

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**4 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA NULL EĞRİLERİN**  
**KARAKTERİZASYONU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Buşra AKTAŞ**

**(122121101)**

**Anabilim Dalı: Matematik**

**Programı: Geometri**

**Danışman: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ**

**2014**




T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA NULL EĞRİLERİN  
KARAKTERİZASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Buşra AKTAŞ  
(122121101)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 30.12.2014

Tezin Savunulduğu Tarih: 16.01.2015

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ(F.Ü.)   
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT(F.Ü.)   
Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (İ.Ü.) 

ARALIK - 2014

## ÖNSÖZ

İlk olarak; Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na yüksek lisans öğrenimim boyunca 2210 Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana her türlü gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ 'a, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT 'e, çalışmalarım boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam sayın Doç. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ 'a ve tüm öğretim hayatım boyunca beni destekleyen sevgili aileme teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Buşra AKTAŞ

ELAZIĞ-2014

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ .....	II
İÇİNDEKİLER .....	III
ÖZET .....	IV
ABSTRACT .....	V
1. BÖLÜM .....	1
Giriş .....	1
2. BÖLÜM .....	5
2.1 Temel Kavramlar .....	5
3. BÖLÜM .....	11
3.1 $R_2^4$ de Bertrand Eğrileri .....	11
3.2 $R_2^4$ de (2, 3) Bertrand Eğrileri .....	15
3.3 $R_2^4$ de (1, 3) Bertrand Eğrileri .....	18
4. BÖLÜM .....	25
4.1 $R_2^4$ de Partially Null Helislerin Temel Denklemleri .....	25
5. BÖLÜM .....	28
5.1 $R_2^4$ de Partially Null Eğrisinin Esnek Olmayan Akışı .....	28
5.2 $R_2^4$ de Pseudo Null Eğrisinin Esnek Olmayan Akışı .....	38
KAYNAKLAR .....	47

## ÖZET

### 4 BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA NULL EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm; çalışmanın giriş kısmı olup, Bertrand eğrileri, Helisler ve Esnek olmayan akışlar üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler incelendi.

İkinci bölüm;  $R_2^4$  uzayı, Bertrand eğrileri, Genel Helisler ve Esnek olmayan akış için kullanılan temel tanımlar verildi.

Üçüncü bölüm;  $R_2^4$  de Partially Null ve Pseudo Null eğrilerin Bertrand eğri tipleri incelendi.

Dördüncü bölüm;  $R_2^4$  de Genel Helislerle ilgili bir karakterizasyon verildi.

Beşinci bölüm;  $R_2^4$  de esnek olmayan akış kavramı tanımlandı ve Partially Null ve Pseudo Null eğrilerinin esnek olmayan akışları ile ilgili karakterizasyonlar elde edildi.

**Anahtar Kelimeler:** Bertrand eğri, (1, 3) Bertrand eğrisi, (2, 3) Bertrand eğrisi, Akış, Esnek Olmayan Akış.

## SUMMARY

### CHARACTERIZATIONS OF NULL CURVES IN 4-DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACETIME

This thesis consist of five chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter; fundamental definitions of semi-Euclidean space  $R_2^4$ , Bertrand curves, Helices and Inextensible Flows have been given.

In the third chapter; Bertrand curves of Partially Null ve Pseudo Null curves have been studied in semi-Euclidean space  $R_2^4$ .

In the fourth chapter; A characterization related to General Helices has been given.

In the fifth chapter; Notion of Inextensible Flow was defined and The characterizations related to Inextensible Flows of Partially Null and Pseudo Null curves have been attained.

**Keywords:** Bertrand Curve, (1, 3) Bertrand curve, (2, 3) Bertrand curve, Flow, Inextensible Flow.

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Bilimde sıklıkla başvurulan en eski araçlardan biri Öklid geometrisidir. Öklid geometrisi astronomi, matematik ve coğrafya gibi pek çok farklı alanda uygulama alanı bulmuştur.

Geometride en çok çalışılan konulardan biri eğriler teorisi. Eğriler teorisinde özellikle Geodezikler, Çemberler, Helisler, Bertrand eğrileri vb. gibi özel eğriler çalışılmaktadır. Eğriler teorisi çalışılırken bir eğrinin Serret-Frenet denklemlerinin bulunması ve eğriliklerinin hesaplanması büyük önem taşır.

Öklidyen uzayda ve Minkowski uzayında eğriler teorisinin ilginç problemlerinden biri de; regüler bir eğrinin karakterizasyonu problemidir. Bu problemin çözümünde regüler eğrinin  $k_1$  ve  $k_2$  eğrilik fonksiyonları önemli bir role sahiptir. Bir regüler eğrinin  $k_1$  ve  $k_2$  eğrilikleri kullanılarak şeklinin ve boyutunun belirlenebildiği bilinir. Problemin çözümü için bir diğer yol da iki eğrinin Frenet vektörleri arasındaki ilişkiyi incelemektir. Örneğin; Bertrand eğrileri gibi.

$c$ ,  $E^3$  de  $C^\infty$  sınıftan bir regüler eğri, yani  $c : I \subset R \rightarrow E^3$ ,  $\|c'\| \neq 0$  olsun. Burada  $I \subset R$  bir aralık ve  $s \in I$   $c$  nin yay parametresi olarak verilsin. Eğer  $c$  eğrisi üzerinde diferensiyellenebilir teğet, normal ve binormal vektör alanları ve  $k_1 > 0$  ve  $k_2 \neq 0$  birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları bulunabiliyorsa  $c$  ye özel Frenet eğrisi adı verilir[43].  $R_2^4$  de,  $C^\infty$  sınıftan farklı iki özel Frenet eğrileri, sırasıyla,  $c$  ve  $\bar{c}$  olsun.  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$ ,  $C^\infty$  sınıftan regüler bir dönüşüm olmak üzere  $c$  ve  $\bar{c}$  eğrilerinin  $c(s)$  ve  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  noktalarında normalleri lineer bağımlı ise  $(c, \bar{c})$  ikilisine bertrand eğri çifti denir[36].

$E^3$  de  $C^\infty$  özel Frenet eğrisi  $c$  bir Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin birinci eğrilik fonksiyonu  $k_1$  ve ikinci eğrilik fonksiyonu  $k_2$  nin bütün  $s \in L$  için

$ak_1 + bk_2 = 1$  şartını sağlamasıdır. Burada  $a$  ve  $b$  reel sayılardır[36].

2003 de H.Matsuda ve S.Yorozu özel Frenet eğrisi olarak adlandırılan yeni bir eğri tanımladı ve  $R^n$  de özel Frenet eğrisinin  $n \geq 4$  olduğu zaman Bertrand eğrisi olmadığını ispatladı. H.Matsuda ve S.Yorozu  $R^4$ de (1, 3) Bertrand eğrilerini karakterize ettiler ve bir örnek ile eğrinin bir tipini incelediler[36]. Honda-Inoguchi[22], Inoguchi-Lee[23] de,  $(c, \bar{c})$  null eğri çifti üzerinde bir çalışma yaptı. A. Ceylan Çöken ve Ünver Çiftçi[12] Minkowski Spacetime da null Bertrand eğrilerini çalıştı. Mehmet Göçmen ve Sadık Keleş  $R_1^4$  de null Cartan eğrisinin Bertrand eğrisi olmadığını gösterdi ve (1, 2) Bertrand eğrileri için bir karakterizasyon verdi[18].

Minkowski 3- uzayında spacelike ve timelike Bertrand eğrileri ve onların karakterizasyonları incelendi[4, 14, 24, 25]. Minkowski 3- uzayında null Bertrand eğrileri Balgetir, Bektaş ve Inoguchi[3] tarafından verildi. Ferdağ Kahraman Aksoyak, İsmail Gök ve Kazım İlarıslan[1] Minkowski Spacetime da genelleştirilmiş null Bertrand eğrilerini incelediler.

Helis, bilim ve doğada ilginç eğrilerden biridir.  $E^3$  de genel helis veya eğilim çizgisi eğrinin tanjantının sabit bir doğrultu ile sabit açı yaptığı özelliği ile tanımlanır[11]. 1802 de M.A.Lancret tarafından ifade edilmiş ve 1845 de B. de Saint Venant[40] tarafından gösterilmiştir ki; bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şart eğrinin birinci eğriliğin ikinci eğriliğe oranının, yani  $\frac{k_1}{k_2}$  nin, eğri boyunca sabit olmasıdır.

A.Mağden[35],  $E^4$  Öklid uzayında bir eğrinin helis olması için bir karakterizasyon verdi. Eğer

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} + \left[ \frac{1}{k_3} \frac{d}{ds} \left( \frac{k_1}{k_2} \right) \right]^2$$

ifadesi sabit ise verilen eğri bir helistir. Burada  $k_1, k_2, k_3$  sırasıyla eğrinin 1.,2.,3. eğrilikleridir. Minkowski 4- uzayı  $R_1^4$  de timelike helislerin karakterizasyonları Ko-

cayığit ve Önder[27] tarafından verildi.  $n$  boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  de genel helis(eğilim çizgisi) için bazı önemli karakterizasyonlar Hacısalihoğlu(1975, 1983 ve 2002) tarafından elde edilmiştir[20, 21, 38]. Bu karakterizasyonlarda eğrinin yüksek mertebeden harmonik eğrilikleri yardımı ile eğrinin genel helis(eğilim çizgisi) olması karakterize edilmiştir. 3- boyutlu Lorentz uzayı  $L^3$  de bir timelike veya spacelike eğrinin eğilim çizgisi olması ile ilgili karakterizasyonlarda Ekmekci ve İlarşlan (2000)[15], İlarşlan(2002)[24] tarafından verilmiştir. A. Funda Yalınız' ın doktora tezinde  $n$ - boyutlu Lorentz uzayı  $L^n$  de eğilim çizgilerinin karakterizasyonları elde edilmiştir[17].

Son zamanlarda esnek olmayan eğrilerin hareketinin incelenmesi bir çok farklı mühendislik uygulamalarında görülmektedir. Bir eğrinin akışı, yay uzunluğu korunuyorsa esnek olmayan akış olarak ifade edilir. Fiziksel olarak esnek olmayan eğri akışları, hiçbir şekil değiştirme enerjisinin sebep olmadığı hareketleri meydana getirir. Sabit uzunluğa sahip olan bir telin savrulma hareketi veya rüzgarla taşınan kağıt esnek olmayan eğri ve yüzey akışları tarafından tanımlanabilir. Esnek olmayan eğri ve yüzey akışları bilgisayar bölümlerinde[26, 34], bilgisayar animasyonunda[13] ve hatta yapısal mekanikte değişik problemlerin çözümlerinde kullanılmaktadır[41].

İlk olarak, Kwon ve Park[32] Öklidyen 3- uzayında uzunluğun korunduğu açılabilir yüzeyleri ve eğrilerin esnek olmayan akışlarını inceledi. Eğrilerin esnek olmayan akışları farklı uzaylarda incelendi. Gürbüz[19] spacelike, timelike ve null eğrilerin esnek olmayan akışlarını, Öğrenmiş ve diğerleri[37] Galilean uzayında esnek olmayan eğrileri, Yıldız ve diğerleri[44] 3- boyutlu Öklid uzayında Darboux çatısına göre eğrilerin esnek olmayan akışlarını incelediler. Ayrıca Latifi ve diğerleri[33] Minkowski 3- uzayında eğrilerin esnek olmayan akışlarını çalıştı.

[6, 7, 28, 29] da yazarlar  $E_1^3$  ve  $E_1^4$  de timelike ve spacelike eğrileri ele aldı. Son çalışmada Ö.G.Yıldız ve diğerleri[45, 46]  $E^n$  ve  $E_1^n$  de null olmayan eğrilerin esnek

olmayan akışları için gerek ve yeter şartları verdi.

Genellikle null eğrilerin incelenmesi diferensiyel geometri açısından büyük önem taşır. Riemann geometriden elde edilen klasik sonuçların birçoğu Lorentz karşılığa sahiptir. Gerçekte, spacelike veya timelike eğriler, pozitif tanımlı Riemann geometrisindeki benzer yöntem ile çalışılabilir. Fakat null eğri teorisi hiçbir Riemann geometrisinin sahip olmadığı birçok sonuca sahiptir. Null eğrilerin varlığı önemli ve ilginç özelliklere sebep olur.

