den

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \left(\varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}$$

yazılıp Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}$$

olup buradan,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left(\frac{(L_n(t - x)^2; x)^{\frac{1}{2}}}{\delta} + 1 \right)$$

ve böylece de (2.5), (2.6) ve (2.8) göz önünde bulundurulursa,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left(\frac{\sqrt{c_n x}}{\delta} + 1 \right) \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) de $\delta := \sqrt{c_n}$ seçilirse ve $x \in [0, a]$ için maksimum alınırsa, (3.10) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.3.2 (Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar): $0 < \alpha \leq 1$ ve $\forall x, t \in [a, b]$ olmak üzere aşağıdaki koşulu sağlayan fonksiyonlar Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar olarak adlandırılır.

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^\alpha \quad (3.14)$$

Burada M sabiti Lipschitz sabiti olarak adlandırılır. Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar $f \in Lip_M(\alpha)$ ile ifade edilir.

Tanım 3.3.3 (Lipschitz tipli maksimal fonksiyon): $0 < \alpha \leq 1$, $f \in Lip_M(\alpha)$ olmak üzere, α ıncı basamaktan Lipschitz tipli maksimal fonksiyon, Lenze tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Lenze 1990):

$$\tilde{\omega}_\alpha(f; x) = \sup_{\substack{t \neq x \\ t \in [0, a]}} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|^\alpha}; x \in [0, a]. \quad (3.15)$$

Buradan açıkça söylenebilir ki, $\tilde{\omega}_\alpha(f; x)$ in sınırlı olması f in Lipschitz sınıfından olmasını gerektirir.

Teorem 3.3.2 (Doğru 2008a) Eğer $(L_n(f; x))$ (2.1) deki gibi tanımlı ise,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq (c_n x)^{\alpha/2} \tilde{\omega}_\alpha(f; x) \quad (3.16)$$

dir.

İspat: O. Doğru tarafından yapılan bu ispatta O. Agratini'nin tekniği kullanılmıştır (Agratini 2001). Lipschitz tipli maksimal fonksiyon tanımı kullanılarak,

$$\left| f(x) - f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \right| \leq \tilde{\omega}_\alpha(f; x) \left| x - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right|^\alpha$$

yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(f(x) - f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right| \\ &\leq \frac{\tilde{\omega}_\alpha(f; x)}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| x - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right|^\alpha \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) de Hölder eşitsizliğinin kullanılmasıyla, $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ için,

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq \tilde{\omega}_\alpha(f; x) \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(x - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right)^{\alpha/2} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right)^{2-\alpha/2} \end{aligned}$$

elde edilir ve Lemma 2.1.1-2.1.3 ün kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

Uyarı 3.3.1 $st - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ olduğu göz önüne alındığında $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(f; \sqrt{c_n}) = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 de bu sonuçlar kullanılarak bu iki teoremin, $L_n(f; \cdot)$ operatörünün f fonksiyonuna istatistiksel olarak yakınsaklık hızını verdiği açıktır.

3.4 Voronovskaja Tipli Yaklaşım Özellikleri

Voronovskaja 1932 yılında $[0,1]$ de sınırlı ve ikinci dereceden türevi olan bir $f(x)$ fonksiyonu için Bernstein polinomlarına ait Voronovskaja tipli bir yaklaşım formülünü,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [f(x) - B_n(f; x)] = -\frac{x(1-x)}{2} f''(x) \quad (3.18)$$

şeklinde vermiştir. Ayrıntılı bilgi için (Lorentz 1953) kitabına bakılabilir.

Bu bölümde (2.1) ile ifade edilen operatörün Voronovskaja tipli bir yaklaşım formülü (Doğru 2007) de kullanılan teknikle elde edilecek ve istatistiksel yaklaşım hızına ait bir sonuç verilecektir. Belirtelim ki bu operatörlerin Voronovskaja tipli asimptotik yaklaşım formülleri (Doğru 2008a) tarafından da elde edilmiştir.

Lemma 3.4.1 (Canatan ve Doğru 2012) $(L_n(f; x))$, (2.1) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda,

$$L_n(t^3; x) \leq x^3 + 3c_n x^2 + c_n^2 x \quad (3.19)$$

dir.

İspat: $L_n(f; x)$ in tanımını kullanılarak,

$$\begin{aligned} L_n(t^3; x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^3}{a_{\nu,n}^3} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{a_{\nu,n}^2} \frac{1}{a_{\nu,n}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{(\nu-1)!} \\ &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)^2}{a_{\nu+1,n}^2} \frac{1}{a_{\nu+1,n}} \varphi_n^{(\nu+1)}(0) \frac{x^{\nu+1}}{\nu!} \end{aligned}$$

dir. (2.1) in tanımında yer alan $a_{n,\nu} = \frac{\varphi_n^{(\nu)}(0)}{\varphi_n^{(\nu-1)}(0)}$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} L_n(t^3; x) &= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)^2}{a_{n,\nu+1}^2} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} + \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right]^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right]^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\quad + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2 \left[\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right] \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\quad + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}
\end{aligned}$$

olur. Burada (2.1) deki (iv) koşulu uygulanırsa,

$$L_n(t^3; x) \leq xc_n^2 L_n(1; x) + 2xc_n L_n(t; x) + xL_n(t^2; x)$$

olup Lemma 2.1.1, Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 ün kullanılmasıyla istenilen elde edilir.

Lemma 3.4.2 (Canatan ve Doğru 2012) $(L_n(f; x))$, (2.1) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda,

$$L_n(t^4; x) \leq x^4 + 6c_n x^3 + 7c_n^2 x^2 + c_n^3 x \quad (3.20)$$

olur.

İspat: $L_n(f; x)$ in tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
L_n(t^4; x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^4}{a_{n,\nu}^4} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^3}{a_{n,\nu}^3} \frac{1}{a_{n,\nu}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{(\nu-1)!}
\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte ν yerine $\nu+1$ alınıp, (2.1) deki $a_{n,\nu} = \frac{\varphi_n^{(\nu)}(0)}{\varphi_n^{(\nu-1)}(0)}$ özelliği kullanılırsa,

$$L_n(t^4; x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)^3}{a_{n,\nu+1}^3} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^{\nu+1}}{\nu!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} + \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right]^3 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right]^3 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\quad + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} 3 \left[\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right]^2 \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\quad + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} 3 \left[\frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right] \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\quad + \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right)^3 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte (2.1) in (iv) koşulu uygulanırsa,

$$L_n(t^4; x) \leq xc_n^3 L_n(1; x) + 3xc_n^2 L_n(t; x) + 3xc_n L_n(t^2; x) + xL_n(t^3; x)$$

elde edilir. Lemma 2.1.1, Lemma 2.1.2, Lemma 2.1.3 ve (3.19) un bu son eşitsizlikte kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.1 (Canatan ve Doğru 2012) $(L_n(f; x))$, (2.1) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} [L_n(t; x) - f(x)] = \frac{f''(x)}{2} x. \quad (3.21)$$

İspat: Taylor seri açılımı kullanılarak,

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2!}(t-x)^2 + (t-x)^2 \eta(t-x) \quad (3.22)$$

elde edilir. Burada $\eta(t-x) = \frac{f'''(x)}{3!}(t-x) + \dots$ dir. Ayrıca bu fonksiyon sürekli ve $t \rightarrow x$ için 0 a yaklaşır.

