



**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SIRALAMA TABANLI SPEKTRAL
METOTLAR İLE LİNEER KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN REEL
DÜZLEMDE ÇÖZÜLMESİ**

Ayşe Betül KOÇ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Ekim-2014
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Ayşe Betül KOÇ tarafından hazırlanan “Sıralama Tabanlı Spektral Metotlar ile Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Reel Düzlemde Çözülmesi” adlı tez çalışması 31/10/2014 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda ~~YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZİ~~ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Danışman

Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Üye

Prof. Dr. Aşır GENÇ

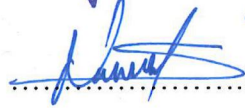
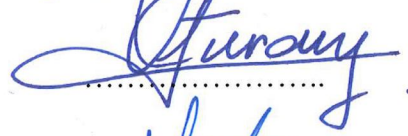
Üye

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Üye

Doç. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.



Prof. Dr. Aşır GENÇ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ayşe Betül KOÇ

Tarih: 31.10.2014



ÖZET

DOKTORA TEZİ

SIRALAMA TABANLI SPEKTRAL METOTLAR İLE LİNEER KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN REEL DÜZLEMDE ÇÖZÜLMESİ

Ayşe Betül KOÇ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın KURNAZ

2014, 94 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Aydın KURNAZ

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Prof. Dr. Aşır GENÇ

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Doç. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

Bu çalışmada, reel düzlem ve alt dörtgensel bölgelerinde tanımlı lineer kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için sıralama tabanlı spektral (pseudo-spektral) tipte iki metot verilmiştir. Ele alınan iki farklı problem bölgesi için gerekli çift değişkenli baz fonksiyonları, eksponansiyel Chebyshev ve Fibonacci polinomları kullanılarak üretilmiştir. Kare integrallenebilir uzayındaki bu fonksiyonlara ait temel özellikler incelenmiş, tekrarlılama bağıntıları ve operasyonel matrisleri elde edilmiştir. Spektral metotların temel uygulama prensibi gereğince, problemlere, tanım bölgesinin geometrisine göre belirlenecek baz fonksiyonlarının doğrusal bir kombinasyonu şeklinde çözüm aranmıştır. Önerilen metotların, doğrusal kombinasyondaki bilinmeyen spektral katsayıların bulunmasındaki etkinliği test problemleri üzerinden gösterilmiştir. Son olarak, önerilen metotlar kullanılarak elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kısmi diferansiyel denklemler; İki değişkenli eksponansiyel Chebyshev fonksiyon yaklaşımı; Fibonacci türü iki değişkenli polinom yaklaşımı; Pseudo-spektral kolokasyon metodu; Operasyonel matris

ABSTRACT

Ph.D THESIS

COLLOCATION BASED SPECTRAL METHODS FOR THE SOLUTIONS OF THE LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE REAL DOMAIN

Ayşe Betül KOÇ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

2014, 94 Pages

Jury

Advisor Assoc. Prof. Dr. Aydın KURNAZ

Prof. Dr. Mehmet SEZER

Prof. Dr. Aşır GENÇ

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Assoc. Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

In this study, two collocation based spectral (pseudo-spectral) methods are given for the numerical solutions of linear partial differential equations defined on a real domain and its rectangular sub-domains. Bivariate base functions for two different regions of the handled problem are produced by using the exponential Chebyshev and Fibonacci polynomials. The main properties of these bases which are the elements of the space of the square integrable functions are investigated, and then recurrence relations and operational matrices are obtained. In accordance with the main application principles of the spectral methods, the solutions are sought as a linear combination of the base functions determined regarding the geometry of the domain of the problems. The effectiveness of the proposed methods for finding the unknown spectral coefficients are shown on the test problems. Finally, the results are discussed.

Keywords: Partial differential equations; Bivariate exponential Chebyshev function approximation; Fibonacci type bivariate polynomial approximation; Pseudo-spectral collocation method; Operational matrix

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimimin tüm aşamalarında, gerek sosyal gerekse bilimsel alanlarda beni yönlendiren, tez çalışmamın seçimi ve yürütülmesi sürecinde de emek veren, yardımlarını, sabrını ve bilgisini esirgemeyen tez danışmanım, çok değerli hocam Doç. Dr. Aydın KURNAZ Beyefendi'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Bilgi ve tecrübelerinden her zaman istifade ettiğim, çalışma azimleriyle tüm öğrencilerine örnek olan, Tez İzleme Komitesindeki çok değerli hocalarım Prof. Dr. Galip OTURANÇ Beyefendi'ye ve Prof. Dr. Aşır GENÇ Beyefendi'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Tezime kaynaklık eden çalışmaları daha iyi anlayabilmek adına yardım talebinde bulunduğumda, beni hiç tanımadığı halde, tüm zor şartlarına ve iş yüküne rağmen talebimi geri çevirmeyen, Denizli'de nezaketiyle karşılayıp bilgi birikimlerini aktaran ve yol gösteren çok kıymetli hocam, Prof. Dr. Ayşegül AKYÜZ DAŞCIOĞLU Hanımefendi'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Yine akademik çalışmalarına kaynaklık eden bir çok eserin yazarı olan, eserlerinden son derece istifade ettiğim, mütevaziliğine ve çalışma azmine hayranlık duyduğum, akademik hayatta rol model olarak seçtiğim değerli bilim insanlarından biri olan ve tezimin jüri üyeliğini kabul ederek beni onore eden Prof. Dr. Mehmet SEZER Beyefendi'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmalarımın son döneminde tanıma imkanı bulduğum, nezaketi, zerafeti, mütevaziliği ve bilgi birikimi ile bana yol gösterici olan, beni cesaretlendiren tezimin jüri üyesi çok kıymetli hocam Doç. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL Hanımefendi'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca, bölümümüzde bizi akademik çalışmalarımız konusunda cesaretlendiren, ilminden ve deneyimlerinden faydalandığımız, aynı bölümde çalışıyor olmaktan onur duyduğum değerli hocam, Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Durmuş BOZKURT Beyefendi'ye ve bitmek tükenmek bilmeyen çalışma azmiyle hepimize model olan, tüm bilgi birikimini son cümlesine kadar aktarmaktan asla çekinmeyen değerli hocam Doç. Dr. Yıldırım KESKİN Beyefendi'ye saygı ve şükranlarımı sunarım.

Öğrencileri ve iş arkadaşları olmaktan şeref duyduğum, bilgi birikimlerinden yararlandığım, yetişmemde büyük emekleri olan bölümümüzün değerli öğretim elemanlarına ve bugünlere gelmemde emeği bulunan tüm öğretmenlerime saygı ve şükranlarımı sunarım.

Birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum, birçok özel anı paylaştığım, lisansüstü eğitimim boyunca hoşgörü ve sabırla destek olan tüm iş arkadaşlarıma ve dostlarıma sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Bir çalışanı olmaktan büyük kıvanç duyduğum, akademik çalışmalarımızda maddi ve manevi desteği ile bizi teşvik eden Selçuk Üniversitesi'ne sonsuz şükran ve minnettarlığımı sunarım.

Hayatımın her aşamasında, maddi manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, beni, ilimle her daim iç içe olacağım bir meslek sahibi olmam konusunda teşvik eden, zorlu çalışma koşullarımızı kabullenip hoşgörü ve sabırla gece gündüz demeden destek olan biricik anneme, babama ve kardeşime sonsuz sevgi, saygı, minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayşe Betül KOÇ
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	11
2.1. Hilbert Uzayı ve Ortogonallik.....	11
2.2. Sturm-Liouville Problemi ve Ortogonal Polinom Aileleri	18
2.2.1 Tek değişkenli ortogonal polinomlar	20
2.2.2. Çok değişkenli ortogonal polinomlar.....	24
2.3. Yaklaşım Teorisi ve Polinom İnterpolasyonu	27
2.3.1. Çok terimli interpolasyonu.....	30
2.3.2. Sürekli verilerde ortogonal özfonksiyon yaklaşımı	31
2.3.3. Ayrık halde ortogonal özfonksiyon yaklaşımı.....	32
2.3.4. Polinom türü yaklaşım teorisi.....	33
2.4. Fibonacci Polinomları.....	37
3. REEL DÜZLEMDE SIRALAMA TABANLI SPEKTRAL METOTLAR.....	39
3.1. Problemin Tanıtımı	41
3.2. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Eksponansiyel Chebyshev Seri Çözümü	43
3.2.1. Çift değişkenli eksponansiyel Chebyshev fonksiyonu.....	43
3.2.2. Çift değişkenli EC fonksiyonları ile matris metodu	50
3.3. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Fibonacci Polinomları Cinsinden Seri Çözümü.....	54
3.3.1. Fibonacci polinomları yardımıyla $F_{r,s}(x,y)$ polinomlarının tanımlanışı ...	54
3.3.2. $F_{r,s}(x,y)$ polinomları ile çözüm metodu	60
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	64
4.1. Çift Değişkenli Eksponansiyel Chebyshev Fonksiyon Yaklaşım Uygulaması....	64
4.2. Fibonacci Polinomları Cinsinden Yaklaşım Uygulaması.....	68
5. SONUÇLAR	84
KAYNAKLAR	87
ÖZGEÇMİŞ.....	92

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar
$(\mathbb{K}, +, \cdot)$	Reel yada karmaşık sayılar cismi
$\mathcal{C}[a, b]$	Kapalı $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{P}_N$	N . dereceden polinomlar uzayı
$\mathcal{F}$	Fonksiyonlar uzayı
R	Rezidü (Kalan)
$d(,)$	Metrik
$\ \cdot \ $	Norm
$\langle , \rangle$	İç çarpım
$ \cdot $	Mutlak değer
$[A : b]$	Arttırılmış matris
$\{T_n(x)\}_{n \geq 0}$	Chebyshev polinomlar ailesi
$\{R_n(x)\}_{n \geq 0}$	Rasyonel Chebyshev polinomlar ailesi
$\{E_n(x)\}_{n \geq 0}$	Ekspansiyel Chebyshev polinomlar ailesi
$\{F_n(x)\}_{n \geq 0}$	Fibonacci polinomlar ailesi

Kısaltmalar

ADD	Adi türevli diferansiyel denklemler
KDD	Kısmi türevli diferansiyel denklemler
SLP	Sturm-Liouville problemi
EC	Çift değişkenli ekspansiyel Chebyshev fonksiyonları

1. GİRİŞ

Bir kısım kısmi diferansiyel denklem (KDD) ler için kapalı formda çözüm elde edilebilir. Ancak kapalı formu veren teknikler ile çalışmak çok pratik değildir. Bir kısmı için ise integre edilememe gibi nedenlerle analitik çözüm elde edilemez. Bunun yanında nümerik teknikler genellikle iyi tanımlı kısmi diferansiyel denklemler için oldukça başarılı sonuçlar verir ve bilgisayar programlarının gelişmesiyle uygulanmaları da daha pratik hale gelmiştir. Sonlu elemanlar, sonlu hacimler, sonlu farklar, spektral metotları ile bu metotlardan türetilen teknikler, KDD için uygulanabilir tekniklerin en önemli örnekleri arasında verilebilir. Problem bölgesinin yapısı, istenen doğruluk derecesi ve işlem kapasitesi bu metotların seçiminde en önemli etkenlerdir. Bahsedilen metotlar şu şekilde özetlenebilir (Gottlieb ve Orszag, 1977; Fornberg, 1996; Boyd, 2000; Mason ve Handscomb, 2003; Bakioğlu, 2004; Quarteroni ve Valli, 2008):

Sonlu farklar metodunda problem bölgesi düğüm noktaları yardımıyla alt bölgelere ayrılır. Fonksiyonun türevine, düğüm noktalarının kullanıldığı yerel argümanlarla (sonlu farklarla) yaklaşılır. Örneğin, $\Delta x = h$ ve $\Delta y = k$ bölgeyi parçalayan aralıklar, $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ düğüm noktaları ve $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ olmak üzere, fonksiyonun x e göre birinci mertebe türevi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

merkezi fark ifadesi ile formülize edilebilir. KDD'in yerine her bir noktada fark denklemleri yazılarak cebirsel denklem sistemi elde edilir. Cebirsel sistemin çözümü ise ayrık noktalarda aranan fonksiyonu verir. Bu yaklaşım, uygulama kolaylığı bakımından oldukça makuldür. Çünkü, türev fonksiyonun lokal (yerel) bir özelliğidir, ilgili nokta dışında bir fonksiyon değerini kullanmak gerekli değildir (Fornberg, 1996). Ancak, bu yaklaşımda bölgenin düzgün olmaması durumunda uygulama zorlaşır.

Sonlu elemanlar metodu, problemin kompleks yapıdaki çözüm bölgesinin sonlu sayıda basit alt bölgelere (elemanlara) ayrıştırılması fikriyle şekillenmiştir. Her alt bölge üzerinde, aranan fonksiyonun parçalı polinom interpolasyonu lokal yaklaşım fonksiyonu olarak seçilip problemde yerleştirilerek diferansiyel denklem, bilinmeyen katsayılar içeren cebirsel denklemlere dönüştürülür. Böylece elde edilen denklemlerden oluşan sistemin çözülmesiyle her bir düğüm noktasında (nodda) aranan büyüklükler

bulunur. Sonlu elemanlar ve sonlu hacimler metotları ile sonlu farklar metotları uygulamada benzerdirler.

Sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotlarının ortak dezavantajı, çözümde yüksek doğruluk istenmesi halinde daha fazla nokta ile problemi ele almak veya fonksiyonun hızlı değiştiği bölgelerde eşit olmayan aralıklar ile işlem yapmak gerekeceğinden, hesaplamaların yükünün oldukça artmasıdır.

Sonlu elemanlar metotları, özellikle, 3-boyutlu yapılar gibi oldukça karmaşık geometriye sahip problemlerin ele alınışında etkili iken, dörtgensel ya da küre gibi basit düzgün bölgelerde tanımlı problemlerde spektral metotlar tercih edilerek yüksek doğrulukta sonuçlar daha kolay bir şekilde elde edilebilir.

Sonlu elemanların aksine, spektral metotlarda tanım bölgesinin tamamında geçerli baz fonksiyonu kullanılır. Kullanılacak baz fonksiyonunun bu özelliğinden dolayı spektral metotlara global tipte yaklaşım denilir. Bir fonksiyona,

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x) \quad (1.1)$$

formunda düzgün baz fonksiyonlarının toplamı olarak yaklaşılr. Kullanılan baz fonksiyonu, tüm problem bölgesi üzerinde, izolasyon noktaları haricinde hiçbir noktada sıfır olmayan, istenildiği ölçüde yüksek dereceden olabilen polinomlardır. Bu yaklaşım fonksiyonu analitik olarak diferansiyellenir. Çözüm fonksiyonu, yaklaşım fonksiyonunun probleme yerleştirilmesiyle elde edilen a_n spektral katsayılarını içeren denklemlerin meydana getirdiği cebirsel denklemlerin, belirlenecek bir kriter doğrultusunda çözülmesiyle elde edilir. Tarihsel gelişim ve teorik alt yapı bakımından spektral metotlar hakkında öncelikli başvurulacak bir kaynak olarak (Boyd, 2000) verilebilir.

Spektral metotlar, literatürde ilk olarak interpolate edilmeyen türde metotlar olarak yer almış olsa da, sıralama noktalarında çözüm arayan kolokasyon (sıralama) metodunun tanıtılmasıyla birlikte spektral metot kavramının kapsamı, sıralama noktalarında interpolasyon kurarak çözüm üreten metotları da kapsayacak şekilde genişletilmiştir. Yakın zaman çalışmalarının birçoğunda spektral metot kavramı, diferansiyel denklemlerin çözümlerini global fonksiyonların seri açılımları cinsinden veren metotların genel bir ifadesi olarak eşleştirilmiştir. Boyd'un (2000) eserinde de spektral metotlar interpolasyona dayanan ve dayanmayan metotlar olarak iki alt sınıfta

incelenmiştir. Bu sınıflama altında Galerkin ve Tau metotları interpolate edilmeyen tür ve kolokasyon (sıralama) metodu ise interpolate edilen tür metotlar olarak tanınır. Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için en çok tercih edilen metotlardan olan bu üç metot, temelde ağırlıklı kalanlar prensibine dayanır.

Tanım 1.0.1. (Ağırlıklı Kalan Prensibi) Bir bölge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ile bu bölgenin sınırları $\overline{\bigcup_{i=1}^k \partial\Omega_i} = \partial\Omega$ tanımlansın. Lineer diferansiyel operatörleri $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{B}$ olmak üzere, Ω üzerinde

$$\mathbf{L}u = f \quad (1.2)$$

lineer kısmi diferansiyel denkleminin, $\partial\Omega$ üzerinde

$$\mathbf{B}u = 0 \quad (1.3)$$

sınır koşulları altında nümerik çözümü $\bar{u}$ aransın.

Bir $\mathcal{W}$ Hilbert uzayının bir alt uzayı $\mathcal{P}_N$ olmak üzere, $\bar{u} \in \mathcal{P}_N$ çözüm fonksiyonunun (1.3) sınır koşullarını sağlayarak,

$$R = \mathbf{L}\bar{u} - f \quad (1.4)$$

rezidü (kalan) fonksiyonunu bir ağırlık fonksiyonuna göre minimize edecek şekilde belirleme prensibine ağırlıklı kalan prensibi denir (Davies,2011).

Ağırlıklı kalan prensibine dayanan metotlarda açılım (trial) fonksiyonu, $\mathcal{P}_N$ de baz fonksiyonları $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N)$; nümerik çözüm,

$$\bar{u} = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n \phi_n \quad (1.5)$$

ve rezidünün minimasyonunu belirleyen ağırlık (test) fonksiyonları, $(W_0, W_1, \dots, W_N)$ ailesi olup, Hilbert uzayındaki iç çarpım ile $\forall n \in \{0, \dots, N\}$ için

$$\langle W_n, R \rangle = 0 \quad (1.6)$$

dır.

Bu prensibe dayanan metotlardan

- sonlu farklar metodunda baz fonksiyonları olarak düşük dereceli, lokal parçalı fonksiyonlar,
- sonlu elemanlar metodunda baz fonksiyonları olarak sabit dereceli, lokal düzgün fonksiyonlar,
- spektral metotlarda baz fonksiyonu olarak keyfi dereceden, global düzgün fonksiyonlar

seçilir.

Ağırlıklı kalan prensibi ile (1.5) de geçen $\tilde{u}$ katsayılarını belirlemede kullanılan, W_n inin seçileceği aileye göre birbirinden ayrılan birçok metot vardır. Literatürde sıkça karşılaşılan Galerkin, Tau ve kolokasyon metotları gibi.

Tanım 1.0.2. (Galerkin metodu) Test fonksiyonu, sınır koşullarını sağlayacak şekilde, açılım baz fonksiyonu olarak seçilir. Yani $W_n = \phi_n$ ve $B\phi_n = 0$ olup, (1.6) bağıntısı,

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_n, R \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle \phi_n, L\bar{u} - f \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left\langle \phi_n, L \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \phi_k \right\rangle - \langle \phi_n, f \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \langle \phi_n, L\phi_k \rangle - \langle \phi_n, f \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^N L_{nk} \tilde{u}_k = \langle \phi_n, f \rangle, \quad (L_{nk} = \langle \phi_n, L\phi_k \rangle)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

ile özdeşdir. (1.7) sisteminin çözülmesiyle çözüm fonksiyonunun seri formdaki spektral katsayıları elde edilir.

Test fonksiyonu olarak $W_n = \phi_n$ açılım baz fonksiyonunun kullanılması yönüyle Galerkin metoduyla benzerlik gösteren Tau metodunda, test fonksiyonları ortogonal fonksiyon ailelerinden seçilir ve test fonksiyonlarının sınır şartlarını sağlama şartı yoktur. Bunun yerine, sınır şartları için oluşturulan cebirsel denklem, diferansiyel denklem için oluşturulan sistemin içine ekleme ya da bir bölümünün yer değiştirmesi şeklinde yerleştirilerek sınır şartları çözüme etki etmiş olur.

Tanım 1.0.3. (Kolokasyon metodu) (1.5) formundaki çözüm fonksiyonunun, bölgeden seçilen ve kolokasyon (sıralama) noktaları olarak adlandırılan belirli sayıdaki P_n , ($n = 0, 1, \dots, N$) interpolasyon noktalarında (1.4) rezidü fonksiyonunu sıfırlaması sağlanır. Test fonksiyonu $W_n = \delta(P_n)$ olarak alınır (δ : dirak delta fonksiyonu). Böylece,

$$\langle W_n, R \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \delta(P_n), R \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow R(P_n) = 0 \Leftrightarrow L\bar{u}(P_n) = f(P_n)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^N L\phi_k(P_n) \tilde{u}_n = f(P_n) \quad (1.8)$$

formunda elde edilen cebirsel denklem sistemi çözüldüğünde, (1.5) yaklaşım fonksiyonunun spektral katsayıları elde edilir.

Kronolojik olarak “spektral” kavramı ilk defa “Galerkin” kavramının özdeşi olarak kullanılmıştır. Zamanla, Galerkin metodunun, belirli noktalar ve ağırlık fonksiyonuna göre Gauss-integralleme tekniğiyle ilişkisi kullanılarak geliştirilen kolokasyon metodu, “pseudo-spektral” (sanki-spektral; sıralama tabanlı spektral) metodu olarak literatüre girmiştir (Boyd, 2000).

Pseudo-spektral metot, problemin yapısından bağımsız olması ve kolay uygulanabilirliği ile oldukça sık kullanılan nümerik metotlardan biri olmuştur. Bunun yanında, metot ile elde edilen sonuçların doğruluğu, kolokasyon noktaları ve baz fonksiyonunun problemin doğasına en uygun şekilde seçimi ile mümkündür. Uygun baz kümesinin seçiminde birtakım kurallar göz önünde bulundurulur. En önemlisi ise, “geometri ya da uygulama bölgesi baz kümesini belirler” ilkesidir (Boyd, 2000). Örneğin, bilindiği gibi $\{1, \cos(nx), \sin(nx), \dots\}$ Fourier açılımları cinsinden seçilecek baz fonksiyonları ailesi periyodiktir. Dolayısıyla, bu aile, periyodik davranış sergileyen problemlerin çözümü için oldukça uygun baz alternatifi olacaktır (Boyd, 2000; Canuto ve ark, 2006; Agarwal ve O'Regan, 2009). Seçilecek baz kümesine göre de kolokasyon noktaları belirlenir. Taylor, Chebyshev, Legendre ve Fibonacci polinomları ise en sık kullanılan baz fonksiyonları arasındadır.

Chebyshev polinom ailesinin baz fonksiyonları olarak seçildiği nümerik metotlar birçok problemin çözümünde başarılı sonuçlar vermiştir. Tarihsel süreçte denklemler

için Chebyshev seri açılımına dayalı çözüm arayışı ile ortaya çıkan çalışmalar, spektral metotların gelişimine de öncülük etmiştir. Bu metotların gelişimi ise beraberinde alternatif baz fonksiyonlarının da kullanılabilirliği sonucunu doğurmuştur. Bu konudaki başlıca eserler şu şekilde sıralanabilir:

Kolokasyon yaklaşımı ilk defa Slater (1934) ve Kantorovich (1934) tarafından kullanılmış olsa da (Guo,1998), ortogonal kolokasyonu ilk defa Lanczos (1938) kullanmıştır.

Lanczos (1938) da yaptığı çalışmaları geliştirerek 1957 de yazdığı kitabında, diferansiyel denklemlerin çözümünü $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ formunda ele almış ve bilinmeyen katsayılarını elde etme problemi için, seri formdaki çözüm diferansiyel denklemi sağlayacak şekilde, iki tür yaklaşım yapılabileceği görüşünü savunmuştur. İlkinde, bir küçük terimle pertürbe edilmiş diferansiyel denklemde bağımsız değişkenin kuvvetlerine göre ya da polinomun kuvvetlerine göre bilinmeyen katsayılar eşitlenerek çözüme gidilir. İkincisinde ise seri form, denklemi çeşitli bağımsız noktalarda sağlayacak şekilde kurulur. Lanczos, bu metodunda, çözümü Chebyshev polinomları cinsinden aramamış, yalnızca Chebyshev serilerinin yakınsaklık özelliğinden faydalanmıştır. Lanczos sunduğu metodu, seçilmiş noktalar ve Tau (τ) metodu olarak adlandırmıştır.

Clenshaw (1957), bir fonksiyonun (s). mertebeden ile ($s+1$). mertebeden türevlerine ait Chebyshev seri açılımlarındaki katsayıları arasındaki bağıntıyı formülize etmiştir. Bu bağıntı yardımıyla, sonlu aralıkta tanımlı, reel değerli, adi türevli diferansiyel denklem (ADD) lerin sayısal çözümü için Chebyshev seri açılımında bilinmeyen katsayıların sistematik olarak elde edilmesine yönelik bir metot sunmuştur. Bu metot, Lanczos'un (1957) bahsi geçen birinci tür yaklaşımını andırmakla birlikte, burada çözüm tamamen Chebyshev polinomları cinsinden elde edilir.

Lanczos ve Clenshaw tarafından sunulan metotlar, Fox (1962) tarafından tekrar karşılaştırmalı olarak ele alınmıştır. Clenshaw'un metoduna dair görüşlerini belirtmiş ve metodun küçük dereceli polinomlar ile çalışılması durumunda kullanışlı olacağını göstermiştir.

Clenshaw ve Norton (1963) ise Lanczos'un ikinci tip yaklaşım fikrinden hareketle, Picard metoduna ve sıralama prensibine dayanan iteratif bir prosedür vermiştir. Bu metot, birçok diferansiyel denklem türü için uygulanabilir olmakla birlikte işlem yükünü arttırmıştır.

Wright (1964), ADD'ler için kolokasyon noktalarına dayalı 2 temel çözüm metodu tanıtmıştır. Bunlardan birincisini Picard varlık teoreminden hareketle geliştirmiş olup, ikincisinde diferansiyel denklemin lineerleştirilmesi formunu kullanmıştır. Çözüm sonlu Chebyshev serileri cinsinden ele alınmış, metoda ait özellik ve uygulamaları verilmiştir. Kolokasyon noktalarının tanım aralığındaki yerlerini, rezidüyü küçültecek şekilde seçilmesi gerektiğini ortaya koymuştur.

Scraton (1965), Clenshaw'un metodunu geliştirerek, değişken katsayılı ADD'de, değişken katsayıları temsil eden fonksiyonları da seri forma dahil eden bir metod sunmuştur.

Fox ve Parker (1968) tarafından sunulan kitapta, polinomal yaklaşım teorisi, interpolasyon ve sürekli ve ayrık halde en küçük kareler yaklaşımı gibi nümerik analizin başlıca konuları Chebyshev polinomları ile yeniden ele alınmış, uygulamalarla desteklenmiştir. Yine Chebyshev polinomlarının kullanıldığı Tau ve seçilmiş noktalar metodları uygulamalı olarak verilmiştir. Chebyshev polinomlarının ortogonallığı, katsayılar arasındaki integral ilişkileri gibi birçok temel özelliğinde en sade biçimde sunulduğu bu kitap Chebyshev polinomlarının nümerik analize entegrasyonu üzerine temel bir kaynak eserdir.