Lorentz uzayı diferensiyel geometrinin matematik ve fizik alanlarında yaygın kullanımı olan bir alt daldır.  $R_2^4$  yarı Öklidyen uzayında yatan bir spacelike veya timelike eğrinin Frenet denklemleri [24] de verildi. Bu tip eğriler boyunca bir ortonormal Frenet çatısı  $\{T, N, B_1, B_2\}$  şeklinde olup null olmayan dört vektör alanı, sırasıyla, tanjant, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları olarak adlandırılır. Özellikle spacelike veya timelike eğri boyunca Frenet çatısı null vektörleri içerdiğinde bu eğriler pseudo null veya partially null eğri olarak adlandırılır[10, 42].  $R_1^4$  Minkowski Spacetime uzayında yatan pseudo null veya partially null eğriler sırasıyla birinci binormal  $B_1$  null ve ikinci binormal  $B_2$  null(bu durumda birinci binormal  $B_1$  null değil) olan eğri olarak tanımlanır[10].  $R_1^4$  de pseudo null ve partially null eğrilerin Frenet denklemleri verilmiştir[42].

Son zamanlarda Minkowski uzayında null eğriler hakkında birçok önemli ve yoğun çalışmalar yapılmaktadır. [5, 8, 16, 30, 31] deki makalelerde null eğriler için Minkowski uzayında yeni karakterizasyonlar verilmiştir. Biz bu çalışmada  $R_2^4$  de pseudo null ve partially null eğrilerin bertrand eğri tiplerini ve esnek olmayan akışlarını tanımladık ve  $R_2^4$  de pseudo null ve partially null eğrilerin bertrand eğri tipleri ve esnek olmayan akışlar için karakterizasyonlar elde ettik. Ayrıca partially null helisleri için bir karakterizasyon meydana getirdik.

## 2. BÖLÜM

### 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1.**  $R_2^4$  yarı öklid uzayı

$$g = -dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

ile verilen  $g$  pozitif tanımlı olmayan flat metriği ile tanımlanan  $R^4$  standart vektör uzayıdır. Burada  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$   $R_2^4$  ün dördü koordinat sistemidir[39].

**Tanım 2.1.2.**  $R_2^4$  de bir  $v$  vektörünün normu

$$\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}$$

ile tanımlanır[39].

**Tanım 2.1.3.**  $R_2^4$  de bir  $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  vektörü

- i)  $g(v, v) > 0$  ise spacelike vektör,
- ii)  $g(v, v) < 0$  ise timelike vektör,
- iii)  $g(v, v) = 0, v \neq 0$  ise null(lightlike) vektör olarak adlandırılır[39].

**Tanım 2.1.4.**  $I, R$  nin açık bir aralığı olmak üzere  $\alpha : I \rightarrow R_2^4$  şeklinde  $C^\infty$  sınıftan diferensiyellenebilir bir  $\alpha$  dönüşümüne  $R_2^4$  de bir eğri adı verilir[39].

**Tanım 2.1.5.**  $R_2^4$  de bir  $C^\infty$  özel Frenet eğrisi  $c$ ,  $c$  den ayrı bir  $C^\infty$  özel Frenet eğrisi  $\bar{c}$  ve bir regüler  $C^\infty$  sınıftan  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$  dönüşümü  $\left( \bar{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0, \forall s \in L \text{ için} \right)$  mevcuttur öyle ki  $c$  ve  $\bar{c}$  eğrilerinin  $\varphi$  altında  $c(s)$  ve  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  noktalarında normalleri lineer bağımlı ise  $c$  bir Bertrand eğrisi olarak adlandırılır. Burada  $s$  ve  $\bar{s}$  sırasıyla  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametreleridir. Bu durumda  $\bar{c}$ ,  $c$  nin Bertrand eğri çiftidir[36].

**Tanım 2.1.6.**  $c$  ve  $\bar{c}$ ,  $R_2^4$  de  $C^\infty$  sınıftan özel Frenet eğrisi ve  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$   $\left( \bar{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0, \forall s \in L \text{ için} \right)$  regüler  $C^\infty$  dönüşüm olsun. Öyle ki  $c$  nin her

$c(s)$  noktası  $\forall s \in L$  için  $\bar{c}$  nin  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  noktasına karşılık gelsin. Burada  $s$  ve  $\bar{s}$  sırasıyla  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametreleridir. Eğer  $c$  nin her  $c(s)$  noktasında Frenet (1, 3) normal düzlemi  $\forall s \in L$  için  $\bar{c}$  nin  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  karşılık noktasındaki Frenet (1, 3) normal düzlemi ile çakışırsa  $c$ ,  $R_2^4$  de (1, 3) tipinde Bertrand eğrisi olarak adlandırılır.  $\bar{c}$  de  $c$  nin (1, 3) Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır. Eğer  $\{T, N, B_1, B_2\}$ ;  $c$  nin Frenet çatısı ve  $c$  bir (1, 3) tipinden Bertrand eğrisi ise bu takdirde

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha(s)N(s) + \beta(s)B_2(s)$$

şeklinde dir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır[36].

**Tanım 2.1.7.**  $c$  ve  $\bar{c}$ ,  $R_2^4$  de  $C^\infty$  sınıftan özel Frenet eğrisi ve  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$   $\left(\bar{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0, \forall s \in L \text{ için}\right)$  regüler  $C^\infty$  dönüşüm olsun. Öyle ki  $c$  nin her  $c(s)$  noktası  $\forall s \in L$  için  $\bar{c}$  nin  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  noktasına karşılık gelir. Burada  $s$  ve  $\bar{s}$  sırasıyla  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametreleridir. Eğer  $c$  nin her  $c(s)$  noktasında Frenet (2, 3) normal düzlemi  $\forall s \in L$  için  $\bar{c}$  nin  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  karşılık noktasındaki Frenet (2, 3) normal düzlemi ile çakışırsa  $c$  ye  $R_2^4$  de (2, 3) tipinde Bertrand eğrisi denir.  $\bar{c}$  de  $c$  nin (2, 3) Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır. Eğer  $\{T, N, B_1, B_2\}$ ;  $c$  nin Frenet çatısı ve  $c$  bir (2, 3) tipinden Bertrand eğrisi ise bu takdirde

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha(s)B_1(s) + \beta(s)B_2(s)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır.

**Tanım 2.1.8.**  $c$  ve  $\bar{c}$ ,  $R_2^4$  de  $C^\infty$  sınıftan özel Frenet eğrisi ve  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$   $\left(\bar{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0, \forall s \in L \text{ için}\right)$  regüler  $C^\infty$  dönüşüm olsun. Öyle ki  $c$  nin her  $c(s)$  noktası  $\forall s \in L$  için  $\bar{c}$  nin  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  noktasına karşılık gelsin. Burada  $s$  ve  $\bar{s}$  sırasıyla  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametreleridir. Eğer  $c$  nin her  $c(s)$  noktasında Frenet (1, 2) normal düzlemi  $\forall s \in L$  için  $\bar{c}$  nin  $\bar{c}(\bar{s}) = \bar{c}(\varphi(s))$  karşılık noktasındaki Frenet (1, 2) normal düzlemi ile çakışırsa  $c$ ,  $R_2^4$  de (1, 2) tipinde Bertrand eğrisi olarak adlandırılır.

$\bar{c}$  de  $c$  nin  $(1, 2)$  Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır. Eğer  $\{T, N, B_1, B_2\}$ ;  $c$  nin Frenet çatısı ve  $c$  bir  $(1, 2)$  tipinden Bertrand eğrisi ise bu takdirde

$$\bar{c}(s) = c(s) + \alpha(s)N(s) + \beta(s)B_1(s)$$

şeklindedir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır[18].

**Tanım 2.1.9.**  $\alpha : I \rightarrow R_2^4$  herhangi bir eğri olmak üzere  $\alpha'(s)$  hız vektörü sırasıyla, spacelike, timelike veya null ise  $\alpha$  eğrisi spacelike, timelike veya null eğridir[39].

**Tanım 2.1.10.**  $R_2^4$  de  $\alpha : I \rightarrow R_2^4$  eğrisi verilsin.  $R_2^4$  de tanımlanan metrik  $g$  olsun. Eğer  $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \mp 1$  ise  $\alpha$  ya birim hızlı eğri denir[39].

**Tanım 2.1.11.**  $\alpha : I \rightarrow R_2^4$  partially null eğrisi  $R_2^4$  de  $s$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş spacelike veya timelike eğri olsun öyle ki  $\forall s \in I \subset IR$  için, sırasıyla,  $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) < 0$  veya  $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) > 0$  dır. Tanjant ve asli normal vektör alanları sırasıyla  $T(s) = \alpha'(s)$ ,  $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$  ile tanımlanır.

$R_2^4$  de  $\{T, N, B_1, B_2\}$  Frenet çatısı olsun. Burada  $B_2$ ,  $R_2^4$  de ikinci binormal vektör alanıdır.  $\alpha$  partially null eğri olduğundan  $B_1$  null vektördür.  $R_2^4$  de bir tek  $B_2$  null vektör alanı mevcut olur ve

$$g(T, B_2) = g(N, B_2) = g(B_2, B_2) = 0, \quad g(B_1, B_2) = 1$$

dir.  $R_2^4$  de  $\{T, N, B_1, B_2\}$  Frenet çatısı ve

$$g(T, T) = \varepsilon_1 = \mp 1, g(N, N) = \varepsilon_2 = \mp 1, g(B_1, B_2) = 1, g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 0$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0 \quad (1.1.1)$$

olsun. Burada  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -1$  dir.

Bu durumda  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned}k_1(s) &= g(T'(s), N(s))\varepsilon_2 \\k_2(s) &= g(N'(s), B_2(s)) \\k_3(s) &= g(B_1'(s), B_2(s))\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece  $\alpha$  partially null eğrisinin Frenet denklemleri

$$\begin{aligned}T'(s) &= k_1(s)N(s) \\N'(s) &= k_1(s)T(s) + k_2(s)B_1(s) \\B_1'(s) &= k_3(s)B_1(s) \\B_2'(s) &= -\varepsilon_2 k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s)\end{aligned}\tag{1.1.3}$$

formundadır. Burada  $\forall s \in I$  için  $k_3(s) = 0$  dır[39].

**Tanım 2.1.12.**  $\alpha : I \rightarrow R_2^4$  pseudo null eğrisi  $R_2^4$  de  $s$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş spacelike veya timelike eğri olsun öyle ki  $\forall s \in I \subset IR$  için  $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \mp 1$  dir.  $\alpha''(s) \neq 0$  olmak üzere  $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 0$  dır. Tanjant ve asli normal vektör alanları sırası ile  $T(s) = \alpha'(s)$ ,  $N(s) = \alpha''(s)$  şeklinde tanımlanır.

$$g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \mp 1$$

eşitliği  $s$  e göre diferensiyellenirse

$$g(\alpha'(s), \alpha''(s)) = 0$$

elde edilir. Bu denklem  $s$  e göre tekrar diferensiyellenirse

$$g(\alpha'(s), \alpha'''(s)) = 0$$

bulunur. Böylece  $\alpha'''(s)$  vektörü,  $\alpha'(s)$  ve  $\alpha''(s)$  vektörlerine ortogonal olur.

Eğer  $g(\alpha'''(s), \alpha'''(s)) \neq 0$  kabul edilirse  $B_1$  vektör alanı

$$B_1(s) = \frac{\alpha'''(s)}{\|\alpha'''(s)\|}$$

olur. Dolayısıyla  $R_2^4$  de bir tek  $B_2$  null vektör alanı mevcuttur öyle ki

$$g(T, B_2) = g(B_1, B_2) = g(B_2, B_2) = 0, \quad g(N, B_2) = 1$$

dir.  $R_2^4$  de  $\{T, N, B_1, B_2\}$  Frenet çatısı ve

$$g(T, T) = \varepsilon_1 = \mp 1, \quad g(B_1, B_1) = \varepsilon_2 = \mp 1, \quad g(N, B_2) = 1, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0 \quad (1.1.4)$$

olsun. Burada  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -1$  dir.