(3.22) de $t = \frac{\nu}{a_{n,\nu}}$ seçelim. Bu durumda,

$$f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right) + \frac{f''(x)}{2!}\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right)^2 + \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right) \quad (3.23)$$

elde edilir. η sürekli olduğundan sınırlıdır yani, her h için $|\eta(h)| \leq H$ olacak şekilde bir

$H > 0$ sabiti vardır. (3.23) ifadesi $\frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$ ile çarpılır ve $\nu = 0$ dan ∞ a her

iki taraftan toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} &= f(x) L_n(1; x) + f'(x) L_n(t-x; x) \\ &+ \frac{f''(x)}{2} L_n((t-x)^2; x) \\ &+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$L_n(f; x) = f(x) + f'(x)[L_n(t; x) - x] + \frac{f''(x)}{2}[L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2] + I \quad (3.24)$$

olur. Burada,

$$I = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$$

olup,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \left|\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right| \leq \delta}}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \left|\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right| > \delta}}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right)^2 \eta\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \end{aligned} \quad (3.25)$$

yazılabilir. $\forall \varepsilon > 0$ için η sürekli olduğundan bir $\delta(\varepsilon)$ vardır öyleki $\left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| < \delta$ için

$\left| \eta \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right) \right| \leq \varepsilon$ sağlanır. Diğer taraftan η sınırlı olduğundan, $\left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| > \delta$ için

$\left| \eta \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right) \right| < H$ yazılabilir. Bu durumlar (3.25) de kullanılırsa,

$$I \leq \varepsilon \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + HJ \quad (3.26)$$

elde edilir. Burada,

$$J = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| > \delta}}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \quad (3.27)$$

olup, $\left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| > \delta$ olduğundan $\frac{\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2}{\delta^2} > 1$ olup aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$J \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^4 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}. \quad (3.28)$$

(3.26) ve (3.28) kullanıldığında,

$$I \leq \varepsilon L_n((t-x)^2; x) + H \frac{1}{\delta^2} L_n((t-x)^4; x)$$

$$\begin{aligned} I \leq & \varepsilon \{ L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) \} \\ & + \frac{H}{\delta^2} \{ L_n(t^4; x) - 4xL_n(t^3; x) + 6x^2L_n(t^2; x) - 4x^3L_n(t; x) + x^4L_n(1; x) \} \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon (x^2 + c_n x - 2x^2 + x^2) + \frac{H}{\delta^2} (x^4 + 6c_n x^3 + 7c_n^2 x^2 + c_n^3 x - 4x(x^3 + 3c_n x^2 + c_n^2 x) + 6x^2(c_n x + x^2) - 4x^3 x + x^4)$$

ve dolayısıyla da,

$$I \leq c_n \left[\varepsilon x + \frac{H}{\delta^2} (c_n^2 x + 3c_n x^2) \right] \quad (3.29)$$

bulunur. (3.29) un (3.24) de kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} L_n(f; x) - f(x) &\leq \frac{f''(x)}{2} c_n x + c_n \left[\varepsilon x + \frac{H}{\delta^2} (c_n^2 x + 3c_n x^2) \right] \\ &= c_n \left\{ \frac{f''(x)}{2} x + \varepsilon x + \frac{H}{\delta^2} (c_n^2 x + 3c_n x^2) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ve ε istenildiği kadar küçük bırakılabilen keyfi pozitif bir sabit olduğundan ispat tamamlanır.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR LİNEER POZİTİF OPERATÖR DİZİSİ

Bu bölümde Canatan ve Doğru tarafından tanımlanmış ve istatistiksel yakınsaklık özelliklerine ait sonuçları elde edilmiş olan iki değişkenli bir lineer pozitif operatör dizisi verilecektir (Canatan ve Doğru 2012).

4.1 Operatörlerin İnşaası

$I^2 = [0, a] \times [0, a]$, $\left(0 < a < \frac{1}{\mu}\right)$, ve $f \in C(I^2)$ olsun.

$$L_n^x(f; x, y) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, y\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$$

ve

$$L_m^y(f; x, y) = \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(x, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{y^\eta}{\eta!}$$

olup, burada,

$$a_{n,\nu} = \frac{\varphi_n^{(\nu)}(0)}{\varphi_n^{(\nu-1)}(0)}, \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a_{n,\nu}}{\nu} = \mu, \quad 0 \leq x < \frac{1}{\mu} \text{ ve } f \in C\left(\left[0, \frac{1}{\mu}\right] \times \left[0, \frac{1}{\mu}\right]\right)$$

ve

$$b_{m,\eta} = \frac{\varphi_m^{(\eta)}(0)}{\varphi_m^{(\eta-1)}(0)}, \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{b_{m,\eta}}{\eta} = \mu, \quad 0 \leq y < \frac{1}{\mu} \text{ ve } f \in C\left(\left[0, \frac{1}{\mu}\right] \times \left[0, \frac{1}{\mu}\right]\right)$$

dir.

Ayrıca $\varphi_n(x) \in C^\infty$ ve $\varphi_m(y) \in C^\infty$ aşağıdaki koşulları sağlarlar:

(i)¹ $\{\varphi_n\}$ ve $\{\varphi_m\}$ dizilerinin her bir elemanı $B = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\mu}\right\}$ diskini içeren bir D

bölgesinde analitiktir.

$$(ii)^1 \quad \varphi_n^{(\nu)}(0) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \varphi_n(x) \big|_{x=0} > 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, \text{ için}$$

ve

$$\varphi_m^{(\eta)}(0) = \frac{d^\eta}{dy^\eta} \varphi_m(y) \big|_{y=0} > 0, \quad \eta = 1, 2, \dots, \text{ için.}$$

$$(iii)^1 \quad \text{Her } x \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right) \text{ için } \varphi_n(x) > 0 \text{ ve her } y \in \left[0, \frac{1}{\mu}\right) \text{ için } \varphi_m(y) > 0.$$

$$(iv)^1 \quad \left| \frac{\nu+1}{a_{n,\nu+1}} - \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right| \leq c_n \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{ şartını sağlayan bir } \{c_n\} \text{ dizisi ve}$$

$$\left| \frac{\eta+1}{b_{m,\eta+1}} - \frac{\eta}{b_{m,\eta}} \right| \leq d_m \text{ ve } \lim_{m \rightarrow \infty} d_m = 0 \text{ şartını sağlayan bir } \{d_m\} \text{ dizisi vardır.}$$

Bu koşullar altında iki değişkenli genelleştirilmiş bir lineer pozitif operatör dizisi,

$$L_{n,m}(f; x, y) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.1.1 (Canatan ve Doğru 2012) (4.1) ile tanımlı operatör için,

$$L_{n,m}(f; x, y) = L_n^x(L_m^y(f; x, y)) = L_m^y(L_n^x(f; x, y))$$

dir.