Oliver (1969), ADD'lerin Chebyshev seri çözümleri için hata tahmini tekniğini tanıtmıştır.

KDD'ler için spektral metodların kullanılması 1970'li yıllarda yaygınlaşmaya başlamıştır. Bu alandaki ilk çalışmalar, Kreis ve Oliger (1972) ve Orszag (1972) tarafından sunulan pseudo-spektral metod uygulamalarıdır (Guo,1998).

Basu (1973), Chebyshev polinomları yardımıyla, iki değişkenli Chebyshev polinom ailesini tanıtmıştır. Tek değişkenin sahip olduğu ortogonallık ve seri açılım gibi temel özelliklerin iki değişkenli Chebyshev polinomları için de geçerli olduğunu göstermiş ve bir problem çözümü için tanıtılan polinomu kullanmıştır.

Gottlieb ve Orszag (1977), yaklaşım teorisi ve yakınsaklık teorisini özetleyerek spektral metodların teorik altyapısını sunmuş ve nümerik analizlerini yapmışlardır. Ayrıca galerkin, tau ve kolokasyon metodlarını, özel kısmi türevli denklemlere uygulamış ve karşılaştırmalı sonuçları tablo ve grafiklerle desteklemişlerdir. Teorik ve uygulamalı olarak hazırlanan bu kitap, spektral metodlar konusunda temel kaynak eserler arasındadır.

Horner (1982), eliptik tipte kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde çift değişkenli Chebyshev seri metodunu kullanmıştır (Doha,1992).

Doha (1992), ortogonal Chebyshev polinomlarının tensör çarpımını birden çok değişkenli fonksiyonlara yaklaşım için kullanmıştır. Basu (1973) tarafından tanımlanan iki değişkenli Chebyshev polinomlarının KDD çözümlerinde spektral metotları ile kullanılabilmesi için sonsuz türevlenebilir çift değişkenli fonksiyon ve türevine ait seri açılımlardaki bilinmeyen katsayıları arasındaki rekürans bağıntısını vermiştir. Poisson denkleminin çözüm fonksiyonunu tau metodu ile araştırmıştır. Ayrıca, üç değişkenli Chebyshev polinomunu tanıtmış ve üç değişkenli fonksiyon ve türevlerinin seri açılımlarındaki katsayıları arasındaki bağıntıyı da vermiştir.

Bilgisayar programlarının gelişimiyle spektral metotların da uygulamaları daha pratik hale gelmiş ve bu durum lineer ve lineer olmayan birçok problemin çözümünde sıklıkla tercih sebebi olmuştur.

Lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için, Pseudo-spektral uzantılı Chebyshev matris metodu, Sezer ve Kaynak (1996) tarafından tanıtılmıştır. Problemlere uygulanacak çözüm prosedürünün kullanışlı olması ve bilgisayar programları yardımıyla kısa sürede oldukça başarılı çözümlerin elde edilmesi, bu metoda ilgiyi arttırmıştır. Metodun tanıtıldığı tarihten günümüze, birçok problem, matris metodu kullanılarak yeniden ele alınmıştır. Metodun uygulandığı Riccati denklemi (Gülsu ve Sezer, 2006), lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemleri (Baykuş ve Sezer, 2011), yüksek mertebeden kesirli diferansiyel denklem sistemleri (Khader ve ark., 2013), gecikmeli diferansiyel denklemleri (Yüzbaşı ve ark., 2013) ve lineer Volterra integral denklem sistemleri (Mirzaee ve Bimesl, 2014) örnek olarak verilebilir.

Chebyshev polinomlarının temel özelliklerinin çok değişkenli durumlara genişletilmesine yönelik çalışmalar Fox ve Parker (1968), Basu (1973), Doha (1992) ve Mason ve Handscomb (2003) tarafından sunulmasının sonrasında kısmi türevli diferansiyel denklemler için çift değişkenli Chebyshev polinomlarının kullanıldığı matris metotları Keşan (2003) ve Akyüz-Daşcıoğlu (2009) tarafından tanıtılmıştır.

Ne var ki, Chebyhev polinomlarının $[-1,1]$ aralığı üzerinde ortogonal polinomlar olmaları, bu polinomların yalnızca $[-1,1]$ tanım aralığındaki problemler üzerine yapılan çalışmalarda kullanılabilir kılınmıştır. Dolayısıyla, doğal olarak daha geniş aralıklarda ve özel olarak sınırsız aralıklarda tanımlı problemlere Chebyshev yaklaşımı yapılamayacaktır. Bu kısıtlamayı ortadan kaldırmak için, araştırmacılar tarafından Chebyshev polinomları üzerinden çeşitli dönüşümlerle yeni polinom aileleri geliştirilmiştir.

Boyd (1987), negatif olmayan reel eksen üzerinde, bir alternatif olarak, rasyonel Chebyshev polinomları olarak adlandırılan polinom ailesini ve temel özelliklerini tanıttı. Rasyonel Chebyshev polinomları $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ da ortogonaldır (Guo ve ark., 2002). Negatif olmayan reel ekseninde tanımlı yüksek mertebeden adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için, Parand ve Razzaghi (2004) rasyonel Chebyshev Tau metodunu, Sezer ve ark. (2011) ise rasyonel Chebyshev kolokasyon metodunu sunmuşlardır.

Tarafımızdan (Kaya ve ark., 2011), $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ da ortogonal olan eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları tanıtılmış ve reel eksen üzerinde tanımlı adi türevli denklemlerin çözümü için Eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları ile Tau ve kolokasyon metotları geliştirilmiştir.

Ayrıca, tarafımızdan (Koç ve ark., 2012; Koç ve ark., 2013) bölge dönüşümüne gerek kalmaksızın reel eksen üzerindeki herhangi kapalı aralıkta tanımlı sınır değer problemlerine başarılı nümerik çözümler veren kullanışlı bir metot önerilmiştir. Çalışmada, (1.8) de verilen kolokasyon algoritmasının kullanıldığı çözüm prosedürü, Fibonacci polinomları cinsinden seri açılım üzerine kurulmuştur. Genelleştirilmiş pantograf denklemleri için de Fibonacci polinomları cinsinden çözüm elde edilmiştir (Koç ve ark., 2014).

Tez kapsamında, reel düzlem ve alt bölgelerinde tanımlı problemlerin pseudo-spektral çözümü için, (1.8) de verilen kolokasyon algoritmasının kullanıldığı iki metot tanıtılacaktır. Metotlarda uygulanacak temel algoritmalar ortak olmakla birlikte, problemin bölgesine göre seçilecek baz fonksiyonuna göre çözüm prosedürü şekillenecektir.

Bu doğrultuda, $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x, y < \infty\}$ üzerindeki bir düzlemsel bölgede tanımlı problemlerin çözüm algoritmasında, çift değişkenli eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları olarak adlandırılacak alternatif bir baz fonksiyonu kullanılacaktır. İki değişkenli Chebyshev polinomlarının tanım bölgesini reel düzleme taşıyan bir dönüşümle tanımlı bu baz fonksiyonu, eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları yardımıyla kurulacaktır. Çift değişkenli eksponansiyel Chebyshev fonksiyonlarının ortogonalite gibi temel özellikleri de araştırılacaktır.

$\Omega = \{(x, y) : (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ bölgesinde tanımlı problemlerin çözüm algoritmasında ise bölge dönüşümüne ihtiyaç duymadan doğrudan

kullanılabilecek bir baz fonksiyonu seçilecektir. Fibonacci polinomlarının reel ekseninde tanımlı olması sebebiyle, bu baz, çift değişkenli bir polinom ailesi olarak Fibonacci polinomları yardımıyla kurulacaktır.

Son olarak, belirlenen baza göre (1.8) algoritmasının probleme uygulanmasıyla elde edilecek lineer denklem sistemi, matris denklemlerine dönüştürülecektir. Bu dönüşüm esnasında türev işlemleri operasyonel matrisler ile temsil edilecektir. Çözüm fonksiyonunda aranan katsayılar ise bir vektörel form ile temsil edilecektir. Böylece oluşturulacak cebirsel denklemin çözümü aranacaktır.

Tez kapsamında tanıtılacak metotların temel çalışma prensibi olan problemin cebirsel sisteme dönüştürülmesi algoritması, (Akyüz-Daşcıoğlu, 2009) çalışmasında verilen çözüm algoritmasıyla benzerlik gösterir. Ancak, bahsedilen çalışmada geçen metotla yalnızca $[-1,1] \times [-1,1]$ tanım bölgesindeki problemler için başarılı çözümler elde edilebilir. Dar uygulama alanı oluşu metodun en büyük dezavantajıdır. Tezde tanıtılacak baz fonksiyonları ile yapılandırılacak metotlarla, reel düzlemin herhangi alt bölgesinde tanımlı herhangi bir lineer kısmi diferansiyel denkleme çözüm aranabilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde tanıtılacak metotların dayandığı temel yapılar ile kullanılan kavramlara ait özet bilgiler, literatürde mevcut olan kitap, makale vs. eserlerinden faydalanılarak verilecektir.

2.1. Hilbert Uzayı ve Ortogonallik

Nümerik analizde, bir nümerik çözümün gerçek çözüme olan yakınlığının test edilmesine ihtiyaç duyulur. Bunun için ise yaklaşımla gerçek çözüm arasındaki farkı nicel olarak ortaya koyacak ölçülere ihtiyaç duyulur. Örneğin vektör uzayındaki bir vektöre ait bir norm istenen ölçüyü sağlayabilir. Seçilecek norma göre elde edilecek hata düzeyleri, metodun duyarlılığını sergiler. Bu yüzden norm kavramı ve bu kavramı ortaya koyan yapılar, (Kreyszig, 1989; Kreyszig, 2006; Atkinson ve Han, 2009) çalışmalarından faydalanılarak kısaca aşağıda tanıtılacaktır. Ayrıca, tez kapsamında tanıtılacak metotlara baz teşkil edecek fonksiyon aileleri Hilbert uzayından seçileceğinden, Hilbert uzayı ve ortogonallik kavramı da bu kısımda verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Metrik uzay) X boş olmayan bir küme olmak üzere, her $x, y, z \in X$ için

$$\text{m.1. } d(x, y) \geq 0$$

$$\text{m.2. } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{m.3. } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{m.4. } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

aksiyomlarını sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir. X üzerinde bir metrik tanımlanmasıyla oluşan (X, d) yapısına metrik uzay denir.

Verilen bir küme üzerinde farklı metrikler kullanılarak çeşitli metrik uzaylar elde edilebilir (Kreyszig, 1989).

Örnek (Reel eksen $\mathbb{R}$): Tüm reel sayıların kümesi üzerindeki genel metrik

$$d(x, y) = |x - y| \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek (İki boyutlu Euclidean düzlemi $\mathbb{R}^2$): $x = (\xi_1, \xi_2)$, $y = (\eta_1, \eta_2)$ gibi reel sayı çiftlerinden oluşan bir küme üzerindeki Euclidean metriği

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2} \quad (\geq 0) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek (Sürekli fonksiyonlar uzayı $\mathcal{C}[a, b]$): t , bir bağımsız değişken olmak üzere, reel değerli ve $J = [a, b]$ üzerinde tanımlanmış sürekli fonksiyonlar uzayındaki herhangi iki $x(t), y(t)$ fonksiyonlarının üzerinde

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)| \quad (2.3)$$

metriği tanımlıdır.

Örnek (Sınırlı fonksiyonlar uzayı $B(A)$): Verilen bir A kümesi üzerinde tanımlı ve sınırlı fonksiyonlardan oluşan $B(A)$ için

$$d(x, y) = \sup_{t \in A} |x(t) - y(t)| \quad (2.4)$$

metriği tanımlıdır. Burada, metrik aksiyomlarından üçüncüsü kullanılarak

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \sup_{t \in A} |x(t) - z(t)| + \sup_{t \in A} |z(t) - y(t)| \end{aligned} \quad (2.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.1.2. (Vektör uzayı) Boş olmayan bir X kümesi ve $\mathbb{K}$ reel ya da kompleks sayılar cismi verilsin. $(X, +)$ değişmeli grup ve $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere, $\oplus : X \times X \rightarrow X$, $\otimes : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ dönüşümleri ile $\forall a, b \in \mathbb{K}$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$v.1. a \otimes x \in X$$

$$v.2. a \otimes (b \otimes x) = (ab) \otimes x$$

$$v.3. (a + b) \otimes x = a \otimes x \oplus b \otimes x$$

$$v.4. a \otimes (x \oplus y) = a \otimes x \oplus a \otimes y$$

$$v.5. e \otimes x = x, (e, \mathbb{K} \text{ cisminin birim elemanı})$$

aksiyomları sağlanıyorsa X kümesine $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.3. (Komşuluk) (X, d) metrik uzayında, bir a noktasına uzaklığı ε ’dan küçük olan noktaların kümesine, a noktasının ε -komşuluğu denir.

Tanım 2.1.4. (Cauchy dizisi) (x_n) , (X, d) metrik uzayında bir dizi olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $m, n > N$ için, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon)$ varsa, bu (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.5. (Tam uzay) Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak (yani, X ’de limit değeri mevcut) ise bu metrik uzaya tamdır denir.

Tanım 2.1.6. (Normlu uzay) Bir X vektör uzayı üzerinde, norm ile bir metrik tanımlanmasıyla oluşan uzaya normlu uzay denir ve $(X, \|\cdot\|)$ notasyonu ile ifade edilir. X üzerinde tanımlı bir norm, her $v \in X$ deki değeri $\|v\|$ şeklinde reel değerli bir fonksiyondur. X üzerinde, her $u, v \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ için

$$\text{n.1. } \|v\| \geq 0$$

$$\text{n.2. } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$\text{n.3. } \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$$

$$\text{n.4. } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

aksiyomları gerçeklenir (Kreyszig,1989).

Tanım 2.1.7. (Banach uzayı) Eğer X normlu uzayı, norm tarafından tanımlanan metriğe gore tam ise bu normlu uzaya Banach uzayı denir (Kreyszig,1989).

rnek: $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ve $J = [a, b]$ olmak üzere, sürekli fonksiyonlar uzayı $\mathcal{C}[a, b]$,

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \quad (2.6)$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

rnek: Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω bölgesi üzerinde tanımlı, reel değerli, mutlak değerinin p . kuvveti Lebesgue anlamında integre edilebilen yani,

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx < \infty$$

eğitsizliğini sağlayan, lülebilir $v(x)$ fonksiyonlarının uzayı $\mathcal{L}^p(\Omega)$ 'dir. $\mathcal{L}^p(\Omega)$ üzerinde

$$\|v\|_p = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (2.7)$$

normu tanımlıdır ve bu uzay bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.8. (İ arpım uzayı) zerinde i çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayına i çarpım uzayı denir. X vektör uzayındaki i arpım, $X \times X$ den $\mathbb{K}$ cismine tanımlı bir

dönüşüm olup x ve y vektörlerinin görüntüsü $\langle x, y \rangle$ şeklindedir. Ayrıca, her $x, y, z \in X$ vektörleri ve her $\alpha \in \mathbb{K}$ skaleri için, iç çarpım ile

$$\text{i.1. } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\text{i.2. } \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$\text{i.3. } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\text{i.4. } \langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

aksiyomları sağlanır (Kreyszig, 1989).

Örnek : $N \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{P}_N$, en yüksek N . dereceden cebirsel polinomların uzayı olsun ve ağırlık fonksiyonu $\omega : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olarak verilsin.

$$\|v\|_{\omega} = \left(\int_a^b |v(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Euclidean normu ile

$$\mathcal{L}_{\omega}^2(I) = \{v : I \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ Lebesgue ölçülebilir ve } \|v\| < \infty\} \quad (2.9)$$

uzayında tanımlı u ve v şeklinde iki fonksiyonun $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre iç çarpımı,

$$\langle u, v \rangle_{w(x)} = \left(\int_a^b u(x)v(x)\omega(x)dx \right) \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.9. (Hilbert uzayı) Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımdan üretilen metriğe göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Bir iç çarpım, üzerindeki vektör uzayında aynı zamanda $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ şeklinde bir norm ve dolayısıyla $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ şeklinde bir metrik tanımlar. Buradan açıktır ki, her iç çarpım uzayı bir normlu uzay ve her Hilbert uzayıda bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1989).

Örnek : Her $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ için $w(x): [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \quad (2.11)$$

dönüşümü $\mathcal{C}[a, b]$ üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpımla birlikte

$$S = \left\{ f \mid f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b f^2(x)w(x)dx < \infty \right\} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanan küme bir Hilbert uzayıdır ve $\mathcal{L}_w^2(a, b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. (Ortogonalite) Bir iç çarpım uzayının iki vektörü bir birine dik ise, yani, $\langle x, y \rangle = 0$ ise bu iki vektör ortogonaldır denir. Eğer bu vektörlerin normları da 1 ise bu vektörler ortonormal vektörler olarak adlandırılır.

Ortogonal (veya ortonormal) elemanlardan oluşan bir küme sayılabilirse, elemanlar indislenerek küme (x_n) dizisi şeklinde ifade edilebilir ve bu küme ortogonal dizi (veya ortonormal dizi) olarak adlandırılır.

Lemma 2.1.1. Ortonormal bir küme lineer bağımsızdır (Kreyszig, 1989).

Örnek : $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ve $y = (\eta_j) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ uzayı, üzerinde tanımlanan

$$\langle x, y \rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n \quad (2.13)$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır. Buradan

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^{1/2} \quad (2.14)$$

normu ve

$$d(x, y) = \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = \left[(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2 \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

Euclidean metriği elde edilir.

Ortogonalite tanımında geçen ortogonal kümenin elemanları, bir Sturm-Liouville probleminden elde edilecek öz fonksiyonlardan seçilebilir. Bu durumda küme, ortogonal polinom ailesi olarak adlandırılır.

2.2. Sturm-Liouville Problemi ve Ortogonal Polinom Aileleri

Bu bölümde, özfonksiyonları ortogonal olan Sturm-Liouville problemi ve bazı ortogonal polinomlara ait tanımlar verilecektir. Ayrıca, tez kapsamında tanıtılacak ilk metoda baz teşkil edecek fonksiyonların üretilmesinde kullanılacak, $\mathcal{L}_w^2(-\infty, \infty)$ de ortogonal olan eksponansiyel Chebyshev polinomları da yine bu bölümde verilecektir.

Tanım 2.2.1. (Sturm-Liouville Problemi) $[a, b]$ aralığındaki her x için, reel değerli $p(x) > 0$, $w(x) > 0$, $p'(x)$ ve $q(x)$ sürekli fonksiyonlar, λ değeri x den bağımsız bir parametre, A_1 , A_2 , B_1 ve B_2 reel sabitleri için $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$ ve $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_1 y(a) + A_2 y'(a) &= 0 \\ B_1 y(b) + B_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

sınır koşulları altında

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0 \tag{2.17}$$

ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemi ile verilen probleme Sturm-Liouville problemi (SLP) denir (Ross, 1984).

Tanımı verilen problem, regüler tipte SLP'dir. Ayrıca, problemde geçen değişken katsayıların ve sınır şartlarının özel durumlarına göre Singüler SLP ve periyodik SLP olarak sınıflandırmaları vardır. Bu sınıflandırmaların detaylarından bahsedilmeyecektir.

Herhangi λ parametresi için yukarıdaki sınır koşulları ile verilen problemin bir çözümü $y = 0$ 'dır. Problem, λ 'nın bazı değerleri için $y = y_n(x)$ biçiminde sıfırdan farklı çözümlere sahip ise bu parametrelere özdeğer (karakteristik değer), bu özdeğerlere karşılık gelen $y = \phi_n(x)$ fonksiyonlarına da özfonksiyon (karakteristik fonksiyon) denir. Problem sonsuz sayıda λ_n özdeğere sahiptir. Bu özdeğerler reel olup ve $n \rightarrow +\infty$ için $\lambda_n \rightarrow +\infty$ dur. Bu özelliği ile özdeğerler, bilim adamları tarafından reel

olması gereken titreşim, enerji gibi fiziksel niceliklerle ilişkilendirilirler (Kreyszig, 2006).

Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin en önemli özelliği ortogonal olmalarıdır. Bu özellik seri açılım formundaki çözümlerin uygulamalarını hızla artırmıştır.

Tanım 2.2.2. (Özfonksiyonların ortogonalliği) Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonlarından oluşan $n = 1, 2, \dots$ için $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonlar ailesinin herhangi farklı iki üyesi $\phi_i(x)$ ve $\phi_j(x)$, $[a, b]$ aralığında ağırlık fonksiyonu $w(x)$ 'e göre ortogonaldır. Yani, bu öz fonksiyonlar

$$\int_a^b \phi_i(x) \phi_j(x) w(x) dx = 0, \quad i \neq j \quad (2.18)$$

ortogonallik bağıntısını gerçekler. Dolayısıyla $\{\phi_n(x)\}_{n \geq 0}$ ailesine ortogonal set (ortogonal sistem) adı verilir. $\phi_n(x)$ özfonksiyonunun normu ise

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x) w(x) dx} \quad (2.19)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca, $\phi_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığı üzerinde ortogonal ve norm değerleri 1 oluyorsa bu fonksiyonlar ailesine ortonormal fonksiyonlar ailesi denir. Böylece, ortonormal bir ailenin fonksiyonları için

$$\int_a^b \phi_i(x) \phi_j(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (2.20)$$

dir.

Teorem 2.2.1. i . dereceden ϕ_i polinomlarından oluşan $\{\phi_i(x)\}_{i \geq 0}$ ailesi, bir $[a, b]$ aralığı üzerinde negatif olmayan $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal ise, her $n \geq 0$ için ϕ_n 'nin $[a, b]$ üzerinde n reel ayık kökü vardır.

2.2.1 Tek değişkenli ortogonal polinomlar

Chebyshev, Legendre, Laguerre gibi polinom aileleri de farklı bileşenlerden oluşan Sturm-Liouville problemlerinin özfonksiyon aileleridir. Literatürde, birinci çeşit Chebyshev polinomları başta olmak üzere, ortogonal özfonksiyon ailelerinden faydalanılmış birçok nümerik analiz çalışması mevcuttur.

Tanım 2.2.3. (Birinci çeşit Chebyshev polinomu) $x = \cos \theta$ olmak üzere, n . dereceden birinci çeşit Chebyshev polinomu

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.21)$$

bağıntısı ile tanımlıdır (Fox ve Parker, 1968).

Chebyshev polinomlarının x_k kökleri,

$$T_n(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.22)$$

ve kritik noktaları $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, \dots, n)$ dir (Philips, 2003).

Chebyshev polinomları için rekürans bağıntısı, (2.21) eşitliği yardımıyla elde edilecek

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

denklemlerinin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$T_{n+1}(x) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - T_{n-1}(x) \quad (2.23)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (2.24)$$

şeklinde yazılabilir.

$I_T = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$ üzerinde negatif olmayan, integrallenebilir ağırlık

fonksiyonu $w_T(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_{w_T}^2(I_T) = \left\{ f : I_T \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-1}^1 f^2(x) w_T(x) dx < \infty \right\} \quad (2.25)$$

uzayındaki iç çarpım ve norm sırasıyla,

$$\langle f, g \rangle_{w_T} = \int_{-1}^1 f(x) g(x) w_T(x) dx \quad (2.26)$$

$$\|f\|_{w_T} = \left\{ \int_{-1}^1 f^2(x) w_T(x) dx \right\}^{1/2} \quad (2.27)$$

olarak verilmiştir (Quarteroni ve ark., 2007).

$w_T(x)$ ağırlık fonksiyonu ve (2.26) de verilen iç çarpıma göre ortogonal olan Chebyshev polinomlarının ortogonalite bağıntısı ise,

$$x = \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos x \Rightarrow d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{\pi}^0 \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

dir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için $T_n(x)$,

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \quad (2.29)$$

Sturm-Liouville denkleminin öz fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.2.4. (Rasyonel Chebyshev polinomu) Birinci çeşit Chebyshev polinomu

$T_n(y)$ ve $y = \frac{x-1}{x+1}$ olmak üzere, rasyonel Chebyshev polinomları,

$$R_n(x) = T_n(y)$$

bağıntısı ile tanımlıdır (Guo ve ark., 2002).

$R_0(x) = 1, R_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$ olmak üzere $n > 1$ için rasyonel Chebyshev

polinomlarını veren rekürans bağıntısı

$$R_{n+1}(x) = 2R_1(x)R_n(x) - R_{n-1}(x) \quad (2.30)$$

dir.

$I_R = \{x : 0 \leq x < \infty\}$ üzerinde negatif olmayan, integrallenebilir ağırlık fonksiyonu $w_R(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_{w_R}^2(I_R) = \left\{ f : I_R \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^\infty f^2(x)w_R(x)dx < \infty \right\} \quad (2.31)$$

uzayındaki iç çarpım ve norm sırasıyla,

$$\langle f, g \rangle_{w_R} = \int_0^\infty f(x)g(x)w_R(x)dx \quad (2.32)$$

$$\|f\|_{w_R} = \left\{ \int_0^\infty f^2(x)w_R(x)dx \right\}^{1/2} \quad (2.33)$$

olarak verilmiştir.

(2.32) de verilen iç çarpıma göre ortogonal olan, I_R 'da tanımlı rasyonel Chebyshev polinomlarının ortogonalite bağıntısı ise,

$$\int_0^\infty R_n(x)R_m(x)w_R(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

dir (Guo ve ark, 2002).

Tanım 2.2.5. (Eksponansiyel Chebyshev fonksiyonu) Birinci çeşit Chebyshev

polinomu $T_n(y)$ ve $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ olmak üzere, eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları,

$$E_n(x) = T_n(y)$$

bağıntısı ile tanımlıdır (Kaya ve ark., 2011).

$$E_0(x) = 1, \quad E_1(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{olmak üzere } n > 1 \text{ için eksponansiyel Chebyshev}$$

fonksiyonları

$$E_{n+1}(x) = 2E_1(x)E_n(x) - E_{n-1}(x) \quad (2.35)$$

rekürans bağıntısı yardımıyla elde edilebilir.

$$\{E_n(x)\}_0^N \text{ eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları ailesi,}$$

$$4 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} E_n''(x) - \left(\frac{2}{e^x + 1} - 1 \right) E_n'(x) + n^2 E_n(x) = 0 \quad (2.36)$$

Sturm-Liouville denkleminin öz fonksiyonlarından oluşur.

$$I_E = \{x : -\infty < x < \infty\} \text{ üzerinde } w_E(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{e^x + 1} \text{ negatif olmayan, integrallenebilir,}$$

ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\mathcal{L}_{w_E}^2(I_E) = \left\{ f : I_E \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) w_E(x) dx < \infty \right\} \quad (2.37)$$

uzayındaki iç çarpım ve norm sırasıyla,

$$\langle f, g \rangle_{w_E} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) w_E(x) dx \quad (2.38)$$

$$\|f\|_{w_E} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) w_E(x) dx \right\}^{1/2} \quad (2.39)$$

olarak verilmiştir.

I_E üzerinde, eksponansiyel Chebyshev fonksiyonlarının $\langle f, g \rangle_{w_E}$ iç çarpıma göre ortogonalite bağıntısı,

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_n(x) E_m(x) \frac{\sqrt{e^x}}{e^x + 1} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

dir.

2.2.2. Çok değişkenli ortogonal polinomlar

Tanım 2.2.6. (Tensör çarpım) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ olmak üzere, $\mathbb{R}$ 'de tanımlı aralıklar $I_1, I_2, \dots, I_p$ için $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \dots, x_p \in I_p$ ise $\mathbf{x} \in \Omega$ 'dir ve

$$\Omega = I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_p, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^p) \quad (2.41)$$

tensör çarpımdır.

Tanım 2.2.7. (Çok değişkenli ağırlık fonksiyonu) Sırasıyla $\mathbb{R}$ 'deki $I_1, I_2, \dots, I_p$ aralıklarında negatif olmayan tek değişkenli $w_1, w_2, \dots, w_p$ ağırlık fonksiyonlarının tensör çarpımı

$$w(\mathbf{x}) = w_1(x_1) w_2(x_2) \dots w_p(x_p) \quad (2.42)$$

olup $w(\mathbf{x})$ de (2.41) de verilen bölgede bir ağırlık fonksiyonudur (Baudin ve Martinez, 2013).

Tanım 2.2.8. (Çok değişkenli $\mathcal{L}_w^2(\Omega)$ uzayı) (2.42) de tanımlanan ağırlık fonksiyonu $w(\mathbf{x})$ olmak üzere karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı $\mathcal{L}_w^2(\Omega)$ 'dir. Yani her $g \in \mathcal{L}_w^2(\Omega)$ için $\int_{\Omega} g^2(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{I_1} \int_{I_2} \dots \int_{I_p} g^2(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_p$ integrali sonludur.

Tanım 2.2.9. Bir $g \in \mathcal{L}_w^2(\Omega)$ fonksiyonunun Lebesgue normu

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_{\Omega} g^2(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (2.43)$$

olarak tanımlıdır.

Tanım 2.2.10. Herhangi $g, h \in \mathcal{L}_w^2(\Omega)$ fonksiyonlarının iç çarpımı,

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.44)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.11. (2.42) de tanımlanan ağırlık fonksiyonu $w(\mathbf{x})$, tek değişkenli ortogonal polinomlar ailesi $\phi_{\alpha_i^{(k)}}(x_i)$, $\{\alpha = (\alpha_i)_{i \geq 1}, \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}, |\alpha| < \infty\}$ ve $d = \sum_{i=1}^p \alpha_i^{(k)}$ olmak üzere, d . dereceden çok değişkenli polinomu

$$\Psi_k(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^p \phi_{\alpha_i^{(k)}}(x_i), \quad \left(k = 1, 2, \dots, P_d^p \text{ ve } P_d^p = \binom{p+d}{d} \right) \quad (2.45)$$

tensör çarpımı ile tanımlıdır. Bu tanıma göre verilen $\Psi_k(\mathbf{x})$ ve $\Psi_l(\mathbf{x})$ çok değişkenli polinomları ortogonaldır. Dolayısıyla (2.45) da tanımlanan fonksiyonlar aynı zamanda çok değişkenli ortogonal polinomları olarak adlandırılır (Baudin, Martinez, 2013).

Birinci tip Chebyshev polinomlarından hareketle, iki değişkenli Chebyshev polinomları da tanıtılmıştır.

Tanım 2.2.12. x değişkenine göre m . dereceden birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_m(x)$ ve y değişkenine göre n . dereceden birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_n(y)$ olmak üzere iki değişkenli Chebyshev polinomu,

$$T_{m,n}(x, y) = T_m(x) T_n(y) \quad (2.46)$$

olarak tanımlıdır (Basu, 1973).

$\Omega_T = \{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1\}$ üzerinde negatif olmayan integrallenebilir ağırlık fonksiyonu $w_T(x, y) = 1 / \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ olmak üzere iki değişkenli Chebyshev polinomları arasındaki ortogonalite,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{i,j}(x, y) T_{k,l}(x, y) w_T(x, y) dx dy = \begin{cases} \pi^2, & i = j = k = l = 0 \\ \frac{\pi^2}{4}, & i = k \neq 0, j = l \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{2}, & i = k = 0, j = l \neq 0 \\ \text{ya da} & \\ & i = k \neq 0, j = l = 0 \\ 0, & \text{diğer tüm } i, j, k, l \text{ değerleri.} \end{cases} \quad (2.47)$$

bağıntısı ile verilmiştir.

2.3. Yaklaşım Teorisi ve Polinom İnterpolasyonu

Bir fonksiyona başka bir fonksiyon ile yaklaşım sayısal analizin ana konularından biridir. $\mathcal{F}$ fonksiyonlar uzayından seçilen bir $f(x)$ fonksiyonuna uygun ve hemen hemene eşit $f_n^*(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşım fonksiyonu denir. Bir fonksiyonun yaklaşım fonksiyonu elde etme problemi 3 temel süreçten oluşur. Bunlar, yaklaşımın formunun belirlenmesi, fonksiyonun yapısına uygun baz fonksiyonunun sınıfının seçimi ve son olarak yaklaşımın fonksiyona olan yakınlığını skaler olarak veren normun belirlenmesidir. En uygun seçimler kullanılarak başarılı bir yaklaşım elde edilebilir.

Yaklaşım fonksiyonu, kullanım amacına bağlı olmakla birlikte, sıklıkla $f_n^* = \phi(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ formunda a_i , $(i = 0(1)n)$ parametrelerine bağlı olarak seçilir ve seçilecek bir kritere göre de bu parametreler belirlenir. Yaklaşımın formu, $f(x)$ 'in muhtemel yaklaşım fonksiyonlarından oluşan bir $\mathcal{A}$ ailesi tanımlar. Bir örneği,

$$\mathcal{A} = P_n = \{f^*(x) = p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$$

şeklinde tanımlı polinomlar ailesidir. $\mathcal{A}$ ailesi, $\mathcal{F}$ fonksiyonlar uzayının alt sınıfıdır ($\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$).

Yaklaşım fonksiyonunun, a_i parametrelerine doğrusal olarak bağlı olması durumunda, yaklaşım fonksiyonu önceden seçilen $\phi_i(x)$ baz fonksiyonlarının doğrusal kombinasyonu olan

$$f(x) \approx f_n^*(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i\phi_i(x) \quad (2.48)$$

formunda seçilir.

Baz fonksiyonu olarak, tek terimliler (x^i) , trigonometrik fonksiyonlar, üstel fonksiyonlar, ortogonal polinomlar ve Fibonacci polinomları gibi basit fonksiyonlar seçilir. Fonksiyonun tanımlı olduğu bölge ya da aralık X olmak üzere, baz fonksiyonlarının bağlı olduğu ailelerden bazıları

$C(X) : (X)$ üzerinde sürekli fonksiyonlar

$\mathcal{L}_\infty(X) : (X)$ üzerinde sınırlı fonksiyonlar

$\mathcal{L}_2(X) : (X)$ üzerinde karesi integrallenebilir fonksiyonlar

$\mathcal{L}_p(X) : (X)$ üzerinde $\mathcal{L}_p$ integrallenebilir fonksiyonlar

şeklinde (Mason ve Handscomb,2003).

Yaklaşım fonksiyonundaki parametrelerin belirlenmesinde kullanılan farklı kriterler vardır. En çok kullanılan kriterlerden biri yaklaşım eğrisinin verilen noktalardan geçmesi ve bu noktalarda fonksiyon ile yaklaşım fonksiyonunun ilk n türevinin birbirine eşit olmasıdır. Bu durumda yaklaşım eğrisine interpolasyon eğrisi denir. İkinci bir kriter, verilen noktalarda fonksiyon ile yaklaşım fonksiyonu arasındaki farkların karelerin toplamının en küçük olmasıdır. Bu kriter, en küçük kareler kriteri olarak adlandırılır. Diğer bir kriter ise fonksiyon ile yaklaşım fonksiyonu arasındaki farkların en büyük değerinin en küçük yapılmasıdır (Bakioğlu, 2004).

Yaklaşım fonksiyonu probleminde kriterler kullanılırken, $f(x)$ fonksiyonunun ayırık noktalarda $f(x_i)$ şeklinde verilmesi ya da sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu şeklinde verilmesi durumları da göz önünde bulundurulur.

Yaklaşım fonksiyonu f^* 'in, yaklaşılacak fonksiyon f 'e olan yakınlığının skaler ölçüsünü norm belirler ve $\|f - f^*\|$ ile gösterilir. Yakınlığın skaler değerleri kullanılacak norm ile de ilişkilidir. Fonksiyon uzayları için seçilebilecek normlardan bazıları şu şekilde verilebilir (Mason ve Handscomb,2003):

- $\mathcal{L}_\infty$ norm (Sonsuz norm, Maksimum norm, Chebyshev normu)

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

- $\mathcal{L}_2$ norm (En küçük kareler normu, Euclidean norm)

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx}$$

- $\mathcal{L}_1$ norm (1-normu, Temel norm, Manhattan norm)

$$\|f\| = \|f\|_1 = \int_a^b w(x) |f(x)| dx$$

- $\mathcal{L}_p$ norm (Hölder norm)

$$\|f\| = \|f\|_p = \left[\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

- Ağırlıklı minimaks norm

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} w(x) |f(x)|$$

($w(x)$, negatif olmayan ağırlık fonksiyonu)

Fonksiyonlar uzayı $\mathcal{F}$, bir vektör uzayı olup üzerinde tanımlanan norma göre normlu vektör (lineer) uzaydır.

Yaklaşım problemindeki fonksiyon sınıfı, yaklaşımın formu ve yaklaşımın yakınlık ölçüsü olan $\|f - f^*\|$ normu belirlendikten sonra yaklaşımın ölçüsünün kalitesi aşağıdaki üç tanımdan biri ile ifade edilir.

Tanım 2.3.1. Normlu lineer uzayı $\mathcal{F}$ de bir fonksiyon $f(x)$ ve $\mathcal{F}$ 'in bir alt uzayı olan yaklaşım fonksiyonları ailesi $\mathcal{A}$ olmak üzere, aşağıdaki tanımlamalar (Mason ve Handscomb, 2003) da verilmiştir.

1. İstenen mutlak doğruluk seviyesi $\varepsilon > 0$ için

$$\|f - f^*\| < \varepsilon \tag{2.49}$$

olacak şekilde bir $f^*(x)$ varsa, $f^*(x)$ 'e $\mathcal{A}$ 'da bir iyi yaklaşımdır denir.

2. $\mathcal{A}$ daki her $f^*(x)$ yaklaşımı için,

$$\|f - f_B^*\| \leq \|f - f^*\| \quad (2.50)$$

eşitsizliğini gerçekleyecek şekilde bir $f_B^*(x)$ varsa, $f_B^*(x)$ yaklaşımına $\mathcal{A}$ 'da bir en iyi yaklaşımdır denir.

3. ρ pozitif gerçel sayı ve $f_B^*(x)$ yaklaşımı $\mathcal{A}$ 'da bir en iyi yaklaşım olmak üzere,

$$\|f - f_N^*\| \leq (1 + \rho) \|f - f_B^*\| \quad (2.51)$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $f_N^*(x)$ varsa, $f_N^*(x)$ yaklaşımına $\mathcal{A}$ 'da ρ uzaklığında en iyiye yakın bir yaklaşımdır denir.

Verilen ($\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ gibi) herhangi bir norma $\|\cdot\|$ göre, bir fonksiyon için (2.50) de tanımlanan en iyi yaklaşım,

$$\min_{f^* \in \mathcal{A}} \|f - f^*\| \quad (2.52)$$

probleminin çözümüdür.

2.3.1. Çok terimli interpolasyonu

Yaklaşım fonksiyonunun, verilen noktalardan geçme ve verilen noktalarda türevlerinin eşitliği kriteri altında,

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (2.53)$$

şeklinde bir çok terimli olarak seçilmesi işlemine çok terimli interpolasyonu denir. İnterpolasyon çok terimlisinin bağlı olduğu a_i parametrelerinin belirlenmesi için, $n+1$ ayrık noktada düzenlenmiş $n+1$ lineer denklemden oluşan

$$p_n(x_k) = f(x_k), \quad (k = 1(1)n+1) \quad (2.54)$$

sistemini çözmek gerekir. (2.54) sistemi, ayırık noktalarda kurulduğundan bu sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0 \quad (2.55)$$

olacaktır.

Teorem 2.3.1. $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığında seçilen $n+1$ ayırık nokta için, bu noktalara karşılık gelen $f(x_k)$ değerleri ile kurulabilecek bir $p_n(x)$ çok terimli vardır ve $\mathcal{P}_n$ ailesinde tektir (Mason ve Handscomb, 2003).

2.3.2. Sürekli verilerde ortogonal özfonksiyon yaklaşımı

$I = \{x : a \leq x \leq b\}$ üzerinde negatif olmayan, integrallenebilir bir fonksiyon $w(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere, $\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$ iç çarpımına göre $\mathcal{L}_w^2 = \mathcal{L}_w^2(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b f^2(x)w(x)dx < \infty \right\}$ uzayı ve $\|f\|_w = \langle f, f \rangle_w^{1/2}$ normu tanımlansın. Bir $f \in \mathcal{L}_w^2$ fonksiyonu $\phi_k(x)$ ortogonal çok terimlilerinin kombinasyonu olarak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad (2.56)$$

seri formda yazılabilir. Burada $\phi_k(x)$ fonksiyonlarına baz fonksiyonu denir. En küçük kareler yaklaşım teorisinde yaklaşımın hatasının $\mathcal{L}_w^2$ 'de minimum yapılması ilkesi ve ortogonalite bağıntılarından hareketle seri formda c_k parametreleri için

$$c_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle_w}{\|\phi_k\|_w^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.57)$$

formülü elde edilir (Quarteroni, 2007).

Eğer baz fonksiyonu, ortonormal fonksiyon ailelerinden biri olarak seçilirse c_k katsayılarını veren bağıntı,

$$c_k = \langle f, \phi_k \rangle_w \quad (2.58)$$

bağıntısına indirgenir.

2.3.3. Ayırık halde ortogonal özfonksiyon yaklaşımı

$I = \{x : a \leq x \leq b\}$ üzerindeki $x_0, x_1, \dots, x_N \in I$ noktaları için ayırık halde bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için interpolasyon fonksiyonu, ortogonal polinomları $\{\phi_r\}_{r=0}^N$ ile

$$p_f(x) = \sum_{r=0}^N a_r \phi_r(x) \quad (2.59)$$

seri formda yazılır.

Gauss integrali ile $x_0, x_1, \dots, x_N \in I$ noktaları için ayırık halde iç çarpım

$$\langle f, g \rangle_w = \sum_{k=0}^N f(x_k) g(x_k) w(x_k) \quad (2.60)$$

ve ortogonalite bağıntıları

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_w = \sum_{k=0}^N \phi_i(x_k) \phi_j(x_k) w(x_k) = 0, \quad (i \neq j) \quad (2.61)$$

olarak tanımlıdır. Ayırık halde ortogonalite bağıntıları yardımıyla

$$\sum_{k=0}^N w(x_k) \left\{ f^2(x_k) - \sum_{r=0}^N a_r^2 \phi_r^2(x_k) \right\} \quad (2.62)$$

hata değerinin minimum yapılması ilkesinden hareketle a_r parametreleri,

$$a_r = \frac{\sum_{k=0}^N \phi_r(x_k) f(x_k) w(x_k)}{\sum_{k=0}^N \phi_r^2(x_k) w(x_k)}, \quad r = 0, 1, \dots, N \quad (2.63)$$

formülü ile belirlenir.

2.3.4. Polinom türü yaklaşım teorisi

Herhangi bir $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ fonksiyonuna n . dereceden bir polinom yaklaşımı elde etmenin en basit yolu, fonksiyonun tanımlı olduğu aralığın alt aralıklarından uygun seçilmiş, bilinen $n+1$ ayrık noktadaki fonksiyon değerleri arasında interpolasyon kurmaktır.

Klasik Weiestrass teoremi, sürekli fonksiyonlara polinom türü yaklaşımlar için temel prensiptir ve $f(x)$ fonksiyonuna bir polinom ile istenen duyarlılıkta yaklaşılabileceğini gösterir (Atkinson, 1989). Dolayısıyla seçilen bir fonksiyonun tanım aralığında yeterince yüksek dereceden bir polinomla iyi bir yaklaşım elde edilebileceğini gösterir.

Teorem 2.3.3. (Weiestrass Yaklaşım Teoremi) Bir $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ fonksiyonu ve herhangi $\varepsilon > 0$ olmak üzere, her $x \in [a, b]$ için $\|f(x) - p(x)\|_\infty \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $p(x)$ polinomu vardır.

∞ - Normda en iyi yaklaşım

$n \geq 0$ sabit sayı olmak üzere, bir $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ fonksiyonu için

$$\|f(x) - p_n(x)\|_\infty = \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_\infty \quad (2.64)$$

probleminden elde edilecek polinom, ∞ -normda n . dereceden en iyi yaklaşımdır.

Teorem 2.3.4. Bir $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ fonksiyonu için,

$$\|f(x) - p_n(x)\|_{\infty} = \min_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_{\infty} \quad (2.65)$$

eşitliğini gerçekleyen bir $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinomu vardır (Süli ve Mayers, 2003).

$q \in \mathcal{P}_n$ polinomu $q_n(x) = c_0 + \dots + c_n x^n$ formunda yazıldığında istenen c_j , $j = 0, \dots, n$ katsayıları,

$$\begin{aligned} E(c_0, \dots, c_n) &= \|f - q\|_{\infty} \\ &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) - c_0 - \dots - c_n x^n| \end{aligned} \quad (2.66)$$

dönüşümü ile tanımlı $E : (c_0, \dots, c_n) \rightarrow E(c_0, \dots, c_n)$ fonksiyonunu minimize edecek şekilde belirlenir. Böylece en iyi yaklaşım polinomu, $f(x) - q(x)$ hatasının maksimum değerini minimize eden polinomdur. Buradan hareketle ∞ - normu altında en iyi yaklaşım polinomu, minimaks polinomu olarak da adlandırılır.

Teorem 2.3.5. $[a, b]$ aralığı reel ekseninde sınırlı bir aralık olmak üzere, her $f \in \mathcal{C}[a, b]$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde tek bir minimaks polinomuna sahiptir (Süli ve Mayers, 2003).

2 -Normunda en iyi yaklaşım

$f \in \mathcal{L}^2(a, b)$ fonksiyonu için,

$$\|f - p_n\|_2 = \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_2 \quad (2.67)$$

probleminden elde edilecek p_n polinomu, 2-normunda n. dereceden en iyi yaklaşımdır.

Teorem 2.3.6. Her $f \in \mathcal{L}^2(a, b)$ fonksiyonu için,

$$\|f - p_n\|_2 = \min_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_2$$

ifadesini gerçekleyen tek bir $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinomuna sahiptir (Süli ve Mayers, 2003).

Teorem 2.3.7. Bir $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinomunun, bir $f \in \mathcal{L}^2(a, b)$ fonksiyonu için 2-normunda n. dereceden en iyi yaklaşım olabilmesi, ancak ve ancak, $\mathcal{P}_n$ ailesindeki her elemanın $f - p_n$ ile ortogonal yani $\forall q \in \mathcal{P}_n$ için $\langle f - p_n, q \rangle = 0$ olması durumunda mümkündür (Süli ve Mayers, 2003).

Teorem 2.3.8. Bir $f \in \mathcal{L}^2(a, b)$ fonksiyonunun 2-normunda n. dereceden en iyi yaklaşımı, $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ ortogonal polinom ailesinin elemanları yardımıyla,

$$p_n^B = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i \quad (2.68)$$

formunda yazılabilir. Burada $c_i = \frac{\langle f, \phi_i \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle}$ dir (Mason ve Handscomb, 2003).

Teorem 2.3.9. $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ fonksiyonu ve bir $[a, b]$ aralığında negatif olmayan ağırlık fonksiyonu $w(x)$ 'e göre ortogonal olan polinomlar sistemi $\{\phi_i(x), i = 0, 1, \dots\}$ olmak üzere eğer $f(x)$ fonksiyonunun, $\phi_{n+1}(x)$ 'in köklerindeki interpolasyon polinomu $p_n(x)$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f(x) - p_n(x)\|_2 \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b w(x) (f(x) - p_n(x))^2 dx = 0 \quad (2.69)$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

Tanım 2.3.4. Bir $\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$ üzerinde $f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu tanımlansın. $x_0 = y_0 = -1$ ve $x_n = y_n = +1$ olmak üzere $r = 0, 1, \dots, n$ için $n+1$ değerli $\{x_r\}$ ve $\{y_r\}$ dizileri monoton azalmayan olsun. $n > 0$ olmak üzere olası her $\{x_r\}$ ve $\{y_r\}$ dizileri için,

$$\sum_1 = \sum_{r=1}^n |f(x_r, y_r) - f(x_{r-1}, y_{r-1})|$$

$$\sum_2 = \sum_{r=1}^n |f(x_r, y_{n-r+1}) - f(x_{r-1}, y_{n-r})|$$

toplamları sınırlı ise $f(x, y)$ fonksiyonu, Ω üzerinde sınırlı varyasyonudur (Mason ve Handscomb, 2003).

Teorem 2.3.10. Eğer bir $f(x, y)$ fonksiyonu, sürekli, $S = \{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$ üzerinde sınırlı varyasyonu ve kısmi türevlerinden biri S 'de sınırlı ise $f(x, y)$ fonksiyonu,

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} T_i(x) T_j(y)$$

formunda S 'de $\mathcal{L}_{\infty}$ -yakınsak bir, çift değişkenli Chebyshev açılımına sahiptir (Mason ve Handscomb, 2003).

2.4. Fibonacci Polinomları

Bu bölümde, tezde verilecek ikinci metoda baz teşkil eden iki değişkenli polinom ailesinin kurulmasında kullanılacak Fibonacci polinomlarına dair temel tanım ve teoremler (Koshy, 2001; Falcon ve Plaza, 2007; Falcon ve Plaza, 2009) kaynaklarından faydalanılarak verilecektir.

Tanım 2.4.1. (k -Fibonacci dizisi) Herhangi pozitif reel k sayısı için, k -Fibonacci dizisinin elemanları

$$F_{k,n+1} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ kF_{k,n} + F_{k,n-1}, & n > 1 \end{cases} \quad (2.70)$$

bağıntısından elde edilir.

Tanım 2.4.2. (Fibonacci polinomları) Fibonacci dizisinde, pozitif reel k sayısı yerine reel değişken x alınır, yani $F_{k,n} = F_{x,n}$ olması halinde elde edilecek polinom ailesi

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0, \\ x, & \text{if } n = 1, \\ xF_n(x) + F_{n-1}(x), & \text{if } n > 1 \end{cases} \quad (2.71)$$

Fibonacci polinomları olarak adlandırılır.

Bu polinomlardan ilk birkaçı şu şekildedir:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= x, \\ F_3(x) &= x^2 + 1, \\ F_4(x) &= x^3 + 2x, \\ F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fibonacci polinomlarına dayalı çözüm metodu tanıtılırken diferansiyel denklemdeki türev işlemleri yerine, çeşitli mertebeden diferansiyellenmiş seri açılımının katsayıları

arasındaki bağıntıdan hareketle, operasyonel türev matrisleri kullanılacaktır. Kısmi türev için operasyonel matrisin elde edilişi ise, Falcon ve Plaza (2009) tarafından ispatı verilen aşağıdaki bağıntılar kullanılarak Bölüm 3.3 de verilecektir. Belirtilen bağıntılar kullanılarak, daha önce tarafımızdan üretilen adi türev operasyonel matrisi için (Koç ve ark.,2013) çalışması incelebilir.

Teorem 2.4.1. (Falcon ve Plaza,2009) Fibonacci polinomu ile türevi arasındaki bağıntı

$$1. \quad F_n(x) = \frac{1}{n} [F'_{n+1}(x) + F'_{n-1}(x)] \quad (2.72)$$

ve Fibonacci polinomu ile integrali arasındaki bağıntı

$$2. \quad \int_0^x F_n(x) dx = \frac{1}{n} \{F_{n+1}(x) + F_{n-1}(x) - F_{n+1}(0) - F_{n-1}(0)\} \quad (2.73)$$

şeklindedir. Denklem (2.73) de n 'in çift sayı olması durumunda $F_{n+1}(0) = F_{n-1}(0) = 1$ ve n 'in tek sayı olması durumunda ise $F_{n+1}(0) = F_{n-1}(0) = 0$ olacaktır.

3. REEL DÜZLEMDE SIRALAMA TABANLI SPEKTRAL METOTLAR

Bu bölümde, iki farklı tanım bölgesindeki karışık şartlı lineer kısmi denklemler için çözüm metotları geliştirilecektir. Bunun için öncelikle, Bölüm 3.1 de, çözümü araştırılacak problem genel formda ortaya konulacaktır. Daha sonra problem, sırasıyla, Bölüm 3.2 de reel düzlemde ve Bölüm 3.3 de reel düzlemin alt bölgelerinde ele alınacaktır. Çalışılmak istenen tanım bölgesine göre eksponansiyel Chebyshev ve Fibonacci polinomlarına dayalı baz fonksiyonları da tanıtılarak, temel özellikleri verilecektir. Sıralama tabanlı matris metotları, bu iki baz fonksiyon ailesi için elde edilecek operasyonel matrisler ile, çözümü aranan problemin ele alınışına uygun şekilde yapılandırılacak ve iki metot olarak sunulacaktır.

Bölgeye bağlı baz seçimi yönüyle uygulamada birbirinden ayrılan her iki metot da, problem için -kolokasyon noktalarını kullanarak- rezidüyü minimize edecek şekilde kurulan (1.8) deki temel algoritmayı kullanır. İlgili baz fonksiyonu cinsinden seri formda çözüm arayan metotların temel çalışma algoritması şu şekilde özetlenebilir:

1. Problemin Ω tanım bölgesine göre $\varphi_{m,n}(x, y)$ baz fonksiyonu ve $\{(x_i, y_j) : (x_i, y_j) \in \Omega\}$ kolokasyon (sıralama) noktaları belirlenir.
2. İlgili baz fonksiyonu yardımıyla operasyonel türev matrisleri belirlenir.
3. Çözüm fonksiyonu $u(x, y) \cong \sum_{m=0}^h \sum_{n=0}^{\tilde{h}} a_{m,n} \varphi_{m,n}(x, y)$ formunda ele alınır.
4. Kolokasyon noktaları kullanılarak, problemdeki diferansiyel denklem ve koşulları, spektral katsayılı cebirsel denklemler sistemine karşılık gelen temel matris denklemine dönüştürülür. Dönüşüm esnasında, türev operatörleri yerine operasyonel türev matrisleri kullanılır.
5. Matris denkleminin bilinmeyen spektral katsayılar karşılık gelen katsayılar çözüm vektörü, lineer denklem sistemleri için geliştirilen yöntemlerden biri kullanılarak elde edilir.

Çözümleme işlemleri için Maple, Matlab, veya benzeri bir bilgisayar programından faydalanılması, kolokasyon nokta sayıları ve hane sayılarının istenildiği kadar büyük seçilmesine olanak tanır. Böylece istenilen duyarlılıkta çözüm elde edilebilir.

Burada hatırlatılmalıdır ki, baz fonksiyonunun belirlenmesinde, Galerkin metodunda olduğu gibi, bazın problemin koşullarını sağlaması hususu dikkate alınmaz. Bunun yerine, koşullara ait temel matris denkleminin, KDD için elde edilen matris denklemine yerleştirilmesi yoluyla, koşullar çözüme etki etmiş olur.

3.1. Problemin Tanıtımı

Bir Ω bölgesi üzerinde tanımlı ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer kısmi diferansiyel denklemi

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r q_{i,j}(x,y) u^{(i,j)}(x,y) = g(x,y) \quad (3.1)$$

formunda verilsin. Burada, negatif olmayan i ve j değerleri için

$$u^{(0,0)}(x,y) = u(x,y), \quad u^{(i,j)}(x,y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u(x,y)$$

olarak gösterilir. Denklemin değişken katsayılarını ifade eden $q_{i,j}(x,y)$ ile $g(x,y)$ fonksiyonları Ω ’da tanımlı bilinen fonksiyonlardır.

Akyüz-Daşcıoğlu (2009) tarafından, Ω ’nın sınırı olan $\partial\Omega$ üzerinde üç olası durum için tanımlanan koşullar şu şekilde ele alınacaktır:

- $\omega_t, \eta_t, b_{t_{i,j}}, \lambda$ bilinen sabitler ve $(\omega_t, \eta_t) \in \partial\Omega$ olmak üzere, koşullar

$$\sum_{t=1}^p \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r b_{t_{i,j}} u^{(i,j)}(\omega_t, \eta_t) = \lambda \quad (3.2)$$

- γ_t sabit ve $(x, \gamma_t) \in \partial\Omega$ olmak üzere, koşullar

$$\sum_{t=1}^v \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r c_{t_{i,j}}(x) u^{(i,j)}(x, \gamma_t) = \mathcal{J}(x) \quad (3.3)$$

- ε_t sabit ve $(x, \gamma_t) \in \partial\Omega$ olmak üzere, koşullar

$$\sum_{t=1}^g \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r d_{t_{i,j}}(y) u^{(i,j)}(\varepsilon_t, y) = h(y). \quad (3.4)$$

Verilen koşullara göre (3.1) denkleminin, baz fonksiyonu $\varphi_{m,n}(x,y)$ cinsinden

$$\bar{u}(x,y) = \sum_{m=0}^h \sum_{n=0}^{\tilde{\lambda}} a_{m,n} \varphi_{m,n}(x,y) \quad \text{şeklindeki çözümünü elde etmek için farklı baz}$$

fonksiyonlarının kullanıldığı sıralama tabanlı spektral metotlardan türetilen iki matris metodu sırasıyla Bölüm 3.2 ve Bölüm 3.3 de tanıtılacaktır.

Ele alınan kısmi diferansiyel denklem için, metotların dayanak noktası olan

$$R(x, y) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r q_{i,j}(x, y) \bar{u}^{(i,j)}(x, y) - g(x, y) \quad (3.5)$$

rezidü fonksiyonu kullanılacaktır. Bölgedeki kolokasyon noktaları (x_k, y_l) ve test fonksiyonu $W_{m,n} = \delta(x_k, y_l)$ olmak üzere, problemin sayısal çözümü için verilecek metotlar,

$$\begin{aligned} \langle W_{m,n}, R(x, y) \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle \delta(x_k, y_l), R(x, y) \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow R(x_k, y_l) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r q_{i,j}(x_k, y_l) \bar{u}^{(i,j)}(x_k, y_l) = g(x_k, y_l), \quad \begin{matrix} (k = 0, 1, \dots, \hat{h}) \\ (l = 0, 1, \dots, \hat{\lambda}) \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

sıralama tabanlı spektral bağıntıları üzerinden yapılandırılacaktır. Bu işlemler sırasında, problem koşulları da benzer prosedüre tabi tutulur. Böylece elde edilecek iki lineer sistemin, operasyonel matrisler kullanılarak matris denkleme dönüştürülmesi ile problem, elemanları $a_{m,n}$ bilinmeyen katsayıları olan vektörü bulma problemine dönüşecektir. Bu iki matris denkleminin birlikte çözümü ise, katsayılar vektörünü verecektir.

3.2. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Ekspansiyel Chebyshev Seri Çözümü

$\Omega_E = \{(x, y) : -\infty < x, y < \infty\}$ bölgesinde tanımlı (3.1) denkleminin (3.2)-(3.4) koşullarından birine ya da farklı kombinasyonlarına uyan $u(x, y)$ bilinmeyen çözüm fonksiyonuna seri formda bir yaklaşım bulabilmek için $[-1, 1] \times [-1, 1]$ bölgesinde tanımlı ve ortogonal olan Chebyshev polinomları ile yarı sonlu bölgede tanımlı ve ortogonal olan Rasyonel Chebyshev polinomları yeterli değildir ve çözüm için daha geniş bölgede çalışma olanağı sunacak bir baz fonksiyonuna ihtiyaç vardır. Problemin çözümüne geçmeden önce, reel düzlemde tanımlı ve ortogonal olan böyle bir alternatif baz fonksiyonu aşağıda tanıtılacaktır.

3.2.1. Çift değişkenli ekspansiyel Chebyshev fonksiyonu

Bu kısımda, ikinci bölümde yer verilen Basu'nun (1973) çift değişkenli Chebyshev polinomları çalışmasından hareketle, reel düzlemde tanımlı bir baz fonksiyonu ve bazı özellikleri verilecektir (Koç ve Kurnaz, 2012a; Koç ve Kurnaz, 2013).

x değişkenine göre r . dereceden ekspansiyel Chebyshev fonksiyonu $E_r(x) = T_r\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ ve y değişkenine göre s . dereceden ekspansiyel Chebyshev fonksiyonu $E_s(y) = T_s\left(\frac{e^y - 1}{e^y + 1}\right)$ olmak üzere, çift değişkenli ekspansiyel Chebyshev fonksiyonu (EC),

$$E_{r,s}(x, y) = E_r(x) \cdot E_s(y) \quad (3.7)$$

formunda tanımlanır.

Farklı r ve s indisleri için $E_{r,s}(x, y)$ polinomları

$$E_{r+1,s}(x, y) = \left[2 \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) E_r(x) - E_{r-1}(x) \right] \cdot E_s(y), \quad r \geq 1, \quad (3.8)$$

$$E_{r,s+1}(x, y) = E_r(x) \cdot \left[2 \left(\frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right) E_s(y) - E_{s-1}(y) \right], \quad s \geq 1. \quad (3.9)$$

üçlü tekrarlıma bağıntıları yardımıyla belirlenir. Eğer $i + j > m + n$ ise $E_{i,j}(x, y)$ polinomunun derecesinin $E_{m,n}(x, y)$ polinomunun derecesinden büyük olduğu söylenebilir. Bu iki fonksiyonun çarpımını

$$E_{m,n}(x, y) \cdot E_{i,j}(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ E_{m+i,n+j}(x, y) + E_{m+i,|n-j|}(x, y) + E_{|m-i|,n+j}(x, y) + E_{|m-i|,|n-j|}(x, y) \right\}$$

bağıntısı verir.

Bir $\Omega_E = \{(x, y) : -\infty < x, y < \infty\}$ bölgesi üzerinde negatif olmayan integrallenebilir ağırlık fonksiyonu

$$w(x, y) = \frac{\sqrt{e^{x+y}}}{(e^x + 1)(e^y + 1)} \quad (3.10)$$

olmak üzere,

$$\mathcal{L}_w^2(\Omega_E) = \left\{ f : \Omega_E \rightarrow \mathbb{R} : \iint_{\Omega_E} f^2(x, y) w(x, y) dx dy < \infty \right\} \quad (3.11)$$

uzayı tanımlansın. Tanımlanan uzaydaki iç çarpım ve norm sırasıyla,

$$\langle f, g \rangle_w = \iint_{\Omega_E} f(x, y) g(x, y) w(x, y) dx dy \quad (3.12)$$

ve

$$\|f\|_w = \left\{ \iint_{\Omega_E} f^2(x, y) w(x, y) dx dy \right\}^{1/2} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

$\{E_{r,s}(x, y)\}_{r \geq 0, s \geq 0}$ EC fonksiyonlar ailesi, (3.12) altında ortogonaldır ve ortogonallik

bağıntılarından hareketle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{i,j}(x,y) E_{k,l}(x,y) w(x,y) dx dy = \begin{cases} \pi^2, & i = j = k = l = 0 \\ \frac{\pi^2}{4}, & i = k \neq 0, j = l \neq 0 \\ \frac{\pi^2}{2}, & i = k = 0, j = l \neq 0 \\ \text{ya da} \\ & i = k \neq 0, j = l = 0 \\ 0, & \text{diğer tüm } i, j, k, l \text{ değerleri.} \end{cases}$$

eşitlikleri gerçekenir.

$\{E_{r,s}(x,y)\}_{r \geq 0, s \geq 0}$ EC fonksiyonlar ailesi, $\mathcal{L}_w^2(\Omega_E)$ de tamdır. Herhangi

$u \in \mathcal{L}_w^2(\Omega_E)$ fonksiyonu,

$$u(x,y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} E_{r,s}(x,y) \quad (3.14)$$

açılımına sahiptir. Açılımdaki bilinmeyen $a_{r,s}$ katsayılarını

$$a_{r,s} = \frac{\langle u, E_{r,s} \rangle_w}{\|E_{r,s}\|_w^2} \quad (3.15)$$

formülü verir. (3.14) seri formu $r = m$ ve $s = n$ indisli teriminde kesilirse,

$$u(x,y) \cong \bar{u}(x,y) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n a_{r,s} E_{r,s}(x,y) = \mathbf{E}(x,y) \cdot \mathbf{A} \quad (3.16)$$

kesikli seri açılım için matris formu yazılabilir. Matris formda,

$$\mathbf{E}(x,y) = \begin{bmatrix} E_{0,0}(x,y) & E_{0,1}(x,y) & \cdots & E_{0,n}(x,y) & E_{1,0}(x,y) & E_{1,1}(x,y) & \cdots & E_{1,n}(x,y) & \cdots \\ & & & & E_{m,0}(x,y) & E_{m,1}(x,y) & \cdots & E_{m,n}(x,y) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$1 \times (m+1)(n+1)$ tipinde EC fonksiyonlar vektörü ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} & a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & \cdots & a_{m,0} & a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T \quad (3.18)$$

$(m+1)(n+1) \times 1$ tipinde bilinmeyen EC katsayılar vektörüdür. Kesikli seri formdaki fonksiyonun (i, j) . mertebeden kısmi türevi

$$\bar{u}^{(i,j)}(x, y) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n a_{r,s} E_{r,s}^{(i,j)}(x, y) \quad (3.19)$$

ve matris formu

$$\bar{u}^{(i,j)}(x, y) = \mathbf{E}^{(i,j)}(x, y) \cdot \mathbf{A} \quad (3.20)$$

olacaktır. Burada ise $E_{r,s}^{(0,0)} = E_{r,s}$ olup, $\mathbf{E}^{(i,j)}(x, y)$

$$\mathbf{E}^{(i,j)}(x, y) = \begin{bmatrix} E_{0,0}^{(i,j)}(x, y) E_{0,1}^{(i,j)}(x, y) \cdots E_{0,n}^{(i,j)}(x, y) E_{1,0}^{(i,j)}(x, y) \cdots E_{1,n}^{(i,j)}(x, y) \cdots \\ E_{m,0}^{(i,j)}(x, y) E_{m,1}^{(i,j)}(x, y) \cdots E_{m,n}^{(i,j)}(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

şeklinde türevli EC fonksiyonlarının $1 \times (m+1)(n+1)$ tipinde satır vektörüdür.

Lemma 3.2.1. Bir $u(x, y)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun (i, j) mertebeli türevi sırasıyla (3.16) ve (3.20) matris formlarında verilsin. Bu takdirde, EC fonksiyonlar vektörü $\mathbf{E}(x, y)$ ile (i, j) mertebeden türevli polinomlar vektörü $\mathbf{E}^{(i,j)}(x, y)$ arasında

$$\mathbf{E}^{(i,j)}(x, y) = \mathbf{E}(x, y) (\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \quad (3.22)$$

bağıntısı mevcuttur. Öyle ki, $\mathbf{D}_x$ ve $\mathbf{D}_y$, $(m+1)(n+1) \times (m+1)(n+1)$ tipinde operasyonel türev matrisleri olup, sırasıyla

$$\mathbf{D}_x = [c_{\alpha,\beta}]^T = \left(\text{diag} \left(\frac{\alpha}{4} \mathbf{I}, \mathbf{O}, -\frac{\alpha}{4} \mathbf{I} \right) \right)^T, \quad \begin{matrix} \alpha = 0, 1, \dots, m \\ \beta = 0, 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.23)$$

ve

$$\mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\mu} = [d_{\alpha,\beta}] = \text{diag} \left(\frac{\alpha}{4}, 0, -\frac{\alpha}{4} \right), \quad \begin{matrix} \alpha = 0, 1, \dots, m \\ \beta = 0, 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.24)$$

dir. Burada **I** ve **O** ise $(n+1)^2$ tipinde birim ve sıfır matrislerini temsil eder.

İspat . $E_{0,s}$, $E_{1,s}$ ve (3.8) bağıntısıyla verilen $E_{r+1,s}(x,y)$ polinomlarının x değişkenine göre birinci mertebeden kısmi türevleri, sırasıyla

$$E_{0,s}^{(1,0)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} E_{0,s}(x,y) = 0 \quad (3.25)$$

$$E_{1,s}^{(1,0)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} E_{1,s}(x,y) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} E_s(y) = \frac{1}{4} E_{0,s}^{(0,0)}(x,y) - \frac{1}{4} E_{2,s}^{(0,0)}(x,y) \quad (3.26)$$

ve

$$\begin{aligned} E_{r+1,s}^{(1,0)}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2E_{1,s}^{(0,0)}(x,y)E_{r,s}^{(0,0)}(x,y) - E_{r-1,s}^{(0,0)}(x,y) \right] \\ &= 2E_{1,s}^{(1,0)}(x,y)E_{r,s}^{(0,0)}(x,y) + 2E_{1,s}^{(0,0)}(x,y)E_{r,s}^{(1,0)}(x,y) - E_{r-1,s}^{(1,0)}(x,y), \quad s \geq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

dir. $r = 0, 1, 2, \dots, m$ için (3.25)-(3.27) denklemleri kullanılarak,

$$\left\{ \begin{aligned} E_{0,s}^{(1,0)}(x,y) &= 0, \\ E_{1,s}^{(1,0)}(x,y) &= \frac{1}{4} E_{0,s}^{(0,0)}(x,y) - \frac{1}{4} E_{2,s}^{(0,0)}(x,y), \\ E_{2,s}^{(1,0)}(x,y) &= \frac{1}{2} E_{1,s}^{(0,0)}(x,y) - \frac{1}{2} E_{3,s}^{(0,0)}(x,y), \\ &\vdots \\ E_{m,s}^{(1,0)}(x,y) &= \frac{m}{4} E_{m-1,s}^{(0,0)}(x,y) - \frac{m}{4} E_{m+1,s}^{(0,0)}(x,y), \quad s \geq 0 \end{aligned} \right. \quad (3.28)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem yardımıyla $\mathbf{D}_x$ matrisinin $c_{\alpha,\beta}$ elemanlarına ulaşılır.

Benzer şekilde $E_{r,0}$, $E_{r,1}$ ve (3.9) ile verilen $E_{r,s+1}(x,y)$ terimlerinin y değişkenine göre kısmi türevleri,

$$E_{r,0}^{(0,1)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} E_{r,0}(x,y) = 0 \quad (3.29)$$

$$E_{r,1}^{(0,1)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} E_{r,1}(x,y) = E_r(x) \frac{2e^y}{(e^y + 1)^2} = \frac{1}{4} E_{r,0}^{(0,0)}(x,y) - \frac{1}{4} E_{r,2}^{(0,0)}(x,y) \quad (3.30)$$

ve

$$\begin{aligned} E_{r,s+1}^{(0,1)}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2E_{r,1}^{(0,0)}(x,y)E_{r,s}^{(0,0)}(x,y) - E_{r,s-1}^{(0,0)}(x,y) \right] \\ &= 2E_{r,1}^{(0,1)}(x,y)E_{r,s}^{(0,0)}(x,y) + 2E_{r,1}^{(0,0)}(x,y)E_{r,s}^{(0,1)}(x,y) - E_{r,s-1}^{(0,1)}(x,y), \quad r \geq 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

dir. $s = 0, 1, 2, \dots, n$ için (3.29)-(3.31) bağıntıları,

$$\begin{cases} E_{r,0}^{(0,1)}(x,y) = 0, \\ E_{r,1}^{(0,1)}(x,y) = \frac{1}{4} E_{r,0}^{(0,0)}(x,y) - \frac{1}{4} E_{r,2}^{(0,0)}(x,y), \\ \vdots \\ E_{r,n}^{(0,1)}(x,y) = \frac{n}{4} E_{r,n-1}^{(0,0)}(x,y) - \frac{n}{4} E_{r,n+1}^{(0,0)}(x,y), \quad r \geq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

sistemini verir. Son olarak bu sistemden $\mathbf{D}_y$ operasyonel matrisinin elemanları elde edilir.

Burada, $r > m$ terimleri için $E_{r,s}^{(1,0)}(x,y) = E_{r,s}^{(0,0)}(x,y) = 0$ ve $s > n$ terimleri için $E_{r,s}^{(0,1)}(x,y) = E_{r,s}^{(0,0)}(x,y) = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Denklem (3.28) ve (3.32) dan, $i = 0, 1, 2, \dots$ ve $j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\mathbf{E}^{(1,0)}(x,y) = \mathbf{E}(x,y) \mathbf{D}_x$$

$$\mathbf{E}^{(2,0)}(x,y) = \mathbf{E}^{(1,0)}(x,y) \mathbf{D}_x = (\mathbf{E}(x,y) \mathbf{D}_x) \mathbf{D}_x = \mathbf{E}(x,y) (\mathbf{D}_x)^2 \quad (3.33)$$

$\vdots$

$$\mathbf{E}^{(i,0)}(x,y) = \mathbf{E}^{(i-1,0)}(x,y) \mathbf{D}_x = \mathbf{E}(x,y) (\mathbf{D}_x)^i$$

ve

$$\mathbf{E}^{(0,1)}(x, y) = \mathbf{E}(x, y) \mathbf{D}_y$$

$$\mathbf{E}^{(0,2)}(x, y) = \mathbf{E}^{(0,1)}(x, y) \mathbf{D}_y = (\mathbf{E}(x, y) \mathbf{D}_y) \mathbf{D}_y = \mathbf{E}(x, y) (\mathbf{D}_y)^2 \quad (3.34)$$

⋮

$$\mathbf{E}^{(0,j)}(x, y) = \mathbf{E}^{(0,j-1)}(x, y) \mathbf{D}_y = \mathbf{E}(x, y) (\mathbf{D}_y)^j$$

denklemlerinin sağlandığı görülür. $\mathbf{I}$, $(m+1)(n+1)$ tipinde birim matris olmak üzere

$$(\mathbf{D}_x)^0 = (\mathbf{D}_y)^0 = \mathbf{I} \text{ ve } \mathbf{E}^{(0,0)}(x, y) = \mathbf{E}(x, y) \text{ dir.}$$

Böylece, (3.33) ve (3.34) eşitlikleri birlikte ele alındığında, çift değişkenli EC fonksiyon vektörü ile türevleri arasındaki temel matris bağıntısı

$$\mathbf{E}^{(i,j)}(x, y) = \mathbf{E}^{(i,0)}(x, y) (\mathbf{D}_y)^j = (\mathbf{E}^{(0,0)}(x, y) (\mathbf{D}_x)^i) (\mathbf{D}_y)^j = \mathbf{E}(x, y) (\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \quad (3.35)$$

ya da

$$\mathbf{E}^{(i,j)}(x, y) = \mathbf{E}^{(0,j)}(x, y) (\mathbf{D}_x)^i = (\mathbf{E}^{(0,0)}(x, y) (\mathbf{D}_y)^j) (\mathbf{D}_x)^i = \mathbf{E}(x, y) (\mathbf{D}_y)^j (\mathbf{D}_x)^i \quad (3.36)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.2.1. i . mertebeden operasyonel türev matrisi $(\mathbf{D}_x)^i$ ile j . mertebeden operasyonel türev matrisi $(\mathbf{D}_y)^j$ çarpımsal olarak değişmelidir. Yani bu matrisler ile

$$(\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j = (\mathbf{D}_y)^j (\mathbf{D}_x)^i$$

eşitliği mevcuttur.

Sonuç 3.2.2. (3.22) matris denklemi, (3.20) türevli fonksiyon açılımında yerine konulduğunda, bir fonksiyonun çeşitli mertebeden türevleri için EC fonksiyonları cinsinden açılımı

$$u^{(i,j)}(x, y) \cong \bar{u}^{(i,j)}(x, y) = \mathbf{E}(x, y) (\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \mathbf{A} \quad (3.37)$$

elde edilir.

3.2.2. Çift değişkenli EC fonksiyonları ile matris metodu

Bu kısımda, (3.1)-(3.4) problemi $\Omega_E = \{(x, y) : -\infty < x, y < \infty\}$ bölgesinde ele alınarak, kesikli seri formdaki nümerik çözümün elde edilmesinde kullanılabilecek sıralama tabanlı spektral bir metot tanıtılacaktır. Seri formun bilinmeyen katsayıları, tanıtacağımız prosedürün sonucunda elde edilecek $\mathbf{A}$ vektörünün elemanlarından oluşacaktır.

Metot için test fonksiyonu olarak $W = \delta(x_k, y_l)$ ve baz olarak (3.7) de verilen $E_{r,s}(x, y)$ çift değişkenli eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları kullanılacaktır. (x_k, y_l) kolokasyon noktaları, bölgenin içinde $k = 1, 2, \dots, m-1$ ve $l = 1, 2, \dots, n-1$ için

$$x_k = \ln \left(\frac{1 + \cos(k\pi / m)}{1 - \cos(k\pi / m)} \right), \quad y_l = \ln \left(\frac{1 + \cos(l\pi / n)}{1 - \cos(l\pi / n)} \right) \quad (3.38)$$

ve sınırlarda

$$\text{i) } x_m \rightarrow \infty \text{ ve } y_n \rightarrow \infty$$

$$\text{ii) } x_0 \rightarrow -\infty \text{ ve } y_0 \rightarrow -\infty$$

formunda seçilebilir. Burada hatırlatılmalıdır ki, verilen her iki sınırda da EC fonksiyonlarının değeri ya 1 ya da -1 olacaktır.

Kolokasyon noktaları, (3.37) türevli çözüm fonksiyonuna uygulanırsa

$$\left[\bar{u}^{(i,j)}(x_k, y_l) \right] = \mathbf{E}(x_k, y_l) (\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \mathbf{A} \quad (3.39)$$

elde edilir. Bu sistem ise,

$$\mathbf{U}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{u}^{(i,j)}(x_0, y_0) \\ \vdots \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_0, y_n) \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_1, y_0) \\ \vdots \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_1, y_n) \\ \vdots \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_m, y_n) \end{bmatrix} = \mathbf{E}^{(i,j)} \mathbf{A} = \mathbf{E}(\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \mathbf{A} \quad (3.40)$$

matris formuna indirgenir. Burada $\mathbf{E}$, kolokasyon noktaları ile verilmiş, $\mathbf{E}(x, y)$ EC fonksiyon vektörlerinden oluşan

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(x_0, y_0) & \mathbf{E}(x_0, y_1) & \cdots & \mathbf{E}(x_0, y_n) & \mathbf{E}(x_1, y_0) & \mathbf{E}(x_1, y_1) & \cdots & \mathbf{E}(x_1, y_n) & \cdots \\ & & & & \mathbf{E}(x_m, y_0) & \mathbf{E}(x_m, y_1) & \cdots & \mathbf{E}(x_m, y_n) \end{bmatrix}^T$$

şeklindeki $(m+1)(n+1) \times (m+1)(n+1)$ tipinde, blok matrisidir. (3.40) eşitliğinde $i = j = 0$ için $\mathbf{U} = \mathbf{E} \mathbf{A}$ dır.

Benzer şekilde, kolokasyon noktaları (3.1) denklemine uygulanırsa,

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r q_{i,j}(x_k, y_l) \bar{u}^{(i,j)}(x_k, y_l) = g(x_k, y_l), \quad \begin{matrix} (k = 0, 1, \dots, m) \\ (l = 0, 1, \dots, n) \end{matrix} \quad (3.41)$$

denklemler sistemi ve bu sistemden, $\mathbf{Q}_{i,j}$ notasyonu, elemanları $q_{i,j}(x_k, y_l)$, $(k = 0, 1, \dots, m; l = 0, 1, \dots, n)$ olan köşegen matrisi ve $\mathbf{G}$ notasyonu ise elemanları $g(x_k, y_l)$, $(k = 0, 1, \dots, m; l = 0, 1, \dots, n)$ olan sütun matrisini temsil etmek üzere

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{U}^{(i,j)} = \mathbf{G}, \quad (p \leq m, r \leq n) \quad (3.42)$$

matris denklemi elde edilir. (3.42) matris denklemi, (3.40) de verilen $\mathbf{U}^{(i,j)}$ eşitliği kullanılarak yeniden düzenlenirse, (3.1) kısmi diferansiyel denklemi için, $a_{r,s}$ bilinmeyen EC katsayılarını içeren $(m+1)(n+1)$ adet lineer pseudo-spektral denkleme karşılık gelen

$$\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{E}(\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \right) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.43)$$

temel matris denklemi elde edilir.

$$\mathbf{W} = \left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{E}(\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \right) \text{ kabul edilirse, (3.43) sistemi kısaca}$$

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.44)$$

formunda yazılabilir ve eklemeli matris gösterimi

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,(m+1)(n+1)} & : & g(x_0, y_0) \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,(m+1)(n+1)} & : & g(x_0, y_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ w_{(m+1)(n+1),1} & w_{(m+1)(n+1),2} & \cdots & w_{(m+1)(n+1),(m+1)(n+1)} & : & g(x_m, y_n) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

şeklinde olacaktır.

Diferansiyel denklemin cebirsel sisteme dönüştürüldüğü prosedür, benzer şekilde verilen koşullar içinde uygulanır.

Kolokasyon noktaları, (3.2)-(3.4) ile verilen koşullarda yerlerine yazılır ve matris formlarına dönüştürülürse, sırasıyla

$$\left(\sum_{t=1}^p \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{t,i,j} \mathbf{E}(\omega_t, \eta_t) (\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \right) \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}, \quad -\infty < \omega_t, \eta_t < \infty \quad (3.46)$$

$$\left(\sum_{t=1}^p \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{c}_{t,i,j} (x_k) \mathbf{E}(x_k, \gamma_t) (\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \right) \mathbf{A} = \boldsymbol{g}_k(x_k), \quad -\infty < \gamma_t < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.47)$$

$$\left(\sum_{t=1}^p \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{d}_{t,i,j} (y_l) \mathbf{E}(\varepsilon_t, y_l) (\mathbf{D}_x)^i (\mathbf{D}_y)^j \right) \mathbf{A} = \mathbf{h}_l(y_l), \quad -\infty < \varepsilon_t < \infty, \quad l = 0, 1, \dots, n \quad (3.48)$$

sistemine ulaşılır. (3.46), (3.47) ve (3.48) sistemlerinde eşitliklerin sol yanlarındaki parantez içleri sırasıyla $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ ve $\mathbf{V}_3$ vektörleri ile, sağ yanları ise sırasıyla $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{g}_k$ ve $\mathbf{h}_l$ ile ifade edilmek üzere koşullara ait genel matris denklemleri

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{V}_2 \mathbf{A} = \mathbf{g}_k \quad (3.50)$$

ve

$$\mathbf{V}_3 \mathbf{A} = \mathbf{h}_l \quad (3.51)$$

olarak yazılabilir. Koşullardan gelen $[\mathbf{V}_1 : \boldsymbol{\lambda}]$, $[\mathbf{V}_2 : \mathbf{g}_k]$ ve $[\mathbf{V}_3 : \mathbf{h}_l]$ eklemeli matrisleri ile kısmi diferansiyel denklemden gelen $[\mathbf{W} : \mathbf{G}]$ eklemeli matrisinin birleştirilmesiyle

$$[\mathbf{W}^* : \mathbf{G}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{W} : \mathbf{G} \\ \mathbf{V}_1 : \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{V}_2 : \mathbf{g}_k \\ \mathbf{V}_3 : \mathbf{h}_l \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

matrisi elde edilir. Bu matris, denklem sayısının bilinmeyen sayısından fazla olduğu

$$\mathbf{W}^* \mathbf{A} = \mathbf{G}^* \quad (3.53)$$

denklem sisteminin karşılığıdır. (3.53) sistemine Gauss satır indirgeme işlemi uygulanır ve sıfırdan farklı satırları silinerek $[\tilde{\mathbf{W}} : \tilde{\mathbf{G}}]$ ile ifade edilirse, problemin çözümündeki bilinmeyen EC katsayılarını

$$\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.54)$$

denkleminin çözümü verir. Gauss eliminasyon, üçgen matris metotları gibi lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan metotlardan biri yardımıyla çözüm gerçekleştirilir. Eğer $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisi tersinir değilse, kolokasyon noktaları, $\tilde{\mathbf{W}}$ tersinir olacak şekilde değiştirilir.

Denklemden gelen $[\mathbf{W} : \mathbf{G}]$ matrisinin belli sayıdaki satırı silinip koşullardan gelen eklemeli matrislerin bu matrise eklenmesiyle $[\tilde{\mathbf{W}} : \tilde{\mathbf{G}}]$ matrisi elde edilerek de çözüm gerçekleştirilebilir.

3.3. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Fibonacci Polinomları Cinsinden Seri Çözümü

Denklem (3.1) ile verilen problemin

$$\Omega = \{(x, y) : x \in [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

bölgesindeki çözümü, bu bölgede tanımlı bir baz cinsinden kesikli seri formda aranacaktır. Bunun için, baz fonksiyonu olarak Fibonacci polinomları kullanılarak meydana getirilen bir polinom ailesi kullanılacaktır.

$\Omega_F = \{(x, y) : x \in [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ şeklinde verilen bir bölgede spektral metotlar için yardımcı fonksiyonun seçimi çok önemlidir. Daha önce belirtildiği gibi, $[-1, 1] \times [-1, 1]$ düzleminde tanımlı Chebyshev ya da Legendre polinomları ile bu tür bir bölgedeki problemi çözebilmek için bir dönüşüm gereklidir. Örneğin, $-3 \leq x \leq 3$ aralığının $-1 \leq r \leq 1$ aralığına dönüşümü için $r = \frac{2x-6}{6}$ şeklinde bir dönüşüme ihtiyaç vardır. Aynı işlem, değişken sayısı kadar tekrar edecektir. Bunun yerine, dönüşüme gerek kalmaksızın, her sonlu bölgede işlem yapmaya olanak tanıyacak bir baz fonksiyonu kullanmak, hem işlem yükünü hafifletecek hem de uygulama güçlüğü azaltacaktır. Bu amaçla, Bölüm 3.3 de reel eksenin tüm alt aralıklarında tanımlı Fibonacci polinomlarına dayanan, reel eksenin iki alt aralığının kronoker çarpımıyla oluşturulan bölgede tanımlı iki değişkenli bir baz fonksiyonu tanımlanarak yeni bir metot sunulacaktır (Koç ve Kurnaz, 2012b; Koç ve Kurnaz, 2014).

3.3.1. Fibonacci polinomları yardımıyla $F_{r,s}(x, y)$ polinomlarının tanımlanışı

$I_x = \{x : x \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}$ ve $I_y = \{y : y \in [c, d] \subset \mathbb{R}\}$ olmak üzere $\Omega_F = I_x \times I_y$ bölgesi ve

$$\mathcal{L}^2(\Omega_F) = \left\{ f : \Omega_F \rightarrow \mathbb{R} : \iint_{\Omega_F} f^2(x, y) dx dy < \infty \right\} \quad (3.55)$$

uzayı tanımlansın. $f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{L}^2(\Omega_F)$ olmak üzere, tanımlanan uzaydaki iç çarpım ve norm, sırasıyla

$$\langle f, g \rangle = \iint_{\Omega_F} f(x, y) g(x, y) dx dy \quad (3.56)$$

ve

$$\|f\| = \left\{ \iint_{\Omega_F} f^2(x, y) dx dy \right\}^{1/2} \quad (3.57)$$

şeklindedir. x değişkenine göre r . dereceden Fibonacci polinomu $F_r(x)$ ve y değişkenine göre s . dereceden Fibonacci polinomu $F_s(y)$ olmak üzere, bir polinom ailesi, $r, s \geq 0$ için

$$F_{r,s}(x, y) = F_r(x) F_s(y) \quad (3.58)$$

formunda tanımlanabilir (Koç ve Kurnaz, 2012b). Farklı r ve s indisleri için $F_{r,s}(x, y)$ polinomları

$$F_{r+1,s}(x, y) = \begin{cases} F_s(y), & r = 0, \\ [x] F_s(y), & r = 1, \\ [x F_r(x) + F_{r-1}(x)] F_s(y), & r > 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

$$F_{r,s+1}(x, y) = \begin{cases} F_r(x), & s = 0, \\ [y] F_r(x), & s = 1, \\ [y F_s(y) + F_{s-1}(y)] F_r(x), & s > 1 \end{cases} \quad (3.60)$$

üçlü tekrarlama bağıntıları yardımıyla belirlenir.

$$\{F_{r,s}(x, y)\}_{\substack{r \geq 0 \\ s \geq 0}} \text{ ailesi (FP ailesi), (3.55) ile verilen } \mathcal{L}^2(\Omega_F) \text{ uzayında (3.57)}$$

normu altında tamdır. Herhangi $u(x, y) \in \mathcal{L}^2(\Omega_F)$ fonksiyonu

$$u(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{r,s} F_{r,s}(x, y)$$

seri formunda yazılabilir. Bu seri açılımın kesikli serisi,

$$u(x, y) \cong \bar{u}(x, y) = \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N a_{r,s} F_{r,s}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{A} \quad (3.61)$$

matris formunda yazılabilir, öyle ki $\mathbf{F}(x, y)$,

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} F_{1,1}(x, y) & F_{1,2}(x, y) & \dots & F_{1,N}(x, y) & F_{2,1}(x, y) & F_{2,2}(x, y) & \dots & F_{2,N}(x, y) & \dots \\ & & & & F_{M,1}(x, y) & F_{M,2}(x, y) & \dots & F_{M,N}(x, y) \end{bmatrix}$$

$1 \times (M)(N)$ tipinde $F_{r,s}(x, y)$ polinomlar vektörü ve $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} & \dots & a_{M,1} & a_{M,2} & \dots & a_{M,N} \end{bmatrix}^T \quad (3.62)$$

$(M)(N) \times 1$ tipinde seri açılımdaki $a_{r,s}$ katsayılar vektörüdür.

Kesikli seri formdaki fonksiyonun (i, j) mertebeli kısmi türevi

$$\bar{u}^{(i,j)}(x, y) = \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N a_{r,s}^{(i,j)} F_{r,s}(x, y) \quad (3.63)$$

ve matris formu

$$\bar{u}^{(i,j)}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{A}^{(i,j)} \quad (3.64)$$

biçimindedir. Burada $a_{r,s}^{(0,0)} = a_{r,s}$, $\bar{u}^{(0,0)}(x, y) = \bar{u}(x, y)$ olup $\mathbf{A}^{(i,j)}$,

$$\mathbf{A}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(i,j)} & a_{1,2}^{(i,j)} & \dots & a_{1,N}^{(i,j)} & a_{2,1}^{(i,j)} & a_{2,2}^{(i,j)} & \dots & a_{2,N}^{(i,j)} & \dots & a_{M,1}^{(i,j)} & a_{M,2}^{(i,j)} & \dots & a_{M,N}^{(i,j)} \end{bmatrix}^T \quad (3.65)$$

türevli fonksiyonun kesikli seri açılımındaki katsayılardan oluşan vektördür.

Lemma 3.3.1 Bir $u(x, y)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun (i, j) mertebeli türevi sırasıyla (3.61) ve (3.64) matris formlarında verilsin. Bu takdirde, katsayılar vektörleri $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{A}^{(i,j)}$ arasında

$$\mathbf{A}^{(i,j)} = (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j \mathbf{A} \quad (3.66)$$

bağıntısı mevcuttur. Öyle ki, $\tilde{\mathbf{D}}_x$ ve $\tilde{\mathbf{D}}_y$, $(M)(N) \times (M)(N)$ tipinde operasyonel türev matrisleri olup, sırasıyla $\alpha = 1, 2, \dots, M$, $\beta = 1, 2, \dots, N$ için

$$\tilde{\mathbf{D}}_x = [d_{\alpha,\beta}] = \begin{cases} \alpha \sin \frac{(\beta - \alpha)\pi}{2} \mathbf{I}, & \beta > \alpha \\ \mathbf{O}, & \beta \leq \alpha \end{cases} \quad (3.67)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{D}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{\mu}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}} = [c_{\alpha,\beta}] = \begin{cases} \alpha \sin \frac{(\beta - \alpha)\pi}{2}, & \beta > \alpha \\ 0, & \beta \leq \alpha \end{cases} \quad (3.68)$$

dir. Burada $\mathbf{I}$ ve $\mathbf{O}$ ise sırasıyla $(N) \times (N)$ tipinde birim ve sıfır matrislerini temsil eder.

İspat: Koç ve ark. (2013) tarafından verilen, bir fonksiyonun ve herhangi mertebeden adi türevinin Fibonacci polinomları cinsinden seri açılımlarını belirleyen katsayılar arasındaki ilişki, iki değişkenli bir fonksiyon ve (i, j) mertebeli kısmi türevinin seri açılımındaki katsayılar için de geliştirilebilir.

Bunun için önce, seri formdaki fonksiyonun $i = k + 1$ ve $j = 0$ mertebeli türevinde $a_{r,s}^{(k,0)}$ ile $a_{r,s}^{(k+1,0)}$ katsayıları arasındaki bağıntı

$$\begin{cases} a_{r,s}^{(k+1,0)} = r \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t a_{r+2t+1,s}^{(k,0)}, & r \leq M \\ a_{r,s}^{(k,0)} = 0, & r > M \end{cases} \quad (3.69)$$

şeklinde kurulur. $r = 1(1)M$ ve $s = 1(1)N$ indisli elemanlar için sırasıyla (3.69) denklemi tek tek yazılır ve oluşan denklem sistemi, katsayılar vektörleri yardımıyla matris forma dönüştürülürse

$$\mathbf{A}^{(k+1,0)} = \tilde{\mathbf{D}}_x \mathbf{A}^{(k,0)} \quad (3.70)$$

elde edilir, öyle ki (3.69) bağıntısında $a_{r,s}^{(k,0)}$ elemanlarının başında çarpım durumundaki r sabitlerine göre belirlenen $\left[d_{\alpha,\beta} \right]_{\substack{\alpha=0(1)M \\ \beta=0(1)N}}$ elemanları ile $\tilde{\mathbf{D}}_x$ türev operatör matrisi

$$\tilde{\mathbf{D}}_x = \left[d_{\alpha,\beta} \right] = \begin{cases} \alpha \sin \frac{(\beta - \alpha)\pi}{2} \mathbf{I}, & \beta > \alpha \\ \mathbf{O}, & \beta \leq \alpha \end{cases} \quad (3.71)$$

dir. (3.70) rekürans bağıntısından, $\mathbf{A}^{(0,0)} = \mathbf{A}$ olmak üzere,

$$k = 1, \quad \mathbf{A}^{(1,0)} = \tilde{\mathbf{D}}_x \mathbf{A}^{(0,0)} = \tilde{\mathbf{D}}_x \mathbf{A}$$

$$k = 2, \quad \mathbf{A}^{(2,0)} = \tilde{\mathbf{D}}_x \mathbf{A}^{(1,0)} = \tilde{\mathbf{D}}_x \left(\tilde{\mathbf{D}}_x \mathbf{A}^{(0,0)} \right) = \left(\tilde{\mathbf{D}}_x \right)^2 \mathbf{A}$$

$\vdots$

ve

$$k = i, \quad \mathbf{A}^{(i,0)} = \tilde{\mathbf{D}}_x \mathbf{A}^{(i-1,0)} = \dots = \left(\tilde{\mathbf{D}}_x \right)^i \mathbf{A} \quad (3.72)$$

olduğu açıkça görülür.

Benzer süreçle, seri formdaki fonksiyon ve $i = 0$ ve $j = l + 1$ mertebeli türevinde

$a_{r,s}^{(0,l+1)}$ ile $a_{r,s}^{(0,l)}$ katsayıları arasında

$$\begin{cases} a_{r,s}^{(0,l+1)} = s \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t a_{r,s+2t+1}^{(0,l)}, & s \leq N \\ a_{r,s}^{(0,l)} = 0, & s > N \end{cases} \quad (3.73)$$

bağıntısı mevcuttur. Bu bağıntı yardımıyla $a_{r,s}^{(0,l+1)}$ ile $a_{r,s}^{(0,l)}$ katsayılarını içeren vektörler arasındaki

$$l = j, \quad \mathbf{A}^{(0,j)} = \tilde{\mathbf{D}}_y \mathbf{A}^{(0,j-1)} = \dots = \left(\tilde{\mathbf{D}}_y \right)^j \mathbf{A} \quad (3.74)$$

matris denklemi elde edilir. (3.73) bağıntısındaki $a_{r,s}^{(0,j)}$ elemanlarının başında çarpım durumunda bulunan s sabitlerine göre, $(M)(N) \times (M)(N)$ tipindeki $\tilde{\mathbf{D}}_y$ türev operatör matrisinin elemanları

$$\tilde{\mathbf{D}}_y = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\mu} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\mu} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mu} = [c_{\alpha,\beta}] = \begin{cases} \alpha \sin \frac{(\beta - \alpha)\pi}{2}, & \beta > \alpha \\ 0, & \beta \leq \alpha \end{cases} \quad (3.75)$$

formunda belirlenir.

Böylece, (3.72) ve (3.74) matris bağıntıları birlikte ele alındığında, seri formdaki bir fonksiyon ve kısmi türevinin katsayılar vektörleri arasındaki bağıntı operasyonel türev matrislerine göre

$$\mathbf{A}^{(i,j)} = (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\mathbf{A}^{(0,j)}) = (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j \mathbf{A} \quad (3.76)$$

ya da

$$\mathbf{A}^{(i,j)} = (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j (\mathbf{A}^{(i,0)}) = (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i \mathbf{A} \quad (3.77)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Sonuç 3.3.1 (3.66) eşitliğinde verilen i . mertebeden operasyonel türev matrisi $(\tilde{\mathbf{D}}_x)^i$ ile j . mertebeden operasyonel türev matrisi $(\tilde{\mathbf{D}}_y)^j$ çarpımsal olarak değişmelidir. Yani bu matrisler ile

$$(\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j = (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i \quad (3.78)$$

eşitliği mevcuttur.

Sonuç 3.3.2. (3.66) matris denklemi, (3.64) türevli fonksiyon açılımında yerine konulduğunda, bir fonksiyonun çeşitli mertebeden türevleri için EC fonksiyonları cinsinden açılımı

$$\bar{u}^{(i,j)}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \left(\tilde{\mathbf{D}}_x \right)^i \left(\tilde{\mathbf{D}}_y \right)^j \mathbf{A} \quad (3.79)$$

elde edilir.

3.3.2. $F_{r,s}(x, y)$ polinomları ile çözüm metodu

Bu kısımda, $\Omega_F = \{(x, y) : x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, y \in [c, d] \subset \mathbb{R}\}$ bölgesinde tanımlı bir (3.1) denkleminin (3.2)-(3.4) koşulları altındaki çözümünün (3.63) formunda elde edilebilmesi için bir metot sunulacaktır.

Metot için test fonksiyonu olarak $W = \delta(x_k, y_l)$ ve baz olarak (3.58) de verilen, Fibonacci polinomları ile üretilen $F_{r,s}(x, y)$ çift değişkenli polinomları kullanılacaktır.

$a \leq x_k \leq b$, $c \leq y_l \leq d$, $(k = 1, 2, \dots, M)$ ve $(l = 1, 2, \dots, N)$ olmak üzere,

$$x_k = a + \frac{b-a}{M-1}(k-1), \quad y_l = c + \frac{d-c}{N-1}(l-1) \quad (3.80)$$

eşit aralıklı kolokasyon noktalarının (3.79) formundaki türevli çözüm fonksiyonuna uygulanmasıyla elde edilecek

$$\left[\bar{u}^{(i,j)}(x_k, y_l) \right] = \mathbf{F}(x_k, y_l) \left(\tilde{\mathbf{D}}_x \right)^i \left(\tilde{\mathbf{D}}_y \right)^j \mathbf{A}$$

sistemi,

$$\mathbf{U}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{u}^{(i,j)}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_1, y_N) \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_2, y_1) \\ \vdots \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_2, y_N) \\ \vdots \\ \bar{u}^{(i,j)}(x_M, y_N) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \mathbf{A}^{(i,j)} = \mathbf{F} \left(\tilde{\mathbf{D}}_x \right)^i \left(\tilde{\mathbf{D}}_y \right)^j \mathbf{A} \quad (3.81)$$

matris denkleminde indirgenir. Burada $\mathbf{F}$, kolokasyon noktaları ile verilmiş, $\mathbf{F}(x, y)$ vektörlerinden oluşan

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(x_1, y_1) & \mathbf{F}(x_1, y_2) & \cdots & \mathbf{F}(x_1, y_N) & \mathbf{F}(x_2, y_1) & \mathbf{F}(x_2, y_2) & \cdots & \mathbf{F}(x_2, y_N) & \cdots \\ & & & & \mathbf{F}(x_M, y_1) & \mathbf{F}(x_M, y_2) & \cdots & \mathbf{F}(x_M, y_N) \end{bmatrix}^T$$

şeklindeki $(M)(N) \times (M)(N)$ tipinde, blok matrisidir. (3.81) eşitliğinde $i = j = 0$ için $\mathbf{U} = \mathbf{F} \mathbf{A}$ dır.

(3.80) deki kolokasyon noktalarının tek tek (3.1) diferansiyel denkleminde yerine konulmasıyla

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r q_{i,j}(x_k, y_l) \bar{u}^{(i,j)}(x_k, y_l) = g(x_k, y_l) \quad (3.82)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan, $\mathbf{Q}_{i,j}$ notasyonu, elemanları $q_{i,j}(x_k, y_l)$ 'lar olan köşegen matrisi ve $\mathbf{G}$ notasyonu ise elemanları $g(x_k, y_l)$ 'lar olan sütun matrisini temsil etmek üzere

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{U}^{(i,j)} = \mathbf{G}, \quad (p \leq M, \quad r \leq N) \quad (3.83)$$

matris denklemi yazılabilir. (3.81) ile verilen $\mathbf{U}^{(i,j)}$ eşitliği kullanılarak (3.83) matris denklemi yeniden düzenlenirse, $a_{r,s}$ bilinmeyen FP katsayılarını içeren $(M)(N)$ adet lineer pseudo-spektral denkleme karşılık gelen

$$\left(\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{F} (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j \right) \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.84)$$

temel matris denklemi elde edilir. Parantez içindeki matris $\mathbf{W}$ ile temsil edilmek üzere,

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.85)$$

denkleminin eklemeli matris formu

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (3.86)$$

şeklindedir.

Kolokasyon noktaları koşul denklemlerine de uygulanır ve matris formlarına dönüştürülürse,

$$\left(\sum_{t=1}^p \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{b}_{t_{i,j}} \mathbf{F}(\omega_t, \eta_t) (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j \right) \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}, \quad a \leq \omega_t \leq b, \quad c \leq \eta_t \leq d \quad (3.87)$$

$$\left(\sum_{t=1}^v \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{c}_{t_{i,j}}(x_k) \mathbf{F}(x_k, \gamma_t) (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j \right) \mathbf{A} = \boldsymbol{g}_k(x_k), \quad c \leq \gamma_t \leq d, \quad k = 1(1)M \quad (3.88)$$

$$\left(\sum_{t=1}^g \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{d}_{t_{i,j}}(y_l) \mathbf{F}(\varepsilon_t, y_l) (\tilde{\mathbf{D}}_x)^i (\tilde{\mathbf{D}}_y)^j \right) \mathbf{A} = \mathbf{h}_l(y_l), \quad a \leq \varepsilon_t \leq b, \quad l = 1(1)N \quad (3.89)$$

sistemleri elde edilir. (3.87), (3.88) ve (3.89) sistemlerinde eşitliklerin sol yanlarındaki parantez içleri sırasıyla $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ ve $\mathbf{V}_3$ vektörleri ile, sağ yanları ise sırasıyla $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{g}_k$ ve $\mathbf{h}_l$ ile ifade edilmek üzere koşullara ait genel matris denklemleri

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{V}_2 \mathbf{A} = \boldsymbol{g}_k \quad (3.91)$$

ve

$$\mathbf{V}_3 \mathbf{A} = \mathbf{h}_l \quad (3.92)$$

olarak yazılabilir. Koşullardan gelen $[\mathbf{V}_1 : \boldsymbol{\lambda}]$, $[\mathbf{V}_2 : \boldsymbol{g}_k]$ ve $[\mathbf{V}_3 : \mathbf{h}_l]$ eklemeli matrisleri ile kısmi diferansiyel denklemden gelen $[\mathbf{W} : \mathbf{G}]$ eklemeli matrisinin birleştirilmesiyle

$$[\mathbf{W}^* : \mathbf{G}^*] = \begin{bmatrix} \mathbf{W} : \mathbf{G} \\ \mathbf{V}_1 : \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{V}_2 : \boldsymbol{g}_k \\ \mathbf{V}_3 : \mathbf{h}_l \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

matrisi elde edilir. Bu matris, denklem sayısının bilinmeyen sayısından fazla olduğu

$$\mathbf{W}^* \mathbf{A} = \mathbf{G}^* \quad (3.94)$$

denklem sisteminin karşılığıdır. (3.94) sistemine Gauss satır indirgeme işlemi uygulanır ve sıfırdan farklı satırları silinerek $[\tilde{\mathbf{W}} : \tilde{\mathbf{G}}]$ ile ifade edilirse, problemin çözümündeki bilinmeyen Fibonacci katsayılarını

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.95)$$

denkleminin çözümü verir. Gauss eliminasyon, üçgen matris metotları gibi lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan metotlardan biri yardımıyla çözüm gerçekleştirilir. Eğer $\tilde{\mathbf{W}}$ matrisi tersinir değilse, kolokasyon noktaları, $\tilde{\mathbf{W}}$ tersinir olacak şekilde değiştirilir.

Denklemden gelen $[\mathbf{W} : \mathbf{G}]$ matrisinin belli sayıdaki satırı silinip koşullardan gelen eklemeli matrislerin bu matrise eklenmesiyle $[\tilde{\mathbf{W}} : \tilde{\mathbf{G}}]$ matrisi elde edilerek de çözüm gerçekleştirilebilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, tez kapsamında tanımlanan sayısal yöntemlerin doğruluk ve etkinlikleri çeşitli kısmi diferansiyel denklem problemleri üzerinde test edilmiştir. İstenildiği kadar büyük kesme sınırlarında çalışabilmek için, metotlara ait algoritmalar Maple’da programlanarak problemlere uygulanmıştır. Ayrıca, kesme sınırlarının yeterli büyüklükte olması halinde bile oluşabilen bilgisayar kaynaklı hataları minimize edebilmek adına, programlamalar esnasında hane duyarlılığı da dikkate alınmıştır. Böylece elde edilen sonuçlar çeşitli tablo ve grafikler ile sunulmuştur.

4.1. Çift Değişkenli Eksponansiyel Chebyshev Fonksiyon Yaklaşım Uygulaması

Örnek 4.1.1. İkinci mertebeden, değişken katsayılı

$$u_{xy} - \frac{2}{e^y + 1} u_x = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2 (e^y + 1)^2} \quad (4.1)$$

lineer kısmi diferansiyel denkleminin

$$u_y(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0 \quad (4.2)$$

koşulları altındaki kesikli çift değişkenli eksponansiyel Chebyshev seri çözümü bulunsun (Koç ve Kurnaz, 2013).

$m = n = 15$ için $\{(x_k, y_l)\}_{k=0(1)m, l=0(1)n}$ kolokasyon noktaları ile oluşturulan

$$u^{(1,1)}(x_k, y_l) - q(x_k, y_l) u^{(1,0)}(x_k, y_l) = g(x_k, y_l) \quad (4.3)$$

şeklinde 16^2 adet lineer denklemden oluşan sisteme karşılık temel matris denklemi

$$\{E(D_x)(D_y) - Q_{1,0} E(D_x)\} A = G \quad (4.4)$$

olarak kurulur. Burada E , 16^2 adet kolokasyon noktası için verilmiş, $E(x, y)$ polinom vektörlerinden oluşan $16^2 \times 16^2$ tipinde blok matrisi; $Q_{1,0}$, elemanları

$q_{1,0}(x_k, y_l) = \frac{2}{e^{y_l} + 1}$ olan $16^2 \times 16^2$ tipinde köşegen matrisi ve $\mathbf{G}$ ise, elemanları

$g(x_k, y_l) = \frac{4e^{x_k}}{(e^{x_k} + 1)^2 (e^{y_l} + 1)^2}$ olan $16^2 \times 1$ tipinde sütun vektörüdür. Kolokasyon

noktaları ile koşullardan $u_y(0, y) = 0$ için

$$u^{(0,1)}(0, y_l) = \lambda_{1,l} \quad (4.5)$$

sisteminden

$$\{\mathbf{E}(0, y_l)(\mathbf{D}_y)\} \mathbf{A} = \lambda_{1,l} \quad (4.6)$$

matris denklemi ve $u(x, 0) = 0$ için

$$u^{(0,0)}(x_k, 0) = \lambda_{2,k} \quad (4.7)$$

sisteminden

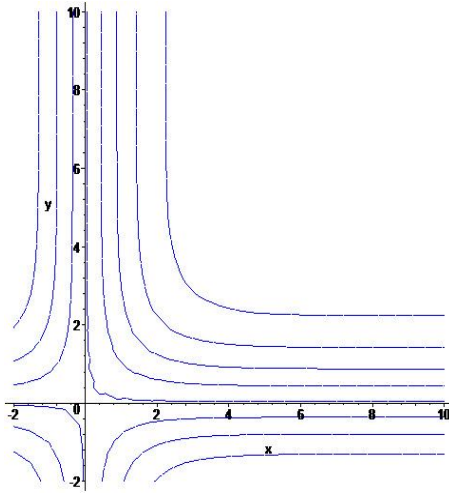
$$\mathbf{E}(x_k, 0) \mathbf{A} = \lambda_{2,k} \quad (4.8)$$

matris denklem sistemi elde edilir. İstenen çözümdeki katsayıları içeren $\mathbf{A}$ katsayılar vektörü, (4.4), (4.6) ve (4.8) matris denklemlerinin ortak çözümünden elde edilir.

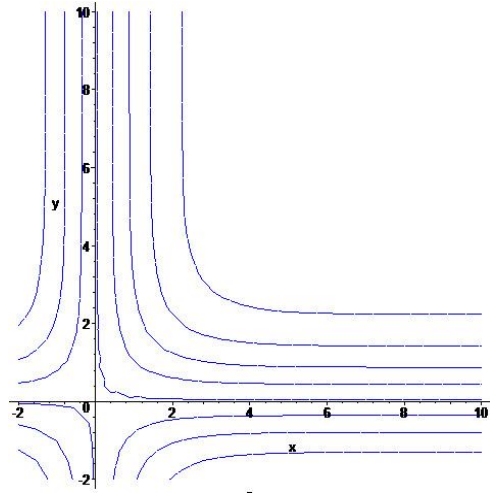
Maple paket programı kullanılarak elde edilen sonuçlara ait grafikler problemin

$u(x, y) = \frac{e^{x+y} - e^x - e^y + 1}{(e^x + 1)(e^y + 1)}$ gerçek çözüm fonksiyonu ile karşılaştırmalı olarak Şekil

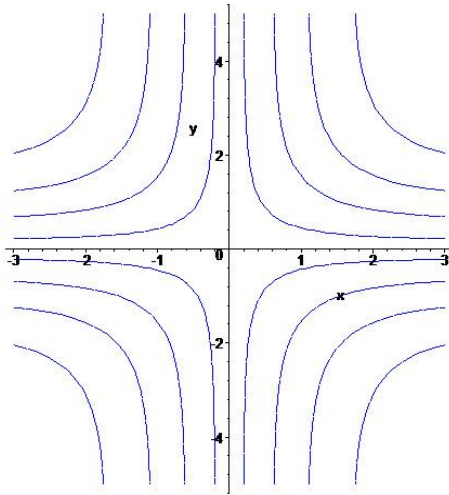
4.1.1 ve Şekil 4.1.2 de verilmiştir. Farklı noktalardaki $|u - u_{yaklaşık}|$ mutlak hata fonksiyonuna ait değerler ise Tablo 4.1.1 de verilmiştir.



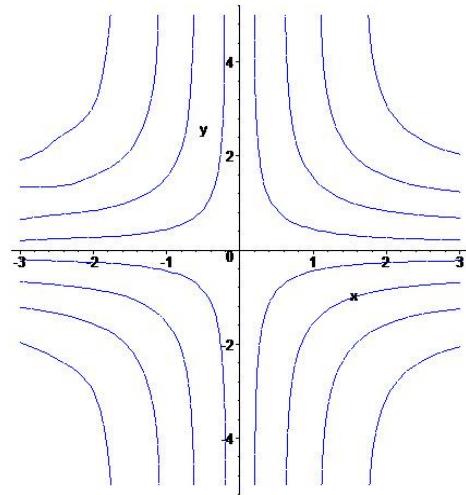
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.1.1. (a) Örnek 4.1.1. in gerçek çözüm fonksiyonuna ait $-2 \leq x, y \leq 10$ aralığındaki eşyükselti grafiği

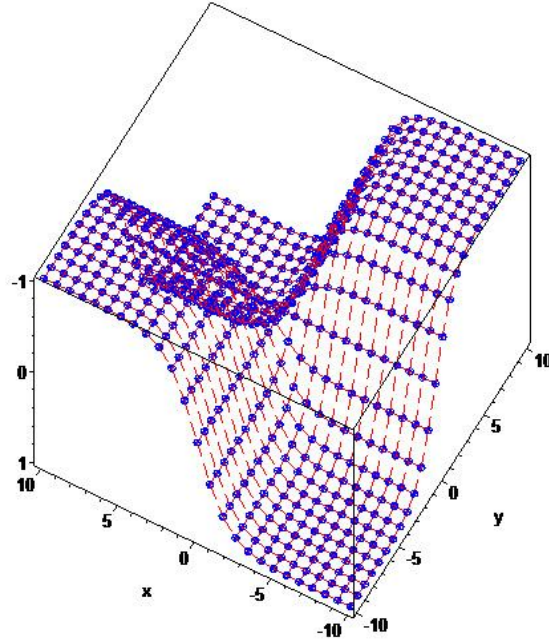
(b) Örnek 4.1.1. in nümerik çözüm fonksiyonuna ait $-2 \leq x, y \leq 10$ aralığındaki eşyükselti grafiği

(c) Örnek 4.1.1. in gerçek çözüm fonksiyonuna ait $-3 \leq x \leq 3$ ve $-5 \leq y \leq 5$ aralığındaki eşyükselti grafiği

(d) Örnek 4.1.1. in nümerik çözüm fonksiyonuna ait $-3 \leq x \leq 3$ ve $-5 \leq y \leq 5$ aralığındaki eşyükselti grafiği

Tablo 4.1.1. Örnek 4.1.1 için farklı kolokasyon noktalarındaki mutlak hatalar

x	y	$m = n = 15$
4.5056	4.5056	3.31 E-08
4.5056	2.248	2.09 E-08
4.5056	1.618	1.48 E-08
4.5056	-2.248	3.18 E-08
4.5056	-4.5056	3.38 E-08
3.0970	4.5056	1.58 E-08
3.0970	1.618	6.00 E-10
3.0970	-0.209	1.90 E-10
2.248	3.0970	4.40 E-09
2.248	-3.0970	5.30 E-09
1.6183	-0.2098	3.50 E-10
0.2098	-0.2098	1.80 E-10
-0.2098	-0.2098	1.00 E-10
-2.248	-1.098	1.90 E-09
-3.0970	2.248	2.20 E-09
-3.0970	-2.248	1.30 E-09



Şekil 4.1.2. Örnek 4.1.1 de verilen problemin $m = n = 15$ için elde edilen nümerik çözüm ve gerçek çözüm grafikleri
 (--- : gerçek çözüm fonksiyonu, ••• : nümerik çözüm fonksiyonu)

4.2. Fibonacci Polinomları Cinsinden Yaklaşım Uygulaması

Örnek 4.2.1. Keşan (2003) tarafından Chebyshev polinomları ile

$\Omega = \{(x, y) : (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$ bölgesinde yaklaşım yapılan

$$u_{yy} - u_{xx} = 6 \quad (4.9)$$

ikinci mertebeden lineer sabit katsayılı diferansiyel denkleminin

$$u(x, 0) = x^2, \quad u_y(x, 0) = 4x \quad (4.10)$$

koşulları altındaki çözümü, $u_{yaklaşık}(x, y) = \sum_{r=1}^M \sum_{s=1}^N a_{r,s} F_{r,s}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \mathbf{A}$ formunda aransın.

$M = m + 1$ ve $N = n + 1$ olmak üzere, $m = n = 3$ için eşit aralıklı $\{(x_k, y_l)\}_{k=1(1)m+1}^{l=1(1)n+1}$ kolokasyon noktaları ile oluşturulan

$$u^{(0,2)}(x_k, y_l) - u^{(2,0)}(x_k, y_l) = g(x_k, y_l) \quad (4.11)$$

şeklinde 4^2 adet lineer denkleminin seri formlarına karşılık, bilinmeyen katsayıları içeren $4^2 \times 1$ tipindeki $\mathbf{A}$ vektörü ile

$$\left\{ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y)^2 - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_x)^2 \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.12)$$

genel matris denklemi elde edilir. Kısaca $\left\{ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y)^2 - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_x)^2 \right\} = \mathbf{W}$ olmak üzere

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.13)$$

yazılabilir. $\mathbf{W}$, $4^2 \times 4^2$ tipinde bir matris; $\mathbf{G}$ ise 4^2 adet elemanı 0 olan sütun vektörüdür.

Benzer şekilde $u(x, 0) = x^2$ ve $u_y(x, 0) = 4x$ koşulları için kolokasyon noktaları ile kurulan, her bir koşula ait 4 adet denklemden oluşan sistem ve bu sisteme karşılık gelen matris denklemleri sırasıyla,

$$u^{(0,0)}(x_k, 0) = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \Rightarrow \{\mathbf{F}(x_k, 0)\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_1 \mathbf{A} = \mathcal{G}_1 \quad (4.14)$$

ve

$$u^{(0,1)}(x_k, 0) = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \Rightarrow \{\mathbf{F}(x_k, 0) \tilde{\mathbf{D}}_y\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_2 \mathbf{A} = \mathcal{G}_2 \quad (4.15)$$

olacaktır. Burada, $\mathcal{G}_{1,k}(x_k) = x_k^2$ ve $\mathcal{G}_{2,k}(x_k) = 4x_k$ dir. (4.13), (4.14) ve (4.15) denklemlerinin ortak çözümünüyle katsayılar vektörü

$$\mathbf{A} = [-5, 0, 4, 0, 0, 4, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.16)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$u_{yaklaşık} = -5F_{1,1}(x, y) + 4F_{1,3}(x, y) + 4F_{2,2}(x, y) + F_{3,1}(x, y) = 4y^2 + 4xy + x^2 \quad (4.17)$$

çözüm fonksiyonu elde edilir ki aynı zamanda gerçek çözüm fonksiyonu $u(x, y) = (x + 2y)^2$ elde edilmiş olur.

Örnek 4.2.2. Bir boyutlu, sabit katsayılı

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.18)$$

homojen Laplace denklemi,

$$u(x, -1) = u(x, 1) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (4.19)$$

ve

$$u(1, y) = u(-1, y) = 0 \quad (4.20)$$

Dirichlet sınır koşulları altında ele alınsın. Problemin tam çözümü

$$u(x, y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \text{ olarak verilmiştir (Doha ve Abd-Elhameed, 2005).}$$

Fibonacci polinomları cinsinden kesikli seri çözümü aransın. Problemin $-1 \leq x, y \leq 1$ tanım bölgesinde eşit aralıklı her bir kolokasyon noktası için (4.18) denkleminin yeniden düzenlenmesiyle elde edilecek sisteme ait temel matris denklemi

$$\left\{ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y)^2 + \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_x)^2 \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.21)$$

olup, $\mathbf{W} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y)^2 + \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_x)^2$ matrisi ve kolokasyon nokta sayısı adedince sıfır satırından oluşan $\mathbf{G}$ vektörü ile kısaca

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \quad (4.22)$$

yazılabilir. Aynı kolokasyon noktaları ile düzenlenmiş koşullara ait denklem sistemleri ve matris formları

$$u^{(0,0)}(x_k, -1) = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \Rightarrow \{\mathbf{F}(x_k, -1)\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_1 \mathbf{A} = \mathcal{G}_1$$

$$u^{(0,0)}(x_k, 1) = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \Rightarrow \{\mathbf{F}(x_k, 1)\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_2 \mathbf{A} = \mathcal{G}_2$$

$$u^{(0,0)}(-1, y_l) = h_{1,l}(y_l) \Rightarrow \{\mathbf{F}(-1, y_l)\} \mathbf{A} = h_{1,l}(y_l) \Rightarrow \mathbf{V}_3 \mathbf{A} = \mathbf{h}_1$$

$$u^{(0,0)}(1, y_l) = h_{2,l}(y_l) \Rightarrow \{\mathbf{F}(1, y_l)\} \mathbf{A} = h_{2,l}(y_l) \Rightarrow \mathbf{V}_4 \mathbf{A} = \mathbf{h}_2$$

şeklinde elde edilir, öyle ki $\mathcal{G}_{1,k}(x_k) = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) = \cos\left(\frac{\pi x_k}{2}\right)$ ve $h_{1,l}(y_l) = h_{2,l}(y_l) = 0$

dır. Böylece elde edilen beş temel matris denkleminin birlikte çözülmesiyle, $\mathbf{A}$ bilinmeyen katsayılar vektörü elde edilir ki bu da problemin $u_{yaklaşık}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \mathbf{A}$ şeklinde kesikli seri çözümünü verir. Elde edilen çözüme ait veriler çeşitli tablo ve grafikler üzerinden verilmiştir.

Eşit aralıklı farklı sayıdaki kolokasyon noktaları için mutlak hata fonksiyonunun sonsuz norm değerleri $D=20$ haneli ve $D=30$ haneli duyarlılıkta Tablo 4.2.1 de karşılaştırılmıştır.

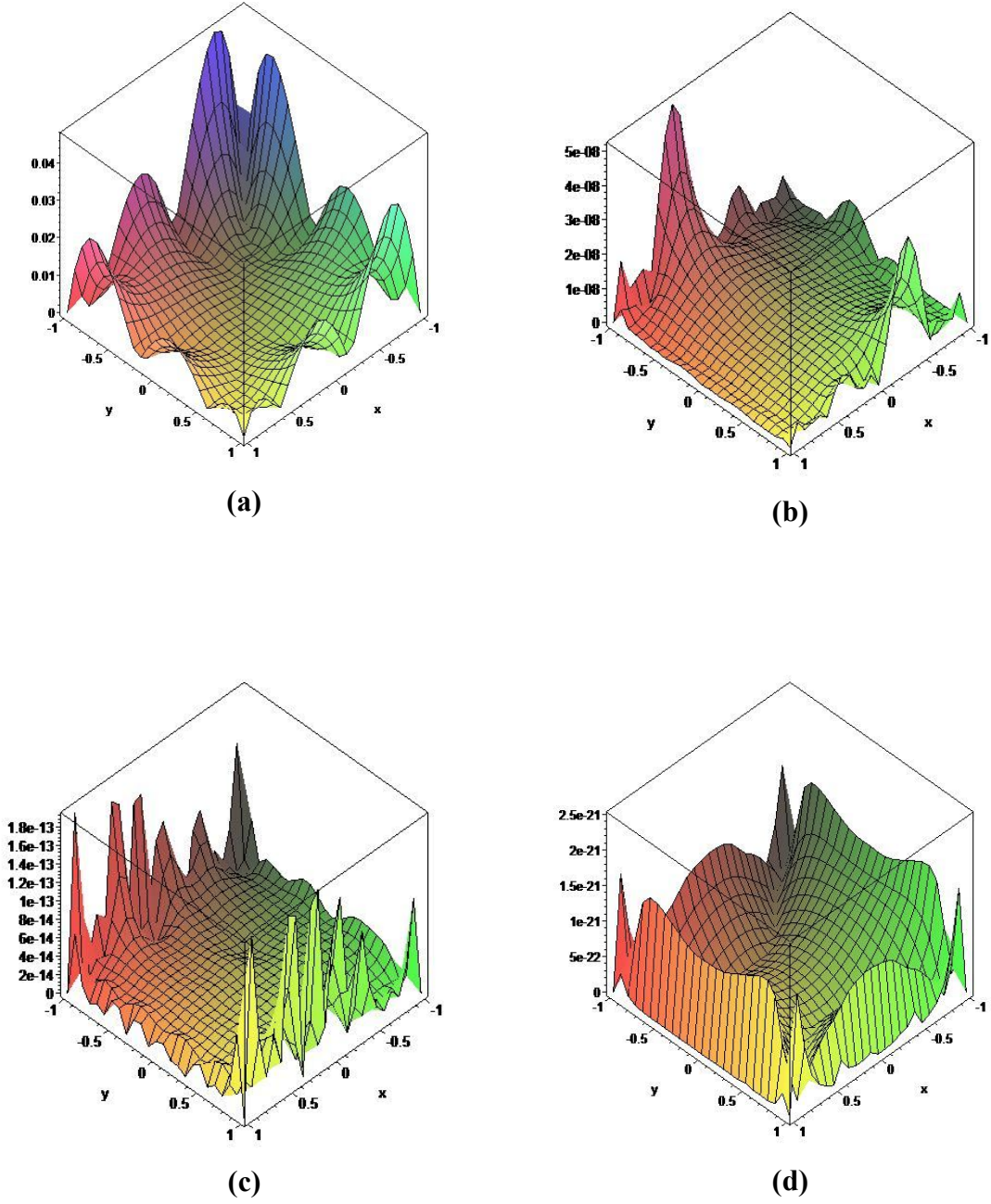
Tablo 4.2.1. Örnek 4.2.2 için $\|u - u_{yaklaşık}\|_{\infty}$ norm değerleri

	M=N=5	M=N=6	M=N=7	M=N=8
D=20	0.0445024177	0.16257797 E-03	0.12764070 E-03	0.92179417 E-05
D=30	0.0445024177	0.15953927 E-03	0.12378474 E-03	0.91215651 E-05
	M=N=9	M=N=10	M=N=11	M=N=12
D=20	0.72895596 E-05	0.46072294 E-07	0.81582800 E-07	0.13350476 E-09
D=30	0.85967728 E-05	0.28615508 E-07	0.92190222 E-07	0.13210058 E-09
	M=N=13	M=N=14	M=N=15	M=N=16
D=20	0.94510664 E-10	0.15523504 E-12	0.21036052 E-12	0.27673320 E-15
D=30	0.94492684 E-10	0.15564536 E-12	0.20975366 E-12	0.28216683 E-15
	M=N=17	...	M=N=20	
D=20	0.27663185 E-15	...	0.59390799 E-18	
D=30	0.28649883 E-15	...	0.13643958 E-20	

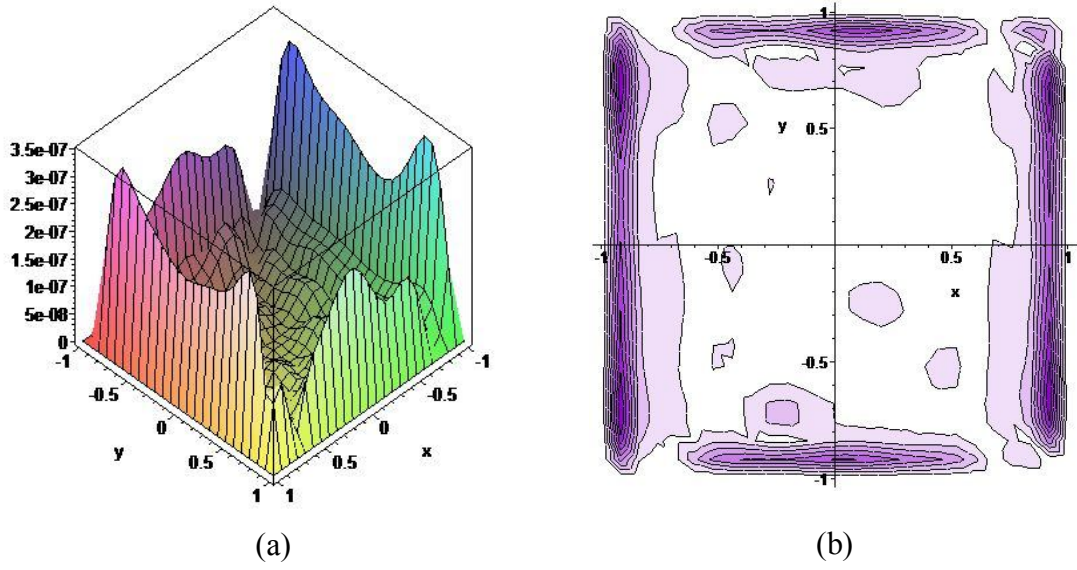
$M = N = 8$ için eşit aralıklı kolokasyon noktalarındaki mutlak hata fonksiyon değerleri Tablo 4.2.2 de verilmiştir. $M = N = 5, 10, 15, 20$ için mutlak hata fonksiyon grafikleri Şekil 4.2.1 de karşılaştırılmıştır. $M = N = 10$ için mutlak rezidü fonksiyonuna ait üç boyutlu grafiği ile eşyükselti grafiği ise Şekil 4.2.2 de sunulmuştur.

Tablo 4.2.2. Örnek 4.2.2 için noktasal mutlak hata değerleri

x	y	Fibonacci türü yaklaşım (D=20)	Fibonacci türü yaklaşım (D=30)
1	1	0.39932169 E-18	0.15789800 E-28
0.5	0.5	0.25859452 E-06	0.11347937 E-06
0.2	0.2	0.42820801 E-06	0.67754326 E-07
0	0	0.64241508 E-06	0.47611559 E-07
-0.2	-0.2	0.97693630 E-06	0.76312080 E-07
-0.5	-0.5	0.17751594 E-05	0.29505931 E-08
-1	-1	0.42932169 E-18	0.17789800 E-28



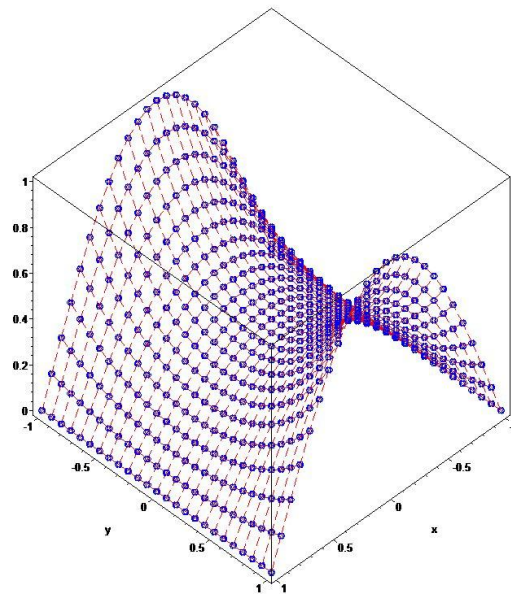
Şekil 4.2.1. (a) Örnek 4.2.2. de $N=M=5$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği
 (b) Örnek 4.2.2. de $N=M=10$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği
 (c) Örnek 4.2.2. de $N=M=15$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği
 (d) Örnek 4.2.2. de $N=M=20$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği



Şekil 4.2.2. (a) Örnek 4.2.2. de $N=M=10$ için mutlak rezidü fonksiyonu grafiği

(b) Örnek 4.2.2. de $N=M=10$ için mutlak rezidü fonksiyonu eşyüksekti eğri grafiği

$M = N = 10$ için nümerik çözüm ve gerçek çözüm fonksiyonlarına ait grafikler ise Şekil 4.2.3 ile verilmiştir. Grafikler $D=30$ haneli duyarlılıkta çalışılmıştır.



Şekil 4.2.3. Örnek 4.2.2. de $N=M=10$ için elde edilen nümerik çözüm ve gerçek çözüm grafikleri

(--- : gerçek çözüm fonksiyonu, ••• : nümerik çözüm fonksiyonu)

Örnek 4.2.3. İkinci mertebeden, bir boyutlu, sabit katsayılı

$$u_{tt} + 4u_t + 2u = u_{xx} \quad (4.23)$$

Telgraf denklemini

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = -\sin x \quad (4.24)$$

başlangıç koşulları altındaki çözüm problemi ele alınsın. Tam çözümü $u(x, t) = e^{-t} \sin x$ fonksiyonudur (Yousefi, 2010). Fibonacci polinomları cinsinden nümerik çözümü $\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 2]\}$ bölgesinde araştırılsın. Probleme ait matris denklemleri, Kısım 3.3.2 de verilen prosedür izlenerek

$$\begin{aligned} u_{tt} + 4u_t + 2u - u_{xx} &= 0 \Rightarrow \\ u^{(0,2)}(x_k, y_l) + 4u^{(0,1)}(x_k, y_l) + 2u^{(0,0)}(x_k, y_l) - u^{(2,0)}(x_k, y_l) &= g(x_k, y_l) \\ &\Rightarrow \left\{ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y)^2 + 4\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y) + 2\mathbf{F} - \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_x)^2 \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.25)$$

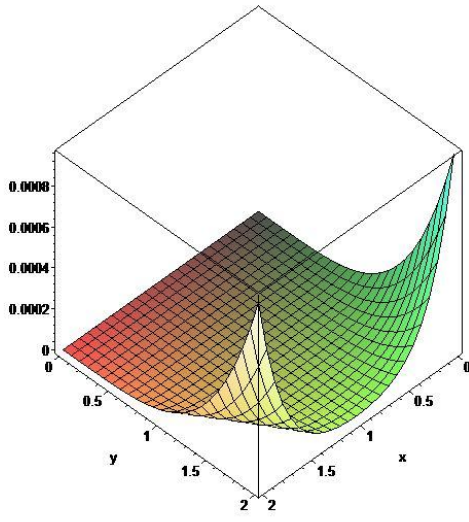
$$\begin{aligned} u(x, 0) = \sin x &\Rightarrow u^{(0,0)}(x_k, 0) = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \\ &\Rightarrow \left\{ \mathbf{F}(x_k, 0) \right\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_1 \mathbf{A} = \mathcal{G}_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) = -\sin x &\Rightarrow u^{(0,1)}(x_k, 0) = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \\ &\Rightarrow \left\{ \mathbf{F}(x_k, 0) \tilde{\mathbf{D}}_y \right\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_2 \mathbf{A} = \mathcal{G}_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

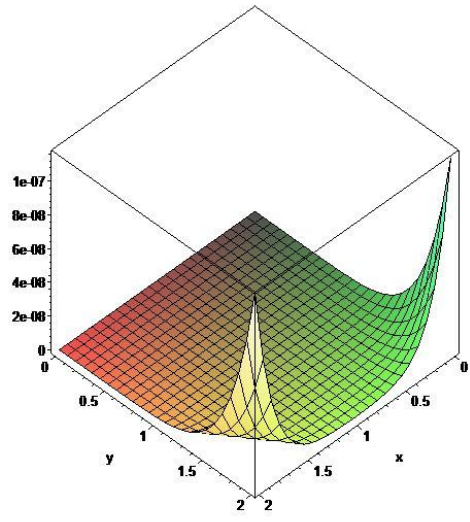
şeklinde elde edilir (Koç ve Kurnaz, 2014). Problem, $M = N = 7, 9, 10, 11, 15$ kesme sınırları alınarak temel matris denklemleri yardımıyla çözülmüş ve sonsuz normdaki sonuçlar $M = N = 9, 11$ kesme sınırları için $D=20$ haneli ve $D=30$ haneli duyarlılıkta Tablo 4.2.3 da verilmiştir. $M = N = 10, 15$ için mutlak hata fonksiyon grafikleri ve $M = N = 15$ kesme sınırı için elde edilen $u_{yaklaşık}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \mathbf{A}$ nümerik çözümü ile gerçek çözüm fonksiyonlarına ait yoğunluk grafikleri Şekil 4.2.4 de sunulmuştur. $M = N = 7, 15$ için mutlak rezidü fonksiyon grafikleri ise Şekil 4.2.5 de sunulmuştur. Grafikler $D=25$ haneli duyarlılıkta çalışılmıştır.

Tablo 4.2.3 . Örnek 4.2.3 için Taylor, Bernoulli ve Fibonacci türü yaklaşımların mutlak hatalarının kıyaslanması

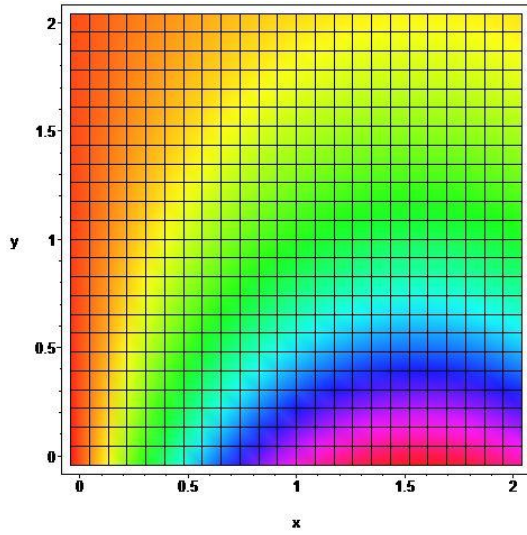
(x_r, t_r)	$M = N = 9$			$M = N = 11$		
	Taylor Polinom Yaklaşımı (Bülbul ve Sezer, 2011)	Bernoulli Yaklaşımı (Tohidi ve Shirazian,2012)	Fibonacci Türü Yaklaşım	Taylor Polinom Yaklaşımı (Bülbul ve Sezer, 2011)	Bernoulli Yaklaşımı (Tohidi ve Shirazian,2012)	Fibonacci Türü Yaklaşım
(0.,0.)	0	9.84 E-09	3.12 E-23	0	2.49 E-10	3.13 E-24
(0.1,0.1)	2.96 E-16	1,15 E-08	1.14 E-08	7.68 E-20	1.39 E-10	7.39 E-11
(0.2,0.2)	7.01 E-13	1,41 E-08	1.70 E-09	7.34 E-16	1.77 E-10	4.15 E-11
(0.3,0.3)	6.99 E-11	1,86 E-09	9.38 E-09	1.66 E-13	4.68 E-11	2.52 E-11
(0.4,0.4)	1.90 E-09	7,21 E-08	7.67 E-09	8.12 E-12	2.38 E-09	2.12 E-11
(0.5,0.5)	2.53 E-08	2,08 E-07	1.09 E-09	1.71 E-10	7.81 E-09	1.66 E-11
(0.6,0.6)	2.15 E-07	3,46 E-07	4.46 E-09	2.11 E-09	1.41 E-08	4.27 E-12
(0.7,0.7)	1.34 E-06	3,30 E-07	3.46 E-09	1.81 E-09	1.44 E-08	5.51 E-13
(0.8,0.8)	6.62 E-06	2.10 E-08	1.35 E-08	1.18 E-07	1.27 E-09	5.60 E-12
(0.9,0.9)	2.74 E-05	7.08 E-07	2.41 E-09	6.30 E-07	3.95 E-08	6.47 E-12
(1.,1.)		9,69 E-07	4.46 E-09		9.81 E-08	1.42 E-11
(1.1,1.1)		2.74 E-06	2.94 E-07		1.94 E-07	2.75 E-09
(1.2,1.2)		2.36 E-05	2.00 E-06		5.48 E-07	3.37 E-08
(1.3,1.3)		1.05 E-04	7.95 E-06		2.35 E-06	2.08 E-07
(1.4,1.4)		3.79 E-04	2.42 E-05		1.04 E-05	8.99 E-07
(1.5,1.5)		1.19 E-03	6.21 E-05		4.13 E-05	3.08 E-06
(1.6,1.6)		3.43 E-03	1.40 E-04		1.45 E-04	8.98 E-06
(1.7,1.7)		9.13 E-03	2.88 E-04		4.65 E-04	2.31 E-05
(1.8,1.8)		2.26 E-02	5.47 E-04		1.36 E-03	5.38 E-05
(1.9,1.9)		5.31 E-02	9.70 E-04		3.74 E-03	1.16 E-04
(2.,2.)		1.18 E-01	1.63 E-03		9.67E-03	2.32 E-04



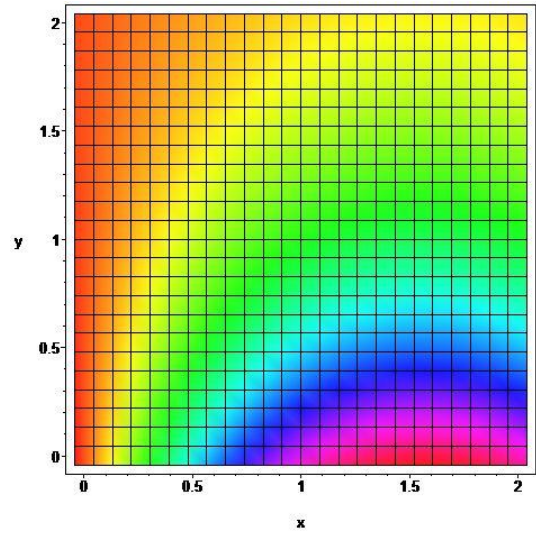
(a)



(b)

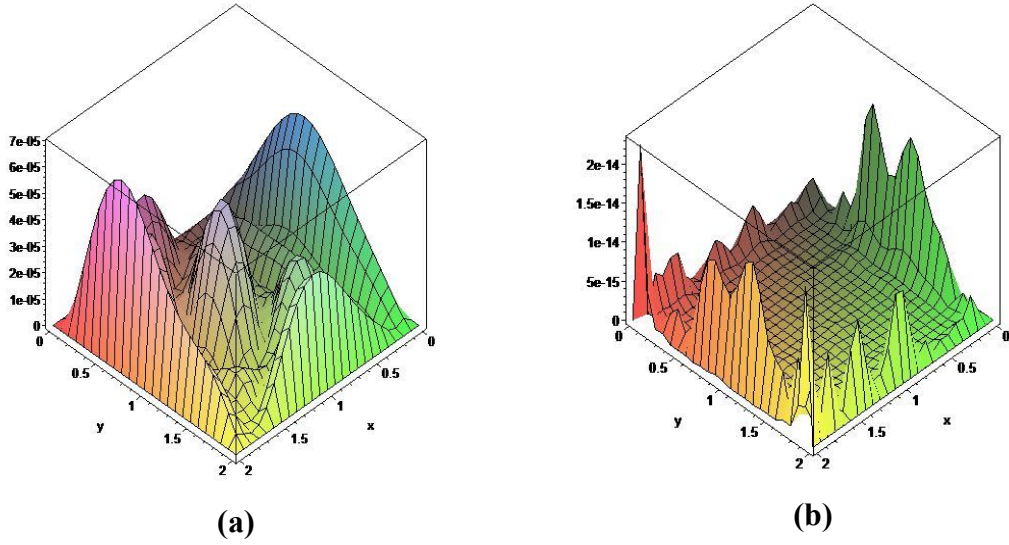


(c)



(d)

Şekil 4.2.4. (a) Örnek 4.2.3. de $N=M=10$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği
 (b) Örnek 4.2.3. de $N=M=15$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği
 (c) Örnek 4.2.3. de $N=M=15$ için gerçek çözüm fonksiyonu yoğunluk grafiği
 (d) Örnek 4.2.3. de $N=M=15$ için nümerik çözüm fonksiyonu yoğunluk grafiği



Şekil 4.2.5. (a) Örnek 4.2.3. de $N=M=7$ için mutlak rezidü fonksiyonu grafiği
 (b) Örnek 4.2.3. de $N=M=15$ için mutlak rezidü fonksiyonu grafiği

Örnek 4.2.4. Bir boyutlu, değişken katsayılı, homojen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.28)$$

hiperbolik diferansiyel denkleminin

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x^2 \quad (4.29)$$

koşulları altındaki tam çözümü $u(x, t) = x + x^2 \sinh t$ fonksiyonudur (Jin, 2008).

$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 1]\}$ bölgesindeki $u_{yaklaşık}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \mathbf{A}$ çözümü için eşit aralıklı kolokasyon noktaları ile matris denklemleri

$$\begin{aligned} u_{tt} - \frac{x^2}{2} u_{xx} = 0 &\Rightarrow u^{(0,2)}(x_k, y_l) - q_{2,0} u^{(2,0)}(x_k, y_l) = g(x_k, y_l) \\ &\Rightarrow \left\{ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y)^2 - \mathbf{Q}_{2,0} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_x)^2 \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \end{aligned} \quad (4.30)$$

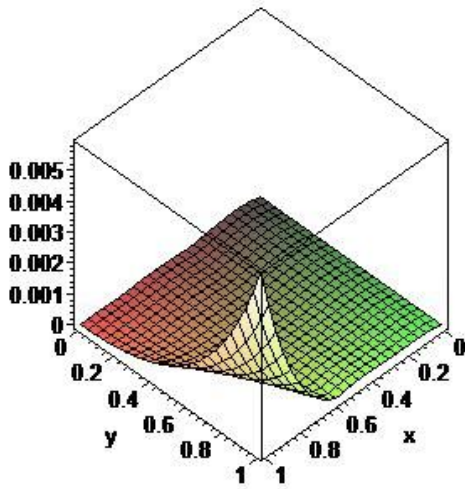
$$\begin{aligned} u(x, 0) = x &\Rightarrow u^{(0,0)}(x_k, 0) = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \\ &\Rightarrow \left\{ \mathbf{F}(x_k, 0) \right\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_1 \mathbf{A} = \mathcal{G}_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) = x^2 &\Rightarrow u^{(0,1)}(x_k, 0) = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \\ &\Rightarrow \left\{ \mathbf{F}(x_k, 0) \tilde{\mathbf{D}}_y \right\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_2 \mathbf{A} = \mathcal{G}_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

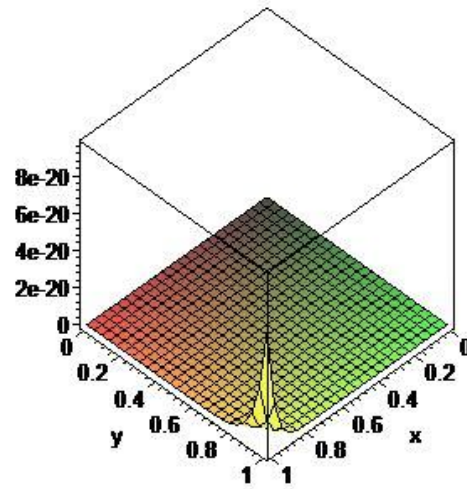
olarak elde edilir. Problem $M = N = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20$ alınarak temel matris bağıntıları yardımıyla çözülmüştür. Sonsuz normdaki çözüm hataları $D=20$ haneli ve $D=30$ haneli duyarlılıkta Tablo 4.2.4 de verilmiştir. $D=30$ haneli duyarlılıkta çalışılan $M = N = 5, 20$ kesme sınırlarındaki mutlak hata fonksiyon grafikleri Şekil 4.2.6 da, $M = N = 10, 20$ kesme sınırındaki mutlak rezidü fonksiyonlarının üç boyutlu grafikleri ile eşyükselti eğri grafikleri ise Şekil 4.2.7 de sunulmuştur.

Tablo 4.2.4. Örnek 4.2.4 için $\|u - u_{yaklaşık}\|_{\infty}$ norm değerleri

	M=N=5	M=N=6	M=N=7	M=N=8
D=20	0.15035644 E-02	0.20640031 E-02	0.73015072 E-04	0.25003073 E-04
D=30	0.15035644 E-02	0.16121418 E-02	0.70907238 E-04	0.13015314 E-04
	M=N=9	M=N=10	M=N=11	M=N=12
D=20	0.75949907 E-06	0.70179172 E-07	0.27643717 E-07	0.24878215 E-08
D=30	0.38171485 E-05	0.15430795 E-06	0.26604715 E-07	0.22846813 E-08
	M=N=13	M=N=14	M=N=15	M=N=16
D=20	0.59732835 E-10	0.19171218 E-10	0.10345220 E-10	0.25601901 E-11
D=30	0.98433976 E-10	0.10992167 E-10	0.10062110 E-12	0.15383719 E-12
	M=N=17	...	M=N=20	
D=20	0.18809020 E-10	...	0.22299377 E-12	
D=30	0.35998881 E-14	...	0.64654392 E-19	



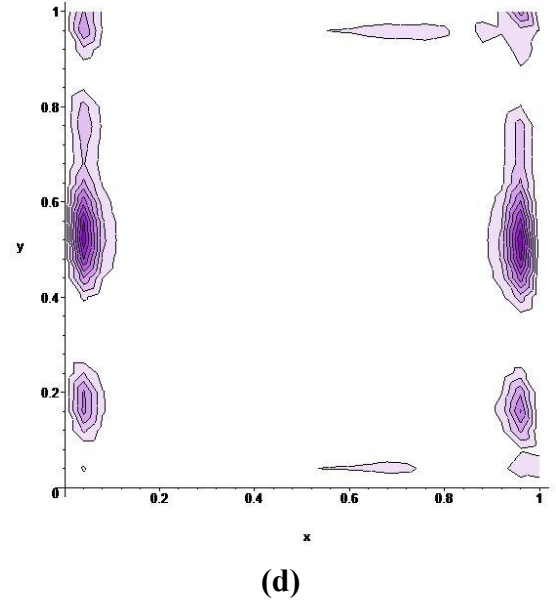
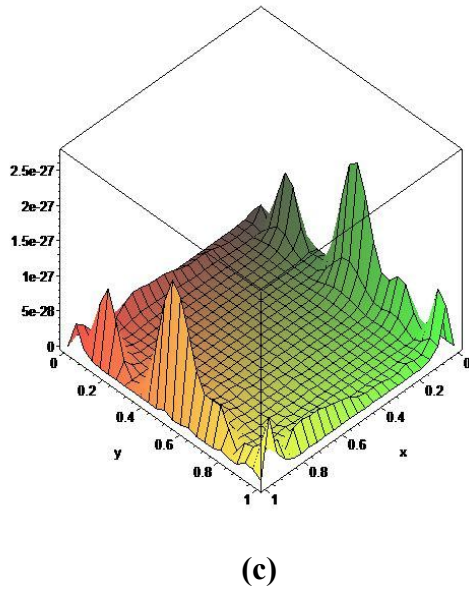
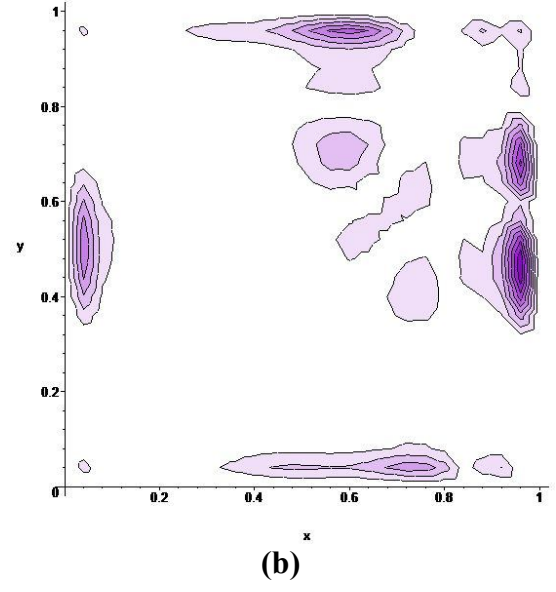
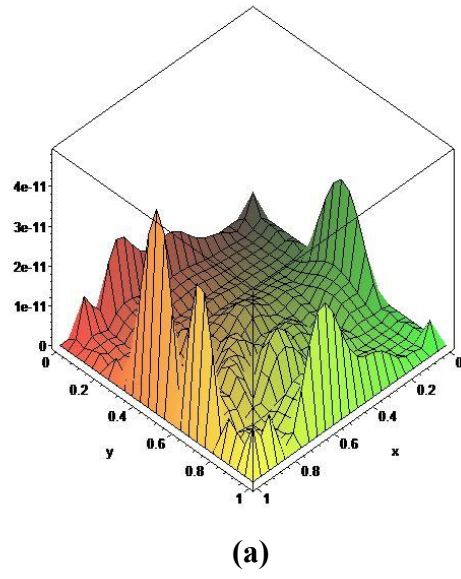
(a)



(b)

Şekil 4.2.6. (a) Örnek 4.2.4. de $N=M=5$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği

(b) Örnek 4.2.4. de $N=M=20$ için mutlak hata fonksiyonu grafiği



Şekil 4.2.7. (a) Örnek 4.2.4. de $N=M=10$ için mutlak rezidü fonksiyonu grafiği
 (b) Örnek 4.2.4. de $N=M=10$ için mutlak rezidü fonksiyonu eşyükselti grafiği
 (c) Örnek 4.2.4. de $N=M=20$ için mutlak rezidü fonksiyonu grafiği
 (d) Örnek 4.2.4. de $N=M=20$ için mutlak rezidü fonksiyonu eşyükselti grafiği

Örnek 4.2.5. Bir boyutlu, değişken katsayılı, homojen olmayan

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2x^2 y^2 e^{xy}$$

eliptik diferansiyel denkleminin,

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = e^x, \quad u(0, y) = 1, \quad u(1, y) = e^y$$

Dirichlet sınır koşulları altındaki analitik çözümü $u(x, y) = e^{xy}$ dir (Isık ve ark., 2013).

$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 1]\}$ bölgesindeki eşit aralıklı kolokasyon noktaları ile yazılacak

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2x^2 y^2 e^{xy} \Rightarrow q_{2,0} u^{(2,0)}(x_k, y_l) + q_{0,2} u^{(0,2)}(x_k, y_l) = g(x_k, y_l) \\ &\Rightarrow \left\{ \mathbf{Q}_{2,0} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_x)^2 + \mathbf{Q}_{0,2} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{D}}_y)^2 \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 1 &\Rightarrow u^{(0,0)}(x_k, 0) = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \\ &\Rightarrow \{\mathbf{F}(x_k, 0)\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{1,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_1 \mathbf{A} = \mathcal{G}_1 \end{aligned}$$

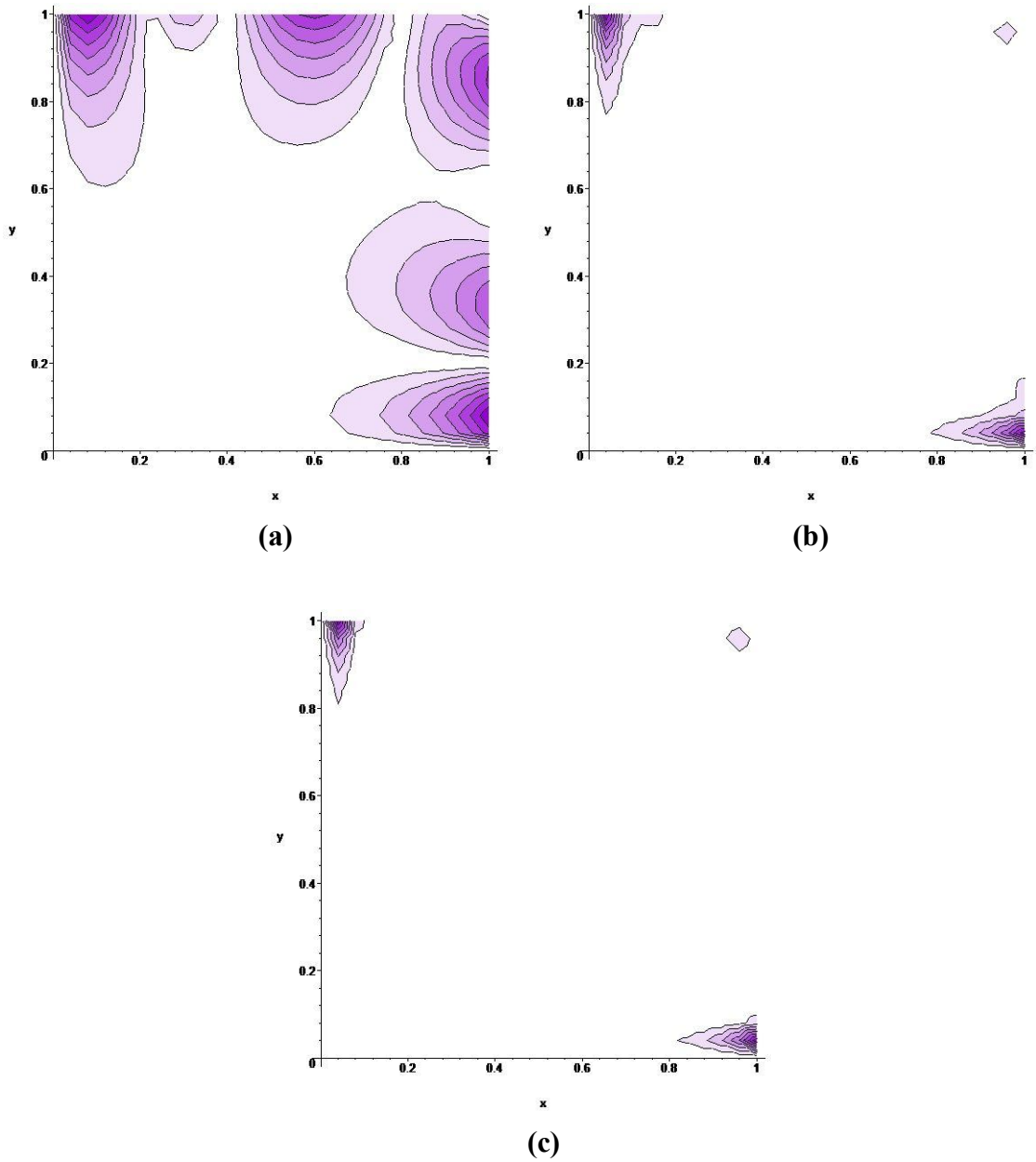
$$\begin{aligned} u(x, 1) = e^x &\Rightarrow u^{(0,0)}(x_k, 1) = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \\ &\Rightarrow \{\mathbf{F}(x_k, 1)\} \mathbf{A} = \mathcal{G}_{2,k}(x_k) \Rightarrow \mathbf{V}_2 \mathbf{A} = \mathcal{G}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(0, y) = 1 &\Rightarrow u^{(0,0)}(0, y_l) = h_{1,l}(y_l) \\ &\Rightarrow \{\mathbf{F}(-1, y_l)\} \mathbf{A} = h_{1,l}(y_l) \Rightarrow \mathbf{V}_3 \mathbf{A} = \mathbf{h}_1 \end{aligned}$$

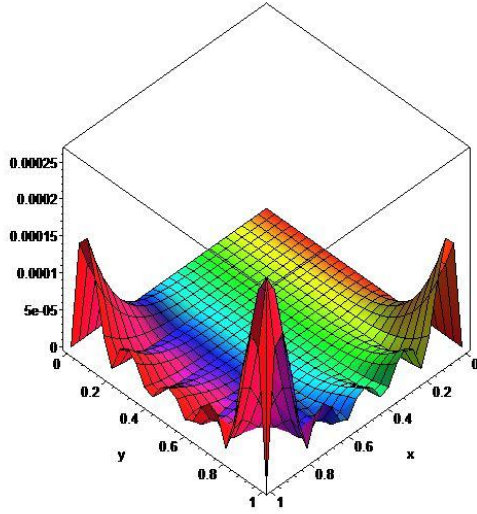
$$\begin{aligned} u(1, y) = e^y &\Rightarrow u^{(0,0)}(1, y_l) = h_{2,l}(y_l) \\ &\Rightarrow \{\mathbf{F}(1, y_l)\} \mathbf{A} = h_{2,l}(y_l) \Rightarrow \mathbf{V}_4 \mathbf{A} = \mathbf{h}_2 \end{aligned}$$

matris denklemlerinden oluşan sistemin çözümü ile $u_{yaklaşık}(x, y) = \mathbf{F}(x, y) \mathbf{A}$ formundaki çözüm elde edilir. Matris denklemlerinde $q_{2,0}(x_k, y_l) = x_k^2$, $q_{0,2}(x_k, y_l) = y_l^2$, $g(x_k, y_l) = 2x_k^2 y_l^2 e^{x_k y_l}$, $\mathcal{G}_{1,k}(x_k) = 1$, $\mathcal{G}_{2,k}(x_k) = e^{x_k}$, $h_{1,l}(y_l) = 1$ ve $h_{2,l}(y_l) = e^{y_l}$ dir. Farklı kolokasyon nokta sayısı ile elde edilen seri çözümlere ait

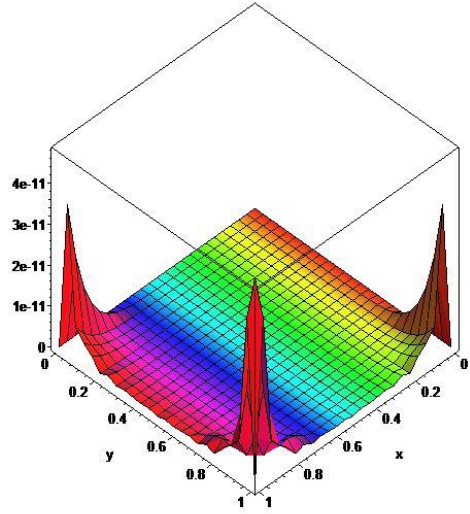
maksimum hata değerleri $D=20$ haneli ve $D=30$ haneli duyarlılıkta Tablo 4.2.5 da verilmiştir. $D=30$ haneli duyarlılıkta çalışılan $M = N = 5, 10, 15$ kesme sınırları kullanılarak elde edilen çözümlerine karşılık mutlak hata fonksiyonlarına ait eşyükselti eğri grafikleri şekil 4.2.8. de sunulmuştur. $M = N = 5, 10, 15, 20$ kesme sınırlarının kullanıldığı mutlak rezidü fonksiyonlarına ait grafikler ise şekil 4.2.9. de karşılaştırılmıştır.



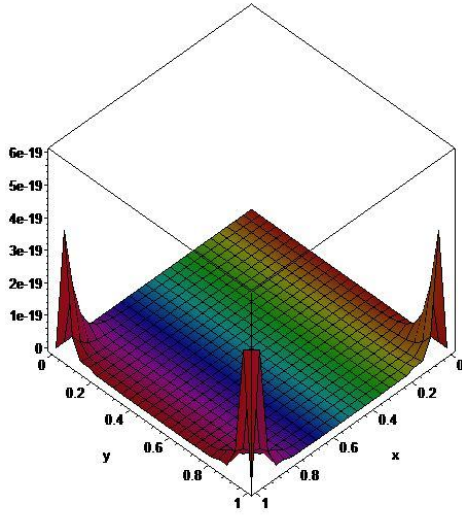
şekil 4.2.8. (a) rnek 4.2.5. için $N=M=5$ kesme sınırında mutlak hata fonksiyonu eşyükselti grafiği
 (b) rnek 4.2.5. için $N=M=10$ kesme sınırında mutlak hata fonksiyonu eşyükselti grafiği
 (c) rnek 4.2.5. için $N=M=15$ kesme sınırında mutlak hata fonksiyonu eşyükselti grafiği



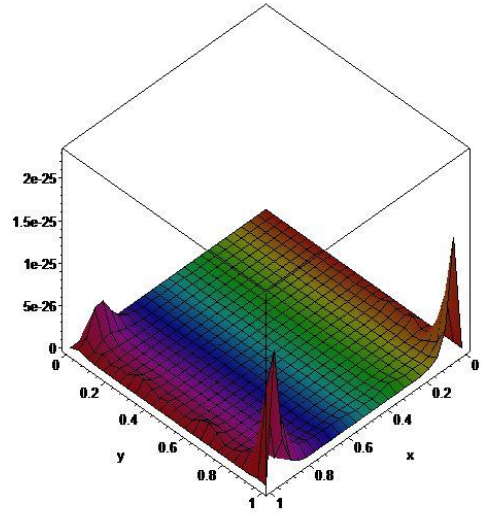
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.2.9. (a) Örnek 4.2.5. için $N=M=5$ kesme sınırında mutlak rezidü fonksiyon grafiği
 (b) Örnek 4.2.5. için $N=M=10$ kesme sınırında mutlak rezidü fonksiyon grafiği
 (c) Örnek 4.2.5. için $N=M=15$ kesme sınırında mutlak rezidü fonksiyon grafiği
 (d) Örnek 4.2.5. için $N=M=20$ kesme sınırında mutlak rezidü fonksiyon grafiği

Tablo 4.2.5. Örnek 4.2.5 için $\|u - u_{yaklaşık}\|_{\infty}$ norm değerleri

	M=N=5	M=N=6	M=N=7	M=N=8
D=20	0.52879249 E-05	0.20059075 E-06	0.51101377 E-08	0.11342271 E-09
D=30	0.52879249 E-05	0.20059075 E-06	0.46468218 E-08	0.11742078 E-09
	M=N=9	M=N=10	M=N=11	M=N=12
D=20	0.28247502 E-11	0.2006389 E-13	0.7854 E-15	0.31629947 E-16
D=30	0.14742406 E-11	0.35363249 E-13	0.76046132 E-15	0.32095734 E-16
	M=N=13	M=N=14	M=N=15	M=N=16
D=20	0.11537832 E-17	0.18 E-17	0.13 E-17	0.16376744 E-17
D=30	0.82478138 E-18	0.63314441 E-19	0.30827579 E-21	0.1500239 E-22
	M=N=17	M=N=18	M=N=19	M=N=20
D=20	0.58367460 E-17	0.16999999 E-17	0.4089 E-17	0.26 E-17
D=30	0.97796492 E-25	0.12165415 E-25	0.60 E-27	0.39686264 E-27

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasına başlarken, iki farklı tipte bölgede tanımlı lineer kısmi diferansiyel denklemler için çözüm metotları geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Çalışılan metotlar, pseudo-spektral türde matris metotları olup, çalışılmak istenen tanım bölgesine göre geliştirilen baz fonksiyonları ile çözümü aranan problemin ele alınışına uygun hale getirilmiştir.

Çalışmanın sonunda, çeşitli test problemleri üzerindeki uygulamalardan elde edilen verilere dayanan grafik ve tablolar, önerilen metotların başarılı olduğunu, böylece tezin amacına ulaştığını göstermiştir. Verilerin hızlı ve sağlıklı elde edilebilmesi için Maple bilgisayar programından faydalanılmıştır.

İki farklı tanım bölgesine göre, Bölüm 3.2 ile Bölüm 3.3 de önerilen metotlara ait sonuçlar aşağıda sınıflandırılarak verilmiştir.

Bölüm 3.2. de $\Omega_E = \{(x, y) : -\infty < x, y < \infty\}$ üzerindeki diferansiyel denklemin $\partial\Omega_E$ deki koşulları altındaki çözümü için bir prosedür araştırılmıştır. Bunun için öncelikle, eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları kullanılarak, çift değişkenli Chebyshev polinomlarının tanım aralığı reel düzleme taşınmış, böylece bu düzlemde ortogonal olan yeni bir polinom ailesi üretilmiştir. Bu polinom ailesinin ortogonalitesi, rekürans bağıntıları ve operasyonel türev matrisleri elde edilmiştir. Üretilen polinom ailesinin, matris metodunda baz fonksiyonu olarak kullanılmasıyla Ω_E üzerindeki problemler için çözüm prosedürü kurulmuştur. Önerilen metodun bir uygulaması Bölüm 4.1 de verilmiştir. Seçilen baz fonksiyonu ile metoda ait şu sonuçlara varılmıştır:

Çift değişkenli eksponansiyel Chebyshev fonksiyonları için bulunan türev matrisinin çok sayıda sıfır içermesi, türev matrisinin kuvvetlerinin alınmasını kolaylaştırmış, matrislerle çalışırken oluşan işlem yükünü azaltmış ve böylece zaman tasarrufu sağlamıştır. Elde edilen sayısal çözümün farklı kolokasyon noktalarındaki mutlak hata tablo değerleri metodun test problemindeki doğruluğunu göstermiştir. Gerçek çözüm fonksiyonu ile sayısal çözümün eşleştirmeli olarak verildiği grafik, sayısal çözümün, düzlemin bazı bölgelerinde daha tutarlı olduğunu göstermiştir. Sayısal çözümün doğruluğunu, farklı aralıklardaki eş yükselti eğri grafikleri de desteklemiştir.

Bölüm 3.3. de $\Omega_F = \{(x, y) : x \in [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ tanım bölgesindeki problemlerin çözümü için bir metot araştırılmıştır. Burada ise tüm reel ekseninde tanımlı olan Fibonacci polinomları kullanılarak iki değişkenli polinom ailesi verilmiştir. Bu

ailenin elemanları tarafından gerçekleştirilen rekürans bağıntıları çıkarılmış, Fibonacci tipi polinomlar ile yaklaşımda kullanılacak türev operasyonel matrisleri elde edilmiştir. Fibonacci tipi polinomların, matris metodunda baz fonksiyonu olarak kullanılmasıyla Ω_F bölgesinde tanımlı problemler için çözüm prosedürü kurulmuştur. Önerilen metodun uygulamaları Bölüm 4.2 de, farklı kapalı bölgelerde tanımlı, homojen, homojen olmayan, sabit ve değişken katsayılı, başlangıç ve sınır değer koşullarına sahip lineer kısmi diferansiyel denklemler için verilmiştir. Seçilen baz fonksiyonu ile metoda ait şu sonuçlara varılmıştır:

Fibonacci tipi iki değişkenli polinomların rekürans bağıntısından elde edilen türev matrisleri çok sayıda sıfır içermektedir. Bu durum ise, metodun en önemli özelliği olan denklemlerdeki türev işlemlerinin operasyonel türev matrisleri tarafından gerçekleştirilmesi sırasında gereken matris kuvvetleri alma işlemini kolaylaştırmış, işleme ayrılan süreyi kısaltmıştır.

Benzer avantaj Chebyshev matris metodunda da bulunmasına karşın, Chebyshev polinomlarının reel düzlemin alt bölgelerinde tanımlı problemlere uygulanabilmesi için gereken bölge dönüşümü işlem yükünü arttırmaktadır. Oysa Fibonacci polinomları ile işlem yaparken böyle bir dönüşüme gerek yoktur. Örneğin $\Omega_O = \{(x, y) : x, y \in [-3, 3]\}$ bölgesinde problemin matris metodu ile çözülmesi sırasında baz fonksiyonu olarak Chebyshev polinomunun seçilmesi durumunda elde edilen doğruluk başarısı ile Fibonacci tipi polinomun seçilmesi durumundaki ile hemen hemen aynı olmasına karşın, Fibonacci tipi polinomu seçilmesi işlem yükü bakımından Chebyshev polinomlarına göre avantaj sağlar.

Oluşabilecek bilgisayar yuvarlama hatalarını azaltmak için, programlamalar esnasında hane duyarlılık sayısı olabildiğince arttırılmalıdır. Bu durum Örnek 4.2.2 için verilen Tablo 4.2.2 den görülür. Tablo 4.2.4 de de farklı kesme sınırlarındaki işlemler için $D=20$ hane duyarlılığında elde edilen hatalar ile $D=30$ hane duyarlılığındakilerin farklı olduğu görülür. Örneğin, bu tabloda $M=N=9$ kesme sınırında $D=20$ hane duyarlılığında hata daha küçükken, $D=30$ da hata daha büyüktür. Hane sayısının arttırılması, bazı kesme sınırlarında sayısal büyüklük olarak hatayı arttırmış olsa da, nümerik çözümü daha doğru elde edilmesine olanak tanır. Hane duyarlılığı ne kadar yüksek olursa, gerçek çözüme göre hesaplanan hata, o ölçüde tutarlı olacaktır.

Gerçek çözüm bir polinom ise, bu metotta uygun kesme sınırı seçilerek gerçek çözüme çok çok yakın nümerik çözüm elde edilebilir. Örnek 4.2.1 de olduğu gibi, bazı problemler için, gerçek çözüm fonksiyonu bile elde edilebilir.

Genellikle, kesme sınırının artması, elde edilen çözümün hatasını azaltır. Söz konusu azalma Şekil 4.2.8 de belirgin bir şekilde görülmektedir. Hatanın büyüklüğü ölçüsünde rengin koyulaştığı şekilde, $M=N=5$ için mutlak hata eşyükselti grafiği iç bölgede de yoğunken, $M=N$ arttıkça hata yoğunluğu da bölge içinde azalarak tanım bölgesi sınırlarında kalmıştır. Rezidü hatası da kesme sınırı ile ilişkilidir. Kesme sınırı ile rezidü hatası arasındaki ters orantılı ilişkiye örnek olarak, Şekil 4.2.9 verilebilir. Ancak belirli bir kesme sınırından sonra, sınırı arttırmak, hatada çok büyük bir değişikliğe sebep olmayabilir. Bu durum, Örnek 4.2.2 e ait Tablo 4.2.1 de gözlemlenebilir. Tabloda $M=N=16$ ye kadar ki kesme sınırlarında hata hızla azalırken, $M=N=16$ dan sonra sınırın arttırılması hatayı çok etkilememiştir. Kesme sınırının artması aynı zamanda işlem yükünü arttırırken $\tilde{W}$ matrisinin koşul sayısını da arttıracaktır ve problemin kötü koşullanmasıyla metodun hassasiyeti azalacaktır. Dolayısıyla, ideal kesme sınırının belirlenmesi çok önemlidir.

Fibonacci tipi matris metoduyla, tanım bölgesinin tamamında geçerli bir polinom ile yaklaşım yapıldığından, kompleks olmayan bölgelerde sonlu fark ve sonlu elemanlar metotlarına göre daha pratiktir.

Matris metodunun, problemde geçen türevleri matrisler yolu ile ifade etmesi ve doğrudan integral işlemini kullanmaması, doğrudan integral işleminin karmaşık ve zor olduğu problemlerde Adomian ayrışım ve varyasyonel iterasyon gibi metotlara göre matris metodunu avantajlı kılacaktır.

KAYNAKLAR

- Agarwal R. P., O'Regan D., 2009, Ordinary and Partial Differential Equations with Special Functions Fourier Series and Boundary Value Problems, *Springer*, New York.
- Akyuz-Dascioglu, A., 2009, Chebyshev polynomial approximation for high-order partial differential equations with complicated conditions, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 25, 610-621.
- Atkinson K. E., 1989, An Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., *John Wiley*, New York.
- Atkinson K., Han W., 2009, Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework, , 3rd ed., *Springer*, New York.
- Bakioğlu M., 2004, Sayısal Analiz, *Birsen Yayınevi*, İstanbul.
- Basu N. K., 1973, On double Chebyshev series approximation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(3) , 496–505.
- Baudin M., Martinez J-M., 2013, Introductory to Polynomials Chaos with NISP, <http://forge.scilab.org/index.php/p/nisp/downloads/702/>.
- Baykus N., Sezer M., 2011, Solution of high-order linear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 27, 1327-1339.
- Boyd J. P., 2000, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, *Dover Publications*, New York.
- Bulbul B., Sezer M., 2011, Taylor polynomial solution of hyperbolic type partial differential equations with constant coefficients, *Int. J. Comput. Math*, 88, 533-544.
- Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A., 2006, Spectral Methods: Fundamentals in Single Domain, *Springer*, Berlin.
- Clenshaw, C. W., 1957, The numerical solution of linear differential equations in Chebyshev series, *Proc. Camb. Phil. Soc*, Vol. 53, 134-149.
- Clenshaw, C. W., Norton, H. J., 1963, The solution of non-linear ordinary differential equations in Chebyshev series, *Comp. J.*, 6, 88.
- Davies A. J., 2011, The Finite Element Method: An Introduction with Partial Differential Equations, Oxford University Press, New York (2nd ed.).
- Doha E. H., 1992, The Chebyshev coefficients of general order derivatives of an infinitely differentiable function in two or three variables, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 13, 83–91.

- Doha E. H., Abd-Elhameed W. M., 2005, Accurate spectral solutions for the parabolic and elliptic partial differential equations by the ultraspherical tau method, *J. Comput. Appl. Math.*, 181, 24-45.
- Falcon S., Plaza A., 2007, The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle, *Chaos Solitons Fractals*, 33(1), 38-49.
- Falcon S., Plaza A., 2009, On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, *Chaos Solitons Fractals*, 39, 1005-1019.
- Fornberg B., 1996, A Practical Guide to Pseudospectral Methods, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Fox L., 1962, Chebyshev methods for ordinary differential equations, *Comput. J.*, 4, 318-331.
- Fox L., Parker J. B., 1968, Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, *Oxford University Press*, London.
- Gottlieb D., Orszag S. A., 1977, Numerical Analysis of Spectral Methods, *SIAM*, Philadelphia.
- Guo B., Shen J., Wang Z., 2002, Chebyshev rational spectral and pseudospectral methods on a semi-infinite interval, *Inter. J. Numer. Meth. Eng.*, 53, 65-84.
- Gölsu M., Sezer M., 2006, On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method, *Appl. Math. Comput.*, 176, 414-421.
- Horner T. S., A double Chebyshev series method for elliptic partial differential equations, In: Noye J, editor, *Numerical solution of partial differential equations*, Amsterdam: North-Holland.
- Isik O. R., Sezer M., Güney Z., 2013, Bernstein series solution of linear second-order partial differential equations with mixed conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 37, 609-619.
- Jin L., 2008, Homotopy perturbation method for solving partial differential equations with variable coefficients, *Int. J. Contemporary Math. Sci.*, 3, 1395-1407.
- Kantorovich L. V., 1934, On a new method of approximate solution of partial differential equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 2, 532-536.
- Kaya B., Kurnaz A., Koç A. B., 2011, Eksponansiyel Chebyshev polinomları, III. *Ulusal Ereğli Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri*, Ereğli, Sayı 3, No:1, 37-42.
- Keşan, C., 2003, Chebyshev polynomial solutions of second-order linear partial differential equations, *Appl. Math. Comput.*, 134, 109-124.

- Khader M. M., El Danaf T. S., Hendy A. S., 2013, A computational matrix method for solving systems of high order fractional differential equations, *Appl. Math. Model.*, 37, 4035-4050.
- Koç A. B., Kurnaz A., 2012a, A new kind of double Chebyshev polynomial approximation on infinite interval, *Int. Conf. on Applied Analysis and Algebra (ICAAA-2012)*, June 20-24, Istanbul, Turkey.
- Koç A. B., Çakmak M., Kurnaz A., Uslu K., 2012, A new collocation-type solution procedure for ordinary differential equations”, *Int. Cong. in Honour of Prof. H. M. Srivastava*, August 23-26, Bursa, Turkey.
- Koç A. B., Kurnaz A., 2012b, Numerical approximation for boundary value problem by a new collocation approach, 1st *Int. Eurasian Conf. on Mathematics Sciences and Applications (IECMSA-2012)*, September 03-07, Prishtine, Kosovo.
- Koç, A. B., Kurnaz, A., 2013, A new kind of double Chebyshev polynomial approximation on unbounded domains”, *Baunday Value Problems*, 2013:10.
- Koç A. B., Çakmak M., Kurnaz A., Uslu K., 2013, A new Fibonacci type collocation procedure for boundary value problems, *Adv. Difference Equ.*, 2013:262.
- Koç A. B., Çakmak M., Kurnaz A., 2014, A matrix method based on the Fibonacci polynomials to the generalized pantograph equations with functional arguments, *Adv. Math. Phys.*, ID:694580.
- Koç A. B., Kurnaz A., 2014, An efficient approach for solving Telegraph equation, *12th International Conference of Numerical and Applied Mathematics Analysis (ICNAAM 2014)*, September 22-28, Rhodes, Greece.
- Koshy T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *John Wiley & Sons*, New York.
- Kreis H. O., Oliger J., 1972, Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations, *Tellus*, 24, 199–215.
- Kreyszig E., 1989, Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley & Sons*, New York.
- Kreyszig E., 2006, Advanced Engineering Mathematics, *John Wiley & Sons*, Singapore.
- Lanczos C., 1938, Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions, *J. Math. Phys.*, 17, 123-199.
- Lanczos C., 1957, Applied Analysis, *Pittman*, London.
- Mason J. C., Handscomb D. C., 2003, Chebyshev Polynomials, *Chapman & Hall/ CRC Press*, Boca Raton.

- Mirzaee F., Bimesl S., 2014, A new Euler matrix method for solving systems of linear Volterra integral equations with variable coefficients, *J. Egyptian Math. Soc.*, 22, 238-248.
- Oliver J., 1969, An error estimation technique for the solution of ordinary differential equations in Chebyshev series, *Comput. J.*, 12, 57-62.
- Orszag S. A., 1972, Comparison of pseudospectral and spectral approximations, *Stud. Appl. Math.*, 51, 253-259.
- Parand K., Razzaghi M., 2004, Rational Chebyshev Tau method for solving higher-order ordinary differential equations, *Int. J. Comput. Math.*, 81, 73-80.
- Philips G. M., 2003, Interpolation and Approximation by polynomials, *Springer-Verlag*, New York.
- Quarteroni A., Valli A., 2008, Numerical Approximation of Partial Differential Equations, *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg.
- Quarteroni A., Sacco R., Saleri F., 2007, Numerical Mathematics, 2nd ed., Springer, Berlin Heidelberg.
- Ross S. L., 1984, Differential Equations, *John Wiley & Sons*, Singapore.
- Scott L. R., 2011, Numerical Analysis, *Princeton University Press*, Princeton, New Jersey.
- Scraton R. E., 1965, The solution of linear differential equations in Chebyshev series, *Comput. J.*, 8(1), 57-61.
- Sezer M., Gülsu M., Tanay, B., 2011, Rational Chebyshev collocation method for solving higher-order linear differential equations, *Numer. Meth. Partial Differential Equations*, 27(5), 1130-1142.
- Slater J. C., 1934, Electronic energy bands in metal, *Phys. Rev.*, 45, 794-801.
- Süli E., Mayers D., 2003, An Introduction to Numerical Analysis, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Tohidi E., Shirazian M., 2012, Numerical solution of linear HPDEs via Bernoulli operational matrix of differentiation and comparison with Taylor matrix method, *Math. Sci. Lett.*, 1, 61-70.
- Wright K., 1964, Chebyshev collocation methods for ordinary differential equations, *Comput. J.*, 6(4), 358-365.
- Yousefi S. A., 2010, Legendre multiwavelet Galerkin method for solving the hyperbolic Telegraph equation, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 26 (3), 535-543.

Yüzbaşı Ş., Gök E., Sezer M., 2013, Laguerre matrix method with the residual error estimation for solutions of a class of delay differential equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayşe Betül KOÇ
Uyruğu : TC
Doğum Yeri ve Tarihi : Afyonkarahisar / 01.01.1985
Telefon : 03322233975
Faks :
e-mail : aysebetulkoc@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	Süleyman Demirel Fen Lisesi, Merkez, Afyon	2003
Üniversite	Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, Konya	2007
Yüksek Lisans	Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, Konya	2009
Doktora	Selçuk Üniversitesi, Matematik Bölümü, Konya	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2008-2013	Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü	Araştırma Görevlisi
2013-	Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

YABANCI DİLLER

İNGİLİZCE

YAYINLAR

Koç A. B., Kurnaz A., 2014, An efficient approach for solving telegraph equation, *American Institute of Physics Conference Proceedings* (Accepted). (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Koç A. B., Çakmak M., Kurnaz A., 2014, A matrix method based on the Fibonacci polynomials to the generalized pantograph equations with functional arguments, *Adv. Math. Phys.*, 2014, ID:694580.

Koç A. B., Çakmak M., Kurnaz A., Uslu K., 2013, A new Fibonacci type collocation procedure for boundary value problems, *Adv. Difference Equ.*, 2013:262.

Koç A. B., Kurnaz A., 2013, A new kind of double Chebyshev polynomial approximation on unbounded domains, *Baunday Value Problems*, 2013:10. (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Koç A. B., Kartal(Kaya) B., Keskin Y., Kurnaz A., 2013, RDTM for approximate solutions of the nonlinear Jaulent-Miodek equations, *Selçuk J. Appl. Math.* (Accepted). (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)

Cenesiz Y., **Koç A. B.**, Citil B., Kurnaz A., 2010, Pade embedded piecewise Differential Transform Method for the solution of ODE's, *Math. Comput. Appl.*, 15(2).

Kocacoban D., **Koç A. B.**, Kurnaz A., Keskin Y., 2011, A better approximation to the solution of Burger-Fisher Equation, *Proceedings of the World Congress on Engineering 2011* (WCE-2011), Vol 1, July 6-8, London, U.K.

Keskin Y., Caglar I., **Koç A. B.**, 2011, Numerical solution of Sine-Gordon Equation by reduced differential transform method, *Proceedings of the World Congress on Engineering 2011* (WCE-2011), Vol 1, July 6-8, London, U.K.

Koç A. B., Kurnaz A., 2010, Almost analytic solutions of the coupled MKdV equations by the RDTM, *Proceedings of the First Int. Conf. on Mathematics and Statistics*, March 18-21, Sharjah, U.A.E. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)

Koç A. B., Kurnaz A., 2014, An efficient approach for solving Telegraph equation, *12th International Conference of Numerical and Applied Mathematics Analysis (ICNAAM 2014)*, September 22-28, Rhodes, Greece. (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Koç A. B., Kurnaz A., 2013, Numerical solutions of system of linear delay differential equations in terms of Fibonacci polynomials, *Gulf International Conference on Applied Mathematics (GICAM'13)*, November 19-21, Kuwait.

Koç A. B., Cakmak M., Kurnaz A., 2013, Collocation type solution procedure with new operational matrices, *4th Int. Conf. on Matrix Analysis & Appl.*, July 2-5, Konya, Turkey.

Koç A. B., Keskin Y., Kurnaz A., 2013, An effective procedure for differential equations, *Int. Conf. on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, June 2-5, Istanbul, Turkey.

Koç A. B., Kurnaz A., 2012, Numerical approximation for boundary value problems by a new collocation approach, *1st Int. Eurasian Conf. on Mathematics Sciences and Applications* (IECMSA-2012), September 03-07, Prishtine, Kosovo. (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Keskin Y., **Koç A. B.**, Servi S., 2012, Reduced differential transform method for solving high-dimensional PDEs, *1st Int. Eurasian Conf. on Mathematics Sciences and Applications* (IECMSA-2012), September 03-07, Prishtine, Kosovo.

Servi S., **Koç A. B.**, Keskin Y., 2012, Numerical simulations of coupled Sine-Gordon equations by reduced differential transform method, *1st Int. Eurasian Conf. on Mathematics Sciences and Applications* (IECMSA-2012), September 03-07, Prishtine, Kosovo.

Koç A. B., Çakmak M., Kurnaz A., Uslu K., 2012, A new collocation-type solution procedure for ordinary differential equations, *Int. Cong. in Honour of Prof. H. M. Srivastava*, August 23-26 Bursa, Turkey.

Koç A. B., Kurnaz A., 2012, A new kind of double Chebyshev polynomial approximation on infinite interval, *Int. Conf. on Applied Analysis and Algebra* (ICAAA-2012), June 20-24, Istanbul, Turkey. (Doktora tezinden yapılmıştır.)

Kaya B., Kurnaz A., **Koç A. B.**, 2011, Eksponansiyel Chebyshev polinomları, III. *Ulusal Ereğli Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri*, Ereğli, Sayı 3, No:1, 37-42.

Koç A. B., Kocacoban D., Cenesiz Y., Kurnaz A., 2011, Variational iteration method with Chebyshev polynomials, *24th Int. Conf. of the Jangjeon Mathematical Society* (ICJMS 2011), July 20-23, Konya, Turkey.

Koç A. B., Kaya B., Keskin Y., Kurnaz A., 2011, Application of RDTM to Nonlinear Jaulent-Miodek Equations, *Int. Conf. on Applied Analysis and Algebra*, 29 June-2 July, Istanbul, Turkey. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)

Koç A. B., Peker H. A., Karaoğlu O., Keskin Y., Çenesiz Y., Oturanç G., Servi S., 2009, Application of Padé approximation of differential transform method to the solution of prey and predator problem, *14th Int. Cong. on Computational and Applied Mathematics* (ICCAM 2009), 29 September-2 October, Antalya, Turkey.

Koç A. B., Kurnaz A., 2009, Soliton solutions of the generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system by the reduced differential transformation, *16th Int. Cong. on Mathematical Physics* (ICMP09), August 3-8, Prague, Czech Republic. (Yüksek Lisans tezinden yapılmıştır.)

PROJELER

2009-TR1-LEO05-08701 numaralı ve “Establishing Web-Based Mathematical Learning System” isimli Yenilik Transferi (Transfer of Innovation) Projesi (AB Projesi-Araştırmacı)