T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYI DİZİLERİYLE İLGİLİ BAZI ÖZDEŞLİKLERİN LAPLACE AÇILIMI İLE İSPATLARI

MERAL YAŞAR

Aralık 2014

M. YAŞAR, 2014

DOKTORA TEZİ

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T. C
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYI DİZİLERİYLE İLGİLİ BAZI ÖZDEŞLİKLERİN LAPLACE AÇILIMI İLE İSPATLARI

Meral YAŞAR

Doktora Tezi

1. Danışman
Doç. Dr. Atakan T. YAKUT

2. Danışman
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Aralık 2014-NİĞDE

Meral YAŞAR tarafından **Doç. Dr. Atakan T. YAKUT ve Prof. Dr. Durmuş BOZKURT** danışmanlığında hazırlanan "**Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizileriyle İlgili Bazı Özdeşliklerin Laplace Açılımı ile İspatları**" adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Ana Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Prof.Dr.Murat ALP
(Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Prof.Dr.Durmuş BOZKURT
(Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Doç.Dr.Atakan T. YAKUT
(Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Doç.Dr.Ramazan TÜRKMEN
(Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü)

Üye : Doç.Dr.Serkan KADER
(Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından …./…./20.... tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun …./…./20.... tarih ve .... sayılı kararıyla kabul edilmiştir.

....../...../20...

Doç. Dr. Murat BARUT
MÜDÜR

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Meral YAŞAR

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYI DİZİLERİYLE İLGİLİ BAZI ÖZDEŞLİKLERİN LAPLACE AÇILIMI İLE İSPATLARI

YAŞAR, Meral
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman :Doç. Dr. Atakan T. YAKUT
İkinci Danışman :Prof.Dr. Durmuş BOZKURT

Aralık 2014, 65 sayfa

Bu çalışmada, Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizilerinin bir genelleştirmesi olan, G_n genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için farklı iki özdeşlik, üçlü bant $D(n)$ matris dizisinin determinantlarında Laplace açılım formülü kullanılarak ispatlanmıştır. Fibonacci sayı dizisinin de sağladığı bu özdeşlikler üçlü bant matris dizisinin determinantlarından faydalanılarak farklı bir yolla elde edilmiştir. Benzer özdeşliklerin Pell ve Jacobsthal sayı dizileri için de geçerli olduğu, yine her bir sayı dizisi için farklı üçlü bant matris dizilerinin determinantları kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca, negatif indisli Fibonacci ve Pell sayılarının bir genelleştirmesi olan G_{-n} sayı dizisi için bir özdeşlik verilip üçlü bant matrislerin permanentleri kullanılarak bu özdeşliğin ispatı yapılmıştır. Son olarak negatif indisli Fibonacci ve Pell sayılarının da gerçeklediği bu özdeşlik, yine her bir sayı dizisi için farklı üçlü bant matrislerde permanent hesabı kullanılarak ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Fibonacci, Pell, Jacobsthal sayıları, determinant, permanent, Laplace açılım metodu.

SUMMARY

PROOFS OF SOME GENERALIZED FIBONACCI IDENTITIES BASED ON LAPLACE EXPANSION FORMULA

YAŞAR, Meral
Nigde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor :Associate Professor Dr. Atakan T. YAKUT
Co-Advisor :Professor Dr. Durmuş BOZKURT

December 2014, 65 pages

In this study, two different identities are given for the generalized Fibonacci sequence G_n which is a generalization of Fibonacci, Pell and Jacobsthal number sequences are proved by using the determinant of the tridiagonal matrix sequence $D(n)$. While calculating the determinant, Laplace expansion formula is used. These identities satisfied by Fibonacci numbers are proved using the determinant of a tridiagonal matrix sequence in a different method. Also, it is seen that Pell an Jacobsthal numbes satisfy the similar identities and they are proved by using the determinants of different tridiagonal matrix sequences for each number sequence. In addition, an identity is given for the sequence G_{-n} which is a generalization of negatively subscripted Fibonacci and Pell numbers and this identity is proved using the permanents of tridiagonal matrix sequences. Finally, this identity satisfied by negatively subscripted Fibonacci and Pell numbers is proved by using the permanents of different tridiagonal matrix for each sequence.

Keywords: Fibonacci, Pell, Jacobsthal numbers, determinant, permanent, Laplace expansion formula.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizilerine ait özdeşliklerin farklı bir metotla ispatlanması amaçlanmıştır. Ayrıca determinantları bu sayı dizilerinin elemanlarını veren bir üçlü bant matris dizisi oluşturulmuş ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için geçerli olan özdeşlikler, bu üçlü bant matris dizisinin determinantları kullanılarak ispatlanmıştır. Pozitif indisli Fibonacci ve Pell sayılarının sağladığı özdeşliğe benzer bir özdeşlik negatif indisliler için de verilmiş ve ispatı, permanentleri bu sayı dizilerini veren üçlü bant matrisler yardımıyla yapılmıştır.

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Durmuş BOZKURT ve Doç. Dr. Atakan T. YAKUT'a, Erasmus programı kapsamında Litvanya'da Kaunas University of Technology'de geçirdiğim süre içinde tecrübelerinden faydalandığım Prof. Dr. Jonas Rimas'a ve TÜBİTAK BİDEB-2211 Yurt İçi Doktora burs programına teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu tezi, beni bugünlere getiren, maddi ve manevi destekleriyle hiçbir zaman yalnız bırakmayan babam Nazmi YAŞAR, annem Neslihan YAŞAR ve kardeşlerime ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
F_n	$n.$ Fibonacci sayısı
P_n	$n.$ Pell sayısı
J_n	$n.$ Jacobsthal sayısı
G_n	Genelleştirilmiş dizinin $n.$ elemanı
F_{-n}	$-n.$ Fibonacci sayısı
P_{-n}	$-n.$ Pell sayısı
$\|A\|$	A matrisinin determinantı
$per(A)$	A matrisinin permanenti
$A([i_1,i_2,\dots,i_k],[j_1,j_2,\dots,j_k])$	A matrisinin $k\times k$ tipindeki alt matrisi
$\overset{o}{A}([i_1,i_2,\dots,i_k],[j_1,j_2,\dots,j_k])$	A matrisinin $(n-k)\times(n-k)$ tipindeki kofaktörü
$per(\overset{o}{A}([i_1,i_2,\dots,i_k],[j_1,j_2,\dots,j_k]))$	A matrisinin $(n-k)\times(n-k)$ tipindeki alt matrisinin permanenti
A_n^r	$A(n)$ matrisinin $r.$ daralması

BÖLÜM I
GİRİŞ

Bu çalışmada, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi G_n ve negatif indisli G_{-n} dizisine ait özdeşliklerin farklı bir metotla ispatlanması amaçlanmıştır.
Bu bölümde sayı dizilerinin tarihçesi, ispatlarda faydalanılan temel kavramlar ve kaynaklar bölümünde kullanılan çalışmaların kısa bir özeti verilecektir.

1.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda, Bölüm II ve Bölüm III'te verilen teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan tanımlar aşağıda verilmiştir:

Tanım 1.1 $A=(a_{ij})$ $n\times n$ tipinde bir matris ve S_n, $\{1,2,\ldots,n\}$ kümesi üzerinde bir simetrik grup olmak üzere A matrisinin permanenti

$$per(A)=\sum_{\sigma\in s_n}\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır (Brualdi ve Gibson, 1977).

Tanım 1.2 A, $n\times n$ tipinde bir matris, $A([i_1,i_2,\ldots,i_k],[j_1,j_2,\ldots,j_k])$, A matrisinin $k\times k$ tipinde alt matrisi ve $M([i_1,i_2,\ldots,i_k],[j_1,j_2,\ldots,j_k])$, A matrisinin $(n-k)\times(n-k)$ tipinde minörü olmak üzere A matrisinin kofaktörü,

$1\le i_1,i_2,\ldots,i_k\le n$ ve $m=\sum_{r=1}^{k}(i_r+j_r)$ için

$$\overset{o}{A}([i_1,i_2,\ldots,i_k],[j_1,j_2,\ldots,j_k])=(-1)^m M([i_1,i_2,\ldots,i_k],[j_1,j_2,\ldots,j_k])$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca A matrisinin determinantı da

$$|A| = \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n} \det\left(A([i_1, i_2, \ldots, i_k], [j_1, j_2, \ldots, j_k])\right) \det\left(\overset{o}{A}([i_1, i_2, \ldots, i_k], [j_1, j_2, \ldots, j_k]) \right) \qquad (1.1)$$

biçiminde verilir. Eğer

$A(i, j) = a_{ij}$ ise

$$\overset{o}{A}(i, j) = (-1)^{i+j} M(i, j) = \overset{o}{A}_{ij}$$

olup A matrisinin determinantı

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overset{o}{A}_{ij}$$

olarak hesaplanır. Buna A matrisinin i. satıra göre Laplace açılım formülü denir (Bozkurt vd., 2005).

Tanım 1.3 A, $n \times n$ tipinde bir matris, $A([i_1, i_2, \ldots, i_k], [j_1, j_2, \ldots, j_k])$, A matrisinin $k \times k$ tipinde alt matrisi ve $\overset{o}{A}([i_1, i_2, \ldots, i_k], [j_1, j_2, \ldots, j_k])$, A matrisinin $i_1, i_2, \ldots, i_k$ -yıncı satır ve $j_1, j_2, \ldots, j_k$-yıncı sütunlarının silinmesiyle elde edilen $(n-k) \times (n-k)$ tipinde alt matrisi olmak üzere A matrisinin permanenti

$$per(A) = \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n} per(A([i_1, i_2, \ldots, i_k], [j_1, j_2, \ldots, j_k])) per(\overset{o}{A}([i_1, i_2, \ldots, i_k], [j_1, j_2, \ldots, j_k])) \qquad (1.2)$$

şeklinde de hesaplanabilir.

$\overset{o}{A}(i, j)$, A matrisinin i. satır ve j. sütununun silinmesiyle elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir matris olmak üzere A matrisinin permanenti

$$per(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, per(\overset{o}{A}(i,j))\ ,\ (i=1,2,\ldots,n)$$

olarak tanımlanır. Bu ifadeye permanent için $i.$ satıra göre A matrisinin Laplace açılımı denir (Brualdi, 1991).

Tanım 1.4 $A=(a_{ij})$, $n\times n$ tipinde bir matris ve $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ bu matrisin satır vektörleri olsun. Eğer A matrisinin $k.$ sütunu iki tane sıfırdan farklı eleman içeriyorsa A matrisine $k.$ sütun üzerinden daraltılabilir (contractible) matris denir. A, $k.$ sütun üzerinden daraltılabilir ise $a_{ik}\neq 0\neq a_{jk}$ ve $i\neq j$ için A matrisinin $i.$ satırının

$$a_{jk}\alpha_i + a_{ik}\alpha_j$$

ile yer değiştirilip $j.$ satır ve $k.$ sütununun silinmesiyle elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ tipindeki matris A matrisinin $i.$ ve $j.$ satırlara göre $k.$ sütun üzerinden daralması (contraction) diye adlandırılır (Brualdi ve Gibson, 1977).

Lemma 1.1 $n=1,2,\ldots$ için $H(n)$

$$H(n)=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & & & & & \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & & & & \\ & h_{23} & h_{33} & h_{34} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_{n-1,n-2} & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ & & & & & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir üçlü bant (tridiagonal) matris olmak üzere $H(n)$ matrisinin determinantı

$$|H(n)| = h_{nn}|H(n-1)| - h_{n-1,n}h_{n,n-1}|H(n-2)|$$

biçiminde hesaplanır (Cahill vd., 2009).