İspat: Operatörün tanımı kullanılarak eşitliğin ilk kısmı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} L_n^x(L_m^y(f; x, y)) &= \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \\ &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \end{aligned}$$

$$= L_{n,m} (f ; x, y) .$$

Benzer şekilde $L_m^y (L_n^x (f ; x, y)) = L_{n,m} (f ; x, y)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

4.2 İki Değişkenli Operatörün İstatistiksel Yakınsaklık Özellikleri

Tanım 4.2.1 Eğer,

$$\lim_{n,m} \| f_{n,m} (\cdot, \cdot) - f (\cdot, \cdot) \|_{C([a,b] \times [c,d])} = 0$$

ise, $\{ f_{n,m} \}$ fonksiyon dizisi f e düzgün olarak istatistiksel yakınsar. Burada,

$$\| f (\cdot, \cdot) \|_{C([a,b] \times [c,d])} = \max_{(x,y) \in [a,b] \times [c,d]} | f (x, y) |$$

dir.

İki değişkenli lineer pozitif operatörler için Korovkin tipli ilk teorem Volkov tarafından (1957) verilmiştir. Daha sonra Gonska vd. Volkov'un bu teoreminin daha basit bir halini aşağıdaki gibi vermişlerdir:

Teorem 4.2.1 (Gonska vd. 1986) a, b, c, d , ler $a < b, c < d$ eşitsizliklerini sağlayan reel sayılar olsun ve

$L_{n,m} : C([a,b] \times [c,d]) \rightarrow C([a,b] \times [c,d])$ her $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ için aşağıdaki özelliklere sahip lineer pozitif operatörler olsunlar:

- (1) $L_{n,m} (e_{00} ; x, y) = 1 + u_{n,m} (x, y)$,
- (2) $L_{n,m} (e_{10} ; x, y) = x + v_{n,m} (x, y)$,
- (3) $L_{n,m} (e_{01} ; x, y) = y + w_{n,m} (x, y)$,
- (4) $L_{n,m} (e_{20} + e_{02} ; x, y) = x^2 + y^2 + h_{n,m} (x, y)$.

Eğer, $\{ u_{n,m} (x, y) \}, \{ v_{n,m} (x, y) \}, \{ w_{n,m} (x, y) \}, \{ h_{n,m} (x, y) \}$ dizileri $[a,b] \times [c,d]$ üzerinde sıfıra düzgün olarak yakınsarsa $(L_{n,m} f)$ de $[a,b] \times [c,d]$ üzerinden

$f \in C([a, b] \times [c, d])$ için f e düzgün olarak yakınsar. Burada $e_{ij} = x^i y^j$ iki boyutlu test fonksiyonlarıdır.

Lemma 4.2.1 (Canatan ve Doğru 2012) (4.1) deki operatörler aşağıdakileri sağlar:

- (i) $L_{n,m}(e_{00}; x, y) = 1$
- (ii) $L_{n,m}(e_{10}; x, y) = x$
- (iii) $L_{n,m}(e_{01}; x, y) = y$
- (iv) $|L_{n,m}(e_{20} + e_{02}; x, y) - x^2 - y^2| \leq c_n x + d_m y$

dir. Burada c_n ve d_m (iv¹) deki koşulları sağlarlar.

İspat:

(i): $L_{n,m}(e_{00}; x, y) = L_{n,m}(1; x, y)$

$$= L_{n,m}(f; x, y) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!}$$

olduğu açıktır. Lemma 2.1.1 de göz önüne alındığında istenilen elde edilir.

(ii): $L_{n,m}(e_{10}; x, y) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!}$

olup Lemma 2.1.2 nin de kullanılmasıyla $L_{n,m}(e_{10}; x, y) = x$ olduğu kolayca görülür.

(iii): (ii) deki yol kullanılarak elde edilir.

(iv):

$$L_{n,m}(e_{20} + e_{02}; x, y) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{b_{m,\eta}} \right)^2 \right] \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right) \left(\frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{y^\eta}{\eta!} \right) \\
&+ \left(\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right) \left(\frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{b_{m,\eta}} \right)^2 \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{y^\eta}{\eta!} \right) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

(4.2) de Lemma 2.1.1 kullanılır ve Lemma 2.1.3 de göz önüne alınırsa istenilen sonuç;

$$\begin{aligned}
\left| L_{n,m}(e_{20} + e_{02}; x, y) - x^2 - y^2 \right| &= \left| L_n(e_2; x) - x^2 + L_m(e_2; y) - y^2 \right| \\
&\leq \left| L_n(e_2; x) - x^2 \right| + \left| L_m(e_2; y) - y^2 \right| \\
&\leq c_n x + d_m y
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.2.2 (Canatan ve Doğru 2012) (4.1) de tanımlanan $(L_{n,m} f)$ iki değişkenli bir operatör dizisi $f \in C([0, a] \times [0, a])$ fonksiyonuna istatistiksel olarak yakınsar.

İspat:

$$st - \lim_{n,m} \|L_{n,m}(e_{00}; x, y) - e_{00}\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0 \quad (4.3)$$

$$st - \lim_{n,m} \|L_{n,m}(e_{10}; x, y) - e_{10}\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0 \quad (4.4)$$

$$st - \lim_{n,m} \|L_{n,m}(e_{01}; x, y) - e_{01}\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0 \quad (4.5)$$

ve (iv)¹ den,

$$st - \lim_{n,m} \|L_{n,m}(e_{20} + e_{02}; x, y) - e_{20} - e_{02}\|_{C([0,a] \times [0,a])} = 0 \quad (4.6)$$

olup, (4.3), (4.4), (4.5) ve (4.6) göz önünde bulundurulduğunda Teorem 4.2.1 in ışığında istenilen elde edilir.

