



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL EĞRİLERİ ÜZERİNE

Tunahan TURHAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2014
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Tunahan TURHAN tarafından hazırlanan "İntegral Eğrileri Üzerine" adlı tez çalışması 14/08/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

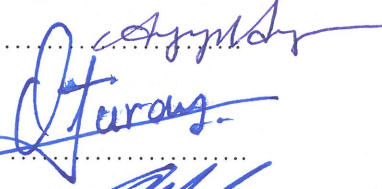
Başkan

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

.....

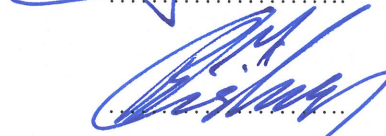

Danışman

Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ

.....


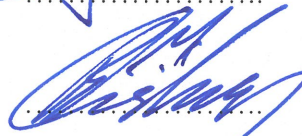
Üye

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

.....


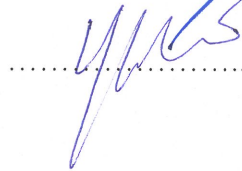
Üye

Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

.....


Üye

Doç. Dr. Yıldırım KESKİN

.....


Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşır GENÇ

FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Tunahan TURHAN

Tarih: 14.08.2014

ÖZET

DOKTORA TEZİ

İNTEGRAL EĞRİLERİ ÜZERİNE

Tunahan TURHAN

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ

2014, 77 Sayfa

Jüri

**Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Galip OTURANÇ
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Doç. Dr. Yıldırım KESKİN**

Altı bölümden oluşan bu tezde, Lorentz ve yarı-Öklid uzaylarında lineer vektör alanları ve integral eğrileri ele alınmıştır. Bu çalışmanın temel amacı, Lorentz ve yarı-Öklid uzaylarında lineer vektör alanını belirleyen anti-simetrik matrisleri bulmak ve buna bağlı olarak, bu lineer vektör alanının integral eğrilerinin bir sınıflamasını elde etmektir.

Vektör alanları ve integral eğrileri ile ilgili bir literatür özetinin verildiği birinci bölümün ardından ikinci bölümde temel kavram ve notasyonlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, düzlemde ve Öklid 3-uzayında vektör alanları ve integral eğrileri ele alınmış ve bazı örneklere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde E_1^3 Lorentz 3-uzayında S_1^2 pseudo-küresi üzerinde bir lineer vektör alanının nasıl elde edildiği verilmiştir. Ayrıca bu küre üzerindeki bir lineer vektör alanının integral eğrilerinin paralel düzlemlerde yatan Lorentz çemberleri olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında ve $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzaylarında lineer vektör alanlarının integral eğrileri için sınıflamalar verilmiştir.

Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen teoremler için Matlab programında komutları verilmiş ve bazı uygulamalar yapılmıştır.

Son bölümde, çalışmanın sonuçlarına ve bazı açık problemlere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Anti-simetrik matris, integral eğrisi, lineer vektör alanı, sabit katsayılı diferansiyel denklem, vektör alanları.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

ON INTEGRAL CURVES

Tunahan TURHAN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ

2014, 77 Pages

Jury

Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Assoc. Prof. Dr. Yıldırım KESKİN

In this thesis which consists of six chapters, we study linear vector fields and integral curves on Lorentzian and semi-Euclidean spaces. The main purpose of our work is to describe anti-symmetric matrices that determine linear vector fields on Lorentzian and semi-Euclidean spaces, and depending on that result, we provide a characterization of integral curves determined by these vector fields.

In the first chapter, we provide a short summary of existing results related to vector fields and integral curves. After wards, the basic notions and notations that will be in use throughout the thesis is stated in chapter two.

We consider vector fields and integral curves in the plane and Euclidean 3-space in chapter three, where we also present some examples.

In chapter four, we discuss how to obtain a linear vector field on the pseudo-sphere in Lorentzian 3-space. Apart from that we also prove that the integral curves related to the linear vector field on such a sphere are exactly the Lorentzian circles lying on the parallel plane. After that we state a classification of integral curves associated to the linear vector fields on the $(2n+1)$ -dimensional Lorentzian space and $(2n+1)$ -dimensional semi-Euclidean space.

The Matlab codes that are needed for the results of chapter four are presented in chapter five, where we also provide there some applications of these results.

In the final chapter, we present in detail a discussion of the results of this thesis, and state some open problems.

Keywords: Differential equations with constant coefficients, linear vector field, integral curves, skew symmetric matrix, vector field.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana yardımcı olan, çalışmanın her aşamasında beni yönlendiren, her konuda bilgisini ve deneyimini bana aktaran ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim saygıdeğer hocam Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ'a teşekkür eder, minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bu süreçte destek ve yardımlarını benden esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a ve çalışmada kullandığım bilgisayar programları için desteklerini benden esirgemeyen mesai arkadaşım Öğr. Gör. Yunus Emre GÖKTEPE'ye teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Doktora eğitimim süresince maddi olarak bana destek olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Son olarak bu çalışmayı hazırlarken benden manevi desteklerini esirgemeyen, eşim Nihan'a ve aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

Tunahan TURHAN
KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Öklid Uzayında Cebirsel Kavramlar.....	4
2.2. Lorentz Uzayında Cebirsel Kavramlar	9
3. VEKTÖR ALANLARI VE İNTEGRAL EĞRİLERİ	16
3.1. Vektör Alanları	16
3.1.1. E^2 de vektör alanları.....	17
3.1.2. E^3 de vektör alanları.....	17
3.2. İntegral Eğrileri.....	18
4. İNTEGRAL EĞRİLERİNİN SINIFLANDIRILMASI	21
4.1. $(2n+1)$ -Boyutlu Lorentz Uzayında İntegral Eğrileri	28
4.1.1. Beş Boyutlu Lorentz Uzayında Lineer Vektör Alanının Timelike ve Null İntegral Eğrileri.....	37
4.2. $(2n+1)$ -Boyutlu Yarı-Öklid Uzayında İntegral Eğrileri.....	42
5. MATLAB PROGRAMI YARDIMIYLA UYGULAMALAR	57
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	62
6.1. Sonuçlar	62
6.2. Öneriler	62
KAYNAKLAR	63
EKLER	66
ÖZGEÇMİŞ	67

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Pseudo-küre ve pseudo-hiperbolik uzay	13
Şekil 2.2 Null koni	14
Şekil 3.1 Vektör alanı örnekleri	16
Şekil 3.2 Rüzgârın hız ve yönünü gösteren vektörler	16
Şekil 3.3 E^2 de vektör alanları	17
Şekil 3.4 E^3 de vektör alanları	18
Şekil 3.5 X vektör alanı ve integral eğrisi	19
Şekil 3.6 X vektör alanı ve integral eğrisi	20
Şekil 3.7 F vektör alanı ve integral eğrileri	20
Şekil 4.1 E^3 de $(y, -x, 0)$ vektör alanı ve integral eğrisi	54
Şekil 4.2 E_1^3 de $(y, x, 0)$ vektör alanı ve integral eğrisi	55
Şekil 4.3 Yönlendirilmiş yollar ve karşılık gelen vektör alanları	56

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{R}	; Reel sayılar cismi
V	; Reel vektör uzay
X	; Vektör alanı
α	; İntegral eğrisi
v_p	; Teğet vektör
$T_p E^3$; $p \in E^3$ noktasındaki tanjant uzay
E^2	; 2 – boyutlu Öklid düzlemi
E^3	; 3 – boyutlu Öklid uzay
E_1^3	; 3 – boyutlu Lorentz uzay
E_1^{2n+1}	; $(2n + 1) –$ boyutlu Lorentz uzay
E_v^{2n+1}	; $(2n + 1) –$ boyutlu yarı – Öklid uzay
k_i	; i. eğrilik
H	; Harmonik eğrilik
A	; Anti – simetrik matris
C	; Kolon matris
S	; İşaret matrisi
A^t	; A matrisi transpozu
\langle, \rangle	; Skalar çarpım
$\ , \ $; Norm

1. GİRİŞ

Vektör alanı kavramı kabaca düzlemde ya da uzayda bir noktaya vektör atayan fonksiyon olarak düşünülebilir. Vektör alanları genellikle uzay boyunca hareket eden akışkanların hızını ve yönünü ya da noktadan noktaya değişen manyetik ve yerçekimi gibi kuvvetlerin yönünü ve şiddetini belirlemede ve modellemede kullanılır. İntegral eğrileri denklem sistemlerinin ya da adi diferansiyel denklemlerin özel çözümlerini temsil eden parametrik eğrilerdir. Kullanım alanlarına göre değişik şekillerde isimlendirilirler. Örneğin fizikte; elektrik veya manyetik alanların integral eğrileri alan çizgileri, akışkanların hız alanlarının integral eğrileri akım alanı olarak bilinir. Dinamik sistemlerde diferansiyel denklemlerin integral eğrileri yani sistem yöneticileri yörünge ya da orbit olarak isimlendirilir.

Fiziksel olayların daha iyi tasvir edildiği geometriler de vardır. Lorentz-Minkowski geometrinin başlangıcı 1905 yılına dayanır. Minkowski (1909), Maxwell'in Elektrodinamiği ile Einstein'ın özel görecelik kuramından yararlanarak, fiziksel olayların üç boyuta ilaveten dördüncü bir boyut yardımıyla tasvir edilebileceğini belirtmiştir. Diğer yandan Einstein (1915), genel görecelik teorisiyle Minkowski'nin bu iddiasını genelleştirerek uzay-zaman kavramı ile evreni 4 boyutlu olarak (3 uzay ve 1 zaman) tasvir etmiştir. Böylece Minkowski ve Einstein tarafından başlatılan ve evreni daha iyi anlamak için yapılan boyut sayısı ile oynama fikri, günümüzde de farklı teorilerde farklı boyut sayısı ile karşımıza çıkmaktadır. Lorentz (Minkowski) 3-uzayı özel bir metrik sayesinde geliştirilmiş olan bir reel vektör uzayıdır. Buradaki metrik $(- + +)$ (veya $(+ + -)$) işaretiyle sahip non-dejenere, simetrik ve bilineerdir. Lorentz (Minkowski) 4-uzayının, uzay-zaman olarak anılmasının en büyük nedeni klasik üç boyuttan oluşan ve her türlü vektörün boyunu bu üç boyutta tanımlayan uzay kavramına bir de zamanın eklenmesiyle alakalıdır. Uzay-zaman kavramının anlatmak istediği en önemli fiziksel olay, cisimler uzay içinde ilerlerken aynı zamanda zaman içinde de ilerler. Uzayda hiçbir şekilde hareket edilmese bile, zaman içinde hareket edilmek zorundadır. Bu yüzden zaman kullanılan bir değerdir. Her tepkileşmeye, her süreçte zamanda dâhil olur. O halde zaman, uzay yapısının öğelerinden biridir. Bu sebeple Öklid uzayından farklı olarak Lorentz uzayında göreceli fizik mevcuttur (Bal, 2005). Bundan dolayı Lorentz geometri hem diferansiyel geometriciler hem de fizikçiler açısından matematiksel ve fiziksel araştırmaların yapıldığı önemli bir alandır.

Öklid uzayında elde edilen sonuçlar, Lorentz uzayının karakteristik yapısından

dolayı bu uzayda farklılıklar gösterir. Örneğin, Öklid 3-uzayda bir lineer dönüşüm bir tek anti-simetrik matris yardımıyla verilirken Lorentz 3-uzayında üç farklı biçimde verilmiştir.

Vektör alanları ve integral eğrileri üzerine birçok araştırma yapılmıştır (Do Carmo, 1976; Boothby, 1968; Lisker, 2005; Z., Iliev, 2008; Miller, 2010). Bu çalışmadaki araştırma konusu ilk olarak Karger ve Novak'ın 1985 tarihli "Space Kinematics and Lie Groups" isimli kitapta ortaya konulmuştur. Burada lineer vektör alanların integral eğrilerinin bir sınıflaması, bir anti-simetrik matris ve bir kolon matris yardımıyla oluşturulan lineer vektör alanlarına karşılık gelen matrisin rankına göre verildi.

1989 yılında Acratalishian; Karger ve Novak'ın sonuçlarını $(2n+1)$ -boyutlu Öklid uzayına taşımak suretiyle lineer vektör alanlarının integral eğrilerinin bir sınıflamasını verdi. 2004 ve 2007 yıllarında Taleshian (aynı yazar), lineer vektör alanlarının integral eğrilerinin sınıflandırılmasıyla ilgili iki çalışma daha yaptı ama bu çalışmalar, 1989 yılındaki çalışmanın benzeridir.

2001 yılında Maeda ve Toshiaki, kompleks projektif uzayda Killing vektör alanlarının meydana getirdiği integral eğrilerinin geometrik özelliklerini araştırdılar. Yine bu ikili 2006 yılında flat olmayan kompleks uzay formlarında hiperyüzeylerin integral eğrilerini incelediler.

Yaylacı tarafından 2006 yılında yapılan yüksek lisans tez çalışmasında 3-boyutlu Lorentz uzayında lineer vektör alanlarının uygulamaları verilmiştir. Bu çalışmada $A(x)=0$ denklemini sağlayan x vektörünün timelike (zaman benzeri) olma durumu göz önüne alınmıştır.

2011 yılında Öztürk ve arkadaşları, spiral vektör alanlarının integral eğrileri üzerine bir çalışma yaptı. Bu çalışmada spiral vektör alanı kavramı tanıtıldı. Spiral vektör alanlarının integral eğrileri incelendi ve sınıflandırıldı. Bu eğriler yardımıyla n -boyutlu Öklid uzayında homotetik hareket ve ani hareket arasındaki bağıntılar verildi.

Bu çalışmada, önce Lorentz 3-uzayın karakteristik yapısına bağlı olarak bir lineer vektör alanının belirlemiş olduğu anti-simetrik matrisler bulunmuştur. Buna bağlı olarak S_1^2 pseudo-küresi üzerindeki integral eğrileri elde edilmiştir. Daha sonra bu durum $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz ve $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzaylarında çalışılmış ve anti-simetrik matrislerin genel formları verilmiştir. Bu genel formlar yardımıyla da lineer vektör alanının integral eğrilerinin sınıflamaları elde edilmiştir. Ayrıca

sınıflamada kullanılan Lorentz anlamında anti simetrik matrisleri ve sabit katsayılı adi diferansiyel denklem sistemleri veren Matlab programı komutları oluşturuldu ve bu programda yapılan bazı uygulamalara yer verildi (Arifođlu, 2012). Son olarak teorenin bazı açık problemleri verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak Öklid ve Lorentz uzaylarının cebirsel kavramlarına ve teoremlerine yer verilecektir.

2.1. Öklid Uzayında Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1.

E^3 Öklid 3-uzayı, $p = (p_1, p_2, p_3)$ sıralı reel sayı üçlülerinden oluşur ve

$$E^3 = \{p = (p_1, p_2, p_3) : p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.2.

E^3 Öklid 3-uzay ve $p = (p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_1, q_2, q_3) \in E^3$ olsun.

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : E^3 \times E^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\rightarrow \langle p, q \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon;

i) Simetrik: $\forall p, q \in E^3$ için $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$,

ii) Bilineer: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall p, q, r \in E^3$ için,

$$\langle ap + bq, r \rangle = a \langle p, r \rangle + b \langle q, r \rangle,$$

$$\langle p, aq + br \rangle = a \langle p, q \rangle + b \langle p, r \rangle,$$

iii) Pozitif tanımlı: $\forall p \in E^3$ için $\langle p, p \rangle \geq 0$

özelliklerine sahip ise \langle, \rangle fonksiyonuna bir iç çarpım denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.3.

E^3 Öklid 3-uzayının iki noktasından oluşan v_p vektörüne E^3 de teğet vektör denir. v_p nin vektör kısmı ve p de uygulandığı noktadır (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.4.

$p \in E^3$ olsun. p uygulama noktasına sahip tüm teğet vektörlerden oluşan $T_p E^3$ kümesine p noktasında E^3 ün teğet uzayı denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.5.

E^3 Öklid 3-uzayının her p noktasına bir $V(p)$ teğet vektörü bağlayan V fonksiyonuna E^3 üzerinde bir vektör alanı denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.6.

$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha &: I \rightarrow E^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan sürekli fonksiyona E^3 uzayında bir eğri denir.

I , \mathbb{R} reel sayılar kümesinin bir açık aralığı olmak üzere diferansiyellenebilir α fonksiyonuna E^3 üzerinde diferansiyellenebilir eğri denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.7.

α , E^3 üzerinde bir eğri olsun. I aralığındaki $\forall t$ sayısı için,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

teğet vektörüne, eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.8.

α , E^3 üzerinde bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.9.

α , $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, E^3 üzerinde bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına $t=a$ ve $t=b$ noktaları arasındaki α eğrisinin yay uzunluğu denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.10.

α , $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, E^3 üzerinde bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$

ise α eğrisine birim hızlı, s parametresine de yay uzunluğu parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.11.