1.2. Fibonacci Sayı Dizisi

Leonardo Fibonacci, 1170-1250 yıllarında yaşamış, Ortaçağ Avrupasının en büyük matematikçilerinden kabul edilen, Fibonacci sayılarının bugünkü popülariteye ulaşmasını sağlayan İtalyan matematikçidir. Kuzey Afrika'da büyüyen Fibonacci ilk matematik eğitimini Müslüman eğiticilerden almış ve bugünkü kullandığımız Arap rakamlarını 1202'de yazdığı Liber Abaci kitabıyla Avrupa'ya tanıtmıştır. Fibonacci, bugünkü ününe bu kitabında yer alan "Tavşan Problemi" ile ulaşmıştır. Problem şu şekildedir: " Bir çift yeni doğmuş yavru tavşan bir ay içerisinde büyüyüp ikinci ay olgunlaşıp üçüncü ayın başında kendileri gibi bir çift tavşan yavrulasınlar. Doğan yavrular da ebeveynleri gibi yavruladığında ve bu tavşanların hiç ölmediği kabul edildiğinde $n.$ ayın sonunda kaç çift tavşan olur? "

Buna göre ilk ay yeni doğmuş bir çift yavru tavşan olsun. İkinci ay bu tavşanlar henüz yavrulayamadıklarından yine bir çift tavşan olacaktır. Üçüncü ayda eski çift tavşan ile yeni bir çift tavşan olur. Dördüncü ayda üçüncü ayın sonunda olan iki tavşan çifti ve olgun tavşanların yavrusu olacağından toplamda üç çift tavşan olur. $n.$ ayın başındaki tavşan sayısı F_n ise $(n-1).$ ayın başında F_{n-1} çift tavşan olup $n.$ ayın başında, son durumda F_{n-1} tavşan çifti olduğundan ve F_{n-2} tanesinin de yavrusu meydana geldiğinden

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

tavşan çifti olur (Vajda, S. 1989).

Yani Fibonacci sayıları, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Fibonacci sayılarının özelliklerini inceleyen birçok çalışma yapılmış ve bu sayılarının çeşitli genelleştirmeleri üzerinde durulmuştur:

Kalman (1982), $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ sabitler olmak üzere $(n+k)$. terimi önceki k terimin lineer toplamı olan

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

şeklinde bir dizi tanımlamış ve bu dizinin özelliklerini incelemiştir.

Er (1984), $n > 0,\ 1 \le i \le k$ için $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 'lar keyfi sabitler, g_n^i , *i*. dizinin *n*. terimi ve başlangıç şartları

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olmak üzere *k*-Fibonacci sayılarının *k* dizisini

$$g_n{}^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i$$

şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca $n \ge 0$ için genelleştirilmiş k-Fibonacci sayılarının S_n toplamlar dizisini tanımladığı A kare matrisinden faydalanarak hesaplamıştır.

Kılıç (2007), $r \ge 0$ ve $4^{r-1} + 1 \ne 0$ olmak üzere $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ başlangıç koşulları altında Fibonacci ve Pell sayıları

$$x_{n+1} = 2^r x_n + x_{n-1}$$

şeklinde genelleştirilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, $n > 0, m \ge 0$ ve $1 \le i \le k$ için $1-k \le n \le 0$ olmak üzere

$$u_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & diğer \end{cases}$$

başlangıç koşulları altında

$$u_n^i = 2^m u_{n-1}^i + u_{n-2}^i + \cdots + u_{n-k}^i$$

dizisi tanımlanmış ve hem Fibonacci hem de Pell dizisinin genelleştirmesi olan bu dizi, genelleştirilmiş k-Fibonacci-Pell dizisi olarak adlandırılmıştır. Burada u_n^i, genelleştirilmiş i. Fibonacci-Pell dizisinin n. terimidir. Bu dizi için üreteç matrisi bulunmuş ve matrislerden faydalanılarak bu dizinin toplamları için çeşitli ifadeler elde verilmiştir. Ayrıca, bu dizi için bazı özdeşlikler elde edilmiştir.
Fibonacci sayıları için bir genelleştirme verilmiş ve k-genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için determinantlardan faydalanılarak genelleştirilmiş Binet formülü oluşturulmuştur (Lee vd., 2001).

Fibonacci, Lucas ve Pell sayıları için A ve B, $A^2 - 4B \neq 0$ olacak şekilde iki tam sayı ve başlangıç şartları $u_0 = 0, u_1 = 1$ ve $v_0 = 0, v_1 = A$ olmak üzere

$$u_n = Au_{n-1} - Bu_{n-2}$$
$$v_n = Av_{n-1} - Bv_{n-2}$$

şeklinde bir bağıntı tanımlanmıştır (Robbins, 1993).

Bunun yanı sıra Fibonacci sayılarının bazı özelliklerinin ispatı incelenmiştir (Kılıç ve Taşcı, 2006; Kılıç, 2007).

Feng, (2011) determinant açılımından faydalanarak bazı Fibonacci özdeşlikleri için yeni bir ispat yöntemi vermiştir.

Kılıç ve Taşcı, (2007) bazı üçlü bant matrisler ile negatif ve pozitif indisli Fibonacci ve Lucas sayıları arasında bir takım ilişkiler elde etmişlerdir.
Negatif indisli ikinci dereceden lineer reküranslar ile üçlü bant matrislerin determinant ve permanentleri arasındaki bağıntı incelenmiş ve ayrıca negatif indisli terimler ile Chebyshev polinomları arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur (Kılıç ve Taşcı, 2007).

Yazarlar, ikinci dereceden lineer reküranslar ile üçlü bant matrislerin determinantları ve permanentleri arasındaki ilişkiler üzerinde durmuşlardır (Kılıç ve Taşcı, 2009).

Kılıç, (2007) ikinci derece lineer reküranslar üzerinde durmuşlar, negatif ve pozitif indisli terimlerinin toplamları için üreteç matrisi vermiş ve bu toplamlar elde edilirken de matris metodu kullanmıştır.

Kılıç ve Taşcı, (2010) determinantları ve permanentleri negatif ve pozitif indisli Fibonacci ve Lucas sayıları olan $(0,-1,1)$- üçlü bant matrisi üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca bu sayılar için birinci ve ikinci tür Chebyshev polinomlarından faydalanarak kompleks faktorizasyon formülü vermişlerdir.

Shen vd. (2011), bu çalışmada F_n ve L_n sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayılarını göstermek üzere $A_n = Circ(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ ve $B_n = Circ(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ şeklindeki sirkülant (devirli) matrislerin determinantlarını hesaplamışlardır. Ayrıca $n > 2$ için A_n ve herhangi bir pozitif n tamsayısı için de B_n matrisinin tersinir matrisler olduğu gösterilip bu matrislerin ters matrisleri elde edilmiştir.

1.3 Pell Sayı Dizisi

İngiliz diplomat ve matematikçi olan John Pell'den adını alan Pell sayıları $n \geq 2$ için başlangıç şartları $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \tag{1.4}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır.

Pell sayılarının özelliklerini ve genelleştirmelerini inceleyen çok sayıda çalışma yapılmıştır:

Horadam (1971), Pell sayıları için bir takım özellikler vermiş ve bunları genelleştirilmiş $\{W_n(a,b;p,q)\}$ dizisini kullanarak ispatlamıştır. $\{W_n(a,b;p,q)\}$ dizisi başlangıç şartları $W_0 = a$ ve $W_1 = b$ olmak üzere

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. W_n dizisi için

$$W_{n+r} = W_r U_{n+1} - qW_{r-1} U_n$$

biçiminde bir eşitlik elde edilmiştir. $a = 0, b = 1, p = 2$ ve $q = -1$ alındığında W_n dizisi P_n Pell dizisini vereceğinden (2.14) ile verilen eşitlik elde edilmiş olur. İkinci bölümde bu eşitliğin üçlü bant matrislerin determinantları kullanılarak farklı bir yolla ispatlanması amaçlanmaktadır.

$1-k \leq n \leq 0$ için

$$P_n^i = \begin{cases} 1, & n = 1-i \\ 0, & diğer \end{cases}$$

başlangıç şartları altında genelleştirilmiş k-Pell sayılarının k dizisini $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ olmak üzere

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \cdots + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada P_n^i, i. dizinin n. terimini göstermektedir. Ayrıca bu çalışmada, matrislerden faydalanılarak genelleştirilmiş k-Pell sayılarının toplamları da verilmiştir (Kılıç ve Taşcı, 2006).
Bazı Pell özdeşlikleri farklı metotlar kullanılarak ispatlanmıştır (Kılıç ve Taşcı, 2006;. Kılıç, 2008; Yaşar ve Bozkurt, 2012).

Fibonacci-Hessenberg matrisleri elde edilip Pell ve Perrin sayıları ile ilgili iki sonucun farklı ispatları verilmiştir (Li, 2012).

Pell sayıları için bir genelleme verilip oluşturulan bu yeni sayı, genelleştirilmiş Pell (p,i)-sayıları olarak adlandırılmıştır. Bu yeni sayı dizisinin üreteç matrisleri ve sayı dizisi arasında bağıntılar verilmiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Pell (p,i)-sayıları ve bu matrislerin permanentleri arasında bağıntılar elde edilmiştir (Kılıç, 2009)

1.4 Jacobsthal Sayı Dizisi

Adını Alman matematikçi Ernst Erich Jacobsthal'dan alan Jacobsthal sayıları, $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ başlangıç şartları olmak üzere

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \tag{1.5}$$

bağıntısıyla tanımlanır. Jacobsthal sayılarının da genelleştirmeleri ve özellikleri büyük ilgi çekmektedir:

Campos vd. (2014), Horadam (1988)'in tanımladığı Jacobsthal-Lucas sayılarının da bir genelleştirmesi olan $k-$Jacobsthal-Lucas sayılarını tanımlamışlardır. Bu yeni dizi için bazı özellikler verip bunların ispatı üzerinde çalışmışlardır.

Yazarlar, elemanları Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları olan $J_n = circ(J_1, J_2, \ldots, J_n)$ ve $j_n = circ(j_0, j_1, \ldots, j_n)$ sirkülant matrislerinin determinantlarını bu sayılara bağlı olarak elde etmişlerdir. Ayrıca bu sirkülant matrislerin terslerini de hesaplamışlardır (Bozkurt ve Tam, 2012).

Jhala vd. (2013), $k-$Jacobsthal sayıları için Binet formülü bulmayı amaçlayıp bu formül yardımıyla da $k-$Jacobsthal sayılarının bazı özelliklerini elde etmiştir.
Jacobsthal rekürans bağıntısı ve özellikleri daha yüksek dereceli rekürans bağıntısına genişletilmiş ve bu alanda çalışılmıştır (Cook vd., 2013).

Jacobsthal sayıları için geçerli olan

$$J_{m+n} = J_m J_{n+1} + 2J_{m-1} J_n$$

eşitliği

$$F=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan Jacobsthal $F-$matrisi için $F^{m+n}=F^mF^n$ özelliği geçerli olduğundan matrislerin eşitliği yardımıyla kolayca elde edilebilir (Köken, 2008).

İkinci bölümde, bu eşitliğin farklı bir yolla ispatlanıp bu eşitlik için bir genelleştirme yapılması amaçlanmaktadır.

1.5 G_n Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi

A ve B herhangi tamsayılar olmak üzere başlangıç şartları $G_0=0$ ve $G_1=1$ olan

$$G_n=AG_{n-1}+BG_{n-2} \tag{1.6}$$

G_n dizisi, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olarak adlandırılır (Kalman ve Mena, 2003). $A=B=1$ olduğu zaman $G_n=F_n$, n. Fibonacci sayısını, $A=2, B=1$ ise $G_n=P_n$, n. Pell sayısını, ve $A=1, B=2$ olduğu zaman $G_n=J_n$, n. Jacobsthal sayısını vermektedir. Bu aşağıdaki tablo ile de ifade edilebilir:

(A,B)	G_n
$(1,1)$	Fibonacci sayıları
$(2,1)$	Pell sayıları
$(1,2)$	Jacobsthal sayıları

1.6 G_{-n} Dizisi

$n\geq 2$ için Fibonacci ve Pell dizilerinin bir genelleştirmesi, başlangıç şartları $G_0=0$ ve $G_1=1$ olmak üzere

$$G_n=AG_{n-1}+G_{n-2} \tag{1.7}$$

şeklinde verilsin. (1.7) ile verilen rekürans bağıntısı G_n dizisinin elemanlarını geriye genişletmek için de kullanılabilir. Yani G_{-n} dizisinin elemanları

$$G_{-n} = -AG_{-n+1} + G_{-n+2} \tag{1.8}$$

bağıntısı kullanılarak elde edilebilir (Kılıç, 2007).