Bu durumda  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları sırasıyla

$$k_1(s) = g(T'(s), B_2(s))$$

$$k_2(s) = g(N'(s), B_1(s))\varepsilon_2 \quad (1.1.5)$$

$$k_3(s) = g(B_1'(s), B_2(s))$$

şeklinde olur.

Diğer taraftan

$$g(T'(s), B_2(s)) = g(N(s), B_2(s)) = 1$$

olduğundan  $\forall s \in I$  için  $k_1(s) = 1$  dir. Eğer  $\alpha$  bir doğru ise  $k_1(s) = 0$  dır. Diğer durumlarda  $k_1(s) = 1$  dir.

Bu durumda  $\alpha$  pseudo null eğrisinin Frenet denklemleri

$$T'(s) = N(s)$$

$$N'(s) = k_2(s)B_1(s) \quad (1.1.6)$$

$$B_1'(s) = k_3(s)N(s) - \varepsilon_2 k_2(s)B_2(s)$$

$$B_2'(s) = -\varepsilon_1 T(s) - \varepsilon_2 k_3(s)B_1(s)$$

formunda yazılır[39].

**Tanım 2.1.13.**  $M \subset E^n$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $\forall s \in I$  için  $\alpha'(s)$  hız vektörü, bir  $U$  sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa  $M$  ye bir eğilim çizgisi ve  $sp\{U\}$  ya da  $M$  eğilim çizgisinin eğilim eksenini denir[2].

**Tanım 2.1.14.** Bir eğrinin  $t$  boyunca hareketine eğrinin akışı denir. Burada  $t$  zamandır[32].

### 3. BÖLÜM

#### 3.1. $R_2^4$ de Bertrand Eğrileri

**Teorem 3.1.1.**  $c : L \rightarrow R_2^4$  eğrisi sabit olmayan  $k_1$  ve sabit  $k_2$  eğriliklerine sahip olan partially null eğri olsun.  $c$  partially null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip değildir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $c$  partially null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip ve  $c$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{c} : \bar{L} \rightarrow R_2^4$  olsun.  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$ ,  $\bar{s} = \varphi(s)$ ,  $\frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm,  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametresi, sırası ile,  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $(c, \bar{c})$  Bertrand eğri çifti için

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha(s)N(s) \quad (3.1.1)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha; L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur.

(3.1.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \frac{d\bar{c}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\varphi(s)} &= c'(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)N'(s) \\ \varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) &= T(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s) [k_1(s)T(s) + k_2(s)B_1(s)] \\ \varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) &= (1 + \alpha(s)k_1(s))T(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1(s) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

elde edilir.

$c$  bir Bertrand eğrisi olduğundan

$$\bar{N}(\varphi(s)) = dN(s) \quad (3.1.3)$$

dir. Burada  $d \neq 0$  bir sabittir. (3.1.2) ve (3.1.3) ifadeleri iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned} 0 &= g(\varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)), \bar{N}(\varphi(s))) \\ &= (1 + \alpha(s)k_1(s))g(T(s), dN(s)) + \alpha'(s)g(N(s), dN(s)) \\ &\quad + \alpha(s)k_2(s)g(dN(s), B_1(s)) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

olur. Burada

$$g(T(s), N(s)) = 0, \quad g(N(s), N(s)) = 1, \quad g(N(s), B_1(s)) = 0$$

olduğundan

$$\alpha'(s) = 0 \quad (3.1.5)$$

dır. Yani  $\alpha(s) = b$  olup  $b$  bir sabittir.

O zaman; (3.1.2) ve (3.1.5) birlikte düşünülüğünde

$$\varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) = (1 + \alpha(s)k_1(s))T(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1(s) \quad (3.1.6)$$

yazılabilir. (3.1.6) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi''(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) + \varphi'(s) \cdot \bar{T}'(\varphi(s)) &= (1 + \alpha(s)k_1(s))'T(s) + (1 + \alpha(s)k_1(s))T'(s) \\ &+ (\alpha(s)k_2(s))'B_1(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1'(s) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

veya

$$\begin{aligned} (\varphi'(s))^2 \bar{k}_1(\varphi(s)) \bar{N}(\varphi(s)) &= -\varphi''(s) \left( \frac{(1 + \alpha(s)k_1(s))T(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1(s)}{\varphi'(s)} \right) \\ &+ (1 + \alpha(s)k_1(s))'T(s) \\ &+ (1 + \alpha(s)k_1(s))k_1(s)N(s) \\ &+ (\alpha(s)k_2(s))'B_1(s) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

elde edilir.  $c$  bir Bertrand eğrisi olduğundan  $N$  ile  $\bar{N}$  lineer bağımlıdır.

(3.1.8) ifadesinden

$$\varphi''(s) \frac{(1 + \alpha(s)k_1(s))}{\varphi'(s)} = (1 + \alpha(s)k_1(s))' \quad (3.1.9)$$

$$\varphi''(s) \frac{\alpha(s)k_2(s)}{\varphi'(s)} = (\alpha(s)k_2(s))' \quad (3.1.10)$$

ve (3.1.6) ifadesinin normu alınırsa

$$(\varphi'(s))^2 \bar{k}_1(\varphi(s)) = \pm (1 + \alpha(s)k_1(s)) k_1(s) \quad (3.1.11)$$

elde edilir. ve

$$\varphi'(s) = \mp (1 + \alpha(s)k_1(s)) \quad (3.1.12)$$

bulunur. (3.1.9),(3.1.10) ve (3.1.11) birlikte düşünülürse

$$\alpha(s) = 0$$

sonucuna varılır. Bu durumda kabulümüz yanlış olup bu da,  $c$  nin bir Bertrand eğri çiftine sahip olmadığı anlamına gelir.

**Teorem 3.1.2.**  $c : L \rightarrow R_2^4$  eğrisi sabit  $k_1$  ve sabit olmayan  $k_2$  eğriliklerine sahip olan partially null eğri olsun.  $c$  partially null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip değildir.

**İspat:** Teorem 3.1.1 deki benzer yöntemle kolayca ispatlanır.

**Teorem 3.1.3.**  $c : L \rightarrow R_2^4$  eğrisi  $k_1, k_2, k_3$  eğriliklerine sahip olan pseudo null eğri olsun.  $c$  pseudo null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip değildir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $c$  pseudo null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip ve  $c$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{c} : \bar{L} \rightarrow R_2^4$  olsun.  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}, \bar{s} = \varphi(s), \frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm ve  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametresi, sırasıyla,  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $(c, \bar{c})$  Bertrand eğri çifti olduğundan

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha(s)N(s) \quad (3.1.13)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha; L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur.

(3.1.13) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\varphi'(s) \cdot \frac{d\bar{c}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\varphi(s)} = c'(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)N'(s)$$

$$\varphi'(s).\overline{T}(\varphi(s)) = T(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1(s) \quad (3.1.14)$$

elde edilir. (3.1.14) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi''(s).\overline{T}(\varphi(s)) + (\varphi'(s))^2.\overline{N}(\varphi(s)) &= N(s) + \alpha''(s)N(s) + \alpha'(s)N'(s) \quad (3.1.15) \\ &+ (\alpha(s)k_2(s))'B_1(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1'(s) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.1.14) ifadesi (3.1.15) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi''(s)\left(\frac{T(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1(s)}{\varphi'(s)}\right) + (\varphi'(s))^2.\overline{N}(\varphi(s)) &= N(s) + \alpha''(s)N(s) \\ &+ \alpha'(s)k_2(s)B_1(s) \\ &+ (\alpha(s)k_2(s))'B_1(s) \\ &+ \alpha(s)k_2(s)(k_3(s)N(s) \\ &+ k_2(s)B_2(s)) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} (\varphi'(s))^2.\overline{N}(\varphi(s)) &= -\varphi''(s)\left(\frac{T(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1(s)}{\varphi'(s)}\right) \quad (3.1.16) \\ &+ (1 + \alpha''(s) + \alpha(s)k_2(s)k_3(s))N(s) \\ &+ (\alpha'(s)k_2(s) + (\alpha(s)k_2(s))')B_1(s) \\ &+ \alpha(s)k_2^2(s)B_2(s) \end{aligned}$$

bulunur.  $c$  bir bertrand eğrisi olduğundan  $N$  ile  $\overline{N}$  lineer bağımlıdır.

(3.1.16) ifadesinden

$$\alpha(s)k_2^2(s) = 0 \quad (3.1.17)$$

elde edilir.  $k_2 \neq 0$  olduğundan

$$\alpha(s) = 0$$

sonucuna varılır. Bu durumda kabulümüz yanlış olup bu da,  $c$  nin bir Bertrand eğri çiftine sahip olmadığı anlamına gelir.

### 3.2. $R_2^4$ de (2, 3) Bertrand Eğrileri

**Teorem 3.2.1.**  $c : L \rightarrow R_2^4$  eğrisi  $k_1$  ve sabit  $k_2$  eğriliklerine sahip olan partially null eğri olsun.  $c$ , (2, 3) tipinde Bertrand eğrisi ise

$$(i) \beta(s) \neq \pm \frac{1}{k_2(s)}$$

$$(ii) \bar{k}_1(\varphi(s)) = \pm k_1(s) \frac{\sqrt{|(\beta(s)k_2(s))^2 - 1|}}{(\varphi'(s))^2}$$

ifadeleri mevcuttur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $c$ ,  $R_2^4$  de (2, 3) tipinde Bertrand eğrisi ve  $c$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{c} : \bar{L} \rightarrow R_2^4$  olsun.  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$ ,  $\bar{s} = \varphi(s)$ ,  $\frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm,  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametresi, sırası ile,  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $c$ , (2, 3) tipinde Bertrand eğrisi olduğundan

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha(s)B_1(s) + \beta(s)B_2(s) \quad (3.2.1)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. (3.2.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\varphi'(s) \cdot \frac{d\bar{c}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\varphi(s)} = c'(s) + \alpha'(s)B_1(s) + \alpha(s)B_1'(s) + \beta'(s)B_2(s) + \beta(s)B_2'(s)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) &= T(s) + \alpha'(s)B_1(s) + \alpha(s)k_3(s)B_1(s) \\ &\quad + \beta'(s)B_2(s) + \beta(s)(k_2(s)N(s) + k_3(s)B_2(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) &= T(s) + (\alpha'(s) + \alpha(s)k_3(s))B_1(s) \\ &\quad + (\beta'(s) - \beta(s)k_3(s))B_2(s) + \beta(s)k_2(s)N(s) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

bulunur.  $c$ ,  $R_2^4$  de (2, 3) tipinde Bertrand eğrisi olduğundan  $B_1(s)$  ve  $B_2(s)$  in gerdiği düzlemle  $\bar{B}_1(\bar{s})$  ve  $\bar{B}_2(\bar{s})$  in gerdiği düzlem çakışır. O halde

$$\bar{B}_1(\varphi(s)) = A(s)B_1(s) + B(s)B_2(s) \quad (3.2.3)$$

$$\bar{B}_2(\varphi(s)) = C(s)B_1(s) + D(s)B_2(s) \quad (3.2.4)$$

yazılabilir. Burada  $A, B, C, D; L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.2.2) ile (3.2.3) ve (3.2.2) ile (3.2.4) iç çarpıma tabi tutulursa

$$A(s) (\beta'(s) - \beta(s)k_3(s)) + B(s) (\alpha'(s) + \alpha(s)k_3(s)) = 0 \quad (3.2.5)$$

$$C(s) (\beta'(s) - \beta(s)k_3(s)) + D(s) (\alpha'(s) + \alpha(s)k_3(s)) = 0 \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Buradan

$$\beta'(s) - \beta(s)k_3(s) = 0 \text{ ve } \alpha'(s) + \alpha(s)k_3(s) = 0 \quad (3.2.7)$$

dır.  $k_3 = 0$  olduğundan

$$\beta'(s) = 0 \text{ ve } \alpha'(s) = 0 \quad (3.2.8)$$

dır. Yani  $\alpha$  ve  $\beta$  sabit fonksiyonlardır. (3.2.2) de (3.2.7) yerine yazılırsa

$$\varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) = T(s) + \beta(s)k_2(s)N(s) \quad (3.2.9)$$

elde edilir. (3.2.9) ifadesinden hareketle

$$\bar{T}(\varphi(s)) = E(s)T(s) + F(s)N(s) \quad (3.2.10)$$

yazılabilir. Burada  $E$  ve  $F; L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. Son eşitlikten

$$E(s) = \frac{1}{\varphi'(s)} \text{ ve } F(s) = \frac{\beta(s)k_2(s)}{\varphi'(s)} \quad (3.2.11)$$

bulunur. (3.2.10) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \bar{k}_1(\varphi(s)) \cdot \bar{N}(\varphi(s)) &= \frac{dE(s)}{ds} T(s) + E(s)k_1(s)N(s) + \frac{dF(s)}{ds} N(s) \\ &+ F(s)(k_1(s)T(s) + k_2(s)B_1(s)) \\ &= \left( \frac{dE(s)}{ds} + F(s)k_1(s) \right) T(s) + \left( \frac{dF(s)}{ds} + E(s)k_1(s) \right) N(s) \\ &+ F(s)k_2(s)B_1(s) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

elde edilir.

