

**FARKLI MALZEME İÇEREN ÇUBUKLARIN
ÜNİFORM OLMAYAN BURULMASI**

DOKTORA TEZİ

Hakan TÜRKEN

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

EKİM 2014

**FARKLI MALZEME İÇEREN ÇUBUKLARIN
ÜNİFORM OLMAYAN BURULMASI**

DOKTORA TEZİ

Hakan TÜRKEN
(501102002)

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fatma Necla KADIOĞLU

EKİM 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501102002 numaralı Doktora Öğrencisi **Hakan TÜRKEN**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**FARKLI MALZEME İÇEREN ÇUBUKLARIN ÜNİFORM OLMAYAN BURULMASI**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Fatma Necla KADIOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof.Dr. Fatma Necla Kadioğlu**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof.Dr. Reha Artan
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof.Dr.Arif Nihat Güllüoğlu
Marmara Üniversitesi

Doç.Dr. Semih Sezer
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç.Dr. Şenol Ataoğlu
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **11 Eylül 2014**
Savunma Tarihi : **30 Ekim 2014**

Anneme ve Babama,

ÖNSÖZ

Doktora eğitim sürecinin tüm aşamalarında bilgi, birikim ve tecrübesi ile bana her zaman destek olmuş, bu tezin ortaya çıkmasında çok büyük emek ve katkı sağlamış, hiç bir aşamada beni yalnız bırakmamış, değerli zamanını hafta sonu bile demeden bana ayırmış, değerli hocam ve tez danışmanım Prof.Dr. Necla Kadioğlu'na, zorlandığım anlarda geliştirmiş oldukları çözümlerle yardım ve desteklerini her daim göstermiş çok değerli hocalarım Prof. Dr. Reha Artan, Prof. Dr. Abdullah Gedikli, Doç.Dr. Şenol Ataoğlu'na

Hayatım boyunca maddi ve manevi her şekilde yanımda olan, beni cesaretlendiren, ben acaba derken yaparsın diyen, bana inanan, güvenen annem ve ışıklar içerisinde huzurla ilerlediğine inandığım babama sonsuz sevgi, saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Bu yaşıma gelene kadar karşılaştığım, hayatıma bir şekilde dahil olan ve benim gelişmemde olumlu katkısı bulunan herkese, yarınlara pırıl pırıl yetiştiklerini düşündüğüm, bayrağı benden devralacaklarına inandığım yeğenlerim Öykü ve Emir'e varlıkları için teşekkür ederim.

Saygılarımla...

Ekim 2014

Hakan TÜRKEN
(İnşaat Yüksek Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Tezin Amacı.....	2
1.2 Literatür Araştırması	2
1.3 Hipotez	3
2. FORMÜLASYON.....	5
2.1 Temel Denklemler	5
2.2 Burulma Etkisi Altında Kesiti Basit Bağımlı Prizmatik Çubuk	6
2.3 Sınır Eleman Formülasyonu İçin Gerekli Tekil Çözüm	7
2.4 Kütle Kuvveti	11
2.5 Karşıtlık Teoremi.....	18
2.6 Sınır Eleman Yöntemi ile Burulma Problemlerinin Çözümü İçin Karşıtlık Teoreminin Kullanılması	18
2.7 Sınır Eleman Formülasyonu	23
2.8 Tek Malzemeli Kesitte Sınırdaki Gerilme Hesabı	33
3. ÖRNEK PROBLEM 1	39
4. ÖRNEK PROBLEM 2	51
5. KESİTİ FARKLI İKİ MALZEMEDEN OLUŞAN ÇUBUKLAR VE ÇOK BAĞIMLI BÖLGELER İÇİN FORMÜLASYON.....	57
5.1 Burulma Rijitliğinin Hesabı	66
5.2 Çift Malzemeli Kesitte Sınırdaki Kayma Gerilmesi	66
6. ÖRNEK PROBLEM 3	71
7. ÖRNEK PROBLEM 4	81
8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	93
8.1 Çalışmanın Uygulama Alanı	93
KAYNAKLAR.....	95
ÖZGEÇMİŞ	98

KISALTMALAR

BEM : Sınır Eleman Yöntemi

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1: Dikdörtgen kesitte η_2 'nin nokta sayısına göre değişimi ve hata hesabı.	50
Çizelge 6.1: İki malzemeli dikdörtgen kesitte D/μ_1 'in nokta sayısına göre değişimi ve hata hesabı.	80

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Burulma etkisi altında prizmatik çubuk.....	6
Şekil 2.2 : 2c uzunluğunda kesiti sabit burulma çubuğu.....	18
Şekil 2.3 : Suni sınır.....	23
Şekil 2.4 : Nodal köşe noktası.....	34
Şekil 2.5 : Tek teğetli nodal nokta.	34
Şekil 3.1 : Burulma etkisi altında dikdörtgen kesitli çubuk.....	40
Şekil 3.2 : Dikdörtgen kesitte kayma gerilmesi hesaplanan A1B1-D1C1 hatları.	44
Şekil 3.3 : Şekil 3.2’de BC arasında φ ’nin x_2 ile değişimi MN1=12.	46
Şekil 3.4 : Şekil 3.2’de EC arasında φ ’nin x_1 ile değişimi MN2=20.	46
Şekil 3.5 : Şekil 3.2’de D1C1 arasında $\tau_{13}/\omega\mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.....	47
Şekil 3.6 : Şekil 3.2’de D1C1 arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.....	47
Şekil 3.7 : Şekil 3.2’de A1B1 arasında $\tau_{13}/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.....	48
Şekil 3.8 : Şekil 3.2’de A1B1 arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.....	48
Şekil 3.9 : Şekil 3.2’de BC arasında $\tau_s/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.	49
Şekil 3.10 : Şekil 3.2’de EC arasında $\tau_s/\omega\mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.	49
Şekil 4.1 : Burulma etkisi altında çentikli çubuk.....	51
Şekil 4.2 : Çentikli dikdörtgen kesitte AB arasında φ ’nin x_2 koordinatına göre değişimi.....	52
Şekil 4.3 : Çentikli dikdörtgen kesitte EB arasında φ ’nin x_1 koordinatına göre değişimi.....	52
Şekil 4.4 : Çentikli dikdörtgen kesitte EF arasında φ ’nin x_2 koordinatına göre değişimi.....	53
Şekil 4.5 : Çentikli dikdörtgen kesitte GA arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.....	53
Şekil 4.6 : Çentikli dikdörtgen kesitte DK arasında $\tau_{13}/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.....	54
Şekil 4.7 : Çentikli dikdörtgen kesitte DK arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.....	54
Şekil 4.8 : Çentikli dikdörtgen kesitte AB arasında $\tau_s/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.....	55
Şekil 4.9 : Çentikli dikdörtgen kesitte EB arasında $\tau_s/\omega\mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.....	55

Şekil 4.10	: Çentikli dikdörtgen kesitte EF arasında $\tau_s/\omega\mu$ 'nün x_2 koordinatına göre değişimi.....	56
Şekil 5.1	: Burulma etkisi altında çift malzemeli prizmatik çubuk.....	57
Şekil 6.1	: Şekil 5.1'deki çubuk kesitinin nodal noktaları.	72
Şekil 6.2	: Şekil 6.1'de AC'de φ_1 'nin x_1 koordinatı ile değişimi.....	75
Şekil 6.3	: Şekil 6.1'de LA'da φ_1 'nin x_2 koordinatı ile değişimi.	75
Şekil 6.4	: Şekil 6.1'de CF'de φ_2 'nin x_1 koordinatı ile değişimi.	76
Şekil 6.5	: Şekil 6.1'de FT'de φ_2 'nin x_2 koordinatı ile değişimi.	76
Şekil 6.6	: Şekil 6.1'de OC'de φ_2 'nin x_2 koordinatı ile değişimi.	77
Şekil 6.7	: Şekil 6.1'de DO'da $\tau_3/\omega\mu_1$ 'in x_2 koordinatı ile değişimi.....	77
Şekil 6.8	: Şekil 6.1'de CF'de $\tau_s/\omega\mu_2$ 'in x_1 koordinatı ile değişimi.	78
Şekil 6.9	: Şekil 6.1'de CA'da $\tau_s/\omega\mu_1$ 'in x_1 koordinatı ile değişimi.....	78
Şekil 6.10	: Şekil 6.1'de AL'de $\tau_s/\omega\mu_1$ 'in x_2 koordinatı ile değişimi.....	79
Şekil 6.11	: Şekil 6.1'de TF'de $\tau_s/\omega\mu_2$ 'in x_2 koordinatı ile değişimi.	79
Şekil 7.1	: Burulma etkisi altında dört demir içeren prizmatik kolon.....	82
Şekil 7.2	: Bir demirin etrafındaki delik.	82
Şekil 7.3	: Birinci demir.	82
Şekil 7.4	: Şekil 7.1'de AB'de φ 'nin x_2 koordinatına göre değişimi.	87
Şekil 7.5	: Şekil 7.1'de CB'de φ 'nin x_1 koordinatına göre değişimi.	87
Şekil 7.6	: Şekil 7.1'de 1. delik çevresinde φ 'nin θ açısıyla değişimi.	88
Şekil 7.7	: Şekil 7.1'de 1.delik çevresinde $t_3/\omega\mu_1$ 'in θ açısıyla değişimi.	88
Şekil 7.8	: Şekil 7.1'de $x_2 = 11\text{cm}$ TT hattında $\tau_{13}/\omega\mu_1$ 'in x_1 koordinatı ile değişimi.....	89
Şekil 7.9	: Şekil 7.1'de $x_2 = 11\text{cm}$ TT hattında $\tau_{23}/\omega\mu_1$ 'in x_1 koordinatı ile değişimi.....	89
Şekil 7.10	: Şekil 7.1'de $x_1 = 5\text{cm}$ RR hattında $\tau_{13}/\omega\mu_1$ 'in x_2 koordinatı ile değişimi.....	90
Şekil 7.11	: Şekil 7.1'de $x_1 = 5\text{cm}$ RR hattında $\tau_{23}/\omega\mu_1$ 'in x_2 koordinatı ile değişimi.....	90
Şekil 7.12	: Şekil 7.1'de AB hattında $\tau_s/\omega\mu_1$ 'in x_2 koordinatı ile değişimi.	91
Şekil 7.13	: Şekil 7.1'de CB hattında $\tau_s/\omega\mu_1$ 'in x_1 koordinatı ile değişimi.	91

FARKLI MALZEME İÇEREN ÇUBUKLARIN ÜNİFORM OLMAYAN BURULMASI

ÖZET

Bu çalışmada ana hedef birden fazla malzeme içeren çubuklarda burulma etkisi altında oluşan yer değiştirme ve kayma gerilmesi alanlarının hesaplanmasıdır. Çözüm için Saint-Venant burulması esas alınarak sınır eleman yöntemi kullanılmıştır. Sınır eleman yöntemi bilindiği gibi karşılıklı teoremine dayanır. Bu teorem aynı cisim için mevcut iki problem arasında yazılan tekil bir integral denklemdir. Birinci problem tekil elastostatik hal olarak isimlendirilir ve sonsuz ortamda yapılan bir yüklemenin oluşturduğu yer değiştirme ve gerilme alanları içerir. Bu sonsuz ortamın malzeme sabitleri ki burada sadece kayma modülü ortaya çıkmaktadır çözülecek problemle aynıdır. İkinci elastostatik hal ise çözülecek probleme karşı gelir. Burada öncelikle sonsuz ortamda x_3 eksenini doğrultusunda, eksi sonsuz artı sonsuz aralığında etkiyen çizgisel bir yükün oluşturduğu gerilme ve şekil değiştirme alanları bulunmuştur. Karşılıklı teoremi yazılıp integral denklem elde edildikten sonra yer değiştirmelerin Saint-Venant tarafından üniform olmayan burulmada verildiği gibi olduğu varsayılmıştır. Bu durumda integral denklemin tek bilinmeyen burulma fonksiyonu olmuş olur. İntegral denklemini çözebilmek için problemin sınırı doğru parçaları halinde ayrıştırılır. Bu arada integral denklemin sınırdaki bir integral olarak ortaya çıktığı da ayrıca belirtilmelidir. Sınır eleman yönteminde hedef problemi lineer bir denklem takımının çözümüne indirgemektir. Sınırdaki her doğru parçası bir doğrusal eleman olarak isimlendirilir ve bunların uç noktalarına nodal noktalar adı verilir. Burada burulma fonksiyonunun her doğrusal eleman üzerinde, doğrusal olarak değiştiği kabul edilmiştir. Dolayısı ile integral denklem doğrusal elemanlar üzerindeki integrallerin toplamı haline dönüştürülebilir. Her doğrusal elemanda nodal noktalardaki burulma fonksiyonu değerleri belli integrallerin çarpanı haline gelir. Bu durumda bu integrallerin hesaplanması lineer cebrik denklem takımının bilinmeyenlerini oluşturan burulma fonksiyonunun nodal değerlerinin katsayılarının hesaplanması demektir. Bu integraller genellikle sayısal olarak hesaplanabilir. Ancak bu çalışmada bu integraller kapalı olarak hesaplanmıştır. Bir denklem elde edilirken kesitte daha doğrusu kesit sınırında bir nokta sonsuz ortamda elde edilen elastostatik halin yükleme noktası olarak seçilmiştir. Bilinmeyen sayısı ile ki bu nodal noktalardaki burulma fonksiyonu değerlerinden oluşur denklem sayısı aynı olmalıdır. Dolayısı ile her nodal noktaya bir yükleme yapıldığı varsayılmıştır. Bir denklemde sorun yükleme noktası ile üzerinde hesap yapılan doğrusal elemandaki nodal noktaların birinin çakışması halinde ortaya çıkar. Bu sorunu çözmek için bir yükleme halinde o nodal noktayı bölge dışına çıkaran o nodal nokta merkezli ve ε yarıçaplı bir daire yayı sınıra eklenir. Bu durumda tekillik içeren integraller kapalı olarak hesaplanıp ε sıfıra götürülürse yükleme noktasına komşu elemanlardaki tekillikler ortadan kalkar. ε yarıçaplı daire yayı üzerinde burulma fonksiyonunun sabit olduğu varsayılmıştır. Dolayısı ile bu yay üzerindeki integral de o nodal noktadaki fonksiyonun katsayısına eklenmelidir. Hesapları kontrol etmek amacıyla ilk çözülen problem tek malzemeli

dikdörtgen bir kesit olarak seçilmiştir. Bu problemin sonuçları analitik olarak Muskhelishvili'nin kitabında bulunabilir. Dikdörtgen kesitte sınır üzerinde x_1 ve x_2 eksenlerine göre simetrik olan noktalarda burulma fonksiyonunun işaret değiştirerek aynı kaldığı göz önüne alınır. Denklemlerin dörtte birinden iki eksiği kullanılarak yeni bir denklem takımı elde edilirse sınırdaki burulma fonksiyonu değerleri bulunabilir. Bu arada simetri eksenleri üzerinde burulma fonksiyonu değerlerinin sıfır olduğu da göz önüne alınmıştır. Burulma fonksiyonu için bulunan değerler kapalı çözümle bulunan değerlerle tamamen aynıdır. Hata oranı milyonda birdir. Sonra yine deneme amaçlı dikdörtgen kesitte bir yatay bir de düşey hattaki kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Yine hata milyonda bir mertebesindedir. Ancak sınırdaki bilinmeyen gerilme bileşenlerinin hesabı mümkün olmamaktadır. Bu sorunu halletmek için sınırdaki sıfır olmayan gerilme bileşeni oluşturulmuş ve hiç bir tekillikle karşılaşmadan bu bileşen hesaplanmıştır. Hata yine milyonda bir mertebesindedir. Son olarak kesitin burulma rijitliği hesaplanmış ancak bunda hata 1/10000 mertebesinde bulunmuştur.

İkinci örnek problem olarak bir kenarında x_1 eksenine göre simetrik üçgen bir çentik olan bir kesitte aynı hesaplar tekrarlanmıştır.

Üçüncü problem farklı malzemeden yapılmış yanyana eklenmiş iki dikdörtgenden oluşan bir dikdörtgen kesitin burulmasıdır. Aynı problem yine Muskhelishvili tarafından çözülmüştür. Ancak birinci ve ikinci örnek problemler elastisitenin gerilme problemine karşı gelirken, üçüncü problem bir karışık sınır değer problemidir. Ortak yüzeyde sınırdaki gerilme bilinmemektedir. Bu bilinmeyen de doğrusal bir elemanda yine doğrusal değiştiği kabul edilmiştir. Bu problemde elde edilen sonuçlar yine Muskhelishvili'nin sonuçları ile tamamen çakışmaktadır. Hata oranı yer değiştirme ve gerilmelerde milyonda bir, burulma rijitliğinde 1/10000'dir.

Dördüncü örnek problem içinde dört dairesel demir bulunan dikdörtgen bir beton kolondur. Problemden sadece beton kolonda incelenen bölge daha öncekilerden farklı olarak çok bağımlı bir bölgedir. Sınır dikdörtgenin dış sınırına ilave olarak dört delik sınırından oluşmaktadır. Delik yüzeylerinde ilave bilinmeyen olarak x_3 doğrultusunda bir kayma gerilmesi vardır. Ayrıca her bir demir için ayrı bir cisimmişi gibi inceleme yapılmalıdır. Problem x_1 ve x_2 eksenlerine göre simetriktir. Bu da göz önüne alınarak çevre noktaların dörtte birinden iki eksiği ve bir delik çevresindeki noktalara yükleme yapılmış ve buna ilave olarak bir demirde demir çevresine yükleme yapılarak yeterli sayıda denklem elde edilmiştir. Bu arada simetri koşullarının da kullanıldığını tekrar belirtelim.

NONUNIFORM TORSION OF THE PRISMATICAL BARS WITH DIFFERENT SHAPES OF CROSS SECTIONS

SUMMARY

The main goal of this work is to calculate displacement and stress fields arising in bars, including two different materials, under torsion. For solution boundary element method is used with Saint-Venant torsion. It is known that reciprocal identity is the starting point of boundary element method. This identity gives an integral equation which is written between two different problems of the same body.

First problem is named as a singular elastostatic state and includes stress and displacement fields due to a loading in an infinite medium. Material constants are the same with the problem to be solved. Second elastostatic state corresponds to the problem to be solved. Here at first the stress and displacement fields are built due to an infinite line load in the direction of x_3 axis in an infinite medium at the point $\mathbf{y}(y_1, y_2)$. Here $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ denotes the position of any point in the medium and x_1, x_2, x_3 are the cartesian coordinates of the point $\mathbf{x}$. This concept is used in the integral equation which is obtained by reciprocal identity. Then the only unknown of the integral equation becomes torsion function. The boundary of the problem is assumed as a collection of line segments. Besides it must be emphasized that the integrals of the integral equation are on the boundary of the problem. The aim of boundary element method is to reduce the problem to the solution of a system of linear algebraic equations. Every linear segment of the boundary is named as a linear element and the end points of these are named as nodal points. Here it is accepted that the variation of torsion function is linear on each linear element. By the way the integral equation can be transformed as the summation of the integrals over linear elements. The values of the torsion function at nodal points become the multipliers of certain integrals on each linear element. In this case, the calculation of these integrals makes possible the calculation of the coefficients of the system of linear algebraic equations whose unknowns are the values of torsion function at nodal points. These integrals can be calculated numerically. However in this work, these have been calculated analytically. One of these linear algebraic equations is obtained by selecting a nodal point as the loading point $\mathbf{y}$ in the elastostatic state in the infinite medium. The number of the unknowns are equal to the number of the nodal points and must be the same with the number of the equations. Therefore it must be a loading at every nodal point. A trouble comes out if the loading point of an equation coincides one of the nodal points of the linear element on which the integrals are calculated. Then the integrals involve singularities on linear elements on which the loading point exists as an end point. To overcome this problem a circular arc, centered at the loading point with radius ε is added to the boundary so that the loading point is outside the region. After this the integrals including singularities are calculated analytically. And for ε equal to zero the singularities coming out in adjacent elements, eliminate each other. It is also assumed that the torsion function is constant on the circular arc with radius ε . Therefore the integral over this circular arc must be

added to the coefficient of the value of the torsion function at this nodal point. First sample problem is chosen as a simple rectangular cross-section to check the results. The results of this problem can be found in Muskhelishvili's book. It is accepted that Saint-Venant torsion is valid. For the first sample problem it is considered that torsion function stays same but changes sign at the nodal points being symmetric relative to x_1 or x_2 axes. Besides the values of torsion function is zero on symmetry axes. Solving remaining equations the values of torsion function are calculated. Results are the same with analytical solution given by Muskhelishvili. Relative error is millionth order. By the way stress components can be calculated easily deriving the integral equation mentioned above and using boundary values of the torsion function. If the loading point is named as $\mathbf{y}(y_1, y_2)$, y_1 and y_2 derivatives of torsion function must be calculated. It is very easy since the integrals have been calculated analytically as functions of y_1 and y_2 . Constructing these derivatives $\tau_{13}\mathbf{y}$ and $\tau_{23}\mathbf{y}$ shear stresses can be calculated easily. But in these calculations $\mathbf{y}$ point is an inner point of the cross-section. Results are compatible with Muskhelishvili's and relative error has millionth order for this stresses too. For torsion problems another important quantity is torsional rigidity of the cross-section. This quantity is also calculated for rectangular cross-section but relative error has 0.01 percent. After this another problem still remains unsolved which is the calculation of the boundary values of the unknown stress component. This component can not be calculated using $\tau_{13}\mathbf{y}$ and $\tau_{23}\mathbf{y}$ stress component and the surface normal $\mathbf{n}$ since stress expressions involves strong singularities at point $\mathbf{y}$. This singularities can not be eliminated in stress expressions. But the expression of unknown stress component which is equal $-\tau_{13}\mathbf{y}n_2\mathbf{y} + \tau_{23}\mathbf{y}n_1\mathbf{y}$ can be calculated without any singularity in the case of boundary point $\mathbf{y}$ has only one tangent. It means at a corner this stress component can not be calculated. It is clear because a corner point has an infinite numbers of tangents and normals. But to eliminate these singularities is not enough to calculate unknown stress component on the boundary. To overcome this problem a new boundary will be defined. In this case, a new circular arc is added to the boundary. Center and the radius are the same with the previous one. But these leaves the point $\mathbf{y}$ as an inner point. Then the integrals over this circular arc is the multiplier of torsion function at point $\mathbf{y}$ at the right side. But at the left side the multiplier of torsion function becomes one. And there is one possibility for the right side since at point $\mathbf{y}$ has just one tangent. And rearranging, the equation torsion function at nodal point $\mathbf{y}$ takes place at left side only with multiplier 1/2 And the other terms at the right side thus not involve this. Integrals at the right side must be derived with respect to y_1 and y_2 before calculating integrals. Then the results have been compared with Muskhelishvili's for the same problem. The relative error has millionth order again for the unknown stress component on the boundary.

Second sample problem is also a rectangular cross-section but includes a triangular notch being symmetric relative to x_1 axis. In this problem only difference is that half of the equations is used instead of a quarter. For this cross-section whole values relating to torsion function and stresses are very near with those of the first problem for the points far from the notch. But the stress components dramatically increase at the points near the notch. Torsional rigidity of the cross-section is nearly the same with full rectangular. Up to now, formulation is built for a cross-section having a simple connected region. For these kind of regions there are no holes or cracks inside the region. Besides first two problems involve just one material. The aim of this work was to solve torsion problem for all kinds of cross-sections involving different materials

also. For this purpose third sample problem is selected as a rectangular consisting of two rectangular parts. This problem involves a symmetry axis which is x_1 and can be thought as a mix-boundary value problem. It can be seen that this cross-section are formed as a reunion of two rectangular cross-sections of two different materials. At the common boundary a surface traction component come out as unknown in addition to the torsion function which represent displacement component in the x_3 direction. The integral equation which is obtained for the first two problems for a simply connected region is used both rectangulars having different materials separately. But each of them has an additional integral on the common boundary. The variation of surface traction component in the x_3 direction is also accepted as linear on each linear elements on this common boundary. Let N_1 and N_2 be the number of the linear elements belonging only either the first or the second rectangular respectively. And N_3 will represent the number of the linear elements on the common boundary. In that case the number of the nodal points is $N_1 + N_3$ and $N_2 + N_3$ in the first and second rectangulars respectively. It means that performing a loading on each nodal point for both rectangulars one can have only $N_1 + N_2 + N_3$ equations for whole system. This number is not enough. In addition to this, the equality of the torsion function on common boundary for both rectangulars is used. Another condition is that x_3 component of the surface traction vector on the common boundary are also the same but change sign for two rectangulars. Using this the number of the equations becomes equal to the number of the unknowns. Solving these equations the boundary values of torsion function at nodal points are obtained on whole boundaries. Besides the nodal values of the surface traction vector are also obtained on the common boundary. For the first two problems the torsion function is free from the shear modulus μ . But in the third problem torsion function is depended on the ratio of μ_1/μ_2 . Here μ_1/μ_2 represents shear modules of the first and the second materials respectively. This problem is also solved analytically by Mushkelishvili. Results are the same with those given by him. The relative error is millionth order for stresses and displacements. But this error increases to 0.01 percent in the calculation of the torsional rigidity of the same problem. For whole problems the variations of torsion function, shear stresses and unknown stress component on the boundary versus x_1 or x_2 are given by curves in the text.

The last and fourth sample problem is a rectangular concrete column with rectangular cross-section including four cylindrical steel bars placed symmetrically relative to x_1 and x_2 axes. The problem is considered as two different problems. One of them is a rectangular cross-section involving four equal and symmetrically placed circular holes. And the second is a single circular cross-section. Of course these two problems have different materials. The boundary conditions are used on the common boundary and considering the symmetry conditions, the necessary equations are obtained. An interesting point is that in a full rectangular the sign of the torsion function is the same in a quarter while in this problem sign will change from minus to plus in the same region. The reason of this is explained in the text. And variations of torsion function, stress component, and the unknown component versus some coordinates is plotted in the text.

1. GİRİŞ

Üniform olmayan burulma araştırmacıların ve mühendislerin ilgisini en fazla çeken konulardan biridir. Değişik problemler değişik araştırmacılar tarafından farklı metodlar kullanılarak çözülmüştür. Genellikle başlangıç noktası bu tip kesitlerin burulması için Saint-Venant formülasyonudur. Basit şekilli kesitler için burulma problemi analitik olarak çözülmüştür ve bu çözümler Muskhelishvili'nin [1] kitabında bulunabilir. Bu arada pek çok problem sayısal metodlarla da çözülmüştür. Ely ve Zienkiewicz [2] kompozit çubuklar için burulma problemini sonlu eleman metodu ile çözmüşlerdir. Jaswon ve Ponter [3] sınır integral metodunu burulma problemi için farklı kesitlere uygulamışlardır. Katsikadelis ve Sapountzakis [4] yine kompozit silindirik çubuklarda burulma problemini incelemişlerdir. Burada, burulma problemi bir gerilme problemine indirgenmiştir. Karşılıklı teoremi bilinmeyenleri kesit sınırındaki yer değiştirme vektörü olan tekil bir integral denklem elde etmek için kullanılmıştır. Bu işlemden sonra Saint-Venant formülasyonu kullanılarak sınırı basit bağımlı bir bölge olan bir kesitte bahsedilen integral denklemin bilinmeyenleri sınırındaki burulma fonksiyonunun sınır değerine indirgenmiştir. Bu integral denklem lineer cebrik bir denklem takımına indirgenerek çözülecektir. Bu arada integral denklemde karşılaşılan tüm tekillikler elimine edilmiştir. Sınırdaki burulma fonksiyonunun değerleri hesaplandıktan sonra bölge içinde herhangi bir noktada gerilme bileşenleri gerekli türevler alınarak rahatlıkla hesaplanabilir. Bu işlem sonucu ortaya hiç bir tekillik çıkmaz. Ancak sınırdaki bilinmeyen gerilme bileşeni hesaplanmak istenirse daha önce elde edilen formülasyon kullanılamaz. Bu amaçla sınırdaki gerilme hesaplarıken ortaya çıkan kuvvetli tekillikleri yok etmek üzere yeni bir formülasyon geliştirilmiştir. Sınır eleman metodunda doğrusal elemanlar kullanılmıştır. Sınırdaki gerilme hesabında kesit içinde sınıra teğet gerilme bileşeni hesaplanmaktadır. Ancak bu formülasyonda birden fazla teğeti olan noktalarda bu hesap yapılamaz.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı farklı kesit şekillerine sahip prizmatik çubukların burulma probleminin sınır eleman yöntemi ile çözülmesidir. Buradaki farklı kesitlerden kasıt sınırı basit veya çok bağımlı bölge olan farklı malzemelerden oluşmuş kesitlerdir.

1.2 Literatür Araştırması

Uniform olmayan burulma çok fazla araştırmacı tarafından uzun zamandan beri incelenmiş ve hala incelenmeye devam etmektedir. Kesiti dönel simetrik olmayan çubukların burulması ilk olarak Saint Venant tarafından incelenmiştir. Bundan sonra bu konuda yaygın çalışmalar yapılmış ve çoğunluğu Saint Venant'ın ortaya koyduğu formülasyonun çözümü ile uğraşmışlardır. Bu çalışmalar teorik, sayısal veya hem teorik hem sayısal olan çalışmalar olarak gruplanabilir. Örnek olarak iki farklı malzeme kullanılarak oluşturulmuş bir çubukta burulma problemi iki dikdörtgenin birleşiminden oluşan kesitte Muskhelishvili [1] tarafından analitik olarak çözülmüştür.

J.T. Katsikadelis ve E.J. Sapountzakis [4], kompozit silindirik çubukların herhangi bir kesitinde Saint-Venant burulma probleminin sınır elemanlar yöntemiyle çözümünü yapmışlardır. Problemin çözümünde öncelikle bir burulma fonksiyonu tanımlanmıştır. Kompozit çubuk içleri farklı malzeme ile doldurulmuş, delikler olan dairesel bir matristen oluşmaktadır. Burulma fonksiyonu Neumann tipi sınır değer problemini çözerek oluşturulmuştur. Diğer taraftan kompozit kesitin burulma rijitliği ve kayma gerilme bileşenleri de bulunmuştur. Konu ile ilgili olarak birkaç değişik örnek çözülmüş ve bulunan sonuçlar analitik ya da diğer sayısal sonuçlardan elde edilen değerlerle karşılaştırılmıştır. Deliksiz homojen bir kesitteki durum ise, özel bir hal olarak elde edilmiştir. Sınır eleman metodu ile yapılan çözümde ayrıntılı bir hata analizi de yapılmıştır.