$M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve her $\alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp(\psi)$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{V_1, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise, $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r -ayaklısı denir. Her bir V_i , $1 \leq i \leq r$, vektörüne Serret-Frenet vektörü denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.12.

E^n de bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisinin Frenet r -ayaklısı $\{V_1(t), \dots, V_r(t)\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} k_i & : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow k_i(t) = \langle V_i'(t), V_{i+1}(t) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan k_i fonksiyonuna, α eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve belli bir $t \in I$ için $k_i(t)$ reel sayısına da $\alpha(t)$ noktasında, α nın i -yinci eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.13.

E^{n+1} de bir parametrik eğri

$$\begin{aligned}\alpha &: I \rightarrow E^{n+1} \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_{n+1}(t))\end{aligned}$$

olsun. E^{n+1} üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere, her $t \in I$ için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

ise α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir.

Yani, α eğrisinin her noktasındaki hız vektörü X vektör alanının bu noktadaki değeri olan tanjant vektörü ile çakışır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.14.

$M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Her $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında M nin birinci ve ikinci eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise,

$$\begin{aligned}H_1 &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow H_1(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}, \quad k_2(s) \neq 0\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan H_1 fonksiyonuna, M eğrisinin 1. harmonik eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.1.1.

$M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, M bir eğilim çizgisidir ancak ve ancak, her $s \in I$ için $H_1(s) = \text{sabit}$ olmalıdır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.15.

n -boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir vektör alanı X olsun. Eğer,

$$A : V \rightarrow V$$

bir lineer dönüşüm ve her $v \in V$ için

$$X_v = A(v)$$

ise X vektör alanına lineerdir denir (Karger ve Novak, 1985).

Teorem 2.1.2.

A , E^3 de bir anti-simetrik matris yardımıyla verilen lineer dönüşüm olsun. Bu durumda A dönüşümünün matris formu

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde E^3 Öklid 3-uzayının bir ortonormal bazı vardır (Karger ve Novak, 1985).

Tanım 2.1.16.

D , E^2 Öklid düzleminde bir açık alt küme olsun. $x: D \rightarrow E^3$ birebir regüler dönüşümüne bir koordinat sistemi denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.17.

$x: D \subset E^2 \rightarrow E^3$ bir koordinat sistemi olsun. $x^{-1}: x(D) \rightarrow D$ ters fonksiyonu $x(D)$ nun her noktasında sürekli ise $x: D \subset E^2 \rightarrow E^3$ dönüşümüne has (proper) koordinat sistemi denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.18.

Eğer bir $M \subset E^3$ kümesinin her $p \in M$ noktası için bir $x: D \rightarrow E^3$ has yama fonksiyonu varsa ve D nin görüntüsü olan $x(D)$ kümesi p noktasının M deki N komşuluğunu kapsıyorsa M ye E^3 de bir yüzey denir (O'Neill, 1997).

2.2. Lorentz Uzayında Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.2.1.

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

$$i) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$ii) \begin{aligned} \langle au + bv, w \rangle &= a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle \\ \langle u, av + bw \rangle &= a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle \end{aligned}$$

özelliklerine sahip ise \langle, \rangle dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form \langle, \rangle olsun.

i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise \langle, \rangle simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,

ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise \langle, \rangle simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,

iii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise \langle, \rangle simetrik bilinear formuna pozitif yarı-tanımlı,

iv) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise \langle, \rangle simetrik bilinear formuna negatif yarı-tanımlı,

v) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ olmak zorunda ise \langle, \rangle simetrik bilinear formuna non-dejenerer, aksi halde dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3.

V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilinear form olsun.

$$\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna \langle, \rangle simetrik bilinear formun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4.

Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilinear forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma \langle, \rangle ise (V, \langle, \rangle) ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5.

V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6.

Her $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in E^n$ için

$$\langle u, v \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} u_i v_i + \sum_{i=\nu+1}^n u_i v_i$$

biçiminde tanımlanan skalar çarpımın belirttiği metrikle birlikte E^n manifolduna n -boyutlu ν indeksli yarı-Öklid uzay denir ve E_ν^n ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7.

(V, \langle, \rangle) bir Lorentz uzayı olsun. $W \subset V$ altuzayı için,

- i) $\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike (uzay benzeri) altuzay,
- ii) $\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ indeksi 1 olan non-dejenere ise W ya timelike (zaman benzeri) altuzay,
- iii) $\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ dejenere ise W ya lightlike (ışık benzeri) altuzay denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8.

E^3 , Öklid 3-uzay ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olsun. E^3 üzerinde

$$\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ile verilen skalar çarpım göz önüne alınarak elde edilen uzaya Minkowski 3-uzay veya Lorentz 3-uzayı denir ve E_1^3 ile gösterilir. Burada tanımlanan \langle, \rangle metriği Lorentz metriği (veya Minkowski metriği) olarak adlandırılır (Lopez, 2008).

Tanım 2.2.9.

E_1^3 , Lorentz 3-uzayı olsun. $u \in E_1^3$ olmak üzere,

- i) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörüne spacelike (uzay benzeri),
 - ii) $\langle u, u \rangle < 0$ ise u vektörüne timelike (zaman benzeri),
 - iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ve $u \neq 0$ ise u vektörüne lightlike (ışık benzeri)
- denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.10.

E_1^3 , Lorentz 3-uzay ve $u \in E_1^3$ olsun.

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$$

sayısına u vektörünün normu denir. Normu bir birim olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin kümesine de ortonormal sistem denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.11.

E_1^3 , Lorentz 3-uzay ve $u \in E_1^3$ olsun.

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & u \text{ spacelike (uzay benzeri) ise} \\ 0, & u \text{ lightlike (ışık benzeri) ise} \\ -1, & u \text{ timelike (zaman benzeri) ise} \end{cases}$$

sayısına u vektörünün işareti denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.12.

α , E_1^3 de bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere,

- i) α' hız vektörü spacelike ise α eğrisine spacelike (uzay benzeri),
- ii) α' hız vektörü timelike ise α eğrisine timelike (zaman benzeri),
- iii) α' hız vektörü null ise α eğrisine null (ışık benzeri) dir

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13.

$\alpha(s)$, s yay uzunluğu parametresine sahip E_v^{2n+1} yarı-Öklid uzayında bir null olmayan eğri olsun. α eğrisi boyunca, E_v^{2n+1} yarı-Öklid uzayının bir $\{u_1(s), \dots, u_n(s), \dots, u_{2n}(s), u_{2n+1}(s)\}$ yarı ortonormal çatı alanının değişimi

$$\begin{aligned} u_1'(s) &= \kappa_1(s)u_2(s) \\ u_i'(s) &= -\varepsilon_{i-1}\varepsilon_i\kappa_{i-1}(s)u_{i-1}(s) + \kappa_i(s)u_{i+1}(s), 2 \leq i \leq 2n, \\ u_{2n+1}'(s) &= -\varepsilon_{2n}\varepsilon_{2n+1}\kappa_{2n}(s)u_{2n}(s) \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu denklemler $\alpha(s)$ eğrisi için Serret-Frenet tipi formüller olarak isimlendirilir. Burada $\kappa_i(s)$, $1 \leq i \leq 2n$, $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik fonksiyonları ve ε_i , u_i , $1 \leq i \leq 2n$, vektörlerinin işaretidir. Ayrıca eğrilikler $\kappa_i(s) = \varepsilon_{i+1} \langle u_i'(s), u_{i+1}(s) \rangle$ formülü ile hesaplanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.14.

E_1^3 Lorentz 3-uzay ve $F = \{X, Y, Z = Y \times X\}$ bazı

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0, \langle X, Y \rangle = \langle Z, Z \rangle = 1$$

şartını sağlarsa F bazına bir null çatı denir. F çatılı bir α null eğrisi, verilen bir

$k_0 = k_0(s)$ pozitif fonksiyonu için $X = X(s) = \frac{\alpha'}{k_0}$ olmak üzere aşağıdaki Frenet

denklemlerini sağlar:

$$\begin{aligned} X' &= k_1X + k_2Z \\ Y' &= -k_1Y + k_3Z \\ Z' &= -k_3X - k_2Y. \end{aligned}$$

Buradaki $k_i, 1 \leq i \leq 3$, fonksiyonuna α null eğrisinin i . eğriliği denir. Eğer burada $k_2 = 1$ ve $k_1 = 0$ alınırsa F çatısına da Cartan çatısı denir (Lopez, 2008; Graves, 1979).

Tanım 2.2.15.

E_1^3 Lorentz 3-uzay ve

$$\begin{aligned} q &: E_1^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow q(v) = \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

şeklinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer P , E_1^3 ün konum vektörü ise $q = \langle P, P \rangle$ olmak üzere $r > 0$ ve $\varepsilon = \pm 1$ için $Q = q^{-1}(\varepsilon r^2)$; şeklindeki yüzeylere E_1^3 de hiperkuadrikler denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.16.

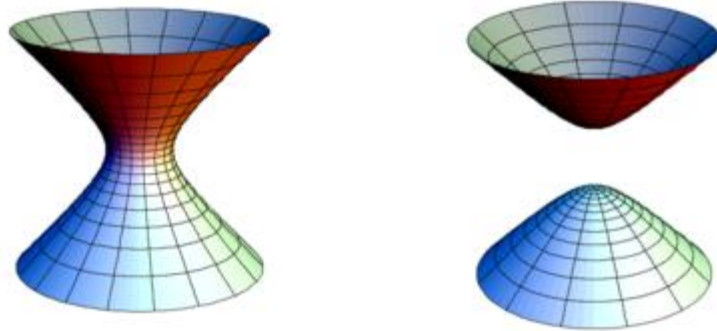
E_1^3 Lorentz 3-uzay olsun. O zaman,

$$S_1^2 = q^{-1}(r^2) = \{p \in E_1^3 : -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = r^2\}$$

hiperkuadriğine orjin merkezli $r > 0$ yarıçaplı pseudo-küre,

$$H_0^2 = q^{-1}(-r^2) = \{p \in E_1^3 : -p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -r^2\}$$

hiperkuadriğine ise orjin merkezli $r > 0$ yarıçaplı pseudo-hiperbolik uzay denir (O'Neill, 1983).



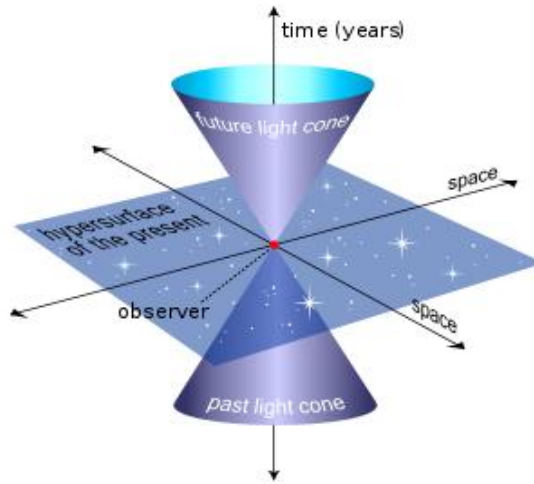
Şekil 2.1 Pseudo-küre ve pseudo-hiperbolik uzay (Anonim, 2013)

Tanım 2.2.17.

E_1^3 Lorentz 3-uzay olsun. O zaman,

$$\Lambda = \{p \in E_1^3 : \langle p, p \rangle = 0\}$$

yüzeyine Lorentz 3-uzayda null koni denir (Duggal ve Bejancu, 1996).



Şekil 2.2 Null koni (Anonim, 2013)

Tanım 2.2.18.

E_1^3 Lorentz 3-uzay ve M bir non-dejenere yüzey olsun.

- i) M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M ye bir timelike (zaman benzeri) yüzey,
- ii) M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M ye bir spacelike (uzay benzeri) yüzey denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.19.

$0 \leq \nu \leq n$ için köşegen bileşenleri

$$S_1 = \dots = S_\nu = -1 \text{ ve } S_{\nu+1} = \dots = S_n = +1$$

olan $(\delta_{ij} S_j)$ köşegen matrisine işaret matrisi denir. S matrisi $S^{-1} = S = S^t$ özeliğine sahiptir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.20.

E_1^3 Lorentz 3-uzayında A matrisinin transpozunu A^t olmak üzere

$$A^{-1} = SA^tS$$

eşitliğini sağlayan A matrisine yarı-ortogonal matris denir (O'Neill, 1983).

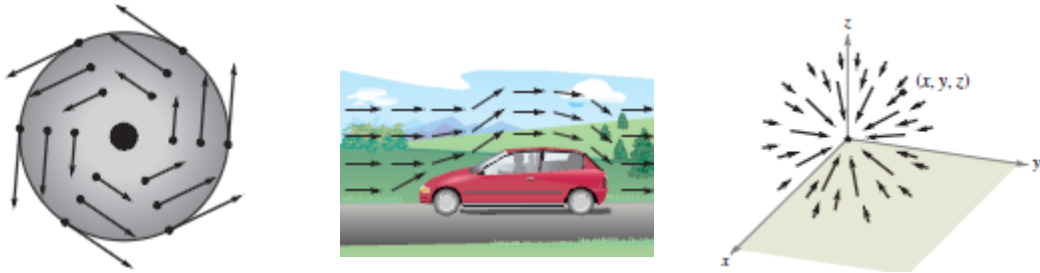
Tanım 2.2.21.

$A^t = -SAS$ eşitliğini sağlayan A matrisine Lorentz anlamında anti-simetrik matris denir (O'Neill, 1983).

3. VEKTÖR ALANLARI VE İNTEGRAL EĞRİLERİ

3.1. Vektör Alanları

Geometrik olarak vektör alanı Öklid uzayın her p noktasına bir $V(p)$ teğet vektörü bağlayan V fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Vektör alanlarına, özellikle fiziğin hız alanları, yerçekimi alanları ve elektrik kuvvet alanları uygulamalarında yaygın olarak karşılaşılır (Galbis, 2012). Aşağıdaki şekillerde gündelik hayattan bazı vektör alanı örnekleri verilmiştir (Anonymous, 2013).



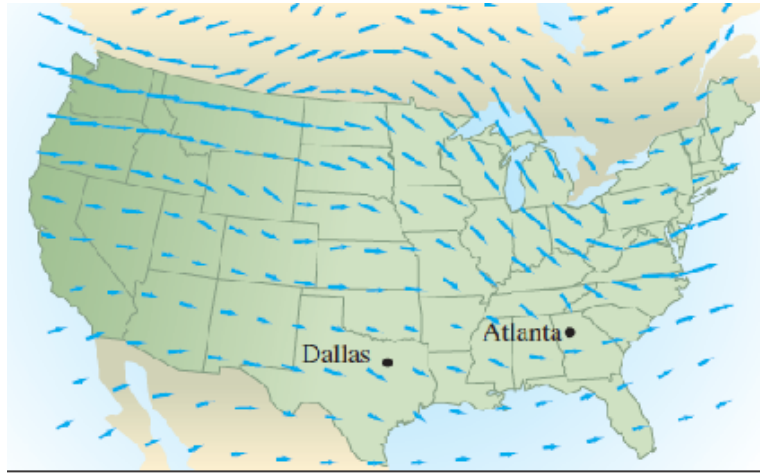
Dönen teker etrafındaki hız alanı

Bir araba etrafındaki hava akımı

Yerçekimi kuvvet alanı

Şekil 3.1 Vektör alanı örnekleri

Fiziksel uygulamalarının yanında vektör alanları diğer birçok alanda kullanılmaktadır. Örneğin aşağıdaki harita üzerindeki oklar Amerika Birleşik Devletleri üzerinde 19 Mart 2004 tarihindeki rüzgâr hızını ve yönünü göstermektedir (Stewart, 2007).



Şekil 3.2 Rüzgârın hız ve yönünü gösteren vektörler

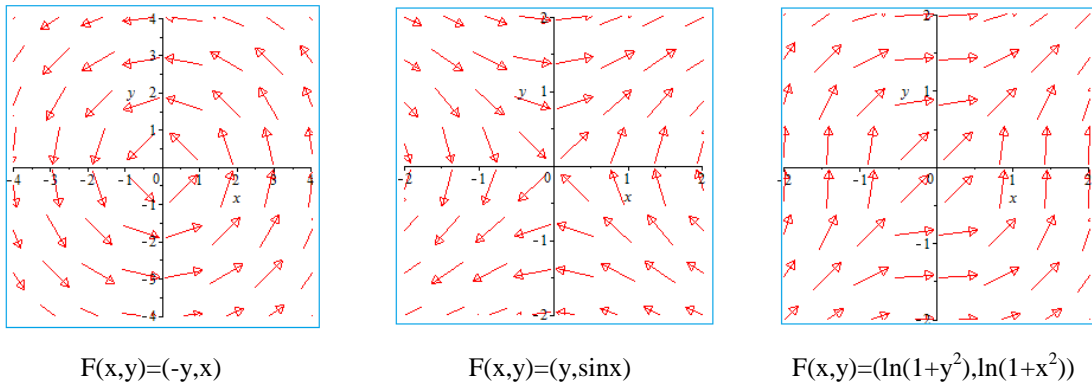
Bu tarz haritalar yardımıyla rüzgârın yönü ve şiddeti tahmin edilebilmektedir. Bu sayede özellikle uçaklar için uçuş rotası ve yüksekliği belirlenmektedir. Yine vektör alanları okyanus akıntılarını veya bir engelden geçen hava akımını modellemede de kullanılabilir.