BÖLÜM II

G_n ÖZDEŞLİKLERİNİN LAPLACE AÇILIMI

Bu bölümde (1.6) genelleştirilmiş Fibonacci dizisine ait olan

$$G_{m+n+1} = G_{m+1}G_{n+1} + BG_mG_n$$

konvolüsyon özelliği ve

$$G_{2n} = G_n(G_{n+1} + BG_{n-1})$$

özdeşliği, bir determinant hesaplama yöntemi olan Laplace açılım formülü ile üçlü bant matrislerin determinantları hesaplanarak farklı bir yolla ispatlanmıştır. Ardından bu özdeşliklerin Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayıları için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

Kalman ve Mena, (2003)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A & B \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris tanımlamışlar ve

$$M^n = \begin{bmatrix} BG_{n-1} & G_n \\ BG_n & G_{n+1} \end{bmatrix}$$

olduğunu göstermişlerdir. Ardından matrislerde çarpma işleminden faydalanarak yani $M^n = M^m M^{n-m}$ gerçeğinden hareketle

$$\begin{bmatrix} BG_{n-1} & G_n \\ BG_n & G_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BG_{m-1} & G_m \\ BG_m & G_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BG_{n-m-1} & G_{n-m} \\ BG_{n-m} & G_{n-m+1} \end{bmatrix}$$

çarpma işleminden sonra matrislerin eşitliğini kullanmışlar ve konvolüsyon özelliğini ispatlamışlardır.

Şimdi Teorem 2.2'deki konvolüsyon özelliğinin ispatında kullanacağımız aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1

$$D(n)=\begin{bmatrix} Ai & B & & & \\ 1 & Ai & B & & \\ & 1 & Ai & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & B \\ & & & 1 & Ai \end{bmatrix}$$

şeklinde $n\times n$ tipinde bir üçlü bant matris ve

$$c=\begin{cases} 1, & n\equiv 0 \pmod 4 \\ -i, & n\equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & n\equiv 2 \pmod 4 \\ i, & n\equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

olmak üzere $D(n)$ matrisi ile G_n dizisi arasında

$$G_{n+1}=c\left|D(n)\right| \tag{2.1}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat: Her bir durum için tümevarım metodunu ve Lemma 1.1'i kullanalım.

1. Durum: $n\equiv 0 \pmod 4$ için

$n=4$ olduğunda $\left|D(4)\right|=\begin{vmatrix} Ai & B & 0 & 0 \\ 1 & Ai & B & 0 \\ 0 & 1 & Ai & B \\ 0 & 0 & 1 & Ai \end{vmatrix}=G_5$ olur.

$n=t$ için $G_{t+1}=|D(t)|$ olsun.

Bu adımda, $n=t+1$ için $G_{t+2}=-i|D(t+1)|$ eşitliğinin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$
\begin{aligned}
G_{t+2} &= AG_{t+1}+BG_t \\
&= A|D(t)|+iB|D(t-1)| \\
&= -i(Ai|D(t)|-B|D(t-1)|) \\
&= -i|D(t+1)|
\end{aligned}
$$

olup $n \equiv 0 \pmod 4$ için (2.1) ile verilen eşitlik doğru olmaktadır.

2. Durum: $n \equiv 1 \pmod 4$ için

$n=5$ olduğunda $|D(5)| = \begin{vmatrix} Ai & B & 0 & 0 & 0 \\ 1 & Ai & B & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Ai & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Ai & B \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Ai \end{vmatrix} = iG_6$ olur ki $G_6=-i|D(5)|$'tir.

$n=t$ için $G_{t+1}=-i|D(t)|$ olduğunu varsayalım.

$n=t+1$ için $G_{t+2}=-|D(t+1)|$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
G_{t+2} &= AG_{t+1}+BG_t \\
&= -Ai|D(t)|+B|D(t-1)| \\
&= -(Ai|D(t)|-B|D(t-1)|) \\
&= -|D(t+1)|
\end{aligned}
$$

olur ki, böylece $n \equiv 1 \pmod 4$ için (2.1) ile verilen eşitliğin doğru olduğu gösterilmiş olur.

3. Durum: $n \equiv 2 \pmod 4$ için

$n=2$ için $|D(2)| = \begin{vmatrix} Ai & B \\ 1 & Ai \end{vmatrix} = -G_3$ olup $G_3=-|D(2)|$'dir.

$n=t$ için $G_{t+1}=-|D(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $G_{t+2}=i|D(t+1)|$ eşitliğinin gerçeklendiğini göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} G_{t+2} &= AG_{t+1}+BG_t \\ &= -A|D(t)|-iB|D(t-1)| \\ &= i(Ai|D(t)|-B|D(t-1)|) \\ &= i|D(t+1)| \end{aligned}$$

olup, $n \equiv 2 \pmod 4$ için (2.1) ile verilen eşitlik doğrudur.

4. Durum: $n \equiv 3 \pmod 4$ için

$n=3$ için $|D(3)|=\begin{vmatrix} Ai & B & 0 \\ 1 & Ai & B \\ 0 & 1 & Ai \end{vmatrix}=-iG_4$ olur ki, buradan $G_4=i|D(3)|$ olarak bulunur.

Kabul edelim ki, $n=t$ için $G_{t+1}=i|D(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $G_{t+2}=|D(t+1)|$ eşitliğinin varlığını gösterelim.

$$\begin{aligned} G_{t+2} &= AG_{t+1}+BG_t \\ &= Ai|D(t)|-B|D(t-1)| \\ &= |D(t+1)| \end{aligned}$$

olup, buradan $n \equiv 3 \pmod 4$ için (2.1) eşitliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için konvolüsyon özelliğinin Laplace açılımı ile yapılan ispatı aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.2 G_n genelleştirilmiş Fibonacci dizisi

$$G_{m+n+1} = G_{m+1}G_{n+1} + BG_mG_n \tag{2.2}$$

şeklinde verilen konvolüsyon özelliğini sağlar.

İspat: (2.2) özdeşliği $1 \le k \le n$ olmak üzere

$$G_n = G_kG_{n-k+1} + BG_{k-1}G_{n-k} \tag{2.3}$$

formunda yazılabilir. (2.2) ile verilen özdeşliği, bir matrisin determinantı ve G_n dizisi arasındaki ilişkiyi kullanarak ispatladık. Determinant hesabında ise Laplace açılım formülünden faydalandık.

$1 \le k \le n$ için (2.3) eşitliği

$$\begin{aligned}
G_n &= G_1G_n + BG_0G_{n-1} \\
G_n &= G_2G_{n-1} + BG_1G_{n-2} \\
G_n &= G_3G_{n-2} + BG_2G_{n-3} \\
G_n &= G_4G_{n-3} + BG_3G_{n-4} \\
&\vdots \\
G_n &= G_nG_1 + BG_{n-1}G_0
\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradaki her bir eşitliğin doğruluğu, determinant için Laplace açılım formülü kullanılarak gösterilebilir.

$k = 1$ için başlangıç şartları da dikkate alındığı taktirde (2.3)'ün ispatı açıktır.

$D(n-1)$ matrisinin birinci satır elemanlarının kofaktörleri

$$\overset{o}{D}([1],[1]) = \begin{cases} -G_{n-1}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -iG_{n-1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ G_{n-1}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ iG_{n-1}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{D}([1],[2]) = \begin{cases} -iG_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ G_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iG_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -G_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

olarak hesaplanır. (1.1) ile verilen Laplace açılım formülünü kullanırsak $D(n-1)$ matrisinin determinantı

$$|D(n-1)| = \begin{cases} -AiG_{n-1} - BiG_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ AG_{n-1} + BG_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ AiG_{n-1} + BiG_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -AG_{n-1} - BG_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.4}$$

şeklinde bulunur.

(2.1) ve (2.4) eşitliklerini kullanırsak

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$$

elde ederiz. $G_1 = 1$ ve $G_2 = A$ son denklemde yerine yazılırsa

$$G_n = G_2G_{n-1} + BG_1G_{n-2}$$

elde edilir ki, bu da (2.3) ile verilen özdeşliğin $k = 2$ için doğru olduğunu gösterir.

Bir sonraki adımda $D(n-1)$ matrisinin determinantı, ilk iki satır elemanlarını içeren alt matrisler ve bu alt matrislerin kofaktörleri kullanılarak hesaplanacaktır. $D(n-1)$ matrisinin determinantı sıfırdan farklı olan üç adet 2×2 tipinde alt matrisleri var olup bunların determinantları

$$\left|D([1,2],[1,2])\right| = \begin{vmatrix} Ai & B \\ 1 & Ai \end{vmatrix} = -G_3$$

$$\left|D([1,2],[1,3])\right| = \begin{vmatrix} Ai & 0 \\ 1 & B \end{vmatrix} = BiG_2$$

$$\left|D([1,2],[2,3])\right| = \begin{vmatrix} B & 0 \\ Ai & B \end{vmatrix} = B^2$$

olur. Bu alt matrislerin kofaktörleri ise

$$\overset{o}{D}([1,2],[1,2]) = \begin{cases} iG_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -G_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iG_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ G_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{D}([1,2],[1,3]) = \begin{cases} -G_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -iG_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ G_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ iG_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{D}([1,2],[2,3]) = 0$$

şeklinde bulunur. (1.1) eşitliği kullanılarak $D(n-1)$ matrisinin determinantı

$$\left|D(n-1)\right| = \begin{cases} -iG_3G_{n-2} - BiG_2G_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ G_3G_{n-2} + BG_2G_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iG_3G_{n-2} + BiG_2G_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -G_3G_{n-2} - BG_2G_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.5}$$

olarak elde edilir. (2.1) ve (2.5) kullanılarak

$$G_n = G_3G_{n-2} + BG_2G_{n-3}$$

elde edilmiştir ki, bu da (2.3)’ün $k = 3$ için doğru olduğunu gösterir.

Bir sonraki adımda (2.3) eşitliği $k=4$ için ispatlanacaktır. $D(n-1)$ matrisinin ilk üç satırı alındığında determinantı sıfırdan farklı olan 3×3 tipinde dört tane alt matrisi vardır. Bunların determinantları

$$\left|D([1,2,3],[1,2,3])\right| = \begin{vmatrix} Ai & B & 0 \\ 1 & Ai & B \\ 0 & 1 & Ai \end{vmatrix} = -iG_4$$

$$\left|D([1,2,3],[1,2,4])\right| = \begin{vmatrix} Ai & B & 0 \\ 1 & Ai & 0 \\ 0 & 1 & B \end{vmatrix} = -BG_3$$

$$\left|D([1,2,3],[1,3,4])\right| = \begin{vmatrix} Ai & 0 & 0 \\ 1 & B & 0 \\ 0 & Ai & B \end{vmatrix} = B^2 iG_2$$

$$\left|D([1,2,3],[2,3,4])\right| = \begin{vmatrix} B & 0 & 0 \\ Ai & B & 0 \\ 1 & Ai & B \end{vmatrix} = B^3$$

şeklinde elde edilir. Bu alt matrislerin kofaktörleri ise

$$\overset{o}{D}([1,2,3],[1,2,3]) = \begin{cases} G_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ iG_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -G_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -iG_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{D}([1,2,3],[1,2,4]) = \begin{cases} iG_{n-4}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -G_{n-4}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iG_{n-4}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ G_{n-4}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{D}([1,2,3],[1,3,4]) = 0$$

$$\overset{o}{D}([1,2,3],[2,3,4]) = 0$$

olur. Laplace açılım formülünden faydalanılarak $D(n-1)$ matrisinin determinantı

$$|D(n-1)| = \begin{cases} -iG_4G_{n-3} - BiG_3G_{n-4}, & n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ G_4G_{n-3} + BG_3G_{n-4}, & n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ iG_4G_{n-3} + BiG_3G_{n-4}, & n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ -G_4G_{n-3} - BG_3G_{n-4}, & n \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases} \tag{2.6}$$

olarak elde edilir. (2.1) eşitliği ve (2.6)'da elde edilen değerler kullanılarak

$$G_n = G_4G_{n-3} + BG_3G_{n-4}$$

eşitliği elde edilmiştir. Böylece (2.3)'teki eşitlik $k = 4$ için ispatlanmış olur. (2.3)'teki diğer adımlar da k üzerinden benzer şekilde gösterilebilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde $A = B = 1$ durumu için aşağıdaki iki sonucu verelim.

Sonuç 2.1 $A(n)$, $D(n)$ matrisinde $A = B = 1$ alınmasıyla elde edilen bir matris ve

$$c = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ -i, & n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ -1, & n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ i, & n \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

olmak üzere Fibonacci sayıları

$$F_{n+1} = c|A(n)| \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat: $A = B = 1$ durumunda $A(n)$ matrisi

$$A(n) = \begin{bmatrix} i & 1 & & & \\ 1 & i & 1 & & \\ & 1 & i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & i \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

İspat Teorem 2.1'deki gibi tümevarım yöntemi ile yapılabilir.

1. Durum: $n \equiv 0 \pmod 4$ için

$n = 4$ olduğunda $|A(4)| = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix} = 5$ olup $F_5 = |A(4)|$'tür.

$n = t$ için $F_{t+1} = |A(t)|$ olsun.

$n = t+1$ için $F_{t+2} = -i|A(t+1)|$ eşitliğinin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} F_{t+2} &= F_{t+1} + F_t \\ &= |A(t)| + i|A(t-1)| \\ &= -i(i|A(t)| - |A(t-1)|) \\ &= -i|A(t+1)| \end{aligned}$$

olup $n \equiv 0 \pmod 4$ için (2.7) ile verilen eşitlik doğrudur.

2. Durum: $n \equiv 1 \pmod 4$ için

$n=5$ olduğu zaman $|A(5)| = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix} = 8i$ olur ki $F_6 = -i|A(5)|$ ’tür.

$n=t$ için $F_{t+1} = -i|A(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $F_{t+2} = -|A(t+1)|$ eşitliğinin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} F_{t+2} &= F_{t+1} + F_t \\ &= -i|A(t)| + |A(t-1)| \\ &= -(i|A(t)| - |A(t-1)|) \\ &= -|A(t+1)| \end{aligned}$$

olup $n \equiv 1 \pmod 4$ için (2.7) ile verilen eşitlik doğrudur.

3. Durum: $n \equiv 2 \pmod 4$ için

$n=2$ olduğu zaman $|A(2)| = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = -2$ olup $F_3 = -|A(2)|$ ’dir.

$n=t$ için $F_{t+1} = -|A(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $F_{t+2} = i|A(t+1)|$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} F_{t+2} &= F_{t+1} + F_t \\ &= -|A(t)| - i|A(t-1)| \\ &= i(i|A(t)| - |A(t-1)|) \\ &= i|A(t+1)| \end{aligned}$$

olup bu da $n \equiv 2 \pmod 4$ için (2.7) ile verilen eşitliğin doğru olduğunu gösterir.

4. Durum: $n \equiv 3 \pmod 4$ için

$n=3$ olduğunda $|A(3)| = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix} = -3i$ olup $F_4 = i|A(3)|$ 'tür.

$n=t$ için $F_{t+1} = i|A(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $F_{t+2} = |A(t+1)|$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} F_{t+2} &= F_{t+1} + F_t \\ &= i|A(t)| - |A(t-1)| \\ &= |A(t+1)| \end{aligned}$$

olur ki, bu da $n \equiv 3 \pmod 4$ için (2.7) ile verilen eşitliğin doğru olduğunu gösterir.

Sonuç 2.2 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bağıntısı ve $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç şartlarıyla tanımlanan Fibonacci sayıları için

$$F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n \tag{2.8}$$

konvolüsyon eşitliği geçerlidir (Koshy, 2001).

İspat: $1 \le k \le n$ için (2.8) ile verilen eşitlik

$$F_n = F_kF_{n-k+1} + F_{k-1}F_{n-k} \tag{2.9}$$

formunda da yazılabilir. Keyfi pozitif k tam sayıları için (2.9) açık olarak

$$\begin{aligned} F_n &= F_1F_n + F_0F_{n-1} \\ F_n &= F_2F_{n-1} + F_1F_{n-2} \\ F_n &= F_3F_{n-2} + F_2F_{n-3} \\ &\vdots \\ F_n &= F_{n-1}F_2 + F_{n-2}F_1 \\ F_n &= F_nF_1 + F_{n-1}F_0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (2.9) ile belirtilen özdeşlik k'nın farklı değerleri için (2.7) ve (1.1) Laplace açılım formülü kullanılarak ispatlanacaktır.

$k=1$ için $F_0=0$ ve $F_1=1$ olduğundan (2.9) özdeşliğinin ispatı açıktır.

$A(n-1)$ matrisinin ilk satır elemanlarının kofaktörleri hesaplandığında bu kofaktörler

$$\overset{o}{A}([1],[1])=\begin{cases}-F_{n-1}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ -iF_{n-1}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ F_{n-1}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ iF_{n-1}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

$$\overset{o}{A}([1],[2])=\begin{cases}-iF_{n-2}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ F_{n-2}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ iF_{n-2}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ -F_{n-2}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

şeklindedir. Laplace açılım formülü kullanılarak $A(n-1)$ matrisinin determinantı

$$|A(n-1)|=\begin{cases}-iF_{n-1}-iF_{n-2}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ F_{n-1}+F_{n-2}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ iF_{n-1}+iF_{n-2}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ -F_{n-1}-F_{n-2}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases} \tag{2.10}$$

olarak elde edilir. (2.7) ve (2.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

olur. $F_1=1$ ve $F_2=1$ değerleri son elde edilen eşitlikte yerlerine yazılırsa

$$F_n=F_2F_{n-1}+F_1F_{n-2}$$

eşitliği elde edilir. Bu da (2.9) özdeşliğinin $k=2$ için doğru olduğunu gösterir.

$A(n-1)$ matrisinin ilk iki satırı seçildiği zaman bu matrisin, determinantları sıfırdan farklı olan 2×2 tipinde sadece üç tane alt matrisi vardır. Bunlar

$$|A([1,2],[1,2])| = \begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = -F_3$$
$$|A([1,2],[1,3])| = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = iF_2$$
$$|A([1,2],[2,3])| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{vmatrix} = F_1$$

şeklindedir. Bunlara karşılık gelen kofaktörler ise

$$\overset{o}{A}([1,2],[1,2]) = \begin{cases} iF_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -F_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iF_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ F_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{A}([1,2],[1,3]) = \begin{cases} -F_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -iF_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ F_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ iF_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

ve

$$\overset{o}{A}([1,2],[2,3]) = 0$$

şeklindedir. (1.1) Laplace açılım formülünden $A(n-1)$ matrisinin determinantı

$$|A(n-1)| = \begin{cases} -iF_3F_{n-2} - iF_2F_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ F_3F_{n-2} + F_2F_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iF_3F_{n-2} + iF_2F_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -F_3F_{n-2} - F_2F_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.11}$$

olarak bulunur. (2.7) ve (2.11) kullanılırsa

$$F_n = F_3 F_{n-2} + F_2 F_{n-3}$$

elde edilir. Bu da (2.9) özdeşliğinin $k = 3$ için doğru olduğunu gösterir.

Bu adımda (2.9) özdeşliği $k = 4$ için ispatlanacaktır. $A(n-1)$ matrisinin, determinantları sıfırdan farklı olan 3×3 tipinde dört tane alt matrisi vardır. Bunların determinantları

$$\left|A([1,2,3],[1,2,3])\right| = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix} = -iF_4$$

$$\left|A([1,2,3],[1,2,4])\right| = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -F_3$$

$$\left|A([1,2,3],[1,3,4])\right| = \begin{vmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{vmatrix} = iF_2$$

$$\left|A([1,2,3],[2,3,4])\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 1 & i & 1 \end{vmatrix} = F_1$$

olur. Bu alt matrislere karşılık gelen kofaktörler ise

$$\overset{o}{A}([1,2,3],[1,2,3]) = \begin{cases} F_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ iF_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -F_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -iF_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{A}([1,2,3],[1,2,4]) = \begin{cases} iF_{n-4}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -F_{n-4}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iF_{n-4}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ F_{n-4}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{A}([1,2,3],[1,3,4]) = 0$$

$$\overset{o}{A}([1,2,3],[2,3,4]) = 0$$

şeklindedir. (1.1) formülü kullanılarak $A(n-1)$ matrisinin determinantı

$$|A(n-1)| = \begin{cases} -iF_4F_{n-3} - iF_3F_{n-4}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ F_4F_{n-3} + F_3F_{n-4}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iF_4F_{n-3} + iF_3F_{n-4}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -F_4F_{n-3} - F_3F_{n-4}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir. (2.7) ve (2.12) eşitlikleri kullanılarak

$$F_n = F_4F_{n-3} + F_3F_{n-4}$$

elde edilir. Böylece özdeşlik (2.9), $k=4$ için ispatlanmış olur. (2.9)'daki diğer durumlar da k üzerinden benzer şekilde elde edilebilir.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi G_n'de $A=2$ ve $B=1$ alındığında elde edilen Pell sayıları için aşağıdaki iki sonucu ispatsız olarak verelim.

Sonuç 2.3 Pell sayıları,

$$c = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -i, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ i, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

ve

$$B(n) = \begin{bmatrix} 2i & 1 & & & \\ 1 & 2i & 1 & & \\ & 1 & 2i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2i \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$P_{n+1} = c|B(n)| \tag{2.13}$$

şeklinde $B(n)$ üçlü bant matrisinin determinantları cinsinden yazılabilir.

Sonuç 2.4 Pell sayıları

$$P_{m+n+1} = P_{m+1}P_{n+1} + P_mP_n \tag{2.14}$$

şeklindeki konvolüsyon özelliğini sağlar (Horadam, 1971). Teorem 2.2'den görülebilir.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi G_n'de $A=1$ ve $B=2$ alınmasıyla elde edilen Jacobsthal sayı dizisi için aşağıdaki iki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.5 $C(n)$**,** $D(n)$ matrisinde $A=1$ ve $B=2$ olarak seçilmesiyle elde edilen $n \times n$ tipinde bir matris ve

$$c = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -i, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ i, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

olmak üzere $C(n)$ matrisi ile J_n dizisi arasında

$$J_{n+1} = c|C(n)| \tag{2.15}$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

İspat: Tümevarım yöntemi ile yapalım. $A=1$ ve $B=2$ olması durumunda $C(n)$ matrisi,

$$C(n)=\begin{bmatrix} i & 2 & & & \\ 1 & i & 2 & & \\ & 1 & i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & 1 & i \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

1. Durum: $n \equiv 0 \pmod 4$ için

$n=4$ için $|C(4)|=\begin{vmatrix} i & 2 & 0 & 0 \\ 1 & i & 2 & 0 \\ 0 & 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix}=11$ olup $J_5=|C(4)|$ olur.

$n=t$ için $J_{t+1}=|C(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $J_{t+2}=-i|C(t+1)|$ eşitliğinin doğru olup olmadığına bakılırsa

$$\begin{aligned} J_{t+2} &= J_{t+1}+2J_t \\ &= |C(t)|+2i|C(t-1)| \\ &= -i(i|C(t)|-2|C(t-1)|) \\ &= -i|C(t+1)| \end{aligned}$$

olduğundan $n \equiv 0 \pmod 4$ için (2.15) ile verilen eşitlik doğrudur.

2. Durum: $n \equiv 1 \pmod 4$ için

$n=5$ için $|C(5)|=\begin{vmatrix} i & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix}=21i$ olup $J_6=-i|C(5)|$ bulunur.

$n=t$ için $J_{t+1}=-i|C(t)|$ olduğunu varsayalım.

$n=t+1$ için $J_{t+2}=-|C(t+1)|$ eşitliğinin doğruluğuna bakılırsa

$$\begin{aligned} J_{t+2} &= J_{t+1}+2J_t \\ &= -i|C(t)|+2|C(t-1)| \\ &= -(i|C(t)|-2|C(t-1)|) \\ &= -|C(t+1)| \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $n\equiv 1 \pmod 4$ için (2.15) ile verilen eşitlik doğrudur.

3. Durum: $n\equiv 2 \pmod 4$ için

$n=2$ olduğunda $|C(2)|=\begin{vmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{vmatrix}=-3$ olup $J_3=-|C(2)|$ 'dir.

$n=t$ için $J_{t+1}=-|C(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $J_{t+2}=i|C(t+1)|$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} J_{t+2} &= J_{t+1}+2J_t \\ &= -|C(t)|-2i|C(t-1)| \\ &= i(i|C(t)|-2|C(t-1)|) \\ &= i|C(t+1)| \end{aligned}$$

olup $n\equiv 2 \pmod 4$ için (2.15) ile verilen eşitliğin doğruluğu gösterilmiş olur.

4. Durum: $n\equiv 3 \pmod 4$ için

$n=3$ için $|C(3)|=\begin{vmatrix} i & 2 & 0 \\ 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix}=-5i$ olur. Böylece $J_4=i|C(3)|$ 'tür.

$n=t$ için $J_{t+1}=i|C(t)|$ olsun.

$n=t+1$ için $J_{t+2}=|C(t+1)|$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$
\begin{aligned}
J_{t+2} &= J_{t+1} + 2J_t \\
&= i|C(t)| - 2|C(t-1)| \\
&= |C(t+1)|
\end{aligned}
$$

olur ki, bu da $n \equiv 3 \pmod 4$ için (2.15) eşitliğinin doğru olduğunu gösterir.

Sonuç 2.6 (1.5)'te verilen Jacobsthal sayı dizisi

$$J_{m+n+1} = J_{m+1}J_{n+1} + 2J_mJ_n \tag{2.16}$$

şeklinde verilen konvolüsyon özelliğini sağlar (Horadam, 1996).

İspat: (2.16) özdeşliği $1 \le k \le n$ olmak üzere

$$J_n = J_kJ_{n-k+1} + 2J_{k-1}J_{n-k} \tag{2.17}$$

formunda yazılabilir. (2.17) ile verilen özdeşlik bir üçlü bant matrisin determinantı ve J_n dizisi arasındaki ilişki kullanılarak ispatlanacaktır.

$1 \le k \le n$ için (2.17) eşitliği

$$
\begin{aligned}
J_n &= J_1J_n + 2J_0J_{n-1} \\
J_n &= J_2J_{n-1} + 2J_1J_{n-2} \\
J_n &= J_3J_{n-2} + 2J_2J_{n-3} \\
J_n &= J_4J_{n-3} + 2J_3J_{n-4} \\
&\vdots \\
J_n &= J_nJ_1 + 2J_{n-1}J_0
\end{aligned}
$$

formunda da ifade edilebilir.

$k = 1$ için (2.17)'nin ispatı açıktır.

$C(n-1)$ matrisinin birinci satır elemanlarının kofaktörleri

$$\overset{o}{C}([1],[1]) = \begin{cases} -J_{n-1}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -iJ_{n-1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ J_{n-1}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ iJ_{n-1}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{C}([1],[2]) = \begin{cases} -iJ_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ J_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iJ_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -J_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

olur. (1.1) ile verilen Laplace açılımından $C(n-1)$ matrisinin determinantı

$$|C(n-1)| = \begin{cases} -iJ_{n-1} - 2iJ_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ J_{n-1} + 2J_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iJ_{n-1} + 2iJ_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -J_{n-1} - 2J_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.18}$$

olarak elde edilir.

(2.15) ve (2.18) eşitlikleri kullanılırsa

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

olur. $J_1 = 1$ ve $J_2 = 1$ değerleri son denklemde yerine yazılırsa

$$J_n = J_2 J_{n-1} + 2J_1 J_{n-2}$$

elde edilir ki, bu da (2.17) ile verilen özdeşliğin $k = 2$ için doğru olduğunu gösterir.

Daha sonra $C(n-1)$ matrisinin determinantı, ilk iki satır elemanlarını içeren alt matrisler ve bu alt matrislerin kofaktörleri kullanılarak hesaplanacaktır. $C(n-1)$ matrisinin, determinantları sıfırdan farklı olan 2×2 tipinde üç tane alt matrisi vardır. Bu alt matrislerin determinantları

$$|C([1,2],[1,2])| = \begin{vmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{vmatrix} = -J_3$$

$$|C([1,2],[1,3])| = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2iJ_2$$

$$|C([1,2],[2,3])| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ i & 2 \end{vmatrix} = 2^2$$

şeklindedir. Bu alt matrislere karşılık gelen kofaktörler ise

$$\overset{o}{C}([1,2],[1,2]) = \begin{cases} iJ_{n-2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -J_{n-2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iJ_{n-2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ J_{n-2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{C}([1,2],[1,3]) = \begin{cases} -J_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -iJ_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ J_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ iJ_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{C}([1,2],[2,3]) = 0$$

olur. (1.1) eşitliği kullanılarak $C(n-1)$ matrisinin determinantı da

$$|C(n-1)| = \begin{cases} -iJ_3J_{n-2} - 2iJ_2J_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ J_3J_{n-2} + 2J_2J_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iJ_3J_{n-2} + 2iJ_2J_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -J_3J_{n-2} - 2J_2J_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \qquad (2.19)$$

olarak elde edilir. (2.15) ve (2.19) kullanılarak

$$J_n = J_3J_{n-2} + 2J_2J_{n-3}$$

elde edilmiştir ki, bu da $k = 3$ için iddianın doğru olduğunu gösterir.

Bir sonraki adımda (2.17) eşitliği $k = 4$ için ispatlanacaktır. $C(n-1)$ matrisinin ilk üç satırı alındığında bu matris, determinantı sıfırdan farklı olan 3×3 tipinde dört tane alt matrise sahip olup bunların determinantları

$$\left|C([1,2,3],[1,2,3])\right| = \begin{vmatrix} i & 2 & 0 \\ 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & i \end{vmatrix} = -iJ_4$$

$$\left|C([1,2,3],[1,2,4])\right| = \begin{vmatrix} i & 2 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2J_3$$

$$\left|C([1,2,3],[1,3,4])\right| = \begin{vmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & i & 2 \end{vmatrix} = 2^2 iJ_2$$

$$\left|C([1,2,3],[2,3,4])\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 1 & i & 2 \end{vmatrix} = 2^3$$

şeklinde elde edilir. Bu alt matrislere karşılık gelen kofaktörler ise

$$\overset{o}{C}([1,2,3],[1,2,3]) = \begin{cases} J_{n-3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ iJ_{n-3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -J_{n-3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -iJ_{n-3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{C}([1,2,3],[1,2,4]) = \begin{cases} iJ_{n-4}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -J_{n-4}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iJ_{n-4}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ J_{n-4}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{C}([1,2,3],[1,3,4]) = 0$$

$$\overset{o}{C}([1,2,3],[2,3,4]) = 0$$

olacaktır. (1.1) eşitliği kullanılarak $C(n-1)$ matrisinin determinantı ise

$$\left|C(n-1)\right| = \begin{cases} -iJ_4 J_{n-3} - 2iJ_3 J_{n-4}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ J_4 J_{n-3} + 2J_3 J_{n-4}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iJ_4 J_{n-3} + 2iJ_3 J_{n-4}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -J_4 J_{n-3} - 2J_3 J_{n-4}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.20}$$

olarak elde edilir. (2.15) eşitliği ve (2.20)'de elde edilen değerler kullanılarak

$$J_n = J_4 J_{n-3} + 2J_3 J_{n-4}$$

eşitliği elde edilmiş olur ki, (2.17)'deki eşitlik $k = 4$ için ispatlanmış olur. (2.17)'deki diğer adımlar da k üzerinden benzer biçimde gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2'nin ispatında

$$G_n = G_k G_{n-k+1} + BG_{k-1} G_{n-k}$$

şeklinde verilen konvolüsyon özelliğinde n tamsayısı yerine $2n$, k tamsayısı yerine n tamsayısının yazılmasıyla bu eşitlik

$$\begin{aligned} G_{2n} &= G_n G_{n+1} + BG_{n-1} G_n \\ &= G_n (G_{n+1} + BG_{n-1}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca Kalman ve Mena, (2003)

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A & B \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris tanımlamışlar ve

$$M^n = \begin{bmatrix} BG_{n-1} & G_n \\ BG_n & G_{n+1} \end{bmatrix}$$

olduğunu göstermişlerdir. Ardından matrislerde çarpma işleminden faydalanarak yani $M^{2n+1} = M^n M^{n+1}$ eşitliğini kullanmışlar ve M^{2n+1} matrisini

$$M^{2n+1} = \begin{bmatrix} BG_{2n} & G_{2n+1} \\ BG_{2n+1} & G_{2n+2} \end{bmatrix}$$

şeklinde ve $M^n M^{n+1}$ matrisini

$$M^n M^{n+1} = \begin{bmatrix} BG_{n-1} & G_n \\ BG_n & G_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BG_n & G_{n+1} \\ BG_{n+1} & G_{n+2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} B^2 G_{n-1} G_n + BG_n G_{n+1} & BG_{n-1} G_{n+1} + G_n G_{n+2} \\ B^2 G_n G_n + BG_{n+1} G_{n+1} & BG_n G_{n+1} + G_{n+1} G_{n+2} \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edip iki matrisin eşitliği kavramından

$$G_{2n} = G_n (G_{n+1} + BG_{n-1})$$

eşitliğini elde etmişlerdir.

Fakat biz G_n genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin sağladığı bu son eşitliğin ispatını yine $D(n)$ üçlü bant matrisinin determinantını kullanarak yapalım.

Teorem 2.3 . G_n dizisi için

$$G_{2n} = G_n (G_{n+1} + BG_{n-1}) \tag{2.21}$$

eşitliği geçerlidir (Kalman ve Mena, 2003).

İspat: $D(2n-1)$ matrisinin ilk $(n-1)$ satırı seçildiğinde, bu matrisin, determinantı sıfırdan farklı olan $(n-1)\times(n-1)$ tipinde n adet alt matrisi vardır. Fakat bu alt matrislere karşılık gelen kofaktörlerden yalnızca iki tanesi sıfırdan farklıdır. Bu alt matrislerin determinantları ve bu alt matrislere karşılık gelen kofaktörler

$$\left| D([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-1]) \right| = \begin{cases} -iG_n, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ G_n, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iG_n, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -G_n, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\left|D([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-2,n])\right| = \begin{cases} -BG_{n-1}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -iBG_{n-1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ BG_{n-1}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ iBG_{n-1}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{D}([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-1]) = \begin{cases} G_{n+1}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ iG_{n+1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -G_{n+1}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -iG_{n+1}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\overset{o}{D}([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-2,n]) = \begin{cases} iG_{n}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -G_{n}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iG_{n}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ G_{n}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

şeklindedir. (1.1) Laplace açılım formülünden $D(2n-1)$ matrisinin determinantı

$$\left|D(2n-1)\right| = \begin{cases} -iG_n(G_{n+1}+BG_{n-1}), & n \equiv 0,2 \pmod 4 \\ iG_n(G_{n+1}+BG_{n-1}), & n \equiv 1,3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.22}$$

olarak bulunur. (2.1) ve (2.22)'den

$$G_{2n} = G_n(G_{n+1}+BG_{n-1})$$

elde edilir.

G_n genelleştirilmiş Fibonacci dizisinde $A = B = 1$ seçilmesiyle elde edilen Fibonacci sayıları da bu özdeşliği sağlar.

Sonuç 2.7 Fibonacci sayı dizisi için

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1}+F_{n-1})$$

eşitliği geçerlidir (Koshy, 2001).

G_n dizisinde $A=2$ ve $B=1$ alındığında elde edilen Pell sayıları için de bu özdeşlik aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sonuç 2.8 Pell sayıları

$$P_{2n}=P_n(P_{n+1}+P_{n-1}) \tag{2.23}$$

biçiminde verilen eşitliği sağlar (Horadam, 1971).

İspat: $B(2n-1)$ matrisinin ilk $(n-1)$ satırı seçildiğinde, $B(2n-1)$ matrisi, determinantı sıfırdan farklı olan $(n-1)\times(n-1)$ tipinde n adet alt matrise sahiptir. Fakat bu alt matrislere karşılık gelen kofaktörlerden yalnızca iki tanesi sıfırdan farklıdır. Yani,

$$\left|B([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-1])\right|=\begin{cases}-iP_n, & n\equiv 0 \pmod 4\\ P_n, & n\equiv 1 \pmod 4\\ iP_n, & n\equiv 2 \pmod 4\\ -P_n, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

$$\left|B([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-2,n])\right|=\begin{cases}-P_{n-1}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ -iP_{n-1}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ P_{n-1}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ iP_{n-1}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

ve bu alt matrislerin kofaktörleri

$$\overset{o}{B}([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-1])=\begin{cases}P_{n+1}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ iP_{n+1}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ -P_{n+1}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ -iP_{n+1}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

$$\overset{o}{B}([1,2,\ldots,n-1],[1,2,\ldots,n-2,n])=\begin{cases}iP_n, & n\equiv 0 \pmod 4\\ -P_n, & n\equiv 1 \pmod 4\\ -iP_n, & n\equiv 2 \pmod 4\\ P_n, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

olur. (1.1) Laplace açılım formülü kullanılarak $B(2n-1)$ matrisinin determinantı

$$|B(2n-1)| = \begin{cases} -iP_n(P_{n+1}+P_{n-1}), & n \equiv 0,2 \pmod 4 \\ iP_n(P_{n+1}+P_{n-1}), & n \equiv 1,3 \pmod 4 \end{cases} \tag{2.24}$$

şeklinde bulunur. (2.13) ve (2.24) kullanılarak

$$P_{2n} = P_n(P_{n+1}+P_{n-1})$$

elde edilir.

G_n genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının bir özel hali olan Jacobsthal sayıları için de aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.9 (1.5) ile tanımlanan Jacobsthal sayıları

$$J_{2n} = J_n(J_{n+1}+2J_{n-1})$$

şeklinde verilen eşitliği sağlar (Horadam, 1996).

BÖLÜM III

G_{-n} ÖZDEŞLİĞİNİN LAPLACE AÇILIMI

Bu bölümde, bir önceki bölümde incelenen özdeşliğe benzer bir özdeşliğin negatif indisli Fibonacci ve Pell sayılarının bir genellemesi olan (1.8) ile verilen G_{-n} dizisi için geçerli olup olmadığı incelenmiş ve bu özdeşliğin ispatı üzerinde durulmuştur. Ayrıca bu özdeşlik üçlü bant matrislerin permanentleri ve permanentler için (1.2)'de verilen Laplace açılım formülü kullanılarak ispatlanmıştır.

G_{-n} dizisi ile $K(n)$ üçlü bant matrisi arasındaki ilişki Teorem 3.1'de olduğu gibi verilebilir.

Teorem 3.1

$$c = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -i, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ i, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

olmak üzere

$$K(n) = \begin{bmatrix} Ai & 1 & & & \\ -1 & Ai & 1 & & \\ & -1 & Ai & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

üçlü bant matrisi ile G_{-n} dizisi arasında

$$per(K(n)) = cG_{-(n+1)} \tag{3.1}$$

bağıntısı vardır.

İspat: (3.1) ile verilen eşitlik permanent hesabında kullanılan daralma (contraction) metodu yardımıyla ispat edilecektir.

$n=1$ ise $per(K(1)) = Ai = -iG_{-2}$ dir.

$n=2$ ise $K(2)$ matrisi

$$K(2) = \begin{bmatrix} Ai & 1 \\ -1 & Ai \end{bmatrix}$$

olup $per(K(2)) = -G_{-3}$ tür.

$1 \le r \le n-2$ için K_n^r, $K(n)$ matrisinin $r.$ daralmasını göstermek üzere ve $K(n)$ matrisi $1.$ sütun üzerinden daraltılabilir bir matris olduğundan bu matrisin ilk daralması

$$K_n^1 = \begin{bmatrix} -G_{-3} & -iG_{-2} & & & \\ -1 & Ai & 1 & & \\ & -1 & Ai & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

K_n^1 matrisi de ilk sütun üzerinden daraltılabilir olduğundan ikinci daralma

$$K_n^2 = \begin{bmatrix} iG_{-4} & -G_{-3} & & & \\ -1 & Ai & 1 & & \\ & -1 & Ai & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. İşlemlere aynı şekilde devam edilirse $3 \le r \le n-4$ için, $r.$ daralma,

$$a=\begin{cases}-i, & r\equiv 0 \pmod 4\\ -1, & r\equiv 1 \pmod 4\\ i, & r\equiv 2 \pmod 4\\ 1, & r\equiv 3 \pmod 4\end{cases} \text{ ve } b=\begin{cases}1, & r\equiv 0 \pmod 4\\ -i, & r\equiv 1 \pmod 4\\ -1, & r\equiv 2 \pmod 4\\ i, & r\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

olmak üzere

$$K_n^r=\begin{bmatrix} aG_{-(r+2)} & bG_{-(r+1)} & & & \\ -1 & Ai & 1 & & \\ & -1 & Ai & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böyle devam edilirse $(n-3).$ daralma

$$K_n^{n-3}=\begin{bmatrix} aG_{-(n-1)} & bG_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & Ai & 1 \\ 0 & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$n-3\equiv 0 \pmod 4$ ise

$$K_n^{n-3}=\begin{bmatrix} -iG_{-(n-1)} & G_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & Ai & 1 \\ 0 & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

dir. Son elde edilen matris birinci sütunda sıfırdan farklı iki eleman içerdiğinden K_n^{n-2} matrisi

$$K_n^{n-2}=\begin{bmatrix} AG_{-(n-1)}-G_{-(n-2)} & -iG_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -G_{-n} & -iG_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} per(K(n)) = per(K_n^{n-2}) &= -AiG_{-n} + iG_{-(n-1)} \\ &= i(-AG_{-n} + G_{-(n-1)}) \\ &= iG_{-(n+1)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$n-3 \equiv 1 \pmod 4$ ise

$$K_n^{n-3} = \begin{bmatrix} -G_{-(n-1)} & -iG_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & Ai & 1 \\ 0 & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

dir. K_n^{n-3} matrisi 1. sütun üzerinden daraltılabilir bir matris olduğundan K_n^{n-2}

$$K_n^{n-2} = \begin{bmatrix} -AiG_{-(n-1)} + iG_{-(n-2)} & -G_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iG_{-n} & -G_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} per(K(n)) = per(K_n^{n-2}) &= -AG_{-n} + G_{-(n-1)} \\ &= G_{-(n+1)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$n-3 \equiv 2 \pmod 4$ ise

$$K_n^{n-3} = \begin{bmatrix} iG_{-(n-1)} & -G_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & Ai & 1 \\ 0 & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

tür. Bu matrisi 1. sütun üzerinden daraltılabilir olduğundan K_n^{n-2} matrisi

$$K_n^{n-2} = \begin{bmatrix} -AG_{-(n-1)} + G_{-(n-2)} & iG_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{-n} & iG_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} perK(n) = perK_n^{n-2} &= AiG_{-n} - iG_{-(n-1)} \\ &= -iG_{-(n+1)} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$n-3 \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 4)$ ise

$$K_n^{n-3} = \begin{bmatrix} G_{-(n-1)} & iG_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & Ai & 1 \\ 0 & -1 & Ai \end{bmatrix}$$

tür. K_n^{n-3} matrisi 1. sütun üzerinden daraltılabilir bir matris olduğundan $(n-2)$. daralma

$$K_n^{n-2} = \begin{bmatrix} AiG_{-(n-1)} - iG_{-(n-2)} & G_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iG_{-n} & G_{-(n-1)} \\ -1 & Ai \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} perK(n) = perK_n^{n-2} &= AG_{-n} - G_{-(n-1)} \\ &= -G_{-(n+1)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2 (1.8) ile verilen G_{-n} dizisi $1 \le k \le n$ olmak üzere

$$G_{-n} = G_{-k}G_{-n+k-1} + G_{-k+1}G_{-n+k} \tag{3.2}$$

eşitliğini sağlar.

İspat: (3.2) ile verilen eşitlik, $K(n)$ üçlü bant matris dizisinin permanentleri kullanılarak ispatlanacaktır. Permanent hesabında ise permanentler için (1.2) ile verilen Laplace açılım formülü kullanılacaktır.

$k=1$ için $G_{-1}=1$ ve $G_0=0$ olduğundan ispat açıktır.

$K(n-1)$ matrisinin birinci satırındaki sıfırdan farklı elemanların bulunduğu sırayla birinci ve ikinci sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri

$$per(\overset{o}{K}[1],[1]) = \begin{cases} -G_{-n+1}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ iG_{-n+1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ G_{-n+1}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -iG_{-n+1}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{K}[1],[2]) = \begin{cases} iG_{-n+2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ G_{-n+2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iG_{-n+2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -G_{-n+2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

şeklindedir. (1.2) ile verilen Laplace açılımından $K(n-1)$ matrisinin permanenti

$$per(K(n-1)) = \begin{cases} -AiG_{-n+1}+iG_{-n+2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -AG_{-n+1}+G_{-n+2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ AiG_{-n+1}-iG_{-n+2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ AG_{-n+1}-G_{-n+2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{3.3}$$

olur. (3.1) ve (3.3) eşitlikleri kullanılarak

$$G_{-n} = -AG_{-n+1}+G_{-n+2}$$

elde edilir. $G_{-1}=1$ ve $G_{-2}=-A$'nin son eşitlikte yerine yazılmasıyla

$$G_{-n} = G_{-2}G_{-n+1}+G_{-1}G_{-n+2}$$

elde edilir. Bu son eşitlik (3.2) ile verilen özdeşliğin $k=2$ için doğru olduğunu gösterir.

$K(n-1)$ matrisinin, ilk iki satırı seçildiğinde bu matrisin, permanentleri sıfırdan farklı olan 2×2 tipinde üç tane alt matrisi vardır ve bunların permanetleri

$$per(K[1,2],[1,2]) = per\left(\begin{bmatrix} Ai & 1 \\ -1 & Ai \end{bmatrix}\right) = -G_{-3}$$
$$per(K[1,2],[1,3]) = per\left(\begin{bmatrix} Ai & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -iG_{-2}$$
$$per(K[1,2],[2,3]) = per\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Ai & 1 \end{bmatrix}\right) = G_{-1}$$

şeklindedir. İlk iki satır ve ilgili sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri ise

$$per(\overset{o}{K}[1,2],[1,2]) = \begin{cases} -iG_{-n+2}, & n\equiv 0 \pmod 4 \\ -G_{-n+2}, & n\equiv 1 \pmod 4 \\ iG_{-n+2}, & n\equiv 2 \pmod 4 \\ G_{-n+2}, & n\equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{K}[1,2],[1,3]) = \begin{cases} -G_{-n+3}, & n\equiv 0 \pmod 4 \\ iG_{-n+3}, & n\equiv 1 \pmod 4 \\ G_{-n+3}, & n\equiv 2 \pmod 4 \\ -iG_{-n+3}, & n\equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{K}[1,2],[2,3]) = 0$$

olur. Permanentler için verilen Laplace açılım metodu ile $K(n-1)$ matrisinin permanenti

$$per(K(n-1)) = \begin{cases} iG_{-3}G_{-n+2} + iG_{-2}G_{-n+3}, & n\equiv 0 \pmod 4 \\ G_{-3}G_{-n+2} + G_{-2}G_{-n+3}, & n\equiv 1 \pmod 4 \\ -iG_{-3}G_{-n+2} - iG_{-2}G_{-n+3}, & n\equiv 2 \pmod 4 \\ -G_{-3}G_{-n+2} - G_{-2}G_{-n+3}, & n\equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{3.4}$$

olarak elde edilir. (3.1) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$G_{-n} = G_{-3}G_{-n+2} + G_{-2}G_{-n+3}$$

elde edilir. Böylece (3.2) ile verilen özdeşliğin $k=3$ için doğruluğu ispatlanmış olur.

$K(n-1)$ matrisinin permanenti, ilk üç satır elemanlarını içeren alt matrislerin permanentleri ile ilk üç satır ve ilgili sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri kullanılarak hesaplanabilir. $K(n-1)$ matrisinin, permanenti sıfırdan farklı olan 3×3 tipindeki alt matrisleri ve bunların permanentleri

$$per(K[1,2,3],[1,2,3]) = per\left(\begin{bmatrix} Ai & 1 & 0 \\ -1 & Ai & 1 \\ 0 & -1 & Ai \end{bmatrix}\right) = iG_{-4}$$

$$per(K[1,2,3],[1,2,4]) = per\left(\begin{bmatrix} Ai & 1 & 0 \\ -1 & Ai & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = -G_{-3}$$

$$per(K[1,2,3],[1,3,4]) = per\left(\begin{bmatrix} Ai & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & Ai & 1 \end{bmatrix}\right) = -iG_{-2}$$

$$per(K[1,2,3],[2,3,4]) = per\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Ai & 1 & 0 \\ -1 & Ai & 1 \end{bmatrix}\right) = G_{-1}$$

şeklindedir. İlk üç satır ve ilgili sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri de

$$per(\overset{o}{K}[1,2,3],[1,2,3]) = \begin{cases} G_{-n+3}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -iG_{-n+3}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -G_{-n+3}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ iG_{-n+3}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{K}[1,2,3],[1,2,4]) = \begin{cases} -iG_{-n+4}, & n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ -G_{-n+4}, & n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ iG_{-n+4}, & n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ G_{-n+4}, & n \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{K}[1,2,3],[1,3,4]) = 0$$

$$per(\overset{o}{K}[1,2,3],[2,3,4]) = 0$$

olur. (1.2)'de verilen Laplace açılım formülü kullanılarak $K(n-1)$ matrisinin permanenti

$$per(K(n-1)) = \begin{cases} iG_{-4}G_{-n+3} + iG_{-3}G_{-n+4}, & n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ G_{-4}G_{-n+3} + G_{-3}G_{-n+4}, & n \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ -iG_{-4}G_{-n+3} - iG_{-3}G_{-n+4}, & n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ -G_{-4}G_{-n+3} - G_{-3}G_{-n+4}, & n \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4) \end{cases} \tag{3.5}$$

olur ki, (3.1) ve (3.5) kullanılarak

$$G_{-n} = G_{-4}G_{-n+3} + G_{-3}G_{-n+4}$$

elde edilir. Bu ise (3.2) ile verilen özdeşliğin $k = 4$ için doğru olması demektir. (3.2)'deki diğer adımlar k üzerinden benzer biçimde gösterilebilir.

Birinci bölümde Fibonacci sayıları $n \geq 2$ ve $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç şartları olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

şeklinde tanımlanmıştı. (1.3) ile tanımlanan bu kural Fibonacci sayı dizisini geriye genişletmek için de kullanılabilir. Yani,

$$F_{-1} = F_1 - F_0 \ , \ F_{-2} = F_0 - F_{-1} \ , \ F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} \ , \ldots$$

şeklinde yazılabilir. Buradan negatif indisli Fibonacci sayılarının

$$F_{-n} = F_{-n+2} - F_{-n+1} \tag{3.6}$$

olarak ifade edilebileceği de görülmektedir (Kılıç ve Taşcı, 2010).

G_{-n}'de ve $K(n)$ matrisinde $A = 1$ alınmasıyla elde edilen negatif indisli Fibonacci sayıları ile üçlü bant $E(n)$ matrisi arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır.

Sonuç 3.1

$$E(n) = \begin{bmatrix} i & 1 & & & \\ -1 & i & 1 & & \\ & -1 & i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & i \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipinde bir matris ve

$$c = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 (\bmod 4) \\ -i, & n \equiv 1 (\bmod 4) \\ -1, & n \equiv 2 (\bmod 4) \\ i, & n \equiv 3 (\bmod 4) \end{cases}$$

olmak üzere

$$per(E(n)) = cF_{-(n+1)} \tag{3.7}$$

dir.

İspat: (3.7)'nin ispatı yapılırken birinci bölümde verilen daralma (contraction) metodu kullanılmıştır.

$n=1$ için $per(E(1))=i=-iF_{-2}$ dir.

$n=2$ ise $E(2)=\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$ olup $per(E(2))=-2=-F_{-3}$'tür.

$1\le r\le n-2$ için E_n^r, $E(n)$ matrisinin $r.$ daralması olsun. $E(n)$ matrisinin birinci sütununda sıfırdan farklı sadece iki eleman olduğu için birinci sütun üzerinden daraltılabilir bir matristir ve birinci daralması

$$E_n^1=\begin{bmatrix} -2 & i & & & \\ -1 & i & 1 & & \\ & -1 & i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & i \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

E_n^1 matrisi de ilk sütun üzerinden daraltılabilir olduğundan $2.$ daralma

$$E_n^2=\begin{bmatrix} -3i & -2 & & & \\ -1 & i & 1 & & \\ & -1 & i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} iF_{-4} & -F_{-3} & & & \\ -1 & i & 1 & & \\ & -1 & i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & i \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. İşlemlere bu şekilde devam edilirse, $3\le r\le n-4$ için $r.$ daralma

$$a=\begin{cases} -i, & r\equiv 0(\operatorname{mod} 4) \\ -1, & r\equiv 1(\operatorname{mod} 4) \\ i, & r\equiv 2(\operatorname{mod} 4) \\ 1, & r\equiv 3(\operatorname{mod} 4) \end{cases} \text{ ve } b=\begin{cases} 1, & r\equiv 0\ (\operatorname{mod} 4) \\ -i, & r\equiv 1\ (\operatorname{mod} 4) \\ -1, & r\equiv 2\ (\operatorname{mod} 4) \\ i, & r\equiv 3\ (\operatorname{mod} 4) \end{cases}$$

olmak üzere

$$E_n^r = \begin{bmatrix} aF_{-(r+2)} & bF_{-(r+1)} & & & \\ -1 & i & 1 & & \\ & -1 & i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & i \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $(n-3)$. daralma

$$E_n^{n-3} = \begin{bmatrix} aF_{-(n-1)} & bF_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir.

$n-3 \equiv 0 \pmod 4$ ise

$$E_n^{n-3} = \begin{bmatrix} -iF_{-(n-1)} & F_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{bmatrix}$$

dir ve bu daralma 1. sütun üzerinden tekrar daraltılabilir olduğundan E_n^{n-2} matrisi

$$E_n^{n-2} = \begin{bmatrix} F_{-(n-1)} - F_{-(n-2)} & -iF_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{-n} & -iF_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} per(E(n)) = per(E_n^{n-2}) &= -iF_{-n} + iF_{-(n-1)} \\ &= i(-F_{-n} + F_{-(n-1)}) \\ &= iF_{-(n+1)} \end{aligned}$$

bulunur.

$n-3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4)$ ise

$$E_n^{n-3} = \begin{bmatrix} -F_{-(n-1)} & -iF_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{bmatrix}$$

dir. Bu son matris 1. sütun üzerinden daraltılabilir olduğundan E_n^{n-2} matrisi

$$E_n^{n-2} = \begin{bmatrix} -iF_{-(n-1)} + iF_{-(n-2)} & -F_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iF_{-n} & -F_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} per(E(n)) = perE_n^{n-2} &= -F_{-n} + F_{-(n-1)} \\ &= F_{-(n+1)} \end{aligned}$$

olur.

$n-3 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, 4)$ ise

$$E_n^{n-3} = \begin{bmatrix} iF_{-(n-1)} & -F_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{bmatrix}$$

dir. E_n^{n-3}matrisi 1. sütun üzerinden daraltılabilirdir. Dolayısıyla E_n^{n-2} matrisi

$$B_n^{n-2} = \begin{bmatrix} -F_{-(n-1)} + F_{-(n-2)} & iF_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-n} & iF_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Buradan,

$$per(E(n)) = perE_n^{n-2} \quad = iF_{-n} - iF_{-(n-1)}$$
$$= -iF_{-(n+1)}$$

olur.

$n-3 \equiv 3 \pmod 4$ ise

$$E_n^{n-3} = \begin{bmatrix} F_{-(n-1)} & iF_{-(n-2)} & 0 \\ -1 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{bmatrix}$$

dir. E_n^{n-3} matrisi $1.$ sütun üzerinden daraltılabilir olduğundan $(n-2).$ daralma

$$B_n^{n-2} = \begin{bmatrix} iF_{-(n-1)} - iF_{-(n-2)} & F_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -iF_{-n} & F_{-(n-1)} \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$per(E(n)) = perE_n^{n-2} \quad = F_{-n} - F_{-(n-1)}$$
$$= -F_{-(n+1)}$$

biçiminde elde edilir.

Sonuç 3.2 (3.6)'da verilen negatif indisli Fibonacci dizisi, $1 \le k \le n$ olmak üzere

$$F_{-n} = F_{-k}F_{-n+k-1} + F_{-k+1}F_{-n+k} \tag{3.8}$$

şeklinde verilen özdeşliği sağlar.

İspat: (3.8) ile verilen özdeşlik üçlü bant $E(n)$ matrisinin permanenti kullanılarak ispatlanabilir. Permanent hesabında ise permanentler için (1.2) ile verilen Laplace açılım formülünden faydalanılmıştır.
$1 \le k \le n$ için (3.8) eşitliği

$$
\begin{aligned}
F_{-n} &= F_{-1}F_{-n} + F_0F_{-n+1} \\
F_{-n} &= F_{-2}F_{-n+1} + F_{-1}F_{-n+2} \\
F_{-n} &= F_{-3}F_{-n+2} + F_{-2}F_{-n+3} \\
F_{-n} &= F_{-4}F_{-n+3} + F_{-3}F_{-n+4} \\
&\vdots \\
F_{-n} &= F_{-n}F_{-1} + F_{-n+1}F_0
\end{aligned}
$$

formunda da ifade edilebilir. Buradaki her bir eşitliğin ispatında permanentler için Laplace açılım formülü kullanılacaktır.

$1 \le k \le n$ olmak üzere (3.8) özdeşliği ispatlanırsa;
$k = 1$ için $F_{-1} = 1$ ve $F_0 = 0$ olduğundan ispat açıktır.

$E(n-1)$ matrisinin birinci satırdaki sıfırdan farklı elemanlarının bulunduğu satır ve sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri

$$
per(\overset{o}{E}[1],[1]) = \begin{cases} -F_{-n+1}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ iF_{-n+1}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ F_{-n+1}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -iF_{-n+1}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}
$$

$$
per(\overset{o}{E}[1],[2]) = \begin{cases} iF_{-n+2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ F_{-n+2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iF_{-n+2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -F_{-n+2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}
$$

şeklindedir. (1.2) ile verilen Laplace açılımından $E(n-1)$ matrisinin permanenti

$$
per(E(n-1)) = \begin{cases} -iF_{-n+1} + iF_{-n+2}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -F_{-n+1} + F_{-n+2}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iF_{-n+1} - iF_{-n+2}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ F_{-n+1} - F_{-n+2}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{3.9}
$$

olarak hesaplanır. (3.7) ve (3.9) eşitlikleri kullanılarak

$F_{-n} = -F_{-n+1} + F_{-n+2}$

elde edilir. $F_{-1}=1$ ve $F_{-2}=-1$ son eşitlikte yerine yazılırsa

$$F_{-n}=F_{-2}F_{-n+1}+F_{-1}F_{-n+2}$$

bulunur ki, bu da (3.8) ile verilen özdeşliğin $k=2$ için doğru olduğunu gösterir.

(3.8) ile verilen özdeşliğin $k=3$ için doğruluğunu göstermek adına $E(n-1)$ matrisinin permanenti, ilk iki satır elemanlarını içeren alt matrisler ve ilk iki satır ve ilgili sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri kullanılarak hesaplanacaktır. $E(n-1)$ matrisinin, permanenti sıfırdan farklı olan, 2×2 tipinde üç tane alt matrisi vardır ve bunların permanentleri

$$per(E[1,2],[1,2])=per\left(\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\right)=-F_{-3}$$
$$per(E[1,2],[1,3])=per\left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)=-iF_{-2}$$
$$per(E[1,2],[2,3])=per\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}\right)=F_{-1}$$

dir. İlk iki satır ve ilgili sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri ise

$$per(\overset{o}{E}[1,2],[1,2])=\begin{cases} -iF_{-n+2}, & n\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ -F_{-n+2}, & n\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ iF_{-n+2}, & n\equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ F_{-n+2}, & n\equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{E}[1,2],[1,3])=\begin{cases} -F_{-n+3}, & n\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ iF_{-n+3}, & n\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ F_{-n+3}, & n\equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, 4) \\ -iF_{-n+3}, & n\equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{E}[1,2],[2,3])=0$$

şeklindedir. (1.2) ile verilen Laplace açılımı yardımıyla $E(n-1)$ matrisinin permanenti

$$per(E(n-1))=\begin{cases} iF_{-3}F_{-n+2}+iF_{-2}F_{-n+3}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ F_{-3}F_{-n+2}+F_{-2}F_{-n+3}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ -iF_{-3}F_{-n+2}-iF_{-2}F_{-n+3}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ -F_{-3}F_{-n+2}-F_{-2}F_{-n+3}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases} \tag{3.10}$$

olarak elde edilir. (1.2) ve (3.10) eşitlikleri kullanılarak

$$F_{-n}=F_{-3}F_{-n+2}+F_{-2}F_{-n+3}$$

elde edilir. Böylece (3.8) ile verilen özdeşliğin $k=3$ için doğruluğu ispatlanmış olur. Bir sonraki adımda (3.8) eşitliği $k=4$ için ispatlanmıştır. $E(n-1)$ matrisinin ilk üç satırı alındığında permanenti sıfırdan farklı olan 3×3 tipinde dört tane alt matrisi vardır ve bunların permanentleri de

$$per(E[1,2,3],[1,2,3])=per\left(\begin{bmatrix} i & 1 & 0\\ -1 & i & 1\\ 0 & -1 & i\end{bmatrix}\right)=iF_{-4}$$

$$per(E[1,2,3],[1,2,4])=per\left(\begin{bmatrix} i & 1 & 0\\ -1 & i & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\right)=-F_{-3}$$

$$per(E[1,2,3],[1,3,4])=per\left(\begin{bmatrix} i & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & i & 1\end{bmatrix}\right)=-iF_{-2}$$

$$per(E[1,2,3],[2,3,4])=per\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ i & 1 & 0\\ -1 & i & 1\end{bmatrix}\right)=F_{-1}$$