Aynı problem başka bir metotla John R. Booker ve Sritawat Kitipornchai [5] tarafından tekrar çözülmüş ve bu çalışmada kompozit malzemenin efektif kayma modülü de hesaplanmıştır. Sonra aynı problem yine sınır eleman yöntemi ile ancak Saint-Venant burulmasına esas alarak ve ilave olarak çarpılmadan oluşan, normal gerilmelerde kullanılarak hesaplanmıştır.

Farklı bir yaklaşım N.S. Trahair [6] tarafından önerilmiştir. Burada burulma momentinin birim dönme açısının kendisinin yanında ikinci türevi ve kübünde bir fonksiyonu olduğu ifade edilmektedir. Bu durumda ortaya çarpılma kesit sabiti ve nonlineerliği tanımlayan Wagner sabiti çıkmaktadır. Formülasyondan sonra çözüm sonlu eleman yöntemiyle yapılmıştır.

Benzer bir çalışma E.J. Sapountzakis [7] tarafından yapılmıştır. Burada da ilave moment göz önüne alınmıştır. Örnek problem olarak simetrik iki dairesel delikli eliptik bir kesit ele alınmıştır ve dairesel deliklerde aynı malzemenin olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca beton dikdörtgen kesitte çelik bir I profilinin yerleştirilmesi durumundaki kompozit kesit incelenmiştir.

Ely ve Zienkiewicz [2], Muskhelishvili'nin çözdüğü problemi sonlu elemanlar metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Hermann [8] benzer doğrultuda çalışmıştır. Jaswan ve Ponter [3] eliptik matraste eliptik delik problemini sınır integral metodu ile çözmüşlerdir. Ayrıca bu çalışmada kare matraste kare delik problemini de sınır integral metodu ile çözmüştür. Chou ve Mohr [9] sınır eleman metodu ile Muskhelishvili'nin problemini ve kare kesitli bir shaftın içinde gömülü kare kesitli farklı malzemeden bir shaft bulunması problemini incelemişlerdir. Aynı çözümü dairesel shaftın etrafında bulunan dairesel shaft problemine de uygulamışlardır. Ahmadi ve Chou [10] kompleks sınır eleman yöntemini kompozit shaftların burulma problemlerine uygulamışlardır. Burada izlenen yol, sınır integral yönteminin bir Cauchy integraline çevrilmesidir.

1.3 Hipotez

İntegral denklem çözülürken sabit bir nokta göz önüne alınmaktadır ve bu sabit nokta sınıra bir daire yayı eklenerek bölge dışına alınmıştır. Bu daire yayı üzerinde burulma fonksiyonunun sabit olduğu kabul edilmiştir. Sınır elemanlar üzerindeki integraller kapalı olarak hesaplanmış ve gerilme hesabı yapılırken burulma fonksiyonunun çarpanı olan integrallerin sonuçları türetilmiştir. Ancak burulma fonksiyonunu çarpan olarak içermeyen integral türetildikten sonra integre edilmelidir. Bu da bu fonksiyonun integralinin çok değerli olmasından kaynaklanmaktadır.

2. FORMÜLASYON

2.1 Temel Denklemler

Lineer, homojen, elastik, sürekli bir ortamda lineer elastisitenin genel denklemleri yer değiştirme vektörü $\mathbf{u}$ ve gerilme tansörü $\boldsymbol{\tau}$ kartezyen koordinatlarda

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılırlar. Burada $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ kartezyen koordinatlarda baz vektörlerini göstermektedirler. Denge denklemleri ve gerilme şekil değiştirme bağıntıları ise;

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad (2.2)$$

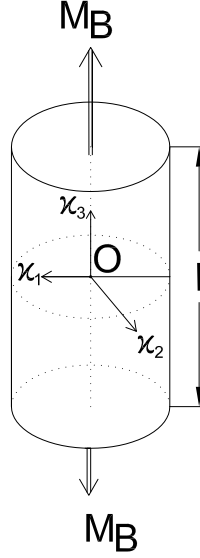
$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\tau_{11} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \tau_{22} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \tau_{33} = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\tau_{23} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \quad \tau_{31} = \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \quad \tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Burada λ ve μ Lamé sabitlerini göstermektedirler. x_1 , x_2 , x_3 ortamda herhangi bir noktanın kartezyen koordinatlarını gösterirler. Kütle kuvvetleri ihmal edilmektedir.



Şekil 2.1 : Burulma etkisi altında prizmatik çubuk.

2.2 Burulma Etkisi Altında Kesiti Basit Bağımlı Prizmatik Çubuk

Bu problemin analitik formülasyonu Muskhelishvili tarafından yapılmıştır. Bu formülasyon için ilk kabul düzlem kesit düzlem kalır şeklindedir. Bu kabul,

$$u_1 = -\omega x_3 x_2, \quad u_2 = \omega x_3 x_1, \quad u_3 = 0 \quad (2.4)$$

sonucunu verir. Burada ω sabit kabul edilen birim dönme açısıdır ve bu kabul daire kesitlerde uygulanabilir. Daire dışındaki kesitlerde,

$$u_1 = -\omega x_3 x_2, \quad u_2 = \omega x_3 x_1, \quad u_3 = \omega \varphi(x_1, x_2) \quad (2.5)$$

kabulü yapılacaktır. Burada φ burulma fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir. Sıfırdan farklı gerilmeler, (2.3) formülleri kullanılarak,

$$\tau_{23} = \mu \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \quad (2.6)$$

$$\tau_{31} = \mu \omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) \quad (2.7)$$

olarak bulunurlar. Bu ifadeler, (2.2) denklemlerine yerleştirilirse,

$$\mu \omega \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (2.8)$$

denklemini bulunacaktır. Bu sonuç φ 'nin harmonik bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Şekil 2.1'deki çubukta yan yüzeylerde yüzey normali $\mathbf{n}$ 'nin sadece 1 ve 2 bileşenleri vardır ve yan yüzde gerilme yoktur. Alt ve üst yüzlerdeki gerilmelerin bileşkeleri ise

sadece burulma momentidir. Yani kuvvet tipi bir bileşke olamaz. Bu yazılırsa kesit üzerinde

$$\int_S \tau_{13} dS = 0 \quad (2.9)$$

$$\int_S \tau_{23} dS = 0 \quad (2.10)$$

bulunur. Bu gerilmelerin bileşkesi olan kuvvetlerin sıfır olması demektir. Denge denklemi,

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde teke indirgenmişti. Momentin değeri ise;

$$M_B = \int_S (\tau_{32}x_1 - \tau_{31}x_2) dS \quad (2.12)$$

şeklinde hesaplanacaktır. (2.6) ve (2.7) ifadeleri (2.12)'de kullanılarak,

$$M_B = \mu \omega \int_S [(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}x_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}x_2] dS \quad (2.13)$$

sonucu bulunur.

$$M_B = \omega D \quad (2.14)$$

yazılırsa ki burada D burulma rijitliğidir;

$$D = \mu \int_S [(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}x_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}x_2] dS \quad (2.15)$$

şeklinde kesite bağlı olarak D bulunur. (2.14) formülü momentin ω ile doğru orantılı olduğunu gösterir.

2.3 Sınır Eleman Formülasyonu İçin Gerekli Tekil Çözüm

Galerkin yer değiştirme vektörünün bir $\mathbf{F}$ vektörü ve bir c sabitine bağlı olarak, aşağıdaki gibi yazılabileceğini söylemiştir.

$$2\mu u = c\nabla^2 F - \nabla(\nabla F) \quad (2.16)$$

Denge denklemleri elastostatik halde;

$$\text{Div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde yazılır. Burada $\boldsymbol{\tau}$ gerilme tansörünü, $\mathbf{f}$ ise birim kütleyle gelen kütle kuvvetini göstermektedir. Bünye denklemi ise,

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.18)$$

şeklindeydi. $\boldsymbol{\epsilon}$ birim şekil değiştirme tansörüdür ve kartezyen koordinatlarda bileşenleri,

$$\epsilon_{ij} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Burada toplama uylasıımı geçerlidir ve x_j herhangi bir kartezyen koordinatı gösterir. ($i = 1, 2, 3$) (2.19) denklemi (2.18)'e yerleştirilirse,

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.20)$$

elde edilip bu da (2.17) denkleminde yerleştirilirse,

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}\right) + \rho f_i = 0 \quad (2.21)$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} = (\nabla \nabla \cdot \mathbf{u})_i$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = (\nabla^2 \mathbf{u})_i \quad (2.22)$$

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ifadeleri anımsanırsa, (2.21) ifadesi vektör formunda,

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = 0 \quad (2.23)$$

formunu alır. (2.16) ifadesi (2.23)'e yerleştirilirse,

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \left[\frac{c}{2\mu} \nabla^2 \mathbf{F} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) \frac{1}{2\mu} \right] + \mu \nabla^2 \left(\frac{c}{2\mu} \nabla^2 \mathbf{F} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) \frac{1}{2\mu} \right) + \rho \mathbf{f} = 0 \quad (2.24)$$

bulunur. Bu arada Lamé sabitlerinin E elastisite modülü ve ν poisson oranı cinsinden ifade edildiği anımsanarak

$$\lambda = \frac{\mu 2\nu}{1 - 2\nu} \quad (2.25)$$

şeklinde λ , μ ve ν cinsinden yazılabilir. (2.25) ifadesi (2.24)'de kullanılırsa

$$c \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{F}) - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot (\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F})) + c \nabla^4 \mathbf{F} - \nabla^2 (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{F})) + 2\rho \mathbf{f} = 0 \quad (2.26)$$

bulunur. (2.26)'daki terimlerin i bileşenleri yazılırsa,

$$[\nabla^2 (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F})]_i = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} [(\nabla \nabla \cdot \mathbf{F})_i] = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.27)$$

$$\nabla \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{F})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2 F_k}{\partial x_l \partial x_l} \right) = \frac{\partial^4 F_k}{\partial x_k \partial x_l \partial x_l \partial x_i} \quad (2.28)$$

$$(\nabla \nabla \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}))_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2 F_l}{\partial x_l \partial x_k} \right) = \frac{\partial^4 F_l}{\partial x_l \partial x_k \partial x_k \partial x_i} \quad (2.29)$$

$$(\nabla^4 \mathbf{F})_i = \frac{\partial^4 F_i}{\partial x_l \partial x_l \partial x_j \partial x_j} \quad (2.30)$$

bulunur. (2.26) denklemini i bileşeni için, (2.27), (2.28), (2.29) ve (2.30) kullanılarak tekrar yazılırsa,

$$\frac{1}{1-2\nu} (c-1-1+2\nu) \frac{\partial^4 F_k}{\partial x_k \partial x_l \partial x_l \partial x_i} + c (\nabla^4 \mathbf{F})_i + 2\rho f_i = 0 \quad (2.31)$$

$$c = 2(1-\nu) \quad (2.32)$$

seçilirse,

$$2(1-\nu) \nabla^4 \mathbf{F} = -2\rho \mathbf{f}$$

$$\nabla^4 \mathbf{F} = -\frac{\rho \mathbf{f}}{1-\nu} \quad (2.33)$$

bulunur. (2.33) denklemini sağlayan herhangi bir $\mathbf{F}$ çözümdür ve (2.16)'dan

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\mu} (1-\nu) \nabla^2 \mathbf{F} - \frac{1}{2\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2.34)$$

şeklinde yer değiştirme alanı bulunur.

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} \quad (2.35)$$

şeklinde bir çözüm de önerilebilir. Bunu (2.23) denkleminde yerine konursa ve $\nabla^2 = \nabla \nabla \cdot - \nabla \wedge \nabla \wedge$ olduğu da anımsanırsa

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot (\nabla \varphi) - \mu \nabla \wedge \nabla \wedge \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} = -\rho \mathbf{f} \quad (2.36)$$

$$\nabla^2 \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right) \nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} = -\frac{\rho \mathbf{f}}{\mu} \quad (2.37)$$

bulunacaktır. Papkovitch-Neuber potansiyelleri ise ϕ_0 skaleri ve $\boldsymbol{\phi}$ vektöründen oluşur ve ikincisi

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanır. Sonuçta $\boldsymbol{\phi}$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\phi} = -\frac{\rho \mathbf{f}}{\mu} \quad (2.39)$$

denklemini sağlar. (2.38)'in diverjansı alınır,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\phi} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi \quad (2.40)$$

bulunur.

$$\frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} \varphi = \phi_0 + \mathbf{r} \boldsymbol{\phi} \quad (2.41)$$

şeklinde bir bağıntı yazılabilir. Burada $\mathbf{r}$ konum vektörüdür.

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \boldsymbol{\phi}) = 2 \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + \mathbf{r} \nabla^2 \boldsymbol{\phi} \quad (2.42)$$

eşitliği (2.39), (2.40) ve (2.41) kullanılırsa,

$$\frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \phi_0 + \nabla^2 (\mathbf{r} \boldsymbol{\phi}) \quad (2.43)$$

$$\nabla^2 \phi_0 = -\mathbf{r} \nabla^2 \boldsymbol{\phi} = \mathbf{r} \frac{\rho \mathbf{f}}{\mu} \quad (2.44)$$

(2.39) ve (2.44) denklemleri Papkovitch-Neuber potansiyellerini çözmeyi sağlar.

$$\nabla \wedge \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla \varphi \quad (2.45)$$

olarak tanımlanıp φ 'nin (2.40)'daki ifadesi kullanılırsa,

$$\nabla \wedge \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2} \nabla (\phi_0 + \mathbf{r} \boldsymbol{\phi}) \quad (2.46)$$

(2.43) ve (2.46), (2.34)'de kullanılırsa,

$$\nabla\varphi = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}(\nabla\phi_0 + \nabla(\mathbf{r}\phi)) \quad (2.47)$$

bulunur. (2.47), (2.45)'de kullanılarak $\nabla\boldsymbol{\psi}$ hesaplanıp bu (2.35)'de kullanılırsa,

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{4(1-\nu)}\nabla(\phi_0 + \mathbf{r}\phi) \quad (2.48)$$

olarak yer değiştirme bulunur.

2.4 Ktle Kuvveti

$$\rho\mathbf{f}^i = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.49)$$

olarak tanımlansın. Burada δ Dirac deltasıdır ve

$$\left. \begin{array}{l} f(\mathbf{y}) \\ 0 \end{array} \right\{ \begin{array}{l} (\mathbf{y} \in V) \\ (\mathbf{y} \notin V) \end{array} \right\} = \int_{V_x} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{x})dV_x$$

zellięini sağlar. Buna karşı gelen $\boldsymbol{\phi}^i$ potansiyeli

$$\nabla^2\boldsymbol{\phi}^i = -\frac{1}{\mu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_i \quad (2.50)$$

denklemini sağlar. ϕ_0^i ise

$$\nabla^2\phi_0^i = \mathbf{r}.\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_i\frac{1}{\mu} \quad (2.51)$$

$$-\frac{1}{\mu}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_i = \nabla^2\mathbf{W} \quad (2.52)$$

olarak tanımlanabilir. Burada;

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_i}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dV \quad (2.53)$$

$$\boldsymbol{\phi}^i = \mathbf{e}_i \frac{1}{4\pi r\mu} \quad (2.54)$$

$$r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

$$\mathbf{W}_0 = - \int_V (\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) \frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\mathbf{e}_i}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \frac{1}{\mu} dV \frac{1}{4\pi r} dx$$

$$\mathbf{W}_{0i} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} -\frac{1}{4\pi r} \frac{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 0$$

$$\phi_0 = 0 \quad (2.55)$$

Bu yüke karşı gelen yer değiştirmeler (2.48)'den

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{e}_i \frac{1}{\mu 4\pi r} - \frac{1}{4(1-\mu)} \nabla(\mathbf{r} \mathbf{e}_i \frac{1}{\mu 4\pi r}) \quad (2.56)$$

$$u_k^i = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{\delta_{ik}}{r} (3-4\nu) + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^3} \right] \quad (2.57)$$

u_k^i sonsuz ortamda bir $\mathbf{y}$ noktasına $\mathbf{e}_i$ baz vektörü doğrultusunda birim tekil yük uygulandığında $\mathbf{x}$ noktasında meydana gelen yer değiştirmenin k bileşenidir. Bu yüklemeye karşı gelen, $\boldsymbol{\tau}^i$ gerilme tansörünün bileşenleri ise

$$\tau_{jk}^i = \lambda \varepsilon_{il}^i \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk}^i$$

$$\varepsilon_{jk}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j^i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^i}{\partial x_j} \right) \quad (2.58)$$

şeklinde aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{\partial u_k^i}{\partial x_j} = \frac{1}{16\mu\pi(1-\nu)} \left[-\delta_{ik} \frac{x_j - y_j}{r^3} (3-4\nu) - \delta_{ij} \frac{x_k - y_k}{r^3} + \delta_{jk} \frac{x_i - y_i}{r^3} \right. \\ \left. - \frac{3(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{r^5} \right] \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial u_j^i}{\partial x_k} = \frac{1}{16\mu\pi(1-\nu)} \left[-\delta_{ij} \frac{x_k - y_k}{r^3} (3-4\nu) + \delta_{ik} \frac{x_j - y_j}{r^3} + \delta_{jk} \frac{x_i - y_i}{r^3} \right. \\ \left. - \frac{3(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{r^5} \right] \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{jk}^i = \frac{1}{16\mu\pi(1-\nu)} \left[\delta_{jk} \frac{x_i - y_i}{r^3} - \frac{(1-2\nu)}{r^3} \delta_{ik} (x_j - y_j) - \frac{(1-2\nu)}{r^3} \delta_{ij} (x_k - y_k) \right. \\ \left. + \frac{3(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{r^5} \right] \quad (2.61)$$

$$\varepsilon_{il}^i = \frac{1}{16\mu\pi(1-\nu)} \left[\frac{-2(1-2\nu)}{r^3} (x_i - y_i) \right] = \frac{-1}{8\mu\pi} \frac{(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{(x_i - y_i)}{r^3} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \tau_{jk}^i = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} & \left[\delta_{jk}(x_i - y_i) \frac{(1-2\nu)}{r^3} - \frac{(1-2\nu)}{r^3} \delta_{ik}(x_j - y_j) \right. \\ & \left. - \frac{(1-2\nu)}{r^3} \delta_{ij}(x_k - y_k) - \frac{3(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{r^5} \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Düzlem problemlerde potansiyeller ve diğer büyüklükler F^i üç boyutlu hali, $\bar{F}^i$ iki boyutlu hali temsil etmek üzere,

$$\bar{F}^i(x_1, x_2, y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^i(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) dy_3 \quad (2.64)$$

şeklinde hesaplanacaklardır. (2.54)'de ϕ^i bulunmuştu. (2.64)'de ϕ^i kullanılırsa

$$\bar{\phi}^i = \mathbf{e}_i \frac{1}{4\mu\pi} \int_{y_3=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}} dy_3 \quad (2.65)$$

integrali bulunur. Burada,

$$\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (2.66)$$

olarak tanımlanmaktadır. Ancak (2.65) integralini hesaplamak yerine, $\bar{\phi}^i$ 'nin ρ 'ya göre kısmi türevini hesaplamak, daha uygun olacaktır. Bu yapılırsa,

$$\frac{\partial \bar{\phi}^i}{\partial \rho} = \mathbf{e}^i \frac{1}{4\mu\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\rho}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 = -\mathbf{e}^i \frac{I}{4\mu\pi} \quad (2.67)$$

bulunur. Buradaki integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \quad (2.68)$$

$$I = \int_{-\infty}^{x_3} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 + \int_{x_3}^{+\infty} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \quad (2.69)$$

şeklinde ikiye ayrılabilir.

$$z = x_3 - y_3 \quad (2.70)$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapılırsa

$$I = \int_{\infty}^0 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} (-dz) + \int_0^{-\infty} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} (-dz) \quad (2.71)$$

integralleri bulunur. 1. integralin sınırları değiştirilirse ikinci integralde ise $z = -z$ yazılırsa

$$I = 2 \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} (dz) \quad (2.72)$$

elde edilir. Bu integralde de,

$$z = \rho \sinh \alpha \quad (2.73)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$J = \int \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} (dz) = \int \frac{\rho \cosh \alpha d\alpha}{\rho^3 \cosh^3 \alpha} = \frac{1}{\rho} \tanh \alpha = \frac{z}{\rho \sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (2.74)$$

$$I = 2 \int_0^\infty \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} (dz) = \frac{2}{\rho} \quad (2.75)$$

şeklinde I integrali hesaplanır. (2.75), (2.67)'de kullanılırsa,

$$\frac{\partial \bar{\phi}^i}{\partial \rho} = -e^i \frac{1}{4\mu\pi} \frac{2}{\rho} = -e^i \frac{1}{2\mu\pi} \frac{1}{\rho} \quad (2.76)$$

Bu ifade ρ 'ya göre integre edilirse,

$$\bar{\phi}^i = -e^i \left(\frac{1}{2\mu\pi} \ln \rho + A \right) \quad (2.77)$$

olarak düzlem hale ait Papkovitch-Neuber potansiyeli bulunur. ϕ_0 skaler potansiyeli üç boyutlu halde de yani nokta yük halinde sıfırdı. Dolayısı ile düzlem halde yer değiştirme vektörü $\bar{u}^i$ (2.48) kullanılarak,

$$\bar{u}^i = \bar{\phi}^i - \frac{1}{4(1-\nu)} \nabla(r\bar{\phi}^i)$$

$$\bar{u}_k^i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \delta_{ik} \ln \rho - \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{\rho^2} \right] + B_{ik} \quad (k, i = 1, 2) \quad (2.78)$$

şeklinde elde edilir. B_{ik} ortamda ilave rijit bir yer değiştirme yoksa sıfır alınacaktır.

(2.78) düzlem şekil değiştirmede bir $y(y_1, y_2)$ noktasına etkiyen

$$\bar{f}^i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.79)$$

yükünden dolayı $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ noktasındaki yer değiştirme alanıdır. Düzlem halde gerilme tansörü

$$\tau_{jk}^i = \lambda \bar{\Delta}^i \delta_{jk} + 2\mu \bar{\epsilon}_{jk}^i \quad (2.80)$$

$$2\bar{\epsilon}_{jk}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_j^i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k^i}{\partial x_j} \right) \quad (2.81)$$

$$2\bar{\epsilon}_{jk}^i = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[2(1-2\nu)\delta_{ij}\frac{x_k-y_k}{\rho^2} + 2(1-2\nu)\delta_{ik}\frac{x_j-y_j}{\rho^2} - 2\delta_{jk}\frac{x_i-y_i}{\rho^2} + 4\frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{\rho^4} \right] \quad (2.82)$$

$$\bar{\Delta}^i = -\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)}(1-2\mu)\frac{x_i-y_i}{\rho^2} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{jk}^i = & -\frac{1}{4\pi\mu(1-\nu)} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}\frac{x_k-y_k}{\rho^2} \right. \\ & + \delta_{ik}\frac{x_j-y_j}{\rho^2} - (1-2\nu)\delta_{jk}\frac{x_i-y_i}{\rho^2} \\ & \left. + 2\frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{\rho^4} \right] \quad (2.84) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanırlar. Üç boyutlu halde sonsuz ortamda bir $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ noktasına $\mathbf{f}^i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{e}^i$ ($x \in V$) kütle kuvveti yüklendiğinde V içinde bir $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ noktasında meydana gelen $\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ yer değiştirmesinin k bileşeni,

$$u_k^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(3-4\nu)\delta_{ik}}{r} + \frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{r^3} \right] \quad (2.85)$$

$$r = \sqrt{(x_i-y_i)(x_i-y_i)} \quad (i, k = 1, 2)$$

şeklinde bulunmuştu. Düzlem hal için gerekli tekil çözümleri bulmak için, f^i 'nin y_3 eksenini üzerinde her noktaya etkidiği varsayılacaktır. Bu durumda

$$\bar{u}_k^i(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_k^i(x, y) dy_3 \quad (2.86)$$

integralleri tekrar hesaplanırsa, iki tip integral ortaya çıkar. Birinci integral;

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} dy_3 = -2\ln\rho + C_1 \quad (2.87)$$

şeklinde daha önce hesaplanmıştı. Ancak ikinci integral;

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{r^3} dy_3 \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (2.88)$$

i ve k 'nın farklı değerleri için farklı sonuç verir. $i, k = 1, 2$ ise,

$$I_2 = (x_i-y_i)(x_k-y_k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (x_3-y_3)^2}^3} dy_3 \quad (2.89)$$

şeklini alır.

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \quad (2.90)$$

ifadesinde

$$x_3 - y_3 = z \quad (2.91)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dz + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dz = \\ &= - \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dz + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dz = \frac{2}{\rho^2} \end{aligned} \quad (2.92)$$

bulunur. (2.92), (2.89)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} I_2 &= (x_i - y_i)(x_k - y_k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \\ &= \frac{2(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{\rho^2}, \quad i, k = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\rho^2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

i veya k'nın 3 olması halinde

$$\begin{aligned} I_2 &= (x_i - y_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_3 - y_3}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \\ I_2 &= (x_i - y_i) \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{-z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dy_3 \\ (x_i - y_i) &[\int_{-\infty}^0 \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dy_3 + \int_0^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3} dy_3] = 0 \end{aligned} \quad (2.94)$$

i ve k'nın 3 olması hali

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x_3 - y_3)^2}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (x_3 - y_3)^2}^3} dy_3 \\
&= -2 \ln \rho + C_1 - 2
\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_k^i &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [[-2 \ln \rho + C_1](3-4\nu)\delta_{ik} + \frac{2(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{\rho^2}] \\
\bar{u}_k^i &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [-(3-4\nu) \ln \rho \delta_{ik} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{\rho^2}], \quad i, k = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.96}$$

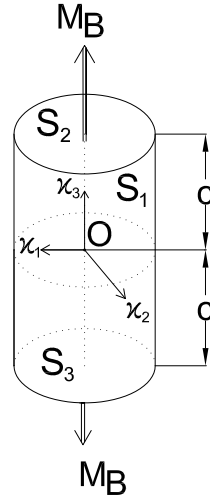
$$\bar{u}_k^i = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}(0), \quad i \neq k, \quad (i \text{ veya } k = 3) \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}_3^3 &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [-(3-4\nu)2 \ln \rho - 2 \ln \rho] \\
\bar{u}_3^3 &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [-\ln \rho 4(1-\nu)]
\end{aligned} \tag{2.98}$$

şeklinde bulunur. Gerilme tansörünün bileşenleri ise,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{13}^1 &= 0 \quad \bar{\tau}_{23}^1 = 0 \quad \bar{\tau}_{33}^1 = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} [-\nu \frac{x_1 - y_1}{\rho^2}] \\
\bar{\tau}_{13}^2 &= 0 \quad \bar{\tau}_{23}^2 = 0 \quad \bar{\tau}_{33}^2 = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} [-\nu \frac{x_2 - y_2}{\rho^2}] \\
\bar{\epsilon}_{11}^3 &= \frac{\partial \bar{u}_1^3}{\partial x_1} = 0 \quad \bar{\epsilon}_{12}^3 = \frac{1}{2} (\frac{\partial \bar{u}_1^3}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2^3}{\partial x_1}) = 0 \\
\bar{\epsilon}_{13}^3 &= \frac{1}{2} (\frac{\partial \bar{u}_1^3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3^3}{\partial x_1}) = \frac{1}{2} [\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [-4(1-\nu) \frac{x_1 - y_1}{\rho^2}]] \\
\bar{\epsilon}_{23}^3 &= \frac{1}{2} (\frac{\partial \bar{u}_2^3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3^3}{\partial x_2}) = \frac{1}{2} [\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [-4(1-\nu) \frac{x_2 - y_2}{\rho^2}]] \\
\bar{\epsilon}_{22}^3 &= \frac{1}{2} (2 \frac{\partial \bar{u}_2^3}{\partial x_2}) = 0 \quad \bar{\epsilon}_{33}^3 = \frac{1}{2} (2 \frac{\partial \bar{u}_3^3}{\partial x_3}) = 0 \\
\bar{\tau}_{13}^3 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{x_1 - y_1}{\rho^2} \quad \bar{\tau}_{22}^3 = 0 \quad \bar{\tau}_{23}^3 = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} \quad \bar{\tau}_{33}^3 = 0
\end{aligned} \tag{2.99}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 2.2 : $2c$ uzunluğunda kesiti sabit burulma çubuğu.

2.5 Karşılıklı Teoremi

Hacmi V , yüzeyi S olan ve lineer elastik homojen bir malzeme ile dolu bir B bölgesinde çözülmek istenen bir elastisite probleminin yer değiştirme alanı $\mathbf{u}$ ve gerilme alanı $\boldsymbol{\tau}$, kütle kuvveti ise $\mathbf{f}$ ile gösterilirse bunlar elastisitenin temel denklemlerini ve ayrıca o problemin sınır koşullarını sağlarlar. Bu üçlüye bir elastostatik hal adı verilebilir. Aynı bölge için malzeme de aynı kalmak üzere $\mathbf{u}^*$, $\boldsymbol{\tau}^*$, $\mathbf{f}^*$ üçlüsü ise başka bir probleme karşı gelsin. Bu problemler gerilme, yer değiştirme veya karışık sınır değer problemleri olabilirler. Bu iki elastostatik hal arasında karşılıklı teoremi

$$\int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^* dV = \int_S \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} dS + \int_V \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.100)$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{n}$ 'nin S yüzeyinin dış normalini gösterdiği anımsanarak yüzey gerilme vektörleri $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{t}^*$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{t}^* = \boldsymbol{\tau}^* \cdot \mathbf{n} \quad (2.101)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

2.6 Sınır Eleman Yöntemi ile Burulma Problemlerinin Çözümü İçin Karşılıklı Teoreminin Kullanılması

Problemde $2c$ uzunluğunda kesiti sabit bir burulma çubuğu ele alınmaktadır. (Şekil 2.2) S_2 ve S_3 yüzleri aynı alana ve aynı geometriye sahiptirler. S_1 yan yüzeyi gerilmesizdir. S_2 ve S_3 yüzeylerinde ise τ_{13} ve τ_{23} kayma gerilmeleri bulunur. Bu kayma gerilmeleri aynı bir x_1, x_2 değeri için bütün kesitlerde aynıdır. Şimdi herhangi

bir (y_1, y_2, y_3) noktasına

$$\bar{\mathbf{f}}^3 = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\mathbf{e}_3 \quad (2.102)$$

çizgisel kütle kuvveti uygulansın. Bu yükten dolayı yer değiştirme vektörü bir $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ noktasında $\bar{\mathbf{u}}^3(x, y)$ ve gerilme tansörü aynı noktada $\bar{\boldsymbol{\tau}}^3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ olsun. Çubukta ise $\mathbf{u}$ yer değiştirme vektörü ve $\boldsymbol{\tau}$ gerilme tansörü oluşsun. Bu iki durum arasında karşılıklı teoremi,

$$\int_S \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{u}}^3 dS + \int_V \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{u}}^3 dV = \int_S \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \mathbf{u} dS + \int_V \bar{\mathbf{f}}^3 \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.103)$$

şeklinde yazılır. V çubuğun hacmi, S toplam yüzeydir. Çözülecek problemde

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.104)$$

alındığından (2.103)'teki ikinci integral sıfırdır. Sonuncu integral ise

$$\begin{aligned} & \int_V \bar{\mathbf{f}}^3 \cdot \mathbf{u} dV \\ &= \int_{x_3=-c}^{+c} dx_3 \int_{S_2} \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)u_3(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\ &= u_3(y_1, y_2)2c \end{aligned} \quad (2.105)$$

şeklinde hesaplanarak (2.103) integrali

$$u_3(y_1, y_2)2c = \int_S \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{u}}^3 dS - \int_S \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \mathbf{u} dS \quad (2.106)$$

şeklini alır. Burada S bütün çubuğun yüzeyidir ve

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \quad (2.107)$$

olarak parçalanabilir. Dolayısıyla (2.106) integrali

$$\begin{aligned} u_3(y_1, y_2)2c &= \int_{S_1} \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{u}}^3 dS + \int_{S_2} \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{u}}^3 dS + \int_{S_3} \mathbf{t} \cdot \bar{\mathbf{u}}^3 dS \\ &\quad - \int_{S_1} \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \mathbf{u} dS - \int_{S_2} \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \mathbf{u} dS - \int_{S_3} \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \mathbf{u} dS \end{aligned} \quad (2.108)$$

şeklini alır. (2.108)'teki birinci integral S_1 yan yüzeyi gerilmesiz olduğundan sıfırdır.

2. ve 3. integraller için $\bar{\mathbf{u}}^3$ ve $\mathbf{t}$ hesaplanırsa

$$\mathbf{n}(S_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(S_3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\bar{\mathbf{u}}^3(S_2) &= \begin{bmatrix} u_1^3(S_2) \\ \bar{u}_2^3(S_2) \\ \bar{u}_3^3(S_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi\mu}[-\ln\rho] \end{bmatrix} \\
\bar{\mathbf{u}}^3(S_3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi\mu}[-\ln\rho] \end{bmatrix} \\
\mathbf{t}(S_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{13} \\ 0 & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{t}(S_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{13} \\ 0 & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{13} \\ -\tau_{23} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sonuçları bulunur. Bu ifadeler incelenirse, gerek S_2 gerek S_3 yüzeylerinde $\mathbf{t}(\bar{\mathbf{u}}^3)$ teriminin sıfır olduğu görülür ki bu da (2.108)'deki ikinci ve üçüncü integrallerin sıfır olduğunu gösterir. S_1 yüzeyi üzerinde

$$\mathbf{n}(S_1) = \begin{bmatrix} n_1(S_1) \\ n_2(S_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan yüzey gerilme vektörü

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{t}}^3 &= \bar{\boldsymbol{\tau}}^3(S_1)\mathbf{n}(S_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\tau}_{13}^3 \\ 0 & 0 & \bar{\tau}_{23}^3 \\ \bar{\tau}_{13}^3 & \bar{\tau}_{23}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{\mathbf{t}}^3(S_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\tau}_{13}^3 n_1 + \bar{\tau}_{23}^3 n_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade kullanılarak (2.108)'deki dördüncü integral

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{t}}^3(S_1) \cdot \mathbf{u} &= (\bar{\tau}_{13}^3 n_1 + \bar{\tau}_{23}^3 n_2) u_3(x_1, x_2) \\
\int_{S_1} \bar{\mathbf{t}}^3(S_1) \cdot \mathbf{u} dS_1 &= \int_{-c}^{+c} dx_3 \oint_{C_2} (\bar{\tau}_{13}^3 n_1 + \bar{\tau}_{23}^3 n_2) u_3(x_1, x_2) dC_2 \\
- \int_{S_1} \bar{\mathbf{t}}^3(S_1) \cdot \mathbf{u} dS_1 &= -2c \oint_{C_2} (\bar{\tau}_{13}^3 n_1 + \bar{\tau}_{23}^3 n_2) u_3(x_1, x_2) dC_2 \quad (2.109)
\end{aligned}$$

(2.108)'deki 5. ve 6. integrallerse

$$\bar{\mathbf{t}}^3(S_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\tau}_{13}^3 \\ 0 & 0 & \bar{\tau}_{23}^3 \\ \bar{\tau}_{13}^3 & \bar{\tau}_{23}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{13}^3 \\ \bar{\tau}_{23}^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{r}}^3(S_3) = \begin{bmatrix} -\bar{\tau}_{13}^3 \\ -\bar{\tau}_{23}^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(S_2) = \begin{bmatrix} u_1(S_2) \\ u_2(S_2) \\ u_3(S_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(S_3) = \begin{bmatrix} u_1(S_3) \\ u_2(S_3) \\ u_3(S_3) \end{bmatrix}$$

$$-\int_{S_2} \bar{\mathbf{r}}^3 \cdot \mathbf{u} dS_2 - \int_{S_3} \bar{\mathbf{r}}^3 \cdot \mathbf{u} dS_3$$

$$-\int_{S_2} (u_1 \bar{\tau}_{13}^3 + u_2 \bar{\tau}_{23}^3) dS_2 + \int_{S_3} (u_1 \bar{\tau}_{13}^3 + u_2 \bar{\tau}_{23}^3) dS_3 \quad (2.110)$$

şeklinde bulunmuştur. Burulma çubuğunda yer değiştirme bileşenlerinin

$$u_1 = -\omega x_3 x_2$$

$$u_2 = -\omega x_3 x_1$$

$$u_3 = \omega \varphi(x_1, x_2) \quad (2.111)$$

şeklinde olduğu ve τ_{13}^3 ile τ_{23}^3 'ün sadece $x_1 - y_1$ ve $x_2 - y_2$ 'nin fonksiyonları olduğu da göz önüne alınarak.

$$\mathbf{u}(S_2) = \begin{bmatrix} -\omega c x_2 \\ \omega c x_1 \\ \omega \varphi(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(S_3) = \begin{bmatrix} \omega c x_2 \\ -\omega c x_1 \\ \omega \varphi(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

ifadeleri de kullanarak bu integraller

$$\begin{aligned} -\int_{S_2} \bar{\mathbf{r}}^3 \cdot \mathbf{u} dS_2 - \int_{S_3} \bar{\mathbf{r}}^3 \cdot \mathbf{u} dS_3 &= -\omega c \int_{S_2} [-\tau_{13}^3 x_2 + \tau_{23}^3 x_1] dS_2 \\ -\omega c \int_{S_2} [-\tau_{13}^3 x_2 + \tau_{23}^3 x_1] dS_2 &= 2\omega c \int_{S_2} [\tau_{13}^3 x_2 - \tau_{23}^3 x_1] dS_2 \end{aligned} \quad (2.112)$$

şeklinde hesaplanırlar.

$$u_3(y_1, y_2) = \omega \varphi(y_1, y_2) \quad (2.113)$$

olduğu düşünülür ve (2.109), (2.112) (2.113) kullanılırsa (2.108) integral denklemi

$$2c\omega\varphi(y_1, y_2) = -2c\omega \oint_{C_2} (\tau_{13}^3 n_1 + \tau_{23}^3 n_2) \varphi(x_1, x_2) dC_2 + 2c\omega \oint_{S_2} (\tau_{13}^3 x_2 - \tau_{23}^3 x_1) dS_2 \quad (2.114)$$

şeklini alır. (2.99) ifadeleri (2.114)'de kullanılırsa,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(\mathbf{y}) & (\mathbf{y} \in V) \\ 0 & (\mathbf{y} \notin V) \end{array} \right\} = \oint_{C_2} \frac{1}{2\pi} \varphi(x_1, x_2) \left[\frac{(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2}{\rho^2} \right] dC_2 - \frac{1}{2\pi} \int_{S_2} \left[\frac{(x_1 - y_1)x_2 - (x_2 - y_2)x_1}{\rho^2} \right] dS_2 \quad (2.115)$$

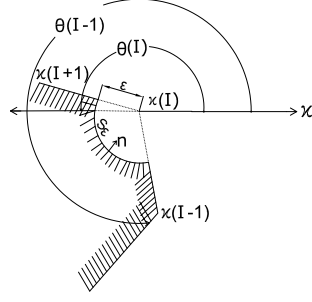
integral denklemi elde edilir. Burada C_2 , S_2 kesitini sınırlayan eğridir. Şimdi Green teoremi kullanılırsa, (2.115)'deki sonuncu integral

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{S_2} \left[\frac{(x_1 - y_1)x_2 - (x_2 - y_2)x_1}{\rho^2} \right] dS_2 \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{S_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 \ln \rho) + \frac{\partial}{\partial x_2} (-x_1 \ln \rho) \right] dS_2 \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C_2} (n_1 x_2 - n_2 x_1) \ln \rho dC_2 \end{aligned}$$

şeklini alır. Bu da (2.115)'e yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) &= \oint_{C_2} \frac{1}{2\pi} \varphi(x) \left[\frac{(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2}{\rho^2} \right] dC_2 \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} (n_1 x_2 - n_2 x_1) \ln \rho dC_2 \quad (2.116) \\ \rho^2 &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

bulunur. (2.116) integral denklemi öncelikle tek malzemeli, kesiti sabit bir çubuk için çözülecektir. (2.116) denklemi incelenirse sınırda $\varphi(x)$ fonksiyonu bilinirse herhangi bir noktada $\varphi(y)$ fonksiyonunun bulunabileceği rahatlıkla görülebilir. Bu durumda amaç sınır üzerindeki $\varphi(x)$ fonksiyonunun bulunmasıdır.



Şekil 2.3 : Suni sınır.

2.7 Sınır Eleman Formülasyonu

Sınır N doğrusal elemana bölünecektir. Elemanların uç noktaları nod noktaları olarak isimlendirilir ve birinci nokta (2) olacaktır. Sonuncu nokta ise $(N + 1)$ numaralıdır. Ancak

$$\mathbf{x}(N + 2) = \mathbf{x}(2)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(N + 1) \quad (2.117)$$

şeklinde iki yeni nokta da tanımlanmaktadır. Doğrusal elemanlar ise başlangıç noktasının numaralarını alırlar. Bir $\mathbf{x}(J)$ noktasındaki φ değeri $\varphi(J)$ olarak adlandırılacaktır ve J numaralı doğrusal elemanda $\varphi(x)$ fonksiyonu

$$\varphi(x) = \varphi(J) + \frac{\varphi(J + 1) - \varphi(J)}{l(J)}s \quad (2.118)$$

olarak tanımlanacaktır. Burada $l(J)$ J numaralı elemanın boyunu gösterir. s ise eleman üzerindeki $\mathbf{x}$ noktasının $\mathbf{x}(J)$ 'ye uzaklığıdır ve $0 - l(J)$ aralığında değişir. Şimdi yükleme noktası $\mathbf{y}$ 'yi nodal noktalardan $\mathbf{x}(I)$ olarak seçelim. Ortaya çıkacak tekilliklerden kurtulabilmek için sınırın aşağıdaki şekilde olduğu varsayılacaktır. (Şekil 2.3)

Burada $\mathbf{x}(I)$ noktası bölge dışına alınmıştır ve sınıra ε yarıçaplı $\mathbf{x}(I)$ merkezli bir daire yayı eklenmiştir. Bu durumda (2.116) integral denklemi S_ε üzerinde φ 'nin sabit olduğu varsayılırsa

$$0 = \sum_{J=2}^{N+1} \int_{l(J)} \left[\varphi(J) + \frac{\varphi(J + 1) - \varphi(J)}{l(J)}s \right] \left[\frac{x_1 - x_1(I)}{\rho^2} n_1(J) + \frac{x_2 - x_2(I)}{\rho^2} n_2(J) \right] ds$$

$$- \frac{1}{2\pi} \oint_{C_2} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) dC_2$$

$$+ \int_{S_\varepsilon} \left[\frac{x_1 - x_1(I)}{\rho^2} n_1(J) + \frac{x_2 - x_2(I)}{\rho^2} n_2(J) \right] \varphi(I) dS_\varepsilon \quad (2.119)$$

formunu alır. Bu denklem daha açık yazılırsa (2.119) denklemi

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{J=2}^{N+1} \int_{l(J)} \left[\varphi(J) + \frac{\varphi(J+1) - \varphi(J)}{l(J)} s \right] \left[\frac{x_1 - x_1(I)}{\rho^2} n_1(J) + \frac{x_2 - x_2(I)}{\rho^2} n_2(J) \right] ds \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{J=2}^{N+1} \int_{l(J)} \ln \rho (x_2 n_1(J) - x_1 n_2(J)) ds \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \left[\frac{(x_1 - x_1(I))}{\rho^2} n_1 + \frac{(x_2 - x_2(I))}{\rho^2} n_2 \right] \varphi(I) dS_\varepsilon \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) dS_\varepsilon \end{aligned} \quad (2.120)$$

şeklini alır. (2.120) denklemindeki integraller kapalı olarak hesaplanabilir. J numaralı elemanın boyu

$$l(J) = \sqrt{(x_1(J+1) - x_1(J))^2 + (x_2(J+1) - x_2(J))^2} \quad (2.121)$$

olarak hesaplanacaktır. J numaralı elemanda normalin bileşenleri ve eleman üzerindeki bir $x(x_1, x_2)$ noktasının koordinatları

$$n_1(J) = \frac{1}{l(J)} [x_2(J+1) - x_2(J)]$$

$$n_2(J) = \frac{-1}{l(J)} [x_1(J+1) - x_1(J)]$$

$$x_1 = -n_2(J)s + x_1(J)$$

$$x_2 = n_1(J)s + x_2(J) \quad (2.122)$$

şeklinde hesaplanırlar. Bu ifadeler (2.120) denkleminde kullanılacaktır. Burada karşılaşılan integrallerde

$$W_1(I, J) = \int_{l(J)} \left[\frac{(x_1 - x_1(I))}{\rho^2} n_1(J) + \frac{(x_2 - x_2(I))}{\rho^2} n_2(J) \right] ds$$

$$T(I, J) = \int_{l(J)} \left[\frac{(x_1 - x_1(I))}{\rho^2} n_1(J) + \frac{(x_2 - x_2(I))}{\rho^2} n_2(J) \right] \frac{s}{l(J)} ds$$

$$W_2(I, J) = \frac{-1}{2\pi} \int_{l(J)} (x_2 n_1(J) - x_1 n_2(J)) \ln \rho \, ds$$

$$E1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \left[\frac{(x_1 - x_1(I))}{\rho^2} n_1 + \frac{(x_2 - x_2(I))}{\rho^2} n_2 \right] dS_\varepsilon$$

$$E2(I) = \frac{-1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \ln \rho [x_2 n_1 - x_1 n_2] dS_\varepsilon \quad (2.123)$$

kısaltmaları yapılır ve bu integraller hesaplanırsa $I \neq J$ ve $J \neq I - 1$ için

$$W1(I, J) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \frac{[-n_2(J)s + x_1(J) - x_1(I)]n_1(J) + [n_1(J)s + x_2(J) - x_2(I)]n_2(J)}{\sqrt{[-n_2(J)s + x_1(J) - x_1(I)]^2 + [n_1(J)s + x_2(J) - x_2(I)]^2}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \tan^{-1} \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$T(I, J) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \frac{[-n_2(J)s + x_1(J) - x_1(I)]n_1(J) + [n_1(J)s + x_2(J) - x_2(I)]n_2(J)}{\rho^2} s ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[[(x_1(J) - x_1(I))n_1(J) + (x_2(J) - x_2(I))n_2(J)] \right. \\ & \quad \left. \left[\ln \frac{\sqrt{(x_1(J+1) - x_1(I))^2 + (x_2(J+1) - x_2(I))^2}}{\sqrt{(x_1(J) - x_1(I))^2 + (x_2(J) - x_2(I))^2}} \right] \right. \\ & \quad \left. + [n_2(J)(x_1(J) - x_1(I)) - n_1(J)(x_2(J) - x_2(I))] \right. \\ & \quad \left. \left[\tan^{-1} \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \tan^{-1} \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.125)$$

Şimdi $J = I$ ve $J = I - 1$ durumları incelenecektir. $J = I$ için $\rho = s$, $x_1(J) = x_1(I)$, $x_2(J) = x_2(I)$

$$W1(I, I-1) = \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{l(J)} \frac{-n_2(I)sn_1(I) + n_1(I)sn_2(I)}{s^2} ds = 0 \quad (2.126)$$

$$W1(I, I-1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(I-1)-\varepsilon} \left[\frac{(-n_2(I-1)s + x_1(I-1) - x_1(I))n_1(I-1)}{(l(I-1) - s)^2} \right]$$

$$+\frac{(n_1(I-1)s+x_2(I-1)-x_2(I))n_2(I-1)}{(l(I-1)-s)^2}]ds$$

$$W1(I, I-1) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(I-1)} \frac{(x_1(I-1)-x_1(I))n_1(I-1)+n_2(x_2(I-1)-x_2(I))n_2(I-1)}{u^2} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(I-1)} \frac{n_2(I-1)l(I-1)n_1(I-1)-n_1(I-1)l(I-1)n_2(I-1)}{u^2} du$$

$$W1(I, I-1) = 0 \quad (2.127)$$

$T(I, I)$ 'yı hesaplamak için I numaralı elemanda

$$x_1 - y_1 = -n_2 s$$

$$x_2 - y_2 = n_1 s$$

$$\rho = s \quad (2.128)$$

yazılarak

$$T(I, I) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon} \frac{-n_1(I)n_2(I)s + n_2(I)n_1(I)s}{s^2} s ds = 0 \quad (2.129)$$

bulunur. $I-1$ numaralı elemanda ise

$$x_1 - y_1 = -n_2(s) + x_1(I-1) - x_1(I)$$

$$x_2 - y_2 = n_1(s) + x_2(I-1) - x_2(I)$$

$$\rho = l(I-1) - s \quad (2.130)$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} T(I, I-1) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{l(I-1)} \frac{1}{(l(I-1)-s)^2} [n_1(I-1)(-n_2(I-1)s \\ & + x_1(I-1) - x_1(I)) + n_2(I-1)(n_1(I-1)s + x_2(I-1) - x_2(I))] s ds \end{aligned} \quad (2.131)$$

bulunup

$$n_1(I-1) = \frac{1}{l(I-1)}[x_2(I) - x_2(I-1)]$$

$$n_2(I-1) = -\frac{1}{l(I-1)}[x_1(I) - x_1(I-1)] \quad (2.132)$$

olduğu da (2.122) anımsanırsa,

$$T(I, I-1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{l(I-1)} \frac{1}{(l(I-1) - s)^2} [-(x_2(I) - x_2(I-1))$$

$$(x_1(I) - x_1(I-1)) + (x_1(I) - x_1(I-1))(x_2(I) - x_2(I-1))] = 0 \quad (2.133)$$

sonucu bulunur. Şimdi

$$E1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_{\varepsilon}} \frac{(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2}{\rho^2} ds$$

integrali hesaplanacaktır. C_{ε} üzerinde (Şekil 2.3)

$$x_1 - y_1 = \varepsilon \cos \theta$$

$$x_2 - y_2 = \varepsilon \sin \theta$$

$$ds = -\varepsilon d\theta$$

$$n_1 = -\cos \theta$$

$$n_2 = -\sin \theta$$

$$\rho = \varepsilon \quad (2.134)$$

olduğu anımsanarak

$$E1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=\theta(I-1)}^{\theta(I)} \frac{\varepsilon \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^2 \theta}{\varepsilon^2} \varepsilon d\theta$$

$$E1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=\theta(I-1)}^{\theta(I)} d\theta = \frac{1}{2\pi} [\theta(I) - \theta(I-1)] \quad (2.135)$$

$$\cos \theta(I) = \frac{x_1(I+1) - x_1(I)}{l(I)}$$

$$\cos \theta(I-1) = \frac{x_1(I-1) - x_1(I)}{l(I-1)}$$

$$E_2(I) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_\varepsilon} \ln \rho [x_2 n_1 - x_1 n_2] dC_\varepsilon$$

integralinde (2.134) ifadeleri kullanılırsa

$$E_2(I) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

$$\int_{\theta=\theta(I-1)} -\ln \varepsilon [(\varepsilon \sin \theta + x_2(I)) \cos \theta + (\varepsilon \cos \theta + x_1(I)) \sin \theta] d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta(I-1)}^{\theta(I+1)} \ln \varepsilon \cdot \varepsilon [x_2(I) \cos \theta + x_1(I) \sin \theta] d\theta = 0 \quad (2.136)$$

$$W2(I, I) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{l(I)} [s \ln s + \ln s (n_1 x_2(I) - n_2 x_1(I))] ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{s^2}{2} \ln s - \frac{s^2}{4} + (n_1 x_2(I) - n_2 x_1(I)) (s \ln s - s) \right] \Big|_{\varepsilon}^{l(I)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{l(I)^2}{4} [2 \ln l(I) - 1] [n_1 x_2(I) - n_2 x_1(I)] l(I) \ln l(I) - l(I) \right] \quad (2.137)$$

$$W2(I, I-1) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(I-1)-\varepsilon} [(x_2 n_1(I-1) - x_1 n_2(I-1))] \ln \rho ds$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(I-1)-\varepsilon} [(n_1(I-1)s + x_2(I-1)) n_1(I-1)$$

$$-[-n_2(I-1)s + x_1(I-1)] n_2(I-1) \ln(l-s)] ds$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(I-1)-\varepsilon} \ln(l(I-1)-s) [s + x_2(I-1) n_1(I-1) - x_1(I-1) n_2(I-1)] ds$$

$$u = l(I-1) - s \quad ds = -du \text{ ise}$$

$$W2(I, I-1) = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\int_{\varepsilon}^{l(I-1)} \ln u [l(I-1) - u + x_2(I-1)n_1(I-1) - x_1(I-1)n_2(I-1)] ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left| [l(I-1) + x_2(I-1)n_1(I-1) - x_1(I-1)n_2(I-1)]u(\ln u - 1) - \frac{u^2}{4}(2\ln u - 1) \right|_{\varepsilon}^{l(I-1)}$$

$$W2(I, I-1) = -\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{l(I-1)^2}{4} (2\ln l(I-1) - 1) \right.$$

$$\left. + [l(I-1) + x_2(I-1)n_1(I-1) - x_1(I-1)n_2(I-1)]l(I-1)[\ln(I-1) - 1] \right] \quad \textbf{(2.138)}$$

$I \neq J$ ve $I-1 \neq J$ için

$$W2(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} [x_2 n_1(J) - x_1 n_2(J)] \ln \rho ds$$

Bu integrali hesaplamak için

$$x_1 = -n_2 s + x_1(J)$$

$$x_2 = -n_1 s + x_2(J)$$

ifadelerini kullanarak.

$$x_2 n_1(J) - x_1 n_2(J) = n_1(J)[n_1(J)s + x_2(J)] - n_2(J)[-n_2(J)s + x_1(J)]$$

$$= s + n_1(J)x_2(J) - n_2(J)x_1(J)$$

$$\rho = \sqrt{(-n_2 s + x_1(J) - y_1)^2 + (n_1 s + x_2(J) - y_2)^2}$$

$$\sqrt{s^2 + 2s[n_1(J)x_2(J) - n_2x_1(J)] + 2s[y_1n_2 - y_2n_1] + (x_{A1} - y_1)^2 + (x_{A2} - y_2)^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{s + (n_1x_2(J) - n_2x_1(J) + y_1n_2 - y_2n_1)}{\rho}$$

Bunlar kullanılırsa

$$W2(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_{s=0}^{l(J)} \ln \rho [s + n_1x_{A2} - n_2x_{A1}] ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{s=0}^{l(J)} \{ \ln \rho [s + n_1x_{A2} - n_2x_1(J) + y_1n_2 - y_2n_1] - \ln \rho [y_1n_2 - y_2n_1] \} ds$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \ln \rho \rho \frac{\partial \rho}{\partial s} ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \ln \rho [y_1 n_2 - y_2 n_1] ds$$

$$W2(I, J) = I_1 + (y_1 n_2 - y_2 n_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \ln \rho ds \quad (2.139)$$

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \rho \ln \rho d\rho = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4} \right]_0^{l(J)} \quad (2.140)$$

ikinci integral

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{(y_1 n_2 - y_2 n_1)}{2\pi} \int_0^{l(J)} \ln \rho ds \\ &= \frac{y_1 n_2 - y_2 n_1}{2\pi} \left[s \ln \rho - \int s \frac{s + n_1 x_{2A} - n_2 x_{1A} + y_1 n_2 - y_2 n_1}{\rho^2} \right]_0^{l(J)} \\ I_2 &= \frac{y_1 n_2 - y_2 n_1}{2\pi} [s \ln \rho - s + (n_1(x_{A2} - y_2) - n_2(x_{A1} - y_1)) \ln \rho \\ &\quad [(x_{A1} - y_1)^2 + (x_{A2} - y_2)^2 - (n_1(x_{A2} - y_2) - n_2(x_{A1} - y_1))^2] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n_1(x_{A1} - y_1) + n_2(x_{A2} - y_2)} \arctan \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} \Big]_0^l \quad (2.141)$$

$$x_{A1} = x_1(J) \ , \ x_{A2} = x_2(J)$$

$$x_{B1} = x_1(J+1) \ , \ x_{B2} = x_2(J+1)$$

$$y_1 = x_1(I) \ , \ y_2 = x_2(I)$$

$$\rho_A = |x(J) - x(I)| \ , \ \rho_B = |x(J+1) - x(I)|$$

(2.139) , (2.140) , (2.141) 'den

$$W2(I, J) = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\rho^2}{4} [2 \ln \rho - 1] + (y_1 n_2 - y_2 n_1) [\ln \rho (s + n_1(x_{A2} - y_2) - n_2(x_{A1} - y_1)) \right.$$

$$\left. -s + [n_1(x_{A1} - y_1) + n_2(x_{A2} - y_2)] \arctan \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} \right] \Big]_0^{l(J)}$$

$$W2(I, J) = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\rho_B^2}{2} \ln \rho_B + \frac{\rho_A^2}{2} \ln \rho_A + \frac{\rho_B^2}{2} - \frac{\rho_A^2}{2} + (y_1 n_2 - y_2 n_1) \right.$$

$$\begin{aligned}
& [\ln \rho_B(l + n_1(x_{A2} - y_2) - n_2(x_{A1} - y_1)) - l + [n_1(x_{A1} - y_1) \\
& + n_2(x_{A2} - y_2)](\arctan \frac{x_{B2} - y_2}{x_{B1} - y_1} - \arctan \frac{x_{A2} - y_2}{x_{B2} - y_2})] \quad (2.142)
\end{aligned}$$

olarak $W2(I, J)$ hesaplanır. Bu durumda integral denklem,

$$\begin{aligned}
& \sum_{J=2}^{N+2} [\varphi(J)W(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J))T_1(I, J)] \\
& + \sum_{J=2}^{N+2} W2(I, J) + \varphi(I)E_1(I) + E_2(I) = 0 \quad (2.143)
\end{aligned}$$

şeklinde bir cebrik denkleme dönüşür. Her $x(I)$ için yükleme yapılarak

$$\sum_{J=2}^{N+1} A(I, J)\varphi(J) = K(I), \quad I = 2, (N+1), \quad J = 2, (N+1) \quad (2.144)$$

şeklinde bir lineer denklem takımı elde edilir. Herhangi bir I, J için ($I=2, \dots, N+1$) bu matrisler

$$A(I, J) = W1(I, J) - T_1(I, J) + T_1(I, J-1), \quad I \neq J$$

$$A(I, I) = W1(I, J) - T_1(I, J) + T_1(I, I-1) + E_1(I)$$

$$K(I) = - \left\{ \sum_{J=2}^{N+1} W2(I, J) + E_2(I) \right\} \quad (2.145)$$

Buradan (2.145) denklem sistemi çözülerek sınırdaki φ değerleri bulunur. Sınırdaki φ değerleri bulunduğundan sonra hedef ω dönme açısını hesaplamaktır. Momentin bilindiği varsayılmaktadır. Herhangi bir x_1, x_2 noktasındaki kayma gerilmeleri S_2 yüzeyinde

$$\tau_{13} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) \omega \mu$$

$$\tau_{23} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) \omega \mu$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Kesite etkiyen burulma momenti S_2 yüzeyinde

$$M_B = \int_{S_2} (-\tau_{13}x_2 + \tau_{23}x_1) dS_2 \quad (2.146)$$

şeklinde bulunabilir. Kayma gerilmelerinin ifadeleri kullanılarak

$$M_B = \mu \omega \int_{S_2} [-x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1^2 + x_2^2] dS_2 \quad (2.147)$$

bulunur. (2.147) ifadesi de bir sınır integraline çevrilebilir.

$$M_B = \mu \omega \int_{S_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (-\varphi x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\varphi x_1) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_1^3}{3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{x_2^3}{3} \right) \right] dS_2$$

$$M_B = \mu \omega \oint_{C_2} \left[(-\varphi x_2 n_1 + \varphi x_1 n_2) + \left(\frac{x_1^3 n_1}{3} + \frac{x_2^3 n_2}{3} \right) \right] dC_2 \quad (2.148)$$

Bu ifade de;

$$M_B = \mu \omega \left[\sum_{J=2}^{N+1} \int_{l(J)} \left[\varphi(J) + \frac{\varphi(J+1) - \varphi(J)}{l(J)} s \right] (x_1 n_2 - x_2 n_1) ds \right.$$

$$\left. + \sum_{J=2}^{N+1} \int_{l(J)} \frac{x_1^3 n_1 + x_2^3 n_2}{3} ds \right] \quad (2.149)$$

şeklinde sınır integrallerin toplamı olarak ayrıklaştırılabilir. Burada hesaplanacak integraller

$$I_1(J) = \int_0^{l(J)} (x_1 n_2 - x_2 n_1) ds = \int_0^{l(J)} (n_2 (-n_2 s + x_{A1}) - n_1 (n_1 s + x_{A2})) ds$$

$$\int_0^{l(J)} (-s + n_2 x_{A1} - n_1 x_{A2}) ds = \left[-\frac{s^2}{2} + s(n_2 x_{A1} - n_1 x_{A2}) \right]_0^{l(J)}$$

$$I_1(J) = \frac{-l(J)^2}{2} + l(J) [n_2(J) x_1(J) - n_1(J) x_2(J)] \quad (2.150)$$

$$I_2(J) = \int_0^{l(J)} \frac{s}{l(J)} (x_1 n_2 - x_2 n_1) ds$$

$$= \frac{1}{l(J)} \int_0^{l(J)} (-s^2 + s(n_2 x_{A1} - n_1 x_{A2})) ds$$

$$= \frac{1}{l(J)} \left[-\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2} (n_2 x_{A1} - n_1 x_{A2}) \right]_0^{l(J)}$$

$$I_2(J) = -\frac{l(J)^2}{3} + \frac{l(J)}{2} (n_2(J) x_{A1} - n_1(J) x_{A2}) \quad (2.151)$$

$$I_3(J) = \int_{l(J)} \left(\frac{x_1^3 n_1 + x_2^3 n_2}{3} \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{l(J)} \frac{n_1(-n_2 s + x_{A1})^3 + n_2(n_1 s + x_{A2})^3}{3} ds \\
&= \frac{l(J)}{12} [n_1(J)n_2(J)l(J)^3(n_1(J)^2n_2(J)^2) \\
&\quad + 4l(J)^2n_1(J)n_2(J)[n_1x_{A2} + n_2x_{A1}] \\
&\quad + 6l(J)n_1(J)n_2(J)[x_{A2}^2 - x_{A1}^2] + 4[n_1x_{A1}^3 + n_2x_{A2}^3]] \tag{2.152}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunursa moment

$$M_B = \mu \omega R \tag{2.153}$$

$$R = \sum_{J=2}^{N+2} [\varphi(J)I_1(J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J))I_2(J)] + \sum_{J=2}^{N+2} I_3(J) \tag{2.154}$$

şeklinde R terimi bulunur. Buradan;

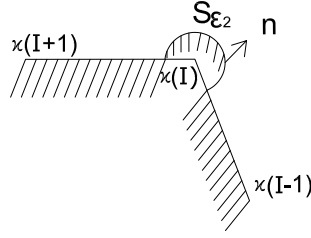
$$\omega = \frac{M_B}{\mu R} \tag{2.155}$$

formülünden kesitin dönme açısı ω hesaplanır. Burulma rijitliği ise $M_B = \omega.D$ yazılırsa $D = M_B/\omega$ bulunur. Ancak burada D/μ hesaplanacaktır.

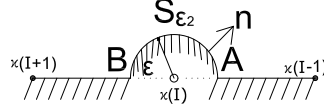
2.8 Tek Malzemeli Kesitte Sınırdaki Gerilme Hesabı

Gerilme hesaplanacak olan y noktası sınır üzerinde ise, iki durum söz konusudur. y , (J) numaralı elemanın üzerindedir. Ancak nodal noktalardan biri değildir. y , $x(I)$ nodal noktası ile çakışır. Birinci durumda, sınırdaki kayma gerilmesi yine sorunsuz hesaplanır. İkinci durumda ise, gerilme hesaplanan nodal noktada tek bir sınır teğeti varsa, sınırdaki kayma gerilmesi hesabı yapmak mümkündür. Birden fazla teğeti olan noktalarda gerilme hesaplanamaz. Bu da köşe noktalara karşı gelir. Bunun nedeni, sınır yüzeyinin gerilmesiz oluşu ve sınır noktasında bilinmeyen gerilme bileşeninin sınıra dik düzlem içinde olmasıdır. Bunun tek bir değerinin olması ise sınırın o noktada tek bir normalinin olması ile mümkündür.

Dolayısı ile (Şekil 2.4)'deki durumunda gerilme hesabı yapılamayacak (Şekil 2.5)'deki durumunda yapılabilecektir. Bu hesabı yapabilmek için daha önce yapılanın aksine



Şekil 2.4 : Nodal köşe noktası.



Şekil 2.5 : Tek teğetli nodal nokta.

$y = x(I)$ noktası şekildeki gibi sınır içine alınacaktır. Bu amaçla y merkezli ε yarıçaplı bir daire parçası sınıra eklenecektir. Burada sadece (Şekil 2.5)'deki durum göz önüne alınacaktır. BA daire parçası üzerinde φ potansiyelinin sabit olduğu kabul edilecektir. Bu durumda herhangi bir $y = x(I)$ noktasında yükleme yapıldığında φ potansiyelini bulmak için yazılan integral denklem aşağıdaki formu alır.

$$\begin{aligned} \varphi(I) = & \sum_{J=2}^{I-2} [\varphi(J) W1(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T(I, J)] \\ & + \sum_{J=I+1}^{N+1} [\varphi(J) W1(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T(I, J)] \\ & KAT1(I) \varphi(I-1) + KAT2(I) \varphi(I) + KAT3(I) \varphi(I+1) \\ & + \sum_{J=2}^{I-2} W2(I, J) + \sum_{J=I+1}^{N+1} W2(I, J) + KAT4(I) \end{aligned} \quad (2.156)$$

Bu ifadedeki katsayılardan $W1(I, J)$, $T(I, J)$, $W2(I, J)$ ifadeleri daha önce ($J \neq I$) ve ($J \neq I-1$) için (2.124), (2.125), (2.142)'de tanımlanmıştı. Diğer katsayılar ise

$$EKY1(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\varepsilon 2}} \left[\frac{(x_1 - y_1)n_1}{\rho^2} + \frac{(x_2 - y_2)n_2}{\rho^2} \right] d_{s\varepsilon 2} \quad (2.157)$$

$$EKY2(I) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_{\varepsilon 2}} \ln \rho [x_2 n_1 - x_1 n_2] d_{s\varepsilon 2} \quad (2.158)$$

$$KAT1(I) = -T(I, I-1) + W1(I, I-1) \quad (2.159)$$

$$KAT2(I) = T(I, I-1) + W1(I, I) + EKY1(I) \quad (2.160)$$

$$KAT3(I) = T(I, I) \quad (2.161)$$

$$KAT4(I) = W2(I, I-1) + W2(I, I-1) + W2(I, I) \quad (2.162)$$

şeklinde tanımlanırlar. $EKY1(I)$ ve $EKY2(I)$ AB yayı üzerinde hesaplanacaklardır. AB üzerinde

$$x_1 - y_1 = \varepsilon \cos \theta, x_2 - y_2 = \varepsilon \sin \theta$$

$$n_1 = \cos \theta, n_2 = \sin \theta, \rho = \varepsilon, dS_{\varepsilon 2} = \varepsilon d\theta$$

olduğu göz önüne alınarak ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınarak

$$EKY1(I) = \frac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2} \quad (2.163)$$

$$EKY2(I) = 0 \quad (2.164)$$

şeklinde hesaplanırlar. Daha önceden bulunan sonuçlar kullanılarak

$$KAT1(I) = 0 \quad (2.165)$$

$$KAT2(I) = \frac{1}{2} \quad (2.166)$$

$$KAT3(I) = 0 \quad (2.167)$$

$$KAT4(I) = -\frac{1}{2\pi} \int_{l(I-1)} \ln \rho(x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{l(I)} \ln \rho(x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \quad (2.168)$$

şeklinde yazılabilirler. Bu sonuçlardan sonra $\varphi(\mathbf{y})$ 'i veren denklem

$$\frac{1}{2}\varphi(I) = \sum_{J=2}^{I-2} [\varphi(J)W1(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J))T(I, J)] \\ + \sum_{J=I+1}^{N+1} [\varphi(J)W1(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J))T(I, J)]$$

$$+ \sum_{J=2}^{I-2} W2(I, J) + \sum_{J=I+1}^{N+1} W2(I, J) + KAT4(I) \quad (2.169)$$

Buradan kayma gerilmeleri

$$\tau_{13} = \omega\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - y_2 \right) \quad (2.170)$$

$$\tau_{23} = \omega\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + y_1 \right) \quad (2.171)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Bu ifadeler oluşturulursa

$$\begin{aligned} \tau_{13}(y) = & \omega\mu \left[2 \left[\sum_{J=2}^{I-2} [\varphi(J) T11(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T11S(I, J)] \right. \right. \\ & + \sum_{J=I+1}^{N+1} [\varphi(J) T11(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T1(I, J)] \\ & \left. \left. + \sum_{J=2}^{I-2} T13(I, J) + \sum_{J=I+1}^{N+1} T13(I, J) + KAT41(I) \right] - y_2 \right] \end{aligned} \quad (2.172)$$

$$\begin{aligned} \tau_{23}(y) = & \omega\mu \left[2 \left[\sum_{J=2}^{I-2} [\varphi(J) T22(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T22S(I, J)] \right. \right. \\ & + \sum_{J=I+1}^{N+1} [\varphi(J) T22(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T22S(I, J)] \\ & \left. \left. + \sum_{J=2}^{I-2} T23(I, J) + \sum_{J=I+1}^{N+1} T23(I, J) + KAT42(I) \right] + y_1 \right] \end{aligned} \quad (2.173)$$

şeklinde kayma gerilmeleri bulunur. Buradaki ifadelerden, $T11(I, J)$, $T11S(I, J)$, $T22(I, J)$, $T22S(I, J)$, $T13(I, J)$, $T23(I, J)$, daha önce $J \neq I$ ve $J \neq I - 1$ dışında verilmişti. $KAT41(I)$ ve $KAT42(I)$ ise

$$KAT41(I) = \frac{\partial}{\partial y_1} (KAT4(I)) \quad (2.174)$$

$$KAT42(I) = \frac{\partial}{\partial y_2} (KAT4(I)) \quad (2.175)$$

Bu integraller hesaplanırsa,

$$KAT41(I) = n_2(I) \frac{1}{2\pi} [-l(I) - l(I-1)]$$

$$+(n_1(I)x_2(I) - n_2(I)x_1(I))[\ln l(I-1) - \ln l(I)] \quad (2.176)$$

$$KAT42(I) = n_1(I) \frac{1}{2\pi} [l(I) + l(I-1)]$$

$$+(n_1(I)x_2(I) - n_2(I)x_1(I))[\ln l(I) - \ln l(I-1)] \quad (2.177)$$

sonuçları bulunur. Ancak sınırda hesaplanacak olan kayma gerilmesi $x(I)$ noktasında

$$\tau_s(I) = -n_2(I)\tau_{13}(I) + n_1(I)\tau_{23}(I) \quad (2.178)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Burada, $\mathbf{n}(I-1)$, $\mathbf{n}(I)$ normallerinin aynı olduğunu tekrar belirtmek gerekebilir.

3. ÖRNEK PROBLEM 1

Burada önce sonuçların kontrolü amacıyla dikdörtgen bir kesitte çözüm yapılacaktır. (Şekil 3.1) Burulmada $b < h$ olmak üzere dikdörtgen kesitte birim dönme açısı

$$\omega = \frac{M_B}{\mu \eta_2 . h . b^3} = \frac{M_B}{D} \quad (3.1)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada D burulma rijitliği olmak üzere

$$D = \eta_2 . h . b^2 . \mu \quad (3.2)$$

şeklinde D bulunmuştur. Ancak sonuçlarda D/μ hesaplanmıştır. Şekildeki gibi bir kesitte $\mathbf{x}(2) = \mathbf{x}(A)$ seçilip AB arası MN1 parçaya, BC arası MN2 parçaya bölünerek η_2 katsayısı hesaplanmıştır. Şimdi kayma gerilmeleri bölgede hesaplanacaktır. Bölge içinde herhangi bir $y(y_1, y_2)$ noktasında ϕ değeri;

$$\phi(y_1, y_2) = \oint \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] dC - \frac{1}{2\pi} \oint_C \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) dC \quad (3.3)$$

şeklinde sınırdaki ϕ değerleri bilindiğine göre rahatlıkla hesaplanabilir. Şimdi herhangi bir y noktasındaki kayma gerilmeleri

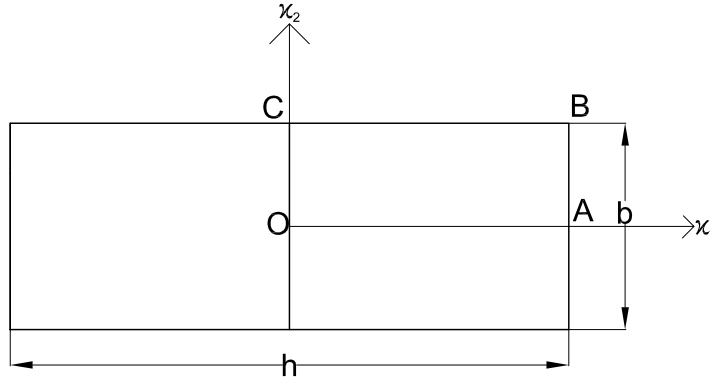
$$\begin{aligned} \tau_{13}(y_1, y_2) &= \left(\frac{\partial \phi(y_1, y_2)}{\partial y_1} - y_2 \right) \omega \mu \\ \tau_{23}(y_1, y_2) &= \left(\frac{\partial \phi(y_1, y_2)}{\partial y_2} + y_1 \right) \omega \mu \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde (3.3) denklemi türetilerek,

$$\begin{aligned} \tau_{13}(y_1, y_2) &= \frac{\mu \omega}{2\pi} \left[\oint \phi(x) \left[-\frac{1}{\rho^2} n_1 + \frac{2(x_1 - y_1)^2}{\rho^4} n_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{\rho^4} n_2 \right] dS \right. \\ &\quad \left. - \oint \left[-\frac{(x_1 - y_1)}{\rho^2} (x_2 n_1 - x_1 n_2) \right] dS - 2\pi y_2 \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{23}(y_1, y_2) = & \frac{\mu \omega}{2\pi} \left[\oint \varphi(x) \left[-\frac{1}{\rho^2} n_2 + \frac{2(x_2 - y_2)^2}{\rho^4} n_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{\rho^4} n_1 \right] dS \right. \\
& \left. - \oint \left[-\frac{(x_2 - y_2)^2}{\rho^2} (x_2 n_1 - x_1 n_2) \right] dS + 2\pi y_1 \right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 3.1 : Burulma etkisi altında dikdörtgen kesitli çubuk.

Sınır daha önce yapıldığı gibi ayrıklaştırılırsa

$$\begin{aligned}
\tau_{13}(y_1, y_2) = & \frac{\mu \omega}{2\pi} \left[\sum_{j=2}^{N+2} \int_{l(j)} \left(\varphi(j) + \frac{\varphi(j+1) - \varphi(j)}{l(j)} s \right) \right. \\
& \left[-\frac{1}{\rho^2} n_1 + \frac{2(x_1 - y_1)}{\rho^4} [(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2] \right] ds \\
& \left. - \sum_{j=2}^{N+2} \int_{l(j)} \left(-\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} \right) (x_2 n_1 - x_1 n_2) \right] ds - y_2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{23}(y_1, y_2) = & \frac{\mu \omega}{2\pi} \left[\sum_{j=2}^{N+2} \int_{l(j)} \left(\varphi(j) + \frac{\varphi(j+1) - \varphi(j)}{l(j)} s \right) \right. \\
& \left[-\frac{1}{\rho^2} n_2 + \frac{2(x_2 - y_2)}{\rho^4} (x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2 \right] ds \\
& \left. + \sum_{j=2}^{N+2} \int_{l(j)} \left(\frac{x_2 - y_2}{\rho^2} \right) (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \right] + y_1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ifadeleri elde edilir. $\mathbf{y}(y_1, y_2)$ sınır üzerinde değilse (3.7) ve (3.8) integrallerinde hiç bir tekillik ortaya çıkmaz ve sınır üzerindeki değerlere ve y_1, y_2 değerlerine bağlı olarak kayma gerilmeleri hesaplanır. Burada

$$T_{11}(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \left(-\frac{1}{\rho^2} n_1 + \frac{2(x_1 - y_1)}{\rho^4} \right) [(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2] ds \quad (3.9)$$

$$T_{11S}(I, J) = \frac{1}{2\pi l(J)} \int_{l(J)} s \left(-\frac{1}{\rho^2} n_1 + \frac{2(x_1 - y_1)}{\rho^4} \right) [(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2] ds \quad (3.10)$$

$$T_{22}(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \left(-\frac{1}{\rho^2} n_2 + \frac{2(x_2 - y_2)}{\rho^4} \right) [(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2] ds \quad (3.11)$$

$$T_{22S}(I, J) = \frac{1}{2\pi l(J)} \int_{l(J)} s \left(-\frac{1}{\rho^2} n_2 + \frac{2(x_2 - y_2)}{\rho^4} \right) [(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2] ds \quad (3.12)$$

$$T_{13}(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \frac{(x_1 - y_1)}{\rho^2} (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \quad (3.13)$$

$$T_{23}(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \frac{(x_2 - y_2)}{\rho^2} (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \quad (3.14)$$

kısaltmaları kullanılırsa, bir $x(I) = (y_1, y_2)$ noktasındaki gerilmeler,

$$\tau_{13}(y_1, y_2) = \mu \omega \sum_{J=2}^{N+2} [\varphi(J) T_{11}(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T_{11S}(I, J) + T_{13}(I, J)] \quad (3.15)$$

$$\tau_{23}(y_1, y_2) = \mu \omega \sum_{J=2}^{N+2} [\varphi(J) T_{22}(I, J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J)) T_{22S}(I, J) + T_{23}(I, J)] \quad (3.16)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Buradaki integraller aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
T_{11}(I, J) &= \frac{\partial W_1(I, J)}{\partial y_1} = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} \right)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right)^2} \right) \right] \\
T_{11}(I, J) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{\rho_B^2} - \frac{x_2(J) - x_2(I)}{\rho_A^2} \right] \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\rho_B = \sqrt{(x_2(J+1) - x_2(I))^2 + (x_1(J+1) - x_1(I))^2}$$

$$\rho_A = \sqrt{(x_2(J) - x_2(I))^2 + (x_1(J) - x_1(I))^2}$$

$$\begin{aligned}
T_{22}(I, J) &= \frac{\partial W_1(I, J)}{\partial y_2} = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{x_1(J+1) - x_1(I)} \cdot \frac{(x_1(J+1) - x_1(I))^2}{\rho_B^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{x_1(J+1) - x_1(I)} \cdot \frac{(x_1(J) - x_1(I))^2}{\rho_A^2} \right] \\
T_{22}(I, J) &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{x_1(J+1) - x_1(I)}{\rho_B^2} + \frac{x_1(J) - x_1(I)}{\rho_A^2} \right] \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$T_{11S}(I, J) = \frac{\partial}{\partial y_1} (T(I, J)) \quad [y_1 = x_1(I)]$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \frac{1}{l(J)} \left[-n_1(J) \ln \frac{\rho_B}{\rho_A} - n_2(J) \left[\arctan \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \arctan \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] \right. \\
&\quad \left. + [(x_1(J) - x_1(I))n_1(J) + (x_2(J) - x_2(I))n_2(J)] \right. \\
&\quad \left. \left[-\frac{x_1(J+1) - x_1(I)}{\rho_B^2} + \frac{x_1(J) - x_1(I)}{\rho_A^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + [(x_1(J) - x_1(I))n_2(J) + (x_2(J) - x_2(I))n_1(J)] \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{\rho_B^2} - \frac{x_2(J) - x_2(I)}{\rho_A^2} \right] \right] \tag{3.19}
\end{aligned}$$

$$T22S(I, J) = \frac{\partial}{\partial y_2}(T(I, J)) \quad [y_2 = x_2(I)]$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{l(J)} \left[-n_2(J) \ln \frac{\rho_B}{\rho_A} + n_1(J) \left[\arctan \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \arctan \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] \right]$$

$$+ [(x_1(J) - x_1(I))n_1(J) + (x_2(J) - x_2(I))n_2(J)]$$

$$\left[-\frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{\rho_B^2} + \frac{x_2(J) - x_2(I)}{\rho_A^2} \right]$$

$$+ [(x_1(J) - x_1(I))n_2(J) + (x_2(J) - x_2(I))n_1(J)]$$

$$\left[-\frac{x_1(J+1) - x_1(I)}{\rho_B^2} + \frac{x_1(J) - x_1(I)}{\rho_A^2} \right] \quad (3.20)$$

$$T13(I, J) = \frac{\partial W2(I, J)}{\partial y_1} = \frac{1}{2\pi} [\ln \rho_B (x_1(J+1) - x_1(I)) - \ln \rho_A (x_1(J) - x_1(I))]$$

$$+ [x_1(I)n_2(J) - x_2(I)n_1(J)] \left[-\frac{(x_1(J+1) - x_1(I))}{\rho_B^2} \right]$$

$$[l + n_1(J)(x_2(J) - x_2(I)) - n_2(J)(x_1(J) - x_1(I))]$$

$$\frac{(x_1(J) - x_1(I))}{\rho_A^2} [n_1(J)[x_2(J) - x_2(I)] - n_2(J)[x_1(J) - x_1(I)]]$$

$$+ n_2(J) \ln \rho_B - n_2(J) \ln \rho_A \left[\arctan \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \arctan \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] (-n_1(J))$$

$$[(x_1(J) - x_1(I))n_1(J) + (x_2(J) - x_2(I))n_2(J)] \cdot \left[\frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{\rho_B^2} - \frac{x_2(J) - x_2(I)}{\rho_A^2} \right]$$

$$+ n_2(J) [\ln \rho_B [l(J) + n_1(J)(x_2(J) - x_2(I)) - n_2(J)(x_1(J) - x_1(I))]]$$

$$- \ln \rho_A [n_1(J)(x_2(J) - x_2(I)) - n_2(J)(x_1(J) - x_1(I))] - l(J)$$

$$+ [n_1(J)(x_1(J) - x_1(I)) - n_2(J)(x_2(J) - x_2(I))]$$

$$\left[\arctan \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \arctan \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] \quad (3.21)$$

$$T23(I, J) = \frac{1}{2\pi} [\ln \rho_B(x_2(J+1) - x_2(I)) - \ln \rho_A(x_2(J) - x_2(I))$$

$$+ [x_1(I)n_2(J) - x_2(I)n_1(J)] \left[-\frac{(x_2(J+1) - x_2(I))}{\rho_B^2} \right.$$

$$\left. [l + n_1(J)(x_2(J) - x_2(I)) - n_2(J)(x_1(J) - x_1(I))] \right]$$

$$\frac{(x_2(J) - x_2(I))}{\rho_A^2} [n_1(J)[x_2(J) - x_2(I)] - n_2(J)[x_1(J) - x_1(I)]]$$

$$-n_1(J) \ln \rho_B + n_1(J) \ln \rho_A \left[\arctan \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \arctan \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] (-n_2(J))$$

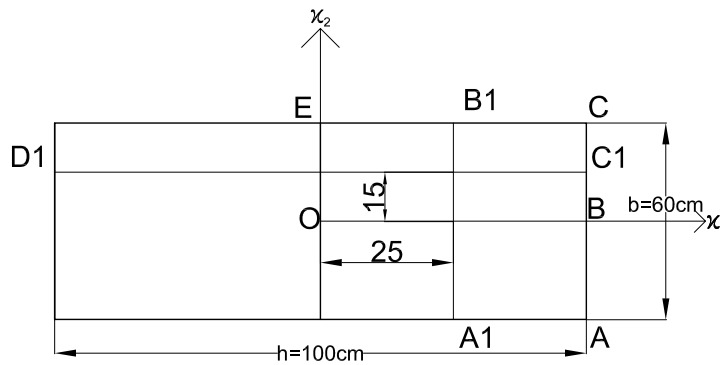
$$[(x_1(J) - x_1(I))n_1(J) + (x_2(J) - x_2(I))n_2(J)] \cdot \left[-\frac{x_1(J+1) - x_1(I)}{\rho_B^2} + \frac{x_1(J) - x_1(I)}{\rho_A^2} \right]$$

$$-n_1(J) [\ln \rho_B [l(J) + n_1(J)(x_2(J) - x_2(I)) - n_2(J)(x_1(J) - x_1(I))]$$

$$- \ln \rho_A [n_1(J)(x_2(J) - x_2(I)) - n_2(J)(x_1(J) - x_1(I))] - l(J)$$

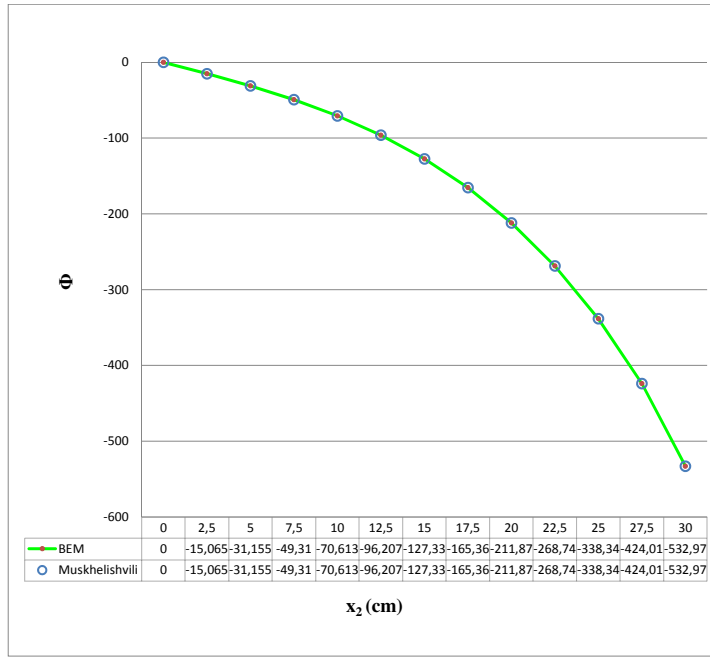
$$+ [n_1(J)(x_1(J) - x_1(I)) - n_2(J)(x_2(J) - x_2(I))]$$

$$\left[\arctan \frac{x_2(J+1) - x_2(I)}{x_1(J+1) - x_1(I)} - \arctan \frac{x_2(J) - x_2(I)}{x_1(J) - x_1(I)} \right] \quad (3.22)$$

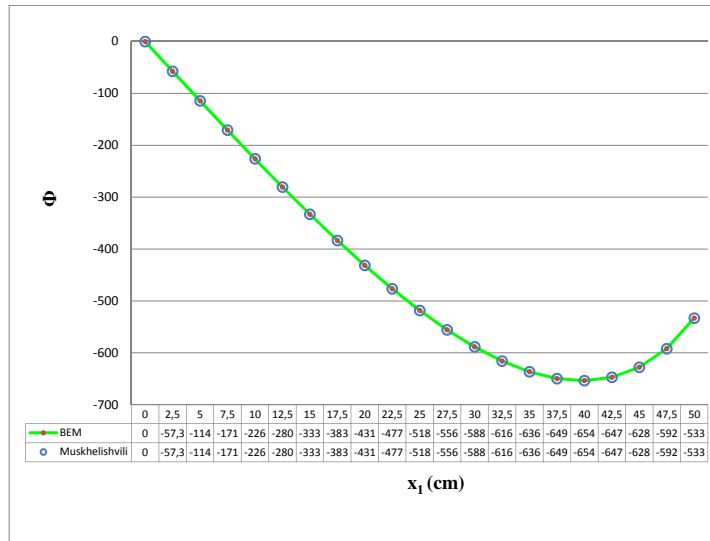


Şekil 3.2 : Dikdörtgen kesitte kayma gerilmesi hesaplanan A1B1-D1C1 hatları.

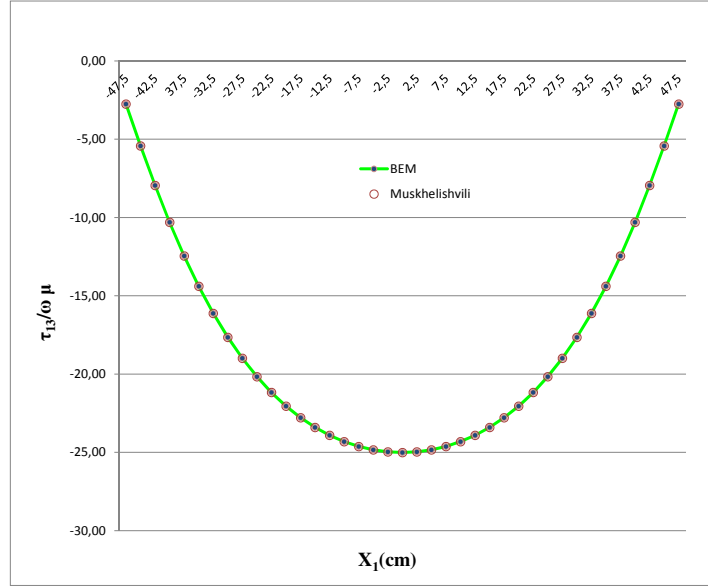
Kullanılan 100x60'lık kesitte (Şekil 3.2) BC ve EC arasında φ 'nin değişimi (Şekil 3.3) ve (Şekil 3.4)'de verilmiştir. A1B1 ve C1D1 doğruları üzerinde MN1=12, MN2=20 alınarak hesaplanan τ_{13} ve τ_{23} kayma gerilmelerinin dağılımı da verilmiştir. Ayrıca bu kesit üzerinde Muskhelishvili'nin sonuçları da yine A1B1 ve D1C1 üzerinde çizilmiştir. (Şekil 3.5) (Şekil 3.6) (Şekil 3.7) (Şekil 3.8) Hata oranı milyonda bir mertebesinde dir. Muskhelishvili'nin seri çözümünde 18 terim alınmıştır. Sınır üzerindeki gerilmeler ise (Şekil 3.9) ve (Şekil 3.10)'da verilmiştir.



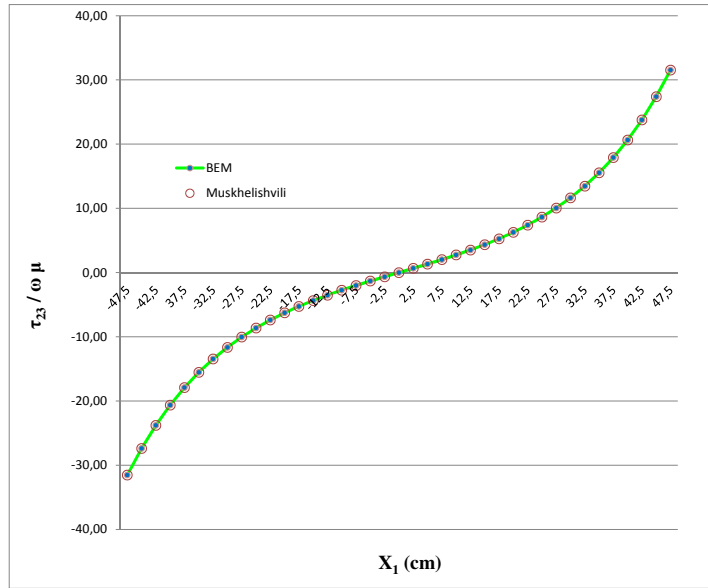
Şekil 3.3 : Şekil 3.2’de BC arasında φ ’nin x_2 ile değişimi MN1=12.



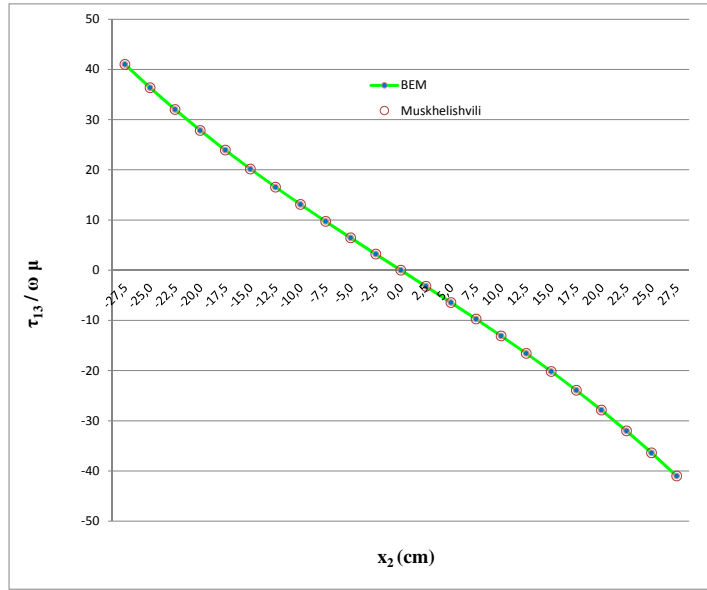
Şekil 3.4 : Şekil 3.2’de EC arasında φ ’nin x_1 ile değişimi MN2=20.



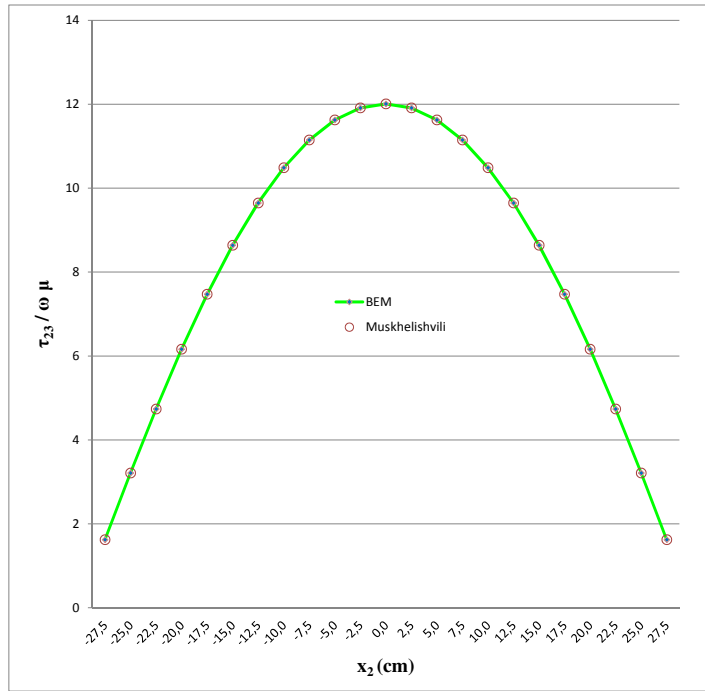
Şekil 3.5 : Şekil 3.2’de D1C1 arasında $\tau_{13}/\omega\mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.



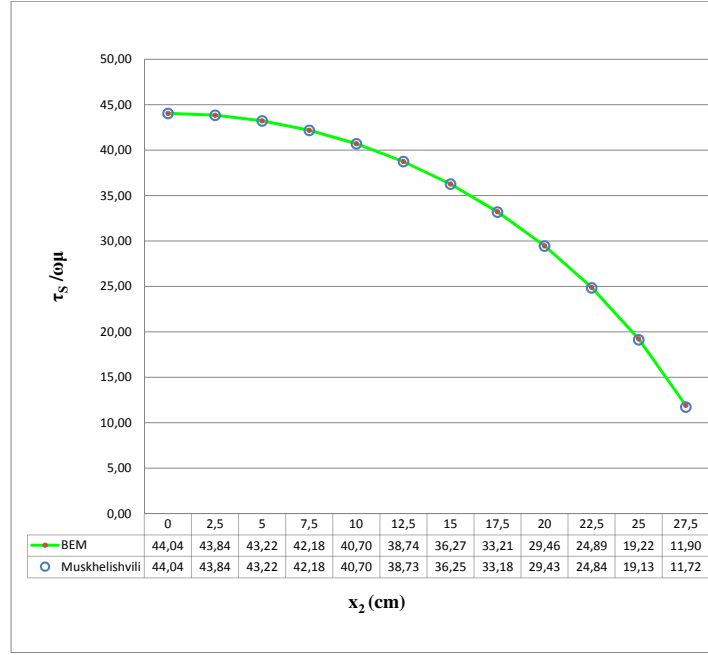
Şekil 3.6 : Şekil 3.2’de D1C1 arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.



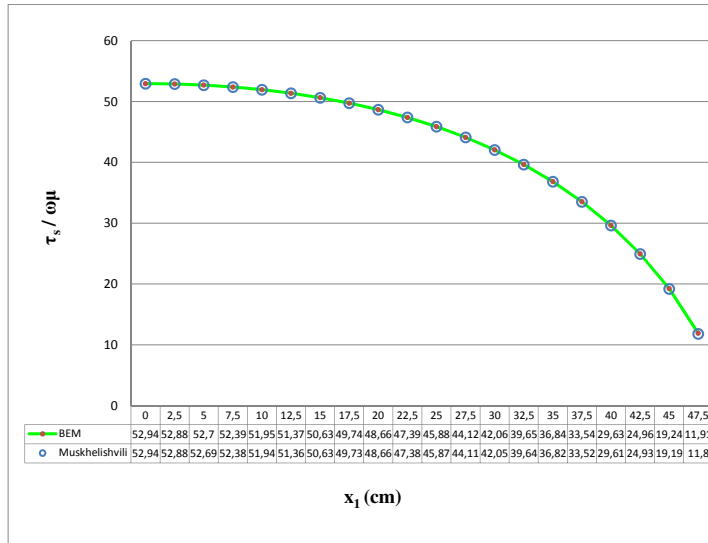
Şekil 3.7 : Şekil 3.2’de A1B1 arasında $\tau_{13}/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.



Şekil 3.8 : Şekil 3.2’de A1B1 arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.



Şekil 3.9 : Şekil 3.2’de BC arasında $\tau_s / \omega \mu$ ’nün x_2 koordinatına göre değişimi.



Şekil 3.10 : Şekil 3.2’de EC arasında $\tau_s / \omega \mu$ ’nün x_1 koordinatına göre değişimi.

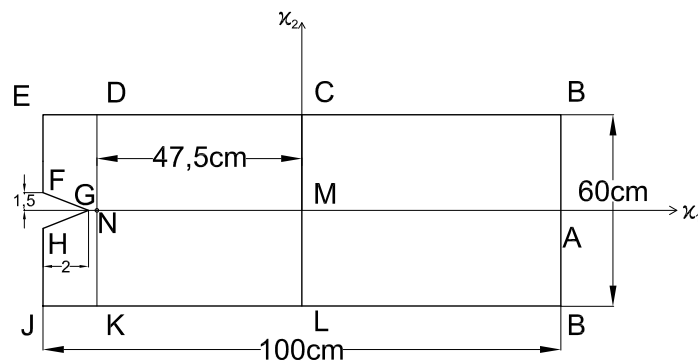
Çizelge 3.1’de MN1 ve MN2 değerlerine göre η_2 ’nin değişimi verilmiştir. Ayrıca Muskhelishvili sonucu ile karşılaştırılarak hata hesabı da yapılmıştır.

Çizelge 3.1 : Dikdörtgen kesitte η_2 ’nin nokta sayısına göre değişimi ve hata hesabı.

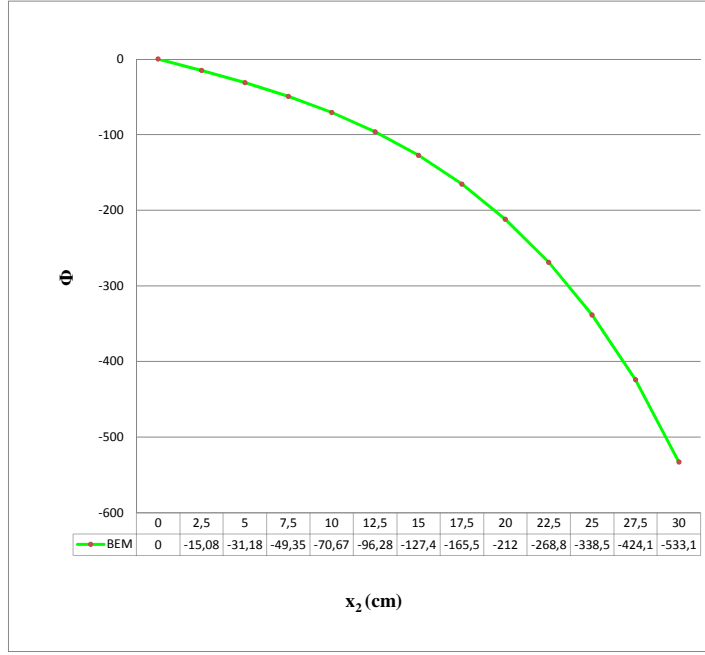
MN1	MN2	η_2	Hata Oranı
2	2	0,22479	0,071978291
3	5	0,21187	0,015386794
6	10	0,2094	0,003772684
12	20	0,2088	0,00091079
Muskhelishvili		0,20861	

4. ÖRNEK PROBLEM 2

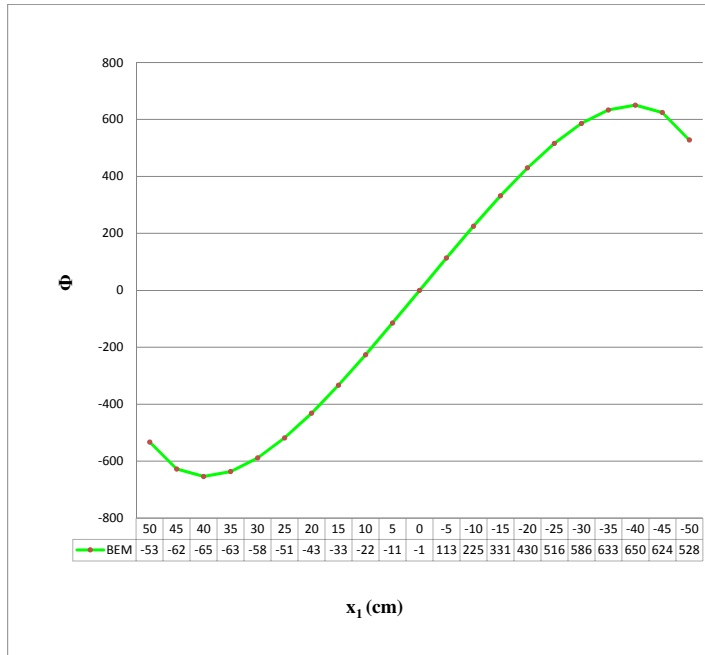
İkinci örnek problem olarak bir kenarında yatay eksene göre simetrik üçgen bir çentik olan dikdörtgen kesitli betonarme bir kolon göz önüne alınmıştır.(Şekil 4.1) Aynı boyuttaki dolu dikdörtgen kesitte D burulma rijitliği olmak üzere $D/\mu = 45101141,91002cm^4$ olarak bulunmuştu. Aynı değer çentikli dikdörtgen kesitte $4497969,92554c^4$ olarak hesaplanmıştır. Kullanılan kesitte AB, EB ve EF arasında φ 'nin değişimi (Şekil 4.2), (Şekil 4.3) ve (Şekil 4.4)'de verilmiştir. GA ve DK doğruları üzerinde hesaplanan τ_{13} ve τ_{23} kayma gerilmelerinin dağılımı (Şekil 4.5) (Şekil 4.6), (Şekil 4.7), sınır üzerindeki gerilmeler ise (Şekil 4.8), (Şekil 4.9), (Şekil 4.10)'da verilmiştir.



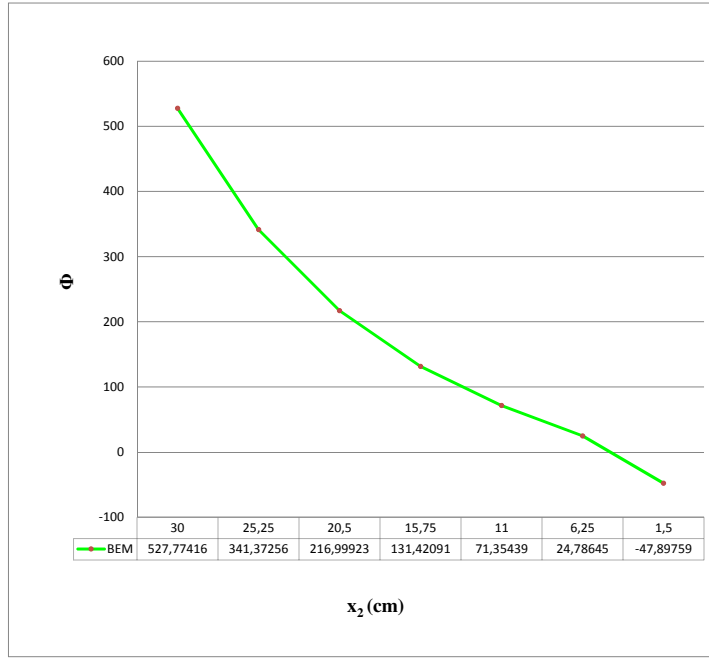
Şekil 4.1 : Burulma etkisi altında çentikli çubuk.



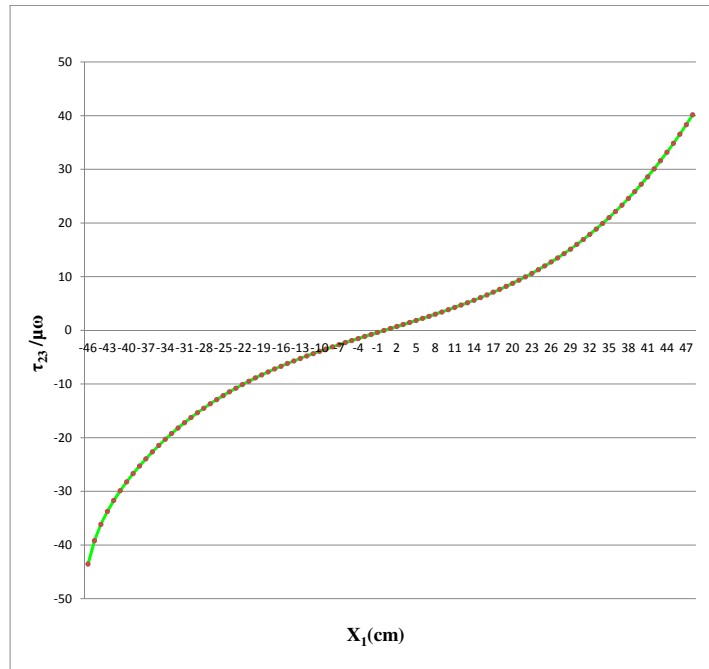
Şekil 4.2 : Çentikli dikdörtgen kesitte AB arasında ϕ 'nin x_2 koordinatına göre değişimi.



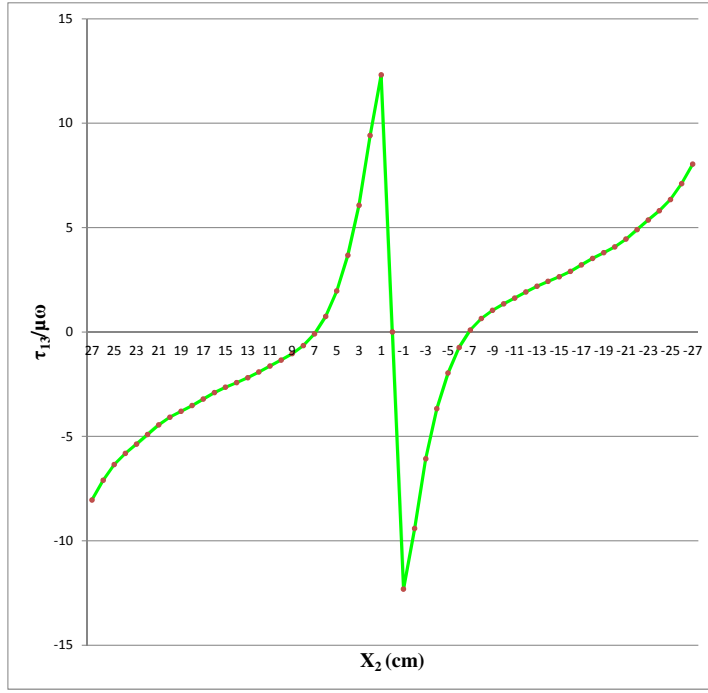
Şekil 4.3 : Çentikli dikdörtgen kesitte EB arasında ϕ 'nin x_1 koordinatına göre değişimi.



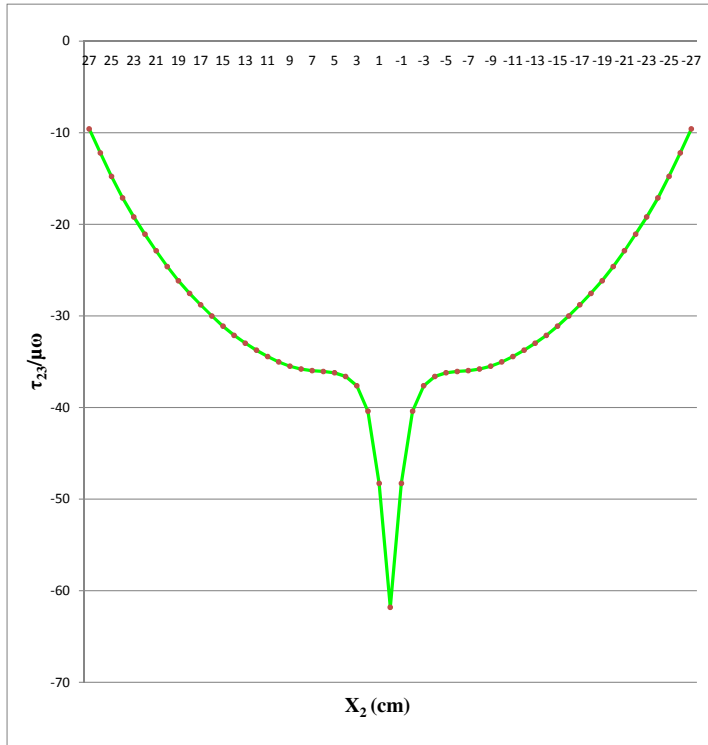
Şekil 4.4 : Çentikli dikdörtgen kesitte EF arasında ϕ 'nin x_2 koordinatına göre değişimi.



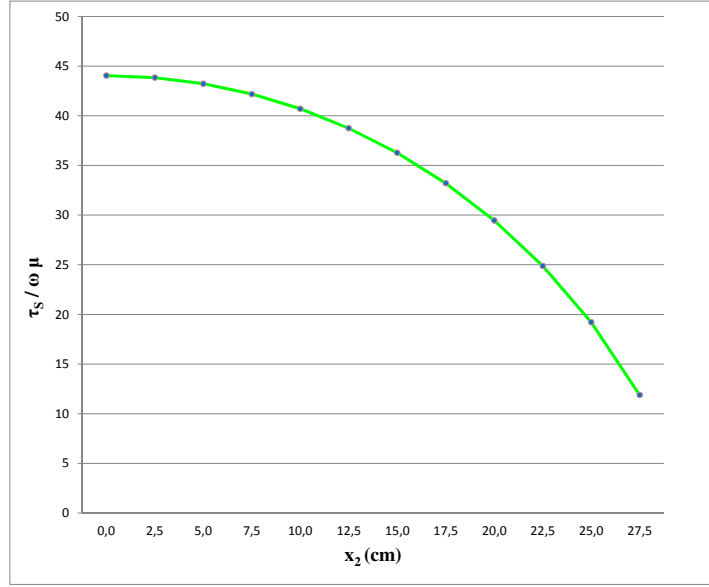
Şekil 4.5 : Çentikli dikdörtgen kesitte GA arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ 'nün x_1 koordinatına göre değişimi.



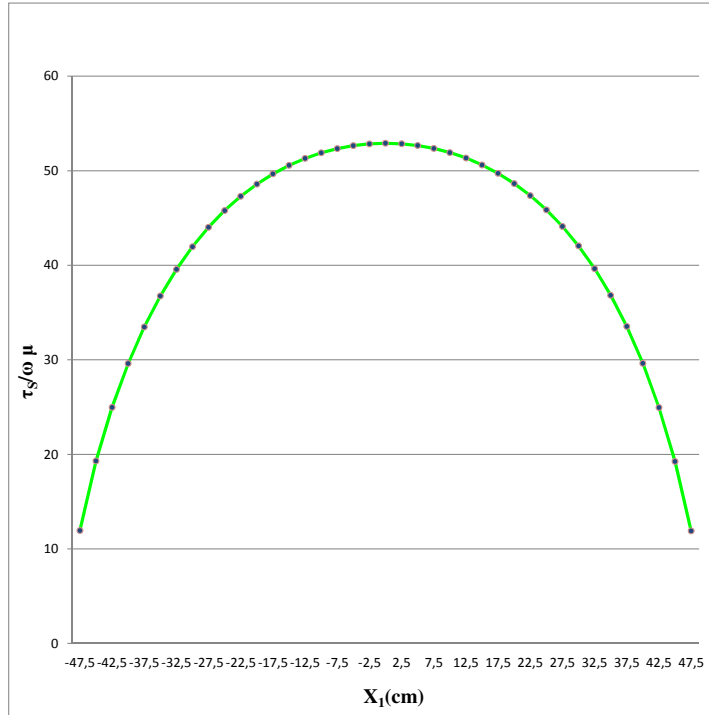
Şekil 4.6 : Çentikli dikdörtgen kesitte DK arasında $\tau_{13}/\omega\mu$ 'nün x_2 koordinatına göre değişimi.



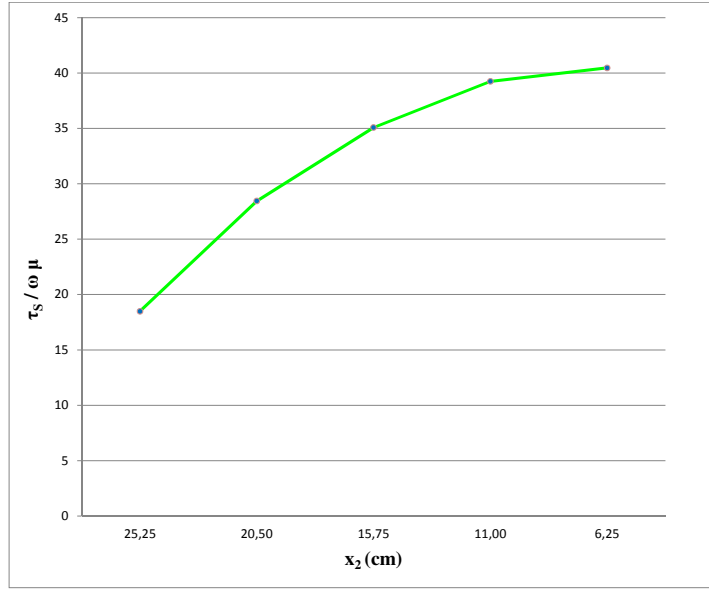
Şekil 4.7 : Çentikli dikdörtgen kesitte DK arasında $\tau_{23}/\omega\mu$ 'nün x_2 koordinatına göre değişimi.



Şekil 4.8 : Çentikli dikdörtgen kesitte AB arasında $\tau_s / \omega \mu$ 'nün x_2 koordinatına göre değişimi.

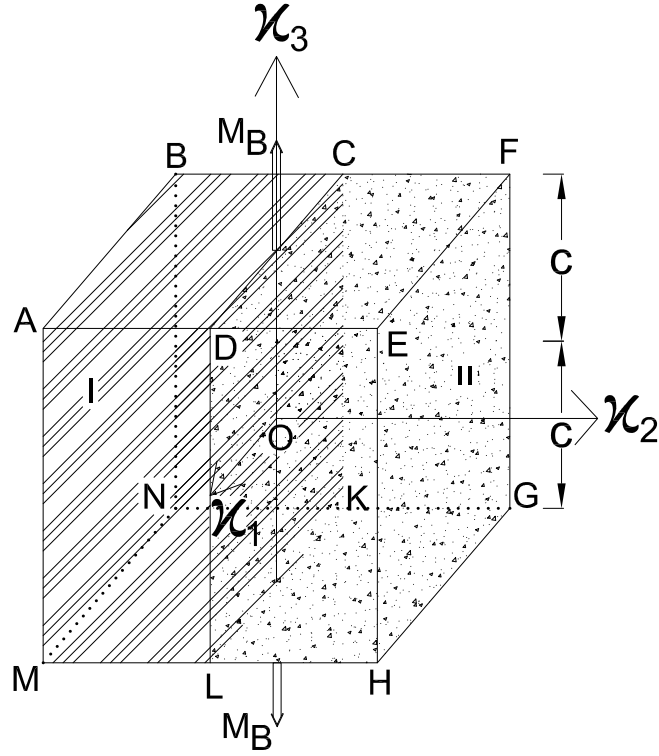


Şekil 4.9 : Çentikli dikdörtgen kesitte EB arasında $\tau_s / \omega \mu$ 'nün x_1 koordinatına göre değişimi.



Şekil 4.10 : Çentikli dikdörtgen kesitte EF arasında $\tau_s / \omega \mu$ 'nün x_2 koordinatına göre değişimi.

5. KESİTİ FARKLI İKİ MALZEMEDEN OLUŞAN ÇUBUKLAR VE ÇOK BAĞIMLI BÖLGELER İÇİN FORMÜLASYON



Şekil 5.1 : Burulma etkisi altında çift malzemeli prizmatik çubuk.

Sonsuz ortamda;

$$\bar{\mathbf{f}}^3 = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) \mathbf{e}_3 \quad (5.1)$$

çizgisel yükü $y_3 = -\infty, +\infty$ aralığında yüklenirse meydana gelen yer değiştirme ve şekil değiştirme alanları

$$\bar{u}_1^3 = 0 \quad \bar{u}_2^3 = 0 \quad \bar{u}_3^3 = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln \rho \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{11}^3 &= 0 \quad \bar{\tau}_{12}^3 = 0 \quad \bar{\tau}_{22}^3 = 0 \quad \bar{\tau}_{33}^3 = 0 \\ \bar{\tau}_{13}^3 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_1 - y_1)}{\rho^2} \quad \bar{\tau}_{23}^3 = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_2 - y_2)}{\rho^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\rho^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \quad (5.4)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu çözümde $\bar{\boldsymbol{\tau}}^3$, $\bar{\boldsymbol{u}}^3$ bir elastostatik hal tarif eder. Şimdi (Şekil 5.1)'deki gibi iki malzemeli bir çubuk göz önüne alınacaktır. Orijin DLKC'nin ağırlık merkezindedir. ABCDLMNK hacmi birinci bölgeyi DCFEHLKG hacmi ikinci bölgeyi göstermektedir. Birinci bölgede kayma modülü μ_1 olan, ikincide ise kayma modülü μ_2 olan malzemeler bulunmaktadır. Üst ve alt yüzeylere M_B burulma momentleri etkimektedir. Çubukta sadece τ_{13} ve τ_{23} kayma gerilmeleri meydana gelir. x_2 eksenini BF'ye, x_1 eksenini AB'ye, x_3 eksenini AM'ye paraleldir. Bu problemde $\boldsymbol{u}^1$, $\boldsymbol{\tau}^1$ birinci bölgede, $\boldsymbol{u}^2$, $\boldsymbol{\tau}^2$ ikinci bölgede yer değiştirme ve gerilme alanlarını göstermektedirler. $\boldsymbol{u}^1$, $\boldsymbol{\tau}^1$ bir elastostatik hal, $\boldsymbol{u}^2$, $\boldsymbol{\tau}^2$ ikinci bir elastostatik hal olarak düşünülecektir. Şimdi genel olarak $\boldsymbol{u}^1$, $\boldsymbol{\tau}^1$ ve $\bar{\boldsymbol{u}}^3$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}^3$ arasında ve $\mu = \mu_1$ iken yazılan karşılıklı teoremi kütle kuvveti problemde sıfır alınarak

$$\left. \begin{matrix} 2cu_3^1 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \int_S \boldsymbol{t} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}^3 dS - \int_S \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \boldsymbol{u}^1 dS \quad (5.5)$$

şeklini alır. Burada S çubuğun birinci malzeme içeren kısmının tüm yüzey alanıdır. $\boldsymbol{t}^1$ ve $\bar{\boldsymbol{\tau}}^3$ yüzey gerilme vektörlerini gösterirler. Birinci çubuk parçasında ABCD yüzeyini S_1 , MLKN yüzeyini S'_1 , DLMABCKN yüzeyini S_{Y1} ve DCLK yüzeyini S_{Y12} olarak isimlendirelim. Bu durumda birinci bölgede (5.2) denklemi;

$$\left. \begin{matrix} 2cu_3^1(\boldsymbol{y}) \\ 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (\boldsymbol{y} \in V_1) \\ (\boldsymbol{y} \notin V_1) \end{matrix} = \int_{S_1} \boldsymbol{t}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{u}}^3 dS_1 + \int_{S'_1} \boldsymbol{t}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{u}}^3 dS_1 + \int_{S_{Y1}} \boldsymbol{t}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{u}}^3 dS_{Y1} + \int_{S_{Y12}} \boldsymbol{t}^1 \cdot \bar{\boldsymbol{u}}^3 dS_{Y12} - \int_{S_1} \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \boldsymbol{u}^1 dS_1 - \int_{S'_1} \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \boldsymbol{u}^1 dS_1 - \int_{S_{Y1}} \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \boldsymbol{u}^1 dS_{Y1} - \int_{S_{Y12}} \bar{\boldsymbol{\tau}}^3 \cdot \boldsymbol{u}^1 dS_{Y12} \quad (5.6)$$

formunu alır. S_1 yüzeyinde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3$ olduğuna göre;

$$\boldsymbol{t}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{13}^1 \\ 0 & 0 & \tau_{23}^1 \\ \tau_{13}^1 & \tau_{23}^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{13}^1 \\ \tau_{23}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tau_{13}^1 \boldsymbol{e}_1 + \tau_{23}^1 \boldsymbol{e}_2$$

ve

$$\bar{\boldsymbol{u}}^3 = \boldsymbol{e}_3 \frac{1}{8\pi\mu_1(1-\nu)} [-\ln \rho 4(1-\nu)] \quad (5.7)$$

olduğundan (5.6)'daki birinci integral sıfırdır. Bu durum ikinci integral içinde geçerlidir. S_{Y1} yüzeyi gerilmesiz olduğu için üçüncü integralde sıfırdır. Dördüncü integral ise S_{Y12} üzerinde

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan;

$$\mathbf{t}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{13}^1 \\ 0 & 0 & \tau_{23}^1 \\ \tau_{13}^1 & \tau_{23}^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{13}^1 n_1 + \tau_{23}^1 n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t_3^1 \end{bmatrix}$$

ve (5.2) denkleminde kullanılarak;

$$\int_{SY12} \mathbf{t}^1 \cdot \bar{\mathbf{u}}^3 dS_{Y12} = 2c \int_{DC} t_3^1 \cdot \left(-\frac{1}{2\pi\mu_1} \ln \rho\right) ds \quad (5.8)$$

şeklini alır. Burada ds, DC üzerindeki yay elemanıdır. (5.6)'daki beşinci integral S_1 üzerinde

$$\bar{\mathbf{t}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\tau}_{13}^3 \\ 0 & 0 & \bar{\tau}_{23}^3 \\ \bar{\tau}_{13}^3 & \bar{\tau}_{23}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{13}^3 \\ \bar{\tau}_{23}^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1^1 = -\omega x_3 x_2 = -\omega c x_2$$

$$\mathbf{u}_2^1 = -\omega x_3 x_1 = \omega c x_1$$

$$\mathbf{u}_3^1 = \omega \varphi_1(x_1, x_2) \quad (5.9)$$

olduğu anımsanarak ve (5.3)'de kullanılarak

$$\begin{aligned} - \int_{S_1} \bar{\mathbf{t}}^3 \cdot \mathbf{u}^1 dS_1 &= -\omega c \int_{S_1} (-\tau_{13}^3 x_2 + \tau_{23}^3 x_1) dS_1 \\ &= \omega c \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} \left[-\frac{(x_1 - y_1)}{\rho^2} x_2 + \frac{(x_2 - y_2)}{\rho^2} x_1 \right] dS_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

şeklini alır. (5.6)'daki S'_1 üzerindeki altıncı integralde bunun aynısıdır ve

$$- \int_{S'_1} \bar{\mathbf{t}}^3 \cdot \mathbf{u}^1 dS'_1 = \omega c \frac{1}{2\pi} \int_{S'_1} \left[-\frac{(x_1 - y_1)}{\rho^2} x_2 + \frac{(x_2 - y_2)}{\rho^2} x_1 \right] dS'_1 \quad (5.11)$$

şeklinde yazılabilir. (5.6) ifadesindeki yedinci ve sekizinci integraller ise $SY1$ ve $SY12$ üzerinde

$$\bar{\mathbf{t}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\tau}_{13}^3 \\ 0 & 0 & \bar{\tau}_{23}^3 \\ \bar{\tau}_{13}^3 & \bar{\tau}_{23}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\tau}_{13}^3 n_1 + \bar{\tau}_{23}^3 n_2 \end{bmatrix}$$

$$u_3^1 = \omega \varphi_1$$

olduğu anımsanarak

$$- \int_{SY1} \bar{\mathbf{t}}^3 \cdot \mathbf{u}^1 dS_{Y1} - \int_{SY12} \bar{\mathbf{t}}^3 \cdot \mathbf{u}^1 dS_{Y12}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{SY1+SY2} (\bar{\tau}_{13}^3 n_1 + \bar{\tau}_{23}^3 n_2) \varphi_1 dS \\
&= -2c \int_{L1} (\bar{\tau}_{13}^3 n_1 + \bar{\tau}_{23}^3 n_2) \varphi_1 ds \\
&= 2c \frac{1}{2\pi} \omega \int_{L1} \left[\frac{(x_1 - y_1)}{\rho^2} n_1 + \frac{(x_2 - y_2)}{\rho^2} n_2 \right] \varphi_1 dS_1 \tag{5.12}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada L_1 , S_1 'in çevresindeki eğridir. Sonuçta (5.6) ifadesi (5.8), (5.10), (5.11) ve (5.12) kullanılarak;

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{array}{l} \omega 2c \varphi_1(\mathbf{y}) \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (y \in V_1) \\ (\mathbf{y} \notin V_1) \end{array} = \\
&2c \int_{DC} t_3^1 \left(\frac{-1}{2\pi\mu_1} \ln \rho \right) ds + 2c\omega \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} \left[-\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} x_2 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} x_1 \right] dS_1 \\
&+ 2c\omega \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] \varphi_1 dS \tag{5.13}
\end{aligned}$$

şeklini alır. Bütün terimler $2c$ 'ye bölünüp S_1 üzerindeki integralde Green teoremi uygulanarak (5.13) yüzey integrali,

$$\begin{aligned}
&\int_{S_1} \left[-\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} x_2 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} x_1 \right] dS_1 \\
&= \int_{S_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (-\ln \rho x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\ln \rho x_1) \right] dS_1 \\
&= - \int_{L_1} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \tag{5.14}
\end{aligned}$$

şeklinde bir eğrisel integrale dönüştürülürse (5.6) denkleminin son hali

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{array}{l} (y \in V_1) \\ (\mathbf{y} \notin V_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varphi_1(\mathbf{y}) \\ 0 \end{array} = \\
&\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] \varphi_1 dS \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{DC} \frac{t_3^1}{\mu_1 \omega} \ln \rho ds \tag{5.15}
\end{aligned}$$

şeklini alır. İkinci bölge içinde benzer işlemler tekrarlanarak

$$\left. \begin{array}{l} (y \in V_2) \\ (\mathbf{y} \notin V_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varphi_2(\mathbf{y}) \\ 0 \end{array} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] \varphi_2 dS \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{CD} \frac{t_3^2}{\mu_2 \omega} \ln \rho ds \end{aligned} \quad (5.16)$$

ifadesi elde edilir. Sınır yine doğrusal elemanlara bölünecek ve her doğrusal elemanda φ 'nin s koordinatının lineer bir fonksiyon olduğu kabul edilecektir. Birinci bölgede φ , φ_1 ikinci bölgede φ_2 ile gösterilirse bunların

$$\varphi_K(s) = \varphi_K(J) + \frac{\varphi_K(J+1) - \varphi_K(J)s}{l(J)} \quad (K = 1, 2) \quad (5.17)$$

şeklinde kabul edildiğini yine herhangi bir doğrusal elemanda

$$t_3^1 \frac{1}{\omega \mu_1} = \tau_1 \quad (5.18)$$

$$t_3^2 \frac{1}{\omega \mu_1} = \tau_2 \quad (5.19)$$

fonksiyonlarının

$$\tau_K(s) = \tau_K(J) + \frac{\tau_K(J+1) - \tau_K(J)s}{l(J)} \quad (K = 1, 2) \quad (5.20)$$

şeklinde dağıldığını varsayalım. Yükleme noktası da tek malzemeli kesitte olduğu gibi yine her bölge için bölge dışına alınsın. Bu durumda (5.15) denklemi $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I}) \in V_1$ noktasına yükleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{MN1+1} \left\{ \int_{l(J)} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] \left[\varphi_1(J) + \frac{\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J)s}{l(J)} \right] ds \right\} \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] \varphi_1(I) ds_\varepsilon \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{MN11+1} \int_{l(J)} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \tau_1(I) \ln \rho ds \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{MN11+1} \int_{l(J)} \left[\tau_1(J) + \frac{\tau_1(J+1) - \tau_1(J)s}{l(J)} \right] \ln \rho ds \end{aligned} \quad (5.21)$$

ve $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{I}) \in V_2$ noktasına yükleme yapılırsa,

$$0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{MN2+1} \left\{ \int_{l(J)} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] \left[\varphi_2(J) + \frac{\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J)s}{l(J)} \right] ds \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{s_\varepsilon} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] \varphi_2(I) ds_\varepsilon \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{MN2+1} \int_{l(J)} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{s_\varepsilon} \frac{\mu_1}{\mu_2} \tau_2(I) \ln \rho ds \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=2}^{MN2+2} \int_{l(J)} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[\tau_2(J) + \frac{\tau_2(J+1) - \tau_2(J)}{l(J)} s \right] \ln \rho ds \tag{5.22}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Burada MN1 ve MN2 sadece birinci ve ikinci bölgeye ait olan nokta sayılarını gösterirler. MN11 ise ortak sınırdaki nokta sayısını belirler. Şimdi buradaki integraller isimlendirilirse $y_1 \in V_1$ için,

$$T1(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] ds \tag{5.23}$$

$$W11(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] s ds \frac{1}{l(J)} \tag{5.24}$$

$$W12(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \tag{5.25}$$

$$G1(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \ln \rho ds \tag{5.26}$$

$$G1S(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \frac{s}{l(J)} \ln \rho ds \tag{5.27}$$

$$EK11(I) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_\varepsilon} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] ds_\varepsilon \tag{5.28}$$

$$EK12(I) = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_\varepsilon} \ln \rho ds_\varepsilon \tag{5.29}$$

(5.23), (5.24), (5.25), (5.26), (5.27), (5.28), (5.29) denklemleri birinci bölgede yazılmışlardır. $l(J)$ birinci bölgedeki bir elemanın boyudur. Aynı tanımlar ikinci bölgede yapılırsa $y_2 \in V_2$ için,

$$T2(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] ds \tag{5.30}$$

$$W21(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] s ds \frac{1}{l(J)} \tag{5.31}$$

$$W22(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_{l(J)} \ln \rho (x_2 n_1 - x_1 n_2) ds \quad (5.32)$$

$$G2(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_{l(J)} \ln \rho ds \quad (5.33)$$

$$G2S(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_{l(J)} \frac{s}{l(J)} \ln \rho ds \quad (5.34)$$

$$EK21(I) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_\varepsilon} \left[\frac{x_1 - y_1}{\rho^2} n_1 + \frac{x_2 - y_2}{\rho^2} n_2 \right] ds_\varepsilon \quad (5.35)$$

$$EK22(I) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\mu_1}{\mu_2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s_\varepsilon} \ln \rho ds_\varepsilon \quad (5.36)$$

Ayrıca iki bölgenin ortak sınırında $\tau_2 = -\tau_1$ ve $\varphi_1 = \varphi_2$ olduğu da göz önüne alınacaktır. (5.30), (5.36) denklemleri ise ikinci bölgede yazılmışlardır ve $l(J)$ ikinci bölgedeki bir elemanın boyudur. Buradaki integrallerden (5.23), (5.24), (5.25), (5.28) daha önceden hesaplanmıştı. Bu sonuçlar, (5.30), (5.31), (5.32) ve (5.35)'de de aynen kullanılabilir. Ancak (5.26), (5.27), (5.29) ve (5.36) integrallerinin hesaplanması gerekir. Önce $EK12(I)$ hesaplanacaktır. S_ε üzerinde $\rho = \ln \varepsilon$ ve $ds = \varepsilon d\theta$ olduğu anımsanırsa;

$$EK11(I) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln \varepsilon d\theta = 0 \quad (5.37)$$

bulunur. $I=I-1$ için;

$$G1(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{l(J)} \ln \rho ds \quad (5.38)$$

$$G1(I, I-1) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{l-\varepsilon} \ln(l-s) ds \quad (5.39)$$

$$l-s=u \quad u_1=l \quad u_2=\varepsilon \quad ds=du$$

$$G1(I, I-1) = -\frac{1}{2\pi} l(I-1) [\ln l(I-1) - 1] \quad (5.40)$$

$J=I$ için;

$$G1(I, I) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^l \ln s ds \quad (5.41)$$

$$G1(I, I) = -\frac{1}{2\pi} \ln l(I) [\ln l(I) - 1] \quad (5.42)$$

Genel halde;

$$G1(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \ln \rho ds$$

$$\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (5.43)$$

$$x_1 = -n_2 s + x_{A1} \quad x_2 = n_1 s + x_{A2} \quad (5.44)$$

$$x_1 - y_1 = -n_2 s + x_{A1} - y_1 \quad x_2 - y_2 = n_1 s + x_{A2} - y_2 \quad (5.45)$$

$$\rho = \sqrt{s^2 + 2s[-n_2(x_{A1} - y_1) + n_1(x_{A2} - y_2)] + (x_{A1} - y_1)^2 + (x_{A2} - y_2)^2}$$

$$\begin{aligned} G1(I, J) = & l \ln \rho_B - l + (-n_2(x_{A1} - y_1) + n_1(x_{A2} - y_2)) \ln \frac{\rho_B}{\rho_A} \\ & + (n_1(x_{A1} - y_1) + n_2(x_{A2} - y_2)) \left(\arctan \frac{x_{B2} - y_2}{x_{B1} - y_1} - \arctan \frac{x_{A2} - y_2}{x_{A1} - y_1} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\rho_A = \sqrt{(x_1(J) - x_1(I))^2 + (x_2(J) - x_1(I))^2}$$

$$\rho_B = \sqrt{(x_1(J+1) - x_1(I))^2 + (x_2(J+1) - x_1(I))^2}$$

$$G1S(I, I-1) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon}^l \ln(l-s) \frac{s}{l} ds \quad (5.47)$$

$u = l - s$ olduğundan

$$G1S(I, I-1) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{l(I-1)}{2} \ln l(I-1) + \frac{3}{4} l(I-1) \right] \quad (5.48)$$

$$G1S(I, I) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l-\epsilon} \ln s \frac{s}{l} ds$$

$$G1S(I, I) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{l}{2} \ln l(I) - \frac{l(I)}{4} \right] \quad (5.49)$$

Genel halde;

$$G1S(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \ln \rho \frac{s}{l(J)} ds$$

$$G1S(I, J) = (n_2(x_{A1} - y_1) - (x_{A2} - y_2)n_1) \frac{1}{l(J)} G1(I, J) - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\rho_B^2}{2} \ln \rho_B - \frac{\rho_A^2}{2} \ln \rho_A - \frac{\rho_B^2}{4} + \frac{\rho_A^2}{4} \right] \frac{1}{l(J)} \quad (5.50)$$

Sonuçta;

$$\sum_{J=2}^{MN1+1} \{T1(I, J)\varphi_1(J) + W11(I, J)[\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J)]\} + EK11(I)\varphi_1(I) \\ \sum_{J=2}^{MN11+1} [G1(J) \frac{\tau_1(J)}{\mu_1} + G1S(I, J) (\frac{\tau_1(J+1) - \tau_1(J)}{\mu_1})] \\ + EK12(I)\tau_1(I) = - \sum_{J=2}^{MN1+1} W12(I, J) \quad (5.51)$$

$$\sum_{J=2}^{MN2+1} \{T2(I, J)\varphi_2(J) + W21(I, J)[\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J)]\} + EK21(I)\varphi_2(I) \\ + \sum_{J=2}^{MN11+1} [G2(J) \frac{\tau_2(J)}{\mu_2} + G2S(I, J) (\frac{\tau_2(J+1) - \tau_2(J)}{\mu_2})] \\ + EK22(I)\tau_2(I) = - \sum_{J=2}^{MN2+1} W22(I, J) \quad (5.52)$$

şeklini alır. Ancak ortak sınır üzerinde φ_1 ve φ_2 değerleri aynıdır ve t_3^1 ise $-t_3^2$ 'e eşittir. Dolayısıyla bilinmeyenlerin sayısı yine $MN1 + (MN2 - (MN11 + 1)) + MN11 + 1 = MN1 + MN2 = MN$ olacaktır. Sistem;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{K} \quad (5.53)$$

şeklinde lineer cebrik bir denklem sistemine indirgenebilir. Farklı problemler için $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{K}$ matrislerinin oluşturulması farklılıklar gösterebilir. Denklem takımı oluşturulduktan sonra problemin bilinmeyenleri olan her iki bölgeye ait olan φ değerleri ve ortak sınırdaki gerilme bileşenleri bulunabilir.

5.1 Burulma Rijitliğinin Hesabı

Birinci Malzeme İçin

$$\tau_{13}^1 = \mu_1 \omega \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} - x_2 \right)$$

$$\tau_{23}^1 = \mu_1 \omega \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x_2} + x_1 \right)$$

olduğuna göre kesite etkiyen moment birinci bölgede;

$$\begin{aligned} M_B^1 &= \int_{S_1} (-\tau_{13}^1 \cdot x_2 + \tau_{23}^1 \cdot x_1) ds \\ &= \mu_1 \omega \left[\int_{S_1} (x_1^2 + x_2^2) ds + \int_{S_1} \left(\frac{\partial \varphi^1}{\partial x_2} x_1 - \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_1} x_2 \right) dS_1 \right] \\ M_B^1 &= \mu_1 \omega \left[\int_{L_1} \frac{x_1^3 n_1 + x_2^3 n_3}{3} + \int_{L_1} (n_2 \cdot x_1 - n_1 \cdot x_2) \varphi^1 ds \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur. İkinci bölgede ise benzer şekilde

$$M_B^2 = \mu_2 \omega \left[\int_{L_2} \frac{x_1^3 n_1 + x_2^3 n_3}{3} + \int_{L_2} (n_2 \cdot x_1 - n_1 \cdot x_2) \varphi^2 ds \right]$$

şeklinde bulunur. Toplam moment ise;

$$M_B = M_B^1 + M_B^2 \quad (5.54)$$

olarak hesaplanır. Burulma rijitliği ise $M_B = \omega \cdot D$ yazılırsa, $D = \frac{M_B}{\omega}$ bulunur. Ancak burada $\frac{D}{\mu_1}$ hesaplanacaktır.

5.2 Çift Malzemeli Kesitte Sınırdaki Kayma Gerilmesi

Sınır daha önce y birinci bölgenin elemanı olacak şekilde yeniden tanımlanacaktır. Burada sınıra y sınır noktasını içerisine alan y merkezli ε yarıçaplı bir daire yayı eklenmiştir. Bu durumda y 'deki $\varphi_1(y)$ değeri $y = x(I)$ sınır noktası için hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= \sum_{J=2}^{I-2} [\varphi_1(J) W_{11}(I, J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J)) T_1(I, J)] \\ &+ \sum_{J=I+1}^{MN+1} [\varphi_1(J) W_{11}(I, J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J)) T_1(I, J)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{J=2}^{MN1+1} W12(I, J) + \varphi_1(I-1)W11(I, I-1) + (\varphi_1(I) - \varphi_1(I-1))T1(I, I-1) \\
& + \varphi_1(I)W11(I, I) + (\varphi_1(I+1) - \varphi_1(I))T1(I, I) \\
& - \sum_{J=2}^{MN11+1} [\tau_1(J)G1(I, J) + (\tau_1(J+1) - \tau_1(J))G1S(I, J)] + EK11(I)\varphi_1(I) \quad (5.55)
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu arada y_1 noktasının iki malzemenin ortak sınırı üzerinde bir nokta olmadığını da belirtelim. (5.55) ifadesindeki kısaltmalar $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in S_1$ olmak üzere (5.23), (5.24), (5.25), (5.26), (5.27), (5.28) ifadelerinde tanımlanmıştı. ρ, x_1, x_2 ifadeleri ise (5.43), (5.44)'de tanımlanmıştı. Kayma gerilmeleri $\varphi_1(\mathbf{y}_1)$ 'nin y_1 ve y_2 'ye göre türevleri alınarak hesaplanacaktır. İşlemleri basitleştirmek için sağ tarafta $\varphi_1(I) = \varphi_1(\mathbf{y})$ 'nin çarpanı olan terimler hesaplanırsa.

$$EK11(I) = \frac{1}{2}$$

$$W11(I, I) = 0$$

$$W11(I, I-1) = 0$$

$$T1(I, I) = 0$$

$$T1(I, I-1) = 0$$

ifadeleri kullanılırsa (5.55) ifadesi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varphi_1(\mathbf{y}) &= \sum_{J=2}^{I-2} [\varphi_1(J)W11(I, J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))T1(I, J)] \\
&+ \sum_{J=I+1}^{MN1+1} [\varphi_1(J)W11(I, J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))T1(I, J)] \\
&+ \sum_{J=2}^{MN1+1} W12(I, J) \\
&- \sum_{J=2}^{MN11+1} [\tau_1(J)G1(I, J) + (\tau_1(J+1) - \tau_1(J))G1S(I, J)] \quad (5.56)
\end{aligned}$$

şeklinde türev almaya hazır hale gelir.

$$\tau_{13}(y) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} - y_2\right)\mu_1$$

$$\tau_{23}(y) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} + y_1\right)\mu_1$$

olduğu anımsanırsa

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{13}^1(y)}{\mu_1} &= 2\left\{\sum_{J=2}^{I-2} [\varphi_1(J)W_{111}(I,J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))T_{111}(I,J)] \right. \\ &\quad + \sum_{J=I+1}^{MN1+1} [\varphi_1(J)W_{111}(I,J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))T_{111}(I,J)] \\ &\quad + \sum_{J=2}^{MN1+1} W_{121}(I,J) - \sum_{J=2}^{MN11+1} \\ &\quad \left. [\tau_1(J)G_{11}(I,J) + (\tau_1(J+1) - \tau_1(J))G_{11S}(I,J)] - y_2\right\} \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{23}^1(y)}{\mu_1} &= 2\left\{\sum_{J=2}^{I-2} [\varphi_1(J)W_{112}(I,J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))T_{112}(I,J)] \right. \\ &\quad + \sum_{J=I+1}^{MN1+1} [\varphi_1(J)W_{112}(I,J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))T_{112}(I,J)] \\ &\quad + \sum_{J=2}^{MN1+1} W_{122}(I,J) - \sum_{J=2}^{MN11+1} \\ &\quad \left. [\tau_1(J)G_{12}(I,J) + (\tau_1(J+1) - \tau_1(J))G_{12S}(I,J)] + y_1\right\} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Burada;

$$W_{111}(I,J) = \frac{\partial W_{11}(I,J)}{\partial y_1}$$

$$T_{111}(I,J) = \frac{\partial T_{11}(I,J)}{\partial y_1}$$

$$W_{121}(I,J) = \frac{\partial W_{12}(I,J)}{\partial y_1}$$

$$\begin{aligned}
G_{11}(I, J) &= \frac{\partial G_1(I, J)}{\partial y_1} \\
G_{11S}(I, J) &= \frac{\partial G_{1S}(I, J)}{\partial y_1} \\
W_{112}(I, J) &= \frac{\partial W_{11}(I, J)}{\partial y_2} \\
T_{112}(I, J) &= \frac{\partial T_{11}(I, J)}{\partial y_2} \\
W_{122}(I, J) &= \frac{\partial W_{12}(I, J)}{\partial y_2} \\
G_{12}(I, J) &= \frac{\partial G_1(I, J)}{\partial y_2} \\
G_{12S}(I, J) &= \frac{\partial G_{1S}(I, J)}{\partial y_2} \tag{5.59}
\end{aligned}$$

şeklinde daha önceden bulunan kapalı integrallerin sonuçları türetilerek hesaplanırlar. İkinci bölgede ise (5.55) ifadesindeki φ_1 , φ_2 'ye dönüştürülerek aynı işlemler tekrarlanır. Ancak burada alınan $\mathbf{y}$ noktası ikinci bölge üzerindedir ve kayma gerilmelerinin μ_1 'e bölünmüş halleri hesaplanmak istenirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{13}^2(y)}{\mu_1} &= 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \left\{ \sum_{J=2}^{I-2} [\varphi_2(J)W_{211}(I, J) + (\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J))T_{211}(I, J)] \right. \\
&+ \sum_{J=I+1}^{MN2+1} [\varphi_2(J)W_{211}(I, J) + (\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J))T_{211}(I, J)] \\
&+ \sum_{J=2}^{MN2+1} W_{221}(I, J) - \sum_{J=2 \times MN22+MN11+2}^{MN2+1} \\
&\left. [\tau_2(J)G_{21}(I, J) + (\tau_2(J+1) - \tau_2(J))G_{21S}(I, J)] \frac{\mu_2}{\mu_1} - y_2 \right\} \tag{5.60}
\end{aligned}$$

$$\frac{\tau_{23}^2(y)}{\mu_1} = 2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \left\{ \sum_{J=2}^{I-2} [\varphi_2(J)W_{212}(I, J) + (\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J))T_{212}(I, J)] \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{J=I+1}^{MN2+1} [\varphi_2(J)W212(I,J) + (\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J))T212(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{MN2+1} W222(I,J) - \sum_{J=2xMN22+MN11+2}^{MN2+1} \\
& [\tau_2(J)G22(I,J) + (\tau_2(J+1) - \tau_2(J))G22S(I,J)] \frac{\mu_2}{\mu_1} + y_1 \} \quad (5.61)
\end{aligned}$$

sonuçları bulunur. $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in S_2$ için, (5.60), (5.61) ifadelerindeki kısaltmalar ise,

$$\begin{aligned}
W211(I,J) &= \frac{\partial W21(I,J)}{\partial y_1} \\
T211(I,J) &= \frac{\partial T21(I,J)}{\partial y_1} \\
W221(I,J) &= \frac{\partial W22(I,J)}{\partial y_1} \\
G21(I,J) &= \frac{\partial G2(I,J)}{\partial y_1} \\
G21S(I,J) &= \frac{\partial G2S(I,J)}{\partial y_1} \\
W212(I,J) &= \frac{\partial W21(I,J)}{\partial y_2} \\
T212(I,J) &= \frac{\partial T21(I,J)}{\partial y_2} \\
W222(I,J) &= \frac{\partial W22(I,J)}{\partial y_2} \\
G22(I,J) &= \frac{\partial G2(I,J)}{\partial y_2} \\
G22S(I,J) &= \frac{\partial G2S(I,J)}{\partial y_2} \quad (5.62)
\end{aligned}$$

şeklinde daha önceden bulunan $W21(I,J), T21(I,J), W22(I,J), G2(I,J), G2S(I,J)$ ifadelerinden türev alınarak hesaplanırlar.

6. ÖRNEK PROBLEM 3

Üçüncü örnek problem olarak Şekil 6.1’de iki farklı malzemeden iki dikdörtgen prizmatik çubuğun eklenmesinden oluşan bir kesitin burulması incelenmiştir. CD, AB ve FE’yi $MN11$ aralığa, AC, $MN12$ aralığa, DE, $MN22$ aralığa bölünsün. DC, L_{12} , CD, L_{21} olarak isimlendirilecektir. DCABD, L_1 ve DEFCD, L_2 olsun. Her iki bölgede de D, 2 numaralı nod noktası olarak seçilmiştir. Bölgelerdeki nodal nokta sayıları aşağıda verilmiştir. $MN1 = 2 \times MN11 + 2 \times MN12$ $MN2 = 2 \times MN11 + 2 \times MN22$ Birinci bölgede C’nin nodu ($M11+2$), A’nın nodu ($MN11+MN12+2$), B’nin nodu ($2 \times MN11 + MN12 + 2$) ve son noktanın nodu $MN1+1$ ’dir ve birinci bölgede (2,..., $MN1+1$) nodlu $MN1$ nokta bulunur. İkinci bölgede ise (2,..., $MN2+1$) şeklinde $MN2$ nokta bulunmaktadır. Bu noktalara yükleme yapılarak $N = MN1 + MN2$ tane denklem elde edilir. Şimdi bu problem için A, X ve K matrisleri aşağıda gösterilen alt matrislere parçalanabilir.

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 & 0 & A13 \\ A21 & 0 & A22 & A23 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K1 \\ K2 \end{bmatrix}$$

Burada A11 matrisi $MN1 \times (MN11 + 1)$ mertebesinde bir matristir ve herhangi bir elemanı;

$$A11(I, J) = T1(I + 1, J + 1) + W11(I + 1, J) - W11(I + 1, J + 1)$$

$$I = 1, \dots, MN1 \quad J = 1, \dots, MN11 + 1 \quad (6.1)$$

A12 matrisi $1 \times (MN1 - 1 - MN11)$ mertebesinde ve herhangi bir elemanı

$$A12(I, J) = T1(I + 1, J + MN11 + 2) + W11(I + 1, J + MN11 + 1)$$

$$-W11(I + 1, J + MN11 + 2) \quad (6.2)$$

$$I = (1, \dots, MN1) \quad J = (1, \dots, MN1 - MN11 - 1) \quad (6.3)$$

şeklinde tanımlanır. **A**'daki üst satırdaki **0** matrisinin mertebesi $MN1 \times (MN2 - MN11 - 1)$ 'dir. **A13** matrisinin mertebesi, $MN1 \times (MN11 + 1)$ 'dir. Ancak her elemanı aynı şekilde hesaplanmaz. Bunlar,

$$I = 1, \dots, MN1$$

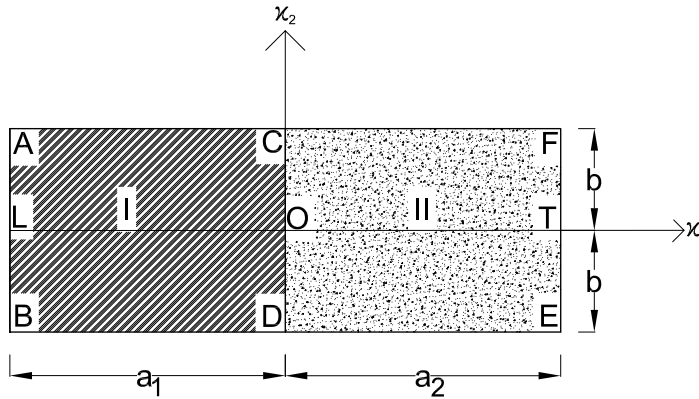
$$A13(I, 1) = G1(I + 1, 2) - G1S(I + 1, 2)$$

$$A13(I, MN11 + 1) = G1S(I + 1, MN11 + 1)$$

$$J = 2, \dots, MN11$$

$$A13(I, J) = G1(I + 1, J + 1) - G1S(I + 1, J) + G1S(I + 1, J + 1) \quad (6.4)$$

şeklinde hesaplanacaklardır.



Şekil 6.1 : Şekil 5.1'deki çubuk kesitinin nodal noktaları.

A21 matrisi $MN2 \times (MN11 + 1)$ mertebesindedir ve herhangi bir elemanı

$$A21(I, J) = T2(I + 1, MN2 + 3 - J) + W12(I + 1, MN2 + 2 - J) - W12(I + 1, MN2 + 3 - J) \quad (6.5)$$

$$I = 1, \dots, MN2 \quad J = 1, \dots, MN11 + 1 \quad (6.6)$$

A11'in yanındaki sıfır matrisi **0** matrisi $MN2 \times (MN1 - MN11 - 1)$ mertebesindedir.

A22 matrisinin mertebesi $MN2 \times (MN2 - MN11 - 1)$ ve herhangi bir elemanı;

$$A22(I, J) = T2(I + 1, J + 2) + W12(I + 1, J + 1) - W12(I + 1, J + 2)$$

$$I = 1, \dots, MN2 \quad J = 1, \dots, MN2 - MN11 - 1 \quad (6.7)$$

şeklinde bulunur. **A23** matrisinin mertebesi $MN2 \times (MN11 + 1)$ 'dir. Ancak bu matrisin de her elemanı aynı şekilde hesaplanmaz. Bunun elemanları;

$$I = 1, \dots, MN2$$

$$A23(I, 1) = G2S(I + 1, MN2 + 2) \left(-\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \quad (6.8)$$

$$A23(I, MN11 + 1) = (G2(I + 1, MN2 - MN11 + 2)$$

$$-G2S(I + 1, MN2 - MN11 + 2)) \left(-\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)$$

$$J = 2, \dots, MN11$$

$$A23(I, MN11 + 1) = (G2(I + 1, MN2 + 2 - J) + G2S(I + 1, MN2 + 1 - J)$$

$$-G2S(I + 1, MN2 + 2 - J)) \left(-\frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \quad (6.9)$$

şeklinde hesaplanacaklardır. Diğer alt matrisler ise,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A11} & \mathbf{A12} & \mathbf{0} & \mathbf{A13} \\ \mathbf{A21} & \mathbf{0} & \mathbf{A22} & \mathbf{A23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X1}^{1 \times (MN11+1)} = \begin{bmatrix} \varphi_1(2) \\ \vdots \\ \varphi_1(MN11 + 2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X2}^{1 \times (MN1-MN11-1)} = \begin{bmatrix} \varphi_1(MN11 + 3) \\ \vdots \\ \varphi_1(MN1 + 1) \end{bmatrix}$$

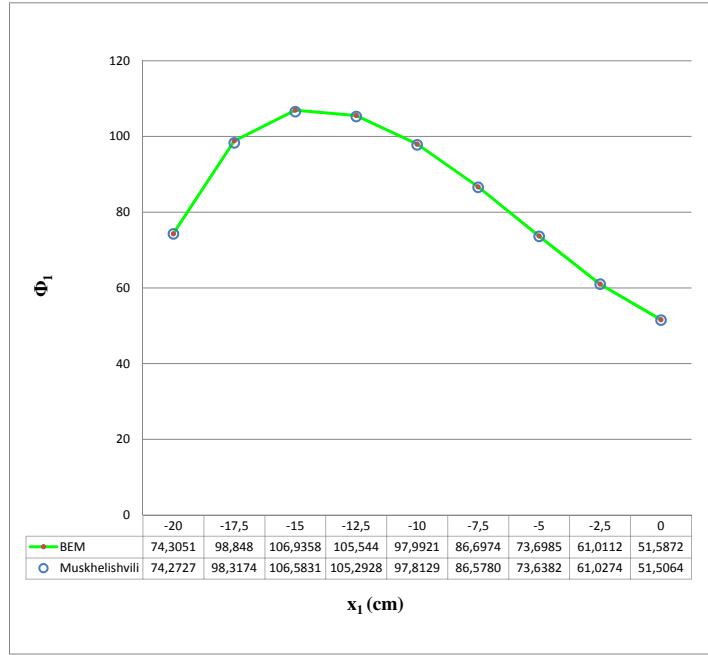
$$\mathbf{X3}^{1 \times (MN2-MN11-1)} = \begin{bmatrix} \varphi_2(3) \\ \vdots \\ \varphi_2(MN2 - MN11 + 1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X4}^{1 \times (MN11+1)} = \begin{bmatrix} \tau_1(2) \\ \vdots \\ \tau_1(MN11+2) \end{bmatrix}$$

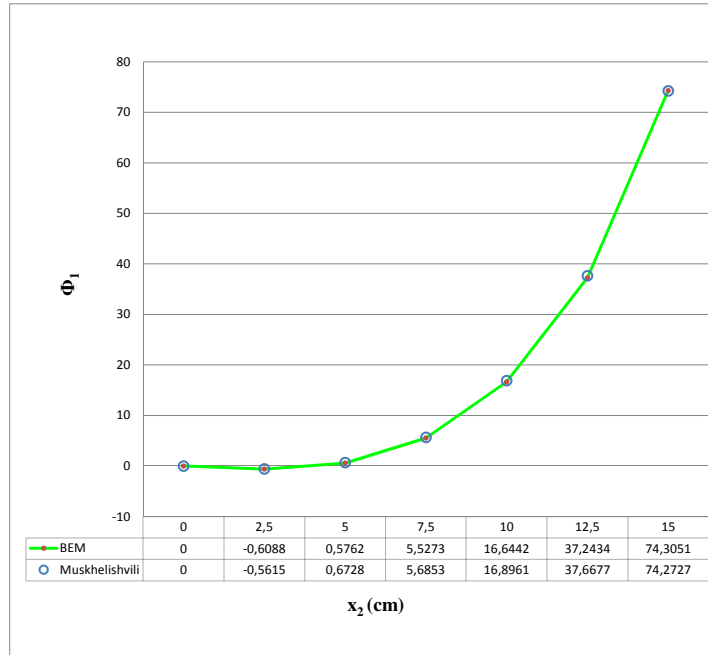
$$\mathbf{K1(I)} = \sum_{J=2}^{MN1+1} W12(I+1, J+1) \quad I = 1, MN1 \quad (6.10)$$

$$\mathbf{K2(I)} = \sum_{J=2}^{MN2+1} W22(I+1, J+1) \quad I = 1, MN2 \quad (6.11)$$

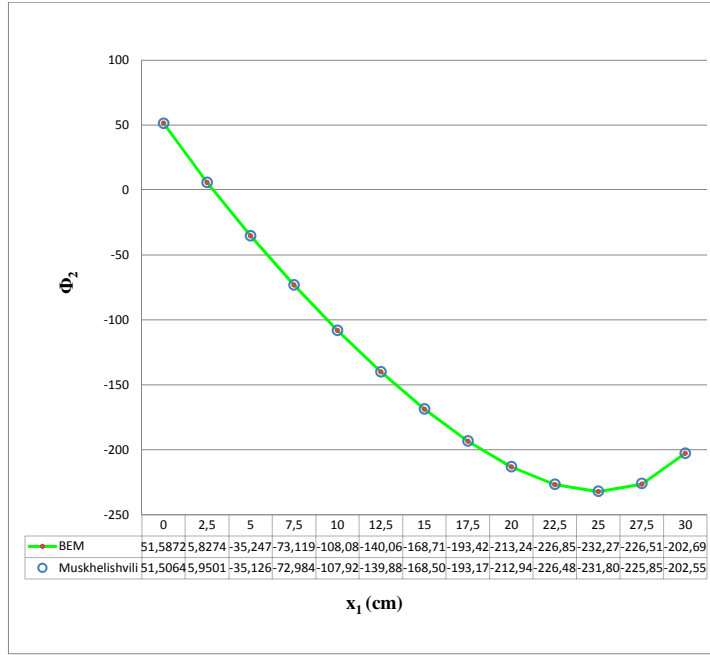
Ancak sistemde simetri olduğu için sistemin yarısı çözülecektir. x_1 eksenine göre simetrik noktalarda, φ_1 ve φ_2 işaret değiştirir ancak mutlak değerleri aynıdır. Ortak sınırda yine x_1 'e göre simetrik noktalarda τ_3^1 değeri yine ters işaretlidir ve mutlak değerleri aynıdır. Simetri ekseninde olan noktalarda, φ_1 ve φ_2 değerleri sıfır olur. Bilinmeyen sayısı ise; $MN11 + MN12 - 1$ tane $\varphi_1(I)$ değeri, $MN22 - 1 + MN11/2$ tane $\varphi_2(I)$ değeri ve $MN11/2$ tane $\tau_1(I)$ değeri, olarak tüm bilinmeyen sayısı $N = MN11 + MN12 + MN22 - 2$ tanedir. Ancak burada $MN11$ çift sayı seçilmelidir. Denklem takımı çözüldükten sonra, diğer φ_1 , φ_2 ve τ_1 değerleri de hesaplanır. τ_1 birinci bölgede $\frac{\tau_{13}^1}{\omega\mu_1}$ değeridir. Bununla aynı noktada ancak ikinci bölgede olan kayma gerilmesi ise bunun ters işaretlisidir. Bu problem için $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2}$, $a_1 = 20\text{cm}$, $a_2 = 30\text{cm}$, $b = 15\text{cm}$ için, AC, LA, CF, FT OC'de φ ve DO'da τ 'nın değişimi (Şekil 6.2), (Şekil 6.3), (Şekil 6.4), (Şekil 6.5), (Şekil 6.6), (Şekil 6.7)'de gösterilmiştir. Sınırdaki kayma gerilmeleri ise (Şekil 6.8), (Şekil 6.9), (Şekil 6.10), (Şekil 6.11)'de verilmiştir.



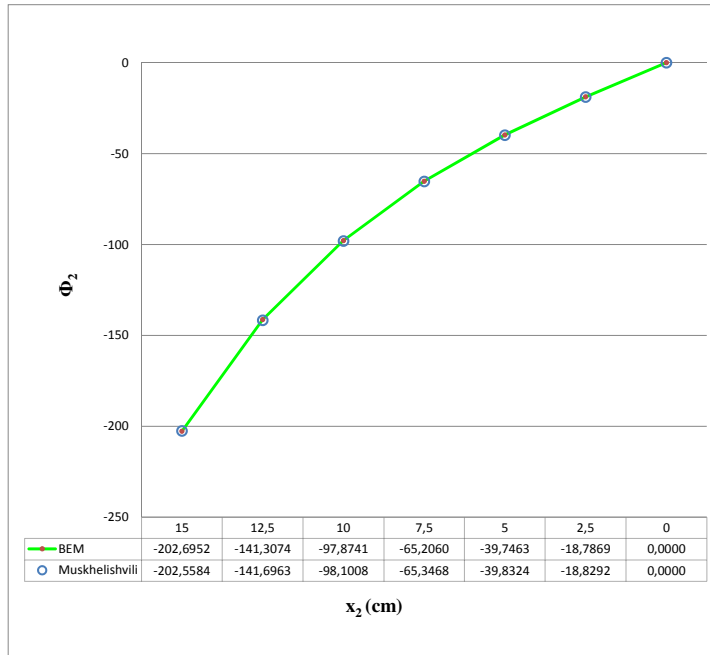
Şekil 6.2 : Şekil 6.1’de AC’de ϕ_1 ’nin x_1 koordinatı ile değişimi.



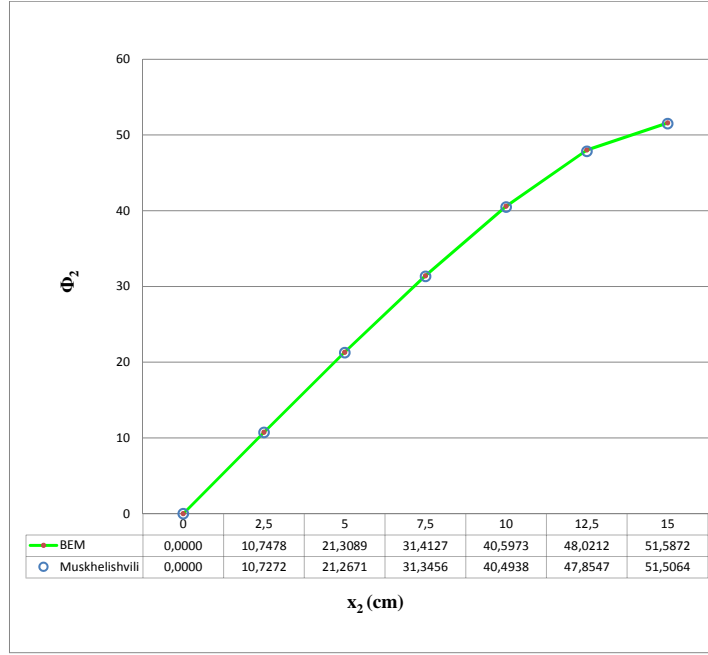
Şekil 6.3 : Şekil 6.1’de LA’da ϕ_1 ’nin x_2 koordinatı ile değişimi.



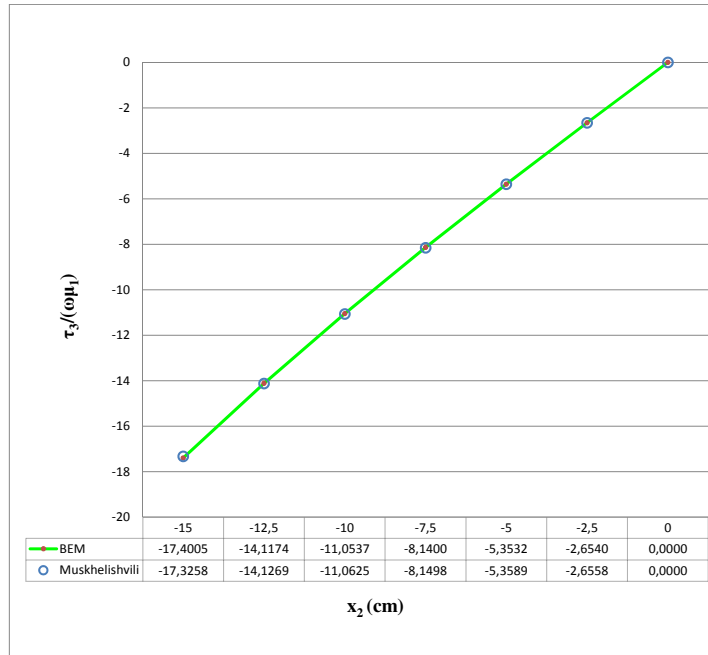
Şekil 6.4 : Şekil 6.1’de CF’de ϕ_2 ’nin x_1 koordinatı ile değişimi.



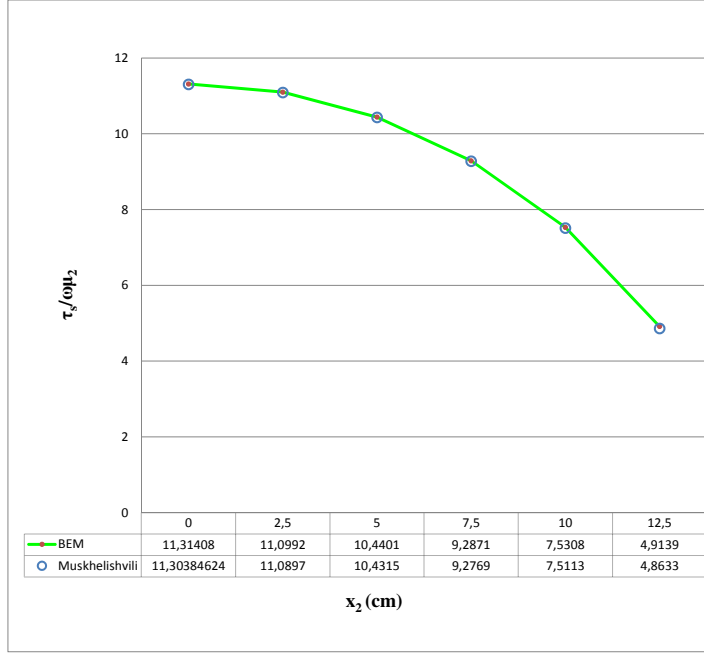
Şekil 6.5 : Şekil 6.1’de FT’de ϕ_2 ’nin x_2 koordinatı ile değişimi.



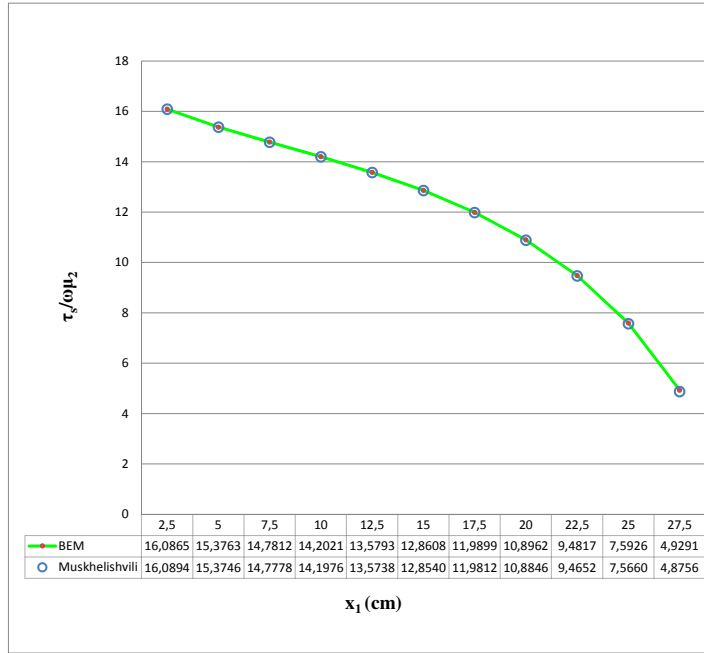
Şekil 6.6 : Şekil 6.1’de OC’de ϕ_2 ’nin x_2 koordinatı ile değişimi.



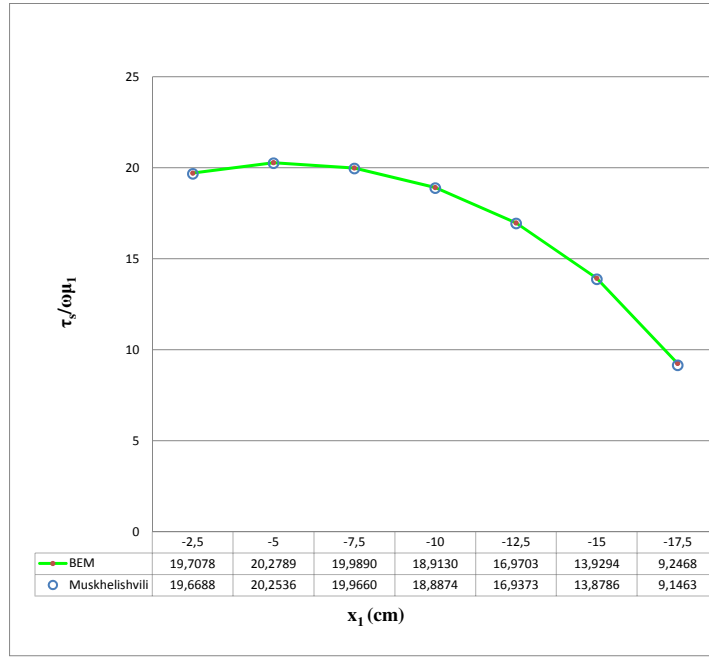
Şekil 6.7 : Şekil 6.1’de DO’da $\tau_3/\omega\mu_1$ ’in x_2 koordinatı ile değişimi.



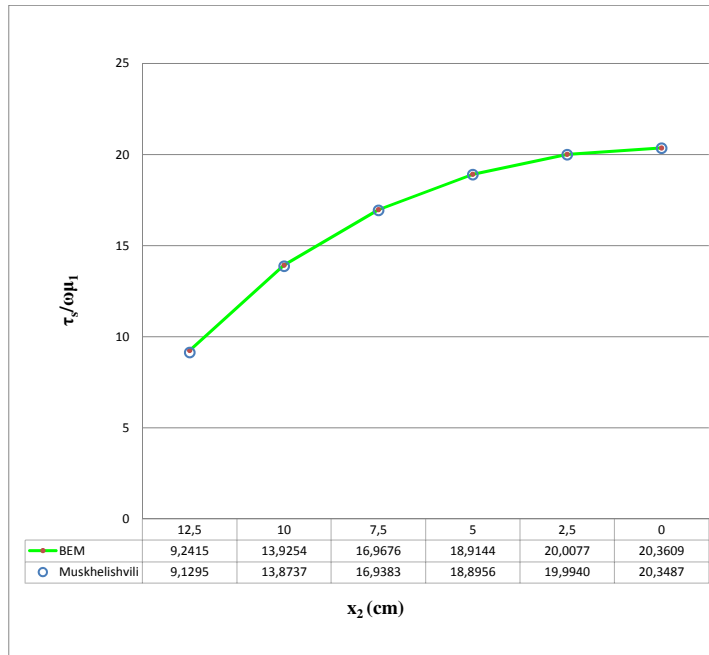
Şekil 6.8 : Şekil 6.1’de CF’de $\tau_s/\omega\mu_2$ ’in x_1 koordinatı ile değişimi.



Şekil 6.9 : Şekil 6.1’de CA’da $\tau_s/\omega\mu_1$ ’in x_1 koordinatı ile değişimi.



Şekil 6.10 : Şekil 6.1’de AL’de $\tau_s / \omega \mu_1$ ’in x_2 koordinatı ile değişimi.



Şekil 6.11 : Şekil 6.1’de TF’de $\tau_s / \omega \mu_2$ ’in x_2 koordinatı ile değişimi.

Burulma rijitliği iin nokta sayısı değiştirilerek elde edilen sonular aşağıdaki Tablo 6.1’de verilmiştir.

izelge 6.1 : İki malzemeli dikdrgen kesitte D/μ_1 ’in nokta sayısına gre değişimi ve hata hesabı.

MN11	MN12	MN22	MN	D/μ_1	Hata Oranı
4	2	3	26	194930,08	0,052019095
8	4	6	52	187380,016	0,013822297
12	8	12	88	185510,764	0,003885329
Muskhelishvili				184789,994	

7. ÖRNEK PROBLEM 4

Bu problemde şekilde gösterildiği gibi 50x25cm lik betonarme bir kolonun içerisine çapı 2cm olan dört demir yerleştirilmiş ve bu kesitin burulma momenti altında davranışı incelenmiştir. Bu problem gerçekte bir karışık sınır değer problemidir. Ancak bu karışık sınır değer problemini tanımlarken iki farklı kesit göz önüne alınmıştır. Bunlardan birincisi içinde dört tane dairesel delik olan dikdörtgen kesitli kolondur. (Şekil 7.1) (Şekil 7.2) İkinci bölge ise sistem x_1 ve x_2 eksenlerine göre simetrik olduğu için sadece tek bir demirden oluşmaktadır. (Şekil 7.3) Bu problemin bilinmeyenleri dış sınırın ve deliklerin çevresindeki φ değerleridir. Bunlara ilave olarak delik sınırlarında $t_3/\omega\mu_1$ değeri ilave bilinmeyen olarak ortaya çıkmaktadır. Dış sınırdaki AB aralığı MN1 doğrusal elemana bölünmüştür. BC aralığı ise MN2 doğrusal elemana bölünmektedir. Delikler içinse (Şekil 7.2)'de gösterilen nodal noktaları birleştiren doğrusal elemanlar göz önüne alınmıştır. Dış sınırdaki A noktası 2 numaralı nodal nokta olarak isimlendirilmiştir. Ancak dairesel sınırlarda merkez değışse bile merkeze göre nodal noktaların konumları aynı kalmaktadır. Bu bölge için yazılan denklem genel şekliyle

$$\varphi(y) = \int_{C_1} \varphi \frac{1}{2\pi} \frac{(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2}{\rho^2} dC_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} (x_2 n_1 \ln \rho - x_1 n_2 \ln \rho) dC_1 \quad (7.1)$$

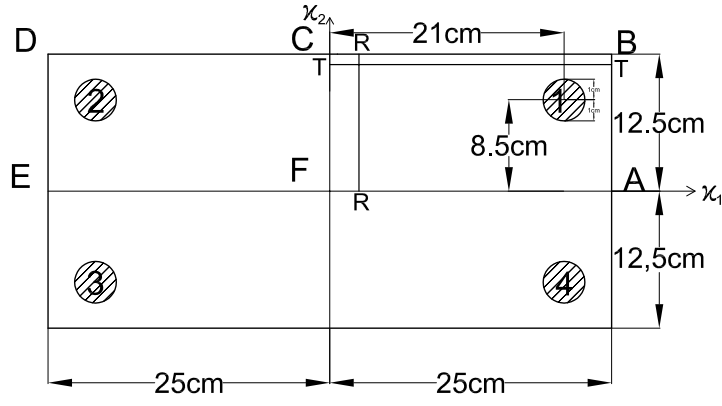
$$- \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2\pi} \int_{C_i} \frac{t_3}{\omega\mu_1} \ln \rho dC_i \quad (7.2)$$

olarak ortaya çıkar. Tek bir demirde ise bu denklem

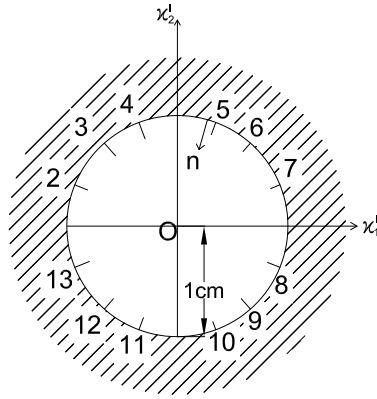
$$\varphi(y) = \int_{C_1} \varphi \frac{1}{2\pi} \frac{(x_1 - y_1)n_1 + (x_2 - y_2)n_2}{\rho^2} dC_1 - \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} (x_2 n_1 \ln \rho - x_1 n_2 \ln \rho) dC_1 \quad (7.3)$$

$$- \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2\pi} \int_{C_i} \frac{t_3}{\omega\mu_2} \ln \rho dC_i \quad (7.4)$$

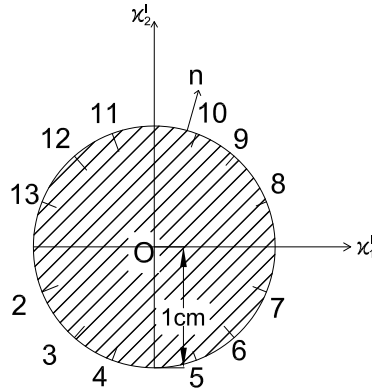
şeklini alacaktır.



Şekil 7.1 : Burulma etkisi altında dört demir içeren prizmatik kolon.



Şekil 7.2 : Bir demirin etrafındaki delik.



Şekil 7.3 : Birinci demir.

Daha önce açıklandığı gibi problemin bilinmeyenlerinin tayini amacıyla doğrusal elemanlar üzerinde φ 'nin doğrusal olarak değiştiği ve $t_3/\omega\mu_1$ 'inde doğrusal olarak değiştiği kabul edilmiştir. Dolayısı ile problemin bilinmeyenlerinin sayısı simetri koşulları da düşünülerek $MN1 + MN2 - 1 + 2 \times 13$ tanedir. Bu denklemleri elde edebilmek için yükleme noktası y 'nin delikli levhadaki her nodal nokta olduğu düşünülmüştür. Ayrıca tek bir demirde sınırdaki nodal noktalar yine yükleme noktaları olarak göz önüne alınmaktadır. Bu arada yükleme noktasının daha önce açıklandığı gibi bölge dışına alındığını da ayrıca belirtmek gerekecektir. Dış çevredeki

φ değerleri $\varphi(J)$ olarak isimlendirilirken delik çevresindekiler delik numaralarına göre $\varphi_1(J)$, $\varphi_2(J)$, $\varphi_3(J)$, $\varphi_4(J)$ olarak isimlendirilmiştir. Ayrıca herhangi bir delik çevresindeki $t_3/\omega\mu_1$ değerleri ise sırası ile $T1(J)$, $T2(J)$, $T3(J)$, $T4(J)$ olarak isimlendirilmiştir. Tek demirde ise sınırdaki φ_5 ve $t_3/\omega\mu_2$ değeri ise $T5(J)$ olarak isimlendirileceklerdir. Dış sınırdaki her noktaya yükleme yapılmaktadır. Ancak dış sınırdaki her noktaya yükleme yapılırken delik çevresindeki elemanlarında üzerinde integrallerin hesaplandığını da ayrıca belirtmek gerekir. Dış çevrede yükleme dışta olduğu zaman $I=2, MN+1$ ($MN = 4 \times MN1 + 4MN2$) olmak üzere her I için

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{J=2}^{MN+1} [\varphi(J)W1XX(I,J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J))TXX(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{MN+1} W2XX(I,J) + \varphi(I)EK1X(I) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_1(J)W1XZ1(I,J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))TXZ1(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2XZ1(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_2(J)W1XZ2(I,J) + (\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J))TXZ2(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2XZ2(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_3(J)W1XZ3(I,J) + (\varphi_3(J+1) - \varphi_3(J))TXZ3(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2XZ3(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_4(J)W1XZ4(I,J) + (\varphi_4(J+1) - \varphi_4(J))TXZ4(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2XZ4(I,J)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{J=2}^{13} T1(J)GX1(I,J) + (T1(J+1) - T1(J))GX1S(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T2(J)GX2(I,J) + (T2(J+1) - T2(J))GX2S(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T3(J)GX3(I,J) + (T3(J+1) - T3(J))GX3S(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T4(J)GX4(I,J) + (T4(J+1) - T4(J))GX4S(I,J) \tag{7.5}
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Yükleme 1. delikte iken $I=2,13$ olmak üzere her I için

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{J=2}^{MN+1} [\varphi(J)W1Z1X(I,J) + (\varphi(J+1) - \varphi(J))TZ1X(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{MN+1} W2Z1X(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_1(J)W1Z1Z1(I,J) + (\varphi_1(J+1) - \varphi_1(J))TZ1Z1(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2Z1Z1(I,J) + \varphi_1(I)EK1Z1(I) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_2(J)W1Z1Z2(I,J) + (\varphi_2(J+1) - \varphi_2(J))TZ1Z2(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2Z1Z2(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_3(J)W1Z1Z3(I,J) + (\varphi_3(J+1) - \varphi_3(J))TZ1Z3(I,J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2Z1Z3(I,J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} [\varphi_4(J)W1Z1Z4(I,J) + (\varphi_4(J+1) - \varphi_4(J))TZ1Z4(I,J)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{J=2}^{13} W2Z1Z4(I, J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T1(J)GZ1Z1(I, J) + (T1(J+1) - T1(J))GZ1Z1S(I, J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T2(J)GZ1Z2(I, J) + (T2(J+1) - T2(J))GZ1Z2S(I, J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T3(J)GZ1Z3(I, J) + (T3(J+1) - T3(J))GZ1Z3S(I, J) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T4(J)GZ1Z4(I, J) + (T4(J+1) - T4(J))GZ1Z4S(I, J) \quad (7.6)
\end{aligned}$$

denklemini bulunur. Yükleme demir çevresinde ise $I=2,13$ olmak üzere her I için

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{J=2}^{13} [\varphi_5(J)W1IZ1Z1(I, J) + (\varphi_5(J+1) - \varphi_5(J))T1Z1Z1(I, J)] \\
& + \sum_{J=2}^{13} W2IZ1Z1(I, J) + \varphi_5(I)EK1IZ1(I) \\
& + \sum_{J=2}^{13} T5(J)GIZ1Z1(I, J) + (T5(J+1) - T5(J))GIZ1Z1S(I, J) \quad (7.7)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $W1$ ile başlayan integrallerde $W1$ 'den sonraki ilk terim yüklemenin yapıldığı bölgeyi, ikinci terim ise integralin hesaplandığı bölgeyi gösterir. Örnek olarak

$$W1Z1Z4(I, J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \frac{(x_1 - x_1(I))n_1 + (x_2 - x_2(I))n_2}{\rho^2} dS \quad (7.8)$$

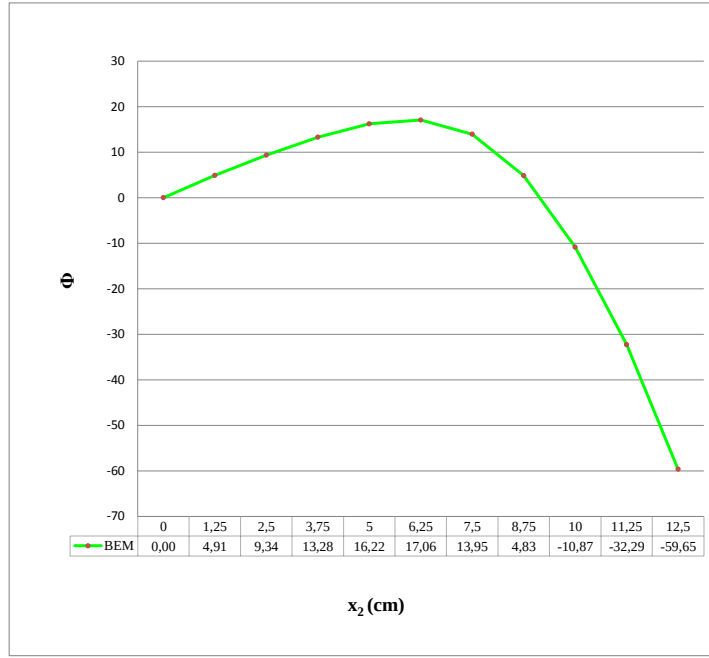
Burada $l(J)$ dört numaralı deliğe ait bir elemanın boyudur. $x_1(I)$ ve $x_2(I)$ ise 1. delikteki I numaralı nodal noktanın koordinatlarını gösterirler. ρ eleman üzerindeki herhangi bir noktanın yükleme noktasına uzaklığıdır. S ise doğrusal eleman üzerinde $0 - l(J)$ arasında değişen bir koordinatı gösterir. $W2$ ile başlayan kısaltmalar ise $W2$ 'den sonraki birinci ifade yüklemenin yapıldığı bölgeyi ondan sonraki ifade ise integralin hesaplandığı elemanın üzerinde bulunduğu bölgeyi göstermektedir. Örnek olarak

$$W2Z1Z4(I, J) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} (x_2n_1 - x_1n_2) \ln \rho dS \quad (7.9)$$

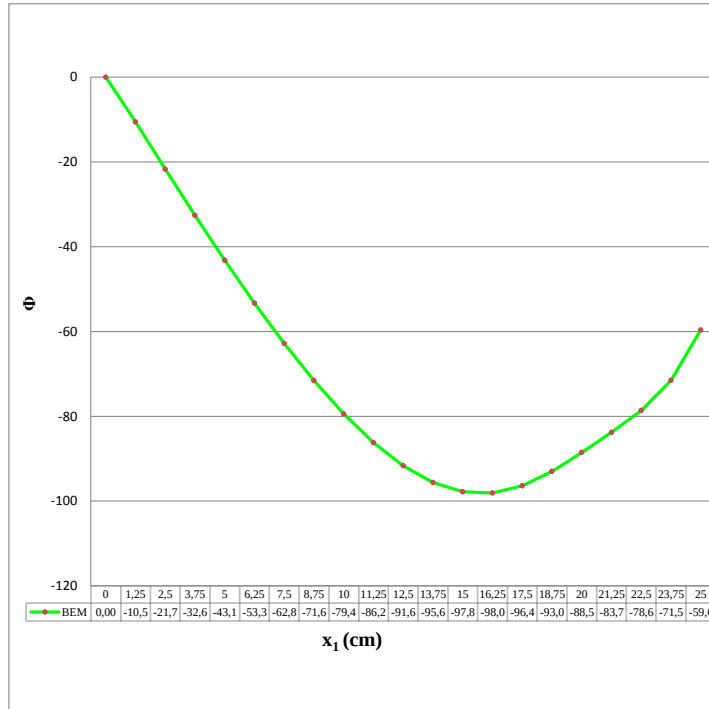
verilmiştir. T ile başlayan integrallerse $W1$ ile başlayan integrallerin integrantlarının $S/l(J)$ ile çarpılmasıyla oluşturulurlar. $G1$ ile başlayan integrallerde $G1$ 'den sonraki birinci ifade yüklemenin yapıldığı bölgeyi ondan sonraki ise integralin hesaplandığı bölgeyi gösterir. Örnek olarak

$$G1Z1Z4(I,J) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l(J)} \ln \rho dS \quad (7.10)$$

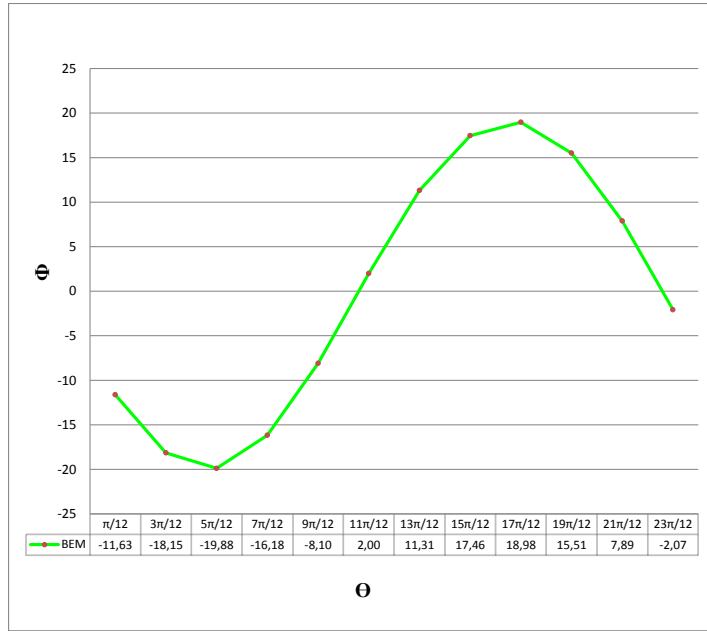
verilebilir. $G1S$ ile başlayan integraller ise $G1$ ile başlayan integrallerin integrantlarının $S/l(J)$ ile çarpılmasıyla oluşan integrantları içerirler. Demire ait olan integrallerde ise $W1, W2, T$ ifadelerine bir I sembolü daha eklenmiştir. Problemin bilinmeyenleri x_1 ve x_2 eksenlerine göre simetri olduğu için dış çevrede $MN1+MN2-1$ tanedir. Yine delikler x_1 ve x_2 eksenlerine göre simetrik oldukları için bağımsız bilinmeyen sayısı 24 tanedir. Ancak dikkat edilmesi gereken nokta bazı denklemlerin de birbirinin aynı olmasından dolayı denklem sayısı yetersizdir. Gerekli olan ilave denklemler tek demirden elde edilecektir. Ancak demirdeki $T5(2)$, $(-\mu_2/\mu_1)T1(13)$ 'e eşittir. Ayrıca $\varphi_1(13) = \varphi_5(2)$ şeklinde üst üste gelen noktaların φ 'lerinin aynı, gerilmelerinin ise $(-\mu_2/\mu_1)$ çarpanı ile aynı olduğuna dikkat çekmek gerekecektir. Denklem takımı çözülüp φ 'ler bulunduğundan sonra sadece delikli levhadaki iki doğrultuda kayma gerilmesi hesabı yapılmıştır. Kullanılan 50×25 kesitte (Şekil 7.1) AB, CB ve 1. delik çevresinde φ 'nin değişimi (Şekil 7.4), (Şekil 7.5) ve (Şekil 7.6)'da verilmiştir. Ayrıca 1.delik çevresinde $t_3/\omega\mu_1$ 'in θ açısıyla değişimi (Şekil 7.7)'de verilmiştir. Şekil 7.1'de gösterilen RR ve TT hatları üzerinde hesaplanan $\tau_{13}/\omega\mu_1$, $\tau_{23}/\omega\mu_1$ değerlerinin değişimi (Şekil 7.8), (Şekil 7.9), (Şekil 7.10) ve (Şekil 7.11)'de gösterilmiştir. Yine Şekil 7.1'deki AB ve CB hatları üzerinde $\tau_s/\omega\mu_1$ 'in değişimi (Şekil 7.12) ve (Şekil 7.13)'de verilmiştir.



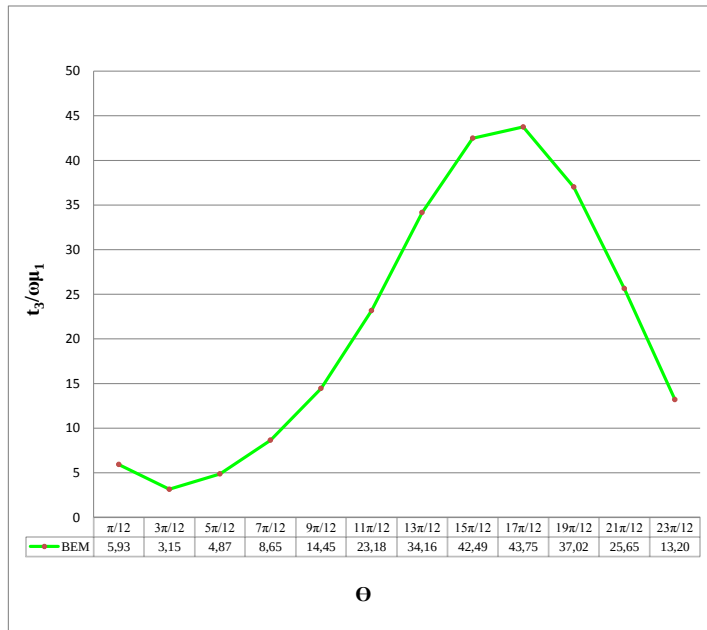
Şekil 7.4 : Şekil 7.1’de AB’de ϕ ’nin x_2 koordinatına göre değişimi.



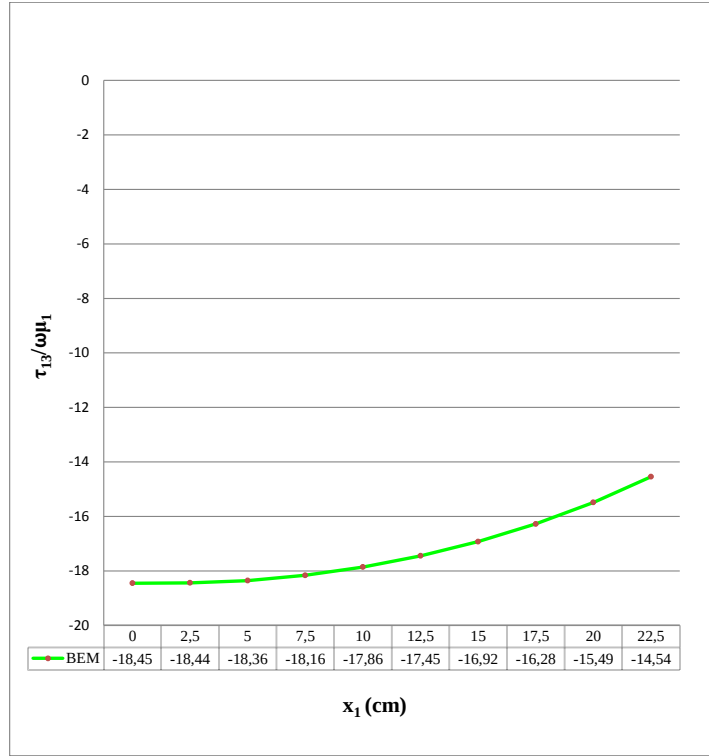
Şekil 7.5 : Şekil 7.1’de CB’de ϕ ’nin x_1 koordinatına göre değişimi.



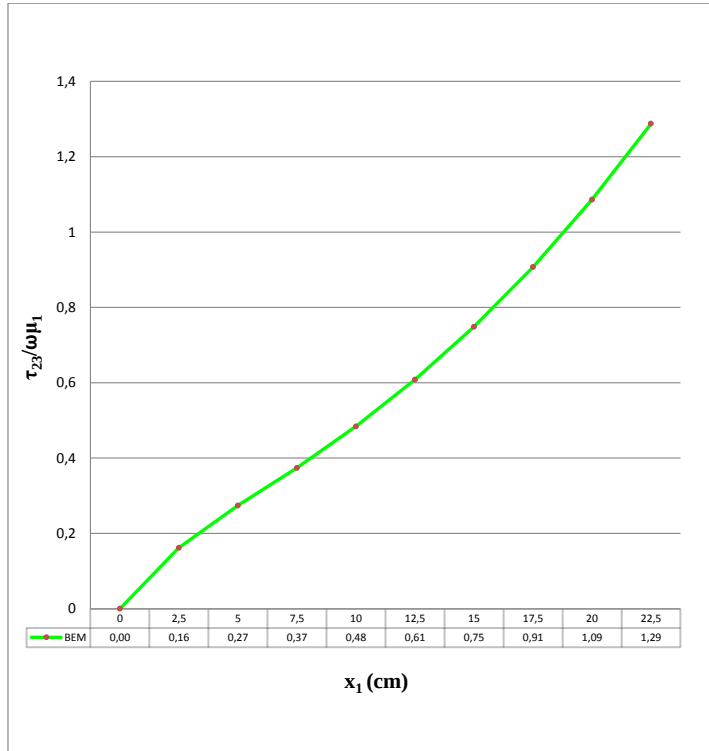
Şekil 7.6 : Şekil 7.1’de 1. delik çevresinde ϕ ’nin θ açısıyla değişimi.



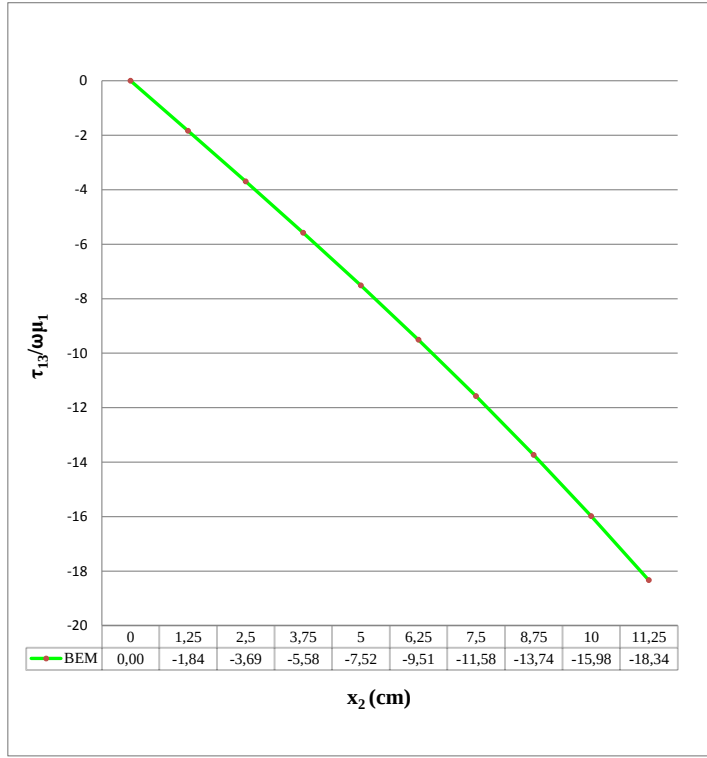
Şekil 7.7 : Şekil 7.1’de 1.delik çevresinde $t_3/\omega\mu_1$ ’in θ açısıyla değişimi.



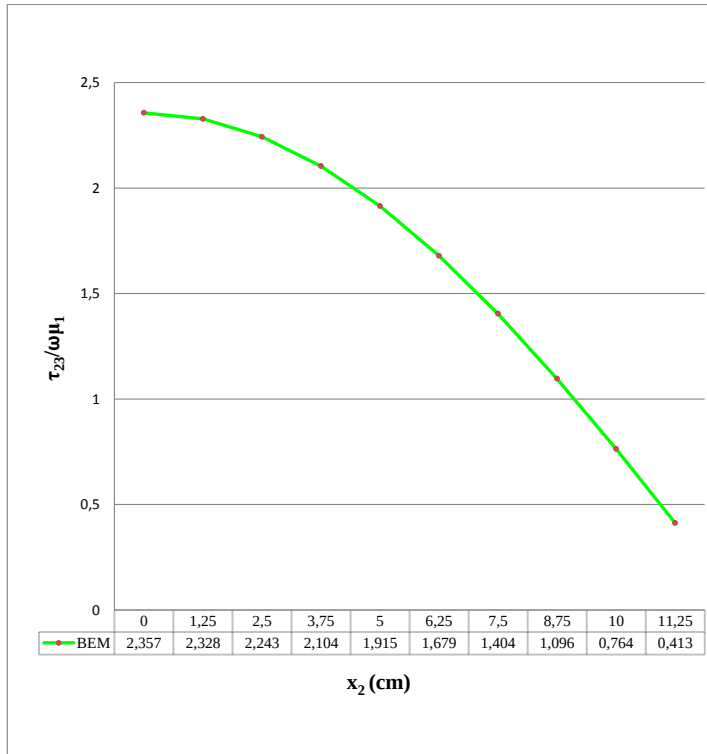
Şekil 7.8 : Şekil 7.1’de $x_2 = 11$ cm TT hattında $\tau_{13}/\omega\mu_1$ ’in x_1 koordinatı ile değişimi.



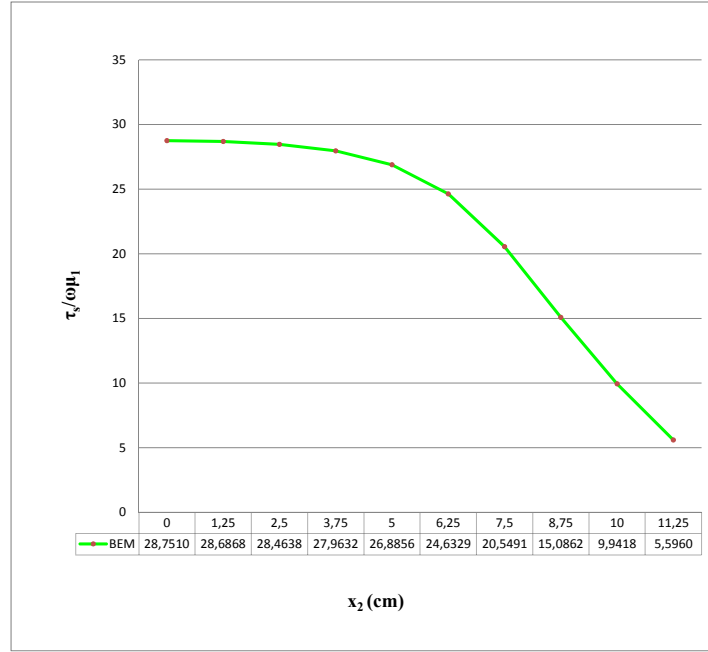
Şekil 7.9 : Şekil 7.1’de $x_2 = 11$ cm TT hattında $\tau_{23}/\omega\mu_1$ ’in x_1 koordinatı ile değişimi.



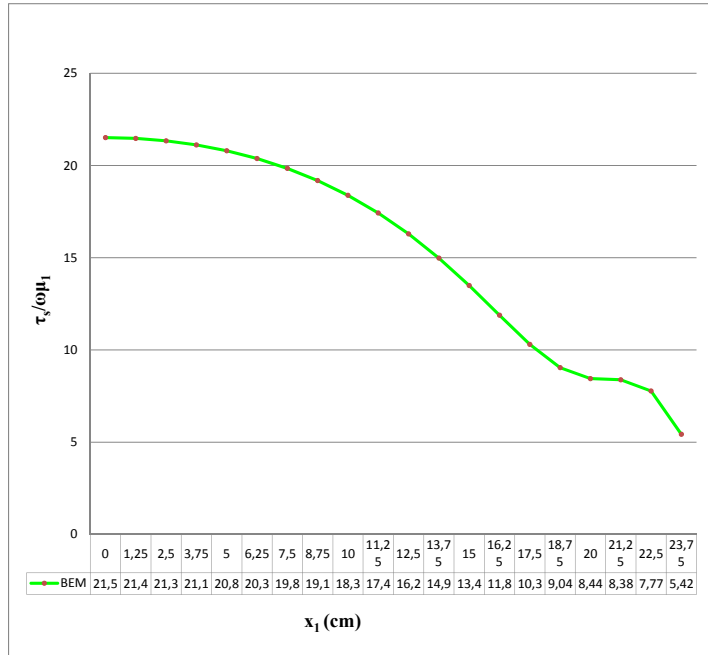
Şekil 7.10 : Şekil 7.1’de $x_1 = 5\text{cm}$ RR hattında $\tau_{13}/\omega\mu_1$ ’in x_2 koordinatı ile değişimi.



Şekil 7.11 : Şekil 7.1’de $x_1 = 5\text{cm}$ RR hattında $\tau_{23}/\omega\mu_1$ ’in x_2 koordinatı ile değişimi.



Şekil 7.12 : Şekil 7.1’de AB hattında $\tau_s / \omega \mu_1$ ’in x_2 koordinatı ile değişimi.



Şekil 7.13 : Şekil 7.1’de CB hattında $\tau_s / \omega \mu_1$ ’in x_1 koordinatı ile değişimi.

8. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kolonlarda gerilme hesabı sınır eleman yöntemi ile yapılırken burada çıkan formülasyonda elde edilen sonuçlar analitik çözümü olan problemlerde kapalı çözümlerle yüzde yüz uyushmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta şudur:

Basit bağımlı bölgelerde sınır eleman formülasyonu ilk aşamada bilinmeyen olarak burulma fonksiyonu değerlerini içerir. Sabit terim ise belirli çizgisel integrallerin toplamından oluşur. Bilinmeyenlerin katsayılarını oluşturan integraller kapalı olarak hesaplanmıştır. Keza sabit terimi oluşturacak integrallerde kapalı olarak hesaplanmıştır. Bölge içinde veya bölge sınırında kayma gerilmesi bileşenleri veya yüzey gerilmesi hesaplanmak istenirse, burulma fonksiyonunun türevleri teşkil edilmelidir. Bu türevler hesaplanırken burulma fonksiyonunun çarpanı olan integrallerin sonuçları türetilir. Ancak sabit terimleri oluşturan integraller türetilirken alınmış integralin değil, integralin türevinin alındıktan sonra integre edilmesi uygun olmaktadır. Bunun sebebi bu integrallerin çok değerli çıkmasıdır. Aynı durum çok bağımlı bölgelerde yine sabit terimi oluşturan integrallerin türetilmesi içinde geçerlidir. Ancak eleman sayısı ne kadar artırılırsa artırılın, kesitin burulma rijitliği hesaplanırken hata oranı 1/10000'nin altına düşürülemez.

8.1 Çalışmanın Uygulama Alanı

Bu çalışmada burulma etkisi altında olan kolonlarda meydana gelecek ufak kenar kırıklarının bu kırığa yakın noktalarda kayma gerilmesini neredeyse sonsuza gidebileceği açıkça gösterilmiştir. Böylesine büyük bir kayma gerilmesi kolonu neredeyse pürüzsüz bir yüzey halinde rahatlıkla kesebilir. Dolayısıyla burulmaya maruz kolonlarda kenar hasarlarının ya çok dikkatle izlenmesi ya da kolon çevresinin çelikle takviyesi olası büyük felaketleri önleyecektir.

KAYNAKLAR

- [1] **Muskhelishvili, N.I.** (1963). *Some Basic Problems of The Mathematical Theory of Elasticity*, Groningen, Netherlands : P. Noordhoff, 1963, c1953.
- [2] **Ely, J.F. ve Zienkiewicz, O.C.** (1960). Torsion of compound bars - a relaxation solution, *International Journal of Mechancial Sciences*, 1(356-365).
- [3] **Jaswan, M.A. ve Ponter, A.R.S.** (1963). An integral equation solution of the inhomogeneous torsion problem, *Proceedings of the Royal Society A*, 273(237-246).
- [4] **Katsikadelis, J. ve Sapountzakis, E.J.** (1985). Torsional of composite bars by boundary element method, *Journal of Engineering Mechanics*, 111(9).
- [5] **Booker, J.R. ve Kitipornchai, S.** (1971). Torsion of multilayered rectangular section, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 97(EM5).
- [6] **Trahair, N.S.** (2005). Nonlinear elastic nonuniform torsion, *Journal of Structural Engineering*, 131(7).
- [7] **Sapountzakis, E.J., Member, A. ve Mokos, V.G.** (2001). Nonuniform torsion of composite bars by boundary element method, *Journal of Engineering Mechanics*, 127(9).
- [8] **Herrmann, L.R.** (1965). Elastic torsional analysis of irregular shapes, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 91(EM6).
- [9] **Chou, S.I. ve Mohr, J.A.** (1990). Boundary integral method for torsion of composite shafts, *Res Mechanica*, 29(41-56).
- [10] **Chou, S.I. ve Shams, Ahmadi, M.** (1997). Complex variable boundary element method for torsion of composite shafts, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 40(1165-1179).

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Hakan Türken

Doğum Yeri ve Tarihi: Karabük-29/06/1984

E-Posta: hakanturken@gmail.com

Lisans: Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü

Y. Lisans: Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği A.B.D

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

07.2012 - Devam ediyor Bureau Veritas Turkey

03.2010 - 07.2012 Erkiz Mühendislik A.Ş

05.2007 - 01.2009 Garanti Konut A.Ş.

Yayın ve Patent Listesi:

Periodica Polytechnica Civil Engineering 55/2(2011) 107-116 "The effects of various curing materials on the compressive strenght of concretes produced with/without admixture"

New World Sciences Academy - 5142-2480 - Cilt 1 - Sayı 2 - Yayın No:1A0213-Sayfa:1016-1032 (2011) " Tunnel Formwork Systems Comparison to Conventional Systems"

Scientia Iranica, Transactions A:Civil Engineering 19 (2012) 77-83 The effects of various curing materials on the compressive strenght characteristics of the concretes produced with multiple chemical admixtures

International Conference On Mechanical, Architectural and Civil Engineering Dubai (2013) The Effects of Using Single or Multiple Chemical Concrete Strength and Workability

"Tünel Kalıp Sistemlerin Geleneksel Sistemlerle Karşılaştırılması"**Hakan Türken** Fırat Üniversitesi IPCC2011 IPCC2011 Costruction Congress 2011 Elazığ/Turkey

"Farklı Tipteki Katkı Maddelerinin Beton Basınç Dayanımına Etkisi Üzerine Deneysel Bir Çalışma ve Katkı Maddesi Seçiminde Dikkat Edilmesi Gereken Hususlar" Çukurova Üniversitesi,2008, Adana/Turkey **Hakan Türken/Ülkü S.Yılmaz**

"Katkısız ve Katkılı Betonlarda Farklı Kür Malzemelerinin Beton Basınç Dayanımına Etkisi" Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi 2010, Konya/Türkiye

"Tünel Kalıp Teknolojisi ve Özellikleri" Selçuk Üniversitesi Yüksek Lisans Semineri, 2009, Konya/Türkiye-**Hakan Türken**

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

- **Türken H.**, Kadioğlu N., Ataoğlu Ş., 2014: The Solution of Torsion Problem for the Bars with Irregular Cross Sections by Boundary Element Method. *International Journal of Mechanics and Applications*, Vol.4, No.2, 2014