3.1.1. E^2 de vektör alanları

D , E^2 nin bir alt kümesi olsun. E^2 üzerinde bir vektör alanı, D deki her (x,y) noktasına iki boyutlu bir $F(x,y)$ vektörü karşı getiren bir F fonksiyonudur. $F(x,y)$ vektörü iki boyutlu olduğundan, P ve Q bileşen fonksiyonları cinsinden

$$F(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$$

biçiminde yazılabilir. E^2 düzleminde vektör alanı örnekleri ve Maple programı yardımıyla grafikleri aşağıda verilmiştir (Stewart, 2007).



Şekil 3.3 E^2 de vektör alanları

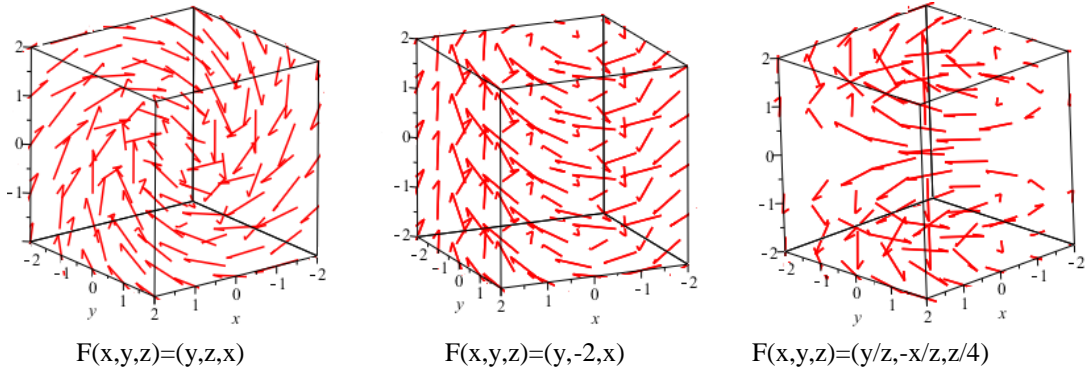
3.1.2. E^3 de vektör alanları

D , E^3 ün bir alt kümesi olsun. E^3 üzerinde bir vektör alanı, D deki her (x,y,z) noktasına üç boyutlu bir $F(x,y,z)$ vektörü karşı getiren bir F fonksiyonudur. $F(x,y,z)$ vektörü üç boyutlu olduğundan, P , Q ve R bileşen fonksiyonları cinsinden

$$F(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$$

biçiminde yazılabilir. E^3 uzayında vektör alanı örnekleri ve Maple programı yardımıyla

grafikleri aşağıda verilmiştir (Stewart, 2007).



Şekil 3.4 E^3 de vektör alanları

3.2. İntegral Eğrileri

X , M manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. $\alpha : (a,b) \rightarrow M$ eğrisinin her teğet vektörü X vektör alanına bağlı ise α ya X vektör alanının bir integral eğrisi denir. Yani M manifoldu üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere, her $t \in I$ için $\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$ ise α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir. Genellikle integral eğrilerinin yeniden parametrizasyonu ile elde edilen eğriler de X vektör alanının integral eğrisidir (Campbell, 1907). Özellikle, eğer $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisi X vektör alanının integral eğrisi ise;

- $I_a = \{t \mid t+a \in I\}$ ve $\alpha_a(t) = \alpha(t+a)$ olmak üzere $\alpha_a : I_a \rightarrow M$ eğrisi X vektör alanının integral eğrisidir.
- $I^a = \{t \mid at \in I\}$ ve $\alpha^a(t) = \alpha(at)$ olmak üzere $\alpha^a : I^a \rightarrow M$ eğrisi X vektör alanından elde edilen $Xa = aX$ vektör alanının integral eğrisidir.

Örnek 3.2.1. E^2 de $X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ şeklinde tanımlanan X vektör alanı göz önüne alınsın. Eğer $\alpha(t) = \alpha(x(t), y(t))$ eğrisi X vektör alanının integral eğrisi ise o zaman integral eğrisi tanımından

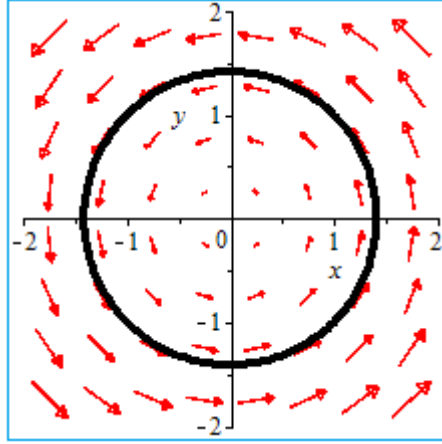
$$\frac{dx(t)}{dt} = -y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin

çözümünden

$$\alpha(t) = a \cos t - b \sin t, \quad y(t) = a \sin t + b \cos t$$

bulunur. Bu çözüm düzlemde merkezi orijin de bulunan çemberleri gösterir. Bu örnekte verilen vektör alanı ve integral eğrisi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.5 X vektör alanı ve integral eğrisi

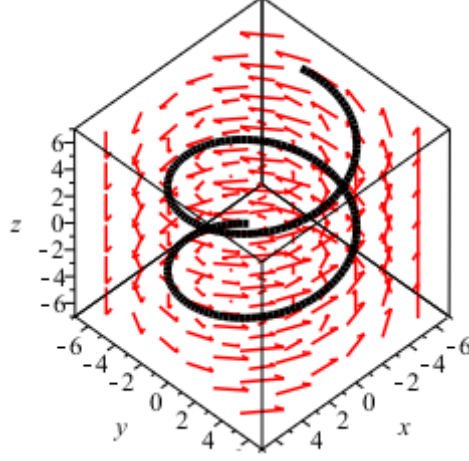
Örnek 3.2.2. E^3 de $X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}$ şeklinde tanımlanan X vektör alanı göz önüne alınsın. Eğer $\alpha(t) = \alpha(x(t), y(t), z(t))$ eğrisi X vektör alanının integral eğrisi ise integral eğrisi tanımından

$$\frac{dx(t)}{dt} = -y(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = x(t), \quad \frac{dz(t)}{dt} = 1$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

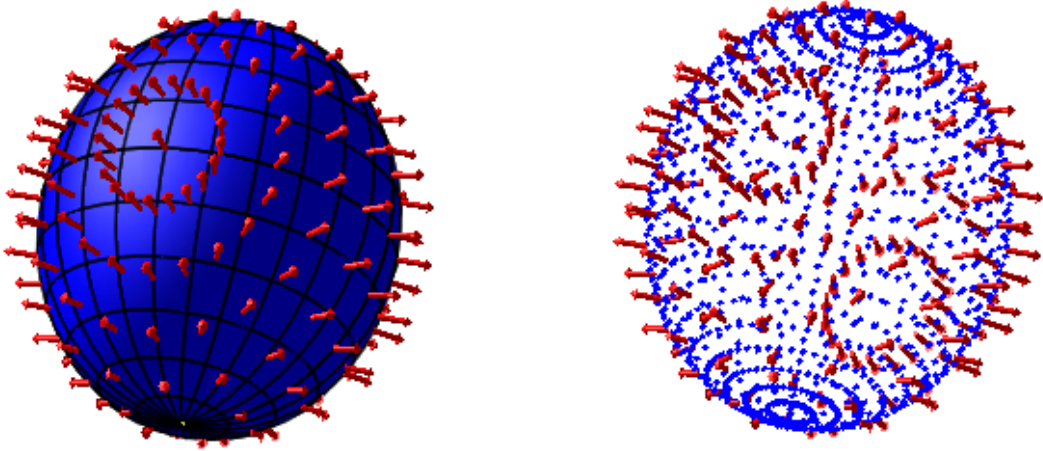
$$\alpha(t) = (a \cos t - b \sin t, \quad a \sin t + b \cos t, \quad t + c)$$

eğrisi elde edilir. Bu eğri Öklid 3-uzayında helis eğrisinin parametrik denklemdir. Bu örnekte verilen vektör alanı ve integral eğrisi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.6 X vektör alanı ve integral eğrisi

Örnek 3.2.3. E^3 Öklid 3-uzayında S^2 , birim küresi üzerinde $F(x, y, z) = (z, y, x)$ biçiminde tanımlanan vektör alanı göz önüne alınsın. F vektör alanının integral eğrileri küre üzerindeki çemberlerdir. Gerçekten Maple programı yardımıyla F vektör alanı ve integral eğrileri şekildeki gibi elde edilmiştir.



Şekil 3.7 F vektör alanı ve integral eğrileri

4. İNTEGRAL EĞRİLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde, Öklid 3-uzayında Karger ve Novak tarafından verilen lineer vektör alanları ve integral eğrileri ile ilgili bazı teoremlerin karşılıkları 3-boyutlu Lorentz uzayında incelenmiştir. Aynı yazarlar tarafından Öklid 3-uzayında yapılan lineer vektör alanlarının integral eğrilerinin sınıflaması, bu uzaydan daha genel uzaylar olan $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayına ve $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayına genelleştirilmiştir. Burada elde edilen sonuçlar orijinaldir.

Teorem 4.1. E_1^3 , S_1^2 birim pseudo-küresine sahip Lorentz 3-uzayı olsun. E_1^3 de bir $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal bazı verilsin. Bir $X_v = SAS(v)$ lineer vektör alanı S_1^2 birim pseudo-küresi üzerinde teğet vektörlerin bir vektör alanını belirler ancak ve ancak $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal bazına göre A dönüşümünün temsilcisi Lorentz anlamında bir anti simetrik matris ile verilir. Burada S , E_1^3 de işaret matrisi ve $\langle u_1, u_1 \rangle = -1, \langle u_2, u_2 \rangle = \langle u_3, u_3 \rangle = 1$ dir.

Teoremin ispatına geçmeden önce ispatta kullanılacak bazı kavramlar için ön hazırlık yapılacaktır. $A: E_1^3 \rightarrow E_1^3$ bir lineer dönüşüm ve $u, v \in E_1^3$ olsun. O zaman

$$\langle A^t u, v \rangle = \langle u, SASv \rangle$$

dir. Gerçekten, $y, z \in E_1^3$ olmak üzere $\langle y, z \rangle$ çarpımı

$$\langle y, z \rangle = y^t Sz$$

biçiminde matris çarpımıdır ve matris çarpımı birleşimlidir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} \langle A^t u, v \rangle &= u^t ASv \\ &= u^t SSASv \\ &= u^t S(SAS)v \\ &= \langle u, SAS(v) \rangle \end{aligned}$$

dir.

Buna göre,

$$\begin{aligned} X &: S_1^2 \rightarrow E_1^3 \\ v &\rightarrow X_v = SAS(v) \end{aligned}$$

bir teğet vektör alanıdır ancak ve ancak $\forall v \in S_1^2$ için $\langle v, SAS(v) \rangle = 0$ dır. $\langle v, SAS(v) \rangle = 0$ olması $SAS + A^t = 0$ olması anlamına gelir. Yani **A** dönüşümünün temsilcisi olan **A** matrisi anti simetriktir. Gerçekten,

(\Rightarrow) $\forall v \in S_1^2$ için $\langle v, SAS(v) \rangle = 0$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \langle v, (SAS + A^t)(w) \rangle &= \langle v, SAS(w) \rangle + \langle v, A^t(w) \rangle \\ &= \langle v, SAS(w) \rangle + \langle w, SAS(v) \rangle \\ &= \langle v, SAS(w) \rangle + \langle v, SAS(v) \rangle + \langle w, SAS(v) \rangle + \langle w, SAS(w) \rangle \\ &= \langle v + w, SAS(v + w) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $SAS + A^t = 0$ elde edilir. Böylece $A^t = -SAS$ olur.

(\Leftarrow) Tersine, $SAS + A^t = 0$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \langle v, SAS(v) \rangle &= \frac{1}{2}(\langle v, SAS(v) \rangle + \langle v, SAS(v) \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle v, SAS(v) \rangle + \langle v, A^t(v) \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle v, (SAS + A^t)(v) \rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi teoremin ispatı verilebilir.

İspat: E_1^3 de bir $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal bazı verilsin. $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal bazına göre **A** dönüşümünün temsilcisi olan matrisin anti simetrik olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} A &: E_1^3 \rightarrow E_1^3 \\ v &\rightarrow A(v) = SAS(v) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm göz önüne alınsın. Buna göre,

$$u_1 \rightarrow A(u_1) = SAS(u_1) = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3,$$

$$u_2 \rightarrow A(u_2) = SAS(u_2) = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3,$$

$$u_3 \rightarrow A(u_3) = SAS(u_3) = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3,$$

yazılabileceğinden

$$\langle SAS(u_1), u_1 \rangle = -a_{11}, \quad \langle SAS(u_2), u_1 \rangle = -a_{21}, \quad \langle SAS(u_3), u_1 \rangle = a_{31},$$

$$\langle SAS(u_1), u_2 \rangle = a_{12}, \quad \langle SAS(u_2), u_2 \rangle = a_{22}, \quad \langle SAS(u_3), u_2 \rangle = a_{32},$$

$$\langle SAS(u_1), u_3 \rangle = a_{13}, \quad \langle SAS(u_2), u_3 \rangle = a_{23}, \quad \langle SAS(u_3), u_3 \rangle = a_{33},$$

elde edilir. Burada $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ dır. Diğer matris elemanları için, $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ eşitliğinin her iki yanının türevi alınır ve $X_{u_1} = u_1' = SAS(u_1)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_1', u_2 \rangle + \langle u_1, u_2' \rangle \\ &= \langle X_{u_1}, u_2 \rangle + \langle u_1, X_{u_2} \rangle \\ &= \langle SAS(u_1), u_2 \rangle + \langle u_1, SAS(u_2) \rangle \\ &= a_{12} - a_{21} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $a_{12} = a_{21}$ elde edilir. Benzer şekilde $\langle u_1, u_3 \rangle = 0$ eşitliğinin her iki yanının türevi alınır ve $X_{u_1} = u_1' = SAS(u_1)$ ile $X_{u_3} = u_3' = SAS(u_3)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_1', u_3 \rangle + \langle u_1, u_3' \rangle \\ &= \langle X_{u_1}, u_3 \rangle + \langle u_1, X_{u_3} \rangle \\ &= \langle SAS(u_1), u_3 \rangle + \langle u_1, SAS(u_3) \rangle \\ &= a_{13} - a_{31} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $a_{13} = a_{31}$ bulunur. Son olarak $\langle u_2, u_3 \rangle = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_2', u_3 \rangle + \langle u_2, u_3' \rangle \\ &= \langle X_{u_2}, u_3 \rangle + \langle u_2, X_{u_3} \rangle \\ &= \langle SAS(u_2), u_3 \rangle + \langle u_2, SAS(u_3) \rangle \\ &= a_{23} + a_{32} \end{aligned}$$

olup $a_{23} = -a_{32}$ elde edilir. Böylece \mathbf{A} dönüşümünün temsilcisi olan matris

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Bu matris Lorentz 3-uzayında anti simetrik bir matristir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} -SAS &= - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \\ &= A^t \end{aligned}$$

olduğu görülür. Tersine, $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal bazına göre \mathbf{A} dönüşümünün temsilcisi olan matris Lorentz anlamında anti simetrik olarak verilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned} X : S_1^2 &\rightarrow E_1^3 \\ v &\rightarrow X_v = SAS(v) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün S_1^2 pseudo-küresi üzerinde teğet vektör alanı olduğunu göstermek için $\langle v, SAS(v) \rangle = 0$ olduğu gösterilmelidir. O halde $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal bazına göre \mathbf{A} dönüşümünün matrisi, $SAS + A^t = 0$ olacak şekilde verilsin. Böylece

$$\begin{aligned} \langle v, SAS(v) \rangle &= \frac{1}{2} (\langle v, SAS(v) \rangle + \langle v, SAS(v) \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle v, SAS(v) \rangle + \langle v, A^t(v) \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle v, (SAS + A^t)(v) \rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. \mathbf{A} , bir ortonormal baza göre bir anti simetrik matris ile verilen E_1^3 de bir lineer dönüşüm olsun. \mathbf{A} dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

formlarından biri olacak şekilde E_1^3 de bir ortonormal baz bulmak mümkündür.