4.3 İki Değişkenli Operatörün İstatistiksel Yaklaşım Hızı

Tanım 4.3.1 $I^2 = [0, a] \times [0, a]$, $f \in C(I^2)$ ve her $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ için,

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{(t,s) \in I^2, (x,y) \in I^2 \\ |t-x| \leq \delta_1, |s-y| \leq \delta_2}} |f(t,s) - f(x,y)| \quad (4.7)$$

ile iki değişkenli operatörler için süreklilik modülü ifade edilmektedir (Lorentz 1966).

Teorem 4.3.1 (Canatan ve Doğru 2012) (4.1) ile tanımlı $(L_{n,m} f)$ operatör dizisi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|L_{n,m}(f; \cdot, \cdot) - f(\cdot, \cdot)\|_{C(I^2)} \leq \omega(f; \sqrt{c_n}, \sqrt{d_m}) (\sqrt{a} + 1)^2. \quad (4.8)$$

İspat: (4.7) ile tanımlı süreklilik modülü,

$$|f(t,s) - f(x,y)| \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left(\frac{|t-x|}{\delta_1} + 1 \right) \left(\frac{|s-y|}{\delta_2} + 1 \right) \quad (4.9)$$

özellğine sahiptir (Anastassiou ve Gal 2000). Her $n \in \mathbb{N}, (x,y) \in I^2$ için,

$$|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq L_{n,m}(|f(t,s) - f(x,y)|; x, y) \quad (4.10)$$

dir. (4.10) da (4.9) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) L_{n,m} \left(\left(\frac{|t-x|}{\delta_1} + 1 \right) \left(\frac{|s-y|}{\delta_2} + 1 \right); x, y \right) \\ &= \omega(f; \delta_1, \delta_2) \frac{1}{\delta_1} \frac{1}{\delta_2} \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \left| \frac{\eta}{b_{m,\eta}} - y \right| \\ &\quad \times \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\omega(f; \delta_1, \delta_2) \frac{1}{\delta_1} \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \\
& \quad \times \frac{x^\nu y^\eta}{\nu! \eta!} \\
& +\omega(f; \delta_1, \delta_2) \frac{1}{\delta_2} \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left| \frac{\eta}{b_{m,\eta}} - y \right| \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \\
& \quad \times \frac{x^\nu y^\eta}{\nu! \eta!} \\
& +\omega(f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) de Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| & \leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \left[\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left[\frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{b_{m,\eta}} - y \right)^2 \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{y^\eta}{\eta!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1} \left[\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
& + \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_2} \left[\frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{b_{m,\eta}} - y \right)^2 \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{y^\eta}{\eta!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
& +\omega(f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

olur ve bu eşitsizlikte Lemma 2.1.3 ün kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} |L_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \delta_2} (c_n x)^{1/2} (d_m y)^{1/2} + \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_1} (c_n x)^{1/2} \\ &\quad + \frac{\omega(f; \delta_1, \delta_2)}{\delta_2} (d_m y)^{1/2} + \omega(f; \delta_1, \delta_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\delta_1 = \sqrt{c_n}, \delta_2 = \sqrt{d_m}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \|L_{n,m}(f; \cdot, \cdot) - f\|_{C(I^2)} &\leq \omega(f; \sqrt{c_n}, \sqrt{d_m}) \sqrt{a} \sqrt{a} + \omega(f; \sqrt{c_n}, \sqrt{d_m}) \sqrt{a} \\ &\quad + \omega(f; \sqrt{c_n}, \sqrt{d_m}) \sqrt{a} + \omega(f; \sqrt{c_n}, \sqrt{d_m}) \\ &= \omega(f; \sqrt{c_n}, \sqrt{d_m}) (a + 2\sqrt{a} + 1) \\ &= \omega(f; \sqrt{c_n}, \sqrt{d_m}) (\sqrt{a} + 1)^2 \end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.

Uyarı 4.3.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = 0$ olduğundan, Teorem 4.3.1 den (4.1) ile tanımlı $(L_{n,m} f)$ operatör dizisinin I^2 üzerinden f e süreklilik modülü ile istatistiksel yakınsaklık hızını verdiği söylenebilir.

4.4 Kısmi Türevli Denklemlere Uygulama

$((L_{n,m} f))$, (4.1) deki gibi tanımlanmış olsun. Bu durumda $((L_{n,m} f))$ nin kısmi türevli denklemlere uygulanmasına ilişkin teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 4.4.1 (Canatan ve Doğru 2012)

$$\frac{d}{dx} \varphi_n(x) = h_n(x) \varphi_n(x), \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dy} \varphi_m(y) = k_m(y) \varphi_m(y), \quad (4.13)$$

ve

$$g\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) = \frac{\nu}{s_n} + \frac{\eta}{t_m} \quad (4.14)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki kısmi türevli denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{x}{s_n} \frac{\partial}{\partial x} L_{n,m}(f; x, y) + \frac{y}{t_m} \frac{\partial}{\partial y} L_{n,m}(f; x, y) &= \left[-\frac{x}{s_n} h_n(x) - \frac{y}{t_m} k_m(y) \right] L_{n,m}(f; x, y) \\ &+ L_{n,m}(fg; x, y). \end{aligned} \quad (4.15)$$

İspat: (4.1) ile tanımlı operatörün her iki yanına x değişkenine göre kısmi türev uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} L_{n,m}(f; x, y) &= \frac{-\frac{d}{dx} \varphi_n(x)}{\varphi_n^2(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \\ &+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{\nu x^{\nu-1}}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \end{aligned} \quad (4.16)$$

olur. Benzer şekilde operatörün her iki yanına y değişkenine göre kısmi diferensiyel uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} L_{n,m}(f; x, y) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{-\frac{d}{dy} \varphi_m(y)}{\varphi_m^2(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \\ &+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{\eta y^{\eta-1}}{\eta!} \end{aligned} \quad (4.17)$$

bulunur. (4.12) ve (4.13) göz önünde bulundurularak (4.16) eşitliği $\frac{x}{s_n}$ ile (4.17) eşitliği

ise $\frac{y}{t_m}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{x}{s_n} \frac{\partial}{\partial x} L_{n,m}(f; x, y) + \frac{y}{t_m} \frac{\partial}{\partial y} L_{n,m}(f; x, y) = \left[-\frac{x}{s_n} h_n(x) - \frac{y}{t_m} k_m(y) \right] L_{n,m}(f; x, y)$$

$$+ \frac{1}{\varphi_n(x)} \frac{1}{\varphi_m(y)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\eta=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}, \frac{\eta}{b_{m,\eta}}\right) \left(\frac{\nu}{s_n} + \frac{\eta}{t_m}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \varphi_m^{(\eta)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \frac{y^\eta}{\eta!} \quad (4.18)$$

elde edilir. Son olarak (4.14) ün (4.18) de kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

5. DİREKT VE TERS TEOREMLER

5.1 Direkt ve Ters Teorem

Tanım 5.1.1 Direkt Teoremler yaklaşım hızının süreklilik modülüyle, Lipschitz tipli fonksiyonlar uzayında veya Peetre- K fonksiyoneli gibi kavramlar yardımıyla elde edilmesine yönelik sonuçları içeren teoremlerdir. Buna karşılık Ters Teoremler, yaklaşım hızının verildiği bir tahminden yola çıkarak fonksiyonun ait olduğu uzayın bulunması ile ilgili teoremlerdir.