şeklindedir. İlk üç satır ve ilgili sütunların silinmesiyle elde edilen alt matrislerin permanentleri ise

$$per(\overset{o}{E}[1,2,3],[1,2,3])=\begin{cases} F_{-n+3}, & n\equiv 0 \pmod 4\\ -iF_{-n+3}, & n\equiv 1 \pmod 4\\ -F_{-n+3}, & n\equiv 2 \pmod 4\\ iF_{-n+3}, & n\equiv 3 \pmod 4\end{cases}$$

$$per(\overset{o}{E}[1,2,3],[1,2,4]) = \begin{cases} -iF_{-n+4}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -F_{-n+4}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ iF_{-n+4}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ F_{-n+4}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$per(\overset{o}{E}[1,2,3],[1,3,4]) = 0$$

$$per(\overset{o}{E}[1,2,3],[2,3,4]) = 0$$

olur. (1.2)'de verilen Laplace açılım formülü kullanılarak $E(n-1)$ matrisinin permanenti

$$per(E(n-1)) = \begin{cases} iF_{-4}F_{-n+3} + iF_{-3}F_{-n+4}, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ F_{-4}F_{-n+3} + F_{-3}F_{-n+4}, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -iF_{-4}F_{-n+3} - iF_{-3}F_{-n+4}, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -F_{-4}F_{-n+3} - F_{-3}F_{-n+4}, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \tag{3.11}$$

biçiminde bulunur. (1.2) ve (3.11) kullanılarak

$$F_{-n} = F_{-4}F_{-n+3} + F_{-3}F_{-n+4}$$

elde edilir ki, bu da (3.8) ile verilen özdeşliğin $k = 4$ için doğru olduğunu gösterir. (3.8)'deki diğer adımlar da k üzerinden benzer biçimde gösterilebilir.

$n \geq 2$ için Pell sayıları başlangıç şartları $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

şeklindeki rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu rekürans bağıntısı

$$P_{-1} = -2P_0 + P_1,\ P_{-2} = -2P_{-1} + P_0,\ P_{-3} = -2P_{-2} + P_{-1},\ \ldots$$

şeklinde Pell sayılarını geriye genişletmek için de kullanılabilir. Dolayısıyla negatif indisli Pell sayıları

$$P_{-n} = -2P_{-n+1} + P_{-n+2} \tag{3.12}$$

bağıntısı kullanılarak elde edilebilir.

$K(n)$ matrisinde $A = 2$ olarak alınmasıyla elde edilen matris $H(n)$ olmak üzere $H(n)$ matrisi ile negatif indisli Pell sayıları için aşağıdaki iki sonuç verilmiştir.

Sonuç 3.3 $H(n)$, $K(n)$ matrisinde $A = 2$ olarak alınmasıyla elde edilen $n \times n$ tipinde bir matris ve

$$c = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ -i, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ i, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

olmak üzere $H(n)$ matrisi ile P_{-n} dizisi arasında

$$per\left(H(n)\right) = cP_{-(n+1)} \tag{3.13}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. (3.13) ile verilen eşitlik daralma (contraction) metodu kullanılarak ispat edilebilir.

Sonuç 3.4 (3.12)'de verilen negatif indisli Pell dizisi $1 \le k \le n$ olmak üzere

$$P_{-n} = P_{-k}P_{-n+k-1} + P_{-k+1}P_{-n+k} \tag{3.14}$$

ile verilen özdeşliği sağlar.

BÖLÜM IV
SONUÇLAR

Bu çalışma, bazı üçlü bant matrislerin determinantları ve permanentleri ile özel sayı dizileri arasındaki ilişkiyi vermektedir. Daha önce farklı metotlarla ispatlanan özdeşlikler, matrisler ve sayı dizileri arasındaki ilişki kullanılarak ispatlanmıştır. Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizilerinin bir genelleştirmesi olan G_n genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için iki farklı özdeşlik verilip bu özdeşliklerin doğruluğu daha önce yapılan ispatlardan farklı olarak üçlü bant matrislerin determinantları yardımıyla gösterilmişir. Bu matrislerin determinantları hesaplanırken de Laplace açılım formülü kullanılmıştır. Ayrıca G_n genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için yapılan özdeşliğin ispatı literatürde Fibonacci ve Pell dizileri için olan çalışmaların bir genellemesidir. G_n dizisi için sağlanan bu özdeşliklerin Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizileri için de geçerli olduğu yine her bir sayı dizisi için farklı üçlü bant matrisler kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca negatif indisli Fibonacci ve Pell sayılarının bir genelleştirmesi olan G_{-n} dizisi için bir özdeşlik oluşturulup, bu özdeşlik de üçlü bant matrislerin permanentleri kullanılarak ispatlanmıştır. Negatif indisli Fibonacci ve Pell sayılarının da sağladığı bu özdeşlik, negatif indisli Jacobsthal sayılarının rasyonel olması nedeniyle bu dizi için geçerli olmamaktadır. Bu nedenle sonraki dönemlerde negatif indisli Jacobsthal sayılarının incelenmesi planlanmaktadır.

KAYNAKLAR

Brualdi, A.R. and Gibson, P.M., "Convex Polyhedra of Doubly Stochastic Matrices I: Applications of the Permanent Function", ***Journal of Combinatorial Theory,*** 22(A), 194-230, 1977.

Brualdi, A.R. and Ryser, J.H., Combinatorial Matrix Theory, ***Cambridge University Press***., Cambridge, 1991.

Bozkurt, D., Türen, B. ve Solak, S., Lineer Cebir, ***Dizgi Ofset Matbaacılık***, Konya, 2005.

Bozkurt, D. and Tam, T.Y., "Determinants and inverses of circulant matrices with Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers", ***Applied Mathematics and Computation*** 219, 544-551, 2012.

Cahill, N. D., D'Ericco J. R. and Spence, J., "Complex Factorizations of the Fibonacci and Lucas Numbers", ***Fibonacci Quarterly*** 41(1), 13-19, 2009.

Cook, K. C. and Bacon, M. R., "Some identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers satifying higher order recurrence relations", ***Annales Mathematicae et Informaticae*** 41, 27-39, 2013.

Campos, H., Catarino, P., Aires, A. P., Vasco P. and Borges, A., "On Some Identities of $k-$Jacobsthal-Lucas Numbers", ***Int. Journal of Math. Analysis*** 8(10), 489-494, 2014.

Er, M.C., "Sums of Fibonacci numbers by matrix method", ***Fibonacci Quarterly*** 22(3), 204-207, 1984.

Feng, J., "Fibonacci identities via the determinant of tridiagonal matrix", ***Applied Mathematics and Computation*** 217, 5978-5981, 2011.

Horadam, A.F., "Pell identities", ***Fibonacci Quarterly*** 9 (3), 245-252, 1971.

Horadam A.F., "Jacobsthal and Pell Curves", ***Fibonacci Quarterly*** 26(1), 79-83, 1988.

Horadam, A.F., "Jacobsthal Representation Numbers", ***Fibonacci Quartely*** 34 (1), 40-54, 1996.

Horn, R.A. and Johnson, C.R., Matrix Analysis, ***Cambridge University Press***, Cambridge, 1985.

Jhala, D., Sisodiya, K. and Rathore, G. P. S., "On Some Identities for $k-$Jacobsthal Numbers", ***Int. Journal of Math. Analysis***, 7(12), 551-556, 2013.

Kalman, D., “Generalized Fibonacci numbers by matrix methods”, ***Fibonacci Quarterly*** 20(1), 73-76, 1982.

Kalman, D., Mena, R. “The Fibonacci Numbers-Exposed”, ***Mathematics Magazine*** 76(3) 167-181, 2003.

Kaygısız, K., Genelleştirilmiş Perrin Sayı Dizileri ve Genelleştirilmiş Sayı Dizilerinin Herhangi Bir Teriminin Hesaplanması, Doktora Tezi, ***Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Konya, 2008.

Kılıç, E. and Tasci, D., “The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers”, ***Taiwanese J. Math.*** 10(6), 1661-1670, 2006.

Kılıç, E. and Tasci, D., “On the generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers”, ***Rocky Mountain J. Math.*** 36(6), 1915-1926, 2006.

Kılıç, E., “The generalized order-k Fibonacci-Pell sequence by matrix methods”, ***J. Comput. Appl. Math.*** 209(2), 133-145, 2007.

Kılıç, E. and Tasci, D., “On the permanents of some tridiagonal matrices with applications to the Fibonacci and Lucas numbers”, ***Rocky Mount. J. Math.*** 37(6), 203-219, 2007.

Kılıç, E. and Tasci, D., “Factorizations and representations of the backward second order linear recurrences”, ***J. Comput. Appl. Math.*** 201(1), 192-197, 2007.

Kılıç, E., “Sums of generalized Fibonacci numbers by matrix method,” ***Ars. Combinatoria*** 84, 23-31, 2007.

Kılıç, E., “On the usual Fibonacci and generalized order-k Pell numbers”, ***Ars. Combinatoria*** 88, 33-45, 2008.

Kılıç, E. and Tasci, D., “On the second order linear recurrences by tridiagonal matrices”, ***Ars. Combinatoria*** 91, 11-18, 2009.

Kılıç, E., “The generalized Pell (p,i)-numbers and their Binet formulas, combinatorial representations,sums”, ***Chaos, Solitons and Fractals*** 40, 2047-2063, 2009.

Kılıç, E. and Tasci, D., “Negatively subscripted Fibonacci and Lucas numbers and their complex factorizations”, ***Ars. Combinatoria*** 96, 275-288, 2010.

Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, ***John Wiley and Sons Inc***, New York, 2001.

Köken, F., Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Özellikleri ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, ***Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Konya, 2008.

Lee,G.Y., Lee, S.G., Kim, J.S. and Shin, H.K., “The Binet formula and representations of k-generalized Fibonacci numbers”, ***Fibonacci Quarterly*** 39(2), 158-164, 2001.

Li, H.C., “On Fibonacci-Hessenberg matrices and the Pell and Perrin numbers”, ***Applied Mathematics and Computation*** 218, 8353-8358, 2012.

Robbins, N., Beginning Number Theory, ***Wm. C. Brown Publishers***, Iowa, 1993.

Shen, S.Q., Cen, J.M. and Hao, Y., "On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers", ***Applied Mathematics and Computation*** 217, 9790-9797, 2011.

Vajda, S., Fibonacci and Lucas Numbers and Golden Section, Theory and Applications, ***John Wiley&Sons*** 1989.

Yaşar, M., and Bozkurt, D., “Another proof of Pell identities by using tridiagonal matrix”, ***Applied Mathematics and Computation*** 218, 6067-6071, 2012.

Zhang, F., Matrix Theory: Basic Results and Techniques, ***Springer***, New York, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Meral Yaşar 20.04.1986 tarihinde Konya'nın Akşehir ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğretimini Konya'da tamamlayıp 2004 yılında Selçuk Üniversitesi Matematik Bölümü'ne girmeye hak kazandı. 2008 yılında buradan mezun olup 2008-2009 Öğretim yılında yüksek lisans eğitimine başladı. Şubat 2009'da Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı ve Ağustos 2010'da yüksek lisans eğitimini tamamlayıp Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. Şubat 2011'de Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'na yatay geçiş yaptı. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmakta ve doktora eğitimine devam etmektedir.

TEZ ÇALIŞMASINDAN ÜRETİLEN ESERLER

Bu tez çalışmasından 1 (bir) adet uluslararası makale ve 1 (bir) adet uluslararası bildiri üretilmiştir.

Yaşar, M., and Bozkurt, D., "Another Proof of Pell Identities by Using Tridiagonal Matrix", ***Applied Mathematics and Computation*** 218, 6067-6071, 2012.

Yaşar M., Bozkurt D. and Yakut, A.T., "A Proof of an Identity for a Generalization of Well-Known Number Sequences", ***12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics***, Rhodes,Greece, 2014.