(3.2.9) ifadesinin normu alınrsa

$$\varphi'(s) = \sqrt{|1 - (\beta(s)k_2(s))^2|} \quad (3.2.14)$$

elde edilir.  $\varphi'(s) \neq 0$  olduğundan

$$1 - (\beta(s)k_2(s))^2 \neq 0$$

veya

$$(\beta(s)k_2(s))^2 \neq 1 \quad (3.2.15)$$

bulunur. (3.2.15) ifadesinden

$$\beta^2(s) \neq \frac{1}{k_2^2(s)}$$

veya

$$\beta(s) \neq \pm \frac{1}{k_2(s)} \quad (3.2.16)$$

elde edilir.  $\varphi'(s), \beta(s)$  ve  $k_2(s)$  sabit olduğundan

$$\frac{dE(s)}{ds} = \frac{dF(s)}{ds} = 0 \quad (3.2.17)$$

bulunur. (3.2.12) ifadesi

$$\varphi'(s) \cdot \bar{k}_1(\varphi(s)) \cdot \bar{N}(\varphi(s)) = (F(s)k_1(s))T(s) + (E(s)k_1(s))N(s) + F(s)k_2(s)B_1(s) \quad (3.2.18)$$

şeklinde yazılır. (3.2.18) ifadesinin normu alınrsa

$$\bar{k}_1(\varphi(s)) = \pm k_1(s) \frac{\sqrt{|(\beta(s)k_2(s))^2 - 1|}}{(\varphi'(s))^2} \quad (3.2.19)$$

elde edilir.

### 3.3. $R_2^4$ de (1, 3) Bertrand Eğrileri

**Teorem 3.3.1.**  $c : L \rightarrow R_2^4$  eğrisi  $k_1$ , sabit  $k_2$  ve  $k_3$  eğriliklerine sahip olan pseudo null eğrisi olsun.  $c$ , (1, 3) tipinde Bertrand eğrisidir  $\Leftrightarrow$

$$(i) \alpha k_2(s) + \beta k_3(s) \neq 0,$$

$$(ii) (\alpha k_2(s) + \beta k_3(s)) \gamma + \beta = 1,$$

$$(iii) \gamma + k_3(s) - \delta k_2(s) = 0$$

Burada  $\alpha, \beta, \gamma \neq \pm 1$  ve  $\delta$  sabitlerdir.

**İspat:** Kabul edelim ki  $c$ ,  $R_2^4$  de (1, 3) tipinde Bertrand eğrisi ve  $c$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{c} : \bar{L} \rightarrow R_2^4$  olsun.  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$ ,  $\bar{s} = \varphi(s)$ ,  $\frac{d\varphi(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm,  $c$  ve  $\bar{c}$  nin yay parametresi, sırası ile,  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $c$ , (1, 3) tipinde Bertrand eğrisi olduğundan

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha(s)N(s) + \beta(s)B_2(s) \quad (3.3.1)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. (3.3.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\varphi'(s) \cdot \frac{d\bar{c}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\varphi(s)} = c'(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)N'(s) + \beta'(s)B_2(s) + \beta(s)B_2'(s)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) &= T(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)k_2(s)B_1(s) \\ &\quad + \beta'(s)B_2(s) + \beta(s)(-T(s) + k_3(s)B_1(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \bar{T}(\varphi(s)) &= (1 - \beta(s))T(s) + \alpha'(s)N(s) + (\alpha(s)k_2(s) \\ &\quad + \beta(s)k_3(s))B_1(s) + \beta'(s)B_2(s) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

bulunur.  $c$ ,  $R_2^4$  de (1, 3) Bertrand eğrisi olduğundan  $N(s)$  ve  $B_2(s)$  in gerdiği düzlemlerle  $\bar{N}(\bar{s})$  ve  $\bar{B}_2(\bar{s})$  in gerdiği düzlem çakışır. O halde

$$\bar{N}(\varphi(s)) = A(s)N(s) + B(s)B_2(s) \quad (3.3.3)$$

$$\overline{B}_2(\varphi(s)) = C(s)N(s) + D(s)B_2(s) \quad (3.3.4)$$

yazılabilir. Burada  $A, B \neq 0, C, D; L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.3.2) ile (3.3.3) ve (3.3.2) ile (3.3.4) iç çarpıma tabi tutulursa

$$A(s)\beta'(s) + B(s)\alpha'(s) = 0 \quad (3.3.5)$$

$$C(s)\beta'(s) + D(s)\alpha'(s) = 0 \quad (3.3.6)$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha'(s) = 0 \text{ ve } \beta'(s) = 0 \quad (3.3.7)$$

dır. Bu da  $\alpha$  ve  $\beta$  nın sabit fonksiyon olduğunu gösterir. (3.3.2) de (3.3.7) yerine yazılırsa

$$\varphi'(s).\overline{T}(\varphi(s)) = (1 - \beta(s))T(s) + (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))B_1(s) \quad (3.3.8)$$

bulunur. (3.3.8) den hareketle

$$\overline{T}(\varphi(s)) = E(s)T(s) + F(s)B_1(s) \quad (3.3.9)$$

yazılabilir. Burada  $E$  ve  $F; L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.3.9) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(s).\overline{N}(\varphi(s)) &= \frac{dE(s)}{ds}T(s) + (E(s) + k_3(s)F(s))N(s) \\ &+ \frac{dF(s)}{ds}B_1(s) + k_2(s)F(s)B_2(s) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

elde edilir.  $\overline{N}; N$  ve  $B_2$  ile lineer bağımlı olduğundan

$$\frac{dE(s)}{ds} = 0 \text{ ve } \frac{dF(s)}{ds} = 0 \quad (3.3.11)$$

dır. Yani  $E$  ve  $F$  sabit fonksiyonlardır.  $E$  ye  $E_0$  ve  $F$  ye de  $F_0$  denilirse (3.3.9) dan

$$\overline{T}(\varphi(s)) = E_0(s)T(s) + F_0(s)B_1(s) \quad (3.3.12)$$

elde edilir. (3.3.8) ve (3.3.12) birlikte düşünülürse

$$E_0(s) = \frac{1 - \beta(s)}{\varphi'(s)} \quad (3.3.13)$$

ve

$$F_0(s) = \frac{\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)}{\varphi'(s)} \quad (3.3.14)$$

bulunur.  $c$  bir Bertrand eğrisi olmadığından  $F_0(s) \neq 0$  olma durumu göz önüne alınacaktır. (3.3.14) den

$$\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s) \neq 0 \quad (3.3.15)$$

dır. (3.3.13) ve (3.3.14) düzenlenirse

$$E_0(s)(\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)) = F_0(s)(1 - \beta(s))$$

$$E_0(s)(F_0(s))^{-1}(\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)) = (1 - \beta(s)) \quad (3.3.16)$$

elde edilir.  $(E_0(s)) \cdot (F_0(s))^{-1} = \gamma$  denirse (3.3.16) dan

$$\gamma(\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)) + \beta(s) = 1 \quad (3.3.17)$$

olur. (3.3.12) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\varphi'(s) \cdot \overline{N}(\varphi(s)) = (E_0(s) + k_3(s)F_0(s))N(s) + k_2(s)F_0(s)B_2(s) \quad (3.3.18)$$

bulunur. (3.3.18) ifadesinin normu alınırsa

$$F_0(s)k_2(s)(E_0(s) + k_3(s)F_0(s)) = 0 \quad (3.3.19)$$

yazılır. (3.3.19) da (3.3.13) ve (3.3.14) yerine yazılırsa

$$\frac{(\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))}{\varphi'(s)} \cdot k_2(s) \cdot \left[ \frac{1 - \beta(s)}{\varphi'(s)} + \frac{\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)}{\varphi'(s)} \cdot k_3(s) \right] = 0$$

$$(\varphi'(s))^{-2} (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))^2 \cdot k_2(s) \cdot (\gamma + k_3(s)) = 0 \quad (3.3.20)$$

elde edilir. (3.3.18) den hareketle

$$\bar{N}(\varphi(s)) = K(s)N(s) + M(s)B_2(s) \quad (3.3.21)$$

yazılabilir. Burada  $K$  ve  $M$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.3.18) ve (3.3.21) birlikte düşünüldüğünde

$$K(s) = \frac{(E_0(s) + k_3(s)F_0(s))}{\varphi'(s)} \text{ ve } M(s) = \frac{k_2(s)F_0(s)}{\varphi'(s)} \quad (3.3.22)$$

elde edilir. (3.3.21) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \bar{k}_2(\varphi(s)) \cdot \bar{B}_1(\varphi(s)) &= \frac{dK(s)}{ds} \cdot N(s) + K(s) \cdot k_2(s) \cdot B_1(s) \\ &+ \frac{dM(s)}{ds} \cdot B_2(s) + (-T(s) + k_3(s)B_1(s)) M(s) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

yazılır. (3.3.22) den

$$\frac{dK(s)}{ds} = \frac{dM(s)}{ds} = 0$$

olup  $K$  ve  $M$  sabit fonksiyonlardır.  $K$  ya  $K_0$ ,  $M$  ye  $M_0$  ve  $\delta = K_0(s) \cdot (M_0(s))^{-1}$  denilsin. O zaman

$$K_0(s) = \frac{(\gamma + k_3(s)) (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))}{(\varphi'(s))^2} \quad (3.3.24)$$

ve

$$M_0(s) = \frac{k_2(s) (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))}{(\varphi'(s))^2} \quad (3.3.25)$$

bulunur. (3.3.24) ve (3.3.25) den

$$\begin{aligned} \delta &= K_0(s) \cdot (M_0(s))^{-1} \\ &= \frac{(\gamma + k_3(s)) (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))}{(\varphi'(s))^2} \cdot \frac{(\varphi'(s))^2}{k_2(s) (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))} \\ &= \frac{(\gamma + k_3(s))}{k_2(s)} \\ &(\gamma + k_3(s)) - \delta k_2(s) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

elde edilir.