Bilindiği gibi, $f \in C[0,1]$ olmak üzere,

$$B_n(f; x) = \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) \binom{n}{\nu} x^\nu (1-x)^{n-\nu}, n \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanan Bernstein polinomu için direkt ve ters sonuçları veren teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 5.1.1 (Berens ve Lorentz 1972)

$$\left| B_n(f; x) - f(x) \right| \leq K \left(\frac{x(1-x)}{n} \right)^{\alpha/2} \Leftrightarrow \omega_2(f; \delta) = O(\delta^\alpha) \quad (5.2)$$

dir.

5.2 Genelleştirilmiş Bir Lineer Pozitif Operatör Dizisi için Direkt ve Ters Teoremler

Bu bölümde (Doğru 2008b) tarafından kullanılan yöntemlerle (2.1) ile tanımlanmış $(L_n(f; x))$ operatör dizisine ait direkt ve ters sonuçlar elde edilecektir.

Lemma 5.2.1 $(L_n(f; x))$, (2.1) ile tanımlanmış olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\left[\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right] \frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{x}{\varphi_n(x)} \left[\varphi_n^{(\nu-1)}(0) \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} - \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right] \quad (5.3)$$

İspat:

$$\left[\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right] \frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} = \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} - x \frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}$$

olup (2.1) in $a_{n,\nu} = \frac{\varphi_n^{(\nu)}(0)}{\varphi_n^{(\nu-1)}(0)}$ özelliğinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right] \frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} &= \frac{1}{\varphi_n^{(\nu)}(0)} \varphi_n^{(\nu-1)}(0) \frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{(\nu-1)!} - x \frac{1}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &= \frac{x}{\varphi_n(x)} \left[\varphi_n^{(\nu-1)}(0) \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} - \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 5.2.2 $\varphi_n'(x) = a_{n,\nu} \varphi_n(x)$ ve (iv) koşulunu sağlayan bir $\{c_n\}$ dizisi için

$a_{n,\nu} \leq \frac{1}{c_n}$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) \leq \frac{1}{c_n x} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) - f(x) \right) \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \quad (5.4)$$

olur.

İspat:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_n(f; x) &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right] \\ &= \frac{-\varphi_n'(x)}{\varphi_n^2(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \\ &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \frac{-\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] \end{aligned}$$

olur. $\varphi_n'(x) = a_{n,\nu} \varphi_n(x)$ ve $a_{n,\nu} = \frac{\varphi_n^{(\nu)}(0)}{\varphi_n^{(\nu-1)}(0)}$ koşullarının kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_n(f; x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) (-a_{n,\nu}) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) a_{n,\nu} \varphi_n^{(\nu-1)}(0) \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right] \\ &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) a_{n,\nu} \left[\varphi_n^{(\nu-1)}(0) \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!} - \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right] \right\} \end{aligned}$$

(5.3) den de ,

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\varphi_n(x)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) a_{n,\nu} \left[\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right] \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right\}$$

elde edilir. $a_{n,\nu} \leq \frac{1}{c_n}$ eşitsizliği de kullanılırsa,

$$\frac{d}{dx} L_n(f; x) \leq \frac{1}{xc_n} \frac{1}{\varphi_n(x)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) \left[\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right] \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right\} \quad (5.5)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(x) \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right) \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} &= f(x) \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{a_{n,\nu}} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &\quad - xf(x) \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &= xf(x) - xf(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup, (5.5) göz önünde bulundurulursa, ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.1 (2.1) ile tanımlanan $(L_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisi için,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq M_1(c_n x)^{\alpha/2} \Leftrightarrow f \in Lip_{M_2}(\alpha), (0 < \alpha \leq 1, 0 \leq x \leq a \leq 1) \quad (5.6)$$

dir.

İspat: (Gereklilik): (5.4) den taraf tarafa mutlak değer alınıp süreklilik modülünün (vii) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dx} L_n(f; x) \right| &\leq \frac{1}{c_n x} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}}\right) - f(x) \right| \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\leq \frac{1}{c_n x} \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x}{\delta} \right| + 1 \left| \omega(f; \delta) \right| \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\leq \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\delta} \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| + \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \right\} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\left| L_n'(f; x) \right| &\leq \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\delta} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\
&\quad + \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right| \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}
\end{aligned}$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left| L_n'(f; x) \right| &\leq \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \frac{1}{\delta} L_n((t-x)^2; x) \\
&\quad + \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \left\{ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \frac{1}{\delta} L_n((t-x)^2; x) + \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \left\{ L_n((t-x)^2; x) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) \frac{1}{\delta} c_n x + \frac{1}{c_n x} \omega(f; \delta) (c_n x)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olup,

$$\left| L_n'(f; x) \right| \leq \omega(f; \delta) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\sqrt{c_n x}} \right) \tag{5.7}$$

elde edilir.

Şimdi $x \leq y$ olmak üzere x den y ye (5.7) nin integrali alınır,

$$\left| \int_x^y \frac{d}{dt} L_n(f; t) dt \right| \leq \int_x^y |L_n'(f; t)| dt \leq |y - x| \omega(f; \delta) \left[\max \left\{ \frac{1}{\sqrt{c_n x}}, \frac{1}{\sqrt{c_n y}} \right\} + \frac{1}{\delta} \right] \quad (5.8)$$

olur. $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - L_n(f; y)| + |f(x) - L_n(f; x)| + \int_x^y |L_n'(f; t)| dt$ eşitsizliğinde

(5.8) kullanılırsa, $|L_n(f; x) - f(x)| \leq M_1(c_n x)^{\alpha/2}$ olduğundan,

$$|f(y) - f(x)| \leq M_1(c_n y)^{\alpha/2} + M_1(c_n x)^{\alpha/2} + |y - x| \omega(f; \delta) \left(\frac{1}{\sqrt{c_n x}} + \frac{1}{\delta} \right)$$

olup,

$$|f(y) - f(x)| \leq 2M_1(c_n y)^{\alpha/2} + |y - x| \omega(f; \delta) \left(\frac{1}{\sqrt{c_n x}} + \frac{1}{\delta} \right) \quad (5.9)$$

elde edilir.