İspat: \mathbf{A} dönüşümüne karşılık gelen matris A ile gösterilsin. A Lorentz anlamında anti simetrik matris olduğundan, $\det A = 0$ dır. Bu yüzden $A(x) = 0$ denkleminin sıfırdan farklı çözümü olmak zorundadır. x vektörü spacelike (uzay benzeri) ve $x = u_3 = (0,0,1)$ olarak alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{bmatrix} a_{13} \\ -a_{23} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde $a_{13} = 0$ ve $a_{23} = 0$ bulunur. $a_{12} = \lambda$ denilirse \mathbf{A} dönüşümüne karşılık gelen anti simetrik matris

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

şeklinde bulunur. x vektörü timelike (zaman benzeri) ve $x = u_3 = (1,0,0)$ olarak alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $a_{12} = 0$ ve $a_{13} = 0$ bulunur. $a_{23} = \lambda$ denilirse \mathbf{A} dönüşümüne karşılık gelen anti simetrik matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

şeklinde bulunur. Son olarak x vektörü lightlike (ışık benzeri) ve $x = u_3 = (1, 1, 0)$ olarak alınır

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $a_{12} = 0$ ve $a_{13} = -a_{23}$ bulunur. $a_{13} = \lambda$ denilirse \mathbf{A} dönüşümüne karşılık gelen anti simetrik matris

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.1. E_1^{2n+1} , $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayı ve bu uzayda bir \mathbf{A} lineer dönüşümüne karşılık gelen anti simetrik matrisi A ile gösterilsin. O halde $A(x) = 0$ denkleminin sıfırdan farklı çözümleri vardır. Buradaki x vektörünün kozul karakterine göre A matrisi normal formda;

Durum 1: Eğer x spacelike (uzay benzeri) vektör ise,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Durum 2: Eğer x timelike (zaman benzeri) vektör ise,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{bmatrix},$$

Durum 3: Eğer x lightlike (ışık benzeri) vektör ise,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{2n-2} & \lambda_{2n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_{2n-2} & \lambda_{2n-1} \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & -\lambda_{2n} & -\lambda_{2n+1} & \cdots & -\lambda_{4n-4} & -\lambda_{4n-3} \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_{2n} & 0 & -\lambda_{4n-2} & \cdots & -\lambda_{6n-7} & -\lambda_{6n-6} \\ \lambda_3 & -\lambda_3 & \lambda_{2n+1} & \lambda_{4n-2} & 0 & \cdots & -\lambda_{8n-11} & -\lambda_{8n-10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{2n-2} & -\lambda_{2n-2} & \lambda_{4n-4} & \lambda_{6n-7} & \lambda_{8n-11} & \cdots & 0 & -\lambda_{n(2n-1)} \\ \lambda_{2n-1} & -\lambda_{2n-1} & \lambda_{4n-3} & \lambda_{6n-6} & \lambda_{8n-10} & \cdots & \lambda_{n(2n-1)} & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\lambda_i \in \mathbb{R} / \{0\}$, $1 \leq i \leq n(2n-1)$, dır.

Teorem 4.3. S_1^2 pseudo-küresi üzerindeki bir lineer vektör alanının integral eğrileri paralel düzlemlerde yatan Lorentz çemberlerdir.

İspat: Teorem 4.1 ve 4.2 den $\forall P = (x, y, z) \in S_1^2$ için X lineer vektör alanının değeri matris formunda

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & a \\ \lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

ya da

$$X(P) = (\lambda y + a, \lambda x + b, 0)$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1^2$ eğrisi X vektör alanının integral eğrisi ise

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda y + a \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + b \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi sağlanır. Bu diferansiyel denklem sistemi $\lambda = 1$ durumu için çözümlerse α integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A \sinh t + B \cosh t - b, A \cosh t + B \sinh t, d)$$

biçiminde elde edilir. Bu $\alpha(t)$ eğrisi S_1^2 pseudo-küresi üzerindeki Lorentz çemberidir.

4.1. (2n+1)-Boyutlu Lorentz Uzayında İntegral Eğrileri

E_1^{2n+1} , (2n+1)-boyutlu Lorentz uzayı ve bu uzay üzerinde bir vektör alanı da X olsun. E_1^{2n+1} uzayında bir A lineer dönüşümünün bir yarı-ortonormal ϕ bazına karşılık gelen anti simetrik matrisi A ile gösterilsin. O halde, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. X , $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında $\{0; u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}\}$ yarı ortonormal çatisına göre

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi ile belirlenen lineer vektör alanı olsun. Burada A matrisi anti simetrik matris ve C matrisi de

$$C = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \\ a_{2n} \\ a_{2n+1} \end{bmatrix}$$

formunda $(2n+1) \times 1$ kolon matrisidir. O halde X lineer vektör alanının integral eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. Eğer $\text{rank}([AC])=2n+1$ ise X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- ii. Eğer $\text{rank}([AC])=2k$, $1 \leq k \leq n$ ise X vektör alanının integral eğrileri paralel düzlemlerde yatan Lorentz çemberleri,
- iii. Eğer $\text{rank}([AC])=2k+1$, $1 \leq k \leq n$ ise X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- iv. Eğer $\text{rank}([AC])=1$ ise X vektör alanının integral eğrileri paralel doğrulardır.

İspat: i) Öncelikle A anti-simetrik matrisi Durum 1 formunda alınsın. O halde X , $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında bir lineer vektör alanı olsun. X lineer vektör alanının $\forall P = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \in E_1^{2n+1}$ noktasındaki değeri

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde matris formunda ya da

$$X(P) = (\lambda_1 x_2 + a_1, \lambda_1 x_1 + a_2, \lambda_2 x_4 + a_3, -\lambda_2 x_3 + a_4, \dots, \lambda_n x_{2n} + a_{2n-1}, -\lambda_n x_{2n-1} + a_{2n}, a_{2n+1})$$

biçiminde açık bir şekilde yazılabilir. Burada işlem kolaylığı açısından $\lambda_i = 1, 1 \leq i \leq n$, seçilsin. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^{2n+1}$ eğrisi, X lineer vektör alanının integral eğrisi ise

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = X(\alpha(t)), \forall t \in I$$

diferansiyel denklemi sağlanır. O halde, X lineer vektör alanının integral eğrileri $\alpha(t) = P = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})$ başlangıç koşulu ile

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = X(P)$$

diferansiyel denkleminin çözümüdür. Bu diferansiyel denklem açık formda yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= x_4 + a_3, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= -x_3 + a_4, \\ & & \vdots & \\ \frac{d\alpha_{2n-1}(t)}{dt} &= x_{2n} + a_{2n-1}, & \frac{d\alpha_{2n}(t)}{dt} &= -x_{2n-1} + a_{2n}, \\ \frac{d\alpha_{2n+1}(t)}{dt} &= a_{2n+1} = c, \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Sistemin son denkleminde

$$\alpha_{2n+1} = ct + d$$

bulunur. Diğer $2n$ -tane denklem ikililer halinde göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, \\ \alpha_2 &= A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, \\ \alpha_3 &= A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, \\ \alpha_4 &= A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \\ &\vdots \\ \alpha_{2n-1} &= A_n \sin t - B_n \cos t + a_{2n}, \\ \alpha_{2n} &= A_n \cos t + B_n \sin t - a_{2n-1} \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. O halde X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, \\ A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \dots, A_n \sin t - B_n \cos t + a_{2n}, A_n \cos t + B_n \sin t - a_{2n-1}, ct + d)$$

biçiminde olur. Böylece eğrinin şeklini karakterize eden eğrilik fonksiyonları bulunabilir. O halde, eğrinin türevleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\ &\quad - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, - A_n \sin t + B_n \cos t, c), \\ \alpha''(t) &= (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \\ &\quad - A_2 \cos t - B_2 \sin t, \dots, -A_n \sin t + B_n \cos t, - A_n \cos t - B_n \sin t, 0), \\ \alpha'''(t) &= (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, - A_2 \cos t - B_2 \sin t, \\ &\quad A_2 \sin t - B_2 \cos t, \dots, -A_n \cos t - B_n \sin t, A_n \sin t - B_n \cos t, 0), \\ \alpha^{(4)}(t) &= (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_2 \sin t - B_2 \cos t, \\ &\quad A_2 \cos t + B_2 \sin t, \dots, A_n \sin t - B_n \cos t, A_n \cos t + B_n \sin t, 0), \\ \alpha^{(5)}(t) &= (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\ &\quad - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, - A_n \sin t + B_n \cos t, 0), \\ \alpha^{(6)}(t) &= (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \\ &\quad - A_2 \cos t - B_2 \sin t, \dots, -A_n \sin t + B_n \cos t, - A_n \cos t - B_n \sin t, 0), \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

olur. Burada dikkat edilirse $\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{(4)}$ ve $\alpha^{(5)}$ vektörlerinin lineer bağımsız vektörler olduğu görülür. Daha yüksek mertebeden türevler lineer bağımlı sistem oluşturur. Örneğin, $\alpha^{(6)}(t) = \alpha''(t)$ dır. Bu yüzden $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde Frenet beşli yapısı oluşturulabilir. Dolayısıyla k_1, k_2, k_3 ve k_4 eğriliklerinden söz edilebilir. $\alpha(t)$ eğrisinin $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş helis olduğunu söyleyebilmek için

$$\frac{k_1}{k_2} = sbt. \text{ ve } \frac{k_3}{k_4} = sbt.$$

eşitliklerinin doğruluğu gösterilmelidir. Bu amaçla ilk önce eğrinin hızı hesaplanırsa;

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = B_1^2 - A_1^2 + B_2^2 + A_2^2 + \dots + B_n^2 + A_n^2 + c^2$$

elde edilir. Burada $\alpha(t)$ eğrisinin timelike (zaman benzeri) eğri olduğu kabul edilsin.

Yani, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -1$ olsun. O halde Gramm-Schmidt ortogonalleştirme metodu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
u_1 &= (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\
&\quad -A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, -A_n \sin t + B_n \cos t, c), \\
u_2 &= (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, -A_2 \sin t + B_2 \cos t, \\
&\quad -A_2 \cos t - B_2 \sin t, \dots, -A_n \sin t + B_n \cos t, -A_n \cos t - B_n \sin t, 0), \\
u_3 &= (\gamma - 1) \left(\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t), \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t), \right. \\
&\quad A_2 \cos t + B_2 \sin t, -A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, \\
&\quad \left. -A_n \sin t + B_n \cos t, \frac{\gamma}{\gamma - 1} c \right), \\
u_4 &= \left(\frac{\gamma - \theta}{\gamma} \right) \left(\left(\frac{\gamma + \theta}{\gamma - \theta} \right) (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t), A_2 \sin t \right. \\
&\quad \left. -B_2 \cos t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, \dots, A_n \sin t - B_n \cos t, A_n \cos t + B_n \sin t, 0 \right), \\
u_5 &= (\mu_1 (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t), \mu_2 (A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\
&\quad -A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, -A_n \sin t + B_n \cos t), \\
&\quad \left(\frac{\gamma^2 (1 - \theta)}{(\theta - \gamma^2)(\gamma - 1)} - \theta \right) c)
\end{aligned}$$

pseudo-ortogonal sistemi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\gamma &= -A_1^2 + B_1^2 - A_2^2 - B_2^2 - \dots - A_n^2 - B_n^2, \\
\theta &= A_1^2 - B_1^2 - A_2^2 - B_2^2 - \dots - A_n^2 - B_n^2
\end{aligned}$$

ve

$$\mu_1 = \frac{(\gamma + \theta)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}, \quad \mu_2 = \frac{(\theta - \gamma)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}$$

biçimindedir. $k_i(s)$, $1 \leq i \leq 4$, eğrilik fonksiyonları için $k_i(s) = \varepsilon_{i+1} \langle u_i'(s), u_{i+1}(s) \rangle$ formülü kullanılırsa,

$$k_1 = -\varepsilon_2 \gamma, \quad k_2 = \varepsilon_3 (\gamma^2 - \theta), \quad k_3 = -\varepsilon_4 \frac{\gamma^2 - \theta^2}{\gamma} \quad \text{ve} \quad k_4 = \varepsilon_5 \frac{(\gamma^2 - \theta^2)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{k_1}{k_2} = sbt. \text{ ve } \frac{k_3}{k_4} = sbt.$$

olduğu görülür. O halde $\alpha(t)$ eğrisi genelleştirilmiş helistir.

Diğer bir durum $\alpha(t)$ eğrisinin spacelike (uzay benzeri) bir eğri olması. Yani $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$ olsun. O halde Gramm-Schmidt ortogonalleştirme metodu kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_1 &= (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\ &\quad - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, - A_n \sin t + B_n \cos t, c), \\ u_2 &= (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \\ &\quad - A_2 \cos t - B_2 \sin t, \dots, - A_n \sin t + B_n \cos t, - A_n \cos t - B_n \sin t, 0), \\ u_3 &= (\gamma + 1) \left(\left(\frac{1 - \gamma}{\gamma + 1} \right) (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t), \left(\frac{1 - \gamma}{\gamma + 1} \right) (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t), \right. \\ &\quad \left. A_2 \cos t + B_2 \sin t, - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, \right. \\ &\quad \left. - A_n \sin t + B_n \cos t, \frac{-\gamma}{\gamma + 1} c \right), \\ u_4 &= \left(\frac{\gamma - \theta}{\gamma} \right) \left(\left(\frac{\gamma + \theta}{\gamma - \theta} \right) (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t), A_2 \sin t \right. \\ &\quad \left. - B_2 \cos t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, \dots, A_n \sin t - B_n \cos t, A_n \cos t + B_n \sin t, 0 \right), \\ u_5 &= (\mu_1 (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t), \mu_2 (A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\ &\quad - A_2 \sin t + B_2 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, - A_n \sin t + B_n \cos t), \\ &\quad \left(\theta - \frac{\gamma^2(1 - \theta)}{(\theta + \gamma^2)(\gamma + 1)} \right) c) \end{aligned}$$

pseudo-ortogonal sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \gamma &= -A_1^2 + B_1^2 - A_2^2 - B_2^2 - \dots - A_n^2 - B_n^2, \\ \theta &= A_1^2 - B_1^2 - A_2^2 - B_2^2 - \dots - A_n^2 - B_n^2 \end{aligned}$$

ve

$$\mu_1 = \frac{(\gamma + \theta)(1 + \theta)}{\theta + \gamma^2}, \quad \mu_2 = \frac{(\theta - \gamma)(1 + \theta)}{\theta + \gamma^2}$$

biçimindedir. $k_i(s)$, $1 \leq i \leq 4$, eğrilik fonksiyonları için $k_i(s) = \varepsilon_{i+1} \langle u_i'(s), u_{i+1}(s) \rangle$ formülü kullanılırsa,

$$k_1 = \varepsilon_2 \gamma, k_2 = \varepsilon_3 (\gamma^2 + \theta), k_3 = \varepsilon_4 \frac{\gamma^2 + \theta^2}{\gamma} \text{ ve } k_4 = -\varepsilon_5 \frac{(\gamma^2 - \theta^2)(1 + \theta)}{\theta + \gamma^2}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{k_1}{k_2} = sbt. \text{ ve } \frac{k_3}{k_4} = sbt.$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha(t)$ eğrisi genelleştirilmiş helistir.