Tersine;  $c (c : L \rightarrow R_2^4) (i), (ii), (iii)$  bağıntılarını sağlayan  $k_1$ , sabit  $k_2, k_3$  eğri-liklerine sahip bir  $C^\infty$  özel Frenet eğrisi olsun.  $\bar{c}$  eğrisi;

$$\bar{c}(s) = c(s) + \alpha(s)N(s) + \beta(s)B_2(s) \quad (3.3.27)$$

şekilde tanımlansın. Burada  $s$ ;  $c$  nin yay parametresidir. (3.3.27) ifadesi  $s$  e göre diferensiyellenirse

$$\frac{d\bar{c}(s)}{ds} = (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)) (\gamma T(s) + B_1(s)) \quad (3.3.28)$$

elde edilir. (i) den  $\bar{c}$  regüler bir eğridir.

$$\bar{s} = \varphi(s) = \int_0^s \left\| \frac{d\bar{c}(t)}{dt} \right\| dt \quad (3.3.29)$$

şeklinde tanımlanan  $\varphi : L \rightarrow \bar{L}$  regüler dönüşümü mevcuttur. Burada  $\bar{s}$ ;  $\bar{c}$  nin yay parametresidir. (3.3.28) ifadesi normlanırsa

$$\varphi'(s) = \varepsilon (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)) \sqrt{|\gamma^2 - 1|} \quad (3.3.30)$$

elde edilir. Eğer  $(\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)) > 0$  ise  $\varepsilon = 1$ ,  $(\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s)) < 0$  ise  $\varepsilon = -1$  dir. Böylece  $\bar{c}$  eğrisi

$$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + \alpha(s)N(s) + \beta(s)B_2(s) \quad (3.3.31)$$

olarak yeniden ifade edilir. (3.3.31) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \frac{d\bar{c}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\varphi(s)} &= c'(s) + \alpha'(s)N(s) + \alpha(s)N'(s) + \beta'(s)B_2(s) + \beta(s)B_2'(s) \\ \bar{T}(\varphi(s)) &= \varepsilon \frac{1}{\sqrt{|\gamma^2 - 1|}} (\gamma T(s) + B_1(s)) \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

elde edilir. (3.3.32) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\varphi'(s) \cdot \bar{N}(\varphi(s)) = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{|\gamma^2 - 1|}} ((\gamma + k_3(s))N(s) + k_2(s)B_2(s))$$

$$\bar{N}(\varphi(s)) = \varepsilon \frac{|\gamma^2 - 1|^{\frac{-1}{2}}}{\varphi'(s)} \{(\gamma + k_3(s))N(s) + k_2(s)B_2(s)\} \quad (3.3.33)$$

bulunur. (3.3.30) ve (ii) den

$$\varphi'(s) = \frac{\varepsilon(1 - \beta(s))}{\gamma} \sqrt{|\gamma^2 - 1|} \quad (3.3.34)$$

yazılır. Yani  $\varphi'(s)$  sabittir. (3.3.33) de (3.3.34) yerine yazılırsa

$$\bar{N}(\varphi(s)) = \varepsilon \frac{\gamma |\gamma^2 - 1|^{-1}}{(1 - \beta(s))} \{(\gamma + k_3(s))N(s) + k_2(s)B_2(s)\} \quad (3.3.35)$$

elde edilir. (3.3.35) dan hareketle

$$\bar{N}(\varphi(s)) = P(s)N(s) + R(s)B_2(s) \quad (3.3.36)$$

yazılabilir. Burada  $P$  ve  $R$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.3.36) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi'(s) \cdot \frac{d\bar{N}(\varphi(s))}{ds} \Big|_{\bar{s}=\varphi(s)} &= \frac{dP(s)}{ds} N(s) + P(s)k_2(s)B_1(s) \\ &+ \frac{dR(s)}{ds} B_2(s) + (-T(s) + k_3(s)B_1(s)) R(s) \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

bulunur. (3.3.35) ve (3.3.36) birlikte düşünülürse

$$P(s) = \frac{\varepsilon\gamma(\gamma + k_3(s))}{(1 - \beta(s))|\gamma^2 - 1|} \text{ ve } R(s) = \frac{\varepsilon\gamma k_2(s)}{(1 - \beta(s))|\gamma^2 - 1|} \quad (3.3.38)$$

elde edilir. (3.3.38) den

$$\frac{dP(s)}{ds} = 0 \text{ ve } \frac{dR(s)}{ds} = 0 \quad (3.3.39)$$

yazılır. Bu da  $P$  ve  $R$  nın sabit fonksiyon olduğunu gösterir. (3.3.37) de (3.3.39) yerine yazılırsa

$$\varphi'(s) \cdot \frac{d\bar{N}(\varphi(s))}{ds} \Big|_{\bar{s}=\varphi(s)} = P(s)k_2(s)B_1(s) + R(s)(-T(s) + k_3(s)B_1(s))$$

$$\varphi'(s) \bar{k}_2(\varphi(s)) \bar{B}_1(\varphi(s)) = (P(s)k_2(s) + R(s)k_3(s)) B_1(s) - R(s)T(s) \quad (3.3.40)$$

bulunur. (3.3.40) ifadesinin normu alınırsa

$$\bar{k}_2(\varphi(s)) = \pm \frac{\sqrt{|R^2(s) - (P(s)k_2(s) + R(s)k_3(s))^2|}}{\varphi'(s)} = m \quad (3.3.41)$$

olur. Burada  $m$  bir sabittir.

(3.3.40) ifadesi  $s$  ye göre türevlenirse

$$\begin{aligned} (\varphi'(s))^2 \bar{k}_2^2(\varphi(s)) \bar{B}_2(\varphi(s)) &= -(\varphi'(s))^2 \bar{k}_2(\varphi(s)) \bar{k}_3(\varphi(s)) P(s) \\ &\quad + k_3(s) (P(s)k_2(s) + R(s)k_3(s) - R(s))N(s) \\ &\quad + (k_2(s) \{P(s)k_2(s) + R(s)k_3(s)\} \quad (3.3.42) \\ &\quad - (\varphi'(s))^2 \bar{k}_2(\varphi(s)) \bar{k}_3(\varphi(s)) R(s)) B_2(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani  $c$ ; (1, 3) Bertrand eğrisidir.

## 4. BÖLÜM

$\alpha$  birim hızlı partially null eğri olsun.  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $\alpha$  boyunca Frenet çatısı ve  $\alpha$ ;  $k_1, k_2, k_3$  eğriliklerine sahip eğri olsun. Bu bölümde  $\alpha$  partially null eğrisi için bir karakterizasyon elde edilecektir.

### 4.1. $R_2^4$ de Partially Null Helislerin Temel Denklemleri

$\alpha$ ;  $R_2^4$  de birim hızlı partially null eğri ve  $U$ ;  $R_2^4$  de sabit vektör alanı olsun.  $\forall s \in I$  için,  $U$  vektörü  $\{T, N, B_1, B_2\}$  ortonormal bazının lineer kombinasyonu olarak ifade edilir.  $a_i$  ler diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$U = a_1(s)T(s) + a_2(s)N(s) + a_3(s)B_1(s) + a_4(s)B_2(s) \quad (4.1.1)$$

olup

$$g(U, T) = a_1, \quad g(U, N) = -a_2, \quad g(U, B_1) = a_4, \quad g(U, B_2) = a_3 \quad (4.1.2)$$

ifadeleri yazılabilir. (4.1.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a'_1 T + a'_2 N + a'_3 B_1 + a'_4 B_2 \\ &\quad + a_1 T' + a_2 N' + a_3 B'_1 + a_4 B'_2 \\ &= a'_1 T + a'_2 N + a'_3 B_1 + a'_4 B_2 + a_1 k_1 N \\ &\quad + a_2(k_1 T + k_2 B_1) + a_3 k_3 B_1 + a_4(k_2 N - k_3 B_2) \\ &= (a'_1 + a_2 k_1) T + (a'_2 + a_1 k_1 + a_4 k_2) N \\ &\quad + (a'_3 + a_2 k_2 + a_3 k_3) B_1 + (a'_4 - a_4 k_3) B_2 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

elde edilir. (4.1.3) den

$$a'_1 + a_2 k_1 = 0, \quad a'_2 + a_1 k_1 + a_4 k_2 = 0, \quad a'_3 + a_2 k_2 + a_3 k_3 = 0, \quad a'_4 - a_4 k_3 = 0 \quad (4.1.4)$$

bulunur.  $k_3 = 0$  olduğundan (4.1.4) ifadesi

$$a'_1 + a_2 k_1 = 0, \quad a'_2 + a_1 k_1 + a_4 k_2 = 0, \quad a'_3 + a_2 k_2 = 0, \quad a'_4 = 0 \quad (4.1.5)$$

şeklinde düzenlenir. Buradan  $a_4$  sabit bir fonksiyondur.

$U$  sabit vektör alanı olduğundan

$$b = g(U, U) = a_1^2 - a_2^2 + 2a_3a_4 \quad (4.1.6)$$

şeklinde bulunur. Burada  $b$  bir sabittir.  $\alpha$  genel helis olsun. O zaman

$$g(T, U) = a_1 = p \Leftrightarrow a_1' = 0$$

dır. Burada  $p$  bir sabittir. (4.1.4) den

$$a_2 = 0 \quad (4.1.7)$$

elde edilir. (4.1.5) den  $a_3$  sabit fonksiyondur.

(4.1.7); (4.1.6) da yerine yazılırsa

$$g(U, U) - a_1^2 = 2a_3a_4 = r \quad (4.1.8)$$

bulunur. Burada  $r$  bir sabittir. (4.1.5) den

$$a_4 = -\frac{k_1}{k_2}a_1 \quad (4.1.9)$$

elde edilir. (4.1.9); (4.1.8) de yerine yazılır ve  $a_3 = t$  denirse

$$r = 2a_3a_4 = 2.t.\left(-\frac{k_1}{k_2}a_1\right) = -2t\frac{k_1}{k_2}a_1 \quad (4.1.10)$$

bulunur.  $a_1$  ve  $t$  sabit olduğundan

$$\frac{k_1}{k_2} = w \quad (4.1.11)$$

yazılabilir. Burada  $w$  bir sabittir.

Tersine düşünülürse

$$\frac{k_1}{k_2} = d = -\frac{a_3}{a_1} \quad (4.1.12)$$

olsun. Burada  $d$  bir sabittir. Bir  $U$  doğrultusu

$$U = a_1T + a_2B_1 + a_3B_2 \quad (4.1.13)$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $a_1, a_2, a_3$  sabit fonksiyonlardır. (4.1.13) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} U' &= a_1T' + a_2B_1' + a_3B_2' \\ &= a_1k_1N + a_2k_3B_1 + a_3(k_2N - k_3B_2) \\ &= a_1k_1N + a_3k_2N \\ &= (a_1k_1 + a_3k_2)N \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

elde edilir. (4.1.12) gözönüne alındığında

$$U' = 0 \quad (4.1.15)$$

bulunur. Yani  $U$  sabit bir doğrultudur. ve

$$g(U, T) = a_1 \quad (4.1.16)$$

dir. O halde  $\alpha$  genel helistir.

**Teorem 4.1.1.**  $\alpha; R_2^4$  de birim hızlı partially null eğri olsun.  $\alpha$  nın genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_1}{k_2} = z$$

olmasıdır. Burada  $z$  bir sabittir.

## 5. BÖLÜM

### 5.1. $R_2^4$ de Partially Null Eğrisinin Esnek Olmayan Akışı

Aksi belirtilmediği sürece  $R_2^4$  de diferensiyellenebilir partially null veya pseudo null eğrinin bir parametre ailesi  $\gamma : [0, l] \times [0, w) \rightarrow R_2^4$  şeklinde ifade edilecek.  $u$ ,  $0 \leq u \leq l$ , eğrinin parametrizasyon değişkeni olsun. Eğer  $\gamma$  partially null veya pseudo null eğrisinin hızı  $v = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\|$  tarafından verilirse  $\gamma$  nın yay uzunluğu  $u$  nun bir fonksiyonu olarak

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\| du = \int_0^u v \cdot du \quad (5.1.1)$$

yazılabilir. Burada

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\| = \sqrt{\left| g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \right|} \quad (5.1.2)$$

dir.  $\frac{\partial}{\partial s}$  operatörü

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \quad (5.1.3)$$

şeklinde verilir. Burada  $v = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\|$  olup bu durumda yay uzunluğu  $ds = v \cdot du$  dir.

**Tanım 5.1.1.**  $\gamma; R_2^4$  de partially null veya pseudo null eğri ve  $\{T, N, B_1, B_2\}$ ;  $R_2^4$  de  $\gamma$  nın Frenet çatısı olsun. Partially Null veya Pseudo Null eğrinin herhangi bir akışı

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2 \quad (5.1.4)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $\beta_i$ ; diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$R_2^4$  de partially null veya pseudo null eğrisinin herhangi bir sıkışma veya gevşeme maruz kalmamasının koşulu

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} \cdot du = 0 \quad (5.1.5)$$

şartı ile ifade edilir. Burada  $u \in [0, l]$  dir.

**Tanım 5.1.2.**  $\gamma; R_2^4$  de partially null veya pseudo null eğri olsun. Bir partially null eğrisinin evölüsyonu  $\gamma(u, t)$  ve onun akışı;  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ , eğer

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\| = 0 \quad (5.1.6)$$

ise esnek olmayan akış olarak ifade edilir.

**Teorem 5.1.1.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$ ;  $\gamma$  partially null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin diferensiyellenebilir akışı olsun. Eğer  $\gamma; R_2^4$  de birim hızlı partially null eğri ise

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \beta_2 k_1 v \right) \quad (5.1.7)$$

denklemini yazılabilir.

**İspat:**  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ ,  $R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin diferensiyellenebilir akışı olsun.  $\gamma$  nın tanımını kullanılırsa

$$v = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\| \Leftrightarrow v^2 = g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \quad (5.1.8)$$

elde edilir. (5.1.8) ifadesinin  $t$  ye göre türevi alınır

$$2v \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \quad (5.1.9)$$

bulunur. (5.1.9) da  $\frac{\partial}{\partial u}$  ve  $\frac{\partial}{\partial t}$  yer değiştirebildiğinden

$$\begin{aligned} 2v \frac{\partial v}{\partial t} &= g \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) + g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \right) \\ &= 2g \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \\ v \frac{\partial v}{\partial t} &= g \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

bulunur. (5.1.10) ifadesi

$$v \frac{\partial v}{\partial t} = g \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \right) \quad (5.1.11)$$

şeklinde yazılabilir. (5.1.11) den

$$v \frac{\partial v}{\partial t} = g \left( \frac{\partial}{\partial u} (\beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2), v T \right)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= g \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial u} T + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial \beta_2}{\partial u} N + \beta_2 \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial \beta_3}{\partial u} B_1 \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 \frac{\partial B_1}{\partial u} + \frac{\partial \beta_4}{\partial u} B_2 + \beta_4 \frac{\partial B_2}{\partial u}, T \right) \\ &= g \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial u} T + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \beta_2}{\partial u} N + \beta_2 \frac{\partial N}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \beta_3}{\partial u} B_1 \right. \\ &\quad \left. + \beta_3 \frac{\partial B_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \beta_4}{\partial u} B_2 + \beta_4 \frac{\partial B_2}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}, T \right) \\ &= g \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial u} T + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial s} \cdot v + \frac{\partial \beta_2}{\partial u} N + \beta_2 \frac{\partial N}{\partial s} \cdot v \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \beta_3}{\partial u} B_1 + \beta_3 \frac{\partial B_1}{\partial s} \cdot v + \frac{\partial \beta_4}{\partial u} B_2 + \beta_4 \frac{\partial B_2}{\partial s} \cdot v, T \right) \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

elde edilir. Tamm 2.1.11 den yararlanılırsa

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \beta_2 k_1 v \quad (5.1.13)$$

bulunur.

**Teorem 5.1.2.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun. Eğer  $\gamma$ ;  $R_2^4$  de birim hızlı partially null eğri ise

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial u} = -\beta_2 k_1 v \quad (5.1.14)$$

denklemini mevcuttur.

**İspat:** Kabul edelim ki  $\gamma$  partially null eğrisi esnek olmayan eğri akışına sahip olsun. O halde

$$\frac{\partial}{\partial t} s(u, t) = \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} \cdot du = \int_0^u \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \beta_2 k_1 v \right) du = 0 \quad (5.1.15)$$

yazılabilir. (5.1.15) ifadesinden

$$\left( \frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \beta_2 k_1 v \right) = 0 \quad (5.1.16)$$

veya

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial u} = -\beta_2 k_1 v \quad (5.1.17)$$

bulunur.

**Teorem 5.1.3.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun.  $t$  ye göre  $\{T, N, B_1, B_2\}$  nin diferensiyelleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) N + \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) B_1 + \frac{\partial \beta_4}{\partial s} B_2 \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) T + \psi_2 B_1 + \psi_1 B_2 \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= -\frac{\partial \beta_4}{\partial s} T + \psi_1 N + \psi_3 B_1 \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} &= -\left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) T + \psi_2 N - \psi_3 B_2 \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

dir. Burada  $g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right) = \psi_1$ ,  $g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right) = \psi_2$ ,  $g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right) = \psi_3$  dir.

**İspat:** Doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s} (\beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2) \\
&= \frac{\partial \beta_1}{\partial s} \cdot T + \beta_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial \beta_2}{\partial s} \cdot N + \beta_2 \cdot \frac{\partial N}{\partial s} \\
&\quad + \frac{\partial \beta_3}{\partial s} \cdot B_1 + \beta_3 \cdot \frac{\partial B_1}{\partial s} + \frac{\partial \beta_4}{\partial s} \cdot B_2 + \beta_4 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial s}
\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

bulunur. (5.1.19) da (1.1.3) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial \beta_1}{\partial s} \cdot T + \beta_1 (k_1 N) + \frac{\partial \beta_2}{\partial s} \cdot N + \beta_2 \cdot (k_1 T + k_2 B_1) \\
&\quad + \frac{\partial \beta_3}{\partial s} \cdot B_1 + \beta_3 \cdot (k_3 B_1) + \frac{\partial \beta_4}{\partial s} \cdot B_2 + \beta_4 \cdot (k_2 N - k_3 B_2)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial s} + \beta_2 k_1 \right) T + \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) N \\
&\quad + \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 \right) B_1 + \left( \frac{\partial \beta_4}{\partial s} - \beta_4 k_3 \right) B_2
\end{aligned} \tag{5.1.20}$$

elde edilir.  $k_3 = 0$  olduğundan (5.1.20) ifadesi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial s} + \beta_2 k_1 \right) T + \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) N \\
&\quad + \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) B_1 + \frac{\partial \beta_4}{\partial s} \cdot B_2
\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

şeklinde yazılır. (5.1.14) ifadesinden

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \beta_2 k_1 v = 0$$

olup

$$v \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial s} + \beta_2 k_1 \right) = 0$$

dır. Böylece

$$\left( \frac{\partial \beta_1}{\partial s} + \beta_2 k_1 \right) = 0$$

bulunur. O halde (5.1.21) ifadesi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) N + \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) B_1 + \frac{\partial \beta_4}{\partial s} B_2 \quad (5.1.22)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(T, N) = 0 &\Rightarrow g\left(T, \frac{\partial N}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial T}{\partial t}, N\right) = \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \\ g(T, B_1) = 0 &\Rightarrow g\left(T, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial T}{\partial t}, B_1\right) = -\frac{\partial \beta_4}{\partial s} \\ g(T, B_2) = 0 &\Rightarrow g\left(T, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial T}{\partial t}, B_2\right) = -\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2\right) \\ g(N, B_1) = 0 &\Rightarrow g\left(N, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right) = -\Psi_1 \\ g(N, B_2) = 0 &\Rightarrow g\left(N, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right) = -\Psi_2 \\ g(B_1, B_2) = 1 &\Rightarrow g\left(B_1, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right) = -\Psi_3 \\ g\left(N, \frac{\partial N}{\partial t}\right) &= g\left(B_1, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) = g\left(B_2, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = 0 \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial N}{\partial t} = aT + bN + cB_1 + dB_2 \quad (5.1.24)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $a, b, c, d$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. O zaman (5.1.23) den

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, T\right) &= a = \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \\ g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, N\right) &= -b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \\ g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right) &= d = \Psi_1 \\ g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right) &= c = \Psi_2 \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

bulunur. (5.1.24) de (5.1.25) ifadesi yerine yazılırsa

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) T + \Psi_2 B_1 + \Psi_1 B_2 \quad (5.1.26)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = aT + bN + cB_1 + dB_2 \quad (5.1.27)$$

yazılır. Burada  $a, b, c, d$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. O halde (5.1.23) den

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, T\right) &= a = -\frac{\partial \beta_4}{\partial s} \\ g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, N\right) &= -b \Leftrightarrow b = \Psi_1 \\ g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_1\right) &= d = 0 \\ g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right) &= c = \Psi_3 \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

bulunur. (5.1.27) de (5.1.28) ifadesi yerine yazılırsa

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{\partial \beta_4}{\partial s} T + \Psi_1 N + \Psi_3 B_1 \quad (5.1.29)$$

elde edilir. Son olarak

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = aT + bN + cB_1 + dB_2 \quad (5.1.30)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $a, b, c, d$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. O zaman (5.1.23) den

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial B_2}{\partial t}, T\right) &= a = -\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2\right) \\ g\left(\frac{\partial B_2}{\partial t}, N\right) &= -b \Leftrightarrow b = \Psi_2 \\ g\left(\frac{\partial B_2}{\partial t}, B_1\right) &= d \Leftrightarrow d = -\Psi_3 \\ g\left(\frac{\partial B_2}{\partial t}, B_2\right) &= c = 0 \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

bulunur. (5.1.31) ifadesi (5.1.30) da yerine yazılırsa

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) T + \Psi_2 N - \Psi_3 B_2 \quad (5.1.32)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 5.1.4.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun. Bu takdirde

$$\frac{\partial k_1}{\partial t} = \frac{\partial (\beta_1 k_1)}{\partial s} + \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial s^2} + \frac{\partial (\beta_4 k_2)}{\partial s} + k_2 \cdot \frac{\partial \beta_4}{\partial s} \quad (5.1.33)$$

denklemini mevcuttur.

**İspat:** Teorem 5.1.3 den

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) N + \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) B_1 + \frac{\partial \beta_4}{\partial s} B_2 \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial s^2} + \frac{\partial (\beta_1 k_1)}{\partial s} + \frac{\partial (\beta_4 k_2)}{\partial s} \right) N + \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) (k_1 T + k_2 B_1) \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \beta_3}{\partial s^2} + \frac{\partial (\beta_2 k_2)}{\partial s} \right) B_1 + \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) k_3 B_1 + \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial s^2} B_2 \\ &\quad + \frac{\partial \beta_4}{\partial s} (k_2 N - k_3 B_2) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \left( \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial s^2} + \frac{\partial (\beta_1 k_1)}{\partial s} + \frac{\partial (\beta_4 k_2)}{\partial s} + k_2 \cdot \frac{\partial \beta_4}{\partial s} \right) N \\ &\quad + \left( \beta_1 k_1 k_2 + k_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + k_2^2 \beta_4 + \frac{\partial (\beta_2 k_2)}{\partial s} + \frac{\partial^2 \beta_3}{\partial s^2} \right) B_1 \\ &\quad + \left( \beta_1 k_1^2 + k_1 \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_4 k_1 k_2 \right) T + \frac{\partial^2 \beta_4}{\partial s^2} B_2 \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (k_1 N) = \frac{\partial k_1}{\partial t} \cdot N + k_1 \cdot \frac{\partial N}{\partial t} \\ &= \frac{\partial k_1}{\partial t} \cdot N + k_1 \left( \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) T + \Psi_2 B_1 + \Psi_1 B_2 \right) \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

bulunur. (5.1.34) ve (5.1.35) ifadelerinden

$$\frac{\partial k_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial s^2} + \frac{\partial(\beta_1 k_1)}{\partial s} + \frac{\partial(\beta_4 k_2)}{\partial s} + k_2 \cdot \frac{\partial \beta_4}{\partial s} \quad (5.1.36)$$

elde edilir.

**Sonuç 5.1.1.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun. Bu takdirde

$$\frac{\partial^2 \beta_4}{\partial s^2} = \Psi_1 k_1 \quad (5.1.37)$$

ve

$$\beta_1 k_1 k_2 + k_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + k_2^2 \beta_4 + \frac{\partial(\beta_2 k_2)}{\partial s} + \frac{\partial^2 \beta_3}{\partial s^2} = \Psi_2 k_1 \quad (5.1.38)$$

ifadeleri mevcuttur.

**Teorem 5.1.5.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun. Bu takdirde

$$k_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} / \frac{\partial \beta_4}{\partial s} \quad (5.1.39)$$

ve

$$k_2 = -\frac{1}{\Psi_1} \left[ \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} \right] \quad (5.1.40)$$

ifadeleri mevcuttur.

**İspat:** Teorem 5.1.3 den

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial B_1}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( -\frac{\partial \beta_4}{\partial s} T + \Psi_1 N + \Psi_3 B_1 \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \beta_4}{\partial s^2} T - \frac{\partial \beta_4}{\partial s} k_1 N + \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \cdot N \\ &\quad + \Psi_1 (k_1 T + k_2 B_1) + \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} \cdot B_1 + \Psi_3 k_3 B_1 \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_1}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (k_3 B_1) = 0 \quad (5.1.42)$$

elde edilir. (5.1.41) ve (5.1.42) ifadelerinden

$$-\frac{\partial^2 \beta_4}{\partial s^2} T - \frac{\partial \beta_4}{\partial s} k_1 N + \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} N + \Psi_1 (k_1 T + k_2 B_1) + \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} B_1 + \Psi_3 k_3 B_1 = 0 \quad (5.1.43)$$

olup

$$-\frac{\partial \beta_4}{\partial s} k_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow k_1 = \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} / \frac{\partial \beta_4}{\partial s}$$

ve

$$\Psi_1 k_2 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{\Psi_1} \left[ \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} \right]$$

elde edilir.

**Teorem 5.1.6.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \beta_1 T + \beta_2 N + \beta_3 B_1 + \beta_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  partially null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun. Bu takdirde

$$\frac{\partial k_2}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} - \beta_2 k_1 k_2 - k_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s} - \Psi_3 k_2 \quad (5.1.44)$$

ifadesi mevcuttur.

**İspat:** Teorem 5.1.3 den

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( - \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) T + \psi_2 N - \psi_3 B_2 \right) \\ &= - \left( \frac{\partial^2 \beta_3}{\partial s^2} + \frac{\partial (\beta_2 k_2)}{\partial s} \right) T - \left( \frac{\partial \beta_3}{\partial s} + \beta_2 k_2 \right) k_1 N \\ &\quad + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} N + \Psi_2 (k_1 T + k_2 B_1) - \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} B_2 - \Psi_3 (k_2 N - k_3 B_2) \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_2}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (k_2 N - k_3 B_2) = \frac{\partial k_2}{\partial t} N + k_2 \frac{\partial N}{\partial t} \\ &= \frac{\partial k_2}{\partial t} N + k_2 \left( \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial s} + \beta_1 k_1 + \beta_4 k_2 \right) T + \Psi_2 B_1 + \Psi_1 B_2 \right) \end{aligned} \quad (5.1.46)$$

bulunur. (5.1.45) ve (5.1.46) ifadelerinden

$$\frac{\partial k_2}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} - \beta_2 k_1 k_2 - k_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s} - \Psi_3 k_2$$

elde edilir.

## 5.2. $R_2^4$ de Pseudo Null Eğrisinin Esnek Olmayan Akışı

**Teorem 5.2.1.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin Frenet çatası ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B_1 + \alpha_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin diferensiyellenebilir akışı olsun. Eğer  $\gamma$ ;  $R_2^4$  de birim hızlı pseudo null eğri ise

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_4 v \quad (5.2.1)$$

denklemini mevcuttur.

**İspat:**  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ ,  $R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin diferensiyellenebilir akışı olsun.  $\gamma$  nın tanımını kullanılırsa

$$v = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right\| \Leftrightarrow v^2 = g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \quad (5.2.2)$$

bulunur. (5.2.2) ifadesinin  $t$  ye göre türevi alınırsa

$$2v \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \quad (5.2.3)$$

bulunur. (5.2.3) de  $\frac{\partial}{\partial u}$  ve  $\frac{\partial}{\partial t}$  yer değiştirebildiğinden

$$\begin{aligned} 2v \frac{\partial v}{\partial t} &= g \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) + g \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \right) \\ &= 2g \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \\ v \frac{\partial v}{\partial t} &= g \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

bulunur. (5.2.4) den

$$v \frac{\partial v}{\partial t} = g \left( \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right), \frac{\partial \gamma}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \right) \quad (5.2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$v \frac{\partial v}{\partial t} = g \left( \frac{\partial}{\partial u} (\alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B_1 + \alpha_4 B_2), v \cdot T \right)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= g \left( \frac{\partial}{\partial u} (\alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B_1 + \alpha_4 B_2), T \right) \\ &= g \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \cdot T + \alpha_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \cdot N + \alpha_2 \cdot \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} \cdot B_1 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3 \cdot \frac{\partial B_1}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_4}{\partial u} \cdot B_2 + \alpha_4 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial u}, T \right) \\ &= g \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \cdot T + \alpha_1 \cdot \frac{\partial T}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \cdot N + \alpha_2 \cdot \frac{\partial N}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial u} \cdot B_1 \right. \\ &\quad \left. + \alpha_3 \cdot \frac{\partial B_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_4}{\partial u} \cdot B_2 + \alpha_4 \cdot \frac{\partial B_2}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u}, T \right) \\ &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_4 v \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 5.2.2.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin Frenet çatası ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B_1 + \alpha_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun. Eğer  $\gamma$ ;  $R_2^4$  de birim hızlı pseudo null eğri ise

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \alpha_4 v \quad (5.2.6)$$

denklemini mevcuttur.

**İspat:**  $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ ,  $R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir

akışı olsun. O zaman Teorem 5.2.1 den

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}s(u, t) &= \int_0^u \frac{\partial v}{\partial t} .du = 0 \\ &= \int_0^u \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_4 v \right) du = 0\end{aligned}\quad (5.2.7)$$

elde edilir. Yani;

$$\left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \alpha_4 v \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \alpha_4 v$$

dir.

**Teorem 5.2.3.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B_1 + \alpha_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun.  $t$  ye göre  $\{T, N, B_1, B_2\}$  nin diferensiyelleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_3 k_3 + \alpha_1 \right) N + \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) B_1 + \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) B_2 \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= - \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) T + \Psi_2 N - \Psi_1 B_1 \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) T + \Psi_3 N - \Psi_1 B_2\end{aligned}\quad (5.2.8)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_3 k_3 + \alpha_1 \right) T + \Psi_3 B_1 - \Psi_2 B_2$$

dir. Burada  $g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right) = \psi_1$ ,  $g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right) = \psi_2$ ,  $g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right) = \psi_3$  dir.

**İspat:** Doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (\alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B_1 + \alpha_4 B_2) \\ &= \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} .T + \alpha_1 N + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} .N + \alpha_2 k_2 B_1 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} .B_1 \\ &\quad + \alpha_3 (k_3 N + k_2 B_2) + \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} .B_2 + \alpha_4 (-T + k_3 B_1)\end{aligned}\quad (5.2.9)$$

bulunur. (5.2.9) ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} - \alpha_4 \right) T + \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_1 + \alpha_3 k_3 \right) N \\ & + \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) B_1 + \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) B_2 \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

elde edilir. (5.2.6) ifadesinden

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} - \alpha_4 v = 0$$

olup

$$v \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} - \alpha_4 \right) = 0$$

dır. Böylece

$$\left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} - \alpha_4 \right) = 0$$

bulunur. O halde (5.2.10) ifadesi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = & \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_1 + \alpha_3 k_3 \right) N + \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) B_1 \\ & + \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) B_2 \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} g(T, N) = 0 & \Rightarrow g\left(T, \frac{\partial N}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial T}{\partial t}, N\right) = -\left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2\right) \\ g(T, B_1) = 0 & \Rightarrow g\left(T, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial T}{\partial t}, B_1\right) = \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3\right) \\ g(T, B_2) = 0 & \Rightarrow g\left(T, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial T}{\partial t}, B_2\right) = -\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_1 + \alpha_3 k_3\right) \\ g(N, B_1) = 0 & \Rightarrow g\left(N, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right) = -\Psi_1 \\ g(N, B_2) = 1 & \Rightarrow g\left(N, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right) = -\Psi_2 \\ g(B_1, B_2) = 0 & \Rightarrow g\left(B_1, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = -g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right) = -\Psi_3 \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

$$g\left(N, \frac{\partial N}{\partial t}\right) = g\left(B_1, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) = g\left(B_2, \frac{\partial B_2}{\partial t}\right) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{\partial N}{\partial t} = aT + bN + cB_1 + dB_2 \quad (5.2.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $a, b, c, d$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. O zaman (5.2.12) den

$$\begin{aligned} g\left(T, \frac{\partial N}{\partial t}\right) &= a = -\left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2\right) \\ g\left(N, \frac{\partial N}{\partial t}\right) &= d = 0 \\ g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_1\right) &= -c \Leftrightarrow c = -\Psi_1 \\ g\left(\frac{\partial N}{\partial t}, B_2\right) &= b = \Psi_2 \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

bulunur. (5.2.14) ifadesi (5.2.13) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2\right) T + \Psi_2 N - \Psi_1 B_1 \quad (5.2.15)$$

elde edilir. Aynı yöntemle

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = aT + bN + cB_1 + dB_2 \quad (5.2.16)$$

olarak bulunabilir. Burada  $a, b, c, d$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Böylece (5.2.12) den

$$\begin{aligned} g\left(T, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) &= a = \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3\right) \\ g\left(N, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) &= d = -\Psi_1 \\ g\left(B_1, \frac{\partial B_1}{\partial t}\right) &= -c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \\ g\left(\frac{\partial B_1}{\partial t}, B_2\right) &= b = \Psi_3 \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

elde edilir. (5.2.17) ifadesi (5.2.16) da yerine yazılırsa

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) T + \Psi_3 N - \Psi_1 B_2 \quad (5.2.18)$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = aT + bN + cB_1 + dB_2 \quad (5.2.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $a, b, c, d$  diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. O halde (5.2.12) den

$$\begin{aligned} g \left( T, \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) &= a = - \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_1 + \alpha_3 k_3 \right) \\ g \left( N, \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) &= d = -\Psi_2 \\ g \left( B_1, \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) &= -c \Leftrightarrow c = \Psi_3 \\ g \left( B_2, \frac{\partial B_2}{\partial t} \right) &= b = 0 \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

elde edilir. (5.2.20) ifadesi (5.2.19) da yerine yazılırsa

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_3 k_3 + \alpha_1 \right) T + \Psi_3 B_1 - \Psi_2 B_2 \quad (5.2.21)$$

bulunur.

**Teorem 5.2.4.**  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \alpha_1 T + \alpha_2 N + \alpha_3 B_1 + \alpha_4 B_2$$

$R_2^4$  de  $\gamma$  pseudo null eğrisinin esnek olmayan diferensiyellenebilir akışı olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial s^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} + \frac{\partial (\alpha_2 k_3)}{\partial s} + k_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 k_3 + \alpha_4 k_3^2 - \Psi_2 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial s^2} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \frac{\partial (\alpha_2 k_2)}{\partial s} + \frac{\partial (\alpha_4 k_3)}{\partial s} + k_3 \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_1 + \alpha_3 k_3 + \alpha_3 k_2 k_3 + \Psi_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial s^2} + \frac{\partial(\alpha_3 k_2)}{\partial s} + k_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2^2 + \alpha_4 k_2 k_3 &= 0 & (5.2.22) \\
\frac{\partial k_2}{\partial t} &= \Psi_2 k_2 - \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \\
\frac{\partial \Psi_2}{\partial s} &= \Psi_3 k_2 + \Psi_1 k_3 + \alpha_3 k_2 + \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} \\
\frac{\partial k_3}{\partial t} &= \alpha_2 k_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} + \alpha_4 k_3 - \Psi_2 k_3
\end{aligned}$$

denklemleri yazılabilir.

**İspat:** Teorem 5.2.3 den

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_1 + \alpha_3 k_3 \right) N + \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) B_1 + \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) B_2 \right) \\
&= \left( \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial s^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} + \frac{\partial(\alpha_3 k_3)}{\partial s} \right) N + \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_1 + \alpha_3 k_3 \right) k_2 B_1 & (5.2.23) \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial s^2} + \frac{\partial(\alpha_2 k_2)}{\partial s} + \frac{\partial(\alpha_4 k_3)}{\partial s} \right) B_1 + \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) (k_3 N + k_2 B_2) \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial s^2} + \frac{\partial(\alpha_3 k_2)}{\partial s} \right) B_2 + \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) (-T + k_3 B_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (N) = - \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) T + \Psi_2 N - \Psi_1 B_1 \quad (5.2.24)$$

bulunur. (5.2.23) ve (5.2.24) ifadeleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial s^2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} + \frac{\partial(\alpha_3 k_3)}{\partial s} + k_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 k_3 + \alpha_4 k_3^2 - \Psi_2 &= 0 \\
\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial s^2} + \frac{\partial(\alpha_2 k_2)}{\partial s} + \frac{\partial(\alpha_4 k_3)}{\partial s} + k_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + k_2 \alpha_1 + k_2 \alpha_3 k_3 + k_3 \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 k_3 + \Psi_1 &= 0 & (5.2.25) \\
\frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial s^2} + \frac{\partial(\alpha_3 k_2)}{\partial s} + k_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2^2 + \alpha_4 k_3 k_2 &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde; Teorem 5.2.3 den

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial N}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( - \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) T + \Psi_2 N - \Psi_1 B_1 \right) \\
&= - \left( \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial s^2} + \frac{\partial(\alpha_3 k_2)}{\partial s} \right) T - \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) N & (5.2.26) \\
&\quad + \frac{\partial \Psi_2}{\partial s} N + \Psi_2 k_2 B_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} B_1 - \Psi_1 (k_3 N + k_2 B_2)
\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial N}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (k_2 B_1) = \frac{\partial k_2}{\partial t} B_1 + k_2 \left( \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) T + \Psi_3 N - \Psi_1 B_2 \right) \quad (5.2.27)$$

bulunur. Böylece; (5.2.27) ve (5.2.28) ifadelerinden

$$\frac{\partial k_2}{\partial t} = \Psi_2 k_2 - \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} \quad (5.2.28)$$

ve

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial s} = \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 + k_2 \Psi_3 + \Psi_1 k_3 \quad (5.2.29)$$

elde edilir. Benzer şekilde; Teorem 5.2.3 den

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_1}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} (k_3 N + k_2 B_2) = \frac{\partial k_3}{\partial t} N + k_3 \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial k_2}{\partial t} B_2 + k_2 \frac{\partial B_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial k_3}{\partial t} N + k_3 \left( - \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) T + \Psi_2 N - \Psi_1 B_1 \right) + \frac{\partial k_2}{\partial t} B_2 \\ &\quad + k_2 \left( - \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_3 k_3 + \alpha_1 \right) T + \Psi_3 B_1 - \Psi_2 B_2 \right) \quad (5.2.30) \\ &= \left( -k_3 \left( \frac{\partial \alpha_4}{\partial s} + \alpha_3 k_2 \right) - k_2 \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + \alpha_3 k_3 + \alpha_1 \right) \right) T \\ &\quad + \left( \frac{\partial k_3}{\partial t} + k_3 \Psi_2 \right) N + (-\Psi_1 k_3 + k_2 \Psi_3) B_1 + \left( \frac{\partial k_2}{\partial t} - k_2 \Psi_2 \right) B_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial B_1}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( - \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) T + \Psi_3 N - \Psi_1 B_2 \right) \\ &= - \left( \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial s^2} + \frac{\partial (\alpha_2 k_2)}{\partial s} + \frac{\partial (\alpha_4 k_3)}{\partial s} \right) T \quad (5.2.31) \\ &\quad - \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} + \alpha_2 k_2 + \alpha_4 k_3 \right) N \\ &\quad + \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} N + \Psi_3 k_2 B_1 \\ &\quad - \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} B_2 - \Psi_1 (-T + k_3 B_1) \end{aligned}$$

bulunur. (5.2.30) ve (5.2.31) ifadeleri göz önüne alındığında

$$\frac{\partial k_3}{\partial t} = - \frac{\partial \alpha_3}{\partial s} - \alpha_2 k_2 - \alpha_4 k_3 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial s} - k_3 \Psi_2 \quad (5.2.32)$$

elde edilir.Bu da ispatı tamamlar.

## KAYNAKLAR

- [1] **Aksoyak, F. K., Gök, İ., İlarıslan, K.**, 2014. Generalized Null Bertrand Curves in Minkowski Spacetime, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics, Vol. 60, Issue 2, 489-502, ISSN(Online)1221-8421, DOI: 10.2478/aicu-2013-0031.
- [2] **Ali, T.A. and Lopez, R.**, 2010. Timelike B2- Slant Helices in Minkowski Space  $R_1^4$ , Archivum Mathematicum, Vol. 46, No. 1, 39-46.
- [3] **Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J.**, 2004/05. Null Bertrand Curves in Minkowski 3-Space and Their Characterizations, Note Mat., 23, 7-13.
- [4] **Balgetir, H., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2004. Bertrand Curves for Nonnull Curves in 3-Dimensional Lorentzian Space, Hadronic J., 27, 229-236.
- [5] **Balgetir, H., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2001. On a Characterization of Null Helices, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 29, 71-78.
- [6] **Bas, S. and Körpınar, T.**, 2013. Inextensible Flows of Spacelike Curves on Spacelike Surfaces According to Darboux Frame  $M_1^3$ , Bol. Soc. Paran. Mat., 31(2), 9-17.
- [7] **Bas, S., Körpınar, T., Turhan, E.**, 2012. New Type Inextensible Flows of Timelike Curves İn Minkowski Spacetime  $M_1^4$ , AMO Advanced Modeling and Optimization, Vol.14, No. 2.
- [8] **Barros, M.**, 1997. General Helices and a Theorem of Lancret, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1503-1509.
- [9] **Bektaş, M. and Yüzbaşı, Z. K.**, 2013. A Note on Inextensible Flows of Partially Null and Pseudo Null Curves in  $R_1^4$ , arXiv: 1303.2956v1[*math.DG*].
- [10] **Bonnor, W.B.**, 1985. Curves with Null Normals in Minkowski Spacetime, A Random Walk İn Relativity and Cosmology, Wiley Easten Limited, 33-47.

- [11] **Camcı, C., İlarıslan, K., Kula, L., Hacısalihoğlu, H.H.**, 2009. Harmonic Curvatures and Generalized Helices, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 40, Issue 5, 2590-2596.
- [12] **Çöken, A.C. and Çitçi, Ü.**, 2005. On the Cartan Curvatures of a Null Curve in Minkowski Spacetime, *Geom. Dedicata*, 114, 71-78.
- [13] **Desbrun, M. and Cani-Gascuel, M.P.**, 1998. Active Implicit Surface for Animation, in: *Proc. Graphics Interface Canadian Inf. Process. Soc.*, 143-150.
- [14] **Ekmekçi, N. and İlarıslan, K.**, 2001. On Bertrand Curves and Their Characterization, *Differ. Geom. Dyn. Syst.*, 3, 17-24.
- [15] **Ekmekçi, N. and İlarıslan, K.**, 2000. On Characterization of General Helices in Lorentz Space, *Hadronic J.*, Vol. 23, No. 6, 677-682.
- [16] **Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P.**, 2001. Null Helices in Lorentzian Space Forms, *International Journal of Modern Physics A* 16, 4845-4863.
- [17] **Yalınız, A.F.**, 2004. Lorentz Uzayında Harmonik Eğrilikler ve Eğilim Çizgilerinin Karakterizasyonları, Ankara Üniv., Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.
- [18] **Göçmen, M. and Keleş, S.**, 2011. (1, 2) Null Bertrand Curves in Minkowski Spacetime, arXiv: 1101.5935v1[*math.DG*].
- [19] **Gürbüz, N.**, 2009. Inextensible Flows of Spacelike, Timelike and Null Curves, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 4, No. 32, 1599-1604.
- [20] **Hacısalihoğlu, H.H.**, 1983. Diferensiyel Geometri, Ankara.
- [21] **Hacısalihoğlu, H.H. and Öztürk, R.**, 2003. On the Characterization of Inclined Curves in  $E^n$ , *I. Tensor*, N.S., Vol. 64, 157-162.
- [22] **Honda, K. and Inoguchi, J.**, 2003. Deformation of Cartan Framed Null Curves Preserving the Torsion, *Differ. Geom. Dyn. Syst.*, 5, 31-37.
- [23] **Inoguchi, J. and Lee, S.**, 2008. Null Curves in Minkowski 3-Space, *International Electronic Journal of Geometry*, Vol. 1, No. 2, 40-83.
- [24] **İlarıslan, K.**, 2002. Some Special Curves on Non-Euclidean Manifolds, Doc-

toral Thesis, Ankara University, Graduate School of Natural and Applied Sciences.

[25] **Jun, D.H.**, 2008. Null Bertrand Curves in a Lorentz Manifold, J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math., 15, 209-215.

[26] **Kass, M. and Witkin, A.**, Terzopoulos, D., 1987. Snakes: Active Contour Models, in: Proc. 1st Int. Conference on Computer Vision, 259-268.

[27] **Kocayigit, H. and Onder, M.**, 2007. Timelike Curves of Constant Slope in Minkowski Spacetime  $R_1^4$ , BU/JST, 1, 311-318.

[28] **Körpınar, T. and Turhan, E.**, 2012. New Inextensible Flows of Timelike Curves on the Oriented Timelike Surfaces According to Darboux Frame in  $M_1^3$ , AMO| Advanced Modeling and Optimization, Vol.14, No. 2.

[29] **Körpınar, T. and Turhan, E.**, A New Version of Inextensible Flows of Spacelike Curves with Timelike B2 in Minkowski Spacetime  $R_1^4$ , Differ. Equ. Dyn. Syst., DOI 10.1007/s12591-012-0152-4.

[30] **Külahcı, M., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2007. Curves of AW(k)-Type in 3-Dimensional Null Cone, Physics Letters A. 371,275-277.

[31] **Külahcı, M., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2008. On Harmonic Curvatures of Null Curves of the AW(k)-Type in Lorentzian Space Z. Naturforsch. 63a, 248-252.

[32] **Kwon, D.Y., Park, F.C., Chi, D.P.**, 2005. Inextensible Flows of Curves and Developable Surfaces, Appl. Math. Lett. 18, 1156-1162.

[33] **Latifi, D. and Razavi, A.**, 2008. Inextensible Flows of Curves in Minkowskian Space, Adv. Studies Theor. Phys., 2(16), 761-768.

[34] **Lu, H.Q., Todhunter, J.S., Sze, T.W.**, 1993. Congruence Conditions for Nonplanar Developable Surfaces and Their Application to Surface Recognition, CVGIP, Image Underst. 56, 265-285.

[35] **Magden, A.**, 1993. On the Curves of Constant Slope, YYU Fen Bilimleri Dergisi, 4, 103-109.

[36] **Matsuda, H. and Yorozu, S.**, 2003. Notes on Bertrand Curves, Yoko-

hama Mathematical Journal, Vol. 50, 41-58.

[37] **Öğrenmiş, A.O. and Yeneroğlu, M.**, 2010. Inextensible Curves in the Galilean Space, International Journal of the Physical Sciences, 5(9), 1424-1427.

[38] **Özdamar, E. and Hacısalihoğlu, H.H.**, 1975. A Characterization of Inclined Curves in Euclidean n-Space, Commun Fac. Sci. Univ. Ankara Series A1, Tome 24, 15-23.

[39] **Petrovic- Torgasev, M., İlarıslan, K., Nesovic, E.**, 2005. On Partially Null and Pseudo Null Curves in the Semi Euclidean Space  $R_2^4$ , J. Geom, 84, 106-116.

[40] **Struik, D.J.**, 1988. Lectures on Classical Differential Geometry, Dover, New York, MR 89b:53002.

[41] **Unger, D.J.**, 1991. Developable Surfaces in Elastoplastic Fracture Mechanics, Int. J. Fract. 50, 33-38.

[42] **Walrave, J.**, 1995. Curves and Surfaces in Minkowski Space, Doctoral Thesis, K.U. Leuven, Fac. of Science, Leuven.

[43] **Wong, Y.-C. and Lai, H.-F.**, 1967. A Critical Examination of the Theory of Curves in Three Dimensional Differential Geometry, Tohoku Math.J., 19, 1-31

[44] **Yıldız, Ö.G., Ersoy, S., Masal, M.**, 2011. A Note on Inextensible Flows of Curves on Oriented Surface, arXiv: 1106.2012v1 [*math.DG*].

[45] **Yıldız, Ö.G., Tosun, M., Karakuş, S.O.**, 2012. A Note on Inextensible Flows of Curves in  $E^n$ , arXiv: 1207.1543v1 [*math.DG*].

[46] **Yıldız, Ö.G. and Tosun, M.**, 2013. A Note on Inextensible Flows of Curves in  $E_1^n$ , arXiv: 1302.6082v1 [*math.DG*].

## ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Aydın'da doğmuşum. İlk öğrenimimi Ankara'da tamamladım. Orta öğrenimimi Kayseri'de tamamladım. 2008 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2009 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne yatay geçiş yaptım. 2012 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesinden Fakülte birincisi olarak mezun oldum. Aynı yıl Öyp programı ile Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandım. Halen Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.