$c > 0$ için, her $x \in [0, a]$ ve $n = 2, 3, \dots$ için $\sqrt{c_{n-1}x} \leq c\sqrt{c_n x}$ eşitsizliğini sağlayan bir c sabiti vardır. Diğer taraftan, $\sqrt{c_n x}$ n -e göre azalan ve her $t \in [0, a]$ için bir $\delta > 0$ seçebiliriz öyle ki, $\sqrt{c_n t} \leq \delta \leq \sqrt{c_{n-1}t} \leq c\sqrt{c_n t}$ olur. Bu durumda (5.9),

$$|f(y) - f(x)| \leq 2M_1\delta^\alpha + |y - x| \omega(f; \delta) \left(\frac{c+1}{\delta} \right) \quad (5.10)$$

şeklinde olur.

(5.10) da $|y - x| \leq h$ üzerinden de supremum alırsak,

$$\omega(f; h) \leq 2M_1\delta^\alpha + h\omega(f; \delta) \left(\frac{c+1}{\delta} \right)$$

olur. Burada $M^* = maks\{2M_1, c+1\}$ alınırsa,

$$\omega(f; h) \leq M^* \left\{ \delta^\alpha + \frac{h}{\delta} \omega(f; \delta) \right\}$$

dir. $2M^* < A^{1-\alpha}$ olacak şekilde $A > 1$ kabul edelim. $h = h_n = A^{-n}$ ve $\delta = h_{n-1}$ seçilirse, $h_n < h_{n-1}$ olduğundan (Berens ve Lorentz 1972) teoremindeki benzer hesaplama ile,

$$\omega(f; h) \leq M_2 h^\alpha$$

elde edilir. Burada $M_2 = 2M^* A^{2\alpha}$ dir. Son eşitsizlikte, $h = |y - x|$ alınırsa teoremin ilk kısmı elde edilir.

(Yeterlilik): $(L_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisinin monotonluk özelliğinden faydalanılarak, eğer $f \in Lip_{M_2}(\alpha)$ ise;

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) \\ &\leq L_n(M_2 |t - x|^\alpha; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği kullanılırsa, $p = \frac{2}{\alpha}, q = \frac{2}{2-\alpha}; p, q \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olup,

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq M_2 \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right|^\alpha \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \\ &\leq M_2 \left\{ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{a_{n,\nu}} - x \right)^2 \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right\}^{\alpha/2} \left\{ \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_n^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} \right\}^{2-\alpha/2} \\ &= M_2 \left(L_n((t-x)^2; x) \right)^{\alpha/2} \\ &= M_2 (c_n x)^{\alpha/2} \end{aligned}$$

dir. Burada $M_2 = M_1$ alındığında ispatın ikinci kısmı da elde edilir.

Teorem 5.2.2 ($L_n(f; x)$), (2.1) ile tanımlı ve $f \in C[0, a]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler denktir:

$$(i) \quad \left\| L_n(|f(\cdot) - f(x)|; x) \right\|_{C[0, a]} \leq c_1 \sqrt{c_n a} \quad (5.11)$$

$$(ii) \quad \omega(f; \sqrt{c_n a}) \leq c_2 \sqrt{c_n a}. \quad (5.12)$$

Burada $\omega(f; \delta)$, f nin süreklilik modülü ve c_1, c_2 pozitif reel sabitlerdir.

İspat: (Gereklilik): (5.11) sağlansın. Bu durumda Teorem 5.2.1 den söylenebilir ki bir pozitif c_2 sabiti vardır öyle ki, $f \in Lip_{c_2}(1)$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \omega(f; \sqrt{c_n a}) &\leq \sup_{\substack{x, t \in [0, a] \\ |t-x| \leq \sqrt{c_n a}}} |f(t) - f(x)| \\ &\leq c_2 \sup_{\substack{x, t \in [0, a] \\ |t-x| \leq \sqrt{c_n a}}} |t-x| \\ &\leq c_2 \sqrt{c_n a} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

(Yeterlilik): (3.13) de $\delta = \sqrt{c_n a}$ seçilirse

$$L_n(|f(t) - f(x)|; x) \leq 2\omega(f; \sqrt{c_n a})$$

elde edilir. Her iki taraftan norm alınırsa,

$$\begin{aligned} L_n\left(\|f(\cdot) - f(x)\|_{C[0, a]}; x\right) &\leq 2\omega(f; \sqrt{c_n a}) \\ &\leq 2c_2 \sqrt{c_n a} \\ &\leq c_1 \sqrt{c_n a} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $2c_2 = c_1$ dir.

Sonuç 5.2.1 $f \in C[0, a]$ olmak üzere (5.11) ve (5.12) eşitsizlikleri sağlansın. Bunlarla birlikte $st - \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ koşulunu sağlayan bir $\{c_n\}$ dizisi var olsun. Bu durumda $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{c_n} a = 0$ olup bu koşullar altında

$$st - \lim_n \|L_n f - f\|_{C[0, a]} = 0$$

olur.

5.3 Yaklaşım Hızının Zygmund Modülü ile Hesaplanması

Tanım 5.3.1 (Zygmund Modülü)

$f \in C[0, a]$ ve $\delta > 0$ için,

$$\omega_2(f; \delta) = \sup \left\{ |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|; (x+h, x-h) \in [0, a], |h| \leq \delta \right\} \quad (5.13)$$

ile tanımlanan $\omega_2(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun Zygmund modülü denir.

Tanım 5.3.2

$$Lip_M^*(\alpha) = \left\{ f : \begin{array}{l} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq Mh^\alpha; f \in C[0, a], \\ x \in [h, a-h], 0 < h < \frac{a}{2}, |h| \leq \delta \end{array} \right\} \quad (5.14)$$

kümesindeki fonksiyonlara ikinci çeşit Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar denir.

Tanım 5.3.3 $f \in C[0, a]$ ve $\delta > 0$ olmak üzere,

$$K(f; \delta_n) = \inf_{g \in C^2[0, a]} \left\{ \|f - g\|_{C[0, a]} + \delta_n \|g\|_{C^2[0, a]} \right\} \quad (5.15)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye Peetre-K fonksiyoneli denir. Burada kısaltma olması açısından $\|f\|_{C[0, a]} = \|f\|$ ve $\|g\|_{C^2[0, a]} = \|g\|^*$ alınacaktır. Ayrıca $C^2[0, a]$ üzerindeki norm

$$\|g\|^* = \|g\| + \|g'\| + \|g''\|$$

şeklindedir.