Şimdi A anti-simetrik matrisi Durum 2 formunda göz önüne alınsın. O halde X lineer vektör alanının $\forall P = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \in E_1^{2n+1}$ noktasındaki değeri

$$X(P) = (a_1, -\lambda_1 x_3 + a_2, \lambda_1 x_2 + a_3, \lambda_2 x_5 + a_4, -\lambda_2 x_4 + a_5, \dots, \lambda_n x_{2n+1} + a_{2n}, -\lambda_n x_{2n} + a_{2n+1})$$

biçiminde bulunur. Burada işlem kolaylığı açısından $\lambda_i = 1, 1 \leq i \leq n$, seçilsin. Eğer $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^{2n+1}$ eğrisi, X lineer vektör alanının integral eğrisi ise integral eğrisi tanımından

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= a_1, \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= -x_3 + a_2, & \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= x_2 + a_3, \\ \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= x_5 + a_4, & \frac{d\alpha_5(t)}{dt} &= -x_4 + a_5, \\ & & \vdots & \\ \frac{d\alpha_{2n}(t)}{dt} &= x_{2n+1} + a_{2n}, & \frac{d\alpha_{2n+1}(t)}{dt} &= -x_{2n} + a_{2n+1}, \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (a_1 t + d, A_1 \cos t + B_1 \sin t - a_3, A_1 \sin t - B_1 \cos t + a_2, A_2 \cos t + B_2 \sin t + a_5, \\ &\quad -A_2 \sin t + B_2 \cos t - a_4, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t + a_{2n+1}, -A_n \sin t + B_n \cos t - a_{2n}) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen bu $\alpha(t)$ eğrisinin $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş helis olduğu, yukarıda kullanılan metot ile gösterilebilir.

ii) $\text{rank}([AC])=2k, 1 \leq k \leq n$ ise,

a) $\text{rank}([AC])=2k, k = n$ durumu: $\alpha_i(t), 1 \leq i \leq 2n+1$ için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= x_4 + a_3, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= -x_3 + a_4, \\ & & & \vdots \\ \frac{d\alpha_{2n-1}(t)}{dt} &= x_{2n} + a_{2n-1}, & \frac{d\alpha_{2n}(t)}{dt} &= -x_{2n-1} + a_{2n}, \\ \frac{d\alpha_{2n+1}(t)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \dots, A_n \sin t - B_n \cos t + a_{2n}, A_n \cos t + B_n \sin t - a_{2n-1}, d)$$

şeklinde bulunur. Bu $\alpha(t)$ eğrisi $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında Lorentz çemberlerini temsil eder.

b) $\text{rank}([AC])=r, r = 2, 4, \dots, 2n-2$ durumu: $\alpha_i(t), 1 \leq i \leq 2n+1$, bileşenleri için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= x_4 + a_3, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= -x_3 + a_4, \\ & & & \vdots \\ \frac{d\alpha_{r-1}(t)}{dt} &= x_r + a_{r-1}, & \frac{d\alpha_r(t)}{dt} &= -x_{r-1} + a_r, \\ \frac{d\alpha_j(t)}{dt} &= 0, & r+1 \leq j \leq 2n+1 \end{aligned}$$

biçiminde olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \dots, A_{r/2} \sin t - B_{r/2} \cos t + a_r, A_{r/2} \cos t + B_{r/2} \sin t - a_{r-1}, d_{r+1}, \dots, d_{2n+1})$$

şeklinde bulunur. Bu $\alpha(t)$ eğrisi de $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında Lorentz çemberlerini temsil eder.

iii) $\text{rank}([AC])=2k+1$, $1 \leq k \leq n$ olması durumu;

a) $\text{rank}([AC])=2n+1$, $k = n$ durumu: X lineer vektör alanının integral eğrileri teoremin birinci kısmında ki $\alpha(t)$ eğrileridir.

b) $\text{rank}([AC])=2k+1=r+1$, $r = 2, 4, \dots, 2n-2$ durumu: Bu durumda integral eğrisini temsil eden birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= x_4 + a_3, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= -x_3 + a_4, \\ & \vdots & & \\ \frac{d\alpha_{r-1}(t)}{dt} &= x_r + a_{r-1}, & \frac{d\alpha_r(t)}{dt} &= -x_{r-1} + a_r, \\ \frac{d\alpha_{r+1}(t)}{dt} &= a_{r+1}, & \frac{d\alpha_j(t)}{dt} &= 0, \quad r+2 \leq j \leq 2n+1 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \dots, A_{r/2} \sin t - B_{r/2} \cos t + a_r, A_{r/2} \cos t + B_{r/2} \sin t - a_{r-1}, a_{r+1}t + d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_{2n+1})$$

biçiminde bulunur. Elde edilen $\alpha(t)$ eğrisinin $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş helis olduğu, teoremin birinci kısmındaki yolla gösterilebilir.

iv) Eğer $\text{rank}([AC])=1$ ise $\lambda_i = 0$ olmalıdır. O halde lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden $\alpha(t)$ eğrisi $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında paralel doğruları temsil eder.

Eğer $A(x)=0$ denklemini sağlayan x vektörü lightlike (ışık benzeri) vektör olarak göz önüne alınırsa, bu durumda A anti-simetrik matrisi Durum 3 formunda olacaktır. O halde X lineer vektör alanının $\forall P = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \in E_1^{2n+1}$ noktasındaki değeri

$$X(P) = (-\lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \dots + \lambda_{2n-1} x_{2n+1} + a_1, -\lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \dots + \lambda_{2n-1} x_{2n+1} + a_2, \dots, \\ \lambda_{2n-2} x_1 - \lambda_{2n-2} x_2 + \lambda_{4n-4} x_3 + \dots - \lambda_{n(2n-1)} x_{2n+1} + a_{2n}, \lambda_{2n-1} x_1 - \lambda_{2n-1} x_2 + \\ \lambda_{4n-3} x_3 + \dots - \lambda_{n(2n-1)} x_{2n} + a_{2n+1})$$

biçiminde bulunur. Genel durum için bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü bulunamamıştır. Fakat $n=1$ özel durumu için X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + k_1, c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + k_2, c_4 t^2 + c_5 t + k_3)$$

biçiminde bulunur. Burada $c_i, 1 \leq i \leq 5$, ve $k_j, 1 \leq j \leq 3$, sabit değerlerdir.

Şimdi yukarıdaki teoremden elde edilen sonuçlar $n=2$ özel durumu için incelenecektir. $n=1$ özel durumu Yaylacı (2006) tarafından yüksek lisans tezinde çalışılmıştır. Burada Yaylacı dan farklı olarak, eğrinin kozul karakterinin sadece timelike (zaman benzeri) olma durumu değil aynı zaman da null (ışık benzeri) olma durumu da göz önüne alınacaktır.

4.1.1. Beş Boyutlu Lorentz Uzayında Lineer Vektör Alanının Timelike ve Null İntegral Eğrileri

E_1^5 , 5 boyutlu Lorentz uzayı üzerinde bir lineer vektör alanı X olsun. E_1^5 Lorentz uzayında bir A lineer dönüşümünün bir yarı-ortonormal ϕ bazına karşılık gelen Lorentz anlamındaki anti simetrik matris A ile gösterilsin. A matrisi normal formda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\lambda_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, $i=1,2$ dir. O halde aşağıdaki teorem

verilebilir.

Teorem 4.1.1.1. X , 5-boyutlu Lorentz uzayında lineer vektör alanı olsun. O halde X lineer vektör alanının integral eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. Eğer $\text{rank}([AC])=5$ ise, X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- ii. Eğer $\text{rank}([AC])=2k$, $k=1,2$ ise, X vektör alanının integral eğrileri paralel düzlemlerde yatan Lorentz çemberleri,
- iii. Eğer $\text{rank}([AC])=3$ ise, X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- iv. Eğer $\text{rank}([AC])=1$ ise, X vektör alanının integral eğrileri paralel doğrulardır.

İspat: i) X , 5-boyutlu Lorentz uzayında bir lineer vektör alanı olsun. X lineer vektör alanının $\forall P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in E_1^5$ noktasındaki değeri

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde matris formunda ya da

$$X(P) = (\lambda_1 x_2 + a_1, \lambda_1 x_1 + a_2, \lambda_2 x_4 + a_3, -\lambda_2 x_3 + a_4, a_5)$$

biçiminde açık bir şekilde yazılabilir. Eğer $\lambda_i = 1, i=1,2$ seçilirse integral eğrisi tanımından

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= x_4 + a_3, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= -x_3 + a_4, \\ \frac{d\alpha_5(t)}{dt} &= a_5 \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, \\
\alpha_2 &= A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, \\
\alpha_3 &= A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, \\
\alpha_4 &= A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \\
\alpha_5 &= ct + d,
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, \\
A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, ct + d)$$

biçiminde genelleştirilmiş helistir. Bu eğrinin helis olduğunu göstermek için, eğrinin kozul karakterlerine bağlı olarak iki farklı durum göz önüne alınacaktır.

$\alpha(t)$ eğrisi timelike (zaman benzeri) eğri olsun. Yani $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -1$ olsun. O halde Gramm-Schmidt ortogonalleştirme metodu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
u_1 &= (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\
&\quad - A_2 \sin t + B_2 \cos t, c), \\
u_2 &= (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, -A_2 \sin t + B_2 \cos t, \\
&\quad - A_2 \cos t - B_2 \sin t, 0), \\
u_3 &= (\gamma - 1) \left(\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t), \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t), \right. \\
&\quad \left. A_2 \cos t + B_2 \sin t, -A_2 \sin t + B_2 \cos t, \frac{\gamma}{\gamma - 1} c \right) \\
u_4 &= \left(\frac{\gamma - \theta}{\gamma} \right) \left(\left(\frac{\gamma + \theta}{\gamma - \theta} \right) (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t), \right. \\
&\quad \left. A_2 \sin t - B_2 \cos t, A_2 \cos t + B_2 \sin t, 0 \right), \\
u_5 &= (\mu_1 (A_1 \cosh t + B_1 \sinh t, A_1 \sinh t + B_1 \cosh t), \mu_2 (A_2 \cos t + B_2 \sin t, \\
&\quad - A_2 \sin t + B_2 \cos t), \left(\frac{\gamma^2 (1 - \theta)}{(\theta - \gamma^2)(\gamma - 1)} - \theta \right) c),
\end{aligned}$$

pseudo-ortogonal sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\gamma &= -A_1^2 + B_1^2 - A_2^2 - B_2^2, \\
\theta &= A_1^2 - B_1^2 - A_2^2 - B_2^2
\end{aligned}$$

ve

$$\mu_1 = \frac{(\gamma + \theta)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}, \mu_2 = \frac{(\theta - \gamma)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}$$

şeklindedir. $k_i(s)$, $1 \leq i \leq 4$ eğrilik fonksiyonları için $k_i(s) = \varepsilon_{i+1} \langle u_i'(s), u_{i+1}(s) \rangle$ formülü kullanılırsa

$$k_1 = -\varepsilon_2 \gamma, k_2 = \varepsilon_3 (\gamma^2 - \theta), k_3 = -\varepsilon_4 \frac{\gamma^2 - \theta^2}{\gamma} \text{ ve } k_4 = \varepsilon_5 \frac{(\gamma^2 - \theta^2)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{k_1}{k_2} = sbt. \text{ ve } \frac{k_3}{k_4} = sbt.$$

olduğu görülür. O halde $\alpha(t)$ eğrisi genelleştirilmiş helistir.

$\alpha(t)$, $\{L, W_1, N, W_2, W_3\}$ Cartan referans çatılı bir null (ışık benzeri) Cartan eğri olsun.

Bu durumda Cartan denklemleri

$$\begin{aligned} L' &= W_1, \\ W_1' &= -k_1 W_1 + N, \\ N' &= -k_1 W_1 + k_2 W_2, \\ W_2' &= k_2 L + k_3 W_3, \\ W_3' &= -k_3 W_2, \end{aligned}$$

biçimindedir (Ferrandes ve ark., 2001). Burada $L = \alpha'$ ve $W_1 = \alpha''$ dir. $\alpha(t)$ null Cartan eğrisinin Cartan eğrilikleri hesaplanırsa

$$k_1 = -\frac{1}{2} \langle \alpha''', \alpha''' \rangle, k_2^2 = \langle \alpha^{(4)}, \alpha^{(4)} \rangle - \langle \alpha''', \alpha''' \rangle^2$$

ve

$$k_3^2 = \frac{1}{k_2^2} (\langle \alpha^{(5)}, \alpha^{(5)} \rangle + 2 \langle \alpha''', \alpha''' \rangle \langle \alpha''', \alpha^{(5)} \rangle + 9 \langle \alpha^{(4)}, \alpha^{(4)} \rangle^2 + \langle \alpha''', \alpha''' \rangle^2)$$

elde edilir. Böylece elde edilen eğrilik formülleri kullanılırsa $\alpha(t)$ eğrisinin Cartan eğrilikleri

$$k_1 = \frac{1}{2}\theta, k_2^2 = -(\gamma + \theta^2) \text{ ve } k_3^2 = -\frac{1}{(\gamma + \theta^2)^2}(\theta^3 + 2\theta\gamma + \theta)$$

bulunur. Cartan eğrilikleri sabit olduğu için $\alpha(t)$ null Cartan eğrisi genelleştirilmiş helistir (Ferrandes ve ark., 2002).

ii) $rank([AC])=2k$, $k=1,2$ ise,

a) $rank([AC])=4$ olsun. $\alpha_i(t), 1 \leq i \leq 5$, için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= x_4 + a_3, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= -x_3 + a_4, \\ \frac{d\alpha_5(t)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

biçiminde olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, d)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen $\alpha(t)$ eğrisi 5-boyutlu Lorentz uzayında Lorentz çemberleri temsil eder.

b) Eğer $rank([AC])=2$ ise $\alpha_i(t), 1 \leq i \leq 5$, bileşenleri için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= 0, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= 0, & \frac{d\alpha_5(t)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden X lineer vektör

alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, d_3, d_4, d_5)$$

bulunur. Bulunan $\alpha(t)$ eğrisi de 5-boyutlu Lorentz uzayında Lorentz çemberleri temsil eder.

iii) Eğer $\text{rank}([AC])=3$ ise birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= x_1 + a_2, \\ \frac{d\alpha_3(t)}{dt} &= a_3, & \frac{d\alpha_4(t)}{dt} &= 0, & \frac{d\alpha_5(t)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sinh t + B_1 \cosh t - a_2, A_1 \cosh t + B_1 \sinh t + a_1, a_3 t + d_1, d_2, d_3)$$

biçiminde bulunur. Dolayısıyla $\alpha(t)$ eğrisi 5-boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş helisi temsil eder.

iv) Eğer $\text{rank}([AC])=1$ ise $\lambda_i=0$ olmalıdır. O halde lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, $\alpha(t)$ eğrisi 5-boyutlu Lorentz uzayında paralel doğruları temsil eder.

4.2. (2n+1)-Boyutlu Yarı-Öklid Uzayında İntegral Eğrileri

E_v^{2n+1} , (2n+1)-boyutlu yarı-Öklid uzayı ve X bu uzayda lineer vektör alanı olsun. Bu uzayda, integral eğrilerinin sınıflaması timelike (zaman benzeri) vektör sayısının tek ya da çift olma durumuna göre iki durumda yapılacaktır. Çünkü, \mathbf{A} lineer dönüşümüne karşılık gelen Lorentz anlamındaki anti simetrik matris, timelike (zaman benzeri) vektör sayısının tek ya da çift olma durumuna göre farklılık göstermektedir.

Durum I: Timelike vektör sayısı tek olsun:

Bir yarı-ortonormal ϕ bazına göre \mathbf{A} lineer dönüşümüne karşılık gelen Lorentz anlamındaki anti simetrik A matrisi normal formda

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{v-1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{v-1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda_{v+1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda_{v+1/2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{v+3/2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{v+3/2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Burada $\lambda_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, $1 \leq i \leq n$, dır. O halde aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.2.1. X , $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında $\{0; u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}\}$ yarı ortonormal çatisına göre

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi ile belirlenen lineer vektör alanı olsun. Burada A matrisi Lorentz anlamında anti simetrik matris ve C matrisi de

$$C = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \\ a_{2n} \\ a_{2n+1} \end{bmatrix}$$

formunda $(2n+1) \times 1$ kolon matrisidir. O halde X lineer vektör alanının integral eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. Eğer $\text{rank}([AC])=2n+1$ ise, X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- ii. Eğer $\text{rank}([AC])=2k$, $1 \leq k \leq n$ ise, X vektör alanının integral eğrileri paralel düzlemlerde yatan çemberler,
- iii. Eğer $\text{rank}([AC])=2k+1$, $1 \leq k \leq n$ ise, X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- iv. Eğer $\text{rank}([AC])=1$ ise, X vektör alanının integral eğrileri paralel doğrulardır.

İspat: i) X , $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında bir lineer vektör alanı olsun. X lineer vektör alanının $\forall P = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \in E_v^{2n+1}$ noktasındaki değeri

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde matris formunda veya

$$\begin{aligned} X(P) = & (-\lambda_1 x_2 + a_1, \lambda_1 x_1 + a_2, \dots, -\lambda_{v-1/2} x_{v-1} + a_{v-2}, \lambda_{v-1/2} x_{v-2} + a_{v-1}, \\ & \lambda_{v+1/2} x_{v+1} + a_v, \lambda_{v+1/2} x_v + a_{v+1}, \lambda_{v+3/2} x_{v+3} + a_{v+2}, -\lambda_{v+3/2} x_{v+2} + a_{v+3}, \\ & \dots, \lambda_n x_{2n} + a_{2n-1}, -\lambda_n x_{2n-1} + a_{2n}, a_{2n+1}) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. İşlem kolaylığı için $\lambda_i = 1, 1 \leq i \leq n$, seçilecektir. Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_v^{2n+1}$ eğrisi X lineer vektör alanının integral eğrisi ise $\alpha_i(t), 1 \leq i \leq 2n+1$, bileşenleri için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = \begin{cases} -x_{i+1} + a_i & i = 2k-1, 1 \leq k < \frac{v+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, 1 \leq k < \frac{v+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k-1, k = \frac{v+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, k = \frac{v+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k-1, \frac{v+3}{2} \leq k \leq n, \\ -x_{i-1} + a_i & i = 2k, \frac{v+3}{2} \leq k \leq n, \\ a_i & i = 2n+1, \end{cases}$$

biçiminde olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (-A_i \sin t + B_i \cos t - a_{2i}, A_i \cos t + B_i \sin t + a_{2i-1}, A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t - a_{\nu+1}, \\ A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t - a_{\nu}, \dots, A_j \sin t - B_j \cos t + a_{2j}, A_j \cos t + B_j \sin t - a_{2j-1}, \\ ct + d)$$

şeklinde elde edilir. Burada $1 \leq i \leq \frac{\nu-1}{2}$ ve $\frac{\nu+3}{2} \leq j \leq n$ dir. $\alpha(t)$ eğrisinin karakterini belirleyebilmek için eğrinin türevleri göz önüne alınırsa, eğri üzerinde Frenet beşli yapısı oluşturulabileceği görülür. O halde; k_1, k_2, k_3 ve k_4 eğriliklerinden sözü edilebilir. Böylece $\alpha(t)$ eğrisinin $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında genelleştirilmiş helis olabilmesi için $\frac{k_1}{k_2}$ ve $\frac{k_3}{k_4}$ oranlarının sabit olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla ilk önce eğrinin hızı hesaplanırsa;

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \sum_{i=1}^{\frac{\nu-1}{2}} -(A_i^2 + B_i^2) - A_{\nu+1/2}^2 + B_{\nu+1/2}^2 + \sum_{j=\frac{\nu+3}{2}}^n (A_j^2 + B_j^2) + c^2$$

elde edilir.