Lemma 5.3.1 (İntegral Bağıntısı) $g(x)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığında ikinci basamaktan sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_x^t g''(s)(t-s) ds \quad (5.16)$$

sağlanır.

Lemma 5.3.2 $f \in C[0, a]$ olmak üzere, (2.1) ile tanımlanan $(L_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisi için,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2K \left(f; \frac{C_n x}{2} \right) \quad (5.17)$$

dir.

İspat: $g \in C^2[0, a]$ olsun. (2.1) operatörü (5.16) ile verilmiş olan integral bağıntısına uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_n(g(t) - g(x); x) &= L_n \left(g'(x)(t-x) + \int_x^t g''(s)(t-s) ds; x \right) \\ &= L_n(g'(x)(t-x); x) + L_n \left(\int_x^t g''(s)(t-s) ds; x \right) \end{aligned}$$

olur. $L_n(t-x; x) = L_n(t; x) - xL_n(1; x) = 0$ olduğu göz önüne alınarak her iki taraftan mutlak değer alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |L_n(g(t) - g(x); x)| &\leq \left| L_n(g'(x)(t-x); x) + L_n \left(\int_x^t g''(s)(t-s) ds; x \right) \right| \\ &\leq \|g'\| L_n(t-x) + \|g''\| \left| L_n \left(\int_x^t (t-s) ds; x \right) \right| \\ &= \|g''\| \left\{ L_n \left(\frac{t^2}{2} - tx + \frac{x^2}{2}; x \right) \right\} \\ &= \|g''\| \frac{1}{2} \{ L_n(t^2; x) - 2xL_n(t; x) + x^2L_n(1; x) \} \end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.1.1, Lemma 2.1.2 ve Lemma 2.1.3 ün kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} |L_n(g(t) - g(x); x)| &\leq \|g\|^* \frac{c_n x}{2} \\ &\leq \|g\|^* c_n x \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq |L_n(f; x) - L_n(g; x)| + |L_n(g; x) - g(x)| + |f(x) - g(x)| \\ &\leq \|f - g\| + \|g\|^* c_n x + \|f - g\| \\ &= 2\|f - g\| + \|g\|^* c_n x \\ &= 2\left\{\|f - g\| + \frac{c_n x}{2} \|g\|^*\right\} \end{aligned}$$

olup, $g \in C^2[0, a]$ üzerinden her iki yanın infimumu alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.1 $f \in C[0, a]$ olmak üzere, (2.1) ile tanımlanan $(L_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisi için,

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq c_f \omega_2\left(f; \sqrt{\frac{c_n x}{2}}\right) \quad (5.18)$$

dir.

İspat: Eğer

$$K(f; \delta) \leq c_1 \left[\omega_2\left(f; \sqrt{\delta}\right) + \min\{1, \delta\} \|f\| \right] \quad (5.19)$$

eşitsizliği (Butzer ve Berens, 1967) (5.17) de kullanılır ve $\delta = \frac{c_n x}{2}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq 2K\left(f; \frac{c_n x}{2}\right) \\ &\leq 2c_1 \left[\omega_2\left(f; \sqrt{\frac{c_n x}{2}}\right) + \min\left\{1, \frac{c_n x}{2}\right\} \|f\| \right] \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan,

$$\min \left\{ 1, \frac{c_n x}{2} \right\} = \frac{c_n x}{2} \text{ ve } \frac{c_n x}{2} \leq \omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{c_n x}{2}} \right)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &\leq 2c_1 \left[\omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{c_n x}{2}} \right) + \frac{c_n x}{2} \|f\| \right] \\ &\leq 2c_1 \left[\omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{c_n x}{2}} \right) + \omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{c_n x}{2}} \right) \|f\| \right] \\ &\leq 2c_1 \omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{c_n x}{2}} \right) (1 + \|f\|) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $2c_1(1 + \|f\|) = c_f$ seçilirse istenilen elde edilir.

Teorem 5.3.2 $f \in C[0, a]$ olmak üzere, (2.1) ile tanımlanan $(L_n(f; x))$ lineer pozitif operatör dizisi için aşağıdaki denklik sağlanır:

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq M_{\alpha, f}(c_n x)^{\alpha/2}, (0 < \alpha \leq 1, 0 \leq x \leq a < 1) \Leftrightarrow f \in Lip_{N_{\alpha, f}}^*(\alpha) \quad (5.20)$$

İspat: (Gereklik): $|L_n(f; x) - f(x)| \leq M_{\alpha, f}(c_n x)^{\alpha/2}, (0 < \alpha \leq 1, 0 \leq x \leq a < 1)$ olsun. Bu durumda, Teorem 5.2.1 den $f \in Lip_{C_{\alpha, f}}(\alpha)$ olacak şekilde $C_{\alpha, f}$ sabiti vardır. Diğer taraftan eğer $f \in Lip_{C_{\alpha, f}}(\alpha)$ ise,

$$|f(t) - f(x)| \leq C_{\alpha, f} |t - x|^\alpha$$

$$\begin{aligned} |f(x + \delta_n) - f(x) + f(x - \delta_n) - f(x)| &\leq |f(x + \delta_n) - f(x)| + |f(x - \delta_n) - f(x)| \\ &\leq 2C_{\alpha, f} |t - x|^\alpha \\ &\leq 2C_{\alpha, f} \delta_n^\alpha \end{aligned}$$

ise

$$|f(x + \delta_n) - 2f(x) + f(x - \delta_n)| \leq 2C_{\alpha, f} \delta_n^\alpha$$

olur. $N_{\alpha,f} = 2C_{\alpha,f}$ seçilirse teoremin ilk kısmı ispatlanır.

(Yeterlilik): Eğer, $f \in Lip^*_{N_{\alpha,f}}(\alpha)$ ise,

$$|f(x + \delta_n) - 2f(x) + f(x - \delta_n)| \leq N_{\alpha,f} \delta_n^\alpha$$

olur. Bu durumda,

$$\omega_2(f; \sqrt{\delta_n}) \leq N_{\alpha,f} \delta_n^{\alpha/2}$$

elde edilir. $\delta_n \leq 1$ için $\min\{1, \delta_n\} = \delta_n \leq \delta_n^{\alpha/2}$ olup, (5.19) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} K(f; \delta_n) &\leq c_1 \left[\omega_2(f; \sqrt{\delta_n}) + \min\{1, \delta_n\} \|f\| \right] \\ &\leq c_1 \left[\omega_2(f; \sqrt{\delta_n}) + \delta_n^{\alpha/2} \|f\| \right] \\ &\leq c_1 \left[N_{\alpha,f} \delta_n^{\alpha/2} + \delta_n^{\alpha/2} \|f\| \right] \\ &\leq (c_1 N_{\alpha,f} + c_1 \|f\|) \delta_n^{\alpha/2} \end{aligned}$$

dir. $\max\{c_1, c_1 N_{\alpha,f}\} = R_{\alpha,f}$ seçilirse,

$$K(f; \delta_n) \leq R_{\alpha,f} (1 + \|f\|) \delta_n^{\alpha/2}$$

olur. Bu eşitsizlik (5.17) de kullanılırsa ve $M_{\alpha,f} = 2^{1-\frac{\alpha}{2}} R_{\alpha,f} (1 + \|f\|)$ seçilirse (5.20) elde edilir.