$\alpha(t)$ eğrisi timelike (zaman benzeri) olsun. Yani $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -1$ olsun. O halde Gramm-Schmidt ortogonalleştirme metodu kullanılırsa

$$u_1 = (-A_i \cos t - B_i \sin t, -A_i \sin t + B_i \cos t, \dots, A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t, \\ A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t, A_j \cos t + B_j \sin t, -A_j \sin t + B_j \cos t, \dots, c),$$

$$u_2 = (A_i \sin t - B_i \cos t, -A_i \cos t - B_i \sin t, \dots, A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t, \\ A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t, -A_j \sin t + B_j \cos t, -A_j \cos t - B_j \sin t, \dots, 0),$$

$$u_3 = (1 - \gamma) \left(A_i \cos t + B_i \sin t, A_i \sin t - B_i \cos t, \dots, \left(\frac{\gamma + 1}{1 - \gamma} \right) (A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t, \\ A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t), -A_j \cos t - B_j \sin t, A_j \sin t - B_j \cos t, \dots, \frac{\gamma}{1 - \gamma} c \right),$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= \left(\frac{\gamma - \theta}{\gamma} \right) \left(-A_i \sin t + B_i \cos t, A_i \cos t + B_i \sin t, \dots, \left(\frac{\gamma + \theta}{\gamma - \theta} \right) (A_{\nu+1/2} \sinh t + \right. \\
&\quad B_{\nu+1/2} \cosh t, A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t), A_j \sin t - B_j \cos t, A_j \cos t + \\
&\quad \left. B_j \sin t, \dots, 0 \right), \\
u_5 &= (\mu_1 (-A_i \cos t - B_i \sin t, -A_i \sin t + B_i \cos t), \dots, \mu_2 (A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t, \\
&\quad A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t), \mu_1 (A_j \cos t + B_j \sin t, -A_j \sin t + B_j \cos t), \dots, \\
&\quad \left(\frac{\gamma^2 (1 - \theta)}{(\theta - \gamma^2)(\gamma - 1)} - \theta \right) c)
\end{aligned}$$

pseudo-ortogonal sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sum_{i=1}^{\frac{\nu-1}{2}} (A_i^2 + B_i^2) - A_{\nu+1/2}^2 + B_{\nu+1/2}^2 - \sum_{j=\frac{\nu+3}{2}}^n (A_j^2 + B_j^2), \\
\theta &= \sum_{i=1}^{\frac{\nu-1}{2}} (A_i^2 + B_i^2) + A_{\nu+1/2}^2 - B_{\nu+1/2}^2 - \sum_{j=\frac{\nu+3}{2}}^n (A_j^2 + B_j^2), \\
\mu_1 &= \frac{(\theta - \gamma)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}, \quad \mu_2 = \frac{(\theta + \gamma)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}
\end{aligned}$$

ve $1 \leq i \leq \frac{\nu-1}{2}$ ve $\frac{\nu+3}{2} \leq j \leq n$ dır. $k_i(s)$, $1 \leq i \leq 4$, eğrilik fonksiyonları için

$k_i(s) = \varepsilon_{i+1} \langle u_i'(s), u_{i+1}(s) \rangle$ formülü kullanılırsa

$$k_1 = -\varepsilon_2 \gamma, \quad k_2 = \varepsilon_3 (\gamma^2 - \theta), \quad k_3 = -\varepsilon_4 \frac{\gamma^2 - \theta^2}{\gamma} \quad \text{ve} \quad k_4 = \varepsilon_5 \frac{(\gamma^2 - \theta^2)(1 - \theta)}{\theta - \gamma^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{k_1}{k_2} = sbt. \quad \text{ve} \quad \frac{k_3}{k_4} = sbt.$$

olduğu görülür. O halde $\alpha(t)$ eğrisi genelleştirilmiş helistir.

ii) $rank([AC])=2k$, $1 \leq k \leq n$ ise,

a) $rank([AC])=2k$, $k = n$ durumu: $\alpha_i(t)$, $1 \leq i \leq 2n+1$, bileşenleri için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = \begin{cases} -x_{i+1} + a_i & i = 2k - 1, 1 \leq k < \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, 1 \leq k < \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k - 1, k = \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, k = \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k - 1, \frac{\nu+3}{2} \leq k \leq n, \\ -x_{i-1} + a_i & i = 2k, \frac{\nu+3}{2} \leq k \leq n, \\ 0 & i = 2n + 1, \end{cases}$$

biçiminde olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (-A_i \sin t + B_i \cos t - a_{2i}, A_i \cos t + B_i \sin t + a_{2i-1}, \dots, A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t - a_{\nu+1}, A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t - a_{\nu}, A_j \sin t - B_j \cos t + a_{2j}, A_j \cos t + B_j \sin t - a_{2j-1}, \dots, d)$$

şeklinde bulunur. Burada, $1 \leq i \leq \frac{\nu-1}{2}$ ve $\frac{\nu+3}{2} \leq j \leq n$ dir. Dolayısıyla $\alpha(t)$ eğrisi

$(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında çemberleri temsil eder.

b) $rank([AC])=r$, $r = 2, 4, \dots, 2n - 2$ durumu: $\alpha_i(t)$, $1 \leq i \leq 2n + 1$ bileşenleri için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = \begin{cases} -x_{i+1} + a_i & i = 2k - 1, 1 \leq k < \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, 1 \leq k < \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k - 1, k = \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, k = \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k - 1, \frac{\nu+3}{2} \leq k \leq \frac{r}{2}, \\ -x_{i-1} + a_i & i = 2k, \frac{\nu+3}{2} \leq k \leq \frac{r}{2}, \\ 0 & r + 1 \leq i \leq 2n + 1 \end{cases}$$

biçimindedir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden X lineer vektör alanının

integral eğrisi

$$\alpha(t) = (-A_i \sin t + B_i \cos t - a_{2i}, A_i \cos t + B_i \sin t + a_{2i-1}, \dots, A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t - a_{\nu+1}, A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t - a_{\nu}, A_j \sin t - B_j \cos t + a_{2j}, A_j \cos t + B_j \sin t - a_{2j-1}, \dots, d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_{2n+1})$$

şeklinde bulunur. Burada $1 \leq i \leq \frac{\nu-1}{2}$ ve $\frac{\nu+3}{2} \leq j \leq \frac{r}{2}$ dir. O halde elde edilen $\alpha(t)$

eğrisi $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında çemberleri temsil eder.

iii) $\text{rank}([AC])=2k+1$, $1 \leq k \leq n$ olması durumu;

a) $\text{rank}([AC])=2n+1$, $k = n$ durumu: X lineer vektör alanının integral eğrisi teoreminin birinci kısmında ki $\alpha(t)$ eğrisidir.

b) $\text{rank}([AC])=2k+1=r+1$, $r = 2, 4, \dots, 2n-2$ durumu: integral eğrisini temsil eden birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = \begin{cases} -x_{i+1} + a_i & i = 2k-1, 1 \leq k < \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, 1 \leq k < \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k-1, k = \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i-1} + a_i & i = 2k, k = \frac{\nu+1}{2}, \\ x_{i+1} + a_i & i = 2k-1, \frac{\nu+3}{2} \leq k \leq \frac{r}{2}, \\ -x_{i-1} + a_i & i = 2k, \frac{\nu+3}{2} \leq k \leq \frac{r}{2}, \\ a_i & i = r+1, \\ 0 & r+2 \leq i \leq 2n+1, \end{cases}$$

biçimindedir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (-A_i \sin t + B_i \cos t - a_{2i}, A_i \cos t + B_i \sin t + a_{2i-1}, \dots, A_{\nu+1/2} \sinh t + B_{\nu+1/2} \cosh t - a_{\nu+1}, A_{\nu+1/2} \cosh t + B_{\nu+1/2} \sinh t - a_{\nu}, A_j \sin t - B_j \cos t + a_{2j}, A_j \cos t + B_j \sin t - a_{2j-1}, \dots, a_{r+1}t + d, d_{r+2}, \dots, d_{2n+1})$$

şeklinde bulunur. Burada $1 \leq i \leq \frac{\nu-1}{2}$ ve $\frac{\nu+3}{2} \leq j \leq \frac{r}{2}$ dir. Elde edilen $\alpha(t)$ eğrisinin

(2n+1)-boyutlu yarı-Öklid uzayında genelleştirilmiş helis olduğu teoremin birinci kısmındaki yolla gösterilebilir.

iv) Eğer $rank([AC])=1$ ise $\lambda_i=0$ olmalıdır. O halde lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, $\alpha(t)$ eğrisi (2n+1)-boyutlu yarı-Öklid uzayında paralel doğruları temsil eder.

Durum II: Timelike vektör sayısı çift olsun:

O halde **A** lineer dönüşüme karşılık gelen anti simetrik **A** matrisi normal formda

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\lambda_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ dir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.2.2. X , (2n+1)-boyutlu yarı-Öklid uzayında lineer vektör alanı olsun. O halde X lineer vektör alanının integral eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. Eğer $rank([AC])=2n+1$ ise, X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- ii. Eğer $rank([AC])=2k$, $1 \leq k \leq n$ ise, X vektör alanının integral eğrileri paralel düzlemlerde yatan çemberler,
- iii. Eğer $rank([AC])=2k+1$, $1 \leq k \leq n$ ise, X vektör alanının integral eğrileri genelleştirilmiş helisler,
- iv. Eğer $rank([AC])=1$ ise, X vektör alanının integral eğrileri paralel doğrulardır.

İspat: i) X , $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında bir lineer vektör alanı olsun. X lineer vektör alanının $\forall P = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \in E_v^{2n+1}$ noktasındaki değeri

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde matris formunda veya

$$X(P) = (\lambda_1 x_2 + a_1, -\lambda_1 x_1 + a_2, \dots, \lambda_n x_{2n} + a_{2n-1}, -\lambda_n x_{2n-1} + a_{2n}, a_{2n+1})$$

biçiminde yazılabilir. İşlem kolaylığı için bundan sonra $\lambda_i = 1, 1 \leq i \leq n$, seçilecektir.

Eğer $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_v^{2n+1}$ eğrisi X lineer vektör alanının integral eğrisi ise integral eğrisi tanımından

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, & \frac{d\alpha_2(t)}{dt} &= -x_1 + a_2, \dots, & \frac{d\alpha_{2n-1}(t)}{dt} &= x_{2n} + a_{2n-1}, \\ \frac{d\alpha_{2n}(t)}{dt} &= -x_{2n-1} + a_{2n}, & \frac{d\alpha_{2n+1}(t)}{dt} &= a_{2n+1} = c, \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (A_1 \sin t - B_1 \cos t + a_2, A_1 \cos t + B_1 \sin t - a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, \\ &A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \dots, A_n \sin t - B_n \cos t + a_{2n}, A_n \cos t + B_n \sin t - a_{2n-1}, ct + d) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. O halde, şimdi bu eğrinin karakteristik özellikleri incelenebilir. Öncelikle, eğrinin türevleri göz önüne alınırsa α' , α'' ve α''' vektörlerinin lineer bağımsız daha yüksek mertebeden türevlerden elde edilen vektörlerin de lineer bağımlı olduğu görülür. Bu yüzden $\alpha(t)$ eğrisi üzerinde Frenet üçlüsü oluşturulabilir. O zaman, k_1 ve k_2 eğriliklerinden söz edilebilir. $\alpha(t)$ eğrisinin $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında genelleştirilmiş helis olduğunu söyleyebilmek için k_1/k_2 oranının sabit olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla ilk önce eğrinin hızı hesaplanırsa;

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -\sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} (A_i^2 + B_i^2) + \sum_{j=\frac{\nu+2}{2}}^n (A_j^2 + B_j^2) + c^2$$

elde edilir. Burada $\alpha(t)$ eğrisinin timelike (zaman benzeri) olduğu kabul edilir ve Gramm-Schmidt ortogonalleştirme metodu kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_1 &= (A_1 \cos t + B_1 \sin t, -A_1 \sin t + B_1 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, -A_n \sin t + B_n \cos t, c) \\ u_2 &= (-A_1 \sin t + B_1 \cos t, -A_1 \cos t - B_1 \sin t, \dots, -A_n \sin t + B_n \cos t, -A_n \cos t - B_n \sin t, 0) \\ u_3 &= (\gamma - 1)(A_1 \cos t + B_1 \sin t, -A_1 \sin t + B_1 \cos t, \dots, A_n \cos t + B_n \sin t, -A_n \sin t \\ &\quad + B_n \cos t, \frac{\gamma}{\gamma - 1} c) \end{aligned}$$

ortogonal sistemi elde edilir. Burada

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\frac{\nu}{2}} (A_i^2 + B_i^2) - \sum_{j=\frac{\nu+2}{2}}^n (A_j^2 + B_j^2)$$

dır. O zaman k_1 ve k_2 eğrilikleri hesaplanırsa $k_1 = -\varepsilon_2 \gamma$ ve $k_2 = \varepsilon_3 \gamma (\gamma - 1)$ bulunur. O halde k_1 / k_2 oranı sabittir. Yani $\alpha(t)$ eğrisi genelleştirilmiş helistir.

ii) rank([AC])=2k, $1 \leq k \leq n$ ise,

a) rank([AC])=2k, $k = n$ durumu: $\alpha_i(t)$, $1 \leq i \leq 2n+1$ bileşenleri için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} &= x_2 + a_1, \quad \frac{d\alpha_2(t)}{dt} = -x_1 + a_2, \dots, \quad \frac{d\alpha_{2n-1}(t)}{dt} = x_{2n} + a_{2n-1}, \\ \frac{d\alpha_{2n}(t)}{dt} &= -x_{2n-1} + a_{2n}, \quad \frac{d\alpha_{2n+1}(t)}{dt} = a_{2n+1} = 0, \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (A_1 \sin t - B_1 \cos t + a_2, A_1 \cos t + B_1 \sin t - a_1, A_2 \sin t - B_2 \cos t + a_4, \\ &\quad A_2 \cos t + B_2 \sin t - a_3, \dots, A_n \sin t - B_n \cos t + a_{2n}, A_n \cos t + B_n \sin t - a_{2n-1}, d) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu $\alpha(t)$ eğrisi $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında çemberleri temsil eder.

b) $rank([AC])=r$, $r = 2, 4, \dots, 2n-2$ durumu: $\alpha_i(t)$, $1 \leq i \leq 2n+1$ bileşenleri için birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = x_2 + a_1, \frac{d\alpha_2(t)}{dt} = -x_1 + a_2, \dots, \frac{d\alpha_{r-1}(t)}{dt} = x_{2n} + a_{r-1},$$

$$\frac{d\alpha_r(t)}{dt} = -x_{2n-1} + a_r, \frac{d\alpha_j(t)}{dt} = 0, r+1 \leq j \leq 2n+1,$$

biçiminde yazılır. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden, X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sin t - B_1 \cos t + a_2, A_1 \cos t + B_1 \sin t - a_1, \dots, A_{r/2} \sin t - B_{r/2} \cos t + a_r,$$

$$A_{r/2} \cos t + B_{r/2} \sin t - a_{r-1}, d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_{2n+1})$$

şeklinde bulunur. Elde edilen $\alpha(t)$ eğrisi $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında Lorentz çemberlerini temsil eder.

iii) $rank([AC])=2k+1$, $1 \leq k \leq n$ olması durumu;

a) $rank([AC])=2n+1$, $k = n$ durumu: Bu durumda X lineer vektör alanının integral eğrisi teoremin birinci kısmında ki $\alpha(t)$ eğrisidir.

b) $rank([AC])=2k+1=r+1$, $r = 2, 4, \dots, 2n-2$ durumu: İntegral eğrisini temsil eden birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = x_2 + a_1, \frac{d\alpha_2(t)}{dt} = -x_1 + a_2, \dots, \frac{d\alpha_{r-1}(t)}{dt} = x_{2n} + a_{r-1},$$

$$\frac{d\alpha_r(t)}{dt} = -x_{2n-1} + a_r, \frac{d\alpha_{r+1}(t)}{dt} = a_{r+1}, \frac{d\alpha_j(t)}{dt} = 0, r+2 \leq j \leq 2n+1,$$

biçiminde olur. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden X lineer vektör alanının integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A_1 \sin t - B_1 \cos t + a_2, A_1 \cos t + B_1 \sin t - a_1, \dots, A_{r/2} \sin t - B_{r/2} \cos t + a_r, \\ A_{r/2} \cos t + B_{r/2} \sin t - a_{r-1}, a_{r+1}t + d, d_{r+2}, \dots, d_{2n+1})$$

şeklinde bulunur. Bulunan $\alpha(t)$ eğrisi $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında genelleştirilmiş helisi temsil ettiği teoremin birinci kısmındaki yolla gösterilebilir.

iv) Eğer $\text{rank}([AC])=1$ ise $\lambda_i=0$ olmalıdır. O halde lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden $\alpha(t)$ eğrisi $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında paralel doğruları temsil eder.

Şimdi E_v^{2n+1} yarı-Öklid uzayında, n ve v değerlerinin bazı özel durumları için örnekler verilecektir.

Örnek 4.2.1. $v=0$ ve $n=1$ durumu: Bu durumda Öklid 3-uzayı elde edilir. O halde;

$X: E^3 \rightarrow E^3$, $X(x, y, z) = (y, -x, 0)$ biçiminde tanımlanan X vektör alanı göz önüne alınsın. O zaman A anti-simetrik matrisi ve C kolon matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde alınabilir. Böylece $\forall P = (x, y, z) \in E^3$ noktası için X vektör alanının değeri

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

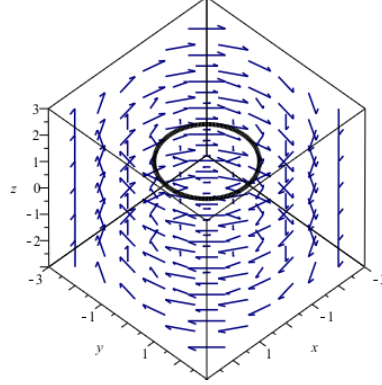
şeklinde olur. Eğer $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi X lineer vektör alanının integral eğrisi ise

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + a \\ \frac{dy}{dt} &= -x + b \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi sağlanır. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

$$\alpha(t) = (A \sin t - B \cos t + b, A \cos t + B \sin t - a, d)$$

bulunur. Dolayısıyla $\alpha(t)$ eğrisi E^3 de çemberleri temsil eder. Maple programı yardımıyla X vektör alanı ve integral eğrisi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 4.1 E^3 de $(y, -x, 0)$ vektör alanı ve integral eğrisi

Örnek 4.2.2. $\nu=1$ ve $n=1$ durumu: Bu durumda Lorentz 3-uzayı elde edilir. Buna göre, $X: E_1^3 \rightarrow E_1^3$, $X(x, y, z) = (y, x, 0)$ biçiminde tanımlanan X vektör alanı göz önüne alın. O zaman Lorentz anlamındaki A anti-simetrik matrisi ve C kolon matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde alınabilir. O halde, $\forall P = (x, y, z) \in E_1^3$ noktası için X vektör alanının değeri

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

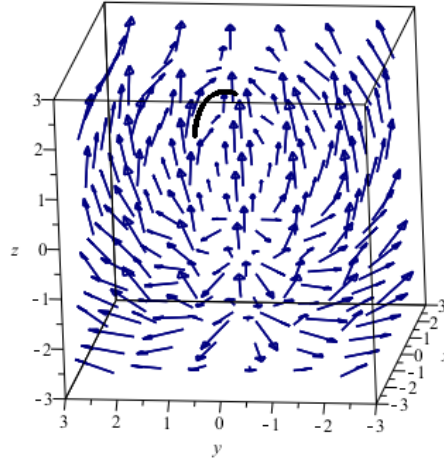
olur. Eğer $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ eğrisi X lineer vektör alanının integral eğrisi ise

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + a \\ \frac{dy}{dt} &= x + b \\ \frac{dz}{dt} &= 0\end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

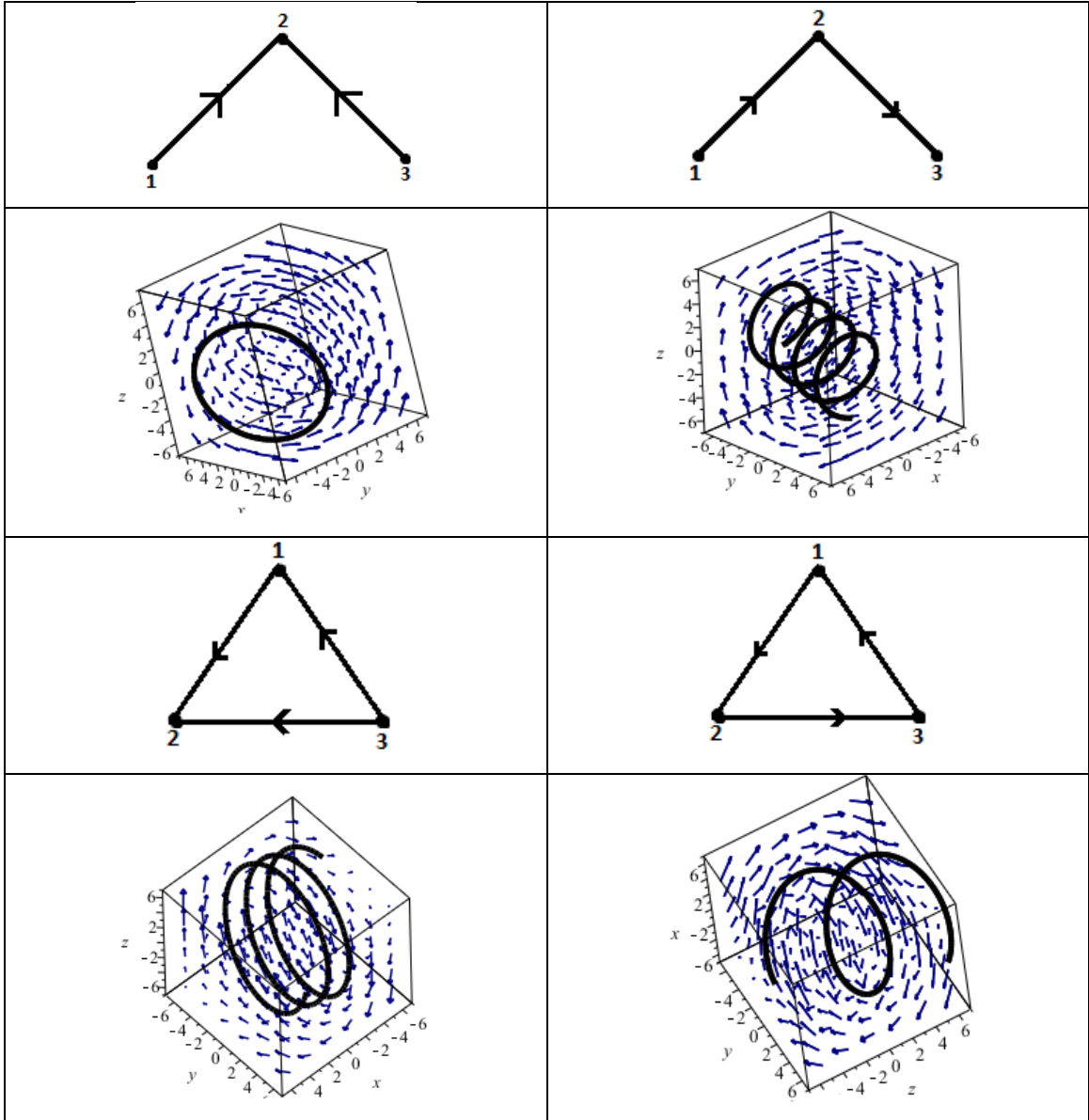
$$\alpha(t) = (A \sinh t + B \cosh t - b, A \cosh t + B \sinh t + a, d)$$

bulunur. Bulunan $\alpha(t)$ eğrisi E_1^3 de çemberleri temsil eder. Maple programı yardımıyla X vektör alanı ve integral eğrisi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 4.2 E_1^3 de $(y,x,0)$ vektör alanı ve integral eğrisi

Örnek 4.2.3. Bu örnekte, bazı yönlendirilmiş graflar (özelikle yol (path) denilen özel graflar) göz önüne alınmıştır. Yönlendirilmiş yollara karşılık gelen ve komşuluk matrisi olarak isimlendirilen A anti-simetrik matrisi ve yönlendirilmiş yolun bir köşesinden pozitif yönde çıkan okların sayısı yardımıyla oluşturulan C kolon matrisi yardımıyla vektör alanları elde edilmiş ve integral eğrileri hesaplanmıştır.



Şekil 4.3 Yönlendirilmiş yollar ve karşılık gelen vektör alanları

5. MATLAB PROGRAMI YARDIMIYLA UYGULAMALAR

Burada, dördüncü bölümde bahsedilen integral eğrilerinin sınıflanmasına yardımcı olan diferansiyel denklem sistemlerini veren Matlab komutları verilmiştir. Matlab programında yazılan bu komutlar yardımıyla istenilen uzayda dışarıdan keyfi girilen n , ν , λ ve rank değerleri için diferansiyel denklem sistemleri elde edilecektir.

%% Dışarıdan girilecek değerlerin tanıtılması

```

prompt = {'n değerini giriniz:', 'nü değerini giriniz:', 'k değerini giriniz:', 'rank değerini giriniz:'};
dlg_title = 'Değer Girişi';
num_lines = [1 30; 1 30; 1 30; 1 30];
def = {"", "", ""};
a = inputdlg(prompt, dlg_title, num_lines, def);
n=str2num(a{1});
n=(n*2)+1;
nu=str2num(a{2});

if isempty(a{3})
    k=-1;
else
    k=str2num(a{3});
end

if isempty(a{4})
    rank=n;
else
    rank=str2num(a{4});
end

kontrol=true;
while (kontrol==true)
    if (k>=1 || k==-1)
        kontrol=false;
    else
        prompt = {strcat('k değeri 0 dan farklı olmalıdır!')};
        dlg_title = 'Hatalı Değer Girişi';
        num_lines = [1 100];
        def = {" "};
        a = inputdlg(prompt, dlg_title, num_lines, def);

        if isempty(a{1})
            k=-1;
        else
            k=str2num(a{1});
        end
    end
end

kontrol=true;
while (kontrol==true)
    if rank<=n && rank>0
        kontrol=false;
    else
        prompt = {strcat('Rank değeri 1 ile ', num2str(n), ' arasında olabilir!')};
        dlg_title = 'Hatalı Değer Girişi';

```

```

num_lines = [1 100];
def = {'';
a = inputdlg(prompt,dlg_title,num_lines,def);
rank=str2num(a{1});
end
end
%% Anti-simetrik matrisin oluşturulması
for i=1:n
for j=1:n
matris(i,j)={'0'};
end
end

if mod(nu,2) == 0
for i=1:fix(n/2)
if k== -1
matris(2*i-1,2*i)={ strcat('L',num2str(i))};
matris(2*i,2*i-1)={ strcat('-L',num2str(i))};
i=i+1;
else
matris(2*i-1,2*i)={ num2str(k)};
matris(2*i,2*i-1)={ num2str(-k)};
i=i+1;
end
end
else
for i=1:fix(n/2)
if i < (nu/2)
if k== -1
matris(2*i-1,2*i)={ strcat('-L',num2str(i))};
matris(2*i,2*i-1)={ strcat('L',num2str(i))};
else
matris(2*i-1,2*i)={ num2str(-k)};
matris(2*i,2*i-1)={ num2str(k)};
end
elseif i < (nu/2+1)
if k== -1
matris(2*i-1,2*i)={ strcat('L',num2str(i))};
matris(2*i,2*i-1)={ strcat('L',num2str(i))};
else
matris(2*i-1,2*i)={ num2str(k)};
matris(2*i,2*i-1)={ num2str(k)};
end
else
if k== -1
matris(2*i-1,2*i)={ strcat('L',num2str(i))};
matris(2*i,2*i-1)={ strcat('-L',num2str(i))};
else
matris(2*i-1,2*i)={ num2str(k)};
matris(2*i,2*i-1)={ num2str(-k)};
end
end
end
end
i=i+1;
end
matris1=matris;
for i=1:n
matris(i,n+1)={ strcat('a',num2str(i))};
matris(n+1,i)={'0'};
end
end

```

```

    matris(n+1,n+1)={'1'};
%% Ranka göre [AC] matrisinin düzenlenmesi
    [a,b]=size(matris);
    if rank==1
        for i=1:a
            for j=1:b-1
                matris(i,j)={'0'};
            end
        end
    elseif rank>1
        if mod(rank,2)==0
            for i=(rank+1):(a-1)
                for j=1:b
                    matris(i,j)={'0'};
                end
            end
        else
            for i=(rank):(a-1)
                for j=1:b-1
                    matris(i,j)={'0'};
                end
            end
            for j=(rank+1):(a-1)
                matris(j,b)={'0'};
            end
        end
    end
%% C sütun matrisinin oluşturulması
    for i=1:n
        matris2(i,1)={ strcat('x',num2str(i)) };
    end
    matris2(i+1,1)={'1'};
%% Vektör alanının değerinin hesaplanması
    for j=1:n+1
        d1=1;
        for i=1:n+1
            if strcmp(matris{j,i},'0')==0
                if strfind(matris{j,i},'L')>0
                    matris3(d1,j)=strcat(matris(j,i),',',matris2(i));
                    d1=d1+1;
                elseif strfind(matris{j,i},'a')>0
                    matris3(d1,j)=matris(j,i);
                    d1=d1+1;
                else
                    if matris{j,i}=='1'
                        matris3(d1,j)=matris2(i);
                    elseif matris{j,i}=='-1'
                        matris3(d1,j)=strcat('-',matris2(i));
                    else
                        matris3(d1,j)=strcat(matris(j,i),matris2(i));
                    end
                    d1=d1+1;
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

%% diferansiyel denklemlerin oluşturulması

```

[c,d]=size(matris3);
st='';
for i=1:d-1
    st=(strcat('dx',num2str(i),'dt=',matris3(1,i)));
    for j=2:c
        if not(isempty(matris3{j,i}))
            if strcmp(matris3{j,i}(1),'-')==0
                st=strcat(st,'+',matris3(j,i));
            elseif strcmp(matris3{j,i}(1),'-')==1
                st=strcat(st,matris3(j,i));
            end
        end
    end
end

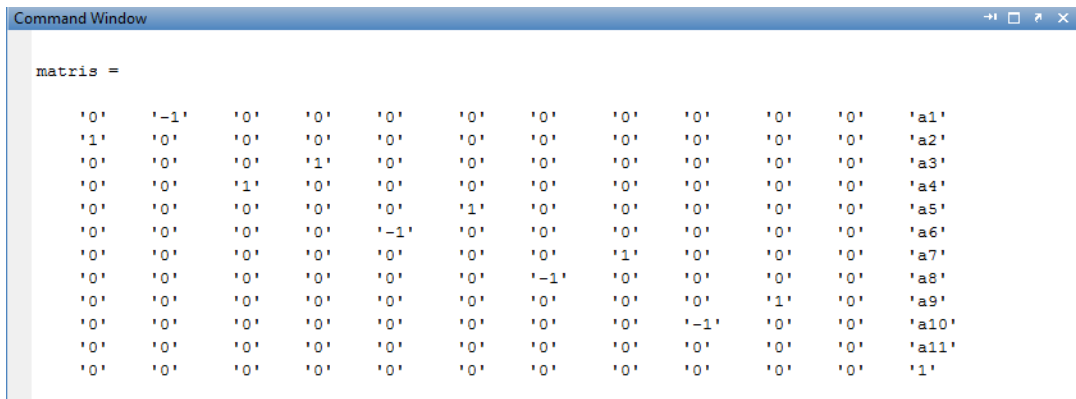
if length(st{1})<=8
    st=strcat(st,'0');
end

str(i,1)=st;
end
if (nu==0)
    msg=strcat(num2str(n),' Boyutlu Öklid Uzayında İntegral Eğrileri');
elseif (nu==1)
    msg=strcat(num2str(n),' Boyutlu Lorentz Uzayında İntegral Eğrileri');
else
    msg=strcat(num2str(n),' Boyutlu Semi-Öklid Uzayında İntegral Eğrileri (nü=',num2str(nu),' için)');
end

[e,f]=size(str);
for temp=e:-1:1
    str(temp+3,1)=str(temp,1);
end
str(1,1)={msg};str(2,1)={' '};str(3,1)={' '};

```

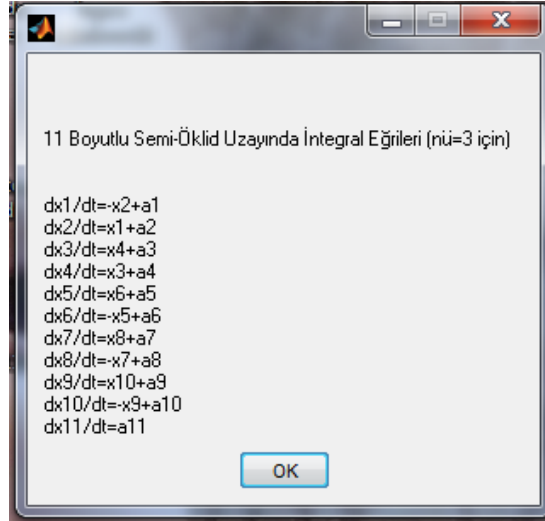
Örnek 5.1. Dışarıdan girilen $n=5$, $\nu = 3$ ve $\lambda = 1$ için ekranda görülen program çıktıları aşağıdadır.



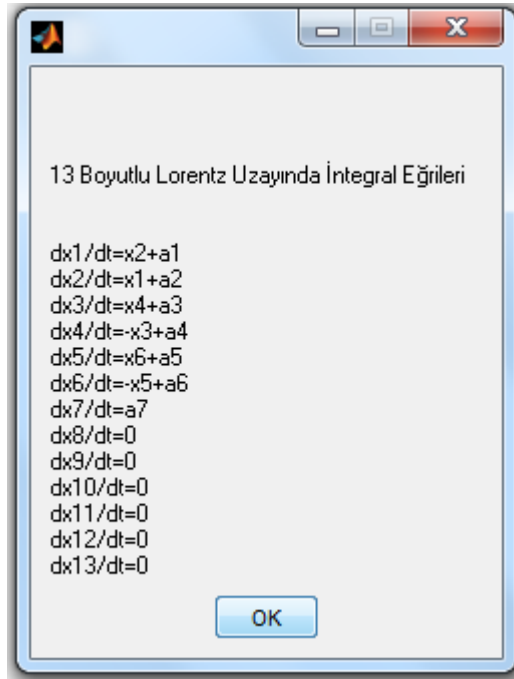
```

Command Window
matris =
    '0'  '-1'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a1'
    '1'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a2'
    '0'  '0'  '0'  '1'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a3'
    '0'  '0'  '1'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a4'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '1'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a5'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '-1'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a6'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '1'  '0'  '0'  '0'  'a7'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '-1'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a8'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '1'  '0'  'a9'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '-1'  '0'  '0'  'a10'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  'a11'
    '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '0'  '1'

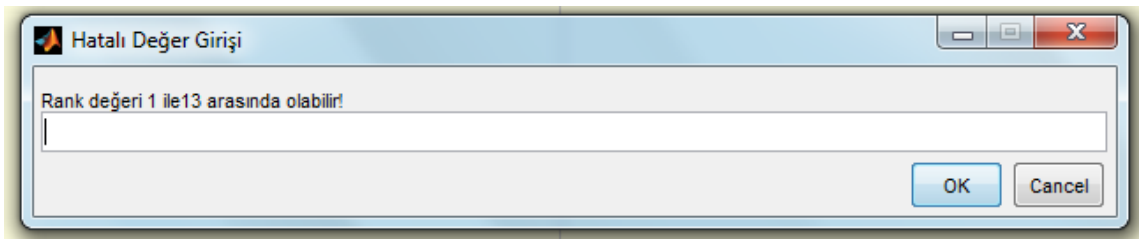
```



Örnek 5.2. Dışarıdan girilen $n=6$, $\nu=1$, $\text{rank}=7$ ve $\lambda=1$ için ekranda görülen program çıktıları aşağıdadır.



Eğer programa dışarıdan girilen değerler uygun değilse örneğin yukarıdaki örnek için rank değeri 14 girilirse



şeklinde hatalı değer girildiğine dair uyarı gelecektir. Burada istenilen şartlarda bir değer girilirse program çalışmaya devam edecektir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu çalışma da lineer vektör alanların integral eğrilerinin sınıflaması yapılmaya çalışıldı.

1. Öncelikle Öklid uzayında tanımlanan lineer vektör alanı kavramının, Lorentz uzayında ve yarı-Öklid uzayındaki karşılığı verildi. Bu tanımdan yararlanılarak bazı teoremler ispatlandı.

2. $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayında bir anti-simetrik matrisin normal formda nasıl yazılabileceği gösterildi. Bu anti-simetrik matristen yararlanarak bir lineer vektör alanına karşılık gelen matris elde edildi. Lineer vektör alanına karşılık gelen matrisin rankına göre integral eğrilerinin sınıflaması yapıldı.

3. $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında bir anti-simetrik matrisin normal formda nasıl yazılabileceği gösterildi. Bu anti-simetrik matristen yararlanarak bir lineer vektör alanına karşılık gelen matris elde edildi. Lineer vektör alanına karşılık gelen matrisin rankına göre integral eğrilerinin sınıflaması yapıldı.

4. $(2n+1)$ -boyutlu Lorentz uzayı ve $(2n+1)$ -boyutlu yarı-Öklid uzayında integral eğrilerinin sınıflanmasında kullanılan birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemleri için Matlab programında komutlar oluşturuldu.

6.2. Öneriler

Bu çalışmadan yola çıkarak, yönlendirilmiş yollara karşılık gelen ve komşuluk matrisi olarak isimlendirilen A anti-simetrik matrisi ve yönlendirilmiş yolun bir köşesinden pozitif yönde çıkan okların sayısı yardımıyla oluşturulan C kolon matrisi yardımıyla vektör alanları elde edilebilir ve elde edilen vektör alanların integral eğrileri hesaplanabilir. Böylece yönlendirilmiş yollara karşılık gelen integral eğrisi ile yönlendirilmiş yol arasında bir ilişki kurulabileceği düşünülmektedir. Başka bir deyişle, bize verilen keyfi bir yönlendirilmiş yolun temsil ettiği vektör alanına karşılık gelen integral eğrisi işlem yapılmadan söylenebilir. Bu düşünce diğer yönlendirilmiş graf türlerinde de araştırılabilir.

Ayrıca bu çalışmada sınıflama yapılırken kullanılan A anti simetrik matrisi, Durum 3 de bulunan formda kullanıldığında karşımıza çıkan sabit katsayılı diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü bulunamamıştır. Bu diferansiyel denklem sisteminin çözümü araştırılıp bulunan sonuçlar irdelenebilir.

KAYNAKLAR

- Acratalishian, A., 1989, On the linear vector fields in E^{2n+1} , Commun. Fac. Sci. Ank., 39, 21-35.
- Anonymous, Vector Fields [online], <http://www.fusdweb.com/sites/hs/JurupaHills/Documents/Calculus%20Textbook/Chapter%2015.pdf>, [Ziyaret Tarihi: 08. 08. 2013].
- Arifođlu, U., 2012, Matlab 7.14 Simulink ve Mühendislik Uygulamaları, Alfa Bilgisayar, İstanbul, 965 p.
- Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., Oturañ G., 2003, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, E.Ü Müh. Fakültesi Ders Kitapları Yayınları, No:14, İzmir, 554 p.
- Ayyıldız, N., Turhan, T., 2012, A study on a ruled surface with lightlike ruling for a null curve with Cartan frame, Bull. Korean Math. Soc., 49, (3), 635-645.
- Bal, Ç., 2005, Dört Boyutlu Minkowski Uzayı [online], Türkiye, <http://www.zamandayolculuk.com/cetinbal/htmldosya1/minkowskiuzayi.htm>, [Ziyaret Tarihi: 05.08.2013].
- Beem, J., K., Ehrlich, P., E., 1981, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, Inc., New York, 460 p.
- Boothby, W., M., 1968, On the integral curves of a linear differential form of maximum rank, Math. Annalen, 177, 101-104.
- Campbell, D., F., 1907, A Short Course on Differential Equations, Macmillan Company, London, 144 p.
- Cannon, J., Floyd, W., Kenyon R., and Parry, W., 1997, Hyperbolic Geometry, Flavors of Geometry MSRI Publications, 31, 59-80.
- Coleman, C., 1959, A certain class of integral curves in 3-space, The Annals of Mathematics, Second Series, 69, (3), 678-685.
- Çiftçi, Ü., 2004, Semi-Riemann Manifolalarında Null Eğrilerin Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta 54 p.
- Duggal, K., L., Bejancu, A., 1996, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 303 p.
- Duggal, K., L., Jin, D., H., 2007, Null curves and Hypersurfaces of Semi Riemannian Manifolds, World Scientific, Singapore, 293 p.
- Do Carmo, M., P., 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, 503 p.

- Ferrandez, A., Gimenez, A., and Lucas, P., 2001, Characterization of null curves in Lorentz-Minkowski spaces, *Publicaciones de la RSME*, 3, 221-226.
- Ferrandez, A., Gimenez, A., and Lucas, P., 2002, Null generalized helices in Lorentz-Minkowski spaces, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 35, 8243-8251.
- Ferrandez, A., Gimenez, A., and Lucas, P., 2001, Null helices in Lorentzian space forms, *International Journal of Modern Physics*, 16, 4845-4863.
- Galbis, A., Maestre, M., 2012, *Vector Analysis Versus Vector Calculus*, Springer, New York, 375 p.
- Graves, L., K., 1979, Codimension one isometric immersions between Lorentz Spaces, *American Mathematical Society*, 252, 367-392.
- Hacısalıhoğlu, H., 2000, *Diferensiyel Geometri*, Hacısalıhoğlu Yayıncılık, 269 s., Ankara.
- Karger, A., Novak, J., 1985, *Space Kinematics and Lie Groups*, Gordon and Breach Science Publishers, 422 p.
- Lisker, R., 2005, Vector Fields [online], <http://www.fermentmagazine.org/seminar>, Wesleyan University, [Ziyaret Tarihi: 05.01.2012].
- Lopez, R., 2008, Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space [online], http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0810/0810.3351v1.pdf. [Ziyaret Tarihi: 10.05.2011].
- Madea, S., Adachi, T., 2001, Integral curves of Killing vector fields in a complex projective space, *Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ.*, 34, 61-85.
- Madea, S., Adachi, T., 2006, Integral curves of characteristic vector field of real hypersurfaces in nonflat complex space forms, *Geom. Dedicata*, 123, 65-72.
- Miller, H., 2010, Vector fields on spheres [online], <http://math.berkeley.edu/~ericp/latex/haynes-notes/haynes-notes.pdf>, [Ziyaret Tarihi: 03.01.2012].
- O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 469 p.
- O'Neill, B., 1997, *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Academic Press, Inc., New York, 482 p.
- Ozturk, E.B., Ozturk, U., Yaylı, Y., Ozkaldı, S., 2011, Integral curves of a Spiral Vector Field in E^n , *Int. J. of Mathematical Sciences and Applications*, 1, no.1, 1-17.
- Oprea, J., 1997, *Differential Geometry and Its Applications*, Prentice Hall, Inc, 387 p.
- Stewart, J., 2007, *Kalkülüs, Kavram ve Kapsam, Diferansiyel ve İntegral Hesap*, Türkiye Bilimler Akademisi, 990 p.

- Taleshian, A., 2004, Integral Curves of a Linear Vector Field, Differential Geometry-Dynamical Systems, 6, 37-42.
- Taleshian, A., 2007, Classification of Integral Curves in $(2n+1)$ Dimensional Vector Field, Int. J. Contemp. Math. Sciences, vol. 2, no. 7, 333-341.
- Yaylacı, T., 2006, Lineer Vektör Alanları ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 49 p.
- Z., Iliev, B., Rahula, M., 2008, Linear vector fields and exponential law [online], <http://www.arXiv.org>, no.:math.DG/0604005, 21p, [Ziyaret Tarihi: 20.12.2011].

EKLER

EK-1: TEZ DE KULLANILAN MAPLE KOMUTLARI

Şekil 3.1.2 de kullanılan Maple komutları;

```
VectorField(<-y, x>, output=plot, scaling=constrained, color=red, fieldoptions=[fieldstrength=fixed, arrows=SLIM, grid=[8,8]]);
```

```
VectorField(<y, sin(x)>, output=plot, scaling=constrained, color=red, fieldoptions=[fieldstrength=fixed, arrows=SLIM, grid=[8,8]]);
```

```
VectorField(<ln(1+y2), ln(1+x2)>, output=plot, scaling=constrained, color=red, fieldoptions=[fieldstrength=fixed, arrows=SLIM, grid=[8,8]]);
```

Şekil 3.1.3 de kullanılan Maple komutları;

```
VectorField(<y, z, x>, output=plot, scaling=constrained, color=red, axes=normal, axes=boxed, fieldoptions=[fieldstrength=fixed, grid=[5, 5, 5]]);
```

```
VectorField(<y, -2, x>, output=plot, scaling=constrained, color=red, axes=normal, axes=boxed, fieldoptions=[fieldstrength=fixed, grid=[5, 5, 5]]);
```

```
VectorField(<y/z, -x/z, z/4>, output=plot, scaling=constrained, color=red, axes=normal, axes=boxed, fieldoptions=[fieldstrength=fixed, grid=[5, 5, 5]]);
```

Şekil 3.2.1 de kullanılan Maple komutları;

```
FlowLine(VectorField(<-y, x>), <1, 1>, fieldoptions=[transparency=0, scaling=constrained, thickness=1, color=red, grid=[8, 8], arrow=SLIM], flowlineoptions=[color=black, thickness=4], axes=normal, view=[-2..2, -2..2]);
```

Şekil 3.2.2 de kullanılan Maple komutları;

```
FlowLine(VectorField(<-3y, x, 1>), <-1, 1, 5>, fieldoptions=[transparency=0, scaling=constrained, thickness=1, color=red, grid=[6, 6, 6], arrow=SLIM], flowlineoptions=[color=black, thickness=4, style=surface], axes=normal, axes=boxed, view=[-7..7, -7..7, -7..7]);
```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Tunahan TURHAN
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : Alanya-01.02.1986
Telefon : 0535 281 85 61
Faks :
e-mail : tturhan07@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı,	İlçe,	İl	Bitirme Yılı
Lise	: A.Feyzi Alaettinoğlu Lisesi,	Alanya,	Antalya	2004
Üniversite	: Süleyman Demirel Üniversitesi,		Isparta	2008
Yüksek Lisans	: Süleyman Demirel Üniversitesi,		Isparta	2010
Doktora	: Selçuk Üniversitesi ,		Konya	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2010-2013	S.Ü. Seydişehir M.Y.O.	Öğretim Görevlisi
2013-	N.E.Ü. Seydişehir M.Y.O.	Öğretim Görevlisi

UZMANLIK ALANI: Diferansiyel Geometri

YABANCI DİLLER: İngilizce

YAYINLAR

- [1] Turhan, T., Ayyıldız, N., 2011, On Curvature Theory of Ruled Surfaces With Lightlike Ruling in Minkowski 3-Space, International Journal of Mathematical Sciences and Applications, 1(3), 1295-1302. (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır).
- [2] Nihat Ayyıldız and Tunahan Turhan, 2012, A Study on a Ruled Surface with Lightlike Ruling for a Null Curve with Cartan Frame, Bull. Korean Math. Soc. 49, 3, 635-645. (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır).
- [3] Tunahan Turhan and Nihat Ayyıldız, 2013, Some Results on the Differential Geometry of Spacelike Curves in De-sitter Space, Journal of Applied Mathematics and Physics, 1, 55-59.

BİLDİRİLER

- [1] Turhan, T., Ayyıldız, N., A Study on Ruled Surface with Lightlike Ruling for a Null Curve with Cartan Frame, Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference, Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, September 15-20, 2010, Sunny Beach, Bulgaria (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır).
- [2] Turhan, T., Ayyıldız, N., A Study on Ruled Surface with Lightlike Ruling in Minkowski 3-Space, XVI. Geometrical Seminar, September 20-24, 2010, Vrnjacka Banja , Serbia (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır).
- [3] Turhan, T., Ayyıldız, N., Integral Curves of a Linear Vector Field in $(2n+1)$ -dimensional Lorentzian Space, Geometry in Odessa-2012, 28 May-2 June, 2012, Odessa, Ukraine. (Doktora tezinden yapılmıştır).
- [4] Ayyıldız, N., Turhan, T., The Differential Geometry of Curves in De-Sitter Space, Geometry in Odessa-2012, 28 May-2 June, 2012, Odessa, Ukraine.

PROJELER

- [1] Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Lightlike Doğrultmanlı Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Üzerine, S.D.Ü. B.A.P. 2037-YL-09, 2009-2010

BURSLAR

- [1] 2211 TUBİTAK Yurtiçi Doktora Bursu