6. SONUÇ

Bir çok lineer pozitif operatör dizisinin Korovkin tipli yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızına ait sonuçlar günümüze kadar pek çok matematikçi tarafından incelenmiştir. Detaylı bilgiler için (bkz. Altomare ve Campiti 1994). Ayrıca yapılan özel seçimlerle tanınmış lineer pozitif operatör dizilerine dönüşen birçok genelleştirme yapılmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Dolayısıyla, daha önceden genelleştirilmiş ve bilinen bazı özel operatörlere dönüşebilmesi nedeniyle öne çıkan genelleştirilmiş operatör dizilerini ele almak bu tez çalışmasını önemli kıldı.

Klasik yakınsaklık özelliklerinin incelenmiş olduğu bu operatör dizilerinin istatistiksel yakınsaklık özelliklerine ait sonuçlar elde edilerek klasik yakınsaklığa göre daha geniş bir çalışma alanı elde edilmiş oldu. Ayrıca, Voronovskaja tipli yaklaşım özelliklerine ait sonuçlar da yine istatistiksel yaklaşım ile verildi.

Diğer taraftan operatörün iki değişkenli durumda inşa edilmesiyle birlikte iki değişkenli genelleştirilmiş lineer pozitif operatör dizileri için istatistiksel yakınsaklık özellikleri ve yaklaşım hızlarına ait sonuçlar elde edildi. Ayrıca bu genelleştirmeye kısmi türevli denklemler için bir uygulama da yapıldı.

Direkt ve ters teoremlerle birlikte, genelleştirilmiş lineer pozitif operatör dizilerine ait çift taraflı sonuçlar elde edildi. Bu sonuçlar sayesinde fonksiyonun ait olduğu uzay verildiğinde yaklaşım hızı; yaklaşım hızı verildiğinde de fonksiyonun ait olduğu uzay elde edilebildi.

Tezde incelenen genelleştirilmiş lineer pozitif operatör dizisinin, tanınmış birçok operatör dizisini kapsamaması nedeniyle hem klasik hem de istatistiksel yaklaşıma ilişkin bilinen birçok operatör dizisini kapsayan sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Agratini, O. 2001. Korovkin type error estimates for Meyer-König and Zeller operators. Math. Inequal. Appl. 4(1), 119-126.
- Altomare, F. and Campiti, M. 1994. Korovkin Type Approximation Theory and its Applications. Walter de Gruyter, Berlin.
- Anastassiou, G. and Gal, S. 2000. Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation. Birkhäuser, Boston.
- Berens, H. and Lorentz, G. 1972. Inverse theorems for Bernstein polynomials. Indiana Univ. Math. Journal, 21, 693-708.
- Bleiman, B., Butzer, P. L. and Hahn, L. 1980. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi axis. Proc. Netherl. Acad. Sci. A83, Indag. Math., 42, 255-262.
- Butzer, P. L., Berens, H. 1967. Semi-groups of Operators and Approximation. Springer-Verlag, Berlin.
- Canatan, R. And Doğru, O. 2012. Statistical approximation properties of a generalization of positive linear operators. Journal of Pure and Appl. Math., 5(1), 75-87.
- Cheney, E. W. and Sharma, A. 1964. Bernstein power series. Canad. J. Math., 16, 241-253.

- Doğru, O. 2007. Necessary conditions to obtain Voronovskaja type asymptotic formulae via statistical limit. 12th. WSEAS Int. Conf. on Appl. Math., p.128-131, Cairo, Egypt.
- Doğru, O. 2008a. Approximation properties of a generalization of positive linear operators. J. of Math. Anal. Appl., 342, 161-170.
- Doğru, O. 2008b. Direct and inverse theorems on statistical approximations by positive linear operators. Rocky Mountain J. of Math., 38(6), 1959-1973.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math., 2, 241-244.
- Gadjiev, A. D. and Orhan, C. 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. of Math., 32, 129-138.
- Gonska, H. H., Badea, C. and Badea, I. 1986. A test function theorem and approximation by pseudopolynomials. Bull. Austral. Math. Soc., 34, 53-64.
- Lenze, B. 1990. Bernstein-Baskakov-Kantorovich operators and Lipschitz-type maximal functions. Approx. Th. Kecskemét, Hungary, Colloq. Math. Soc. János Bolyai., 58, 469-496.
- Lorentz, G. G. 1953. Bernstein Polynomials. Univ. of Toronto Press., Toronto.
- Lorentz, G. G. 1966. Approximation of Functions. New York .

Niven, I. And Zuckerman, H. S. 1980. An Introduction to the Theory of Numbers. John Walley and Sons, 4th ed. NewYork.

Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Res. Nat. Bureau Stand., 45, 239-245.

Volkov, V. I. 1957. On the convergence sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. (Russian) Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N.S.), 115, 17-19.

Voronovskaja, E. 1932. Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS., 79-85.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Reyhan CANATAN İLBAY

Doğum Yeri : BURSA

Doğum Tarihi : 26.01.1983

Medeni Hali : EVLİ

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Eryaman Lisesi (2001)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2005)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
(Ocak-2008)

Hakemli Dergiler

Reyhan Canatan and Ogün Doğru, Statistical Approximation Properties of a Generalization of Positive Linear Operators, European Journal of Pure and Applied Mathematics, vol.5 no.1 (2011).

Reyhan Canatan, Note on the Statistical Approximation Properties of the Modified Discrete Operators, Open Journal of Discrete Mathematics, vol.2 no.3 (2012).

Uluslararası Bildiriler

Reyhan Canatan and Ogün Doğru, Statistical Approximation Properties of a Generalization of Positive Linear Operators, International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA 2011) Yıldız Teknik Üniversitesi.

Reyhan Canatan, Note on the Statistical Approximation Properties of a Modified Discrete Operators. International Conference on Applied Mathematics & Approximation Theory (AMAT 2012) TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi.