TC
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT ALGILARI

Gökçe TUNCER

İzmir

2014

TC
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT ALGILARI

Gökçe TUNCER

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Işıkhan UĞUREL

İzmir
2014

YEMİN

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Matematik Bölümü Öğrencilerinin İspat Algıları" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurulmaksızın yazıldığını, yararlandığım eserlerin kaynak dizininde gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserlere atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

16. 09. 2014

Gökçe TUNCER

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Programında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Işıkhan UĞUREL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sevgi MORALI

Üye : Doç. Dr. Süha YILMAZ

Onay
Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../....

Doç. Dr. Ali Günay BALIM
Enstitü Müdürü

T.C
YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
ULUSAL TEZ MERKEZİ

TEZ VERİ GİRİŞİ VE YAYIMLAMA İZİN FORMU

Referans No	10054041
Yazar Adı / Soyadı	GÖKÇE TUNCER
Uyruğu / T.C.Kimlik No	TÜRKİYE / 41776353488
Telefon	5059380230
E-Posta	g.tuncer88@hotmail.com
Tezin Dili	Türkçe
Tezin Özgün Adı	Matematik Bölümü Öğrencilerinin İspat Algıları
Tezin Tercümesi	Proof Conceptions of Mathematics Students
Konu	Matematik = Mathematics
Üniversite	Dokuz Eylül Üniversitesi
Enstitü / Hastane	Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Bölüm	
Anabilim Dalı	Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı
Bilim Dalı	Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Tez Türü	Yüksek Lisans
Yılı	2014
Sayfa	212
Tez Danışmanları	DOÇ. DR. IŞIKHAN UĞUREL 27001009122
Dizin Terimleri	
Önerilen Dizin Terimleri	
Kısıtlama	36 ay süre ile kısıtlı

Tezimin,Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanında arşivlenmesine izin veriyorum. Ancak internet üzerinden tam metin açık erişime sunulmasının 26.09.2017 tarihine kadar ertelenmesini talep ediyorum. Bu tarihten sonra tezimin, bilimsel araştırma hizmetine sunulması amacı ile Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi tarafından internet üzerinden tam metin erişime açılmasına izin veriyorum.
NOT: Erteleme süresi formun imzalandığı tarihten itibaren en fazla 3 (üç) yıldır.

26.09.2014

İmza:.....

TEŞEKKÜR

Öncelikle beni dünyaya getiren, huzurla, mutlulukla, özveriyle büyüten, öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, üzerimden şefkat dolu bakışlarını ve huzura ermem için ettikleri duaları bir an olsun eksiltmeyen, canım anneciğim Leyla TUNCER ve canım babacığım Mukadder TUNCER' e çok teşekkür ederim.

Kardeşliğin nasıl bir şey olduğunu tam manasıyla yaşatan, en iyi günümde de en kötü günümde de hep yanımda olan, dert ortaklarım, sevinç sebeplerim canım abim Mehmet Türker TUNCER ve eşi Enisa TUNCER'e, canım ablam Zuhâl KAĞNICI ve eşi Zahit KAĞNICI'ya çok teşekkür ederim. 2012 yılında dünyaya gelen, evimizin neşe kaynağı, huzur sebebi, tüm yorgunluğumu sesiyle, gülüşüyle, mis kokusuyla unutturan paşam, canım yeğenim Keremim, iyi ki varsın …

Bilgi ve tecrübesiyle yüksek lisans sürecimi zenginleştiren, bu sürece ve hayata dair paylaşımlarıyla yol gösteren, tezimin tüm aşamalarında benden yardımını esirgemeyip bu süreci kolaylaştıran tez danışmanım Doç. Dr. Işıkhan UĞUREL' e minnettar olduğumu belirtmek isterim. Ayrıca tez uygulama sürecimin veri toplama aşamasında bana çok büyük yardımları olan, öğrencileriyle çalışma olanağı sağlayan Yrd. Doç. Dr. C. Cem SARIOĞLU ve bu çalışmada gönüllü olarak yer almayı kabul eden matematik bölümü öğrencilerine teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisansın bana kazandırdığı en güzel şey olan canım dostum Çağla TOPRAK' a desteklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Son olarak bu zor süreçte hayatıma giren, hayatımın ve kalbimin başköşesine oturan, sesiyle huzur bulduğum, moral kaynağım, hayat ortağım canım eşim Cevdet KÖYLÜ' ye çok çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

YEMİN i

DEĞERLENDİRME KURULU ÜYELERİ ii

YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU DOKÜMANTASYON MERKEZİ TEZ VERİ FORMU iii

TEŞEKKÜR iv

İÇİNDEKİLER v

TABLO LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

ÖZET xi

ABSTRACT xiv

BÖLÜM I

GİRİŞ 1

Matematik Felsefesi Bağlamında İspat 3

Matematik Tarihi Bağlamında İspat 4

Matematik Eğitimcilerinin İspata Yaklaşımları 5

İspatın Rolleri / Fonksiyonları 8

İspat Şemaları / Yaklaşımları Çerçevesinde İspata Bakış 10

Problem Durumu 23

Amaç ve Önem 24

Problem Cümlesi 25

Alt Problemler 25

Sayıltılar 25

Sınırlılıklar 25

Tanımlar 25

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR 28

Matematiksel İspat Algısı 28

Matematiksel İspat Algısı Üzerine Çalışmalar 32

Lisans Öncesi (İlköğretim-Ortaöğretim) Öğrencilerinin Matematiksel İspat Algısı 33

Matematik Öğretmeni, Öğretmen Adayı ve Matematik Bölümü Lisans Öğrencilerinin Matematiksel İspat Algısı 35

İspat Yöntemleri, Biçimleri ve Çeşitli Doğrulama Yolları 40
İspat Yöntemleri 40
Doğrudan ispat 40
Dolaylı ispat 40
Olmayana Ergi 40
Çelişki Bulma 40
Deneme Yöntemi 41
Aksine Örnek Verme 41
İspat Biçimleri 41
Paragraf İspat 41
Akış Diyagramı İspat 41
Çift Sütun İspat 42
Çeşitli Doğrulamalar 43
Sözsüz İspat 43
Origami ile İspat 44
Çoklu Örneklemeye Dayalı (Deneysel) İspat 45
Bilgisayar Destekli İspat 45
BÖLÜM III
YÖNTEM 47
Araştırma Modeli 47
Katılımcılar 49
Veri Toplama Araçları 52
Dokümanlar 53
Görüşmeler 58
Veri Çözümleme Teknikleri 59
Doküman İncelemesi 59
Betimsel Analiz 60
BÖLÜM IV
BULGULAR VE YORUMLAR 63
BÖLÜM V
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 148
Sonuçlar 148
Tartışma 157

Öneriler **161**

KAYNAKÇA **163**

EKLER **175**

Tablo Listesi

Tablo 1	Katılımcıların not ortalamaları	**51**
Tablo 2	Katılımcıların lise mezuniyet okul türü ve ortalamaları	**51**
Tablo 3	Öğrencilerin ispat ve ispatlamaya yönelik kavramları tanımlama sıklıkları	**64**
Tablo 4	Katılımcıların İspat Kavramına Yönelik Tanımları	**66**
Tablo 5	Katılımcıların İspatlama Kavramına Dair Tanımları	**67**
Tablo 6	Katılımcıların İspat Yöntemine Dair Tanımları	**68**
Tablo 7	Katılımcıların Önerme Kavramına Dair Tanımları	**70**
Tablo 8	Katılımcıların Aksiyom Kavramına Dair Tanımları	**72**
Tablo 9	Katılımcıların Varsayım Kavramına Dair Tanımları	**73**
Tablo 10	Katılımcıların Teorem Kavramına Dair Tanımları	**75**
Tablo 11	Katılımcıların Sanı Kavramına Dair Tanımları	**76**
Tablo 12	Katılımcıların Lemma Kavramına Dair Tanımları	**77**
Tablo 13	Katılımcıların Örnekleme Kavramına Dair Tanımları	**79**
Tablo 14	Katılımcıların Doğrulama Kavramına Ait Tanımları	**80**
Tablo 15	Katılımcıların Genelleme Kavramına Ait Tanımları	**81**
Tablo 16	Katılımcıların Soyutlama Kavramına Ait Tanımları	**83**
Tablo 17	Katılımcıların Gerçekleme Kavramına Ait Tanımları	**84**
Tablo 18	Birinci gruptaki ispatlar için inceleme anahtarı	**87**
Tablo 19	Araştırmacının 1. Gruptaki Öğrenci İspatlarına Verdiği Puanlar	**88**
Tablo 20	Öğrencilerin 1. Gruptaki İspatlarına Arkadaşlarının Verdiği Puanlar	**94**
Tablo 21	İkinci Gruptaki İspatlar İçin Araştırmacının İnceleme Anahtarı	**101**
Tablo 22	Araştırmacının 2. Gruptaki Öğrenci İspatlarına Verdiği Puanlar	**101**
Tablo 23	Öğrencilerin 2. Gruptaki İspatlarına Arkadaşlarının Verdiği Puanlar	**105**
Tablo 24	3. Gruptaki İspatlar İçin İnceleme Anahtarı	**112**
Tablo 25	Araştırmacının 3. Gruptaki Öğrenci İspatlarına Verdiği Puanlar	**113**
Tablo 26	Öğrencilerin 3. Gruptaki İspatlarına Arkadaşlarının Verdiği Puanlar	**119**
Tablo 27	Öğrencilerin Yazınsal Sınıfa Ait Doğrulama Örneklerini İçin Görüşleri	**127**
Tablo 28	Zehra İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**128**
Tablo 29	Tuğba İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**133**

Tablo 30	Öğrencilerin Görsel Sınıfa Ait Doğrulama Örnekleri İçin Görüşleri	**136**
Tablo 31	Murat İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**137**
Tablo 32	Seher İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**138**
Tablo 33	Seher İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**141**
Tablo 34	Berna İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**141**
Tablo 35	Ömer İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**142**
Tablo 36	Oğuz ile Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü	**142**
Tablo 37	Öğrencilerin Deneysel Sınıfa Ait Doğrulama Örneklerini İçin Görüşleri	**144**
Tablo 38	Katılımcıların Kümülâtif Ve 2(1-2-3) Uygulamalardaki Aldığı Puanların Ortalamaları	**151**

Şekil Listesi

Şekil 1	İspat Şemaları	**13**
Şekil 2	İspata Yönelik Çıkmış YGS Soruları	**19**
Şekil 3	İspata Yönelik Çıkmış LYS Soruları	**20**
Şekil 4	Doğrulama Örnekleri Sınıflandırması	**59**
Şekil 5	Esra ve Murat'ın 1. Teoreme Yaptıkları İspatlar	**89**
Şekil 6	Seher'in 1. Teoreme Yaptığı İspat	**90**
Şekil 7	Tuğba'nın 2. Teoreme Yaptığı İspat	**91**
Şekil 8	Esra'nın 3. Teoreme Yaptığı İspat	**91**
Şekil 9	Ozan ve Seher'in 4. Teoreme Yaptıkları İspatlar	**92**
Şekil 10	Zehra'nın 5. Teoreme Yaptığı İspat	**93**
Şekil 11	Yağmur'un 1. Teoreme Yaptığı İspat	**102**
Şekil 12	Seher'in 2. Teoreme Yaptığı İspat	**103**
Şekil 13	Araştırmacının ve Oğuz'un İspat Karşılaştırması	**110**
Şekil 14	Öğrencilerin 3. Teoremin İspatlarında Kullandıkları Grafikler	**115**
Şekil 15	Esra'nın 3. Teoreme Yaptığı İspat	**116**
Şekil 16	Tuğba'nın 4. Teoreme Yaptığı İspat	**117**
Şekil 17	Öğrencilerin 6. Teoremin İspatlarında Kullandıkları Geometrik Şekiller	**118**
Şekil 18	Esra'nın 6. Teoremin İspatında Kullandığı Geometrik Şekil	**119**
Şekil 19	Yazınsal Sınıftaki Doğrulama Örneklerinin Alt Başlıkları	**126**
Şekil 20	Görsel Sınıftaki Doğrulama Örneklerinin Alt Başlıkları	**135**
Şekil 21	Deneysel Sınıftaki Doğrulama Örneklerinin Alt Başlıkları	**143**

ÖZET

Matematik Bölümü Öğrencilerinin İspat Algıları

Gökçe TUNCER

Soyutlama ve genelleme süreci olarak değerlendirilen matematik disiplini, bu süreçte oluşturulan birçok kavramı içinde barındıran bir sistemi içerir. Söz konusu kavramlardan biri ve belki de en önemlisi 'ispat' kavramıdır. Dickerson'a (2008) göre ispat kesinlikle matematiğin merkezindedir. Öyle ki matematiğin bir ispatlama disiplini olduğu ve bunun diğer disiplinler arasındaki temel farkı gösterdiği de söylenir (Heinze & Reiss, 2003). Matematiğin tanımlar, aksiyomlar, önermeler, teoremler ve teoremlerin ispatlarından oluştuğu genel bir kanıdır.

İspat kavramının kökeni çok eski olup matematiğin tarihsel gelişiminde de mihenk noktalarından birini oluşturmuştur. Günümüzde ispat sadece matematik değil aynı zamanda matematik eğitimi alanı içinde önemli bir çalışma konuş haline gelmiştir. Bu alandaki araştırmalara genel olarak ele alınacak olursa karşımıza çıkan temel problemler içerisinde öğrencilerin (farklı seviyelerde) ispatı anlama, algılama durumları ve ispat yapma becerilerinin nasıl olduğu sıralanabilir. Bu çalışmada incelenen konu üniversite matematik bölümü öğrencilerinin ispat algılarıdır. Çalışmamızda fen fakültesi matematik bölümü öğrencilerinin ispat algılarının nasıl şekillendiğini ortaya çıkarmak için üç aşamalı bir veri toplama süreci gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nde öğrenim görmekte olan 8'i kız 4'ü erkek olmak üzere 12 kişi olup bunlar 3. ve 4. sınıfta öğrenim görmektedir. Öğrencilerin seçiminde başarı durumlarındaki heterojenlik ve gönüllülük esas alınmıştır.

Araştırmanın birinci aşamada öğrencilerin ispat kavramı için temel teşkil eden kavram tanımlarının ne olduğunu belirlemek için yapılan serbest yazma çalışması yer almaktadır. İkinci aşamada katılımcıların ispat yapma becerilerini ölçmeyi hedefleyen bir dizi teoremin sunulduğu ispatlama çalışması yapılmıştır. Son aşamada ise bizim hazırladığımız içinde belli sayıda doğrulama örneklerini içeren bir forma yönelik öğrencilerin görüşlerinin belirlenmesi yer almaktadır. Bu verilerin birleşiminden katılımcıların ispat algılarının nasıl şekillendiğinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

Çalışma sonunda katılımcıların ispata ilişkin kavramları tanımlamada sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Kavramların tamamını doğru bir şekilde tanımlayan bir katılımcı olmamıştır. Ancak katılımcılar, bu kavramları bildiklerini, bütün ders içi uygulamalarında kullandıklarını ancak tanımlamakta zorluk yaşadıklarını dile getirmişlerdir. Katılımcıların tanımlarında ifade etmedikleri ancak diğer uygulamalarla dikkat ettikleri hususlar ortaya çıkmıştır. Örneğin ispat kavramı için doğrulama, şüphe içermeyen gösterme gibi tanımlar yaparken, bir sonraki uygulamalarda ispatta gerekli açıklamalarla ikna edici doğrulamalar olması gerektiğini söylemişlerdir. İkinci uygulamada her bir katılımcının yaptıkları 17 ispatı araştırmacı ve diğer katılımcılar incelemişlerdir. Araştırmacının incelemesiyle bulunan sonuçlar ise şöyledir; katılımcılar matematiksel dil kullanımına özen göstermişlerdir, ispat için gerekli bilgiyi hatırlayamadıklarında ispatı boş bıraktıkları, bazı katılımcıların ise bilgiyi hatırlasa da ispat yolunu da hatırlamaya çalıştığı ancak tam anlamıyla hatırlayamadığı ispatları yarım bıraktığı görülmüştür. Bu katılımcılar tarafından teoremlerin daha önceden herhangi bir kitapta veya ders ortamında gördüğü şekilde ispatlanması ezbere dayalı, otoriteye bağlı (kitap, öğretmen) cevaplar verildiğini göstermektedir. Her bir katılımcı toplamda 187 ispatı incelemiş ve puanlamıştır. Katılımcıların dikkat ettiği hususlar birbirine benzer olduğu kadar çok farklı da olabilmiştir. Puanlama yapılırken yine matematiksel dil kullanımına, açıklamalara, içeriğin doğruluğuna dikkat edilmiştir. Üçüncü uygulama kapsamında görüş alınan formda; tümevarım, doğrudan ve dolaylı ispat yöntemlerini; vektörel, sentetik ve analitik yaklaşımları içeren ve farklı ispat biçimlerini kapsayan (Sözsüz ispat, iki kolonlu (çift sütun) ispat, paragraf ispat, akış diyagramı ispat); bunların

dışında, origami ile modellenen, sadece sonlu adımda örnekle doğrulamayı içeren ve sadece metinsel açıklamaya (düz yazı formatında, sayı, sembol, notasyon içermeyen) dayalı olmak üzere 17 doğrulama örneği mevcuttur. Bu görüşmeler sonucunda ise katılımcıların alışkanlıklarının dışına çıkmamış, tanıdık gelen doğrulamaları ispat olarak kabul etme eğiliminde oldukları görülmüştür. Farklı tarzda yapılan doğrulama örneklerinin ise ya kesin şekilde ispat olmadığını ya da çekimser kaldıkları gözlemiştir. Örneğin sözsüz (görsel) ispatın matematiksel sembol, notasyon vb içermemesi nedenlerle ispat olamayacağını düşünmektedirler.

Bu çalışma matematik bölümü öğrencilerinin ispat algısını ortaya çıkarmaya yönelik çok boyutlu veri toplama sürecine sahip bir yapıda tasarlanmış olup elde edilen bulguların ve ulaşılan sonuçların bu alanda çalışan araştırmacılara ve literatüre katkı sağlaması beklenmektedir.

Anahtar Kelimeler: İspat, İspatlama, İspat Algısı, Matematik Bölümü Öğrencisi, Matematik Eğitimi.

ABSTRACT

Proof Conceptions of Mathematics Students

Gökçe TUNCER

The discipline of mathematics regarded as the process of abstraction and generalization includes a system comprising many concepts formed in this process. One and perhaps the most important of the so-called concepts is the concept of 'proof'. According to Dickerson (2008), proof is certainly at the center of mathematics. In fact, it is said that mathematics is a discipline of proving and this shows the main difference among other disciplines (Heinze & Reiss,2003). It is a common idea that mathematics consists of definitions, axioms, propositions, theorems, and the proofs of the theorems.

The origin of the concept of proof dates back to very early times and has formed one of the touchstones in the historical progress of mathematics. Proof has also nowadays become an important subject matter of study within mathematical education. When the studies in this field are generally discussed, the students' (at different levels) states of understanding and comprehending the proof and how their abilities to make proofs are can be listed among the basic problems confronting us. The discussed subject in this study is the perception of proof of the students in mathematics department of universities. A three-phase data collecting process was carried out in our study in order to find out how the proof perception of the students of mathematics department in the faculty of science is formed. The participants are a total of 12 persons- 8 are female,4 are male- receiving education in the Mathematics Department, Faculty of Science , Dokuz Eylül University, being in the 3rd and 4th

grades. In the selection of students, the heterogeneity in the success of students and the volunterism are taken as basis.

In the first step of the study was the free-writing practice to determine what the students' conceptual definitions are for the proof concept. In the second step, proving study was carried out in which a series of theorems were submitted aiming to measure the participants' ability to make proofs. In the last step, there were the determination of students' opinions to a form including a certain number of correction samples in what we prepared. It was aimed to determine how the proof perceptions of the participants were formed from the combination of these data.

At the end of the study it was observed that the participant had difficulties defining the concepts about proof. There was not one participant who defined all of the concepts accurately. However, the participants mentioned that they knew these concepts, used them in their intraclass practices but had difficulty defining them. There appeared some respects which the participants did not state in their definitions but paid attention to in other practices. For example, while defining the concept of proof as confirmation, demonstration with no doubt, they said , during other practices, that there must be convincing confirmations with necessary explanations in the proof. The researcher and other participants examined the seventeen proofs which each participant carried out. The results obtained through the examination by the researcher are as follows; the participants paid attention to using a mathematical language ; it was observed that they left the proof blank when they could not remember the information necessary for the proof, some participants tried to remember the way of proof even if they remembered the information, but left the proofs blank which they couldn't remember completely. The fact that the theorems were proved by the participants in the same way as they were seen in any book or lesson shows that responses based on memorization or authority (book, teacher) were given. Each participant normally studied and scored a total of 187 proofs. The respects to which the participants paid attention could be similar as well as quite different. While scoring, they considered the usage of mathematical language, explanations, and the accuracy of the content. Within the frame of the third form for which opinions were taken, there are 17 confirmation samples containing induction,

direct and indirect proof methods, and vectorial, synthetic and analytical approaches and including different ways of proofs (nonverbal proof, two column (two colums) proof, paragraph proof, flow chart proof); besides modeled by origami and comprising the confirmation with only finite steps of samples and based only textual explanation (in the form of prose, not including numbers, symbols and notations). As the result of these discussions, it was observed that participants didn't go beyond the habits, had the tendency of accepting the familiar confirmations as the proofs. They either regarded the confirmations samples which were carried out in different ways as not-proofs or they abstained. For instance, they thought that non-verbal (visual) proof cannot be a proof because they do not include mathematical symbols, notations and etc.

This study was designed with a structure of multi-dimensional data collecting for discovering the proof perceptions of mathematics department, and the obtained data and achieved results are expected to make contribution to the researchers in this field and to the literature.

Key words: Proof, Proving, Conception of proof, Student of Mathematics Department, Mathematical Education.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Matematik bilimi için tarih boyunca çok çeşitli tanımlamalar yapılmıştır. Bugün çoğu çevrelerce kabul edilen matematik tanımı, matematiğin 'ardışık soyutlama ve genelleme süreci olarak geliştirilen fikirler (yapılar) ve bağıntılardan oluşan bir sistem' olduğudur (ACER, 1972'den akt. Baykul, 1999). Soyutlama ve genelleme süreci olarak değerlendirilen matematik disiplini, bu süreçte oluşturulan birçok kavramı içinde barındıran bir sistem olmuştur. Bu kavramlardan biri ve belki de en önemlisi ise 'ispat' kavramıdır. Dickerson'a (2008) göre ispat kesinlikle matematiğin merkezindedir. Öyle ki matematiğin bir ispatlama disiplini olduğu ve bunun diğer disiplinler arasındaki temel farkı gösterdiği de söylenir (Heinze & Reiss, 2003). Matematiğin tanımlar, aksiyomlar, önermeler, teoremler ve teoremlerin ispatlarından oluştuğu genel bir kanıdır.

İspat kavramı, matematik biliminin yanı sıra günlük hayatta matematikle pek de ilişiği olmayan mantık, dil bilim, hukuk, psikoloji, sosyoloji, edebiyat kuramı gibi bilim dallarında bir ifadenin doğruluğunu ve varlığını göstermek veya göstermeye yardımcı olmak değil; doğru, iyi veya geçerli olup olmadığını test etme sürecidir (Calude & Marcus, 2004). Ancak günlük hayatta 'beni ne ikna eder' (Smith & Henderson, 1959) ile eş anlamlı olarak düşünülen ispat matematikte, bir deneyimin sonucudur ve günlük hayattaki anlamından da bu bakımdan ayrılır (Martin & Harel, 1989: 42). 19. yüzyıldan itibaren de ispat, matematik disiplininin kendine özgü (ayırt edici) bir özelliği olarak görülür (Coe & Ruthven, 1994). Nitekim bu durum, ispat

kavramını matematik biliminin bel kemiği yapmakta ve ispatı matematik yapmada vazgeçilmez bir kavram hâline getirmektedir.

Matematik bilimiyle uğraşan her bireyin süreç içerisinde matematiksel düşünme yetisine az veya çok sahip olması beklenir. Basit seviyede matematiksel düşünmeden ileri seviyeye geçilmesi de önemli bir değişim sürecini gerekli kılar. Bu değişim, "açıklamadan tanımlamaya, mantıksal bir biçimde bu tanımların temelinde yer alan iknadan ispat etmeye giden bir yoldur" (Tall, 1991: 20). Ayrıca Ernest (1991) matematiksel ispatın "matematiksel bilgi için gerekçe sağlamasının yanı sıra matematik yapmak ve matematiği anlamak için de önemli bir etkinlik" (İskenderoğlu, 2010: 3) olduğunu söyler.

İspat yapabilme edimine gelişim dönemleri açısından bakıldığında, matematiksel kavram ve sayısal yeteneklerin dünyaya geldikten sonra büyük oranda ilk 4-5 ay içerisinde oluşmaya başladığı göz önünde bulundurulmalıdır (McCrink & Wynn, 2004; Brown et all, 2008). Öyle ki, ispatın temelinde muhakeme etme, olaylar arasında ilişki kurma gibi beceriler olup bu beceriler de okul öncesi dönemde gelişmeye başlamaktadır. Soyut kavramların algılanabildiği seviye olan ilköğretimin 6., 7., 8. ve lisede ise ergenlerin, analiz etme, karşılaştırma, soyut ilişkileri bulma, özgün bir şey üretme, eleştirel düşünme gibi özelliklerini geliştirici nitelikte etkinliklere yer verilmesi gerekmektedir (Senemoğlu, 2009: 50). Matematiğin aşamalı ve birikimli olarak ilerlediği düşünüldüğünde de konuya veya kavrama dair edinilecek bir becerinin sonraki öğretim kademesinde önemli bir yeri olacağı, sonraki öğrenim yaşamını olumlu veya olumsuz şekilde etkileyeceği elbette ki unutulmamalıdır.

Matematik eğitimi alanında ispatın ve akıl yürütme becerisinin kazandırılmasının çok önemli olduğu görülmektedir (Hanna, 2000; NCTM, 2000; Knuth, 2002; Özer ve Arıkan, 2002). Alakoç (2003), matematiğin yapısına uygun bir öğretimin, öğrencilerin matematikle ilgili kavramları ve işlemleri anlamalarına; bu kavramlar ve işlevler arasındaki bağları kurmalarına yardımcı olmak amacına yönelik olması gerektiğini söylemektedir. İspat, tam da bu amaçlara ulaşma

aşamasında büyük rol oynar. İspat, edinilmesi gereken bir beceri olmasıyla birlikte hem bir 'amaç', hem de ulaşılması gereken bir sonuca yardımcı olan bir 'araç' olma sebebiyle, kavramlar ve işlevler arasında bir bağ kurma aşamasında büyük rol üstlenmektedir. Öyle ki ispat, matematikten ayrı tutulacak bir şey değil, müfredatın ayrılmaz bir parçasıdır (Schoenfeld, 1994: 76). İspatın sınıftaki rolü bir sonucun doğruluğunu göstermesi (Knuth, 2002) ve matematiksel anlamayı geliştirmesidir (Hanna, 2000).

Thomas Tucker (1999) ispatın sağladıklarını şu şekilde belirtmiştir:

- İspatlar, öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasını ve sonuçlara inanmasını sağlar.
- Genel matematik dersinde ispatın görülmesi ilerideki matematik dersleri için faydalı olacaktır.
- Matematikçilerin yaptıkları ispatları öğrenciler görebilir (anlayabilir).
- İspatlar, bir karakter (matematiksel düşünme alt yapısı) oluşturur.

İspatın hem matematik hem de matematik eğitimi için oldukça önemli ve merkezi bir işleve sahip olduğu hususunda genel bir kabul mevcut iken ispatın ne olduğu ya da ne olmadığı noktasında aynı şeyi söylemek güçtür. O halde bu noktada cevaplanması gereken en temel soru "ispat nedir?" dir.

Bu soruya yanıt ararken bakış açısının geniş tutulması gerekmektedir. Bu nedenle izleyen kısımlarda kimi alt başlılar çerçevesinde söz konusu temel soruya yönelik cevaplar bulunmaya çalışılacaktır.

Matematik Felsefesi Bağlamında İspat

İspatın yapısı (doğası), matematikçiler, filozoflar ve tarihçiler arasında yüzlerce yıldır tartışmaya konu olmuştur (Raman, 2003). Daha geniş anlamda incelenecek olunursa aslında matematik disiplini kendi yapısı itibariyle matematik filozoflarınca üç temel yaklaşım (Platonist yaklaşım, Mantıkçılar (Temelciler), Formalistler (Biçimciler)) çerçevesinde incelenmiş ve dolayısıyla matematiğin temelini oluşturan ispata yüklenen anlamlar da bu çerçevede değişkenlik göstermiştir. Platonist yaklaşımda, matematiksel nesnelerin, soyut varlıklar (Lee,

2002) ve bunların insan aktivitesinden bağımsız ve hiç birinin doğada değiştirilemez olduğu (Popper, 1950'den akt. Lee, 2002) söylenmektedir. Platonist yaklaşımı aşağıda verilen 6 önemli nokta temsil eder;

- Matematiksel nesneler gerçektir ve bizden bağımsız oluşurlar
- Matematiksel nesneler zaman ve mekândan bağımsız şekilde oluşurlar
- Matematiksel şeyler soyuttur
- Matematiksel nesneleri sezeriz ve matematiksel doğruları kavrarız
- Matematik olasıdır (muhtemel) ancak deneysel değildir
- Matematik olası olmasına karşın yeteri kadar kesin değildir (Brown, 1999'den akt. Kwak, 2005).

Bu yaklaşımı benimseyen kişilerce ispat, aksiyom ve postulatlardan, mükemmel kesin açıklamalardan (tanımlardan) ve daha önce ispatlanan teoremlerden geçerli çıkarımlar yapılarak yeni bir teorem türetmedir (Lee, 2002). Mantıkçı yaklaşımı benimseyenler (örn. Frege ve Nagel) ise tümdengelimsel düşünceyi reddetmiş, matematiksel ispatın tümevarımsal olduğunu söylemişlerdir. Tümevarımsal akıl yürütme ise, "doğruluğun kanıtlanabildiği ya da diğerlerinin ikna edildiği tam bir ispat olarak düşünülemediğinden bu bağlılığın devam etmesi matematiği ileriye taşıyamamıştır" (Almeida, 2003'den akt. Keçeli-Bozdağ, 2012: 2). Mantıkçı bakış açısına sahip Whitehead & Russell da klasik Aristo mantığını reddetmiş ve yeni bir sembolik mantık oluşturmuşlardır (Lee, 2002). Sembolik mantıkta ispat, geçerli kanıtlamalar yaparak akıl yürütmenin (reasoning) yansıtıldığı bir süreçtir (Lee, 2002). Formalist bakış açısına sahip Curry, Bourbaki gibi matematikçiler de sadece aksiyomatik sisteme dayalı biçimsel ispatlarla ilgilenmişlerdir (Lee, 2002). Anlamdan çok ispat metni içindeki işaret, sembol, kelimelere dikkat çekmişlerdir.

Matematik Tarihi Bağlamında İspat

Bugünkü matematiksel ispat geleneği, Eski Yunan matematiğine dayanmaktadır. Eski Yunan matematikçisi Euclid'in MÖ. 4. yüzyılda yazdığı 13 ciltlik '*The Elements*' adlı kitabı, matematiksel ispatın temelini oluşturur. Eski Yunan matematiğinde matematiksel ispat, bir sonucu doğrulamakta ve keşfetmekte,

iletişim kurmakta, diğerlerini ikna etmede ve sonuçları çıkarımsal bir düzende sistematikleştirmede kullanılırdı (Almeida, 2003). Autolycus'un *'On the Moving Sphere'* adlı kitabında ki bu kitabın aksiyomatik tümdengelimli düşünce şeklini kullanan en eski kitap olduğu söylenir (Wikipedia, 2013), sadece Pisagor teoremi bile aksiyomatik olarak yaklaşık 80 sayfada ispatlanmıştır (Reiz, 1981'den akt. Gray, 2006). Aksiyomatik sisteme geçişi gerekli kılan bir takım faktörler (Kleiner, 1991) vardır ve bunlar; matematiksel (eski medeniyetler tarafından bulunan çelişkili sayısal sonuçlar), sosyal (Yunan demokrasisinin tümdengelimsel akıl yürütmeyi destekleyecek tartışma ortamını kurması), felsefik (Yunan felsefesinin önceki varsayımlar ve mantıksal çıkarımların formüllerini sorgulaması) ve pedagojik (bir mantık çerçevesinde matematiğin yapısını Yunan halkına anlatma ihtiyacı) şeklindey sıralanmaktadır (Harel & Sowder, 1998).

MS. 11. yüzyılda yaşamış olan Ömer Hayyam ise geometrik ispata dayalı matematik ile aritmetiği tek bir çatı altında birleştirecek bir çalışma yapmış ve aslında geometrik formüllerin sayılar teorisiyle ispat edilebileceğini ve aynı şekilde bunun tersinin de mümkün olabileceğini göstermiştir (Göker, 1997'den akt. MEB, 2012). 18. yüzyılda Gauss ispatlamadaki ifadeleri inandırıcı bir şekilde kullanmış, 19. yüzyılın sonlarına gelindiğinde ise Abel, Bolzano, Cauchy, Lagrange ve Weierstrass gibi önde gelen matematikçiler tarafından eleştirel düşünceyle matematikteki tümdengelimsel gelenek sunulmuştur (Almeida, 2003). 20. yüzyılın başlarında Alman matematikçi David Hilbert'in -son olarak- şekillendirdiği formalist bakış açısında ise ispat, formal aksiyomatik sistem terimlerini içinde barındırmaktadır (Dossey, 1992).

Matematik Eğitimcilerinin İspata Yaklaşımları

Matematiğin yapısıyla ilgilenen araştırmacılar ispatlarla çalışmanın, iletişimin ve onları meydana getirmenin birçok yolunu ifade etmekteyken, Hemmi (2010) bunları "İspata yaklaşım" olarak adlandırmakta ve bunları üç grupta incelemektedir. Bunlar;

- Tümevarım / Tümdengelim (*Induction / Deduction*)
- Sezgisel / Formalist (*Intuition / Formality*)
- Görünmezlik / Görünürlük (*Invisibility / Visibility*)

Hemmi (2010), bunlar arasındaki girişik ilişkiyi kısaca şu şekilde özetlemektedir.

Tümevarım / Tümdengelim (*Induction / Deduction*) yaklaşımları, matematik etkinliklerinde öğrencilere matematikçiler tarafından sunulan, 1970'lerden itibaren matematikçiler ve matematik eğitimcileri arasında sezgisel yaklaşıma karşı tümdengelimsel aksiyomatik sistemin avantaj ve dezavantajlarının tartışıla geldiği ispat yapmaya yönelik iki farklı bakış açısıdır (Hemmi, 2010). Tümevarım, örneklerden yola çıkarak bütüne ulaşmayı veya varsayımın kümenin tüm elemanları için doğru olduğunun ortaya konmasını; tümdengelim ise aksiyom veya teoremleri adım adım ilerleyerek ispatlamayı gerektirir.

Sezgisel / Formalist (*Intuition / Formality*) yaklaşımlara bakıldığında, her ikisinin de dilin ve sembollerin kullanılması ile ilgili meseleler olduğu söylenir (Hemmi, 2010). Mantıksal akıl yürütmenin formal yapısının geliştirilmesiyle birlikte yeterli sezgisel anlamlandırmalar bir dereceye kadar mümkün olup kabul edilebilirdir (Fischbein, 1987'den akt. Hemmi, 2010).

Raman (2003), sezgisel düşünce (*heuristic idea*), işlemsel düşünce (*procedural idea*) ve anahtar düşünce (*key idea*) olarak ispat yapmada kullanılan 3 farklı düşünce tipini sınıflamış, sezgisel düşünceyi de bu düşünce tiplerinin en alt ve basit olanı olarak değerlendirmiştir. Sezgisel düşünce informal anlamalara dayalı olup, deneysel veriler içeren ya da doğrudan bir formal ispat olarak yetersiz olan, fakat anlamlı bir resim ile temsil etme durumu olarak değerlendirilebilir (Raman, 2003). Sezgisel düşünce 'bir anlam ifade edebilir ancak ikna etmez' (Raman, 2003: 322). İşlemsel düşünce, informal anlamlarla formal ispat arasında bağlantı kurulmadan yapılıp formal gösterimler doğuran mantıksal kullanımlardır. Bu

düşüncede ikna vardır ancak anlam yoktur. Sezgisel düşüncenin tersi olarak kabul edilebilir. Anahtar düşünce ise, sezgisel düşünce ile işlemsel düşünce arasında bağ niteliğinde olup, yani uygun sezgilerle formal ispatlar oluşturulabilen düşünce şeklidir (Raman, 2003).

Hemmi (2010), üçüncü olarak 'Görünürlük / Görünmezlik (*Invisibility / Visibility*)' olarak isimlendirdiği ispata yaklaşım şeklini, matematik öğretiminde ispata bakış açıları ve ispatın fonksiyonlarına nasıl ve ne kadar odaklanıldığıyla ilgili bir mesele olduğunu söyler. Görünürlük, "İspatın mantıksal yapısı nedir? Matematik biliminde ispatın tarihsel rolü ve fonksiyonları nedir? İspatlar oluşturulmaya başlandığında nasıldı? Çeşitli ispatlar nasıl tanımlanmakta ve farklılaşmaktadır? Matematikte ispatın anlamı nedir? Özel bir ispatta ana bileşenlerin olduğu bir ispatın nasıl oluşturulduğu?" gibi soruların cevapları aranarak ispatın önemini aydınlatmaya yönelik farklı yolların bulunacağını ifade eder. Görünmezlik ise matematiğin özel ispat tekniklerine benzer çeşitli ispat bakış açılarına odaklanılmadan öğretilmesi ve sunulması olarak tanımlanır.

Bahsedilen bakış açılarından farklı olarak ispatı sosyal bir süreç olarak değerlendiren araştırmacılar da vardır (Hanna, 2000; Siu, 2008). Sosyal süreçten anlaşılması gereken şey, ispatı yapılan matematiksel durumun başkalarına ifade edilmesi, açıklanması ve iletilmesi konusudur. Buradan anlaşılıyor ki matematiksel ispatın bir öğesi de iletişimdir (İskenderoğlu, 2010). Öyle ki Lakatos (1976) da matematiği üretmeyi, test etmeyi, aksini ispat etmeyi, geliştirmeyi ve varsayımları ispat etmeyi bünyesinde bulunduran sosyal bir faaliyet olarak görmektedir (Dickerson, 2008). Hemmi (2010) ise ispatın açıklamalarla ve formüllerin türetilmesiyle görünür olduğunu söyler. Bell (1976) matematiksel ispatı, doğru olabilecek sonuca kişisel iknayı gerektiren sosyal bir diyalektik olarak tanımlar (Almeida, 1995). Tall (1989) ispat aşamalarını başta kişinin kendisini ikna etmesi, sonra arkadaşını ikna etmesi ve en son da bir topluluğu (matematik camiası) ikna etmesi olarak görür (De Villiers, 1999). Bu aşamalar Mason'un (1985) bir ispatın nasıl oluşturulacağına dair pedagojik önerisiyle benzerlik göstermektedir (Raman, 2003). Bu öneri Mason, Burton & Stacey'in (1982) '*Thinking Mathematically*' adlı

kitabında doğrulama sürecinin üç düzeyi olarak; kendini ikna, bir arkadaşını ikna, bir düşmanını ikna etmek şeklinde yer almaktadır (Tall, 1991).

İspat, öne sürülen iddiaların bir birleşimi veya aşağıdaki karakteristik özellikleri taşıyan bir matematiksel iddiaya karşı öne sürülen matematiksel bir argümandır;

1. Sınıf içi iletişim (kabul edilebilir durumlarda) aracılığıyla bir doğrunun ve daha ileri doğrulamalar olmaksızın kabul edilen durumlar;
2. Geçerli ve bilinen veya kavramsal olarak sınıf içi iletişime dayalı akıl yürütme durumlarını (kanıtlama biçimleri) işe koşmak ve
3. Anlatım-dil formları (argüman temsillerinin biçimleri) ile sınıf içi kavramsal iletişim sürecidir (Stylianides, 2007: 291).

Baki (2006) ise matematiksel ispatların doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç aşamada tamamlandığından bahseder. Birinci aşamada iddianın doğruluğu araştırılır (doğrulama), ikinci aşamada iddianın niçin doğru olduğunun açıklanması (açıklama) son olarak da genelleme koşulları kontrol edilerek matematiksel dil kullanarak soyutlamaktır (soyutlama).

İspatın Rolleri / Fonksiyonları

İspatın sosyal bir süreç olarak düşünülmesiyle beraber ispata yüklenen bir takım roller ve fonksiyonlar vardır (Bell, 1976; de Villiers, 1999; Hanna, 2000). Bu roller ve fonksiyonlar gerek matematik gerekse matematik öğretiminde farklı araştırmacılar tarafından sınıflandırılmıştır. Genellikle ispatın rolü olarak matematiksel ifadeleri doğrulamak olduğu fikri yaygın olduğu söylense de (De Villiers, 1999; Knuth, 2002a) matematikçiler, ispatın doğrulamaktan (verification) daha fazlası olduğunu düşünür (Hanna, 2000). De Villiers, Bell'in (1976)

- Doğrulama (verification)
- Açıklama (illumination)
- Sistematikleştirme (systematize)

olarak sınıflandırdığı fonksiyonları genişleterek ispatın işlevlerine yönelik bir kapsam oluşturmuştur. Bunlar;

- Doğrulama/ ikna (bir durumu doğrulama)
- Açıklama (bir durumun niçin doğru olduğunu sağlama)
- Sistematikleştirme (ana kavramları, teoremleri ve aksiyomların yapısal bir sistemde çeşitli sonuçların organizasyonu)
- Keşfetme (yeni sonuçları keşfetme)
- İletişim (matematiksel bilginin aktarılması)
- Düşünsel sorgulama (ispatı oluşturan yapılardan faydalanmak) dır (de Villiers, 1999).

Son olarak Hemmi (2010: 273) de çeşitli çalışmaları (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna, 2000; Hemmi & Löfwall, 2009) temel alarak ispatın fonksiyonlarını aşağıdaki gibi derlemiştir;

- Doğrulama / ikna (bir durumun doğruluğuyla ilgili olma)
- Açıklama (bir durumun niçin doğru olduğunu anlamayı sağlamak)
- Sistematikleştirme (aksiyom, temel kavram ve teoremlerin çıkarımsal bir sistemin içinde çeşitli sonuçları organize etme)
- İletişim (matematiksel bilginin anlaşılmasında ve aktarılmasında anlaşmaya varılması)
- Estetik
- Zihinsel sorgulama
- Transfer etme (ispatlar, bir takım problemlerle uğraşmak için teknikler veya asıl içerikten farklı şeyleri anlamayı sağlayabilir)

Bu fonksiyonlardan 'ikna' (conviction) fonksiyonu, özellikle matematik eğitimi araştırmalarının odak noktasında bulunup, 'açıklama' fonksiyonu da nispeten daha fazla yer almasıyla daha önemli görülmektedir (Örn. De Villiers, 1990; Hanna, 2000; Hersh, 1993'den akt. Hemmi, 2010). Hemmi (2010), ispatın fonksiyonlarının çeşitli ispat yöntemlerindeki model ve yaklaşımlarla örtüştüğünü söyler. Örneğin, bazı durumlarda tümevarım yönteminde 'açıklama' fonksiyonu kullanılması gerekirken, bazı durumlarda da tümdengelim yönteminde daha iyi bir açıklama gerekebilir. Dolayısıyla ispat yöntem/ yaklaşımlarıyla, ispatın fonksiyonları girişik bir şekilde birbirlerini desteklemektedir.

Gerçek matematik araştırmalarında kişisel ikna, genellikle sezgi, yarı-deneysel doğrulama ve mantıksal (illa kesin doğru olması gerekmez) bir ispatın birleşmesinden oluşur (De Villiers, 2007: 256).

İspatın rol ve fonksiyonları, bilim olarak matematikte veya öğretimsel olarak sınıf içi çalışmalarda 'amaç' ve 'araç' olarak da görülmektedir. Matematikteki ispat, bir iddianın doğruluğunu kesin olarak gösteren bir ispat olarak iddia ve herhangi bir çıkarımsal tartışmanın doğruluğunu oluşturmayı amaçlamaktadır (Dickerson, 2008). Matematik öğretiminde ise bunun yanında bireylerin zihinlerinde oluşan kavram imajlarını somutlaştırmak, öğretimi kolaylaştırmak ve kalıcılığı arttırmak amacıyla ispat bir araç olarak düşünülebilir.

İspat Şemaları / Yaklaşımları Çerçevesinde İspata Bakış

İspat yaklaşımları olduğu gibi bu yaklaşımlar çerçevesinde yapılan ispatlama ve doğrulamalar da yapılış şekli veya düzeyi nispetinde kimi araştırmacılar (Örn. Balacheff, 1988; Martin & Harel, 1989; Harel & Sowder, 1998; Simon & Blume, 1996; Martin et all, 2005) tarafından değerlendirmeye tabi tutulmuş, bizzat yaptıkları çalışmalar doğrultusunda ispatlama şekli, yapısı veya düzeyi belirli isimlendirmeler altında incelenmiştir. Bu isimler genel itibariyle "ispat şeması/ ispat deseni" (proof scheme/ proof frame) olarak literatürde yer almaktadır.

Harel & Sowder (2007) ispata bakışı kapsamlı ve geniş bir çerçevede incelemiş, bunları matematiksel, tarihsel-epistemolojik, kavramsal, sosyolojik ve eğitsel olmak üzere sınıflamıştır. Bu bakış açılarıyla ispat şemalarını belirli sorulara verilen cevaplar nispetinde oluşturmuşlardır (Harel & Sowder, 1998). Temel sorular ise şu şekildedir;

Matematiksel ve tarihsel-epistemolojik etkenler:

1. İspat nedir ve fonksiyonları nelerdir?
2. İspatlar nasıl oluşturulur, onaylanır ve matematik camiasına kabul ettirilir?

3. Matematik tarihinde ispatın gelişimi hangi aşamalardan geçerek oluşmuştur?

Kavramsal etkenler:

1. Öğrencilerin ispat algıları nedir?
2. Öğrencilerin ispat yapmada zorlukları nelerdir?
3. Bu zorlukların sebepleri nelerdir?

Eğitsel ve sosyo-kültürel etkenler:

1. İspat niçin öğretilir?
2. İspat nasıl düşünülmeli?
3. Sınıf içi aktivitelerde ispat nasıl yapılır, doğrulanır ve kabul ettirilir?
4. Bireysel olarak ve öğrenenlerin olduğu sınıfta öğrenciler üzerinde ispatın gelişim süreci nasıldır?
5. Öğrencilerin ispat algılarının gelişiminde sınıf ortamının etkisi nedir?
6. Öğrenciler arasında ve öğrencilerle öğretmen arasındaki iletişimin ispat algısını oluşturmaya etkisi nedir?
7. Teknoloji kullanımının mümkün olduğu matematik etkinlikleri öğrencilerin ispat algılarını etkileyebilir mi?

Balacheff (1988) ise ispat yapmayı 4 aşamada incelemiştir. Bunlar;

- *Saf deneyselcilik* (Naïve empricism): İspatın küçük sayılara dayalı gösterilmesi.
- *Kritik deneme* (Crucial experiment): Çok özel olmayan bir durumun açıklayarak gösterilmesi.
- *Genel örnek* (Generic Example): Sınıf amaçlarının/ konularının özel bir durum belirtmesi ile oluşan bir iddianın bir örneğinin alınıp kullanılmasıdır.
- *Düşünsel deneme* (Thought Experiment): Özel bir durumdan yola çıkarak kavramsal ispata bunun taşınarak gösterilmesi. Düşünsel denemenin sözlü (Thought experiment-Verbal) ve sembolik (Thought experiment-symbolic) olarak iki çeşidi vardır (Varghese, 2007; Lo, Grant & Flowers, 2004).

Balacheff, matematiksel ispatın bu 4 seviyesini *"pragmatik"* (saf deneyselcilik- kritik deneme- genel örnek) ve *"kavramsal"* (düşünsel deneme) doğrulama olarak iki ana gruba ayırmıştır (Varghese, 2009). *Pragmatik* doğrulamalar

örnekler, işlemler ve gösterimlere dayalı, *kavramsal* doğrulamalar ise özelliklerin formülleri ve özellikler arasında ilişkilere dayalıdır (Varghese, 2007).

Ayrıca matematiksel ispatı formal ispat olarak değerlendiren Balacheff (1988, 1999) ispatı, pragmatik ispat, entelektüel ispat ve demonstrasyon olmak üzere üç seviyede incelemiştir.

- En alt seviye '*pragmatik ispatlar*', örnek vererek yapılan gösterimlerdir ve bu tipteki ispatlar saf deneyselcilik ve kritik denemeyi içinde barındırır.
- Orta seviye '*entelektüel ispat*', kavramlar ve dille alakalıdır, ancak kesinlikle formal olmayıp somutlaştırarak yapılan ispatlardır. Genel örnek ve düşünsel deneme bu tipteki ispat seviyesine girer.
- En ileri seviye ise '*demonstrasyon*', bir diğer ismiyle görsel ispatlardır. Bunun en ileri seviye olarak değerlendirilmesinin sebebi ise genel örnekle düşünsel denemenin birlikte sunulmasıdır (Knipping, 2003).

Simon & Blume (1996) ise doğrulama düzeylerini 5 aşamada derecelendirmiştir.

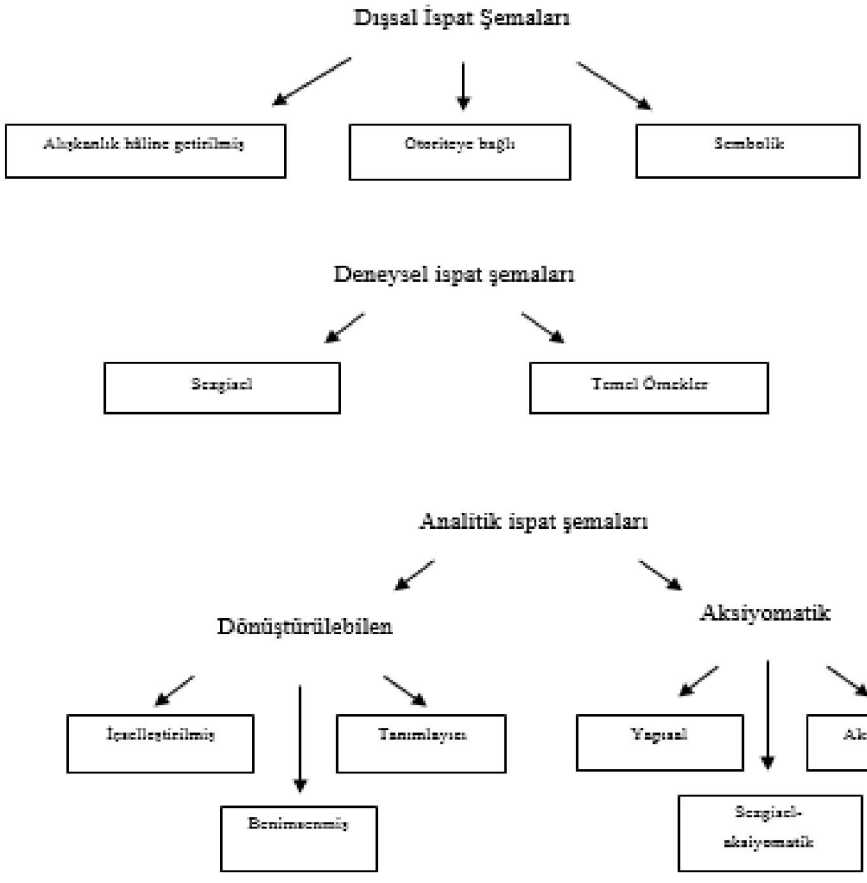
Düzey 0: Savunma yerine motivasyon içeren yanıtlar,
Düzey 1: Dışsal otoriteye başvuru,
Düzey 2: Deneysel gösteri,
Düzey 3: Genel örneklerle savunulan tümdengelim,
Düzey 4: Özel örneklerle savunulan tümdengelim (İskenderoğlu, 2010).

Martin & Harel (1989) yaptıkları çalışmada 101 ilkokul öğretmen adayının ispatlama örneklerini incelemiş ve ispat şemalarını oluşturmuşlardır. Üç haftalık bir araştırma sürecinde, öncesinde tartışılarak konuşulan doğrulamalar 'tanıdık' (*familiar)*, öncesinde bahsi geçmeyen doğrulamalara da 'tanıdık olmayan' (*unfamiliar*) şeklinde sınıflandırılarak öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Bu genellemeler aşağıdaki şekilde örneklenmiştir;

- Tanıdık genellemeler: Bir sayının 3'e bölünebilmesi için o sayının sayı değerleri toplamının 3'e bölünmesi gerekir.
- Tanıdık olmayan genellemeler: a, b'ye ve b, c'ye bölünüyorsa, a da c'ye bölünür.

İspatlar, bu genellemeler altında 4 doğrulama şekli olarak incelenmiştir. Bunlar ise; örnekleme (*example*), biçimsel bir düzen kullanarak (*pattern*), büyük sayılar kullanarak (*big number*), örnek olan ve olmayan (*example and nonexample*) şeklindedir.

Şekil 1
İspat Şemaları



Harel sonrasında Sowder ile 1998'de yaptığı bir takım çalışmalar sonucunda lise öğrencilerinin ispatlama süreçlerindeki eylemlerinden elde ettikleri veriler

ışığında yukarıdaki çalışmalara ek olarak farklı 3 ana şema ve alt şemalar oluşturmuştur (Bkz. Şekil 1).

İspat şemalarındaki bu sınıflamalar, "öğrencilerin ispat kavramının doğasını keşfetmekte ve öğretmenlerin eylemlerinin, öğrencilerin kavramlarına etkisini analiz etmekte kullanılmaktadır" (Martin et all, 2005; İskenderoğlu, 2010: s. 24'ten alıntı).

Buraya kadar değinilen başlıklara ve açıklamalara bakılacak olunursa, ispatın '*ne*' olduğu konusunda genel bir uzlaşmanın olmadığı görülmektedir. Zira, matematiksel ispatın geçerliliği için dünyaca kabul edilebilir bir kriter de yoktur (Hanna, 1995: 44). İspatın herkes tarafından kabul edilebilir bir formunun olmaması veya biçimsel farklılıklardan dolayı kimilerince kabul edilmeyen ispat türlerinin olması, yani doğruluğundan emin olunup da belli kalıplarda (formda) yazılmayan doğrulamaların bazılarınca ispat kabul edilmemesi, ispat sınıflamalarındaki farklılıklar ve benzeri konular genel uzlaşının önündeki kimi engelleri oluşturmaktadır. Her en kadar ispata yönelik (en) genel bir tanım ya da biçimsel forma ulaşılmış değilse de bu durum ispatı muğlak ya da daha az öneme sahip bir noktaya da taşımamaktadır. Aksine ispatı hem matematik hem de matematik eğitiminin odağı haline getirmektedir.

Konuya matematik eğitimi kapsamında yaklaşan bu tez çalışmasında da ele alınan araştırma sorusu ispatın ne olduğudur (beraberinde ne olmadığı)? Biz bu soruya Fen Fakülte Matematik Bölümü öğrencilerinin penceresinden yanıt aramaya çalıştık ve matematik bölümünde öğrenim gören öğrencilerin ispat algılarını belirmeyi amaçladık. Bu amacı taşımamızın temel nedeni matematik bölümü öğrencilerinin (öğrenim süreci boyunca) hem matematikçi hem de (öğrenim süreci sonunda önemli bir kısmının öğretmen olarak atanması nedeniyle) öğretmen adayı vasıflarını taşımasıdır. Bu vasıflar matematik bölümü öğrencilerinin ispata yönelik algılarını etkilemekte midir? Öğrenim süreçleri boyunca aldıkları pek çok teorik matematik dersi ve yaptıkları yüzlerce ispat uygulaması şüphesiz onların ispata bakışına yön vermektedir. Taşıdıkları vasıflarla birlikte matematik bölümü öğrencilerin ülkemiz liselerinde matematik öğretmeni olarak görev yapacak olmaları,

onların lise öğrencilerin ispat algılarını, ispatları anlama, yapma ve değerlendirme süreçlerine doğrudan etkileri olacağını göstermektedir. Dolayısıyla ülkemizdeki ve uluslararası alandaki matematik öğretim programları ve öğretim standartlarındaki ispat öğretimine yönelik hedeflere ve kazanımlara ulaşmada eğitim fakültesi matematik öğretmenliği öğrencilerinin yanında fen fakültesi öğrencilerinin de görevleri ve sorumlulukları bulunmaktadır. Buradan hareketle matematik bölümü öğrencilerinin ispata yönelik algı, inanç, tutum ve becerilerinin araştırılması gerektiği açıktır. Bir işe en başından başlama amacını taşıyarak onların ispat kavramına yönelik algılarını belirlemeyi amaçladık. Yapılacak diğer çalışmalar ile sıralanan konularda kapsamlı bir bilgi alanı oluşturulabilecektir. Araştırmanın problem durumuna geçmeden önce ülkemiz ve bazı uluslararası kuruluşlarca eğitime yönelik araştırma alanı ve öğretim programları açısından ispatın nasıl ele alındığına bakmak yararlı olacaktır.

Özellikle son 20 yıl içerisinde matematik eğitimi alanında ispatın öneminin hızla arttığı görülmüştür (Weber, 2010). Uluslararası alanda düzenlenen ispat ve ispatlamayı temel araştırma konularından biri olarak kabul eden bilimsel konferans, çalıştay ve sempozyumların (Örn. ICME10-2004, ICME11-2008, CERME6-2009, CERME7-2011, CERME8-2013) sayısında ve sunulan bildirilen oranında ciddi bir artışın olması bunun bir göstergesidir.

İspat ve akıl yürütme becerisinin öğretim ortamlarında ve sınıf içi önemine bakılacak olunursa, gerek ulusal gerek uluslararası matematik ve geometri öğretim programlarında konuya ilişkin vurgu yapıldığı görülmektedir. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000 yılında yayınladığı prensip ve standartlarda anaokulundan, K-12 (ortaöğretim) grubundaki öğrencilere kadar her basamakta akıl yürütme ve ispatlama becerisinin kazandırılmasına yönelik bir öğretim anlayışının benimsenmesi gerektiğini belirtmektedir. "Akıl yürütme ve İspat" (Reasoning and Proof) başlığı altında öğrencilerin edinmesi gereken beceriler şu şekilde sıralanmıştır;

- Akıl yürütme ve ispatı matematiğin temel yönü olduğunu fark etmek

- Matematiksel tahmin yapmak ve keşfetmek
- Matematiksel ispatları geliştirmek ve değerlendirmek
- Çeşitli akıl yürütme tiplerini ve ispat çeşitlerini seçmek ve kullanmak

Örnek verilecek olunursa K-2 grubu (ilkokul 2. sınıf) öğrencileri için akıl yürütme becerisinin, 'öğrenciler sistemli ve dikkatli şekilde tahmin yapmaya cesaretlendirildiği ve düşüncelerini ispatlamada (veya yanlışlamada) delil bulmaya zaman ayrıldığı takdirde' (NCTM, 2000: 122) onları geliştiği yönünde açıklama yapılmaktadır. Yine aynı kademede öğrencilerin 'gerekçeler bularak oluşturdukları düşünme sistemleri, ileride formal ispat yapma yeteneği için çok önemli' (NCTM, 2000: 123) olduğu da söylenir. Nitekim NCTM, ispatı anaokulundan 12. sınıfa kadar bir tür düşünme aktivitesi olarak kabul ettiği için bunu uzun bir sürece yayarak birikimli olarak bir beceri elde etme gayretinde olunmasını önermektedir. Ortaöğretim sonunda ise öğrencinin kendi hipotezlerini kurabilen ve ispatlar yapabilen biri olarak mezun olması öngörülmektedir.

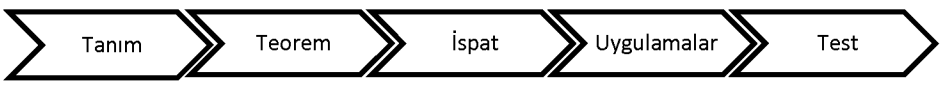
Ulusal programlara bakıldığında, 2009 yılında hazırlanan 1-5. sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programında öğrenciye kazandırılması gereken 4 temel beceri belirlenmiş olup bunlar; problem çözme, iletişim, akıl yürütme ve ilişkilendirmedir. Bu becerilerle ispat kavramı öğrenci zihninde bu dönemde oluşmaya başlar. 6-8. sınıf programları sayılar, geometri, ölçme, olasılık ve istatistik, cebir olmak üzere 5 öğrenme alanı olarak düzenlenmiştir. 1-5 ve 6-8 Matematik Dersi Öğretim Programlarında hiçbir yerde 'ispat' kelimesi geçmemektedir. Ancak ispat kavramını oluşturmaya yönelik tümdengelim, soyutlama, geometrik gösterim (sözsüz ispat), mantıksal çıkarım, akıl yürütme, muhakeme etme, ilişkilendirme vs. gibi kavramlarla öğretim yapılmasıyla ispat yapabilme zemini oluşturulmaya çalışılmaktadır. Bu kavramları içeren çeşitli örnekler mevcuttur (MEB, 2009: 15, 68, 237, 260, 283, 325, 348). Ancak bu programlar, 5+3+4 yıllık olan eğitim sistemimizin 4+4+4 olarak değişmesiyle birlikte 2013 yılında tekrar yeni bir program yayınlanmasıyla değişmiştir. 5-8 Matematik Dersi Öğretim Programında öğrenciye kazandırılması gereken 5 farklı beceriden biri, iletişim, akıl yürütme ve ilişkilendirme alt becerilerini içeren matematiksel süreç becerileridir. Ancak

programda bunların nasıl gerçekleştirileceğine dair örnek uygulamalar şu an için mevcut değildir.

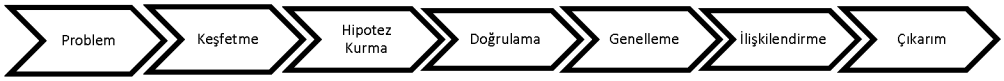
2005 yılında tamamen yenilenen ve 2011 yılında da tekrar gözden geçirilen Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programını (OMDÖP) incelediğimizde, 9. sınıf 'Mantık' öğrenme alanının 'ispat yöntemleri' alt öğrenme alanı içerisinde 'tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir' ve 'ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar' ifadeleri bu sınıfın başlıca kazanımlarıdır (MEB, 2011a: 76). Ancak bu programda, bütün konulara nüfuz edecek şekilde ispatın önem arz ettiğini söylemek güçtür. Ortaöğretim Geometri Dersi Öğretim Programında (OGDÖP) ise 'geometrinin, postulat, varsayım, teorem silsilesiyle yapılandığının farkına varabilecek' öğrenciler yetiştirmek amaç edinilmiştir (MEB, 2011b: 7). Bu durum, geometrinin zaten doğasında olan bir durum olduğu için ispat ve ispatlama bu programda daha merkezi ve çok önemli bir yere sahiptir.

OGDÖP'de (2011) ispatlama yöntemlerine ayrıntılı yer verilmiştir. İspat yöntemleri tümevarımsal ve tümdengelimsel akıl yürütme olarak ikiye ayrılır. Tümdengelim ispat ise doğrudan ve dolaylı olarak iki şekilde yapılıp, dolaylı ispatın olmayana ergi, çelişki bulma, deneme yöntemi, aksine örnek verme olarak 4 türü vardır.

2013 yılında ise geometri dersi matematiğin alt öğrenme alanı olarak belirlenerek genel amaçları içeren yeni bir Matematik Dersi Öğretim Programı yayınlanmıştır. Daha önce 2011 yılında yayınlanan öğretim programında da belirtilen, öğrenilen matematiğin anlamının vurgulanmadığı, öğrencilere anlam oluşturma fırsat ve olanaklarının sunulmadığı, matematiksel kavram ve ilişkilerin günlük hayatla ilişkilendirilmediği



yaklaşımından vazgeçildiği, öğrenciye matematiksel ilişkileri keşfetme, başka kavramlarla ilişkilendirme, modelleme ve problem çözme gibi üst düzey matematiksel beceri gerektiren fırsatları sunan



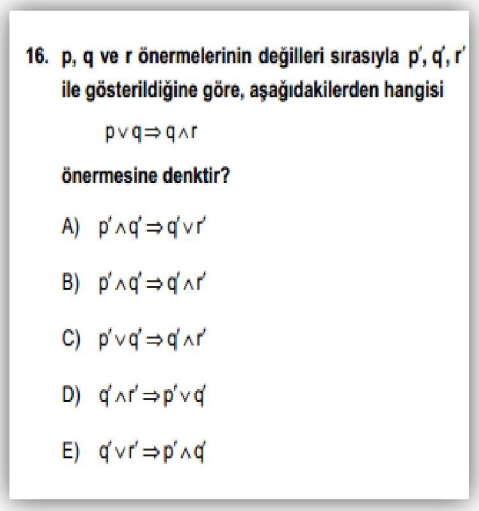
öğrenme döngüsünün benimsendiği tekrar bu programda da yinelenmiştir (MEB, 2013a).

Programın geliştirmeyi hedeflediği matematiksel beceri ve yeterlilikler arasında süreç becerileri olarak 'matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma' vardır. 'Matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimi etkin olarak kullanabilme ve matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme becerileri', geliştirilmesi planlanan temel becerilerdendir (MEB, 2013a: 8). 2013'te yenilenen matematik ders kitapları incelendiğinde, programda ispat yapmanın temel beceri olarak kabul edilmesinin aksine tüm konulara nüfuz edecek türden ispat yapabilme becerisini geliştirmeye yönelik örneklemelere rastlanmamaktadır. Aksine öncesinde eleştirilen ve yeni programda değiştirilen öğretim döngüsüne (tanım, teorem, ispat, uygulama) yönelik örneklerle de karşılaşılmaktadır (MEB, 2013a: 185, 186, 187). 'Tümevarım' yöntemi ise 11. sınıfta ayrı bir konu olarak işlenmiş, belli örneklerle tümevarım mantığı verilmiştir (MEB, 2013b: 173, 174, 175). Etkinlik temelli yazılan kitaplarda, etkinlik içerisinde ispatlarla karşılaşılmasa da akıl yürütme, çıkarım yapma gibi becerileri ön plana alan etkinliklere (MEB, 2013b: 182, 183) az da olsa yer verilmiştir.

Program özel bir öğretim yöntemi ve yaklaşımını benimsemediğini belirtmekte (sf. 14) olup önceki programda olan biçimsel olarak yenilik getiren, ispat öğretimini kolaylaştırmayı ve öğretimde kalıcılığı arttırmayı amaçlayan ispat biçimlerini (çift sütun, akış diyagramı, sözsüz ispat, vb.) içermemektedir. Ancak geometri kitaplarında önceki programda var olduğu gibi bu ispat türlerine yer verildiği (MEB, 2013c: 5, 6, 7, 8, 9) gözlenmektedir.

Bilindiği üzere ülkemizde lise öğrencileri yüksek öğretim programlarına, merkezi bir kurum olan Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi (ÖSYM) tarafından yapılan sınavlarla alınmaktadır. Bugüne dek ÖSS, ÖSYS, YGS ve LYS olarak adlandırılan merkezi sınavlarda 1999 yılından itibaren yapılan sınavlar incelendiğinde 2010 yılına dek ispat ve ispatlama kavramlarına yönelik tek bir soru sorulmadığı görülmüştür. Ancak 2010 ve 2011 yıllarında yapılan merkezi sınavlarda üniversiteye giriş sınavı iki basamaklı yapılmış ve ilk basamak olan YGS'de mantık ve önermeler mantığı konu başlığı altında birer tane soru (Şekil-2) sorulmuştur.

Şekil 2
İspata Yönelik Çıkmış YGS Soruları


16. p, q ve r önermelerinin değilleri sırasıyla p′, q′, r′ ile gösterildiğine göre, aşağıdakilerden hangisi

$p \vee q \Rightarrow q \wedge r$

önermesine denktir?

A) $p' \wedge q' \Rightarrow q' \vee r'$

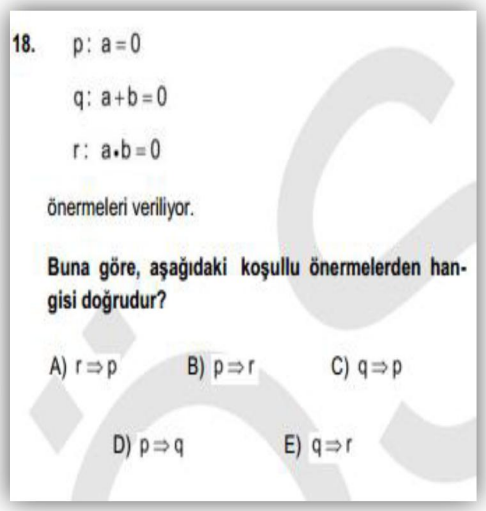
B) $p' \wedge q' \Rightarrow q' \wedge r'$

C) $p' \vee q' \Rightarrow q' \wedge r'$

D) $q' \wedge r' \Rightarrow p' \vee q'$

E) $q' \vee r' \Rightarrow p' \wedge q'$

(2010, YGS)


18. p: a = 0

q: a + b = 0

r: a · b = 0

önermeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki koşullu önermelerden hangisi doğrudur?

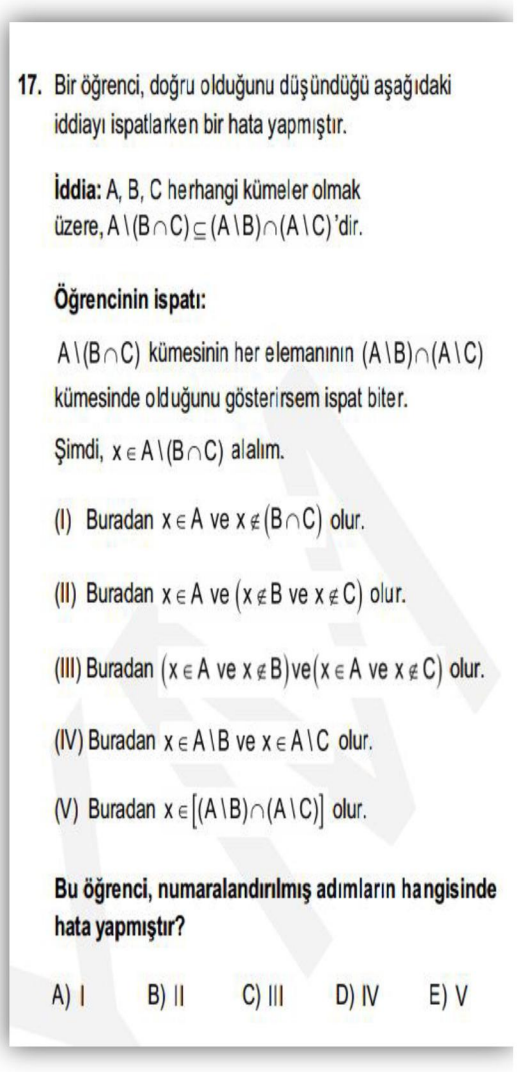
A) $r \Rightarrow p$ B) $p \Rightarrow r$ C) $q \Rightarrow p$

D) $p \Rightarrow q$ E) $q \Rightarrow r$

(2011, YGS)

2012'de yapılan ikinci basamak olan LYS-1'de yöneltilen soruda ise bir öğrencinin yaptığı ispatta yapılan hatanın bulunması istenmiştir. 2013'te yapılan YGS ve LYS' de ispata yönelik bir soru bulunmamaktadır. 2014 yılında bu düzeyde yapılan sınavlarda bulunan soruların %20'si kamuoyuna yayınlanması kararı alınmıştır. Yayınlanan matematik sorularından biri 2012'de çıkan soruya benzer, öğrencinin yaptığı ispattaki hatanın bulunması istenmiştir.

Şekil 3
İspata Yönelik Çıkmış LYS Soruları



17. Bir öğrenci, doğru olduğunu düşündüğü aşağıdaki iddiayı ispatlarken bir hata yapmıştır.

İddia: A, B, C herhangi kümeler olmak üzere, $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$'dir.

Öğrencinin ispatı:

$A \setminus (B \cap C)$ kümesinin her elemanının $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ kümesinde olduğunu gösterirsem ispat biter.

Şimdi, $x \in A \setminus (B \cap C)$ alalım.

(I) Buradan $x \in A$ ve $x \notin (B \cap C)$ olur.

(II) Buradan $x \in A$ ve $(x \notin B$ ve $x \notin C)$ olur.

(III) Buradan $(x \in A$ ve $x \notin B)$ve$(x \in A$ ve $x \notin C)$ olur.

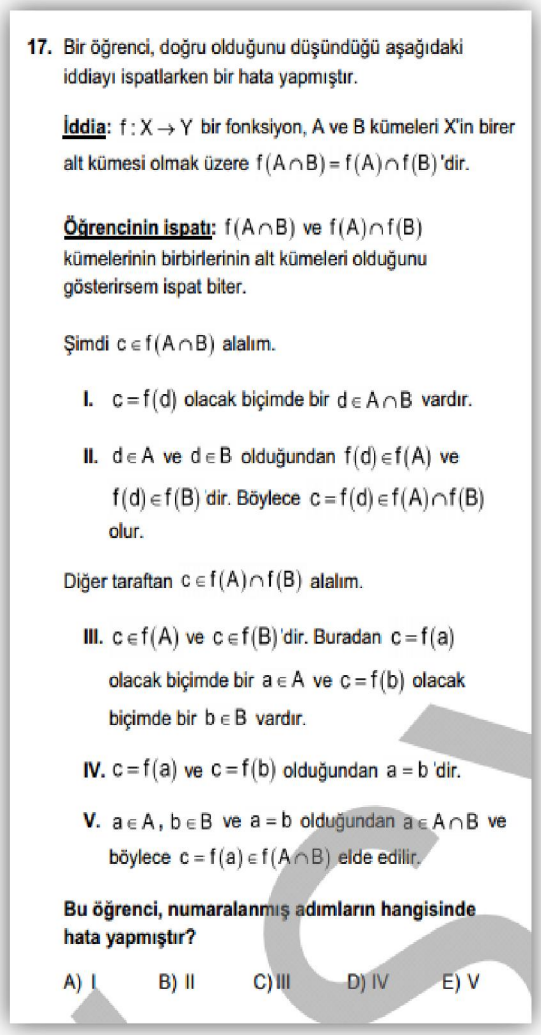
(IV) Buradan $x \in A \setminus B$ ve $x \in A \setminus C$ olur.

(V) Buradan $x \in [(A \setminus B) \cap (A \setminus C)]$ olur.

Bu öğrenci, numaralandırılmış adımların hangisinde hata yapmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V

(2012, LYS-1)



17. Bir öğrenci, doğru olduğunu düşündüğü aşağıdaki iddiayı ispatlarken bir hata yapmıştır.

İddia: $f : X \to Y$ bir fonksiyon, A ve B kümeleri X'in birer alt kümesi olmak üzere $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$'dir.

Öğrencinin ispatı: $f(A \cap B)$ ve $f(A) \cap f(B)$ kümelerinin birbirlerinin alt kümeleri olduğunu gösterirsem ispat biter.

Şimdi $c \in f(A \cap B)$ alalım.

I. $c = f(d)$ olacak biçimde bir $d \in A \cap B$ vardır.

II. $d \in A$ ve $d \in B$ olduğundan $f(d) \in f(A)$ ve $f(d) \in f(B)$'dir. Böylece $c = f(d) \in f(A) \cap f(B)$ olur.

Diğer taraftan $c \in f(A) \cap f(B)$ alalım.

III. $c \in f(A)$ ve $c \in f(B)$'dir. Buradan $c = f(a)$ olacak biçimde bir $a \in A$ ve $c = f(b)$ olacak biçimde bir $b \in B$ vardır.

IV. $c = f(a)$ ve $c = f(b)$ olduğundan $a = b$'dir.

V. $a \in A$, $b \in B$ ve $a = b$ olduğundan $a \in A \cap B$ ve böylece $c = f(a) \in f(A \cap B)$ elde edilir.

Bu öğrenci, numaralanmış adımların hangisinde hata yapmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V

(2014, LYS-1)

Merkezi sınavlarda sorulan bu sorular, ispatın çoktan seçmeli yazılı sınav türünde de yer alabileceğini göstermiştir.

Ülkemizde üniversite seviyesinde fen ve fen-edebiyat fakülteleri matematik bölümleri ve eğitim fakülteleri matematik öğretmenliği anabilim dalları öğretim programları incelendiğinde de, her iki bölümün öğretim programlarında aynı veya benzer adlarla farklı yoğunlukta pür matematik derslerinin yer aldığı görülmektedir. Elbette ki bu derslerin içeriği ispat ve ispatlama çerçevesinde şekillenmektedir. Ancak matematik öğretmenliği bölümlerinde alan bilgisinin yanında alan öğretim

bilgisi de yer almakta, Fen/ fen-edebiyat fakülteleri matematik bölümlerinde ispat ve ispatlamanın üzerinde çok daha fazla durulmaktadır. Weber (2001) ileri seviye matematik üzerine çalışan kişiler için ispatın önemini şu şekilde açıklamaktadır;

> İleri seviye matematiğin çalışma alanında, ispatlama yeteneği her bir matematikçi için çok önemli bir yetenek olup; bu yetenek, yüksek matematik derslerinin ve öğrencilerin performanslarını genel itibariyle değerlendirme anlamında da öncelikli hedefidir (Weber, 2001: 101).

Öyle ki özel olarak bakıldığında, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim programı çıktılarının (öğrencinin edindiği düşünülen kazanım) değerlendirildiği ankette 3. Öncül "*problem çözme, akıl yürütme, ilişkilendirme ve genelleme becerisine sahip olmak ve bu becerileri kullanarak sorunları tanımlayabilmek ve kanıtlara dayalı çözüm önerileri geliştirmek*" [1] şeklindedir.

Görüldüğü üzere matematiğin temeli olarak kabul edilen ispat kavramının öğretimi ve öğrenimi ulusal ve uluslararası öğretim programlarında büyük bir yer edinmektedir.

İspat pek çok gelişmiş ülkenin matematik öğretim programında ve uluslararası kimi prensipler ve standartlarda merkezi bir yerin ayrıldığı ve önemli rollerin yüklendiği bir statüde olmasına karşın öğretim kademesinde öğrencilerin hala sorun yaşadığı alanlar içerisinde yer almaktadır.

İspatın gerek matematik gerek matematik eğitimi alanındaki yeri ve öneminin fazlalığına karşın, araştırmalar lise ve üniversite seviyesindeki öğrencilerin sadece ispat yapmada değil ispatın ne olduğunu tanımlamada bile zorluk yaşadıklarını ortaya çıkarmıştır (Örn. Chazan, 1993; Moore, 1994'den akt. Raman, 2003).

Bu sorunlar itibariyle ispat ve ispatlama kavramları eğitim-öğretimin her seviyesinde araştırma konusu olmuştur. İlköğretim seviyesinde ispatlama kavramı

[1] http://web.deu.edu.tr/fen/anketler/matematik.php?do=2&a=1

yerini akıl yürütme, muhakeme etme ve matematiksel düşünme becerisine bırakmıştır. Bu seviyede deneysel desen veya nitel veriler kullanılarak yapılan birçok araştırma vardır (Sui Sum, 2001; Umay ve Kaf, 2005; Arslan, 2007; Yeşildere ve Türnüklü, 2007; Albayrak-Bahtiyari, 2010). Yeşildere ve Türnüklü (2007) 20 okuldan 8. sınıf öğrencisi 262 kişi ile yaptıkları çalışmalarında öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemiş ve öğrencilerin bu süreçte öznel görüşlerine dayanarak akıl yürüttükleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak ve açıklamalar yaparak ifade etmekte güçlük çektikleri ortaya çıkmıştır. Ortaöğretim seviyesindeki çalışmalara baktığımızda ise benzer durumlarla karşılaşıldığı görülmektedir (Healy & Hoyles, 1998; Özer ve Arıkan, 2002; Stylianides, 2007; Ören, 2007; Martinez et all, 2011). Healy & Hoyles (1998) 10. sınıf öğrencilerinin ispatları anlamada, ispat oluşturma yeterliliklerinde ve ispatın rollerine bakış açılarında eksiklikler olduğunu belirtmişlerdir. 10. sınıf öğrencileriyle yapılan bir diğer çalışmada da öğrencilerin ispat yapma becerilerinin istenilen düzeyde olmadığı, materyal kullanarak ispat yapamadıkları ve ispat yapma yöntemlerini ise yeterince kullanamadıkları görülmüştür (Özer ve Arıkan, 2002).

Bizim çalışmamız 'matematiksel ispatın' ne olduğunu literatür çerçevesinde genel hatları ile ortaya koymaktadır. Yukarıda verilen bilgilerin bir bölümü aynı zamanda veri toplama aşamamıza da yansımıştır. Bazı çevrelerce ispat olarak kabul gören doğrulamaların başka kimi çevrelerce kabul görmemesi teorik matematik alanındaki teoremler için geçerli olduğu kadar acaba matematik bölümü öğrencileri içinde geçerli midir? sorusu da bunlardan biridir. Araştırmamızın temel odağı matematik bölümündeki öğrencilerince ispatın nasıl algılandığıdır. Algıyı tek boyuta incelemenin kimi sınırlılıklar içereceği düşüncesinden hareketle 3 aşamadan oluşan çoklu veri toplanması uygun bulunmuştur. Bu aşmalarda öğrencilerin ispat algısının temelini oluşturan kavramlara yönelik tanımlamaları, ispat becerileri ve bir takım doğrulamaları ispat kabul edip etmeme durumları incelenmiştir.

Problem Durumu

Üniversite eğitimi almakta veya almış olan her bireyin o bölümün temel yeterliliklerine sahip olması beklenir. Bu araştırmada birlikte çalışılan matematik bölümü öğrencilerinin, matematiksel yatkınlık kazanabilmeleri için konuya ilişkin temel kavramları bilmesi (özel alan bilgisi) gerekmektedir (Altun, 2006). "Alan bilgisi" olarak nitelenen bu bilgi, öğretmenlerin/ öğretmen adaylarının/ matematik bölümü öğrencilerinin matematiksel konuların epistemolojisi, bu konuların öğretiminde kullanılan ve içeriğinde var olan tanımlar, aksiyomlar, tanımsız kavramlar, ispat yöntemleri, bağıntı, kural ve formüllere ilişkin anlayış ve algılarının tamamını içermektedir (Ball, 1991'den akt. Bayazıt & Aksoy, 2010).

Özel alan bilgisi kapsamında matematik bölümü öğrencilerinin sürekli üzerinde çalıştıkları ve kullandıkları bilgi ve kavramlar hakkındaki düşünceleri ve tanımlarının ne olduğunu ortaya çıkarmak önemli görülmüştür. Çünkü bir şeye yönelik yapılan tanım o kavram için kişinin zihnindeki şemayı ortaya çıkarır. Matematiksel bir düşünceyi ifade ederken terimlerin hangi anlamda kullanıldığını ve kavramların tam olarak neyi ifade ettiğini açıkça belirtilmek gerekir (Çakıroğlu, 2013).

Weber'e (2001) göre ispat yapabilme yeteneği ise her matematikçi için ileri matematik derslerinin can alıcı bir noktasıdır. İspatın işlevleri sebebiyle hem bir "araç" hem de matematik yapan kişilerce kazanılacak bir "beceri" olduğu düşünülebilir. Ayrıca ispat, öğrencilerin ispata dair algılarını ve tutumlarını değiştirebilecek ve becerilerini de arttırabilecek birçok işleve sahiptir.

İspat her öğretim seviyesinde bu denli önemli görülmesine karşın araştırmalar öğrencilerin ispat yaparken bir takım zorluklar yaşadığını ortaya koymuştur (Moore, 1994; Aarnes & Knudtzon, 2003; Haverhals, 2011). Yapılan araştırmalar, lise ve üniversite seviyesindeki öğrencilerin sadece ispat yapmada değil ispatın ne olduğunu hatırlamada dahi güçlük çektiklerini ortaya çıkarmıştır (Örn. Chazan, 1993; Moore, 1994'den akt. Raman, 2003). Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerini konu edinen araştırmaların yanı sıra, ispat algısının ne olduğu ve nasıl şekillendiği de önemli

görülmekte ve bu yönde araştırmalar da yapılmaktadır (Almeida, 1995; Jones, 1997; Segal, 2000; Selden & Selden, 2003; Smith, 2006; Dickerson, 2007, Uğurel, 2012). Ancak ülkemiz alan yazınına bakıldığında ispata karşı tutum, yaklaşım ve ispatlama becerilerini ortaya çıkaran çalışmalar daha sık yapılmış olsa da "ispat algısı" çalışmaları az sayıdadır. Bu çalışma, buradaki boşluğu doldurmaya yönelik bir adımdır.

Amaç ve Önem

İspatın, matematiğin tam merkezinde bir kavram olduğu yadsınamaz bir gerçektir. Son yıllarda, matematik derslerinde ve matematik eğitimi araştırmalarında akıl yürütme ve ispat gibi kavramlar ön plana çıkmaktadır (Heinze & Reiss, 2003). Matematik araştırmacıları ispatın ne olduğu, tarihsel ve epistemolojik gelişimi, rol ve fonksiyonları, matematikte ve matematik eğitiminde yeri ve önemi, öğretmen eğitiminde ispatın yeri, öğretimde karşılaşılan zorluklar, öğrencilerin ispatlama becerileri, öğrencilerin ispat algı ve yaklaşımları, öğrencilerin ispat yaklaşımlarının bir takım ispat şemaları ile sınıflandırılması gibi çeşitli araştırma konuları üzerinde yoğunlaşmıştır. Ülkemizde yapılan çalışmalara bakıldığında ispat çalışmaları son yıllarda artmasına karşın ispat algısı çalışmaları az sayıdadır.

Özellikle ileri düzey matematik için ispat çok önemli bir kavram ve ispat yapma da çok önemli bir beceridir. İleri düzey matematik derslerinin öncelikli amacı, öğrencilere kanıtlama becerisini kazandırmaktır ve öğrencilerin kanıtlamadaki yeterlikleri, performanslarının bir değerlendirmesi olarak görülür (Weber, 2001'den akt. Taştepe, 2012). Bu seviyede olan öğrencilerin ispat yapma becerilerinin yanında temelde yatan ispat algıların ne olduğu, nasıl şekillendiği de önemlidir. Bu düşüneyi yansıtan çalışmalar mevcuttur (Almeida, 1995; Almeida, 2000; Segal, 2000; Raman, 2003; Boyle, 2012; Gökkurt ve Soylu, 2012; Güler ve Dikici, 2012; Kayagil, 2012; Köğce, 2012; Uğurel, 2012). Ancak bu çalışmaların çok büyük bir bölümünde katılımcıların algılarının tek boyutta ölçüldüğü görülmektedir. Bizim çalışmamız algının üç aşamada çoklu veri kaynağı ile belirlenmesi açısından var olan sınırlı yaklaşıma bir alternatif oluşturmaktadır.

Problem Cümlesi

"Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğrencilerinin matematiksel ispat algıları nasıldır?"

Alt Problemler

1. (Matematik bölümü) öğrencilerinin algılarına zemin oluşturan ispat tanımlamaları nelerdir?
2. Öğrencilerin bir takım teoremleri/ önermeleri ispatlama biçimleri nasıldır?
3. Öğrencilerin -matematiksel ifadelerin farklı formlarına dayalı- doğrulama örnekleri çerçevesinde ispat algıları nasıl şekillenmektedir?

Sayıltılar

- Araştırmamızda matematik bölümü öğrencilerinin var olan bilgilerini çalışmaya tümüyle yansıtacakları kabul edilmektedir.
- Tüm katılımcıların olumlu veya olumsuz dış faktörlerden eşit derecede etkilendiği varsayılmaktadır.
- Matematik bölümü öğrencilerine ispatlamaları için yöneltilen teoremler hakkında alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmaktadır.

Sınırlılıklar

- Araştırma Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nde öğrenim görmekte olan 12 öğrenci ile yürütülmüştür. Küçük bir örneklemde derinlemesine bilgi toplamak amaçlanmış olup, diğer üniversite öğrencilerine genellenemez.
- Araştırma süresi 2012-2013 öğretim yılının bahar dönemi ile sınırlıdır.
- Öğretmen adaylarının matematiksel ispat becerileri, yöneltilen belli sayıda ispat problemine dönük yanıtları ile sınırlıdır.

Tanımlar

Bu araştırmada ilk aşamada öğrencilerin algılarına zemin oluşturan tanımlamaların ne olduğuna bakılmıştır. Diğer bölümlerde "ispat" kavramı detaylı

olarak incelendiğinden bu kısımda kısa bir ispat tanımı ile literatürde geçen ifadelerle araştırmada yer alan diğer kavramların tanımları sunulacaktır.

- **İspat/ Kanıt (Proof):** Bir ispat bir önermenin niçin doğru olduğunun açıklamasıdır (Houston, 2010). Hipotezlerin doğrulanması ve matematiğin açıklanması, sistematikleştirilmesi, keşfedilmesi ve iletilmesi (Dickerson, 2008).

- **İspatlama/ Kanıtlama (Proving):** Matematiksel bir ifadenin doğruluğunu / yanlışlığını gösterme işi.

- **İspat yöntemi (Proof method):** İspat yaparken izlenilen yol.

- **Önerme (Proposition):** Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifade.

- **Aksiyom/ postulat (Axiom/ Postulate):** Aksiyom, doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önerme (Baki, 2008). Aksiyom, bir matematiksel durum üzerine temel varsayım (Houston, 2010). Postulat ise doğrulukları ispatlanamayan ancak doğru kabul edilen önerme (Baki, 2008). Postulatların aksiyomlardan farkı, kesin ve zorunlu olmamaları ve şüphe edilir olmalarıdır (Baki, 2008).

- **Varsayım (Conjecture):** Mantıksal sonuçlar çıkarmak üzere ön dayanak olarak öne sürülen önerme ya da önermeler birliği.

- **Teorem (Theorem):** Doğruluğu ispatlanabilen/ ispatlanması gereken önerme.

- **Sanı (Supposition):** Doğru olduğuna inanılan ama kanıtı olmayan bir önerme (Houston, 2010).

- **Lemma (Lemma):** Yardımcı önerme.

- **Örnekleme (Sampling):** 1) Bir çokluktan aynı özellikleri taşıyan küçük birimleri almak için kullanılan belirli yöntemlerin kullanılması. 2) bir teoremin-önermenin doğruluğunu veya yanlışlığının örneklerle gösterilmesi.

- **Doğrulama (Justification/ Conviction):** Konu hakkında fikir sahibi kişileri / okuyucuları ikna etmek ve yapılan ispatın onlarca da onaylanmasını sağlamak (Hanna, 2000).

- **Genelleme (Generalization):** Varsayımları zayıflatılan önermeye genelleştirme denir (Houston, 2010). Belirli şeylerden yola çıkma veya bunlardan sonuç çıkarma, bu özellikleri tanımlama ve geçerlilik alanına genişletilmesi (Dreyfus, 1991: 34).

- **Soyutlama (Abstraction):** Örnekten ve somut gösterimlerden farklı olarak genel bir yapıyı sunan gösterim, yazım, iletişim biçimidir.

- **Gerçekleme (Verification) :** Bir durumu doğrulama işlemi (Bell, 1976; Hanna, 2000).

BÖLÜM II

İLGİLİ YAYIN VE ARAŞTIRMALAR

2.1. Matematiksel İspat Algısı

Matematik bilimi kendi bünyesinde birçok kavramı içinde barındırmaktadır. Kişinin akıl yürütmesi; yorumlama, ikna etme, sonuç çıkarma, ispatlama, açıklama, yapılandırma, genelleştirme, uygulama, tahmin etme, sınıflandırma, araştırma ve problem çözme gibi aklî birçok aktiviteden oluşmaktadır (Harel, 2008: 3). Matematik, her aşamasında daha önceki bilgilerin ve edinilmiş becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin sadece üst üste yığıldığı değil aynı zamanda iç içe de geçtiği bir bilim dalıdır (Moralı vd., 2006: 150). Matematik bilgi ve becerisinin yığılmalı ve birikimli şekilde ilerlediği gerçeğinden hareketle kişinin ispat yapılandırması/ algılaması da çevresel ve bireysel etmenlere göre değişkenlik gösterecektir. Bu bağlamda fen fakültesinde öğrenim gören öğrencilerin ispat algısının oluşmasında eğitimlerinin etkisi olduğunu varsayabiliriz. Bu araştırmanın konusu söz konusu etkinin boyutlarını ya da derecesini ortaya koymak değildir. Ancak yine de öğrencilerin bireysel algıları yoluyla eğitimlerine dönük genel bir fikir sahibi olmanın yolu açılabilir.

Matematiksel ispat algısının ne olduğuna bakmadan önce tek başına 'algı'nın ne olduğuna bakmakta yarar vardır.

Algı

"Kişinin bir şey hakkında anladığı veya düşündüğü bir yol veya bir fikir; bir prensip veya durum için temel anlayış" (Cambridge Advanced Learner's Dictionary & Thesaurus, 2008)

"Bir şeye dikkatini yönelterek o şeyin bilincine varma, idrak" (TDK, 2014)

"Uyaranların taşıdığı bilgilerin analiz edilmesi, tanınması, yorumlanması, organize edilmesini sağlayan süreç" (Malkoç, 2012: 101)

Algı tanımlarından yola çıkarak algılama-yı tanımlamak gerekirse, 'nesnelerin, niteliklerin veya olayların farkında olunmasıdır (Ünlü, 2001)'.

Algılar, bireyin gereksinimleri ve onlardan kaynaklanan güdüleri, bireyin bilgi birikimi ve deneyimlerinin de algılama sürecinin işlemesinde önemli rol oynamaktadır (İnceoğlu, 2010: 73). Yani bir şeye ilişkin algılar, ferdin eski yaşantılarına ve bilgilerine göre sekil alırlar (Özer, 2009). Dolayısıyla araştırma konumuz olan ispat kavramına yönelik öğrencide oluşan algının oluşmasında birçok bileşen vardır. Öğrencinin geçmiş öğrenim hayatında matematik dersinde ispata verilen önem, öğrenciye yöneltilen ve onu o yönde yönlendiren bakış açısı, matematiksel kavramların ispatlarla temellendirilip temellendirilmemesi, ispata ayrılan zaman, çaba vs. öğrencinin ispata yönelik algısını etkilediği söylenebilir.

Ayrıca algılama iki yönlü bir süreçtir, güdüler ve tutumların algılamayı etkilediği, algılamanın da güdüler ve tutumları etkilediği söylenir (Özer, 2009). Yani öğrencinin ispata yönelik tutumu (sevip sevmemesi, bu konuda kendine güveni, ispata ilişkin düşüncesi), onun algılarını da etkileyecektir. Psikolojik araştırma alanlarından olan algı konusu üzerine yapılan çalışmalarda, kişinin ona yöneltilen konu, soru ve materyallere yönelik zihinlerinde oluşan ilk fikirleri ve benzetmeleri o şeye yönelik algılarıyla kesişmektedir (O'Kane et all, 1999). Aynı zamanda algıların, davranışları etkilediği de (Chartrand & Bargh, 1999) göz önünde bulundurulursa öğrencilerin ortaya koydukları ispatlama performansları, onların ispata karşı algı ve

tutumlarıyla da ilişkilidir. Dolayısıyla ispata yönelik algının belirlemesi önem arz etmektedir.

İspatın kelime karşılığı formal ispat ile aynı anlamda kullanılmayabilir. Örneğin Dickerson (2008: 2) matematiksel ispatı 'hipotezlerin doğrulanması, matematiğin açıklanması, sistematikleştirilmesi, keşfedilmesi ve iletilmesi' olarak tanımlar. Polya (1969) ise öğretici ispatın aksiyomatik olmasından önce inandırıcı ve akla yatkın olması gerektiğini söyler (Kwak, 2005). Paralel bir görüş de olan Hanna da (1995) bir teoremin ispatının doğru olması ve niçin doğru olduğunu da (açıklama işlevi) göstermesi gerekir demektedir. Bir önceki bölümde de ifade edildiği gibi ispatın tanımlarının farklı bakış açılarına ve yaklaşımlara göre değişiklikler, ayrışımlar gösterdiği görülmektedir. Ancak tanım ne kadar farklı olursa olsun ispat kavramının matematikteki değerini ve önemini değiştirmeyecektir. Davis ve Hersh (2002: 174) ispatın matematikteki önemini anlatmak için şöyle demiştir: "Bazılarına göre matematik oyununun adı ispattır; ispat yoksa matematik de yoktur".

Elbette ki ispatsız matematik yapmak, öğretmek ve matematiği anlamlandırmak pek de mümkün değildir. Hele ki üst düzey matematik seviyesinde ispatsız matematik yapmak imkânsızdır. Weber (2001) buna yönelik fikirlerini şu şekilde açıklar:

> İleri seviye matematiğin çalışma alanında, ispatlama yeteneği her bir matematikçi için çok önemli bir yetenek olup; bu yetenek, yüksek matematik derslerinin ve öğrencilerin performanslarını genel itibariyle değerlendirme anlamında da öncelikli hedefidir (Weber, 2001: 101).

İspatlama sürecinde yaşanılan zorluklar, ispat yapmanın öğrenciler tarafından nasıl algılandığı sorusunu akla getirmektedir (Cansız-Aktaş ve Aktaş, 2013). Bu yönde çalışan birçok matematik eğitimcisi de öğrencilerin ispata karşı algısının ne olduğu ve nasıl şekillendiğini araştırma konusu olarak belirleyip, çalışmalarında yer vermişlerdir (Almeida, 1995; Jones, 1997; Segal, 2000; Selden & Selden, 2003; Smith, 2006). Algıya yönelik araştırmalara bakmadan önce ispata ilişkin çalışmaların genel yapısına değinmek yararlı olacaktır.

Üniversite seviyesinde yapılan çalışmalara bakılacak olunursa, çalışma grupları [matematik öğretmen adayı (*MÖA*), matematik fen-edebiyat bölüm öğrencisi (*MBÖ*)] ve araştırma konuları açısından sınıflandırmalar genel itibariyle aşağıdaki şekildedir;

- Öğrencilerin ispata karşı bakış açılarını (algı) ve görüşlerini ortaya çıkaran (Almeida, 1995[*MBÖ*]; Almeida, 2000[*MBÖ*]; Segal, 2000[*MBÖ*]; Raman, 2003[*MBÖ*]; Boyle, 2012[*MÖA*]; Gökkurt & Soylu, 2012[*MÖA*]; Güler & Dikici, 2012[*MÖA*]; Kayagil, 2012[*MÖA*]; Köğce, 2012[*MÖA*]; Uğurel, 2012[MÖA])

- Öğrencilerin ispatlama performanslarını değerlendiren ve var olan bilgilerini ortaya çıkaran (Weber, 2001[*MBÖ*]; Piatek-Jimanez, 2004[*MBÖ*]; Smith, 2006[*MBÖ*]; Dane, 2008[*MÖA*]; Birinci, 2010[*MÖA*]; Uğurel & Moralı, 2010[*MÖA*]; Keçeli-Bozdağ, 2012[MÖA]; Köğce, 2012[*MÖA*])

- Öğrencilerin ispat yaklaşımlarını bir takım ispat şemaları ile sınıflandıran (Martin & Harel, 1989[*MÖA*]; Weber & Alcock; 2004 [*MBÖ*]; Sarı, Altun & Aşkar, 2007[*MÖA*]; Ören, 2007[*MÖA*]; İskenderoğlu, 2010[*MÖA*]; Haverhals, 2011[*MBÖ*])

- Bilgisayar destekli ispatlama becerisini inceleyen (İpek, 2010[*MÖA*], Ceylan, 2012[MÖA]; Çontay, 2013[MÖA])

- Öğrencilerin ispat yaparken yaşadığı zorluklar ve bunların sebeplerini araştıran (Moore, 1994[*MBÖ*]; Zacharie, 2009[*MBÖ*])

Bu çalışmalara bakıldığında yurtdışı çalışmalarının ağırlıkta olduğu görülür. Ülkemizde ise ispatın matematik eğitimindeki önemine ve bu yönde yapılan akademik çalışmalara ancak son yıllarda ağırlık verildiği görülmektedir (Özer & Arıkan, 2002; İpek, 2010; İskenderoğlu, 2010; Keçeli- Bozdağ, 2010; Doruk, Kıymaz & Horzum, 2012; Gökkurt & Soylu, 2012; Karahan, 2012; Köğce, 2012;

Uğurel, 2012; Doruk ve diğer, 2013; Çontay, 2013; Taştepe, Yavuz & Baştürk, 2013; Aylar, 2014a).

Bu çalışmanın araştırma konusu olan ispat algısı üzerine ülkemizdeki çalışmaların oldukça az olduğu görülmektedir. Bu çalışmalardan bir kaçı ise son yıllarda yapılmıştır (Uğurel, 2012; Özdemir & Dikkartın-Ovez, 2012). Gerçekleştirilen bu araştırma ispata yönelik bu alandaki boşluğa katkı yapmak amacını gütmektedir.

2. 2. Matematiksel İspat Algısı Üzerine Çalışmalar

Matematiksel ispat algısı denilince araştırmacılar çok çeşitli araştırma materyallerinden faydalanmıştır. Çünkü bir bireyin ispat algısı, onun ispat yeteneği, bir ispatı analiz etmesi ve ispata dair inançlarını barındırır (Conner, 2007: 3). Dolayısıyla algının tek başına çok geniş ve kapsamlı bir kavram olması sebebiyle, matematiksel ispat algısının da çok boyutlu ve çeşitli yollarla araştırılması normal karşılanmaktadır. Örneğin Riley (2003) araştırmacıların ispat algısı çalışmalarında, ispatın 'mantıksal destekleyicilerini anlama' ve 'matematiksel ispatı tamamlama yeteneği' olarak iki temel kriterin önemli olduğunu dile getirdiğini söyler. İspat algısını ortaya çıkarmaya yönelik çalışmalarda kimi araştırmacılar (Healy & Hoyles, 2000; Knuth, 2002b; Gray, 2006) ispat becerileri ve ispat yapma tarzlarına bakarken, kimi araştırmacılar (Uğurel, 2012) katılımcıların ispat tanımlarına bakmış, kimi (Jones, 1997; Varghese, 2009) ispat kavramı çerçevesinde alt kavramlarla ilişkisine yönelik kavram-zihin haritası yaptırtmış, kimi araştırmacılar da (Chazan, 1993; Almeida, 2000; Segal, 2000; Dickerson, 2008) çeşitli ispat ve doğrulama gösterimlerine yönelik görüş almıştır.

Yapmış olduğumuz bu çalışmaya yol gösteren literatürdeki çalışmalarda, hangi araştırma yöntemleri, ne tür katılımcılarla, hangi veri toplama araçları kullanılarak araştırma yapıldığına aşağıdaki bölümlerde ayrıntılandırılarak

sunulacaktır. Bu çalışmaları lisans öncesi ve lisans-lisans sonrası olarak iki başlık altında inceleyeceğiz.

2.2.1. Lisans Öncesi (İlköğretim-Ortaöğretim) Öğrencilerinin Matematiksel İspat Algısı

Healy & Hoyles (2000) yaptıkları çalışmada 2459 lise öğrencisinin ispat algılarını araştırmıştır. Çalışma üç aşamada yapılmıştır. Birincisinde öğrencilerin ispat tanımlamalarına ve ispatın amacı olarak neyi gördüklerine bakılmıştır. İkinci olarak, öğrencilere bir takım matematiksel doğrulamalar sunulmuş, bunların kendisini ikna edip etmediği, ispat olarak görüp görmediği ve nedenleri hakkında görüş alınmıştır. Son olarak da öğrencilerin düşüncelerinin değerlendirmelerinde geçerlilik ve açıklayıcılık gücünün hangi terimlerle sağlandığı incelenmiştir. Çalışmanın bir aşamasında kullanılan doğrulama örnekleri Balacheff'in (1988) ve sonrasında Coe & Ruthven'in (1994) eklemeler yaptığı Balacheff'in ispat şemalarına göre hazırlanmıştır. "İki çift sayının toplamı çifttir" önermesinin açıklayıcı (2 tane), deneysel, görsel, cebirsel (2 tane) olmak üzere 6 farklı doğrulama örneği yapılmıştır. Öğrencilerden bunların hangisinin kendisine daha tanıdık geldiğini ve öğretmenlerinin daha önce derslerde bunlardan hangisine benzer doğrulamalar yapmış olduğunu söylemeleri istenmiştir. Gösterimler, Örneğin deneysel olarak yapılan doğrulama: 2+2=4; 2+4=6; 2+6=8; 4+2=6; 4+4=8; 4+6=10 şeklindedir. Kapsamlı şekilde yapılan bu çalışmada 2. aşamada ortaya çıkan sonuçlara bakılacak olunursa; öğrenciler bu gösterimlerin kendilerini ne derece ikna ettiği ve açıklayıcı olduğuna dikkat etmişler ve buna göre karar vermişlerdir. İspatın deneysel (empirical) formu %34 oranla (845 kişi) en tanıdık ve ikna edici bulunmuştur. Sonrasında açıklayıcı (narrative) formu %28 oranla 2. sırada, %11 ile de formal olarak ifade edilen cebirsel formu öğrenciler tarafından ikna edici bulunmuştur.

Harel ve Sowder (1998), öncesinde yaptıkları çalışmalarda lisans öğrencilerinin matematiksel ispatı kavramalarındaki eksiklikler doğrultusunda lise öğrencileri ile çalışma ihtiyacı hissetmişlerdir. Çünkü lisans eğitiminin temeli önceki

eğitim kademelerinde atılmaktadır. Lisans seviyesindeki öğrencilerin ispat kavramını anlamadaki yetersizlikleri, lise dönemi süresince ispatı anlama ve ispat yapma alıştırmalarına kısıtlı bir seviyede yer verilmesi olarak görülmüştür (s. 275). Bu çalışmada Harel ve Sowder (1998), Martin ve Harel'in (1989) daha önce sınıf öğretmeni adaylarıyla yaptıkları ispat şemalarına ek olarak yeni bir ispat şeması taksonomisi oluşturmuşlardır. Bu taksonomi deneysel, dışsal ve analitik ispat şemalarından oluşmaktadır. Bu çalışmalar sonucunda daha geniş anlamda çıkan sonuçlar göstermiştir ki öğrenciler ispatın doğruluğuna ikna olmak için, ispatın formuna, bir kitap veya öğretmen gibi bir otoriteden iletilmesine veya herhangi bir anlam içermeksizin sembollerden oluşan formal yapılara bakmaktadır.

Chazan (1993), geometri derslerini almakta olan 17 lise öğrencisiyle yaptığı görüşmelerde bir öğrenci, örneklerle ispatın kendisini ikna ettiğini, karşıt ters örneklemeyle yapılan ispatın ona güvenilir gelmediğini söylemiştir (akt. Dickerson, 2008). Chazan, yine aynı çalışmada öğrencilerin kitaplardaki veya ancak yetkili birinden duyduklarını ispat olarak kabul ettiklerini belirtmiştir (Dickerson, 2008). Bu sonuç Harel ve Sowder'ın (1998) yaptıkları çalışma sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Ayrıca, aynı çalışmada tümdengelimsel ispatın bile kesin doğru olmadığı ve karşıt örneğin ispat olamayabileceği düşüncesi hâkimdir.

Aylar (2014a), 7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerini ortaya çıkaracak bir doktora çalışması yapmıştır. Çalışma 54 öğrenci ile 14 haftalık bir çalışma takviminde ders uygulamaları yapılmış ve uygulama sonrası 4 sorudan oluşan bir sınav yapılmış ve sonrasında 16 öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Çok boyutlu olarak yürütülen doktora çalışmasının bir kısmının yayınlandığı makalede Aylar (2014b) şunları dile getirmektedir: bu çalışma sonunda 1) Örnek vererek doğrulama ile ispat arasındaki farka yönelik farkındalıkları artmıştır, 2) Hazır bulunuşluk sınavı ile uygulama sonrası gerçekleştirilen sınavdan elde edilen bulgular karşılaştırıldığında öğrencilerin tümdengelimsel muhakemeyi içeren yanıtlara daha çok yöneldiği görülmüştür (Aylar, 2014b: 40). Bu olumlu sonuçların aksine olumsuz sonuçlarla da karşılaşılmıştır. Öğrencilerin önemli bir bölümü birkaç durumun denenmesinin ispat için yeterli olduğunu düşünmüşlerdir.

Ancak daha sonra bu öğrencilerle yapılan görüşmelerde öğrencilerin ispat ve örnekle doğrulama arasındaki farkı destek ve yönlendirmelerle hissetmeleri sağlanmıştır.

2.2.2. Matematik Öğretmeni, Öğretmen Adayı ve Matematik Bölümü Öğrencilerinin Matematiksel İspat Algısı

Jones (1997) ispat algılarını ortaya çıkarmaya yönelik 25 matematik öğretmen adayıyla çalışmıştır. İlk aşamada katılımcılar beyin fırtınası tekniği ile matematiksel ispatla ilişkilendirilen 24 kavramı (Öklid, gözlem, mantık, genel durum, deneme ve geliştirme, teorem, aksiyomlar, grafikler, sanı, uslamlama, tümevarım, açıklama, örnekler, akıl yürütme, ifadeler, postulat, lemma, çelişki, hipotez, varsayım, kesinlik, soyutlama, tanımlama) bir liste hâline getirmiş ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler bireysel olarak bir kavram haritasına dönüştürmüşlerdir. Her bir katılımcı bunlara ek kavramlar da ekleyebilmiş, kendilerine özgü ve matematiksel ispat algılarını ortaya çıkartacağı düşünülen bir kavram haritası oluşturmuşlardır. Jones bu katılımcılardan 3 tanesinin yaptığı kavram haritasını 3 ölçüte göre derinlemesine incelemiştir. Bu ölçütler, özel terimleri kullanma, kullandığı terimlerin sıklığı ve herhangi iki terim arasındaki kurulan ilişkinin doğasıdır. Her biri katılımcının kavram haritalarının farklı ilişkilendirmelerle oluşturduğu ortaya çıkmıştır. Bu farklılığın sebeplerinden birini Jones, lisans döneminde alınan derslerin farklılığı olabileceğini söylemiştir. İlişkilendirmelerdeki hataların ise lisans döneminde alınan derslerdeki prensipler ve kavramlar arasında yapılan ilişkilendirmelere öğrencilerin çok az dikkat ettiğinden kaynaklanabileceğini söylemiştir. Bu sonuçların, algıların, ferdin eski yaşantılarına ya da bilgilerine göre sekil aldığı (Özer, 2009) fikriyle de örtüştüğü görülmüştür.

Varghese de (2009) Jones'un (1997) çalışmasına benzer bir çalışma yürütmüştür. 17 matematik öğretmen adayının lisanstaki bütün dersleri bittikten sonraki son dönemlerinde öğretmenlik staj dönemlerinde öğretmen adaylarına ispat algılarını ortaya çıkartacak olan ispata ilişkin kavram ve ilişkilerini çizmelerini istediği kavram haritası yaptırmıştır. Bu kavram haritalarını 2 kritere göre analiz

etmiştir. İlki kavram haritalarının şekil ve yapılarıdır. Burada dikkat ettiği şeyler haritalarda kullanılan şeklin yapısı (*doğrusal, ağaç, sistematik ve örümcek haritalar*), anahtar kelimeler, bunların sayısı, bunlar arasındaki ilişkilerdir. İkinci kriter ise haritalarda, Balacheff'in (1988) ispatlamaya yönelik hiyerarşik ispat taksonomisine göre analizin yapılmasıdır. Öğretmen adayları kavram haritaları ile pragmatik gösterim seviyesinde kalmışlardır. Pragmatik gösterim, Balacheff'in ispat taksonomisinde ilk 3 seviye olan saf deneyselcilik, kritik deneme ve genel örneği içinde barındırır. Varghese katılımcıların bu seviyede kalmalarına, öncesinde gördükleri matematik derslerinin farklı olması ve verilen terimlere aşina olmalarını sebep olarak sunmuştur.

Dickerson (2008) 17 lise matematik öğretmeninin ispat yaparken mantıksal yapı ve yazım formatlarına yönelik ispatlamayı hangi türde ve niye tercih ettiklerini, ayrıca matematiksel ve pedagojik açıdan ispatın amaçlarının öğretmenlerin algılarını nasıl etkilediğini araştırmıştır. Dickerson, katılımcıların çoğunun algılarının çıkarımlara ve kesin doğrulara dayanan formal savların oluşturduğu ispatlara göre şekillendiğini söylemiştir. Katılımcıların tanımlamaları da ispatın, bir savın / yargının adım adım bir süreci içermesidir. Sonuçların (ispatın) da tamamen kesinlik içermesi, yüksek oranda fikir birliğine varılması gerekmektedir. Katılımcıların ispat algılarını çok boyutlu incelemek için Dickerson, çeşitli örneklerin (çikolata kalıbı, karelerin toplamı, hiperbol, kısmi toplam, çift sütun, deneysel, sözsüz ispat, tümevarım, cebirsel, tek sayıların toplamı) farklı formlarda doğrulamalarını yaparak bunlar üzerine görüşmeler yapmıştır. Bu görüşmelerden çıkan sonuçlardan bir kaçı şu şekildedir: 1) bazısı çift sütun ispatın net ve ikna edici olduğunu, bazısı da matematiksel iletişim için doğal bir gösterim olmadığını düşünmüştür, 2) görsel ispatları (sözsüz ispat) bazıları ikna edici bulmamıştır, 3) deneysel ispat olarak verilen kısmi toplam doğrulaması bazılarına göre geçerli gelmemiştir, 4) deneysel ispat bazılarına göre geçerli gelmemiş buna karşın çok ikna edici bulunmuştur, 5) bazı katılımcılar tarafından görsel ispatlara semboller ve bazı açıklamalar eklendiği takdirde geçerli olabileceği söylenmiştir... vs. Bu gibi farklı formlardaki doğrulamaları ispat olarak kabul edip etmemeleri, o kişinin ispata dair sınıf içi rol ve fonksiyonları hakkında görüşlerini farklı kılmıştır.

Uğurel (2012), lisans seviyesini farklı üniversitelerde tamamlayıp tezsiz yüksek lisans programında bir araya gelen 8 matematik öğretmen adayıyla ispat algısına yönelik bir çalışma yürütmüştür. 10 hafta süren bu çalışmada katılımcıların ispat ve ispatlamanın anlamı ve ispatın amaçlarına yönelik veri toplanmıştır. Üç grupta toplanan verilerin ilk grubunda, katılımcılara ispata yönelik serbest yazma yaptırılmış; sonra kavramlar üzerinde grup tartışması, son olarak da bireysel görüşmeler yapılmıştır. Genel anlamda sonuçlar, öğretmen adaylarının ispat tanımlarında formal söylemleri kullanmayı tercih ettikleri ancak bu tanımlamaları yaparken zorlandıkları görülmüştür. Katılımcıların ispatın amacına yönelik görüşleri ise doğrulama ve açıklama işlevlerinde yoğunlaşmıştır. Çalışmada görülmüştür ki öğretmen adaylarının ispatın amacı ve anlamına yönelik görüşleri çalışma sürecinde yapılan görüşme ve tartışmalarda değişkenlik göstermiş, önceki görüşlerinde kısmı bir genişleme olmuştur.

32 matematik öğretmen adayıyla yapılan başka bir çalışmada (Taştepe, Yavuz ve Baştürk, 2013) katılımcılara, açık ve kapalı uçlu sorulardan oluşan 11 soruluk anket uygulanmıştır. İspat türleri ise Balacheff'in taksonomisi referans alınarak hazırlanmıştır. Öğretmen adayları daha çok ezberleme ve sonuç odaklı düşünmeyi ön plana çıkaran eğitim sistemini sebep olarak göstererek ispatı yapılandırma aşamasında sorunlar yaşadıklarını dile getirmişlerdir. Öğretmen adaylarının yaptıkları ispat türü açısından değerlendirildiğinde Balacheff'in entelektüel ispat olarak adlandırdığı, bir otoriteye (kitap, öğretmen vs.) bağlı ve kitaptaki verilerden yola çıkılarak yapıldığı gözlenen ispat türünü kullandıkları görülmüştür.

Knuth (2002b) çalışmasında 3-20 yıl arasında tecrübeye sahip 16 matematik öğretmeninle iki aşamalı yarı yapılandırılmış görüşmeler yapmıştır. İlk aşamada öğretmenlerin matematik disiplinine dayalı, ikinci aşamada ise okul matematiği bağlamında ispat algılarını araştırmıştır. Knuth, (2002b) yaptığı çalışma sonucunda çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin ispat algılarının, deneysel argümanlara dayalı olarak yapılan ispata eğilimli olduğunu söylemiştir. Knuth (2002b) bu öğretmenlerin ispatlarını 3 kategoriye ayırmıştır: *formal ispat*; ritüalistik görüşleri, formal ve dile dayalı doğrulamalar; *eksik formal ispat*; matematiksel olarak

kesinlikte yeterli olmayan, matematiksel yapı tanımlanmamış ancak öğretmenlerce geçerli kabul edilen ispatlar; *informal ispat* ise, açıklamalara ve deneysel argümanlara dayalı ispatlardır. Yani deneysel ispatları Knuth, informal ispat olarak değerlendirmekte ve en alt seviyede ispatlar olarak görmektedir.

Almeida (2000), 25 matematik bölümü lisans öğrencisinin ispata yönelik algılarını ortaya çıkarmak için 3 aşamada tamamlanan çoklu veri toplayarak bir çalışma yürütmüştür. İlk aşama 'ispat tercihleri' anketini uygulamıştır. Bu anket 16 sorudan oluşup 5 dereceli likert tipi şeklinde hazırlanmıştır. Bu anketteki yöneltilen durumlara örnek verilecek olunursa;

"- matematikteki ispat diğer ispat türlerinden farklıdır,
- matematikteki ispat doğrulama ve açıklamadır,
- matematikte bir sonuç ispatlanıyorsa benim için o doğrudur,
- ispat pür matematik için çok önemlidir,
- matematikte bir sonuç diğer matematiksel sonuçlara bağlıdır …"

şeklindedir (Almeida, 2000: 872). İkinci aşamada, öğrencilere matematiksel bir durumun 3 farklı ispatının olduğu ve bu ispatlardan hangisinin kendisini ikna ettiği, ikna etmediği ve hangisini yanlış bulduğunu nedenleriyle seçmesi gereken bir görüşme formu yöneltilmiştir. Sonrasında da verdikleri cevaplar üzerinden klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda Almeida, öğrencilerin ispata yönelik algılarını aşağıdaki şekilde sınıflamıştır;

Tip A: Öğrenci formal ispatı kabul edip informal ispatı kabul etmiyor, ancak kendi ispat uygulamalarında ispatın formal ispatın zor gelmesinden dolayı bunu yapamayacak durumda.

Tip B: Öğrenci formal ispatları kabul ediyor ancak formal bir şeyde informal ispat uygulamalarını kullanıyor.

Tip C: Öğrenci ispat olarak sezgisel ve deneysel savunmaları kabul ediyor. Formal ispatı sınavları geçmek için gerekli görüyor.

Tip D: Öğrenci formal ispatı gerekli görüyor ancak bunu sadece sembollerden ibaret olduğunu düşünüyor. Bu tür öğrencinin bilgi eksikliği ispattan soğumasına neden oluyor.

İspat algılarına yönelik bir diğer çalışma Segal (2000) tarafından yapılmıştır. Matematik bölümü öğrencilerinin ispata '*özel*' (private) ve '*genel*' (public) bakış açılarına dikkat çekmiştir. Bu bakış açıları ikna edilen bireyin çevresini kastetmektedir. Eğer kişinin yaptığı ispat sadece kendisini ikna ediyorsa özel, bir topluluğu ikna ediyorsa genel bakış açısı olarak adlandırılmaktadır. Bu çalışmada yöneltilen savlar ise deneysel ve tümdengelimsel olmuştur. Öğrencilerden 'köşegen matrislerin çarpımları yine köşegen matristir' ifadesinin deneysel olarak düzenlenen örnekleme, özel durum, genelleştirme doğrulamalarıyla ve tümdengelimsel olmak üzere 4 farklı doğrulama türü hakkında görüş almıştır. Dikkat ettiği şey, ilk olarak öğrencilerin hangisini geçerli bulduğu, sonra hangisini ikna edici bulduğu, en son olarak da her ikisinin de bulunduğu doğrulama türünü seçenler ve seçme nedenleri olmuştur. Deneysel doğrulamalarla tümdengelimsel doğrulama karşılaştırılmış, kişisel iknanın deneysel doğrulamalarda genel-geçerlilikten apaçık farklı olduğu, tümdengelimsel ispatın ise tam tersi geçerli kabul edildiği ortaya çıkmıştır. Ancak çalışma belirli aralıkla tekrar edildiğinden öğrenciler başlardan farklı olarak zaman geçtikçe tümdengelimsel akıl yürütmede kabul edilebilir seviyeye ulaşmışlardır.

Literatürdeki araştırmalar göstermektedir ki, matematiksel ispatın lisans eğitiminin bel kemiğini oluşturduğu bilinen matematik bölümü öğrencilerince nasıl algılandığı araştırılması gereken bir konudur. Algının tek boyutlu şekilde incelemesini yapmak dar bir perspektif sunacağı düşüncesinden hareketle çalışmamızda 3 aşamadan oluşan çoklu veri toplanması uygun bulunmuştur. Öğrencilerin ispat algısının temelini oluşturan tanımlamaları, ispat becerileri ve bir takım doğrulamaları ispat kabul edip etmeme durumları incelenmiştir. Araştırmada öğrencilerin ispat ve ispatlamaya dair temel teşkil eden terimleri/ kavramları bilip bilmediğine bakılmamış, var olan bilgi birikimleri yöneltilecek yazılı ve sözlü sorularla belirlenecek ve var olan bilgi birikimleriyle yaptıkları ispatlarda ve yöneltilecek bazı formlara dayalı doğrulamalardan alınan görüşlere göre ispat olarak neyi algıladıkları ve kabul ettikleri ve hangi yaklaşımları sergilediklerine odaklanılmıştır.

Çalışmamızda algıları belirlemek için öğrencilere yöneltilen doğrulamaların içeriği ve yapısını daha iyi kavramak için onlara yönelik kısa açıklamalar sunmak yararlı olacaktır.

2. 3. İspat Yöntemleri, Biçimleri ve Çeşitli Doğrulama Yolları

"Bilgiye gerekçe göstermenin, az ya da çok güvenilir, birçok yolu vardır" (Taştepe, 2012: 11). Matematikte ise bu, çeşitli ispat yöntemleri ile sağlanmakla olup bütün ispatların ortak amacı iddiaların doğruluğunu veya yanlışlığını göstermektir (İskenderoğlu, 2010).

Matematikte akıl yürütme tümdengelimsel ve tümevarımsal olarak iki şekilde yapılır. Tümdengelim doğrudan ve dolaylı olmak üzere iki çeşitte yapılır. Dolaylı ispatın da olmayana ergi, çelişki bulma, deneme ve aksine örnek verme gibi 4 farklı çeşidi bulunmaktadır.

Tümdengelimin doğrudan ve dolaylı olmak üzere 2 türü vardır.

Doğrudan ispat: Verilen bir teoremde, hipotezin doğru olduğu kabul edilip, hükmün de doğru olduğu gösterilerek yapılmasıdır. O halde, p ⇒q koşullu önermede, p'nin doğru olduğu kabul edilerek, q'nun doğru olduğu gösterilir.

Dolaylı ispat**:** Bu grupta dört ispatlama yöntemi vardır.

***Olmayana ergi yöntemi*:** Doğruluğunun gösterilmesi planlanan hipotezin yanlış kabul edilerek, yanlışlığı ispatlama yolunda çelişkiye düşülerek yapılan ispat yöntemi türüdür. Önermesel olarak bakıldığında ise bir koşullu önermede $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ 'nün ispatlanmasıdır (MEB, 2012).

***Çelişki bulma yöntemi*:** Teoremin sonucunun yanlış kabul edilip hipotezin yanlış olduğu gösterilerek yapılan ispat yöntemi türüdür (MEB, 2012).

***Deneme yöntemi*:** Verilen önermedeki değişkene farklı değerler verilerek önermenin doğruluğunun kontrol edilmesidir.

***Aksine örnek verme*:** Verilen önermenin aksini örnek vererek yanlışlığını göstererek ispatlamaktır (MEB, 2012).

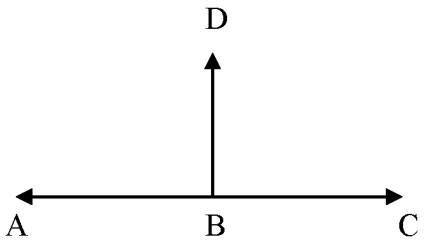
İspat biçimi, ispatın yapılması ve açıklanması sürecinde görsel ve yazınsal teknikler kullanmada çeşitlilik göstermektedir.

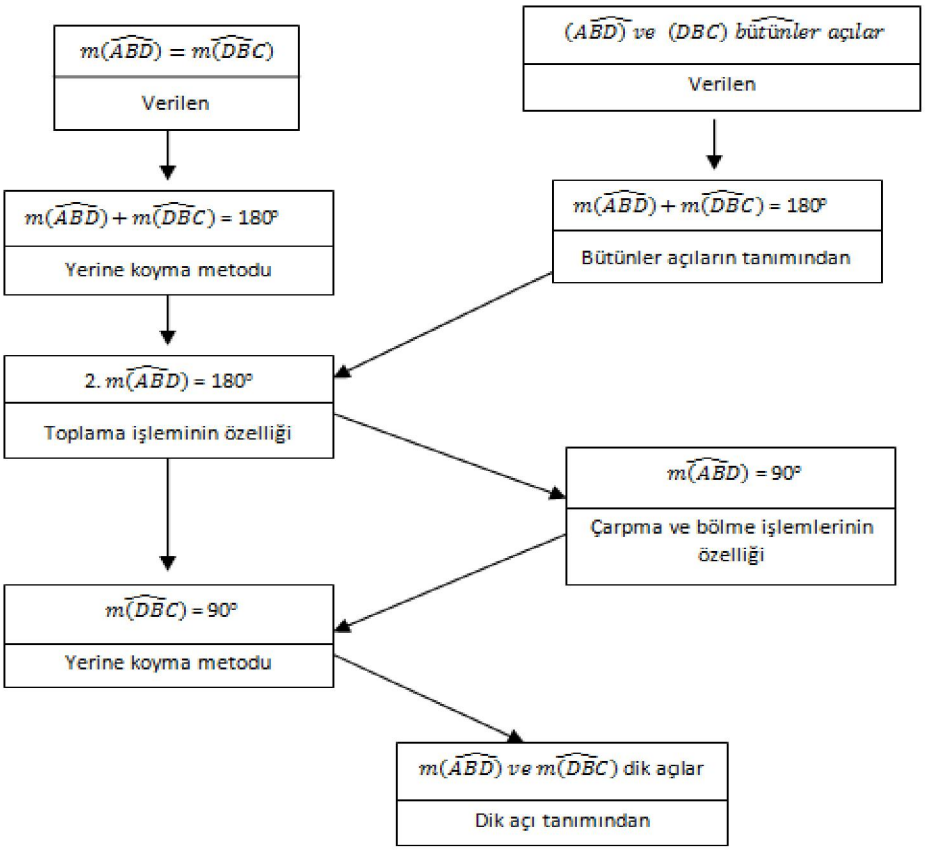
***Paragraf ispat*:** Bu ispat biçiminde, ispat boyunca detaylı açıklamalara yer verilir. İspat sonlandırılana kadar her adım için gerekçeler ayrıntılı bir şekilde belirtilir (MEB, 2011b: 78).

***Akış diyagramı ispat*:** Bu ispat biçimi, kutular içinde yazılan açıklamalar ve bunların dışındaki okların yönlendirmesi ile oluşur. Verilenler, özellikler, teoremler, postulatlar ve tanımlar kutuların altına veya yanına yazılır. Bu akış diyagramı bilgisayar programcılarının sıkça tercih ettikleri bir mantıksal yapıya sahiptir. Her bir adım kolayca ve açık olarak görüldüğü için bu ispat biçimi, cebirsel ve geometrik ispatlara kolayca uyarlanabilir (MEB, 2011b: 77).

Örnek: Aşağıda verilen $(\widehat{ABD}) ve\ \widehat{(DBC)}$ açıları bütünler ve

$m(\widehat{ABD}) = m\widehat{(DBC)}$ ise dik açıdır.





(MEB, 2013c)

***Çift sütun (iki kolonlu) ispat*:** Bu ispat biçiminde; ilk kolonda "ifadeler" başlığı yer alır. Sıra numarası verilerek adım adım son ifadeye kadar yazılır. İkinci kolonda ise "Gerekçeler" adı altında ilk kolon numaralarına paralel olacak şekilde ilk kolondaki ifadelerin yazılma gerekçeleri belirtilir. Bu gerekçelerin her biri ispatı destekler. Gerekçeler; özellikler, teoremler, postulatlar ve tanımlar olabilir (MEB, 2011b: 76). Bu biçim çoğunlukla geometri teoremlerinde kullanılmaktadır. Ancak aşağıda bu çalışmanın veri toplama kısmının 3. aşamasında da kullanılan soyut cebire ait bir teoremin bu forma uygun ispat şekli örneklenmiştir.

Örnek: $H \subseteq$ G ve $H \neq \varnothing$ olsun.

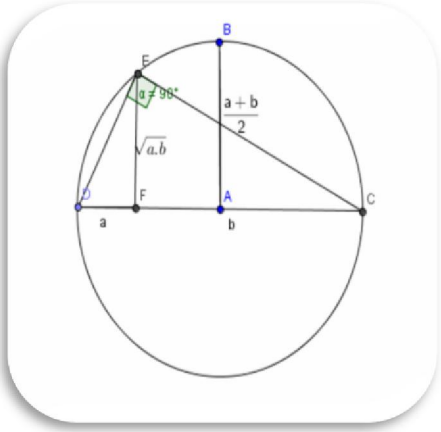
Bu durumda $\forall$ x, y $\in$ H için $x^{-1}.y \in H \Longrightarrow H \leq$ G.

İfadeler	Gerekçeler
1. $H \subseteq G$	1. Verilen
2. $h \in H$ olsun.	2. $H \neq \varnothing$ verilen
3. H bir gruptur.	3. $h^{-1}h \in H$ $(1 \in H)$, birim elemanı olma durumu.
4. $x \in H$ olsun.	4. $H \neq \varnothing$ verilen
5. $x^{-1} \in H$	5. $x^{-1}.1 \in H$, H bir grup
6. $x, y \in H$ olsun.	6. (4)'den dolayı
7. $x^{-1} \in H$ ve $y \in H$	7. (2) ve (5)'den dolayı
8. $(x^{-1}).y \in H$	8. Verilen
9. $(x^{-1})^{-1}.y = x.y \in H$	9. Grup tanımı gereği
10. $H \leq G$	10. İstenen

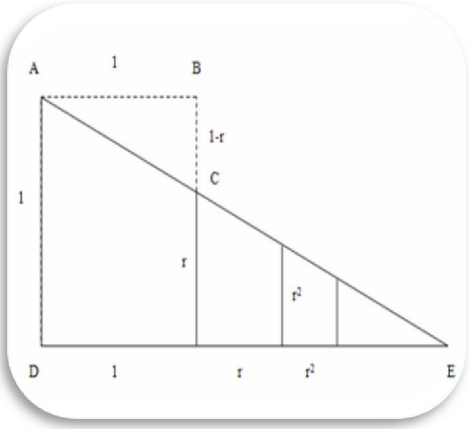
Çeşitli doğrulamalar: Bu başlık altında ele alınan ifadelere doğrulama örneği denmesinin nedeni bazı çevrelerce mantıken doğru sayılan ancak formal açıdan değerlendirildiğinde (kimilerine göre) "gerçek bir" ispat kabul edilmeyen ifadeleri içermesidir. Bu gruptaki doğrulamalardan hem matematik hem de matematik eğitiminde yararlanılmaktadır. Aşağıda bizim çalışmamızda kullandığımız bazı doğrulama "ispat" türleri kısaca açıklanmaktadır.

***Sözsüz ispat (Proof without words/ Visual Proof)*:** Sözsüz ispatlar, bir teoremi kelime kullanmaksızın (ya da çok az kullanarak) ispatlama yoludur. Bu tür gösterimlerin ispat olmadığını söyleyenlere karşılık Nelsen (1993), 'bunlar ispat değilse ne?' diye sorar ve şu şekilde cevaplar 'sözsüz ispatlar, belirli bir durumun gözlemciye neden doğru olabileceğine ve ispatlamaya kişinin doğru bir şekilde nasıl başlangıç yapabileceğini göstermeye yarayan resimler ve şekiller (diagramlar) dir' (Nelsen, 1993: 6). Sözsüz ispatlar, genel anlamıyla bir görselleştirme ihtiyacının ürünü olarak kabul edilebilir. Matematiksel görselleştirme, kalemle ya da bilgisayarlar yardımıyla, matematiksel kavramları veya problemleri anlamak için diagramların zihindeki imajlarının, somut görüntülerinin oluşturulma ve kullanılma sürecidir (Zimmermann & Cunningham, 1991). Görselleştirmenin matematik eğitiminde gerek akademik başarı gerek derse karşı ilgi ve tutumdaki olumlu değişimler gibi birçok faydasının olduğunu ortaya çıkaran çalışmalar mevcuttur (Örn. Booth & Thomas, 1999; Malaty, 2008; Çiltaş, 2011; Uysal-Koğ ve Başer,

2012). Görselleştirmeyi amaçlayan sözsüz ispata yönelik de literatürde çok fazla örnek olmasına karşın ispat öğretimi ve ispatlama becerisine yönelik rolleri ve etkilerine dair çalışmaların fazla olmadığı gözlenmektedir (Uğurel ve diğer, 2011). Aşağıda sözsüz ispata yönelik iki örnek verilmiştir.



(Nelsen, 1993: 49)



(Nelsen, 1993: 120)

***Origami ile ispat*:** Origami bir tür kâğıt katlama sanatıdır. Kâğıt, makas ve yapıştırıcı kullanılmadan çeşitli figürlerin oluşturulması için katlanır veya birleştirilir. Origaminin matematik ve geometri öğretiminde kullanılmasına yönelik çeşitli seviyelerdeki öğrencilerle çalışmalar yürütülmüştür (Tuğrul ve Kavici, 2003; Boakes, 2006; Arıcı, 2011; Polat, 2013). Bu sanat çeşitli matematiksel kurallar kullanılarak yapılmasının yanı sıra bir takım matematiksel teoremlerin ispatı için de kullanılmaktadır. Örneğin, Sakarya Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans programının 4. yarı döneminde yer alan "Origami ile Matematik" dersi kapsamında origami yapımı ile ilgili birçok teknik gösterilirken öğrenme çıktılarından biri de origami ile matematiksel ispatların yapılabilmesidir. Bir kâğıdın çift sayı katlarına katlanması kolayken origami ile tek sayıların katlarına eş bölünmekte, 60^{o}'lik açılar oluşturularak ispatlar yapılmakta, kenarortay ve açıortay gibi üçgenin yardımcı elemanları oluşturulabilmektedir (Krier, 2007). Bizim çalışmamızda ise katılımcılara origami ile herhangi bir üçgende kenarortay uzunluğunun açıortaydan, açıortay uzunluğunun da yükseklikten büyük olduğu gösterilmiştir. Katılımcılardan bu gösterimin ispat olarak kabul edilip edilmeyeceği hakkında görüş alınmıştır.

Çoklu örneklemeye dayalı (deneysel) ispat: Harel & Sowder (1998) göre deneysel ispat algısal (perceptual) ve örneğe dayalı (inductive) olmak üzere 2 çeşittir. Algısal deneysel ispat, algıların bir birleşiminden oluşan doğrulamalardır. Örneğe dayalı ispatlar da başkalarını ikna etmek için bir veya daha fazla özel durumun sayısal denemesidir (Harel & Sowder, 1998). Deneysel gösterime dayalı ispatlar, her öğretim seviyesinde öğrenci için doğrulama yaparken fazlaca kullanılan bir düşünce tarzıdır. Healy & Hoyles (2000) 14-15 yaşlarındaki öğrencilerle ve Chazan'ın (1993) lise öğrencileriyle yaptıkları çalışmalarla da öğrencilerin matematiksel bir durumu örnekler kullanarak ispat yapmaları, deneysel ispatı daha ikna edici bulduklarını ortaya çıkarmıştır. Porteous (1990), öğrencilerin yarıdan fazlasının deneysel doğrulama yaptığı ve genel sonuca bununla ulaşmaya çalıştığını söylemiştir (Knuth & Sutherland, 2004).

Bizim çalışmamızda kullanılan doğrulama örneği ise "çoklu örneklemeye dayalı" olarak isimlendirilmiştir. Doğrulama örneği bir seri açılımının belli bir sayıya yakınsadığı pek çok sayı için hesaplanarak gerçek sonuç sezdirilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmaya ışık tutan bir diğer çalışmada Dickerson (2008) başka bir seri açılımını kullanmıştır. Dickerson bu gösterimdeki serinin ondalık sayı formundaki sayılarının 1'e yakınsadığını bilgisayar destekli olarak üretildiğini söylemiştir. Bizim çalışmamızda merak ettiğimiz şey ise bu sezgiden yola çıkarak öğrenciler tarafından bunun ispat olarak kabul edilip edilmeyeceğidir. Yapılan uygulama Ek-7 de sunulmuştur.

Bilgisayar destekli ispat: Bilgisayarların gelişmesi kaçınılmaz şekilde matematiğin de gelişmesini etkilemiş, sadece matematikçilerin çalışma alanlarını değil düşünce şekillerini de değiştirmiştir (Edwards, 1987'den akt. Hanna, 1991). 1852 yılında Francis Guthrie tarafından ortaya atılan ancak yaklaşık 120 yıl ispatlanamayan 4 renk teoremi (birbirine komşu iki bölgenin farklı renklerde olması koşuluyla en az 4 renk kullanmak gerekir), Kenneth Appel & Wolfgang Haken tarafından 1976'da bilgisayarlar sayesinde ispatlanmıştır (Berkman et all, 1991). Daha önce örneği görülmemiş bir deneyim olan bilgisayarların matematiksel ispatlar için kullanılması matematikçiler arasında, bilgisayarların hata yapıp yapmadığına,

geleneksel kalem-kâğıttan bazı yönleriyle ayrıldığına dair teorik ve felsefi bir takım soruları ortaya çıkarmıştır (Sangallı, 1992). Yani bilgisayar aracılığıyla yapılan ispatlar kimilerince ispat kabul edilirken kimilerince edilmemiştir.

Sonraları bilgisayarlar matematik ve geometri öğretiminin içine entegre edilmesiyle birlikte ispat öğretiminde de kullanılmaya başlamıştır.

> Zira matematiksel anlayışın gelişimini sağlayan ispatın öğretimi ve öğrenimindeki zorluklar, öğrenci ilgi ve motivasyonunu artırma çabaları, dinamik araçların geliştirilmesi araştırmacıları ispatın öğretiminde yeni yollar denemeye teşvik etmiştir (Hadas et all, 2000'den akt. Ceylan, 2012: 2).

İspatın sınıf içindeki rolü, matematiksel anlamayı sağlamak ve desteklemektir (Hanna, 2000). Hanna (2000), ispatların sınıf içindeki bu rolünün gerçekleşmesinde en etkili yolun bilgisayar destekli yapılması yani bir (örn. dinamik geometri) yazılımın kullanmaktan geçtiğini söyler. De Villiers (2012) çalışmasında bu tür yazılımları kullanarak çeşitli *Clough* varsayımlarının geometrik ispatlarını yapmıştır. De Villiers (2003) simetri kavramının açıklanarak yansıtılması ve buna bağlı olarak farklı ispatların yapılabileceğini göstermiştir. De Villiers (2003, 2007) bu yazılımların ispatın açıklama, keşfetme, sistematikleştirme rollerine hizmet ettiğini ifade etmektedir.

Ceylan (2012), ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencileriyle yürüttüğü çalışmasında, ispatların Dinamik Geometri Yazılımları (DGY) kullanarak yapılması sonucu öğrencilerin 'çözüm yolları arama, geometrik özelikleri keşfetme ve genelleme' becerilerini desteklediğini belirtmiştir. Filiz (2009) ise bunlara ek olarak 'çıkarım yapma ve varsayımda bulunma gibi becerilerinin de desteklenebileceğini dile getirmektedir. Ayrıca DGY, öğretmenlerin geometrik teoremlerin ispatlarını öğrencilere kısa zamanda ve anlaşılır şekilde görsel olarak zenginleştirerek öğretmenlerine yardımcı olmaktadır (De Villiers, 2002'den akt. İpek, 2010).

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu çalışma, fen-edebiyat bölümü öğrencilerinin ispat algılarının nasıl şekillendiğini ortaya çıkarmaya yönelik bir araştırma sürecini kapsamaktadır. Öncelikle öğrencilerin ispat kavramı için temel teşkil eden kavram tanımlarının ne olduğu belirlenmeye çalışılmış, sonrasında katılımcıların ispat yapma becerileri incelenmiş ve son olarak araştırmacı ve danışman öğretim üyesi tarafından hazırlanan bir dizi doğrulama örneklerini içeren bir form-a yönelik öğrencilerin düşünceleri ve görüşleri araştırılmıştır. Bu kapsamda çalışma üç aşamadan oluşmaktadır. Bu üç aşmada toplanan verilerin birleşiminden katılımcıların ispat algılarının nasıl şekillendiği ve genel yapısının nasıl olduğu ortaya konulmaktadır. Bu bölümde araştırma modeli, katılımcıların özellikleri, veri toplama araçları ne olduğu ve bu verilerin hangi çözümleme teknikleriyle analiz edildiğine dair bilgilere yer verilecektir.

3. 1. Araştırmanın Modeli

Bu tez araştırması tasarlanması, uygulanması, verilerin toplanması ve analiz edilmesi aşamaları bakımından nitel araştırma paradigması gereklerine göre yapılmıştır.

> "Nitel araştırma", gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel

bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2008: 39).

Nitel araştırma yöntemleri, sosyal bilimlerde bireysel farklılıkları detaylı bir şekilde ortaya çıkarmak için sık sık kullanılır (Berg, 2004; Bogdan & Biklen, 2003). Kişilerin herhangi bir kavrama dair algısı konusu, tümüyle sosyal bilimin araştırma konusudur. Öyle ki algıların araştırılması da bireysel farklılıkları ancak derinlemesine betimlemeyi ön plana çıkaran bir araştırma modeliyle incelenebilir. Bu incelemeler sonucunda varılan herhangi bir bilginin evrene genelleme amacı güdülmediği, geleneksel bilim anlayışının indirgemeci ilkesini benimsememiş ve dolayısıyla nicel araştırmalardaki gibi örneklem kavramının yer almadığı bir paradigma olan nitel araştırma modeliyle (Yıldırım ve Şimşek, 2008) çalışılması uygun görülmüştür.

Nitel araştırmalarda örnekleme gibi bir yönteme ihtiyaç duyulmaması (Goetz & LeCompte, 1984) "durum (örnek olay) çalışması" gibi bir yöntemin ortaya çıkmasını gerektirmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu çalışmada da çeşitli nitel araştırma yöntemlerinden biri olan özel durum çalışması seçilmiştir. Özel durum çalışması, olaylar, kişiler, süreç, dokümanlar ve araştırma konusu gibi çeşitli olguların derinlemesine incelemeyi gerekli kıldığı için eğitim araştırmalarında sıkça kullanılması önerilen yöntemlerdendir (Bogdan & Biklen, 2003; Yin, 2003; Çepni, 2009; Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Eğitim araştırmalarında nitel araştırma modeli gereklerini tam anlamıyla taşıyan, İngilizcesi "Case Study" olan yöntem Türkçe' ye özel durum çalışması, örnek olay ve vaka çalışmaları olarak geçmiştir. Özel durum çalışması betimleyici ve yorumlayıcı araştırma yöntemlerindendir (Çepni, 2009).

Bogdan & Biklen (1998: 54) özel durum çalışmasını "bir durumun, tek bir konunun, dokümanların tek bir derlemesi ve özel bir olayın derinlemesine açıklanması" olarak tanımlar. McMillian (2000) da, özel durum çalışmalarını "bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem" olarak tanımlamaktadır (Büyüköztürk

ve ark. 2010). Özel durum çalışması tanımlamaya, anlamaya, öngörüye, tek başına bireysel olan şeylerin (örn. süreç, hayvan, insan, ev halkı, organizasyon, grup, endüstri, kültür vs.) incelenmesini ön plana alır (Woodside, 2010).

Yin (1984: 23) ise özel durum çalışmasını;

- Güncel bir olguyu kendi yaşam çerçevesi (içeriği) içinde çalışan,
- Olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı ve
- Birden fazla kanıt veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemi olarak tanımlamıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Yin (2003) ve Stake (1995) özel durum çalışmasını farklı terimler kullanarak kategorize etmişlerdir (Baxter & Jack, 2008). Stake (1995) özel durum çalışmasını yapısal (*intrinsic*), araçsal (*instrumental*) ve toplu (*collective*) olarak 3'e ayırmıştır. Yin (2003) ise özel durum çalışmasını araştırıcı (*exploratory*), betimleyici (*descriptive*), açıklayıcı (*explanatory*) olmak üzere 3 çeşidi olduğunu söyler.

> Araştırıcı özel durum çalışması, soruları ve bunun sonrasında gelişen hipotezleri tanımlar, gerekli araştırma işlemlerinin olabilirliğini belirler. Betimleyici özel durum çalışması, bir kavram dâhilinde bir olayın eksiksiz ve bütüncül şekilde betimlenmesini gerektirir. Açıklayıcı özel durum çalışması ise mevcut verilerle olayların nasıl olduğuna yönelik neden-sonuç ilişkisine bağlı açıklamaların yapılmasına yönelik çalışmadır (Mede, 2012: 66).

Bu tez çalışması da betimleyici özel durum çalışması temel alınmıştır. Öğrencilerin ispat algılarının nasıl şekillendiği çoklu veriler ışığında incelenmiş ve var olan algıları bütüncül şekilde incelenmiştir.

3. 2. Katılımcılar

Evren, bir veya birkaç vakadan elde edilen sonuçların, benzer özelliği taşıyan genel bir durum üzerinde genelleştirilmeye çalışıldığı durumu açıklamak için kullanılan kavramdır (Çepni, 2009: 44). Daha çok sayıda birey, olay ve olguyu içeren

evren, belirli yöntemlerle geleneksel bilim anlayışının "indirgeme" ilkesi gereğince küçük ve çalışılabilir bir büyüklüğe (örneklem) indirgenir (Yıldırım ve Şimşek, 2008: 101). Ancak nicel çalışmalarda genelleme ön plandayken nitel çalışmalarda amaç bu değildir. Nitel çalışmalarda elde edilen sonuçların evrene genellenmesi gibi bir durum söz konusu olmadığı için, örneklem seçiminde istatistiksel temsil edilebilirlik yerine daha bütünsel, derinlemesine ve bağlamının anlaşılmasına ilişkin yönelim söz konusudur (Türnüklü, 2000: 548).

Nitel araştırmalarda örneklem büyüklüğünü belirlemede üç kriter vardır. Bunlar; araştırmanın odağı, veri miktarı ve kuramsal örneklemedir (Cropley, 2002'den akt. Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu araştırmada 'veri miktarı' kriteri ön plana alınmış ve buna göre örneklem oluşturulmuştur. Araştırmaya katılanlardan toplanacak verinin miktarı arttıkça verinin derinliği ve genişliği artar ve dolayısıyla örnekleme dâhil edilmesi gereken kişi sayısı azalmalıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Nitel çalışmalarda verinin fazla olabildiği durumlarda 1 kişi ile de araştırmalar yürütülebilmektedir. Bu araştırma, üç aşamada tamamlanmış ve süreç içerisinde çoklu veri toplanması, verinin yeterli miktarda bilgi verebilecek durumda sebebiyle örneklem sayısı 12 katılımcı ile sınırlandırılmıştır.

Örneklem, nitel araştırmalarda yaygın olarak çeşitli amaçlı örnekleme yöntemleri kullanılır (Patton, 1990). Bu tür örneklem seçimlerinde araştırılan gruplar benzer özelliklere sahip olması koşulu ile homojen olarak gruplara bölünür (Çepni, 2009). Bu çalışmada örneklem amaçlı örnekleme yöntemlerinden benzeşik örnekleme (*homogeneous samples*) yöntemi ile belirlenmiştir. Bu yöntemde amaç çalışmaya konu olan durumun, benzeşik özellikler gösteren 6-8 kişilik çalışma grubuyla yapılan görüşmelerin derinlemesine incelenmesidir (Patton, 1990). Çalışmamız Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü 3. ve 4. sınıfında öğrenim gören toplam 12 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar gönüllülük esasına göre belirlenmiştir. Araştırma 2012-2013 yılı bahar yarıyılında öğrenim gören öğrenciler ile gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların 8'i bayan, 4'ü erkek; 8'i 4. sınıf, 4'ü 3. sınıf öğrencisidir. Cinsiyet ve sınıf bazında benzeşik özellikler göstermektedir. Katılımcıların çalışmanın yapıldığı döneme ait kümülatif not

ortalamaları da normal dağılım göstermektedir. Grubun ¼ 'ü 3.00'ın üzerinde, ¼ 'ü 2.00'ın altında ve ½ 'si de 3.00 ilâ 2.00 arasındadır. Katılımcıların kümülatif not ortalamaları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1
Katılımcıların Kümülatif Not Ortalamaları

Katılımcılar	Sınıf	Kümülatif Not Ortalaması
ZEHRA	4	3.52
AYŞE	4	3.38
OZAN	4	3.06
BERNA	3	2.97
SEHER	4	2.43
LEYLA	3	2.24
MURAT	3	2.12
ÖMER	4	2.11
TUĞBA	4	2.07
ESRA	3	1.91
OĞUZ	4	1.84
YAĞMUR	4	1.80

Araştırmanın bir algı belirleme çalışması olması sebebiyle katılımcıların bir önceki öğretim kademesindeki bir takım kişisel bilgilerine de (mezun olduğu okul türü, diploma notu, matematik-geometri derslerinde ispata yer verilip verilmediği gibi) ihtiyaç duyulmuştur. Katılımcıların mezun oldukları okul türü ve diploma ortalamaları aşağıdaki tabloda verilmiştir. 12 katılımcıdan 2 tanesi düz lise, 10 tanesi de süper lise ve anadolu lisesinden mezun olmuşlardır.

Tablo 2
Katılımcıların Lise Mezuniyet Okul Türü ve Ortalamaları

Katılımcılar	Mezuniyet Okul Türü	Mezuniyet Ortalamaları
ZEHRA	Anadolu Lisesi	4.75 /5
AYŞE	Anadolu Lisesi	88 /100
OZAN	Anadolu Lisesi	4.16 / 5
BERNA	Düz Lise	86 / 100
SEHER	Süper Lise	3.97 / 5
LEYLA	Süper Lise	4.65 / 5
MURAT	Anadolu Lisesi	72 / 100

ÖMER	Süper Lise	4.74 / 5
TUĞBA	Düz Lise	4.80 / 5
ESRA	Anadolu Lisesi	76 / 100
OĞUZ	Anadolu Lisesi	82.75 / 100
YAĞMUR	Anadolu Lisesi	4.86 / 5

Araştırmanın tüm aşamalarında katılımcılara araştırmacının kendisi eşlik etmiştir. Uygulamaların yapılacağı günler ve saatler katılımcıların ders programlarına göre düzenlenmiştir. Elde edilen tüm verilerin sadece akademik çalışmalarda (makale, bildiri, tez vb.) kullanılacağı ve her bir katılımcının takma isimlerle belirtileceği çalışmanın her aşamasında dile getirilmiştir.

3. 3. Veri Toplama Araçları

Özel durum araştırması yapmak isteyen kişilerin veri toplamak için birden fazla (üçgenleme/ çeşitleme) teknikten yararlanması gerekir (Ekiz, 2009: 46). Araştırmacılar özel durum çalışmalarının dokümanlar, arşiv kayıtları, doğrudan gözlem, katılımcı gözlem ve görüşmelerle yapılacağını söylerler (Denzin & Lincoln, 1998; Yin, 2003). Veri çeşitlemesi, birden çok veri toplama aracının bir arada işe koşulup, zengin ve birbirini destekleyecek verilerin elde edilmesini sağlamaktadır. Pek çok araştırmacı veri çeşitlemesinin geçerlik ve güvenirliği sağlamak için faydalanılması gerektiğinde hem fikirdir (Berg, 2004; Yıldırım ve Şimşek, 2008). Sistematik şekilde veriler toplandıktan sonra değişkenler arasında ilişki bulunmaya çalışılır (Çepni, 2009).

3. 4. Dokümanlar

Bu çalışmada yazılı dokümanlar ve yarı yapılandırılmış görüşmeler bir arada kullanılmıştır. Araştırmanın yazılı dokümanları 1. ve 2. aşamada elde edilirken, görüşmeleri kapsayan ses kayıtları ise 3. aşamada toplamıştır.

İlk alt problemde ispata yönelik ya da ispatlama sürecinde doğrudan ya da dolaylı olarak yer alan bazı temel kavramların anlamları sorgulanmaktadır. Bu kavramlar belirlenirken özellikle literatürdeki aynı amacı güden (yani temel kavramları ele alan) çalışmalara (Jones, 1997; Varghese, 2009); ispatın rolleri/

fonksiyonlarına yönelik sıralanan listelere ve açıklamalara (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna, 2000; Hemmi & Löfwall, 2009); Ortaöğretim Matematik ve özellikle Geometri Dersi Öğretim Programına; kimi ispat şemalarına (Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998; Riley, 2003) ve ispat ve ispatlamaya yönelik yazılmış kitaplara (Houston, 2010) ve lisans düzeyi matematik ders kitaplarına (Analiz ve Soyut Matematik Kitapları) bakılmıştır. Tümüne yönelik inceleme sonrasında bir kavram listesi oluşturulmuştur. Bu liste danışman öğretim üyesi ile birlikte gözden geçirilerek son hâlinde 14 kavramın uygulanmasına karar verilmiştir. Bu 14 kavrama yönelik bireysel serbest yazma yapmaları istenmiştir. Bu aşamada öğrencilerden ispat ve bununla ilişkili bazı temel kavramların tanımları istenmiştir. Tanımlanması istenen kavramlar şunlardır;

- İspat/ Kanıt (Proof)
- İspatlama / Kanıtlama (Proving)
- İspat yöntemi (Proof method)
- Önerme (Proposition)
- Aksiyom/ Postulat (Axiom/ Postulate)
- Varsayım (Conjecture)
- Teorem (Theorem)
- Sanı (Supposition)
- Lemma (Lemma)
- Örnekleme (Sampling)
- Doğrulama (Justification)
- Genelleme (Generalization)
- Soyutlama (Abstraction)
- Gerçekleme (Verification)

İkinci aşamada üç etapta bir dizi ispat problemi sunulmuş ve ispat yapmaları istenmiştir. Bu aşamanın amacı ispata yönelik algının ispat yapma üzerinden nasıl şekillendiğini belirlemektir. Literatürde de görüldüğü üzere öğrencilerin ispat yapmada sergiledikleri genel geçer ya da karakteristik olan bazı davranışlar bulunmaktadır. Bu davranışlar onların ispat olarak neyi gördükleri ile neyi yapabildiklerine dair önemli bir içe bakış sağlamaktadır. Bu alanın en güzel sistematik örnekleri ispat şemalarıdır. İspat şemaları dışında ispata yönelik algıyı belirlemeyi amaçlayan kimi çalışmalarda da (Piatek-Jimenez, 2004; Conner, 2007; Bayazıt, 2009; Haverhals, 2011) katılımcılara ispat problemlerinin verildiği ve bunun

üzerinden analizler yapıldığı görülmektedir. Dolayısıyla bizim çalışmamızın ikinci aşamasında matematik bölümü öğrencilerine bir dizi ispat problemi uygulanmasına karar verilmiştir. Söz konusu problemlerin üç grupta sunulmasının nedeni veri kaybını önlemektir. Yani katılımcıların önceki bilgilerini unutma, alanı bilmeme, sorularının zor olması gibi nedenlerle ispatları yapamayacakları durumların önüne geçilmesi amaçlanmıştır. Temel amaç ispatı doğru yapmaları değil ispat olarak neyi, neleri sunduklarını belirlemektir. Bu nedenle ispat problemleri seçilirken tümünün çok kolay ya da zor olmamasına, çok bildik ya da aşırı spesifik teoremlere dönük olmamasına, tek bir matematik ya da geometri konusuna yönelik olmamasına, uzun ve karmaşık adımları içermemesine, farklı farklı ispat yapma yöntemlerinin kullanılabilir olmasına ve makul sürelerde uygulanabilir olmasına özen gösterilmiştir. Sonrasında her bir katılımcı, diğer katılımcıların yaptığı bütün ispatları incelemeleri ve puanlama (0-1-2-3) yapmaları istenmiştir. Benzeri bir değerlendirme şeklini Stylianides, Stylianides & Philippou (2005) yönelttikleri bir ispatı öğretmen adaylarından "geçersiz, her zaman doğru, bazen doğru, fikrim yok" şeklinde değerlendirmelerini istemişlerdir.

İkinci aşamadaki dokümanlar öğrencilere toplam 3 turda uygulanan ispat problemlerine yönelik cevapları içermektedir. İspat problemlerinin üçte ikisi (yani birinci ve ikinci turdakiler) ortaöğretim matematik ve geometri konularını kapsayacak şekilde hazırlanmıştır. Birinci turda sadece lise matematiği (5 adet), ikinci turda sadece lise geometrisi (5 adet) ve üçüncü turda ise üniversite düzeyindeki matematik konularını kapsayan (7 adet) önermeleri/ teoremleri ispatlamaları istenmiştir. Üçüncü grupta yer alan ispatlar üniversite düzeyindeki derslerinin içerdiği konularla sınırlıdır. Bu aşamada toplam 17 adet ispat problemi yöneltilmiştir. Bu problemlerin amacı bilgi yoklaması ya da ispat yapma düzeyinin sorgulanması değildir. Odaklanılan şey öğrencilerin ispat olarak neyi / neleri yaptıkları (kabul ettikleri) ve hangi temel yaklaşımları sergiledikleridir.

İkinci aşamada katılımcılara yöneltilen problemler belirlenirken önce literatürdeki araştırmalar, ortaöğretim ve lisans düzeyinde öğretim programları ve ders ve yardımcı kitapların incelemesi yapılmıştır. Daha sonra araştırmacı tarafından

30 adet sorudan oluşan bir banka oluşturulmuştur. Akabinde belirlenen problemler danışman öğretim üyesi ve bir diğer alan uzmanının görüşüne sunularak araştırmanın amacına, problemine ve seviyeye uygunluları açısından incelemeleri yapılmıştır. Bu inceleme sonrası yapılan öneriler çerçevesinde ilk iki grupta 5, 3. grupta ise 7 ispat problemi olmasına karar verilmiştir. Son olarak katılımcıların öğrenim gördüğü matematik bölümündeki bir öğretim üyesinin soruları incelemesi istenmiş ve biçim, ders içeriklerine uygunluk, zorluk-kolaylık gibi unsurlar açısından görüşlerini sunması rica edilmiştir. Bu aşamadaki görüşler sonrasında 4 adet soru çıkartılıp yerlerine yeni sorular eklenmiştir. Böylelikle uzman görüşü aşaması tamamlanmıştır. Uygulamada kullanılan ispat problemleri aşağıdaki gibidir.

2. Aşama 1. Tur İçin İspat Problemleri (Lise Matematik Dersi Öğretim Programı)

1) İki sayı ile aralarında asal olan bir sayı bu iki sayının çarpımıyla da aralarında asaldır. İspatlayınız.

2) **a)** $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. Gösteriniz.
   b) $\sqrt[3]{2}$ irrasyoneldir. Gösteriniz.
   c) Hangi x sayıları için $\sqrt{x}$ irrasyonel olur? Tartışınız.

3) $\forall\ n \geq 3\ , n \in \mathbb{Z}$ için $n^2 < 3^n$ olduğunu gösteriniz.

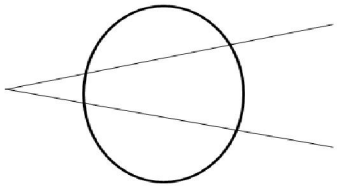
4) $x>0$ ve $y>0$, $a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$ olmak üzere $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$ 'dir. Gösteriniz.

5) $y=ax^2+bx+c$ parabolüne x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise $\Delta=1$ olmalıdır. Gösteriniz.

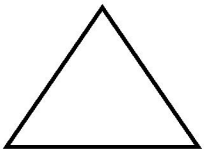
2. Aşama 2. Tur İçin İspat Problemleri (Lise Geometri Dersi Öğretim Programı)

1) Düzlemde iki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı -1'dir. Gösteriniz.

2) Köşe noktası bir çemberin dışında olan ve çemberi iki noktada kesen bir açının ölçüsünün, gördüğü yayların ölçüleri farkının yarısı olduğunu gösteriniz.

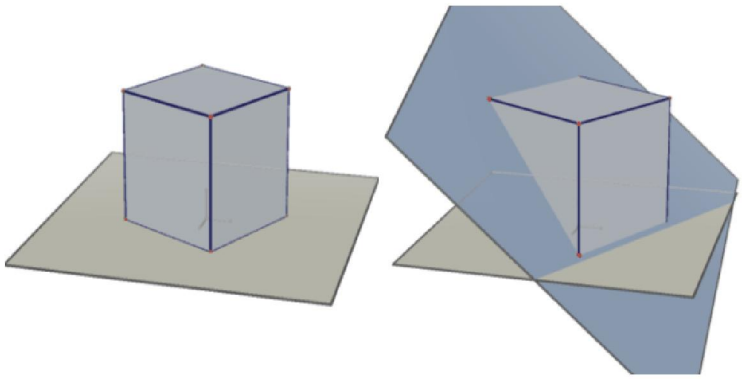


3) Bir üçgenin iç teğet çemberinin kenarlara değdiği noktaları, karşı köşeler ile birleştiren doğru parçalarının bir noktada kesiştiğini gösteriniz.



4) Dik dairesel kesik koninin yanal alanı, tabanlarının çevrelerinin (a= $2\pi r_1$, $b = 2\pi r_2$) toplamı ile ana doğrusunun (l) uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir. (A= (a+b). l) Gösteriniz.

5) Aşağıdaki Şekil-1'de verilen dikdörtgenler prizmasının taban kenarları a ve b birimdir. Prizma, bir düzlem tarafından yer yüzeyiyle (Şekil-2) 30^o'lik açı yapacak şekilde kesildiğinde üst tarafta oluşan cismin alan ve hacim formüllerini a ve b cinsinden bulunuz.



Şekil-1 Şekil-2

2. Aşama 3. Tur İçin İspat Problemleri (Lisans Düzeyi Derslerine İlişkin)

1) y=f(x) fonksiyonunun x=a noktasında türevi var ise f fonksiyonu x=a noktasında süreklidir. İspatlayınız.

2) f(x) > 0 olsun. a ≤ b ≤ c olmak üzere => $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx$ olur. İspatlayınız.

3) f fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve $x_1 < x_2$ olmak üzere $x_1, x_2 \in [a, b]$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ olsun. Bu durumda $f(x_1) < d < f(x_2)$ ise $f(c)=d$ olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.

4) P_o noktasından geçen bir l doğrusu bir çemberi S ve T noktalarında kessin. M merkez olmak üzere $|P_oM|= d$ ise $|P_oS|.|P_oT|= |d^2-r^2|= |k|$'dır.
(NOT: k sayısını $k>0$, $k=0$ ve $k<0$ olarak inceleyiniz.)

5) G bir çarpım grubu ve boş olmayan $M= \{x \in G: ax=xa, \forall a \in G\}$ cümlesi veriliyor. $M \leq G$ olduğunu gösteriniz.

6) Uzayda lineer bağımsız ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ verildiğinde bu vektörler üzerine kurulu olan paralelkenarsal bölgenin alanının $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \|.\| \vec{b} \|.\sin\theta$ olduğunu gösteriniz.

7) a ve b tamsayılarının m ile bölündüğünde aynı kalanı vermeleri için gerek ve yeter şart $a \equiv b$ (m) olmasıdır.

İkinci aşamada katılımcılar bu ispat problemlerinin her birini ders programlarındaki boşluklara göre hazırlanan bir çalışma takviminde bireysel olarak cevaplamışlardır. Araştırmacı ise bu süreçte katılımcıları etkilememek koşuluyla bilfiil yanlarında olmuştur.

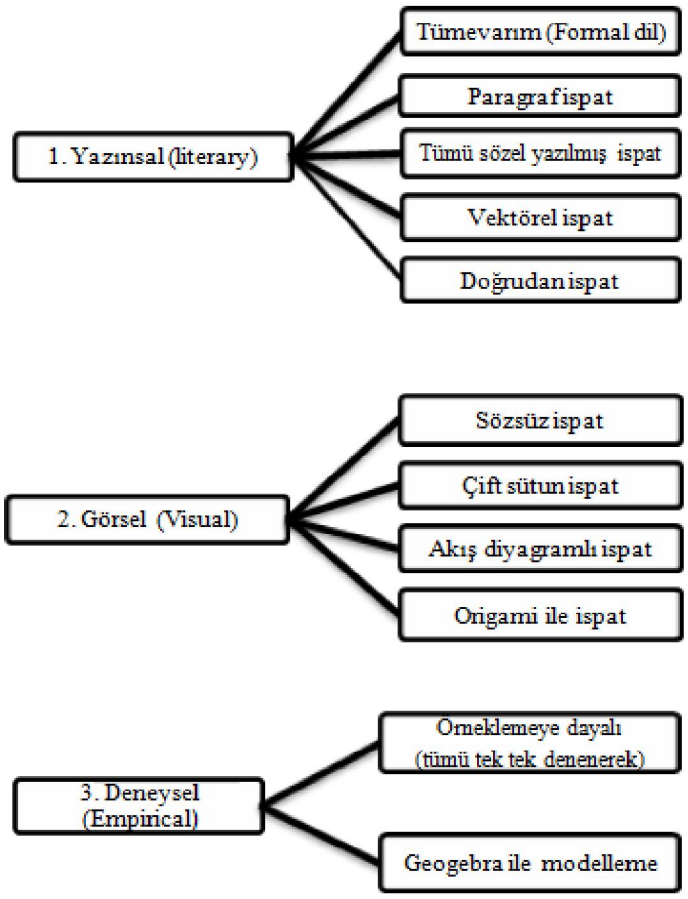
Tüm katılımcıların bu 17 ispatı cevaplamalarının ardından her bir katılımcı diğerlerinin tüm ispatlarını incelemiştir. Bu aşamada kendilerinden inceledikleri her bir problem için verilen yanıtı 0-1-2-3 sayılarından birini atayarak değerlendirmesi istenmiştir. İspat tamamen doğru buluyorsa "3", kısmen doğru buluyorsa "2", yanlış olduğunu düşünüyorsa "1" ve ispat yapılmamış ise "0" vermesi istenmiştir. Bu inceleme sürecinde her bir katılımcı kendisi dışındakilerin ispatlarını inceleyerek toplamda 187 tane ispatı puanlamıştır. Bu da ikinci aşamaya yönelik önemli bir veri seti grubu oluşturmuştur.

Üçüncü aşamada araştırmacı ve danışman öğretim üyesinin birlikte hazırladığı bir form aracılığı ile öğrencilerin bir dizi doğrulama örneğine yönelik görüşleri belirlenmeye çalışılmıştır. Bu aşamanın amacı, ispata yönelik algının ispatın biçimi, şekli, yazım formatı gibi kriterlere bağlı nasıl şekillendiğini ortaya çıkarmaktır. Formda yer alan doğrulama örneklerini ispat olarak görüp görmemeleri ispat olarak neyi gördükleri, baskın olarak hangi kriterlere bağlı karar verdikleri ve bu kriterlerin ağırlıklı olarak hangi türlerde toplandığı katılımcıların ispat algısına ilişkin önemli bir veri sağlamıştır. İspata yönelik algıyı ortaya çıkarmaya yönelik kimi çalışmalarda da (Knuth, 2002c; Dickerson, 2008) bu amaçla hazırlanan ispat örnekleri ile ispata yönelik algı araştırılmıştır. Forma alınan örnekler gerek literatürde yapılan çalışmalar (Chazan, 1993; Almeida, 2000; Segal, 2000; Knuth, 2002c; Dickerson, 2008) gerek Ortaöğretim Matematik ve Geometri Öğretim programları baz alınarak hazırlanmıştır.

Bu aşamada öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Kullanılan formda şu doğrulama örnekleri mevcuttur; tümevarım, doğrudan ve dolaylı ispat yöntemlerini; vektörel, sentetik ve analitik yaklaşımları içeren ve farklı ispat biçimlerini kapsayan (örn. Sözsüz ispat, iki kolonlu (çift sütun) ispat, paragraf ispat, akış diyagramı ispat); bunların dışında, origami ile modellenen, sadece sonlu adımda örnekle doğrulamayı içeren ve sadece metinsel açıklamaya (düz yazı formatında, sayı, sembol, notasyon içermeyen) dayalı örneklerdir. Bu formda yer alan doğrulama örnekleri araştırmacı ve danışman öğretim üyesi tarafından Şekil-10'daki gibi sınıflandırılmıştır. Doğrulamalar üç başlıkta toplanmıştır. Bunlar "Yazınsal", "Görsel" ve "Deneysel" şeklindedir. Yazınsal; tümevarım, paragraf ispat, tümü sözel yazılmış ispat, vektörel ispat, Görsel; sözsüz ispat, akış diyagramı ispat, çift sütun ispat, origami ve Deneysel ise örneklemeye dayalı, Geogebra ile modellenen örnekleri içermektedir.

Şekil 4

Doğrulama Örnekleri Sınıflandırması



Araştırmacı ve danışman tarafınca bu sınıflandırmaya dayalı olarak literatür taraması, orta öğretim matematik ve geometri ders kitapları, konuya ilişkin yerli yabancı yüksek lisans ve doktora tezleri incelenerek hazırlanan 17 adet doğrulama örneği forma alınmıştır (Bkz. Ek-7).

3. 5. Görüşmeler

Araştırmanın 3. aşamasında kullanılan forma dayalı bireysel görüşmeler yapılmıştır. Bir araştırma tekniği olarak görüşme, araştırmacı ile araştırmanın öznesi konumunda yer alan kişi arasında geçen kontrollü ve amaçlı sözel iletişim biçimidir (Cohen & Manion, 1994: 271'den akt. Türnüklü, 2000). Birincil veri kaynaklarından olan görüşmede esas amaç, iletişim kurulan bireyin araştırılan konu hakkında duygu, düşünce ve inançlarının neler olduğunu ortaya çıkarmaktır (Çepni, 2009).

Literatürde görüşme türlerinin birçok sınıflaması vardır (Yıldırım ve Şimşek, 2008; Çepni, 2009). Uygulama kurallarının katılığına göre veya yapısına göre de çeşitlenmiş olan yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmamış görüşme türleri vardır (Çepni, 2009). Bu çeşitlerle benzer özellikler gösteren Patton'ın (1987) sınıflaması ise sohbet tarzı görüşme, görüşme formu yaklaşımı ve standartlaştırılmış açık uçlu görüşme şeklindedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu sınıflamalardan görüşme formu yaklaşımı ve yarı yapılandırılmış görüşmede belli bir form üzerinden gidilerek hazırlanan konu ve forma sadık kalınır, ancak görüşmeci görüşmenin gidişatına göre esnek davranır (Yıldırım ve Şimşek, 2008; Çepni, 2009). Yarı yapılandırılmış görüşme tekniği sahip olduğu belirli düzeyde standartlık ve aynı zamanda esneklik nedeniyle eğitimbilim araştırmalarına daha uygun bir tekniktir (Türnüklü, 2000).

Araştırmacı tarafından ilgili literatür taraması ve uygulanan doğrulama örnekleri dikkate alınarak taslak görüşme formu oluşturulmuş ve bu form danışman öğretim üyesinin görüşüne sunulmuştur. Alınan öneriler çerçevesinde yeniden düzenlenerek son şekli verilmiştir. Formda, doğrulama örnekleri katılımcılara sorularak her birinin onlar için ispat olup olmadıkları, ispat kabul ettiklerinin nedenleri ve etmediklerinin nedenleri sorulmuştur. Bu çalışma esnasında her bir görüşme araştırmacının kendisi tarafından ses kayıt cihazı kullanılarak yapılmıştır.

3. 6. Veri Çözümleme Teknikleri

Nitel araştırmalar, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamında gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik yapılan nitel bir süreçtir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Nitel çalışmalar nicel çalışmaların aksine, çalışma sürecine ilişkin "niçin" ve "nasıl" sorularının cevabını ortaya çıkarır (Leech & Onwuegbuzie, 2007). Öyle ki nitel veri, olası karmaşıklığı ortaya çıkarmaya yönelik zengin ve bütüncül bilgi içerir (Miles & Huberman, 1994: 10).

Analiz aşamasında ilk olarak her bir kavram, ispat, doğrulama örneği olarak tek tek incelenmiş, varılan sonuçlar o kavrama, ispata, doğrulama örneğine verilen cevaplar şeklinde incelenmiştir. Sonrasında verilen cevaplara göre her bir öğrencinin ispat algısı üzerine konuşulmuştur.

3. 6. 1. Doküman İncelemesi

Doküman incelemesi araştırılan olgu hakkında bilgi içeren yazılı materyallerin toplanması ve analiz edilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2008: 187). Dokümanlar, nitel araştırmalarda etkili bir şekilde kullanılması gereken önemli bilgi kaynakları olmasının sebebi araştırmanın geçerliliğini arttırmak amacıyla, gözlem ve görüşmelerin yanında doküman incelemesine de ihtiyaç vardır (Yıldırım ve Şimşek, 2008; Ekiz, 2009).

3. 6. 2. Betimsel Analiz

Sosyal bilimlerdeki araştırmaların hemen hemen hepsi, yazılı materyallerin ya da dokümanların "dikkatli bir şekilde" okunmasına bağlıdır (Holsti, 1968). Betimsel analizde veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebildiği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2008: 224). Bu çalışmada 3 araştırma problemi altında bulgular sunulmuş ve yorumlanmıştır. Sonrasında bu bulgular karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Betimsel analizde, çalışma grubundaki bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilmesi gerekir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu sebeple bulgular sunulurken her bir aşamaya dair dikkat çekici bulunan bulguların doğrudan alıntılarla sunulması, açıklanması ve yorumlanması aşamasının okuyucuya aktarılmasında kolaylık sağlamıştır. Aynı zamanda somut veri sunumu ve neden-sonuç ilişkilerini ortaya çıkarmak açısından doğrudan aktarım gerekli görülmektedir.

2. aşamada katılımcıların ispatlaması gereken 5-5-7 olmak üzere 17 ispat Ek-6'da verilen üç grup için ayrı ayrı hazırlanan inceleme anahtarlarına göre incelenmiştir. Bu inceleme anahtarları araştırmacı tarafından hazırlanıp danışman öğretim üyesinin fikir beyan etmesiyle en son halini almıştır. Araştırmacı tarafından bu inceleme anahtarlarına göre incelenen ve puanlanan ispatlar, başka bir alan uzmanı tarafından da incelenmiş ve puanlanmıştır. Bu puanlama işlemi %80 uyumlu olana dek tartışılarak devam etmiş, puanlar en son halini bu sürecin sonunda almıştır.

Her bir araştırmada geçerlik ve güvenirlik şartlarının sağlanması gerekmektedir. Geçerlik, ulaşılan yargının ve bilginin doğruluğu ve gerçekliği anlamına gelmektedir (Kvale, 1989: 75'den akt. Türnüklü, 2000). Lincoln ve Guba'ya (1985) göre geçerlilik inandırıcılık ve aktarılabilirlikle mümkün kılınmaktadır (Shenton, 2004). Bunlar ise uzun süreli etkileşim, derinlikli veri toplama, çeşitleme, amaçlı örnekleme, ayrıntılı betimleme, uzman incelemesi gibi yöntemlerle sağlanmaktadır (Lincoln & Guba, 1985'den akt. Shenton, 2004). Bu çalışmada da örneklem çalışma amacına göre, uzun bir zamana yayılarak ve üç aşamada tamamlanan çoklu veri toplanarak sağlanmıştır. Uzman incelemesi ise araştırmaya alınacak ispat problemlerinin seçilmesi kısmında yer almaktadır.

Güvenirlik ise, sonrasında yapılan benzer çalışmalarda aynı yöntem kullanılarak benzer sonuçlara ulaşılıp ulaşılmayacağını sağlamaktadır (LeCompte & Goetz, 1982). İç güvenirlik ve dış güvenirlik sağlama koşulları vardır. LeCompte & Goetz'e (1982) göre iç güvenirlik, gözlem, görüşme ve dokümanlarla toplanan verilerin doğrudan betimsel bir yaklaşımla sunulmasıdır. Bu çalışmada güvenirlik, betimsel analiz yöntemi kullanılması sebebiyle her bir aşamada elde edilen bulgulardan birebir alıntılar yapılarak sağlanmıştır. Sonrasında bunlardan yola çıkılarak yorum yapılmış ve bir sonuca varılmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde, verilerin analiz edilmesiyle elde edilen bulgular sunulmaktadır. 3 aşamada tamamlanan çalışmanın verileri aynı şekilde 3 veri seti grubu olarak ayrı ayrı analiz edilmiştir. Sonrasında verilerin birbirini destekleyip desteklemediğine ilişkisel olarak bakılmıştır. Katılımcıların isimlerinin gizli kalması gerektiği ilkesine uyularak her bir katılımcıya cinsiyet türü aynı kalmak kaydıyla farklı bir takma isim verilmiştir.

Bulgular, araştırmanın 3 alt probleminin sırasına göre sunulacaktır. İlk olarak öğrencilerin algılarına zemin oluşturan ispat ve ispata ilişkin tanımlarından ortaya çıkan bulgulara yer verilecektir. İkinci olarak öğrencilere yöneltilen orta öğretim matematik-geometri ve lisans eğitiminin 1 ve 2. sınıflarına ait bilgileri içeren toplamda 17 teoremin ispatlarından oluşan veri grubunun bulguları sunulacaktır. Son olarak öğrencilerin algılarının nasıl şekillendiğinin gözlenmesi amacıyla hazırlanan doğrulama formuna yönelik görüşmelerden elde edilecek bulgulara yer verilecektir.

4. 1. Birinci Alt Probleme Yönelik Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın alt problemlerinin ilki şu şekildedir;

Matematik bölümü öğrencilerinin algılarına zemin oluşturan ispat tanımlamaları nelerdir?

İlk veri grubunda öğrencilerin ispat algılarına zemin oluşturduğu düşünülen ispat ve ispatlamaya ilişkin bazı kavramlara yönelik tanımları, açıklamaları ve (varsa) örnekleri bulunmaktadır. Bu kavramlar; ispat, ispatlama, ispat yöntemi, önerme, aksiyom, varsayım, teorem, sanı, lemma, örnekleme, doğrulama, genelleme, soyutlama, gerçekleme olmak üzere 14 tanedir. İlk olarak öğrencilerin kavramların kaç tanesini tanımlamaya yönelik bir girişimde bulundukları incelenmiştir. Aşağıdaki tabloda (Tablo-3) bu kavramların kaç öğrenci tarafından tanımlandıkları gösterilmektedir.

Tablo 3
Öğrencilerin İspat ve İspatlamaya Yönelik Kavramları Tanımlama Sıklıkları

Katılımcı / Kavram	İspat	İspatlama	İspat Yöntemi	Önerme	Aksiyom	Varsayım	Teorem	Sanı	Lemma	Örnekleme	Doğrulama	Genelleme	Soyutlama	Gerçekleme	TOPLAM
Tuğba	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	8
Ayşe	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	**14**
Esra	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	12
Ömer	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	12
Murat	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	+	-	-	10
Yağmur	+	-	-	-	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	**4**
Berna	+	-	-	+	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	5
Oğuz	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	**14**
Leyla	+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	11
Ozan	+	+	+	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	8
Seher	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	**14**
Zehra	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	+	13
TOPLAM	**12**	10	9	10	8	**12**	**12**	9	11	9	7	8	**3**	5	

Tablo incelendiğinde ispat, varsayım ve teorem kavramları tüm öğrenciler tarafından tanımlandığı görülmektedir. Lemma 11 kişi, ispatlama ve önerme 10'ar kişi, ispat yöntemi, sanı ve örnekleme kavramları 9'ar kişi, aksiyom ve genelleme

kavramları 8'er kişi, doğrulama kavramı 7 kişi, gerçekleme ise 5 kişi tarafından tanımlanmıştır. En az tanımını yapılan kavram 3 kişi ile soyutlamadır. Soyutlama kavramının en az öğrenci tarafından tanımlanmış olması, matematiğin soyutlama bilimi olduğu gerçeğinden yola çıkarak dikkat çekici olduğu düşünülmüştür. Tanım yapmayan kimi öğrenciler, bunu tanımlayamayacağını söylemiş, bazı kavramlara yönelik bu yöntemi bilmediğini söyleyerek bu kavramların bir yöntem olduğunu düşünmüştür. Soyutlama gibi doğrulama, genelleme ve gerçekleme kavramlarını tanımlarken de sıkıntı yaşandığı görülmüştür. İspat kavramı ise en çok tanımı yapılan kavram olmuştur.

Öğrencilerin yaptıkları tanımların sayısına bakılacak olursak, Ayşe, Oğuz ve Seher 14 kavramın hepsine yönelik tanım yapmışlardır. Zehra 13, Esra ve Ömer 12, Leyla 11, Murat 10 kavramın tanımını vermiştir. Tuğba, Ozan, Berna ve Yağmur bu kavramların yarısından çoğunu tanımlayamamışlardır. Bu öğrencilere tanımları neden yapamadıkları sorulduğunda ise kimi bu kavramları duymadıklarını kimi de aslında bu kavramları ispat yaparken kullandıklarını ama kelimelere dökemediklerini dile getirmişlerdir.

Öğrenciler tarafından verilen tüm tanımların doğru olduğu düşünülmemelidir. Bu veriler sadece tanımın yapılmaya çalışılıp çalışılmadığına dair bir sayısal değer sunmaktadır. İzleyen kısımda ise başlıklar altında bu tanımlara yönelik yapılan betimsel analiz bulguları sunulmaktadır.

4.1.1. İspat/ Kanıt (Proof) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Öğrencilerin ispat kavramına ait tanımlamaları benzer ifadeler içermektedir. Katılımcıların büyük bir kısmına göre ispat, "önermenin/ teoremin doğruluğunu incelemek/ göstermek" şeklinde tanımlanmıştır. 12 katılımcıdan 7'si ispatı "doğrulama/ doğruluğunu gösterme" şeklinde ifade etmiştir.

Tablo 4
Katılımcıların İspat Kavramına Yönelik Tanımları

Katılımcı	İspat Tanımı
Ayşe	1- İlk önce belli bir konuda bir birikim sonucunda ortaya atılan soruların, hipotezlerin doğruluğunu, ya da yanlışlığını hiçbir şüphe kalmıcak şekilde, tüm şartlar dahilinde gösterilmesidir.
Zehra	Ortaya atılan bir hipotezin hiçbir şüpheye yer vermeden doğruluğunun gösterilmesidir
Esra	1. İspat: Elimizdeki sınırlı verileri (kabul etmiş olduğumuz) kullanarak istenen önermeye ulaşmak için kullandığımız yöntemlerin tümüne denir
Ozan	1) İSPAT: Varsayımlara ya da aksiyomlara dayanarak bir ifadenin doğru olduğunun gösterilmesi
Leyla	1.) İspat: Elimizdeki verileri gerekli yerlerde kullanarak bizden istenilen sonuca ulaşma yolu. Parçadan bütüne gitmede diyebiliriz
Seher	Kesin matematiksel neticelere ulaşmamızı sağlayan, belli tekniklere dayanan, içerisinde önerme ve aşık önermeler içeren, kesin sonuçlardır.
Murat	İspat: Herhangi bir teoremi veya önermeyi belirli verilerle gösterme işine ispat denir. x çift ise x^2 çifttir, y^2 tek ise y tektir.
Ömer	İspat: Bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını incelemek için yaptığımız işlemlerdir.
Ozan	1) İSPAT: Varsayımlara ya da aksiyomlara dayanarak bir ifadenin doğru olduğunun gösterilmesi
Tuğba	1. Proof: Bir teorem'in doğru sonucuna kanıt denir.
Oğuz	1) Bir bilginin kanıt göstererek, daha önceden bilinen gerçeklerle destekleyerek doğruluğunu ortaya çıkarmak, göstermektir.
Berna	1) İspat = Bir önermenin doğru ya da yanlışlığını gösterme yoludur.

Öğrencilerin sadece 2'si (Tuğba, Murat) ispatın tanımını verirken teoremlerin, 6 tanesi de (Esra, Ömer, Murat, Berna, Seher, Yağmur) önermelerin ispatına gerek duyulduğunu belirtmiştir. Diğer 4 kişi ise ispatlanacak şeye

'matematiksel bir ifade' demiştir. Katılımcılardan ikisi (Ayşe, Zehra) bir gösterimin ispat olabilmesi için "*hiçbir şüphe kalmama*" koşulunu gerekli görmüşlerdir. Yani bu öğrencilere göre ispatın ispat olabilmesi için her durumda ve her şartta doğru olması gerekmektedir.

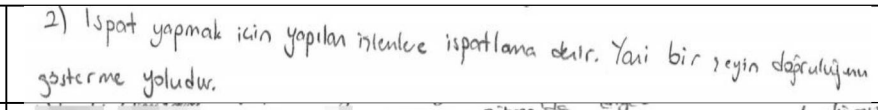
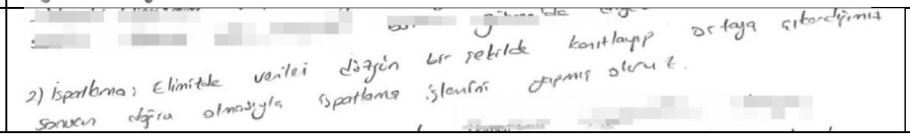
Bazı katılımcılara göre bir ispat yapabilmek için başlangıçta birçok kavramla ifade ettikleri şeyler olması gerekmektedir. Katılımcılardan 2'si (Ayşe, Zehra) bunun bir 'hipotez', 3'ü (Esra, Murat, Leyla) bunun herhangi bir 'veri' olduğunu, 1'i (Ozan) varsayım ve aksiyom olduğunu söylemiştir.

4.1.2. İspatlama / Kanıtlama (Proving) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

İspatlama kavramını 10 kişi tanımlamış, Yağmur ve Berna tanımlayamamışlardır.

Tablo 5
Katılımcıların İspatlama Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	İspatlama Tanımı
Ayşe	Kanıtlama işlemi:-
Zehra	Bir hipotezin geçerliliğini gösterme işlemi.
Seher	ispat yapma aşamasındaki sürece ispatlama denir.
Murat	Verilen teorem veya önermeyi yöntemlerle gösterme eylemidir.
Esra	Verilen önermeyi çeşitli yöntemlerle göstermek.
Ömer	İspatlama: Bir önermenin doğruluğundan şüphe duymuşumuzda, elimizdeki önermenin geçerliliğini kontrol etmedir.
Ozan	2) İspatlama: Bir ifadenin doğruluğunu göstermek için yapılan işlemler, alınan süreçtir.
Tuğba	2. Proving: Bir teorem'in doğru sonuca ulaşmak için yapılan eylemlerdir.

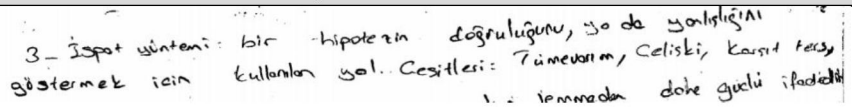
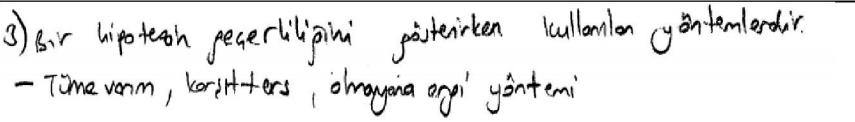
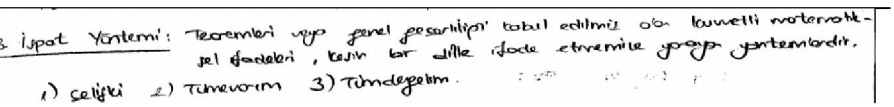
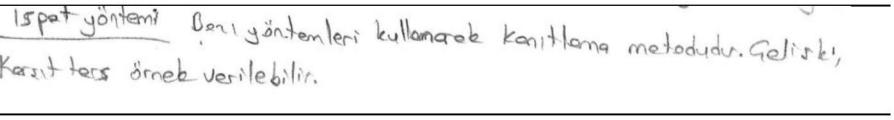
Oğuz	
Leyla	

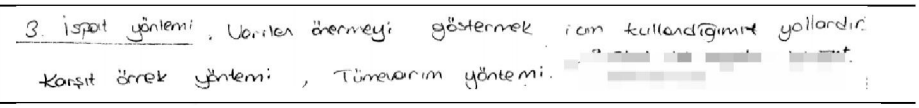
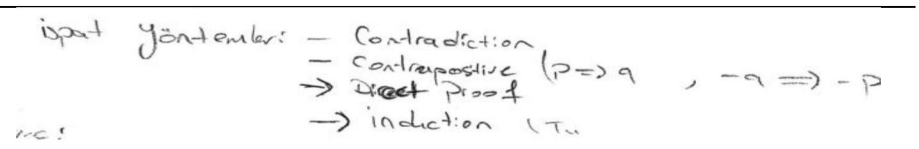
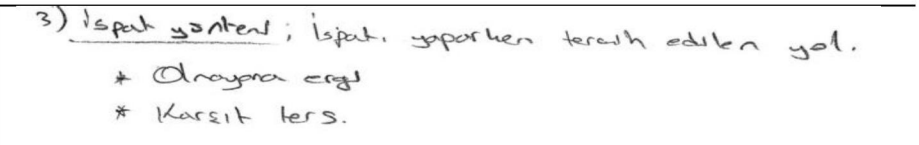
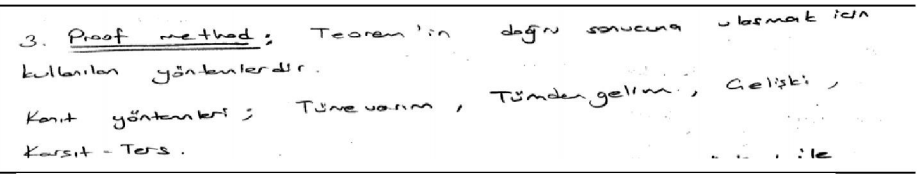
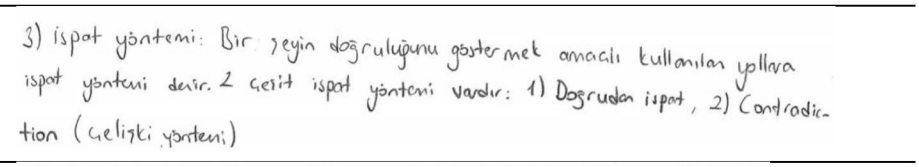
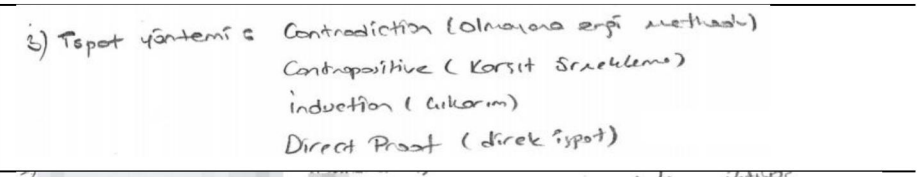
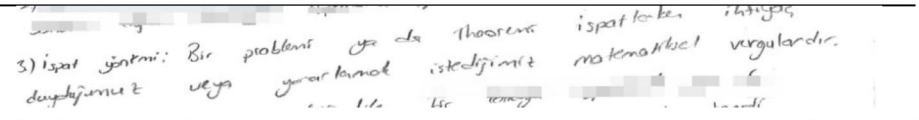
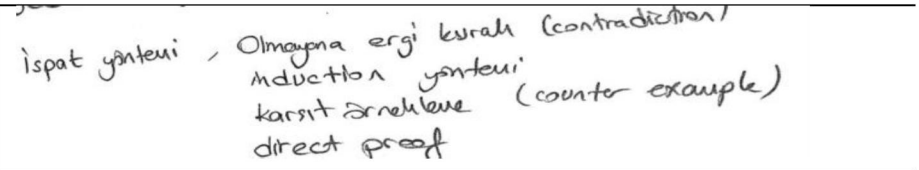
Katılımcıların çoğu farklı kelimeler ve cümlelerle ifade etseler de genel düşünce "*önerme/ teoremin doğrulama /doğruluğunu gösterme işlemi*" şeklindedir. Ömer ve Zehra bundan farklı olarak ispatlamayı *"bir önermenin doğruluğundan şüphe duyduğumuzda, elimizdeki önermenin geçerliliğini kontrol etme / gösterme"* şeklinde tanımlamıştır. Yani geçerlilik kelimesini diğerlerinden farklı olarak Ömer ve Zehra telaffuz etmiştir. Esra, Murat, Ozan ispatlamayı çeşitli yöntemlerin kullanıldığı veya işlemlerin yapıldığı bir 'süreç' olarak değerlendirmişlerdir.

4.1.3. İspat Yöntemi (Proof Method) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Katılımcılardan sadece 6 tanesi bu kavram için tanım yazmış, diğerlerinden 3 tanesi de ispat yöntemlerini yazmışlardır. Kalan 3 kişi de bu kavramın tanımını yapmamıştır. Bu tanımlar birbirine benzer şekildedir;

Tablo 6
Katılımcıların İspat Yöntemine Dair Tanımları

Katılımcı	İspat Yöntemi Tanımı
Ayşe	
Zehra	
Seher	
Murat	

Esra	
Ömer	
Ozan	
Tuğba	
Oğuz	
Berna	
Leyla	
Yağmur	

Katılımcılardan Oğuz ispat yönteminin tanımını *"bir şeyin doğruluğunu göstermek amaçlı kullanılan yollar"* olarak tanımlarken ispatın "*1) doğrudan ispat 2) çelişki yöntemi*" olarak sadece iki çeşidinin olduğunu söylemiştir. Bu ve buna benzer cevaplar ilginç bulunmuştur. Yine Esra da ispat yöntemi olarak sadece "*1) karşıt örnek yöntemi, 2) tümevarım yöntemi"* yazmış, Ayşe *"1) tümevarım, 2) çelişki, 3) karşıt ters*" olarak 3 yöntem yazmıştır.

Murat, Yağmur ve Berna ispat yönteminin tanımını yazamamışlardır. Ancak ispat yöntemi çeşitlerini yazmışlardır. Murat *"çelişki, ters örnek, doğrudan ispat,*

tümevarım", Yağmur, *"olmayana ergi, tümevarım, karşıt örnekleme, doğrudan ispat"*, Berna ise, *"olmayana ergi, karşıt örnekleme, çıkarım, doğrudan ispat"* olarak ispat yöntemlerini yazmışlardır.

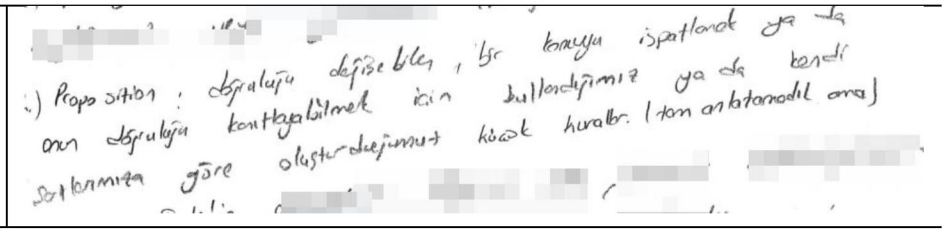
Bulgulara bakıldığında katılımcıların ispat yöntemini bildikleri ancak ispat yöntemlerini sıralamakta zorluk yaşadıkları görülmüştür. Ayrıca kimi öğrencilerin ispat yönteminin ne olduğunu ifade etmek yerine örnek vermeyi tercih ettiği görülmüştür.

4.1.4. Önerme (Proposition) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Katılımcılardan 10'u önermenin tanımını yapabilmiş, 2'si tanım yazamamıştır.

Tablo 7
Katılımcıların Önerme Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	Önerme tanımı
Ayşe	[redacted] – Bir teorem sonucunda ortaya çıkan lemmadan daha güçlü ifadedir
Zehra	Ya doğru ya da yanlış olarak kabul edilebilen ifadelerdir.
Seher	4. Önerme: Teoremin ispatlanmasında kullanılan lemmadan daha kuvvetli ifadelerdir.
Murat	Doğru veya yanlış yargı bildiren ifadelerdir.
Esra	Doğruluğu kesin olmayan incelenmesi istenilen ifadeler
Ömer	Doğru olduğunu düşündüğümüz her bilgi bir önermedir.
Tuğba	4. Proposition = Bir ifadenin hakkında yapılan varsayımların ya doğru ya yanlış olması durumuna önerme denir. Kesinliği yoktur. bir önermedir.
Oğuz	Kesin olarak karar bildiren (doğru ya da yanlış) cümlelerdir.
Berna	Doğru veya yanlış her türlü matematiksel cümlelerdir.

Leyla	

Önermeyi Murat, Berna, Oğuz, Zehra "*doğru veya yanlış yargı bildiren ifadeler*" şeklinde tanımlamışlardır. Ömer, önermeyi "*doğru olduğunu düşündüğümüz her bilgi*" olabileceğini söylemiştir. Oğuz önermenin doğru veya yanlış '*kesinlik*' bildiren bir karar olduğunu ifade etmiştir. İlginç olan bazı tanımlar/ açıklamalar bulunmaktadır.

Tuğba ve Esra önermelerin kesinliğinin olmadığını dile getirmiştir. Berna, önermelerin sadece matematiksel cümleler olduğunu söylerken, Ayşe ve Seher önermeyi teoremlerin ispatlama süreci ile ilişkilendirmiştir. Ayşe önermeyi bir ispatın sonucunda ortaya çıkan lemmadan daha kuvvetli ifade, Seher ise teoremin ispatlamasında kullanılan lemmadan daha kuvvetli ifade şeklinde tanımlamıştır. Leyla önermenin ispat yaparken kullanılan doğruluğu değişebilen küçük kurallar olduğunu söylemiştir.

Bulgulara göre öğrencilerin önerme kavramına tanımına yönelik genel bir bakış açısı olmadığı ve tanımlarında bazı sınırlılık ve hataların olduğu görülmektedir. Önerme, kimisine göre doğru veya yanlış yargılarken, kimine göre sadece doğru yargılardır. Kesinlik söz konusu olduğunda da bazısı kesinlik var demekte, bazısı da kesinlik yoktur demektedir.

4.1.5. Aksiyom/ Postulat (Axiom/ Postulate) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Katılımcıların 8 tanesi aksiyomun tanımını yapabilmiş, 4 tanesi ise yapamamıştır. Katılımcıların hiç biri ise 'postulat' kavramını tanımlayamamıştır. Dikkat çeken durum ise postulat kavramını ilk defa bu araştırma sırasında duyduklarını dile getirmiş olmalarıdır.

Aksiyom kavramını kitaplardaki tanımına en yakın şekilde tanımlayan öğrenciler Berna, Oğuz ve Ozandır. Katılımcıların aksiyom tanımları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 8
Katılımcıların Aksiyom Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	Aksiyom tanımı
Ayşe	5- Aksiyom : Kanıtlanmayan ama doğruluğu herkes tarafından kabul edilen önermelerdir.
Zehra	Doğruluğu ispatlanmayan ama kabul edilen kavramlardır.
Seher	Doğruluğu ya da yanlışı belli olmayan ifadeler.
Esra	5. Aksiyom : Postulate), hiç duymadım Aksiyomu tanımlayamıyorum .
Ömer	Aksiyom: (Postulat, matematik hiç duymadım :)). Teoremleri ispatlamak için kullandığımız doğru bilgiler aksiyom'dur.
Ozan	5) Aksiyom: Doğruluğu gösterilmeden kabul edilen ve bunlara dayanarak lemmalar ve teoremler kurulan ifadelerdir.
Tuğba	5. Axiom : (Bunun Tam Tanımını Hatırlamıyorum.)
Oğuz	Aksiyom: Doğruluğu herkes tarafından bilinen ve öyle kabul edilen önermelerdir.
Berna	5) Aksiyom: Doğruluğu hiçbir ispat yapılmadan kabul edilen cümleler önermelerdir.
Leyla	5.) Aksiyom : Euler'in aksiyomlarını biliyorum ama tanımını anlatamıyorum.

Berna, Oğuz ve Ozan aksiyom için doğruluğu hakkında hiçbir şüphe duyulmadan kabul edilen ve bunlara dayanarak teoremler oluşturulan önermeler olarak düşünmüşlerdir. Ayşe ve Zehra küçük ifade farklılıkları ile doğru tanıma yönelirken Zehra'nın aksiyomları kavram olarak nitelemesi ilginçtir. Ömer aksiyomun ne için ve nerede kullanılabileceğine değinen bir tanım yazmaya

çalışmıştır. Leyla aksiyom kavramının tanımını bilmediğini söylemiş. Euler'in aksiyomlarını hatırladığından söz etmiştir. Seher ise aksiyomun doğruluğu ve yanlışlığının belli olmadığını ifadeler şeklinde yazmıştır.

Tablo incelendiğinde aksiyom kavramının tanımında da öğrencilerin bazı sınırlı ya da yanlış bilgilere sahip oldukları görülmektedir. Katılımcıların postulatı hiç duymadıkları ve tanımlayamadıkları gözlenmiştir.

4.1.6. Varsayım (Conjecture) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Varsayım, mantıksal sonuçlar çıkarmak üzere ön dayanak olarak öne sürülen önerme ya da önermeler birliği olarak tanımlanmaktadır. Örneğin P→Q gerektirmesinde P önermesine varsayım ya da kabul denir.

Varsayıma ait tanımı 12 kişinin hepsi yazmıştır. Ancak katılımcıların 10'u 'sanı' kavramının tanımını vermiştir. Genel düşünce "*doğruluğu/ yanlışlığı ispatlanamamış önermeler / hipotezler / ifadeler*" olarak belirtilmiştir. Bu ifadeler şu şekildedir;

Tablo 9

Katılımcıların Varsayım Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	Varsayım tanımı
Ayşe	Conjecture : İspatlanamamış hipotezlerdir.
Zehra	Ortaya atılmış fakat ispatlanmamış hipotezlerdir.
Seher	Doğruluğu henüz ispatlanmamış ama doğru olduğuna inanılan ifade.
Murat	Varsayım: İspatlanabilirliği var olan yargılardır. Örneğin; Collatz Conjecture Goldbach's Conjecture
Esra	Varsayım: İspatın başında kabul ettiğimiz ifade.
Ömer	Varsayım: Doğru olduğu sanılan, fakat ne doğruluğu ne de yanlışlığı ispatlana bilen önermelere varsayım denir.

Ozan	1) Varsayım : Doğruluğu ve yanlışlığı ispatlanamamış ancak yinede doğru kabul edilen ifadelerdir.
Tuğba	6. Varsayım : Bir olay için düşünülen olasılıklar
Oğuz	6) Varsayım : Doğruluğu kontrol edilmeniz ve öyle kabul edilen önermedir. İspat yaparken kullanılır.
Berna	Varsayım : Doğruluğu ya da yanlışlığı ispatlanamamış önermelerdir.
Leyla	[redacted] Doğruluğunu kesin olarak bilmediğimiz doğrular.
Yağmur	Conjecture : [redacted] Conjecture doğruluğu tam ispatlanamamış gerçeklerdir.

Bu ifadelerden de anlaşılacağı üzere katılımcılar iki kavram arasında kavram karmaşası yaşamışlardır. Varsayım olarak sanı tanımını vermekte, sanı kavramında da çoğu (Ayşe, Ömer, Murat, Oğuz, Ozan, Seher, Zehra) varsayım gibi düşünmektedir.

Esra ise varsayımı ispat için ön dayanak olarak tanımlamış olup kurduğu cümlede *"İspatın başında kabul ettiğimiz ifade"* demiştir. Yani sadece Esra varsayımın tanımını doğru yapmıştır.

Tuğba ise varsayımı, matematik biliminde değil de günlük yaşamda kullanılan anlamında, *"bir olay için düşünülen olasılıklar"* şeklinde tanımlamıştır.

Katılımcıların hemen hemen her lisans dersinden aşina olduğu bir kavram olmasına karşın varsayımı tanımlayamamaları dikkat çekicidir. Tanımı yazma sayısı yüksek olsa da doğruluk açısından değerlendirildiğinde öğrencilerin büyük bölümünün doğru tanım ve açıklamaları veremediği görülmektedir.

4.1.7. Teorem (Theorem) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Katılımcıların hepsi teorem kavramının tanımını yapmıştır. Tanımlar ise tabloda verildiği şekildedir.

Tablo 10
Katılımcıların Teorem Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	Teorem tanımı
Ayşe	7 – Theorem : Doğruluğu kesinlik olan, ispatlarla doğruluğu kanıtlanmış tartışmasız kabul edilen hipotezlerdir.
Zehra	Geçerliliği ispatlanmış hipotezlerdir.
Seher	Öğretici ve yapılan matematik bilgisi ile ispatlanmış, doğruluğu kesin matematiksel ifadelerdir.
Esra	Doğruluğu ispatlanmış, literatüre geçmiş bilimsel gerçekler.
Murat	Teorem İspatlanabilen yargılardır. Örneğin; Rolle'ın Theorem, Mean Value Theorem
Ömer	Doğruluğu kesin olarak kanıtlanmış önemli, büyük önermeler
Ozan	Önerme ve lemmalara dayanarak doğruluğu ispatlanan ifadelerdir.
Tuğba	Matematikte kanıtlanmış önermelere teorem
Oğuz	Doğruluğu deneylerle kanıtlanmış önermedir.
Berna	= Doğruluğu ispatlanmış önermelerdir.
Leyla	Doğruluğu kanıtlanabilen bilgisel önermedir.
Yağmur	Teorem : İspatlanmış gerçeklerdir.

Öğrencilerin tamamına yakını teorem kavramını doğru biçimde tanımlamıştır. 12 katılımcıdan 8'inin (Ayşe, Esra, Ömer, Berna, Oğuz, Leyla, Ozan, Seher) tanımlarında "*doğruluk*" kelimesi geçmekte, 12'si de önermelerin ispat gerektiren ifadeler olduğunu yani genel anlamda *"bir ifadenin teorem olması için doğruluğunun ispatlanabilir/ ispatlanmış olması gerektiğini"* dile getirmiştir. Oğuz ise önermelerin "deneylerle" kanıtlanabilen olanlarının teorem olduğunu söylemiştir. Zehra diğerlerinden farklı olarak "geçerlilik" kavramına değinmiştir. Zehra'ya göre teorem "*geçerliliği ispatlanmış hipotezlerdir*." Öğrencilerin teorem tanımlarında doğruluğu gösterilecek/ gösterilmiş olan şey için 'hipotez, önerme, matematiksel ifade, bilimsel gerçek' gibi terimleri kullandıkları görülmektedir.

4. 1. 8. Sanı Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Sanı: "doğru olduğuna inandığımız ama kanıtına sahip olmadığımız bir önermedir" (Houston, 2010:101). Bu kavram için 8 katılımcıdan tanım alınmıştır, diğerleri ise sanıyı bilmediklerini söylemişlerdir. Ancak yapılan tanımlardan sadece Esra "*gerçekliği hissedilen ama ispatlanamayan ifadelerdir*" şeklinde cevap alınmıştır. Diğer 7 katılımcının (Ayşe, Ömer, Murat, Oğuz, Ozan, Seher, Zehra) sanı kavramını varsayım ile karıştırdığı görülmüştür. Murat varsayım için "*İspatlanabilirliği var olan yargılardır. Goldbach Varsayımı gibi"* tanımını yaparken sanı için "*ispata başlarken bir şeyleri farz etmektir"* demiştir.

Tablo 11
Katılımcıların Sanı Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	Sanı tanımı
Ayşe	Sanı (Supposition) : Varsayım - (Teorem ispatlarken kullanılan).
Zehra	Teoremi ispatlarken kullanılan varsayımlardır.
Seher	İspat yaparak sınamadığımız doğruluğunu veya yanlışını kabul ettiğimiz ifadelerdir. 1) Diyelim ki $k<0$.
Murat	İspata başlarken, bir şeyleri farzetmektir.
Esra	Gerçekliği hissedilen ama ispatlanamayan ifadeler.
Ömer	Sanı: İspat yaparken kullandığımız, doğruluğunu incelediğimiz önerme hakkındaki kabul ettiğimiz düşüncelere sanı denir.
Ozan	İspat yaparak sınanmadan kabul edilenler
Tuğba	Sanı: (Bilmiyorum)
Oğuz	Bir şeyin doğruluğunu tartışmadan kabul etmedir. İspat yaparken kullanılır.

Oğuz ise sanı kavramı için *"bir şeyin doğruluğunu tartışmadan kabul etmedir, ispat yaparken kullanılır"* tanımını vermiştir. Ancak bu tanım kısmen doğru bir yan içerse de bütünü itibariyle tam anlamı verememektedir.

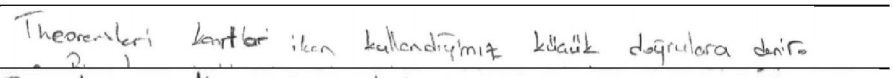
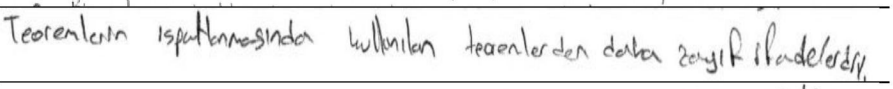
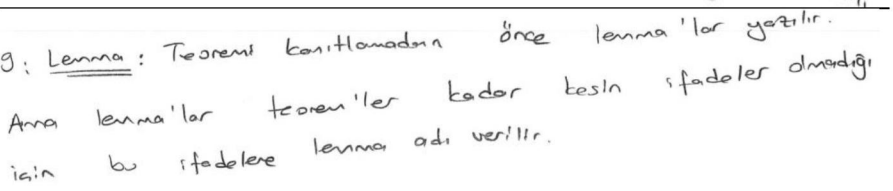
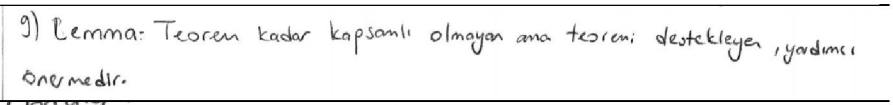
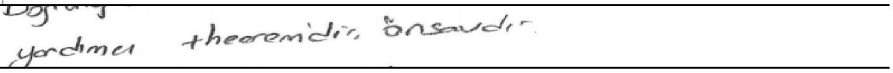
Tablo incelendiğinde öğrencilerin büyük bölümünün varsayım ile sanı kavramlarını karıştırdıkları görülmüştür. Varsayım kavramına verdikleri tanımlarda sanıyı, sanı kavramına verdikleri tanımlarda da varsayımı tanımladıkları görülmektedir. Bu bulguya öğretim esnasında sanı kavramıyla diğer kavramlar kadar sık karşılaşılmaması ve kavramın İngilizce karşılığının farklı şekilde olabilmesinin neden olduğunu düşünüyoruz. Öğrencilerin örneklediği ünlü sanılardan biri olan Goldbach Sanısı İngilizce kaynaklarda Goldbach Conjectıue, ya da Goldbach Hypothesis olarak ifade edilmektedir. Conjecture kelimesi ise varsayım olarak çevrilmektedir. Öğrencilerin yazılarında da anlaşılacağı üzere kimi zaman kavramların İngilizce ifadelerini kullandıkları görülmektedir. Bunun nedeni bölümlerindeki derslerinin bir bölümünün İngilizce veriliyor olmasıdır. Dolayısıyla öğrenciler matematik kavramlarını öğrenirken İngilizce ve Türkçe karşılıklarını bilmektedir.

4.1.9. Lemma (Lemma) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Berna hariç diğer 11 katılımcı lemma için bir tanım yazmıştır. 11 katılımcıdan 9'u (Ayşe, Ömer, Murat, Oğuz, Leyla, Yağmur, Ozan, Seher ve Zehra) lemma için benzer ifadelerle '*teoremi ispatlarken kullanılan yardımcı önermelerdir*' tanımını vermişlerdir. Yapılan tanımlar aşağıdaki şekildedir;

Tablo 12
Katılımcıların Lemma Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	Teorem tanımı
Ayşe	Teorem gösterilirken kullanılan kanıtlarımız önermelerdir. *Katkılarınız için teşekkür ederim....*
Zehra	Teoremleri ispatlarken kullanılan geçerliliği kanıtlanmış yardımcı önermelerdir.
Seher	Tek amacı teoremin ispatlanmasına yardımcı olmak olan küçük ifadeler.
Murat	Yardımcı önerme anlamı taşır.
Esra	Yapılan işlemler sonucunda elde ettiğimiz genel çıkarıma denir.

Ömer	
Ozan	
Tuğba	
Oğuz	
Leyla	

Tuğba, '*teoremi kanıtlamadan önce lemmalar yazılır ancak bu ifadeler kesin ifadeler değildir*' demiştir ancak lemmalar doğru ifadeler içerir. Bu nedenle Tuğba'nın düşüncesi hata içermektedir. Esra ise lemma için *"yapılan işlemler sonucunda elde ettiğimiz genel çıkarım"* tanımını vermiştir. Ancak bu tanım da lemma için doğru bir tanım değildir. Lemma: bir önermeyi kanıtlama yolu üzerinde bir adım olan önermedir (Houston, 2010).

4.1.10. Örnekleme (Sampling) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Örneklemenin matematikte bir anlamı, bir çokluktan aynı özellikleri taşıyan küçük birimleri almak için kullanılan belirli yöntemlerin kullanılmasıdır. İkinci anlamı ise bir teoremin-önermenin doğruluğunun veya yanlışlığının örneklerle gösterilmesidir. Bu sınırlı tanımlamaların ötesinde örnekleme matematiksel düşüncenin geliştirilmesinde ve dolayısıyla ispat öğreniminde önemli bir kavram ve adımdır. Matematiksel ifadeleri ve bir ispatı anlamanın ve üretme yollarının geçtiği önemli yerlerden biri örneklemedir. Özellikle ispatlama sürecinde rol alan örneklerin farklı düzeyde işlevleri ve yararları olması sebebiyle farklı türlerin olduğu görülmektedir. Bunlardan bazıları 'standart örnek, aşikar örnek, uç örnek, karşıt örnek' biçiminde sıralanabilir.

Katılımcıların 9'u örneklemeye yönelik bir tanım yazmıştır. Yağmur, Berna ve Ozan ise bu kavramı tanımlayamamıştır.

Tuğba örnekleme için *"istatistikte belirli bir yığından alınan kümeyi ifade eder"* şeklinde tanımlayarak istatistikteki anlamını yazmıştır. Diğerleri ispat kavramı çerçevesinde tanımlar yazmışlardır.

Tablo 13
Katılımcıların Örnekleme Kavramına Dair Tanımları

Katılımcı	Teorem tanımı
Ayşe	10 - Örnekleme (Sampling) = Teorenin uygulaması. Teoremin nasıl işlediğini gösteren basit uygulama.
Zehra	Bulunan sonucun doğruluğunu kontrol etme.
Seher	İspatlanan bir matematiksel ifadeyi örneklerle sağlandığını incelemek
Murat	Örnekleme Verilen bir ifadeyi örnekleyerek açıklamada. Örneğin; x. tek ise x^2 tektir ifadesinde 5 tek ise 25 tektir.
Esra	10 Örnekleme ispat yöntemlerinden biridir. Verilen önermeyi doğru yada yanlış türetilen bir örnekle gösterme şeklidir.
Ömer	Örnekleme bir konu hakkında elimizde var olan, bildiğimiz diğer opsiyonları göstermeye, örneklemedir,
Tuğba	9: Örnekleme: İstatistikte belirli bir yığından alınan kümeyi ifade eder.
Oğuz	10) Örnekleme: Bir şeyin doğruluğunu ispatladıktan sonra, örneklerle destekleyip gösterilmesine örnekleme denir.
Leyla	Bir Matematiksel bilgiyi somut bir şekilde açıklama olayıdır.

Ayşe ve Zehra örneklemeyi teoremin uygulama alanında kullanılan yol gibi düşünmüştür. Esra ise bir ispat yöntemi demiştir. Ancak örnekleme bir ispat yöntemi değildir. İspatlama aşamasında başvurulan yollardan biridir. Ancak önermenin yanlışlığını tek bir örnekle göstermek açısından düşüncesi doğrudur. Ömer, Leyla, Seher ve Murat teoremi örneklerle somutlaştırmak, açıklama yapmak şeklinde düşünmüşlerdir. İspat ile ilgili verilen yanıtların genelinde örnekleme işleminin ispat yapıldıktan sonra elde edilen şeyin gösterilmesi için yapılan adım olduğu

belirtilmektir. Ancak bir ispatın yapılması ya da anlaşılması sürecinde örneklerden yararlanılabileceğine ilişkin bir açıklama ile karşılaşılmamıştır.

4.1.11. Doğrulama (Justification) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Bu kavram için tanım yapabilen 7 kişi vardır. Ömer, Oğuz, Seher ve Zehra'nın tanımlarında doğrulama kavramına yakın ifadeler kullanılmıştır.

Tablo 14
Katılımcıların Doğrulama Kavramına Ait Tanımları

Katılımcı	Doğrulama tanımı
Ayşe	: Bulunan sonucun doğruluğunun kontrol edilmesi
Zehra	Bulunan sonucun doğruluğunu kontrol etme.
Seher	Kesin sonuca ulaştıran tanıtıcı bir matematiksel ifadenin, matematiksel ispat yöntemleriyle sübütülenmesi sonucu, doğruluğuna emin olmaktır.
Esra	11. Doğrulama : İspat yöntemlerinden biridir. İspat yaparken için başta doğruluğunu kabul ettiğimiz varsayımın ispat sonucu doğruluğuna ulaşmaktır.
Ömer	Doğrulama: Belli bir konudaki düşüncelerin doğru olduğunu, göstermek için yaptığımız işlemlere doğrulama denir.
Oğuz	11) Doğrulama: Bir önermenin daha önceden bilinen bir gerçekle desteklenip onaylanmasına (doğru olduğunu göstermeye) doğrulama denir.
Leyla	Doğrulama: Özellikle dayanışal yöntemle bir varsayımın ispatlanması sırasında kullanılan tüten işlemler.

İspat özünde matematiksel ifadelere yönelik bir iknadır. Söz konusu ikna sürecinde yapılanlardan biride doğrulamadır. Bir ispat yapılırken hem ara adımlarda hem de en son aşamada atılan adımlar birer doğrulamadır. Doğrulama aynı zamanda

matematiksel ifadeler için bir gerekçe ya da argüman sunma/ bulma durumudur. Bu anlamda sadece ispat ile ilişkili değil akıl yürütmeye içeren her yerde yararlanılan bir kavramdır. Öğrencilerden Ayşe, Zehra ve Ömer bu kavramı '*bir sonuç ya da düşüncenin doğruluğun kontrol edilmesi*' şeklinde tanımlamıştır. Oğuz ve Seher de '*onaylama ve emin olma*' şeklinde düşünmüştür. Bu cevaplar bir şeyin (örn. fikir) belli bir çevre (örn. matematik camiası) tarafından onaylanması düşüncesine paralel cevaplardır. Esra doğrulamayı 'ispat yöntemlerinden biri', Leyla ise 'deneysel yolla yapılan ispatlama biçimi' olarak değerlendirmiştir. Bu düşünceler yanlış bilgileri içermektedir.

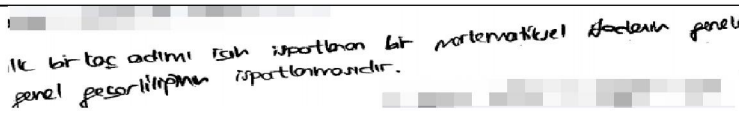
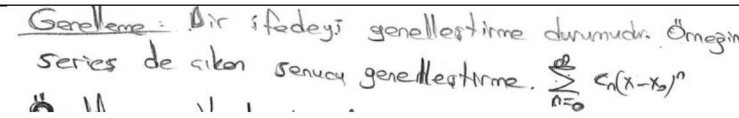
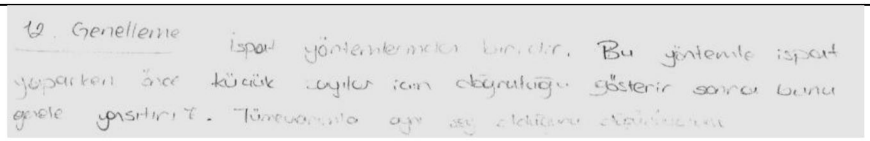
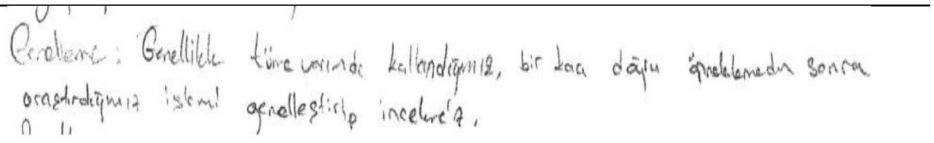
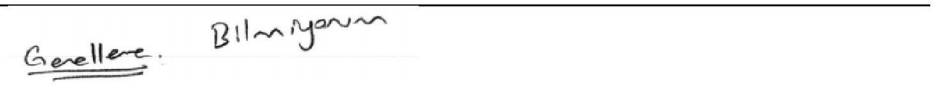
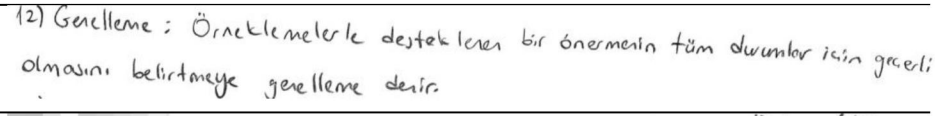
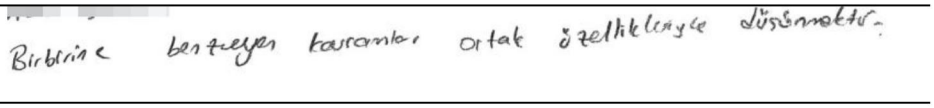
Doğrulama aşamasında kendini ikna etme ve diğer kişileri ikna etme çabası söz konusudur. Doğrulama sürecinde yapılanların diğer kişilerce onaylanmasını sağlamak ve bunun için çeşitli yollar kullanmak söz konusu olabilir. Tanım yapan katılımcıların büyük kısmı bu kavrama yönelik doğru tanım/ açıklamalar yapmakla birlikte kavramı dar bir anlama indirgemektedir.

4.1.12. Genelleme (Generalization) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

12 katılımcıdan 8 tanesi bu kavramın tanımını yapabilmiştir. Öğrencilerin büyük bölümü genellemeyi benzer ifadeler kullanarak tanımlamıştır.

Tablo 15
Katılımcıların Genelleme Kavramına Ait Tanımları

Katılımcı	Genelleme tanımı
Ayşe	12-Genelleme : Bir teoremin uygun koşullar altında, bu şartlar altında (yani bu şartları) sağlayan her durumda doğru olmasıdır.
Zehra	Bir teorem özel durumlar için geçerli olduğu hali daha genel durumlara genişletmektir.

Seher	
Murat	
Esra	
Ömer	
Tuğba	
Oğuz	
Leyla	

Oğuz, *"örneklemelerle desteklenen bir önermenin tüm durumlar için geçerli olmasını belirtmeye genelleme denir"* diye tanımlarken Seher, *"ilk birkaç adımı için ispatlanan bir matematiksel ifadenin genele uyarlanarak genel geçerliliğinin ispatlanmasıdır"* olarak tanımlamıştır. Zehra da genellemeyi *"bir teoremin özel durumlar için geçerli olduğu halini daha genel durumlara genişletmek"* olarak tanımlamıştır. Ayşe genellemeyi bir teoremin "*belli koşullar altında bu şartları sağlayan her durumda doğru olması*" olarak tanımlamıştır.

Esra genellemeyi de doğrulamada olduğu gibi yine bir ispat yöntemi olarak ifade etmiştir. Genellemeyi küçük sayılar için doğruluğunu gösterip onu genele yansıtmak olarak düşünmüştür. Ömer özel bir konu altında örnek vererek tümevarımda yapılan şeyin genelleme olduğunu söylemiştir. Murat ise kuvvet serisini örnek verip burada çıkan sonucu genelleştirmek gibi demiştir. Leyla genellemenin mantığını matematiksel kavram anlamından biraz uzaklaşarak sözlük anlamıyla "*birbirine benzeyen kavramları ortak özellikleriyle düşünmektir*" şeklinde ifade etmiştir.

Katılımcıların tanımları/ açıklamaları genel olarak doğru ifadeleri içermektedir. Bu ifadeler bir anlamada ispatın kendisinin bir genelleme olduğuna gönderme yapmaktadır.

4.1.13. Soyutlama (Abstraction) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

İlginç bir şekilde soyutlama kavramı tüm bu kavramlar arasında en az tanımlanabilen kavram olmuştur. 12 kişiden sadece 3 kişi (Ayşe, Oğuz, Seher) soyutlamaya yönelik bir tanım yazabilmiştir. Üç kişi de farklı bakış açıları sunmuştur. Ayşe '*ifadeleri/ teoremleri soyut kavramlar üstünde düşünme*', Seher '*ispat yapılırken daha çok sezgilere başvurmayı*', Oğuz ise '*doğruluğu somut (gözle görülemeyen) şeylerin düşünce bazında ele alınması*' ifadelerini kullanmıştır.

Tablo 16
Katılımcıların Soyutlama Kavramına Ait Tanımları

Katılımcı	Soyutlama Tanımı
Ayşe	İfadeleri (teoremleri) soyut kavramlar üstünde düşünme -
Seher	Yapılan matematiksel ispatların daha çok sezgilere dayanarak, sözsel bir (4) biçimde matematiğe uyarlanması, işlemlerden daha çok terimlere dayanmasıdır.
Esra	Soyutlama Bu yöntemi bilmiyorum
Oğuz	13) Soyutlama: Doğruluğunu göze görülebilen (somut) yollarla gösterilemeyen sadece düşüncelerle desteklenebilmesidir.

Esra bu kavramı bilmediği dile getirirken yine 'yöntem' kelimesini kullanmış, yani anlamını bilmese de soyutlamanın da bir yöntem olduğunu düşünmüştür.

Soyutlama bilimi olarak tanımlanan matematik bilimiyle her gün temas hâlinde bulunan öğrencilerden sadece üçünün bu kavramı tanımlaması ve bunlarında

farklı farklı görüşleri ifade etmesi oldukça ilginçtir. İspat açısından bakıldığında bir ispatın hem soyut ifadeler içerdiği hem de aslında kendisinin (yani ispatlamanın) bir soyutlama işlemi olduğu söylenebilir. Genelleme yaparken yararlanılan şeylerden biri soyutlamadır. Örneğin Pisagor Teoremi'nin ispatlanması için farklı kenar uzunluklarına sahip dik üçgenler seçerek yapılan denemeler örnekleme, kenarları a, b, ve c şeklinde ifade etmek soyutlama, ispatın sonucu ise bir genellemedir. Öğrencilerin bu manada bir düşünceye sahip olmadıkları ve soyutlamayı farklı biçimlerde algıladıkları görülmüştür.

4.1.14. Gerçekleme (Verification) Kavramına Verilen Tanımların Analizi

Bu kavram için de sadece 5 kişiden tanım alınmıştır. Yapılan tanımlar aşağıdaki tabloda gösterildiği şekildedir.

Tablo 17
Katılımcıların Gerçekleme Kavramına Ait Tanımları

Katılımcı	Gerçekleme Tanımı
Ayşe	Teoremin doğru olduğunu örnek üstünde gösterme.
Zehra	Bir teoremin doğruluğunu gösterme işlemidir.
Seher	(Bence, bilmiyorum ne kadar doğru) Matematiğin (zaten doğanın temelinde var olan matematiğin) gerçeğe uyarlanmasıdır.
Ömer	Gerçekleme: Bir ispat yaparken, yaptığımız işlemler sonucu elimizde geçerleri olduğunu anlatırkenki işlemlere denir.
Oğuz	Soyut bir düşüncenin somut örneklerle gösterilmesine gerçekleme denir.

Bu kişilerden Ayşe ve Zehra "*bir teoremin doğruluğunu gösterme işlemi*" olarak tanımlamıştır. Ancak Ayşe bu doğrulama işleminin bir örnek üzerinde gösterilmesi gerektiğini söylemiştir.

Seher ise "matematiğin (zaten doğanın temelinde var olan matematiğin) gerçeğe uyarlanması" şeklinde tanımlamıştır. Seher kelimeye kendi bakış açısına göre bir anlam yükleyerek görüş sunmuştur. Ömer ise teoremler ispatlanırken okuyucuya aktarırken yapılan işlemler olarak tanımlamıştır. Oğuz soyut bir düşüncenin somut örneklerle gösterilmesi olarak tanımlamıştır.

Tanımlara bakıldığında gerçekleme tanımını yapan katılımcılardan bütünüyle doğru kabul edilebilecek yanıtlar sunamadıkları görülmektedir.

Araştırmanın ilk sorusuna yönelik tüm tanımlar incelendiğinde şunlar ifade edilebilir. Öğrencilerin öğrenim aşamasında ispatlarla oldukça fazla haşır neşir olduklarından yola çıkarak kendilerinden istenen tanımları daha yüksek oranda ve içerikleri daha fazla matematikle ilişkili biçimde tanım yapmaları beklenmekteydi. Ancak hem tanım yapma oranlarında hem de tanımların niteliklerinde beklenenin tam anlamıyla ortaya çıkmadığı görülmektedir.

Örneğin aksiyom kavramına dair yapılan tanım sayısı çok olsa da yapılan tanımlar yeterli değildir. Soyutlama bilimi olarak nitelendirilen matematik disiplinin özünde var olan soyutlama kavramı sadece üç kişi tarafından, günlük hayattaki anlamına yönelik tanımlanabilmiştir. Önerme ise katılımcıların kimine göre kesinlik içeren, kimine göre kesinlik içermeyen yargılardır, kimine göre doğru kimine göre yanlış yargılardır. Katılımcıların ispat, teorem, önerme gibi çok tanıdık gelen kavramları tanımlama oranının daha fazla olduğu görülmüştür. Buradan yola çıkarak öğrencilerin ispat ilişkili olan temel kavramları içeren tanımlarında bazı sınırlılıkların ve ilgi eksikliklerinin olduğu ve bu kavramların genelini doğru biçimde ifade etmede sorun yaşadıkları söylenebilir.

4.2. İkinci Aşamada Yapılan Uygulamalara Ait Bulgular

Araştırmanın ikinci aşamasında ikinci alt probleme cevap aranmıştır. Bu alt problem şu şekildedir;

Öğrencilerin bir takım teoremleri/ önermeleri ispatlama biçimleri nasıldır?

Bu aşamanın verilerini, öğrencilere üç turda uygulanmış olan ispat problemlerinde ortaya koydukları yanıtlar oluşturmuştur. İspat problemlerinin üçte ikisi (yani birinci ve ikinci turu) ortaöğretim matematik ve geometri konularını kapsayacak şekilde hazırlanmıştır. Birinci turda sadece lise matematiği, ikinci turda sadece lise geometrisi ve üçüncü turda ise üniversite düzeyindeki matematik konularını kapsayan sırasıyla 5-5-7 tane (toplam 17) teoremi ispatlamaları istenmiştir. Üçüncü grupta yer alacak 7 problem üniversitenin ilk yıllarındaki derslerinin içerdiği konulara yöneliktir. Bu problemlerin amacı, bilgi yoklaması ya da ispat yapma düzeyinin sorgulanması değildir. Odaklanılan şey öğrencilerin ispat yaparken hangi temel davranışları sergilediklerinden yola çıkarak ispat olarak neyi / neleri yaptıklarını (kabul ettiklerini) tespit etmektir.

Bu amacı gerçekleştirmek için ispat problemlerin değerlendirilmesinde iki işlem yapılmıştır. Birincisi öğrencilere kendi arkadaşlarının kâğıtlarındaki yaptıkları ispatları inceletmek, ikincisi ise araştırmacının kendisinin kullandığı bir "inceleme anahtarı" yardımıyla ispatların betimsel bir analizini yapmaktır. Birincisi öğrencilerin kendi bakış açılarından ispat algılarını belirlemeye, ikincisi ise hem bu algıları daha sağlıklı olarak yorumlamaya hem de algılara sebep olan kimi yapısal durumları içeren karakteristik ya da örüntüsel örnekleri tespit etmeye yöneliktir.

Öğrencilerin 17 adet ispatı yapmalarının ardından her biri, diğerlerinin kâğıtlarındaki tüm ispatlarını tek tek incelemiştir. İnceleme kriteri ise o ispatı kendisine (kâğıdı inceleyen kişiye) göre arkadaşının doğru olarak yapıp yapmadığıdır. Bu inceleme sırasında katılımcıdan her bir ispat için puanlama yapması istenmiştir. İspat tamamen doğru ise "3", kısmen doğru ise "2", yanlış ise

"1", ispat yoksa "0" puan vermeleri istenmiştir. Bu inceleme sonucunda her bir katılımcı kendisi dışındaki arkadaşlarının ispatlarını inceleyerek toplamda 187 tane ispatın puanlamasını yapmıştır. Bu da ikinci aşamada algıyı belirlemeye yönelik önemli bir veri setini oluşturmuştur.

İkinci aşamada ise Tablo-18'de verilen inceleme anahtarı yardımıyla katılımcıların ispat yaparken örneklerden, açıklamalardan, şekillerden yararlanıp yararlanmadığı, matematiksel dil kullanımının genel düzeyi ve ispatın doğru biçimde yapılıp yapılmadığına bakılmıştır. İnceleme anahtarı ispatta yapılanları kabaca betimleme amacı gütmektedir. Araştırmacı tarafından yapılan analizde ispatın doğruluğunu yönelik bakış açısında bu ispatlara yönelik kitaplarda sunulan ispatlar baz alınmış ve öğrencilerin doğru/ yanlış/ eksik etiketlemeleri ile araştırmacınınkiler karşılaştırılmıştır.

Her üç grup ispat için hem öğrencilerinin puanlama tablosu hem de araştırmacının puanlama tablosu sunulmuş ve karşılaştırmaları yapılmıştır.

Tablo 18
Birinci Gruptaki İspatlar İçin Araştırmacının İnceleme Anahtarı

<table>
<tr><td colspan="8">Öğrencinin İsmi : .....</td></tr>
<tr><td rowspan="5">İspat No</td><td colspan="7">Teoremin ispatı</td></tr>
<tr><td>Yapılmamış</td><td colspan="6">Yapılmış</td></tr>
<tr><td rowspan="2">--</td><td colspan="2">Örnekleme
(A)</td><td colspan="2">Açıklama
(B)</td><td colspan="3">Matematiksel Dil
(C)</td></tr>
<tr><td>Var
1</td><td>Yok
0</td><td>Var
1</td><td>Yok
0</td><td>Yeterli
2</td><td>Yetersiz
1</td><td>Yok
0</td></tr>
<tr><td colspan="7">İspatın doğruluğu (D)</td></tr>
<tr><td>Doğru
3</td><td colspan="2">Eksik
2</td><td colspan="2">Yanlış
1</td><td colspan="2">Yok
0</td></tr>
</table>

Öğrenciler ispatları değerlendirirken karşı tarafı ikna etmeyi sağlayacak açıklamaların ispatta yer almasına çok dikkat etmişlerdir. Açıklama diye kastedilen veya istenilen durum, yazılan ifadelerin anlaşılabilirliğini sağlayan, çıkarımların neye dayanarak yapıldığını gösteren, karşı tarafı ikna etmede kolaylık sağlayacak bir

takım cümlelerin yazılmasıdır. Matematiksel dil olarak kabul edilen kriterler ise, matematiksel notasyonların, operatörlerin, sembollerin, matematiksel mantık kapsamında bazı cümlelerin (farz edelim, kabul edelim, varsayalım vs.) kullanımıdır. Matematiksel gösterimlere şu örnekleri verebiliriz; '*iki sayı aralarında asal*' ifadesinin sözel olarak değil de '*obeb (a,b)=1*' şeklinde, '*a bir doğal sayıdır*' yerine 'aϵIN' kullanılması.

4.2.1. Birinci Gruptaki İspatlara Yönelik Bulgular

Birinci grupta yapılan ispatların genel durumuna bakmak için araştırmacının 12 öğrencinin 5 teorem ispatına verdiği puanlar Tablo 19'da gösterilmektedir.

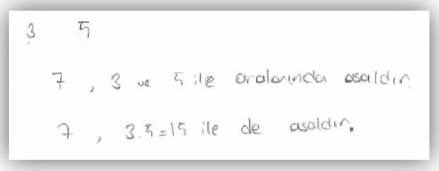
Tablo 19
Araştırmacının 1. Gruptaki Öğrenci İspatlarına Verdiği Puanlar

	A	B	C	D		A	B	C	D
TUĞBA					*AYŞE*				
1	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*
2a	*0*	*1*	*1*	*1*	*2a*	*0*	*1*	*2*	*3*
2b	*0*	*1*	*1*	*1*	*2b*	*0*	*1*	*2*	*3*
3	*0*	*1*	*2*	*3*	*3*	*0*	*1*	*2*	*3*
4	*0*	*1*	*1*	*3*	*4*	*0*	*0*	*2*	*2*
5	-	-	-	*0*	*5*	*0*	*1*	*2*	*3*
ESRA					*ÖMER*				
1	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*	*1*
2a	*0*	*0*	*1*	*1*	*2a*	*0*	*1*	*2*	*3*
2b	-	-	-	*0*	*2b*	*0*	*1*	*2*	*3*
3	*1*	*0*	*0*	*1*	*3*	*0*	*1*	*1*	*3*
4	*0*	*0*	*1*	*3*	*4*	*0*	*1*	*2*	*3*
5	-	-	-	*0*	*5*	*0*	*0*	*1*	*1*
MURAT					*YAĞMUR*				
1	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*0*	*2*	*1*
2a	*0*	*1*	*2*	*3*	*2a*	*0*	*1*	*2*	*3*
2b	*0*	*1*	*2*	*3*	*2b*	*0*	*1*	*2*	*3*
3	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*	*0*	*1*	*2*	*3*
4	*0*	*0*	*1*	*1*	*4*	*0*	*1*	*2*	*3*
5	*0*	*0*	*1*	*1*	*5*	*0*	*1*	*2*	*1*
BERNA					*OĞUZ*				
1	*0*	*1*	*2*	*1*	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*

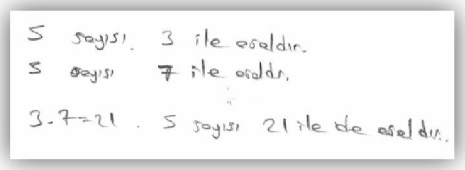
2a	*0*	*1*	*2*	*3*		*2a*	*0*	*1*	*2*	*3*
2b	*0*	*1*	*2*	*3*		*2b*	*0*	*1*	*2*	*2*
3	*0*	*1*	*2*	*3*		*3*	*0*	*1*	*2*	*3*
4	*0*	*1*	*2*	*3*		*4*	*0*	*1*	*2*	*3*
5	*-*	*-*	*-*	*0*		*5*	*0*	*0*	*2*	*2*
LEYLA						*OZAN*				
1	*0*	*1*	*1*	*1*		*1*	*0*	*0*	*2*	*3*
2a	*0*	*1*	*1*	*1*		*2a*	*0*	*1*	*1*	*2*
2b	*0*	*1*	*1*	*1*		*2b*	*-*	*-*	*-*	*0*
3	*1*	*1*	*1*	*2*		*3*	*0*	*0*	*2*	*3*
4	*0*	*0*	*1*	*3*		*4*	*0*	*0*	*1*	*1*
5	*-*	*-*	*-*	*0*		*5*	*-*	*-*	*-*	*0*
SEHER						*ZEHRA*				
1	*0*	*1*	*2*	*3*		*1*	*0*	*1*	*2*	*3*
2a	*0*	*1*	*2*	*3*		*2a*	*0*	*1*	*2*	*3*
2b	*0*	*1*	*2*	*3*		*2b*	*0*	*1*	*2*	*3*
3	*0*	*1*	*2*	*3*		*3*	*0*	*1*	*2*	*3*
4	*0*	*0*	*2*	*1*		*4*	*0*	*1*	*2*	*3*
5	*0*	*1*	*2*	*3*		*5*	*0*	*1*	*2*	*3*

1. Teoremde "*iki sayı ile aralarında asal olan bir sayı bu iki sayının çarpımıyla da aralarında asaldır*" ifadesini ispatlamaları istenmiştir. Tablo-19 incelendiğinde katılımcıların 10'u örnek vermeden, 2'si (Esra ve Murat) sadece örnek vererek ispatlamışlardır. Aşağıda görüldüğü gibi Esra ve Murat'ın ispatları üniversite seviyesinde kabul edilebilir seviyede değillerdir.

Şekil 5
Esra ve Murat'ın 1. Teoreme Yaptıkları İspatlar



Esra'nın 1. teoreme ispatı

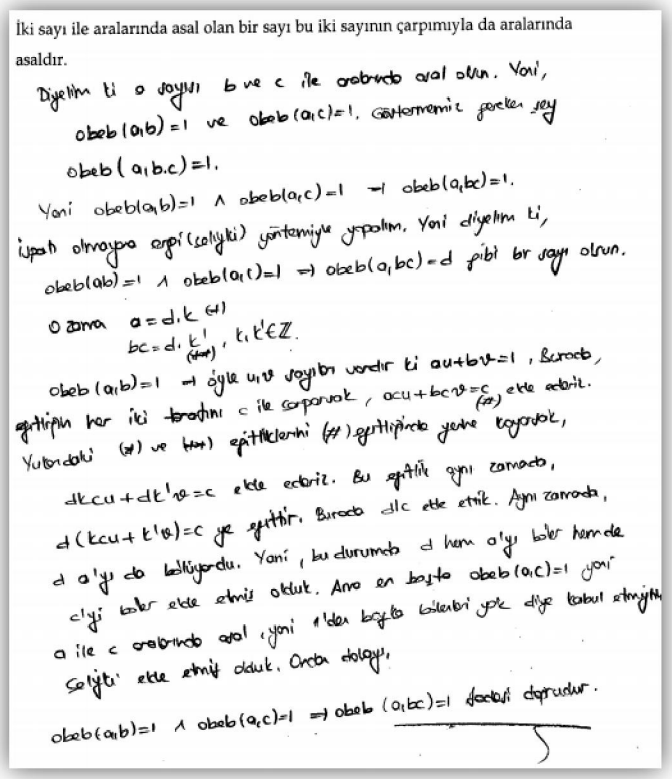


Murat'ın 1. teoreme ispatı

Katılımcıların 8'i 1. ispat için gerekli açıklamalara yer vermiş, 4'ü ise yer vermemiştir. Yeterli düzeyde (2 puan) matematiksel dil seviyesine ulaşan kişi sayısı ise 7'dir. Tuğba, Leyla ve Ömer'in ispatlarında matematiksel dil kullanılmasına rağmen bu yeterli görülmemiştir. Bu teoremin ispatını ise tam anlamıyla doğru yapan

kişiler ise Ayşe, Oğuz, Ozan, Seher ve Zehra'dır. 5 kişi tarafından yapılan bu ispat, ispatı kolay sayılabilecek bir teorem için çok düşük bir seviyedir. İspatı doğru yapan katılımcılardan Seher'in ispatı aşağıda verildiği gibidir. Seher'in diğer tüm ispatlarında da aşağıdaki gibi matematiksel dil kurallarına uygun ve çok fazla açıklamalarla desteklediği görülmüştür. Diğer aşamada her bir katılımcının ispatları diğer 11 kişi tarafından değerlendirilmeye tabi olmuştur. Seher'in çok fazla açıklamaya yer vermesi bazı arkadaşları (Örn. Ömer) tarafından gereksiz görülmüş, matematiksel dil kullanımında yalınlık esas alınması gerektiği düşünülerek, buna aykırı bir davranış olduğu söylenmiştir.

Şekil 6
Seher'in 1. Teoreme Yaptığı İspat

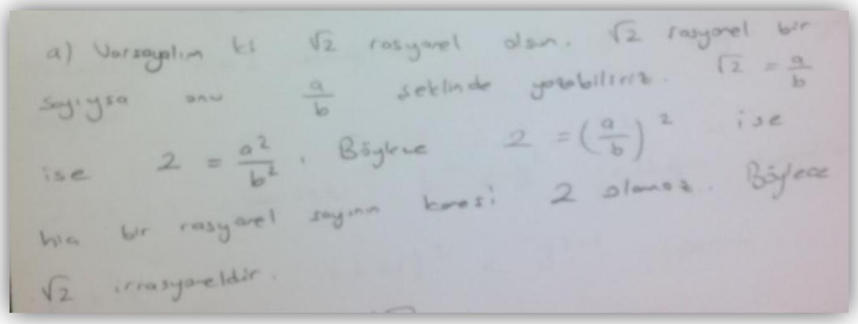

İki sayı ile aralarında asal olan bir sayı bu iki sayının çarpımıyla da aralarında asaldır.

Diyelim ki a sayısı b ve c ile aralarında asal olsun. Yani,
obeb(a,b)=1 ve obeb(a,c)=1. Göstermemiz gereken şey
obeb(a,b.c)=1.
Yani obeb(a,b)=1 ∧ obeb(a,c)=1 ⇒ obeb(a,bc)=1.
İspatı olmayana ergi (çelişki) yöntemiyle yapalım. Yani diyelim ki,
obeb(a,b)=1 ∧ obeb(a,c)=1 ⇒ obeb(a,bc)=d gibi bir sayı olsun.
O zaman a=d.k (*)
bc=d.k', k,k'∈Z.
obeb(a,b)=1 ⇒ öyle u ve v sayıları vardır ki au+bv=1, Buradan,
eşitliğin her iki tarafını c ile çarparsak, acu+bcv=c (**) elde edebiliriz.
Yukarıdaki (*) ve (**) eşitliklerini (**) eşitliğinde yerine koyarsak,
dkcu+dk'v=c elde ederiz. Bu eşitlik aynı zamanda,
d(kcu+k'v)=c ye eşittir. Burada d|c elde etmiş. Aynı zamanda,
d a'yı da bölüyordu. Yani, bu durumda d hem a'yı böler hem de
c'yi böler elde etmiş olduk. Ama en başta obeb(a,c)=1 yani
a ile c aralarında asal, yani 1'den başka bölenleri yok diye kabul etmiştik.
Çelişki elde etmiş olduk. Orada dolayı,
obeb(a,b)=1 ∧ obeb(a,c)=1 ⇒ obeb(a,bc)=1 ifadesi doğrudur.

2. Teorem iki şıktan oluşmaktadır. İlki $\sqrt{2}$'nin irrasyonelliğinin ispatlanmasıdır. Bu ispatta Esra hariç herkes açıklama yaparak bunu ispatlamışlardır. 8 kişinin ispatı tam doğru olarak kabul edilmiştir. Katılımcılar bu ispatı daha önce derslerinde yaptıklarını da dile getirmişlerdir. Bu sebeple bazı kişilerin (Esra, Tuğba, Leyla) ispatlarında önceden yapılanları hatırlamaya yönelik işlemler yapıldığı

görülmüştür. Bu kişilerden Tuğba'nın ispatı aşağıdaki gibidir. Tuğba, bu ispatın başlangıç aşamasını yapmış ancak devamını (hatırlayamadığı için) getirememiştir.

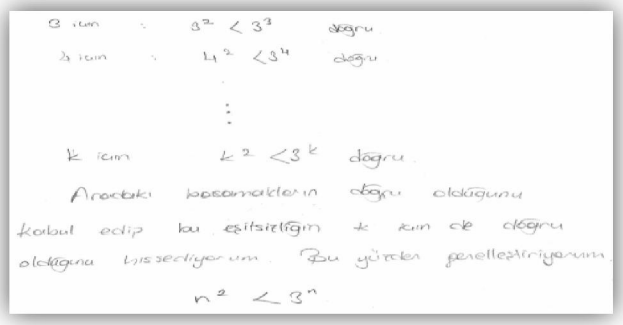
Şekil 7
Tuğba'nın 2. Teoreme Yaptığı İspat



2. Teoremin diğer şıkkı ise $\sqrt[3]{2}$'nin irrasyonelliğinin gösterilmesidir. Tablolardan görülebileceği gibi ilk ispatı yapan 8 kişi bu şıkkı da doğru yapmıştır. Esra ve Ozan ise ikinci şıkkı hiç yapamamışlardır.

3. Teoremde katılımcılardan " $\forall\, n \geq 3,\ n \in \mathbb{Z}$ *için* $n^2 < 3^n$ *olduğunu*" göstermeleri istenmiştir. Bu ispat çoğu kişi tarafından tümevarım ispat yöntemi ile ispatlanmıştır. Bu ispatı doğru yapan 8 kişi (Tuğba, Ayşe, Ömer, Yağmur, Berna, Oğuz, Seher, Zehra) gerekli açıklamalara yer vermiştir. İspatı doğru yapan katılımcılardan Ömer hariç diğer 8 kişinin ise matematiksel dil kullanma seviyeleri yeterli bulunmuştur. Zehra, 3. aşamada tümevarım ispat yönteminin kendisini tam anlamıyla ikna etmediğini söylemesine karşın 2. aşamanın 1. uygulamasındaki bu teoremi tümevarımla ispatlamıştır. Esra, Murat ve Leyla bu ispatı yapamamışlardır. Bu kişilerden Esra'nın yaptığı ispat aşağıda gösterildiği gibidir.

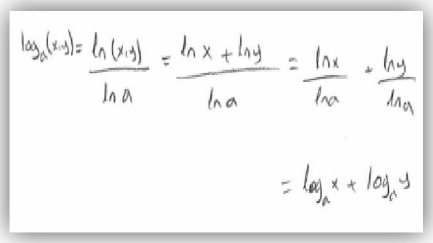
Şekil 8
Esra'nın 3. Teoreme Yaptığı İspat



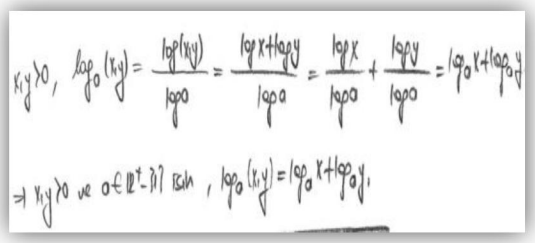
Diğer ispatları da incelendiğinde, Esra'nın kabul etmeyi, doğrulama ve genelleme basamaklarını yapmayı kavrayamadığı düşünülmektedir.

4. Teoremde katılımcılardan "*x>0 ve y>0, a ϵ ℝ⁺\{1} olmak üzere* $log_a(x.y) = log_a x + log_a y$" yı ispatlamaları istenmiştir. 8 kişinin (Tuğba, Esra, Ömer, Yağmur, Berna, Oğuz, Leyla, Zehra) ispatları doğru olarak değerlendirilmiştir. Tuğba, Ömer, Yağmur, Berna, Oğuz ve Zehra olmak üzere 6 kişi açıklama yaparak ispat yapmıştır. Yeterli düzeyde matematiksel dil kullanan kişiler ise Ayşe, Ömer, Yağmur, Berna, Oğuz, Seher ve Zehra'dır. Seher ve Ozan ispatlamaları gereken ifadeyi ispat aşamasında kullandıkları için ispatları yanlış olarak değerlendirilmiştir.

Şekil 9
Ozan ve Seher'in 4. Teoreme Yaptıkları İspatlar



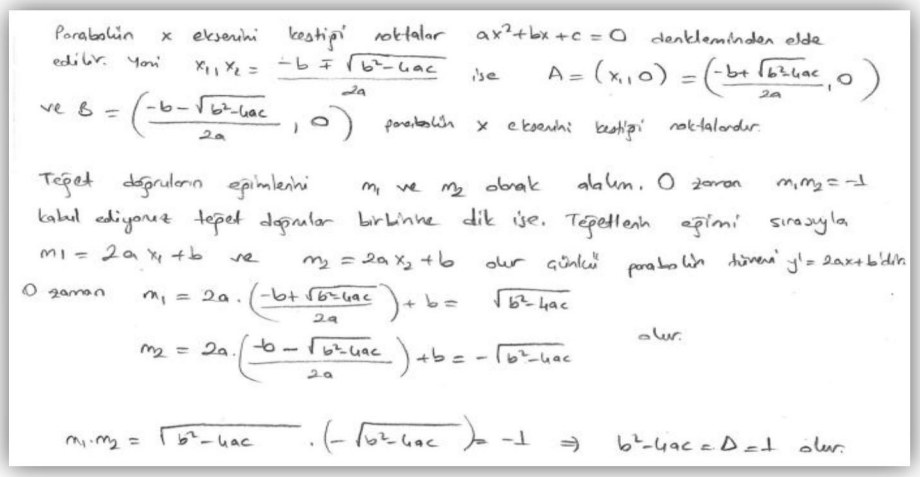
Ozan'ın 4. teoreme ispatı



Seher'in 4. teoreme ispatı

5. teoremde katılımcılardan "*y=ax²+bx+c parabolüne x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise Δ=1 olmalıdır*" ifadesini ispatlamaları istenmiştir. 1. Grup ispatlarından en düşük seviyede ispatlanma oranına sahip teorem bu teoremdir. Tuğba, Esra, Berna, Leyla ve Ozan olmak üzere 5 kişi ispatı hiç yapmamışlardır. Ömer, Yağmur ve Murat ispatı yanlış yapmışlardır. Sadece Ayşe, Seher ve Zehra'nın ispatları tam doğru olarak değerlendirilmiştir. Üçünün yaptığı ispatlarda birbirine çok benzer ifadeler yer almaktadır. Bu kişilerden her biri açıklama yapma ve matematiksel dil kullanma kriterlerine uygun ispatlar yapmışlardır. Zehra'nın ispatı aşağıdaki gibidir.

Şekil 10
Zehra'nın 5. Teoreme Yaptığı İspat



2. Aşama 1. Grup ispatlarının topluca değerlendirilmesi sonucu katılımcıların ispat yapmada belli davranış eğilimlerinin olduğu gözlenmiştir. İspatlarının doğru olarak (3 puanla) değerlendirildiği kişilerin matematiksel dil ve notasyonlara dikkat ettiği görülmüştür. Buna aykırı örnekler de tabii ki mevcuttur. Tuğba, Esra ve Leyla'nın 4. ispatları doğru olarak değerlendirilmesine karşın matematiksel dil kurallarına uygunluğu açısından yetersiz bulunmuştur. Seher'in ise 4. İspatı matematiksel dil kurallarına uygun olmasına karşın ispatı yanlış yapmıştır. Genel itibariyle bu grupta katılımcıların açıklama yapma eğiliminde olduğu görülmüştür. Ancak Esra, Murat ve Ozan'ın ispatlarında açıklamaya yer vermedikleri de görülmüştür. 5 teoremin de ispatlarının yapılma oranı yüksektir. Yapılma oranı en düşük seviyede kalan 5. Teoremin ispatını 5 kişi hiç yapmamış, 4 kişinin de ispatı doğru olarak kabul edilmemiştir. Katılımcıların yaptığı 5 ispatın da hepsinin doğru (3 puan), matematiksel dil kullanımı yeterli (2 puan), açıklama yapıldığına dair de (1 puan) olumlu şekilde değerlendirilen tek kişi Zehra'dır. Zehra'yı bu kriterlere uygun takip eden Ayşe, Seher ve Oğuz'dur. En düşük seviyede ispat yapan kişi ise Esra'dır.

Araştırmacının değerlendirilmesi sonrası, aşağıdaki kısımda öğrencilerin diğer öğrencileri değerlendirmesi ile elde edilen bulgular sunulmaktadır. Tablo-20 de her bir öğrenci için diğer 11 öğrencinin verdiği puanlar yer almaktadır.

Tablo 20
Öğrencilerin 1. Gruptaki İspatlarına Arkadaşlarının Verdiği Puanlar

1) TUĞBA'NIN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Ayşe	1	2	2	3	1	9
Esra	3	3	3	3	1	**13**
Ömer	1	1	1	3	1	7
Murat	3	3	3	3	1	**13**
Yağmur	2	2	2	2	1	9
Berna	2	1	1	3	1	8
Oğuz	3	2	2	3	1	11
Leyla	2	1	1	3	1	8
Ozan	2	1	1	3	2	9
Seher	1	1	1	3	1	7
Zehra	1	1	2	3	1	8
ORT	1,9	1,63	1,72	**2,9**	1,09	
TOPLAM	21	18	19	**32**	12	
***Ortalama*: Toplam puan / Kişi sayısı**						

2) AYŞE'NİN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	2	3	3	14
Esra	3	3	3	3	3	**15**
Ömer	3	2	3	3	3	14
Murat	3	3	3	3	3	**15**
Yağmur	3	3	3	2	3	14
Berna	3	2	3	3	3	14
Oğuz	3	3	2	3	3	14
Leyla	3	3	3	3	3	**15**
Ozan	3	3	2	3	3	14
Seher	3	2	3	3	3	14
Zehra	3	3	3	3	3	**15**
ORT	**3**	2.72	2.72	2.9	**3**	
TOPLAM	**33**	30	30	32	**33**	

3) ESRA'NIN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	1	1	3	0	6
Ayşe	1	1	1	3	0	6
Ömer	1	2	1	3	0	**7**
Murat	1	2	1	3	0	**7**
Yağmur	1	2	1	2	0	6
Berna	1	1	1	3	0	6
Oğuz	1	2	1	3	0	**7**
Leyla	1	1	1	3	0	6
Ozan	1	1	1	3	0	6
Seher	1	1	1	3	0	6

Zehra	1	1	1	3	0	6
ORT	1	1.36	1	**2.9**	0	
TOPLAM	11	15	11	**32**	0	

4) ÖMER'İN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	3	3	3	2	12
Ayşe	1	3	3	3	1	11
Esra	2	3	3	3	1	12
Murat	2	3	3	3	1	12
Yağmur	2	3	3	3	1	12
Berna	1	2	3	3	1	10
Oğuz	1	3	3	3	2	12
Leyla	3	3	3	3	1	**13**
Ozan	2	3	3	3	2	**13**
Seher	1	3	3	3	1	11
Zehra	2	3	2	3	1	11
ORT	1.63	2.9	2.9	**3**	1.27	
TOPLAM	18	32	32	**33**	14	

5) MURAT'IN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	2	3	2	2	**10**
Ayşe	1	3	1	1	1	7
Esra	1	3	3	1	1	9
Ömer	1	2	3	2	1	9
Yağmur	1	1	2	1	1	6
Berna	1	2	3	1	1	8
Oğuz	1	2	3	1	1	8
Leyla	1	2	3	1	1	8
Ozan	1	3	2	2	2	**10**
Seher	1	2	3	1	1	8
Zehra	1	2	2	2	0	7
ORT	1	2.18	**2.54**	1.36	1.09	
TOPLAM	11	24	**28**	15	12	

6) YAĞMUR'UN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	3	3	3	2	12
Ayşe	1	3	2	3	2	11
Esra	1	3	3	3	2	12
Ömer	1	3	2	3	2	11
Murat	1	3	3	3	2	12
Berna	1	3	3	3	2	12
Oğuz	2	3	3	3	2	**13**
Leyla	1	3	3	3	1	11

Ozan	1	3	2	3	2	11
Seher	1	3	3	3	1	11
Zehra	1	3	3	3	2	12
ORT	1.09	**3**	2.72	3	1.81	
TOPLAM	12	**33**	30	33	20	

7) BERNA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	2	3	3	3	1	12
Ayşe	1	3	2	3	1	10
Esra	2	3	3	3	1	12
Ömer	2	3	3	3	1	12
Murat	2	3	3	3	1	12
Yağmur	3	3	3	3	1	**13**
Oğuz	1	3	3	3	0	10
Leyla	3	3	3	3	1	**13**
Ozan	2	3	3	3	2	**13**
Seher	1	3	2	3	1	10
Zehra	2	3	3	3	1	12
ORT	1.90	**3**	2.81	**3**	1	
TOPLAM	21	**33**	31	**33**	11	

8) OĞUZ'UN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	2	**14**
Ayşe	1	1	3	3	2	10
Esra	3	3	3	3	1	13
Ömer	1	3	3	3	1	11
Murat	3	3	3	3	1	13
Yağmur	3	3	3	2	2	13
Berna	2	3	3	3	2	13
Leyla	3	3	3	3	2	**14**
Ozan	2	3	3	3	2	13
Seher	1	2	1	3	1	8
Zehra	1	3	3	3	2	12
ORT	2.09	2.72	2.81	**2.9**	1.63	
TOPLAM	23	30	31	**32**	18	

9) LEYLA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	0	**12**
Ayşe	1	2	1	3	0	7
Esra	3	3	3	3	0	**12**
Ömer	1	1	3	3	0	8
Murat	1	2	3	3	0	9
Yağmur	2	3	3	2	0	10

Berna	1	2	3	3	0	9
Oğuz	1	1	2	3	0	7
Ozan	2	1	3	3	0	9
Seher	1	1	2	3	0	7
Zehra	1	2	3	3	0	9
ORT	1.54	1.9	2.63	**2.9**	0	
TOPLAM	17	21	29	**32**	0	

10) OZAN'IN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	0	**12**
Ayşe	3	2	3	1	0	9
Esra	3	2	3	3	0	11
Ömer	3	2	3	1	0	9
Murat	3	2	3	1	0	9
Yağmur	2	3	2	1	0	8
Berna	3	1	3	1	0	8
Oğuz	3	2	3	1	0	9
Leyla	3	1	3	1	0	8
Seher	3	2	3	1	0	9
Zehra	3	2	3	1	0	9
ORT	**2.9**	2	**2.9**	1.36	0	
TOPLAM	**32**	22	**32**	15	0	

11) SEHER'İN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	3	**15**
Ayşe	3	3	3	1	3	13
Esra	3	3	3	3	3	**15**
Ömer	1	3	3	1	3	11
Murat	3	3	3	3	3	**15**
Yağmur	3	3	3	1	3	13
Berna	3	3	3	1	3	13
Oğuz	3	3	3	1	3	13
Leyla	3	3	3	1	3	13
Ozan	3	3	3	1	3	13
Zehra	2	3	3	3	3	14
ORT	2.72	3	3	1.72	**3**	
TOPLAM	30	33	33	19	**33**	

12) ZEHRA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	3	**15**
Ayşe	3	3	3	3	3	**15**
Esra	3	3	3	3	3	**15**
Ömer	3	3	3	3	3	**15**

Murat	3	3	3	3	3	**15**
Yağmur	3	3	3	3	3	**15**
Berna	3	3	3	3	3	**15**
Oğuz	3	3	2	3	3	14
Leyla	3	3	2	3	3	14
Ozan	3	3	2	3	3	14
Seher	3	3	2	3	3	14
ORT	**3**	**3**	2.63	**3**	**3**	
TOPLAM	**33**	**33**	29	**33**	**33**	

Bu tablolar incelendiğinde diğer öğrencilerin değerlendirmesi sonucu en yüksek puanları alan kişiler sırasıyla Zehra, Ayşe ve Seher'dir. En düşük puanları alanlar ise Esra, Ozan ve Murat'tır. Her bir katılımcının en yüksek ortalamaya sahip olduğu ispatlara bakılacak olunursa; Tuğba 4. ispattan 2,9; Ayşe 5. ispattan 3; Esra 4. ispattan 2.9; Ömer 4. ispattan 3; Murat 3. ispattan 2.54; Yağmur 4. ispattan 3; Berna 2. ve 4. ispatlarından 3; Oğuz 4. ispattan 2.9; Leyla 4. ispattan 2.9; Ozan 1. ve 3. ispatından 2.9; Seher 2., 3. ve 5. ispatlarından 3; Zehra 1., 2., 4. ve 5. ispatlarından 3 puan ortalamalarına sahiplerdir. Bu verilere dayanarak en yüksek puan alınan ispat 4. ispat olmuştur.

Her bir katılımcının diğer katılımcılar tarafından değerlendirilen kimi ispatlarında çok çeşitli değerlendirmeler dikkat çekmiştir. Örneğin Tuğba'nın 2. ispatına 6 kişi (Ömer, Berna, Leyla, Ozan, Seher, Zehra) 1 puan, 3 kişi (Ayşe, Yağmur, Oğuz) 2 puan, 2 kişi (Esra, Murat) de 3 puan vermiştir. Yani 6 kişiye göre yanlış olarak değerlendirilen bir ispat diğer 5 kişi tarafından kısmen doğru veya doğru olarak değerlendirilmiştir. Tuğba'nın 3. ispatı da yine aynı kişilerden aynı puanları almıştır. Oğuz'un da 1. ispatı bu şekilde puanlamada değişkenlik göstermiştir. Bu ispata 4 kişi (Ayşe, Ömer, Seher, Zehra) 1 puan, 2 kişi (Berna, Ozan) 2 puan, 5 kişi de (Tuğba, Esra, Murat, Yağmur, Leyla) 3 puan vermiştir. Ozan'ın 4. ispatını 2 kişi (Tuğba, Esra) 3 puanla tam doğru olarak değerlendirirken 10 kişi ise 1 puanla yanlış olarak değerlendirmişlerdir. Son bir örnek olarak Seher'in 4. ispatına da 3 kişi (Tuğba, Esra, Murat) 3 puan, diğer 9 kişi ise 1 puan vermiştir. Bu örneklerden de anlaşılacağı üzere öğrencilerin bir ispatı doğru veya yanlış olarak değerlendirmeleri çok çeşitlilik göstermiştir. Birinin doğru dediğine diğeri yanlış

diyebilmektedir. Bunun sebebi olarak öğrencilerin kendilerine göre farklı farklı kriterleri olduğu görülmüştür. Kimi (Örn. Seher, Ayşe, Oğuz, Berna) matematiksel dil ve notasyonlara dikkat ederken, kimi (Örn. Seher, Zehra, Murat) açıklama olmasına dikkat etmekte, kimi de (Ömer) yapılan fazla açıklamaların ispat ne kadar doğru olsa da gereksiz olduğunu düşünmektedir. Bu sebeple yapılan ispatların değerlendirilmesi sonucu verilen puanlar değişkenlik göstermiştir. Örneğin Seher ispatlarında çok fazla açıklamaya yer verip, matematiksel dil ve notasyonlara çok dikkat eden bir öğrencidir. İspatları incelemesi de bu yönde titizlilik içermektedir. Onun kadar ayrıntıya dikkat etmeyen (Ömer, Oğuz, Ozan gibi) kişilere göre de değerlendirmeler farklı olabilmektedir. Sadece bu sonuç bile öğrencilerin ispat algılarının ne kadar değişkenlik gösterdiğini ortaya çıkarmıştır.

Başka bir tarafta da öğrencilerin kendi yapamadığı ispatlarda başkalarının ispatlarını incelerken gösterdiği titizlik dikkat çekmiştir. Murat ve Esra örneği göz önüne alınabilir. Her ikisinin de örneklerle ispat yaptığı görülmüştür. 2. Aşama uygulamaları öncesinde, serbest ve kendilerine göre doğru gördükleri şekilde ispat yapabilecekleri şeklinde açıklama yapıldığı için bu türde (sadece örnek vererek) bir ispat yapmışlardır. Ancak Murat, Esra'nın örnekle yaptığı 1. ve 3. ispatlarını incelerken bunları yanlış (1 puan) olarak değerlendirmiştir. Ayrıca, 3. Aşamadaki doğrulama örneklerinde Murat'ın matematiksel dilin olmadığı, örneklerle doğrulama yapılan ispatları kabul etmediği de ortaya çıkmıştır. Bu da Murat'ın ispat yapma ve değerlendirmede çelişkili ve tutarsız bir davranış örneği gösterdiği şeklinde yorumlanmıştır. Diğer taraftan Seher, Ayşe, Zehra gibi öğrencilerin ise kendi yaptıkları ispatların matematiksel ispat kurallarına uygun olmasıyla inceledikleri ispatlarda da dikkat ettikleri kriterler çok daha hat safhada olmaktadır.

Sonuç olarak araştırmacının değerlendirmesi ve katılımcıların birbirlerini değerlendirmesi sonucu benzerlik ve farklılıklar söz konusu olmuştur. Araştırmacının tüm katılımcıların ispatlarını değerlendirmesi sonucu en yüksek ortalamaya ve olumlu davranışa sahip olan kişiler Zehra, Ayşe ve Seher'dir. Bu kişiler öğrencilerin birbirlerini değerlendirmeleri sonucu da yine en yüksek puanlara sahip olan kişiler olmuşlardır. Puanlamalarda her iki değerlendirme benzerlik göstermesine karşın bazı

yerlerde değişkenlik göstermiştir. Örneğin, Leyla'nın 4. Teoreme yaptığı ispat araştırmacı tarafından doğru olarak değerlendirilmiştir, ancak ispatta hiçbir açıklama yapılmamıştır. Açıklama yapılmasına dikkat eden katılımcılar 1 veya 2 puan vererek değerlendirmişlerdir.

4.2.2. İkinci Gruptaki İspatlara Yönelik Bulgular

İkinci grup ortaöğretim geometri konuları kapsamında hazırlanmış 5 teoremden oluşmaktadır. Katılımcıların yaptıkları ispatlar araştırmacı tarafından aşağıda verilen (Tablo-21) inceleme anahtarına göre incelenmiştir. Bu gruptaki ispatlar, geometri teoremlerinden oluştuğu için bir önceki anahtarda biraz değişiklik yapılmıştır. Diğer anahtara ek olarak sadece geometrik şekil üstünde gösterilen ispatla, geometrik şekil ile desteklenen ispatlar ayırt edilmek istenmiştir. Çünkü katılımcılar arkadaşlarının ispatlarını ve 3. uygulamadaki doğrulama örneklerini incelerlerken bu kriterlere dikkat ettikleri görülmüştür. Örneğin, sadece geometrik şekil üzerinde gösterilmiş olan kimi ispatları bazı öğrenciler doğru olarak kabul etmemiştir.

Katılımcılara bu grupta yer alan teoremleri ispatlarken birinci gruba göre biraz daha zorlandıkları gözlenmiştir. Bu grupta boş bırakılan (ispatlanmayan) daha çok teorem vardır. Örneğin katılımcılardan Ozan, geometri bilgisinin zayıf olduğunu bu grupta çok zorlandığını ve diğer katılımcıların yaptıkları ispatlardan 3. ispatı bu konuya ait bilgisinin yetersiz olduğu düşüncesiyle değerlendiremeyeceğini belirtmiştir. Bu yüzden Ozan'ın 3. ispatı değerlendirmediğine dair '--' işareti konulmuştur.

Tablo 21
İkinci Gruptaki İspatlar İçin Araştırmacının İnceleme Anahtarı

Öğrencinin İsmi :										
İspat No	Teoremin ispatı									
	Yapılmamış	*Yapılmış*								
	--	Örnekleme (A)		Açıklama (B)		Matematiksel Dil (C)			Geometrik Şekil Kullanımı (D)	
		Var 1	*Yok 0*	*Var 1*	*Yok 0*	*Yeterli 2*	*Yetersiz 1*	*Yok 0*	*Sadece şekil üzerinde ispat*	*Şekil var ve ayrıca ispat yapılmış*
	İspatın doğruluğu (E)									
	Doğru 3		*Eksik 2*			*Yanlış 1*			*Yok 0*	

Bulguların başında da belirtildiği üzere bu gruptaki ispatlara yönelik bulgular sunulurken tek tek ispatların ele alınması yerine hepsine yönelik puanlama tablolarından yararlanılacaktır. Önceki grupta olduğu gibi iki tablo oluşturulmuştur. Birincisi araştırmacının inceleme anahtarı kapsamında oluşturduğu tablo, ikincisi ise öğrencilerin birbirini değerlendirdikleri tablodur. Araştırmacının incelemesine yönelik bulgular ele alınırken öğrencilerin kâğıtlarında yer alan kimi durumlar da örneklenecektir.

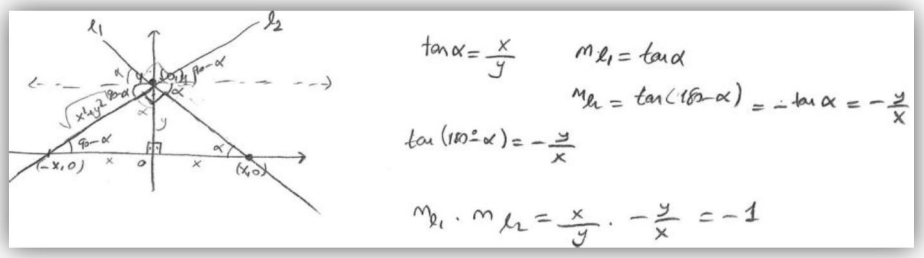
Tablo 22
Araştırmacının 2. Gruptaki Öğrenci İspatlarına Verdiği Puanlar

	A	B	C	D	E			A	B	C	D	E
TUĞBA							*AYŞE*					
1	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*		*1*	*0*	*0*	*2*	*2*	*2*
2	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*		*2*	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*
3	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*		*3*	*0*	*1*	*1*	*2*	*1*
4	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*		*4*	*0*	*0*	*2*	*2*	*1*
5	*0*	*0*	*1*	*2*	*2*		*5*	*0*	*0*	*1*	*2*	*2*
ESRA							*ÖMER*					
1	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*		*1*	*0*	*0*	*2*	*2*	*3*
2	*0*	*0*	*2*	*2*	*3*		*2*	*0*	*0*	*1*	*1*	*2*
3	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*		*3*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
4	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*		*4*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*
5	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*		*5*	*0*	*0*	*0*	*2*	*1*
MURAT							*YAĞMUR*					
1	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*		*1*	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*
2	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*		*2*	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*
3	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*		*3*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*

4	*0*	*1*	*1*	*2*	*1*		*4*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	
5	*0*	*0*	*1*	*2*	*2*		*5*	*0*	*0*	*0*	*1*	*2*	
BERNA							*OĞUZ*						
1	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*		*1*	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*	
2	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*		*2*	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*	
3	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*		*3*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	
4	*0*	*1*	*1*	*2*	*2*		*4*	*0*	*0*	*1*	*2*	*1*	
5	*0*	*0*	*2*	*2*	*3*		*5*	*0*	*0*	*2*	*2*	*2*	
LEYLA							*OZAN*						
1	*0*	*1*	*1*	*2*	*1*		*1*	*0*	*0*	*2*	*2*	*2*	
2	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*		*2*	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*	
3	*0*	*1*	*0*	*2*	*1*		*3*	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*	
4	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*		*4*	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*	
5	*0*	*1*	*1*	*2*	*2*		*5*	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*	
SEHER							*ZEHRA*						
1	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*		*1*	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*	
2	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*		*2*	*0*	*0*	*2*	*2*	*3*	
3	*0*	*1*	*2*	*2*	*1*		*3*	*-*	*-*	*-*	*-*	*0*	
4	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*		*4*	*0*	*1*	*2*	*2*	*1*	
5	*0*	*0*	*2*	*2*	*3*		*5*	*0*	*1*	*1*	*2*	*3*	

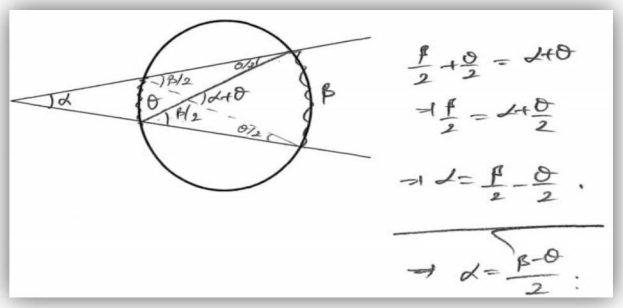
1. Teoremde katılımcılardan *"düzlemde iki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı -1"* olduğunun ispatlanması istenmiştir. Bu ispata açıklama yapan Berna, Oğuz, Leyla, Seher ve Zehra olmak üzere sadece 5 kişidir. Doğru veya yanlış ispat yapan herkes hem geometrik şekil kullanmış hem de ayrıca ispat yapmışlardır. 8 kişi tarafından tam doğru olarak ispatlanmıştır. Genellikle yapılan ispat aşağıda verildiği gibidir (Şekil 17).

Şekil 11
Yağmur'un 1. Teoreme Yaptığı İspat



2. Teoremde katılımcılardan "*köşe noktası bir çemberin dışında olan ve çemberi iki noktada kesen bir açının ölçüsünün, gördüğü yayların ölçüleri farkının yarısı*" olduğunun ispatlanması istenmiştir. Oğuz ve Leyla dışında herkes doğru ispatlamıştır. Ancak bu ispatta açıklama yapılma oranı daha düşüktür. Genellikle geometrik şekil üzerinde gösterilip sonuca odaklanılmıştır. Birbirine benzer tarzda ispatlar yapılmıştır. Bir örneği aşağıdaki gibidir (Şekil 18). Bu grupta doğru yapılma oranı en yüksek ispat budur.

Şekil 12
Seher'in 2. Teoreme Yaptığı İspat



3. Teoremde katılımcılardan "bir üçgenin iç teğet çemberinin kenarlara değdiği noktaları, karşı köşeler ile birleştiren doğru parçalarının bir noktada kesiştiği" gösterilmesi istenmiştir. Bu ispatı kimse doğru yapamamıştır. 3 kişi tamamen boş bırakmış, diğerleri ise şekil üzerinde göstermeye çalışmışlardır. Ancak yapılanların hiç biri doğru değildir. Birkaç örnek vermek gerekirse, Seher yaptığı işlemler sonucunda bu ifadenin sadece eşkenar üçgende olacağını, Ayşe bu doğru parçalarının merkezden geçtiğini, Esra ağırlık merkezi olduğunu, Ömer açıortayların kesişim noktası olduğunu, Oğuz ise doğru parçalarının üçgenin kenarortayları olduğunu yazmışlardır. Buradan anlaşılan o ki katılımcılar bilgiyi hatırlamada zorluk yaşamışlardır.

4. Teoremde katılımcılardan "*Dik dairesel kesik koninin yanal alanı, tabanlarının çevrelerinin* ($a = 2\pi r_1$, $b = 2\pi r_2$) *toplamı ile ana doğrusunun (l) uzunluğunun çarpımının yarısına eşit*" olduğunun gösterilmesi istenmiştir. Bu ispatı Tuğba, Berna ve Seher doğru bir şekilde ispatlamıştır. En çok zorlanılan ispatlar arasındadır.

5. Teoremde ise şekli verilen 3-boyutlu bir cismin belli bir açıyla kesilmesi sonucu ortaya çıkan yeni cismin alan ve hacminin hesaplanması istenmiştir. Burada öğrencilerden istenilen şey belli bir şekilden yola çıkarak istenen yüzeyin alanı ve cismin hacmini hesaplayıp hesaplayamayacaklarıdır. Burada kesin tam doğru cevap arayışında olunmamıştır. Bunu hesaplarken öğrencilerin şekil yüzeyini numaralandırdıkları, bu numaraları tek tek hesaplayıp bütüne öyle ulaştıkları görülmüştür. Bu kriterlere bakılarak Tuğba, Ayşe, Murat, Yağmur, Oğuz ve Leyla'nın ispatları 2 puan, Berna, Seher ve Zehra'nın ispatları 3 puan olarak değerlendirilmiştir.

Bu grup ispatlarına genel çerçevede bakılacak olunursa sonuçlar şu şekildedir. Bu gruptaki ispat problemleri en zorlanılanlar olmuştur. İspatların yapılma oranı çok düşüktür. Esra ve Ozan 3'er, Leyla 2, Yağmur ve Zehra ise 1'er ispatı yapamamışlardır. 1. İspatı Leyla olmak üzere 1 kişi, 2. İspatı Oğuz olmak üzere 1 kişi, 3. İspatı Tuğba, Ayşe, Ömer, Murat, Yağmur, Berna, Oğuz, Leyla ve Seher olmak üzere 9 kişi, 4. İspatı Ayşe, Ömer, Murat, Oğuz ve Zehra olmak üzere 5 kişi, 5. İspatı ise Esra ve Ömer olmak üzere 2 kişi yanlış yapmıştır. 12 kişinin 5'er tane ispatından 60 tane ispat incelenmiş olup, doğru olarak değerlendirilen sadece 23 tane ispat görülmüştür. Bu da % 38.3' lük bir başarı bulunmuştur. Bu da çok düşük bir orandır.

Bu grupta en yüksek başarı gösteren kişiler ise Berna ve Seher'dir. Leyla, Ozan ve Esra bu gruptaki ispatlarda da düşük seviyede puanlarla değerlendirilmişlerdir. Farklı olarak Oğuz ve Ayşe 1. grup ispatlarda yüksek bir ortalamaya sahip olurken 2. grup ispatlarında düşük bir ortalamayla değerlendirilmişlerdir.

Bu gruptaki ispatlarda sözel açıklamalara Berna, Leyla, Seher ve Zehra olmak üzere çok az kişi yer vermiştir. Bu durumun matematik ve geometri alanlarının farklılığından kaynaklandığı düşünülebilir. Katılımcılar ispatları yanlış yapsalar da ispatları sadece şekil üzerinde değil hem şekil olup ayrıca ispat da yaptıkları görülmüştür.

Yapılamayan, bu sebeple boş bırakılan ispatların olması geometri alanında ortaya çıkartılmaya çalışılan algıya yönelik veri eksiği olduğu düşülebilir. Ancak çoklu veri toplanması sayesinde olumsuz bir durum ortaya çıkması önlenmiştir. 3. Aşamada geometriye dayalı birçok doğrulama örneği hakkında görüş alınmış, sadece matematik alanı değil geometri alanına yönelik de veri toplanmıştır. Bu aşamada algıya yönelik olmasa da bir takım ispat yapmada zorlanma sebeplerine yönelik sonuçlar da çıkmıştır. Araştırmacının her aşamada katılımcıların yanında bulunması sebebiyle kimi öğrencilerin bireysel görüşlerini de not etmiştir. Bazı öğrenciler (Ozan, Leyla, Oğuz) geometri bilgilerinin taze olmadığı için zorlandıklarını dile getirmişlerdir. Bilgi yetersizliği veya gerekli bilgiyi hatırlayamama ispat yapmada zorlanmaya sebep olmuştur.

Araştırmacının değerlendirilmesi sonrası, aşağıdaki kısımda öğrencilerin diğer öğrencileri değerlendirmesi ile elde edilen bulgular sunulmaktadır. Tablo-23 de her bir öğrenci için 2. Gruptaki ispatlarına diğer 11 öğrencinin verdiği puanlar yer almaktadır.

Tablo 23
Öğrencilerin 2. Gruptaki İspatlarına Arkadaşlarının Verdiği Puanlar

1) TUĞBA'NIN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Ayşe	3	3	1	1	1	9
Esra	3	3	1	3	1	11
Ömer	3	3	1	3	1	8
Murat	3	3	1	3	1	11
Yağmur	3	2	3	3	1	12
Berna	3	3	1	3	1	11
Oğuz	3	3	3	3	2	**14**
Leyla	3	2	2	3	1	11
Ozan	3	3	--	1	1	8+
Seher	3	3	2	3	1	12
Zehra	3	3	1	2	2	11
ORT	**3**	2,81	1,45	2,54	1,18	
TOPLAM	**33**	31	16	28	13	
***Ortalama*: Toplam puan / Kişi sayısı**						

2) AYŞE'NİN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	2	2	2	2	3	11
Esra	1	1	1	1	1	5
Ömer	1	3	2	2	3	11
Murat	1	3	2	2	3	11
Yağmur	2	2	2	3	3	**12**
Berna	1	2	1	1	3	8
Oğuz	1	3	3	1	3	11
Leyla	1	1	3	3	3	11
Ozan	2	3	--	1	1	7+
Seher	1	3	2	2	3	11
Zehra	2	3	1	2	3	11
ORT	1,36	2,36	1,72	1,81	**2,63**	
TOPLAM	15	26	19	20	**29**	

3) ESRA'NIN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	3	0	1	2	7
Ayşe	1	3	0	1	1	6
Ömer	1	3	0	1	2	7
Murat	1	3	0	1	2	7
Yağmur	3	2	0	1	2	**9**
Berna	1	3	0	1	3	**9**
Oğuz	1	3	0	1	1	6
Leyla	1	2	0	1	2	7
Ozan	1	3	--	1	2	7+
Seher	1	3	0	0	1	6
Zehra	2	3	0	1	3	**9**
ORT	1,27	**2,81**	0	0,90	1,90	
TOPLAM	14	**31**	0	10	21	

4) ÖMER'İN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	1	1	11
Ayşe	3	3	1	1	1	9
Esra	3	2	1	1	1	8
Murat	3	2	3	1	1	10
Yağmur	3	2	2	3	3	**13**
Berna	3	2	1	1	1	8
Oğuz	3	3	3	1	1	11
Leyla	3	2	3	1	1	10
Ozan	3	2	--	1	1	7+
Seher	3	3	2	1	1	10
Zehra	3	3	1	1	1	9
ORT	**3**	2,45	1,81	1,18	1,18	

TOPLAM	**33**	27	20	13	13	

5) MURAT'IN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	1	2	12
Ayşe	3	3	1	1	1	9
Esra	3	3	3	2	2	13
Ömer	3	3	3	3	2	**14**
Yağmur	3	2	2	3	3	13
Berna	3	2	1	3	3	12
Oğuz	3	3	3	2	3	**14**
Leyla	3	2	3	3	2	13
Ozan	3	2	--	1	1	7+
Seher	3	3	1	1	1	9
Zehra	3	3	1	3	2	12
ORT	**3**	2,63	1,90	2,09	2	
TOPLAM	**33**	29	21	23	22	

6) YAĞMUR'UN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	1	2	12
Ayşe	3	3	1	1	1	8
Esra	3	3	1	2	1	10
Ömer	3	3	2	3	2	11
Murat	3	3	1	2	2	11
Berna	3	3	1	3	2	12
Oğuz	3	3	3	2	2	13
Leyla	3	3	2	3	2	**13**
Ozan	2	3	--	2	2	9+
Seher	3	3	2	3	1	10
Zehra	3	3	1	3	2	12
ORT	2,90	**3**	1,54	2,27	1,72	
TOPLAM	32	**33**	17	25	19	

7) BERNA'NIN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	2	14
Ayşe	3	3	1	1	2	10
Esra	3	3	3	3	3	**15**
Ömer	2	3	3	3	1	12
Murat	2	3	3	3	2	13
Yağmur	3	3	3	3	3	**15**
Oğuz	3	3	3	2	3	14
Leyla	3	3	3	3	3	15
Ozan	3	3	--	2	2	10+
Seher	3	3	2	3	1	12

Zehra	3	3	1	3	2	12
ORT	2,81	**3**	2,27	2,63	2,18	
TOPLAM	31	**33**	25	29	24	

8) OĞUZ'UN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	1	3	2	12
Ayşe	3	3	1	1	2	10
Esra	3	2	2	3	2	12
Ömer	1	3	3	3	1	11
Murat	3	3	3	3	2	**14**
Yağmur	3	3	3	3	2	**14**
Berna	3	3	0	3	3	12
Leyla	3	3	1	3	2	12
Ozan	3	2	--	2	2	9+
Seher	3	3	1	2	1	10
Zehra	3	3	0	3	2	11
ORT	**2,81**	**2,81**	1,36	2,63	1,90	
TOPLAM	**31**	**31**	15	29	21	

9) LEYLA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	0	2	0	1	4
Ayşe	1	0	1	0	1	3
Esra	1	0	3	0	1	5
Ömer	1	0	1	0	3	5
Murat	1	0	3	0	1	5
Yağmur	1	0	1	0	1	3
Berna	1	0	1	0	3	5
Oğuz	2	0	3	0	2	**7**
Ozan	1	0	--	0	2	3+
Seher	1	0	2	0	1	4
Zehra	1	0	1	0	2	4
ORT	1,09	0	**1,63**	0	**1,63**	
TOPLAM	12	0	**18**	0	**18**	

10) OZAN'IN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	2	3	0	0	0	5
Ayşe	1	3	0	0	0	4
Esra	1	3	0	0	0	4
Ömer	1	3	0	0	0	4
Murat	1	3	0	0	0	4
Yağmur	1	3	0	0	0	4
Berna	1	3	0	0	0	4
Oğuz	1	3	3	0	0	**7**

Leyla	1	3	0	0	0	4
Seher	1	3	0	0	0	4
Zehra	1	3	0	0	0	4
ORT	1,09	**3**	0,27	0	0	
TOPLAM	12	**33**	3	0	0	

11) SEHER'İN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	2	3	2	13
Ayşe	3	3	2	3	2	13
Esra	3	3	3	3	3	**15**
Ömer	3	3	1	3	3	13
Murat	3	3	2	3	3	14
Yağmur	3	2	3	3	3	14
Berna	3	3	3	3	3	**15**
Oğuz	3	3	3	3	3	**15**
Leyla	3	2	3	3	3	14
Ozan	3	3	--	3	2	11+
Zehra	3	3	2	3	3	14
ORT	**3**	2,81	2,18	**3**	2,72	
TOPLAM	**33**	31	24	**33**	30	

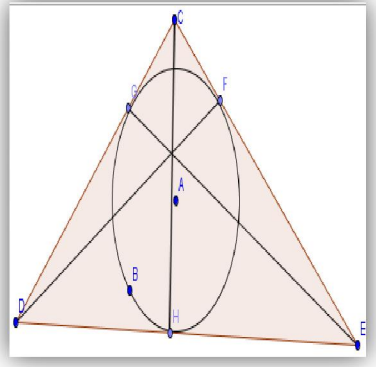
12) ZEHRA'NIN İSPAT PUANLARI						
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	0	1	3	**10**
Ayşe	1	3	0	2	3	9
Esra	3	2	0	1	3	9
Ömer	3	3	0	1	3	**10**
Murat	3	3	0	1	3	**10**
Yağmur	2	2	0	1	3	8
Berna	2	2	0	2	3	9
Oğuz	3	3	0	1	3	**10**
Leyla	3	2	0	1	3	9
Ozan	1	3	--	1	2	7+
Seher	3	3	0	1	3	**10**
ORT	2,45	2,63	0	1,18	**2,90**	
TOPLAM	27	29	0	13	**32**	

Bu tablolar incelendiğinde diğer öğrencilerin değerlendirmesi sonucu en yüksek puanları alan kişiler sırasıyla Seher, Berna ve Tuğba'dır. En düşük puanları alanlar ise Esra, Ozan ve Leyla'dır. Her bir katılımcının en yüksek ortalamaya sahip olduğu ispatlara bakılacak olunursa; Tuğba 4. ispat 2.90; Ayşe 5. ispat 2.63; Esra 2.

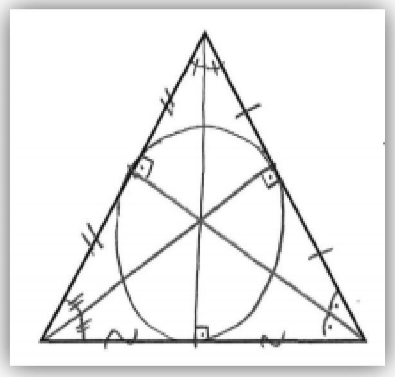
İspat 2.81; Ömer 1. İspat 3.00; Murat 1. İspat 3.00; Yağmur 2. İspat 3.00; Berna 2. İspat 3.00; Oğuz 1. ve 2. İspat 2.81; Leyla 3. ve 5. İspat 1.63; Ozan 2. İspat 3; Seher 1. Ve 4. İspat 3; Zehra 5. İspat 2.90. Buradan da görüldüğü gibi 2. İspat yapılabilirliği katılımcıların birbirini değerlendirmeleriyle herkesin birbirine yüksek puan verdiği bir ispat olmuştur.

3. ispat ise değişken puanlamaya sahip bir ispattır. Örneğin Oğuz'un ispat puanlaması incelenecek olunursa 3 kişi (Ömer, Murat, Yağmur) 3 puan, 1 kişi (Esra) 2 puan, 4 kişi (Tuğba, Ayşe, Leyla, Seher) 1 puan, 2 kişi de (Berna, Zehra) 0 puan vermiştir. Yani Oğuz'un yaptığı ispat kimilerine göre doğru kimilerine göre ise yanlış veya yok hükmündedir. Ancak araştırmacının incelemesiyle 3. İspatı kimse doğru yapamamıştır. Dolayısıyla Oğuz'un ispatına doğru diyenlerle bu sonuç çelişmektedir. Araştırmacının kabul ettiği ispat soldaki iken sağdaki ise Oğuz'un ispatıdır. Katılımcılardan çoğu bu türde hatalar yapmışlardır.

Şekil 13
Araştırmacının ve Oğuz'un İspat Karşılaştırması



Bir noktadan bir çembere çizilen teğet parçaları eşit olduklarından $\frac{DH}{HE}.\frac{EF}{FC}.\frac{CF}{CG} = 1$ olur. Bu sebeple Ceva Teoreminden CH, DF ve GE doğru parçaları bir noktada kesişirler.



Oğuz'un ispatı

3. İspat puanları 3. Aşama sonuçlarıyla karşılaştırılacak olunursa bu ispatı doğru kabul edenler bir tür sözsüz ispat doğrulama örneğini de ispat olarak kabul

etmeleri gerekmektedir. Çünkü Oğuz'un ispatında hiçbir sözel ifade olmayıp, sadece şekil üzerinde gösterim mevcuttur. Örneğin, Yağmur, Oğuz'un ispatına doğru demiş ve sözsüz ispatı da ispat olarak kabul etmiştir. Ancak Murat sözsüz ispatı (-sözel hiçbir açıklama olmaması sebebiyle) ispat olarak kabul etmemesine rağmen Oğuz'un bu ispatına tam puan vermiştir. Burada hem tutarlı davranış gösteren hem de çelişkili davranış gösteren birer örnek sunulmuştur.

4.2.3. Üçüncü Gruptaki İspatlara Yönelik Bulgular

Bu grupta bulunan teoremler lisans düzeyinde olup 1. ve 2. sınıf dersleri kapsamında oluşturulmuştur. 1., 2. ve 3. teoremler analiz, 4. ve 6. teoremler analitik geometri, 5. teorem soyut cebir, 7. teorem ise soyut matematik dersleri kapsamındadır. Bu derslerin hepsi zorunludur. Herhangi bir seçmeli derse ait bir teorem bu uygulamada yer almamıştır. Teoremlerin temel derslerden alınmasının sebebi ise temel bir takım bilgileri içerip ortak bir bilgi birikimiyle yapılabilmesinin istenmesidir. Ancak uygulamalar aşamasında Esra, Ömer ve Berna soyut cebir dersinde kendilerini yeterli bulmadıklarını ve 5. teoremi ispatlayamayacaklarını söylemişlerdir. Bu durumdan dolayı arkadaşlarının 5. ispatlarını da değerlendirmemişlerdir. Diğer 9 kişi bu dersi alıp ispatını yaptığı için bu teorem uygulamadan çıkartılmamıştır.

Bir kişi bu grupta yer alan ispatlardan en fazla 21, en az 7 puan (hepsini ispatladıysa) alabilir. Tabloda alınan toplam puan kısmında Esra, Ömer ve Berna'nın karşısında + (toplam 6+ gibi) işareti yazılmıştır. Bu yazımın sebebi 5. ispatı incelemeden verdikleri toplam puan olduğu içindir. Bu kişilerin dışında diğer katılımcılar bu teoremlerin geçtiği dersleri almış ve başarıyla geçmiş öğrencilerdir. Boş bırakılan ispatlar ise hatırlanamamaktan kaynaklanmaktadır.

Bu grupta yapılan ispatlara biçimsel olarak bakıldığında, hemen hemen tüm öğrenciler matematiksel dil kullanımına özen göstermiş, kimi az kimi çok olmak üzere açıklamalara yer vermişlerdir. İspat yapma şekilleri genel olarak diğer 2 grup ispatlarıyla paralellik göstermiştir.

Bulguların başında da belirtildiği üzere bu gruptaki ispatlara yönelik bulgular sunulurken tek tek ispatların ele alınması yerine hepsine yönelik puanlama tablolarından yararlanılacaktır. Önceki gruplarda olduğu gibi iki tablo oluşturulmuştur. Birincisi araştırmacının inceleme anahtarı kapsamında oluşturduğu tablo, ikincisi ise öğrencilerin birbirini değerlendirdikleri tablodur. Araştırmacının incelemesine yönelik bulgular ele alınırken öğrencilerin kâğıtlarında yer alan kimi durumlar da örneklenecektir.

İnceleme anahtarı diğerlerine göre çok daha az bilgi içerir şekilde hazırlanmıştır. Bunun sebebi olarak 7 ispatın farklı farklı dersleri kapsamasıyla birlikte ortak baz alınabilecek kriterlere bakılmıştır. Bu seviyede sorulan ispatlarda örnekleme yapılması mümkün olmadığı için diğer inceleme anahtarlarında var olan örnekleme kriteri inceleme anahtarından çıkarılmıştır. Ayrıca geometrik şekillerin kullanılıp kullanılmadığına inceleme anahtarında bakılmasa da yapılan analizde 3., 4. ve 6. Teoremlerin ispatlarında öğrencilerin çizdiği geometrik şekillere aşağıda yer verilmiştir (Şekil 20-22-23).

Tablo 24
3. Gruptaki İspatlar İçin İnceleme Anahtarı

<table>
<tr><td colspan="6">Öğrencinin İsmi : .....</td></tr>
<tr><td rowspan="5">İspat No</td><td colspan="5">Teoremin ispatı</td></tr>
<tr><td>Yapılmamış</td><td colspan="4">Yapılmış</td></tr>
<tr><td rowspan="2">----</td><td colspan="2">Açıklama (A)</td><td colspan="3">Matematiksel Dil (B)</td></tr>
<tr><td>Var
1</td><td>Yok
0</td><td>Yeterli
2</td><td>Yetersiz
1</td><td>Yok
0</td></tr>
<tr><td colspan="5">İspatın Doğruluğu (C)</td></tr>
<tr><td>Doğru
3</td><td colspan="2">Eksik
2</td><td>Yanlış
1</td><td>Yok
0</td></tr>
</table>

Araştırmacının 12 katılımcının 7'şer ispatının inceleme anahtarına göre değerlendirmesi aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Tablo 25
Araştırmacının 3. Gruptaki Öğrenci İspatlarına Verdiği Puanlar

	A	B	C			A	B	C	
TUĞBA					*AYŞE*				
1	*1*	*2*	*2*		*1*	*1*	*2*	*3*	
2	*--*	*--*	*0*		*2*	*1*	*2*	*3*	
3	*0*	*0*	*1*		*3*	*1*	*2*	*3*	
4	*1*	*1*	*2*		*4*	*1*	*2*	*3*	
5	*1*	*2*	*1*		*5*	*1*	*2*	*3*	
6	*0*	*0*	*1*		*6*	*1*	*2*	*3*	
7	*1*	*2*	*2*		*7*	*1*	*2*	*3*	
ESRA					*ÖMER*				
1	*0*	*0*	*1*		*1*	*1*	*2*	*2*	
2	*0*	*0*	*1*		*2*	*0*	*0*	*1*	
3	*0*	*0*	*1*		*3*	*--*	*--*	*0*	
4	*0*	*1*	*1*		*4*	*1*	*2*	*2*	
5	*--*	*--*	*--*		*5*	*--*	*--*	*--*	
6	*0*	*1*	*1*		*6*	*--*	*--*	*0*	
7	*0*	*1*	*2*		*7*	*0*	*1*	*1*	
MURAT					*YAĞMUR*				
1	*1*	*2*	*3*		*1*	*1*	*1*	*1*	
2	*0*	*2*	*3*		*2*	*1*	*1*	*3*	
3	*1*	*2*	*1*		*3*	*1*	*1*	*2*	
4	*1*	*2*	*2*		*4*	*-*	*-*	*0*	
5	*0*	*0*	*1*		*5*	*1*	*0*	*1*	
6	*1*	*2*	*3*		*6*	*1*	*1*	*3*	
7	*0*	*2*	*2*		*7*	*1*	*1*	*1*	
BERNA					*OĞUZ*				
1	*1*	*2*	*1*		*1*	*0*	*0*	*1*	
2	*0*	*2*	*2*		*2*	*1*	*2*	*3*	
3	*1*	*2*	*2*		*3*	*1*	*2*	*2*	
4	*0*	*2*	*3*		*4*	*0*	*2*	*3*	
5	*--*	*--*	*--*		*5*	*1*	*2*	*2*	
6	*0*	*2*	*2*		*6*	*0*	*2*	*2*	
7	*0*	*2*	*2*		*7*	*1*	*2*	*2*	
LEYLA					*OZAN*				
1	*0*	*1*	*1*		*1*	*1*	*2*	*3*	
2	*0*	*2*	*3*		*2*	*0*	*2*	*3*	
3	*1*	*0*	*2*		*3*	*--*	*--*	*0*	
4	*1*	*1*	*3*		*4*	*0*	*2*	*2*	
5	*--*	*--*	*0*		*5*	*--*	*--*	*0*	
6	*1*	*1*	*2*		*6*	*1*	*2*	*3*	
7	*--*	*--*	*0*		*7*	*--*	*--*	*0*	

SEHER					*ZEHRA*				
1	*1*	*2*	*3*		*1*	*1*	*2*	*3*	
2	*1*	*2*	*3*		*2*	*1*	*2*	*3*	
3	*1*	*2*	*2*		*3*	*1*	*2*	*2*	
4	*1*	*2*	*2*		*4*	*0*	*2*	*3*	
5	*1*	*2*	*3*		*5*	*0*	*2*	*3*	
6	*1*	*2*	*3*		*6*	*1*	*2*	*3*	
7	*1*	*2*	*3*		*7*	*1*	*2*	*3*	

Bu gruptaki teoremler katılımcıların daha aşina oldukları alanlarda oldukları için yapılma oranı diğer gruplara göre çok daha yüksek olmuştur. 12 katılımcının 7'şer ispatından toplamda 84 yapılması gereken ispattan sadece 11 tane ispat yapılmamıştır. Bu da bu grup ispatlarının %87'sinin yapılmaya çalışıldığını göstermektedir. Toplamda 17 ispat ise yanlış yapılmıştır. 33 ispat ise tam doğru olarak değerlendirilmiştir. Diğer gruplardaki gibi öğrencilerin genelinde açıklama yapma ve matematiksel dili etkin kullanma davranışları hâkimdir. Bu ispat yapma davranışını tüm ispatlarında yaparken gösteren öğrenciler ise Ayşe, Seher ve Zehra'dır.

Bu grup ispatlarda öğrenciler tam olarak ispatı biliyorsa doğru ve ispata çok yaklaşan cevaplar verdikleri, bilmiyorlarsa çok fazla şey yazmadan o ispatı yapmadıkları görülmüştür.

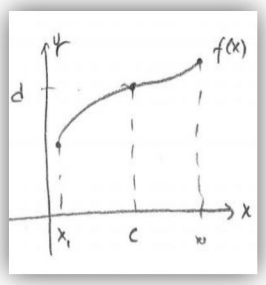
1. Teoremde katılımcılardan "*y=f(x) fonksiyonunun x=a noktasında türevi var ise f fonksiyonu x=a noktasında süreklidir.*" ifadesini ispatlanmaları istenmiştir. Ayşe, Murat, Ozan, Seher ve Zehra olmak üzere 5 kişi 3 puan, Tuğba ve Ömer 2 puan, kalan 5 kişi ise 1 puan almıştır. Analiz dersinin temel teoremlerinden biridir. Ancak yapılma oranı çok düşüktür. Öğrencilerin büyük çoğunluğunun açıklamalarla ve matematiksel dil kurallarına uygun ispat yaptığı görülmüştür.

2. Teoremde katılımcılardan "*f(x) > 0 olsun. $a \leq b \leq c$ olmak üzere =>* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx$ *olur.*" ifadesini ispatlamaları istenmiştir. Ayşe, Murat, Yağmur, Oğuz, Leyla, Ozan, Seher ve Zehra olmak üzere 8 kişinin ispatı 3 puan

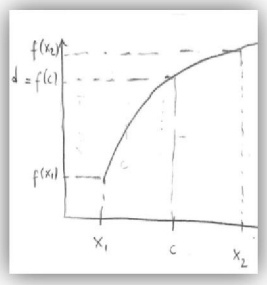
almıştır. Hepsi benzer ifadelerle aynı şekilde ispat yapmışlardır. İspatları doğru olarak değerlendirilen Ozan, Leyla, Berna ve Murat'ın açıklama yaparak ispat yapmamışlardır. Bu kişiler genel olarak kimi ispatlarında açıklama yaparken kimilerinde ise yapmamışlardır. Yanlış olarak değerlendirilen ispatlarda gerekli bilgilerin hatırlanmaması söz konusudur.

3. Teoremde katılımcılardan "*f fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve* $x_1 < x_2$ *olmak üzere* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *için* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *olsun. Bu durumda* $f(x_1) < d < f(x_2)$ *ise* $f(c)=d$ *olacak şekilde bir* $c \in (x_1, x_2)$ *noktası vardır*." ifadesini ispatlamaları istenmiştir. Bu ispatı tam doğru yapan sadece Ayşe vardır. Çoğu kişi ise yapmaya çalışmıştır. Hemen hemen hepsinde çok benzer grafik, şekil vs. gibi görsellerden faydalanıldığı görülmüştür (Şekil 14).

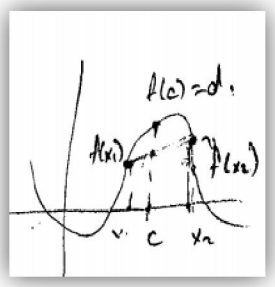
Şekil 14
Öğrencilerin 3. Teoremin İspatlarında Kullandıkları Grafikler



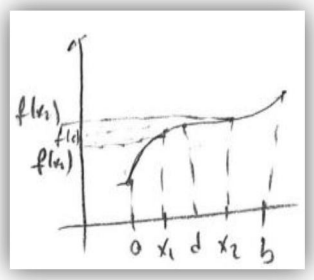
Berna



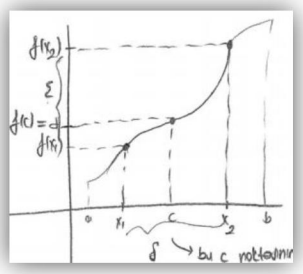
Oğuz



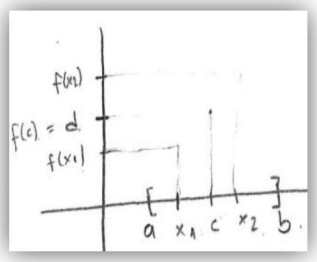
Ayşe



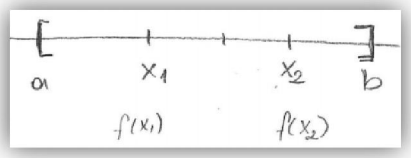
Leyla



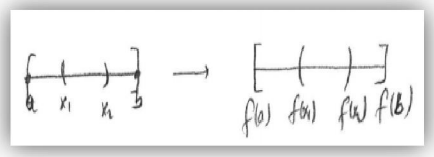
Seher



Tuğba



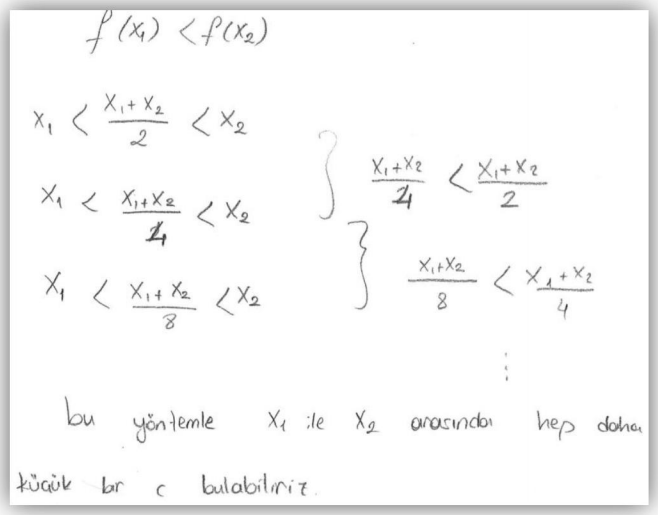
Esra



Yağmur

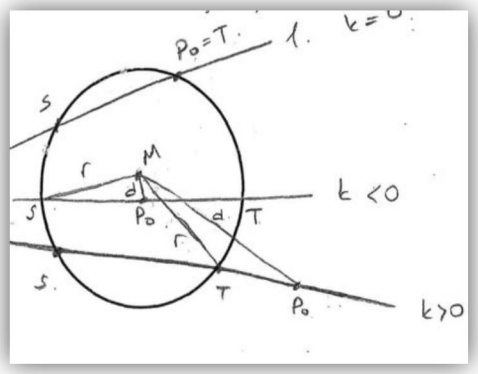
Bu teoremde Esra'nın ispatı daha önceki aşamalarda yaptığı benzer ispatlar gibi üniversite seviyesinde olmaması gereken bir ispat performansı göstermiştir. Bu 3 uygulama sonucuna bakılarak Esra'nın ispat yapma anlayışının farklı ve performansının diğer arkadaşlarına nazaran çok daha düşük seviyede kaldığı söylenebilir.

Şekil 15
Esra'nın 3. Teoreme Yaptığı İspat



4. Teoremde katılımcılardan "*P_o noktasından geçen bir l doğrusu bir çemberi S ve T noktalarında kessin. M merkez olmak üzere $|P_oM| = d$ ise $|P_oS|.|P_oT| = |d^2-r^2| = |k|$ 'dır. (NOT: k sayısını k>0, k=0 ve k<0 olarak inceleyiniz.)*" ifadesini ispatlamaları istenmiştir. Ayşe, Berna, Leyla, Oğuz ve Zehra olmak üzere 5 kişi tam doğru olarak ispatlamıştır. Bu kişiler hem şekil hem sözel ifadeler, işlemler kullanarak ispat yapmışlardır. Ancak Tuğba aşağıdaki gibi koşulların hangi noktaya karşılık geldiğini gösterip ispatı sonlandırmıştır.

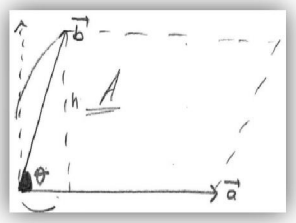
Şekil 16
Tuğba'nın 4. Teoreme Yaptığı İspat



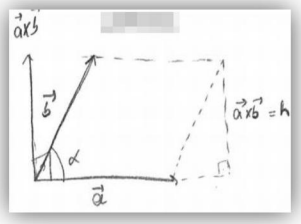
5. Teoremde katılımcılardan "*G bir çarpım grubu ve boş olmayan M= {x ∈ G: ax=xa, ∀ a ∈ G} kümesi veriliyor. M ≤ G*" olduğunu göstermeleri istenmiştir. Bu ispatı Esra, Ömer ve Berna Soyut Cebir dersinde kendilerini iyi görmedikleri için hem ispatı yapmamışlar hem de arkadaşlarının ispatlarını değerlendirmemişlerdir. Bu ispatı tam doğru şekilde Ayşe, Seher ve Zehra yapmışlardır. Oğuz bir koşulu sağlatmayı unuttuğu için 2 puan almıştır. Diğerleri ise ya boş bırakmış ya da ispatı yanlış yapmışlardır.

6. Teoremde katılımcılardan "*Uzayda lineer bağımsız ve* $\vec{a}$ *ve* $\vec{b}$ *verildiğinde bu vektörler üzerine kurulu olan paralelkenarsal bölgenin alanının* $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \| . \sin\theta$" olduğunu göstermeleri istenmiştir. 9 kişinin ispatları tam doğru ve kısmen doğru olarak değerlendirilmiştir. Bu grup ispatlardaki en çok doğru yapılan ispat budur. Bu ispatı yapabilen öğrencilerin kullandıkları grafikler aşağıda yer almaktadır (Şekil 17). Görüldüğü üzere öğrenciler benzer geometrik şekiller kullanmışlardır.

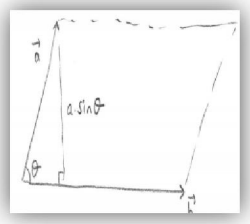
Şekil 17
Öğrencilerin 6. Teoremin İspatlarında Kullandıkları Geometrik Şekiller



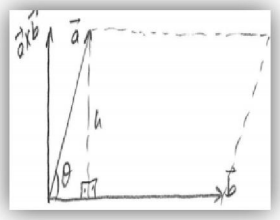
Berna



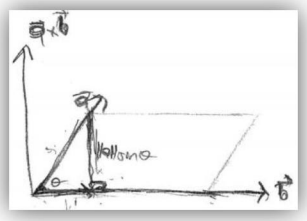
Yağmur



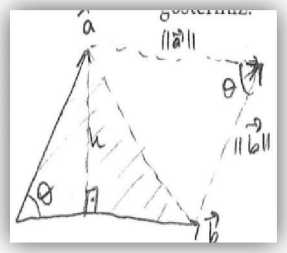
Oğuz



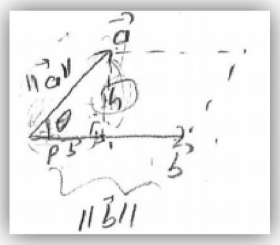
Seher



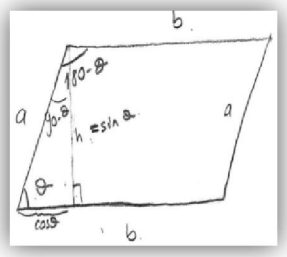
Murat



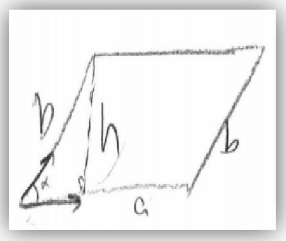
Zehra



Leyla



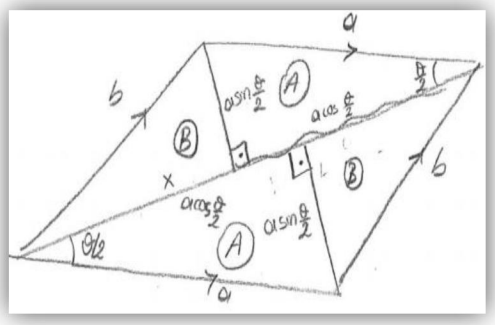
Tuğba



Ayşe

Yukarıdaki örneklere alınmayan bir gösterim ise Esra'nınkidir. Esra'nın vektör bilgisinin yetersiz olduğu görülmektedir. Bu sebeple yaptığı ispat da yeterli görülmemiştir. Esra'nın bu ispat için çizdiği geometrik şekil ise aşağıda yer almaktadır (Şekil 18).

Şekil 18
Esra'nın 6. Teoremin İspatında Kullandığı Geometrik Şekil



7. Teoremde ise katılımcılardan "*a ve b tamsayılarının m ile bölündüğünde aynı kalanı vermeleri için gerek ve yeter şart a≡ b (m)*" olduğunu ispatlamaları istenmiştir. Gerek ve yeter şart ifadesiyle çift taraflı ispatlayan sadece 3 kişidir. Bunlar Ayşe, Zehra ve Seher'dir. İspatları 2 puanla değerlendirilen Tuğba, Esra, Murat, Oğuz ve Berna ise tek taraf olarak sadece gerek kısmını ispatlamışlardır. Diğer 4 kişi ise ispatı yanlış yapmış veya boş bırakmışlardır.

Araştırmacının değerlendirilmesi sonrası, aşağıdaki kısımda öğrencilerin diğer öğrencileri değerlendirmesi ile elde edilen bulgular sunulmaktadır. Tablo-26 de her bir öğrenci için 3. Gruptaki ispatlarına diğer 11 öğrencinin verdiği puanlar yer almaktadır.

Tablo 26
Öğrencilerin 3. Gruptaki İspatlarına Arkadaşlarının Verdiği Puanlar

1) TUĞBA'NIN İSPAT PUANLARI								
İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Ayşe	1	0	1	1	1	1	1	6
Esra	2	0	1	1	--	1	1	6+
Ömer	1	0	3	1	--	2	1	8+
Murat	1	0	1	1	3	2	1	9
Yağmur	2	0	2	1	3	1	3	**12**
Berna	1	0	1	1	--	3	1	7+
Oğuz	1	0	2	1	3	3	2	**12**
Leyla	3	0	1	1	3	2	1	11
Ozan	1	0	1	0	1	1	2	6
Seher	2	0	2	1	1	1	1	8
Zehra	1	0	1	0	1	1	1	5

ORT	1,45	0	1,45	0,81	2	**1,63**	1,36	
TOPLAM	16	0	16	9	16	**18**	15	

***Ortalama*: Toplam puan / Kişi sayısı**

2) AYŞE'NİN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	3	3	3	**21**
Esra	3	3	3	2	--	3	3	17+
Ömer	2	3	1	3	--	3	3	15+
Murat	3	3	3	2	3	3	3	20
Yağmur	2	3	3	3	3	3	3	20
Berna	3	2	3	3	--	3	3	17+
Oğuz	3	3	3	3	3	3	3	**21**
Leyla	3	2	1	3	3	3	3	18
Ozan	3	2	1	2	3	2	3	16
Seher	1	2	3	2	3	3	3	17
Zehra	3	3	3	3	3	3	3	**21**
ORT	2,63	2,63	2,45	2,63	2,18	2,90	**3**	
TOPLAM	29	29	27	29	24	32	**33**	

3) ESRA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	3	1	3	0	1	2	11
Ayşe	1	3	1	1	0	1	2	10
Ömer	1	3	1	1	0	1	2	9
Murat	1	3	1	1	0	1	2	9
Yağmur	3	3	2	3	0	1	3	**15**
Berna	1	1	3	2	0	1	2	10
Oğuz	3	3	1	2	0	1	3	13
Leyla	3	3	1	1	0	1	3	12
Ozan	1	2	2	1	0	1	2	9
Seher	2	3	1	1	0	1	2	10
Zehra	1	3	1	2	0	1	1	9
ORT	1,63	**2,72**	1,36	1,63	0	1	2,18	
TOPLAM	18	**30**	15	18	0	11	24	

4) ÖMER'İN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	2	2	0	2	0	0	2	8
Ayşe	1	3	0	1	0	0	2	7
Esra	3	3	0	2	0	0	3	**11**
Murat	3	3	0	2	0	0	3	**11**
Yağmur	2	1	0	2	0	0	1	6
Berna	2	1	0	3	0	0	2	8
Oğuz	2	1	0	2	0	0	1	6
Leyla	2	3	0	2	0	0	3	10

Ozan	2	2	0	2	0	0	2	8
Seher	1	2	0	2	0	0	2	7
Zehra	2	1	0	2	0	0	1	6
ORT	**2**	**2**	0	**2**	0	0	**2**	
TOPLAM	**22**	**22**	0	**22**	0	0	**22**	

5) MURAT'IN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	2	1	3	1	3	2	13
Ayşe	1	1	1	3	1	3	2	12
Esra	3	3	2	2	--	3	3	16
Ömer	1	2	1	3	--	3	2	12+
Yağmur	3	3	1	3	2	3	3	**18**
Berna	1	1	1	3	--	3	2	11
Oğuz	1	3	1	2	1	3	3	14
Leyla	2	3	1	3	2	2	3	16
Ozan	1	1	1	2	1	1	2	9
Seher	2	2	1	1	1	2	2	11
Zehra	2	3	1	2	1	3	3	15
ORT	1,63	2,18	1,09	2,45	1,25	**2,63**	2,45	
TOPLAM	18	24	12	27	10	**29**	27	

6) YAĞMUR'UN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	3	3	0	2	3	1	13
Ayşe	3	2	3	0	1	3	1	14
Esra	3	3	3	0	--	3	1	13
Ömer	1	3	2	0	--	3	1	11+
Murat	3	3	3	0	2	3	1	**16**
Berna	2	3	3	0	--	3	1	13
Oğuz	2	3	3	0	2	2	1	13
Leyla	3	3	2	0	1	3	1	13
Ozan	2	3	3	0	2	2	1	13
Seher	2	3	1	0	1	2	0	9
Zehra	1	3	2	0	1	3	1	11
ORT	2.09	**2,90**	2,45	0	1,5	2,72	0,9	
TOPLAM	23	**32**	27	0	12	30	10	

7) BERNA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	3	3	3	0	1	3	14
Ayşe	1	1	1	1	0	1	2	7
Esra	3	3	3	3	--	3	3	**18**
Ömer	2	2	2	3	--	3	2	14
Murat	2	2	2	3	0	3	2	14
Yağmur	3	3	3	3	0	1	3	16

Oğuz	3	1	3	3	0	1	3	14
Leyla	3	2	2	3	0	2	1	13
Ozan	1	3	1	3	0	1	1	10
Seher	1	2	1	2	0	1	1	8
Zehra	1	2	2	3	0	1	2	11
ORT	1,90	2,18	2,09	**2,72**	0	1,63	2,09	
TOPLAM	21	24	23	**30**	0	18	23	

8) OĞUZ'UN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	1	3	3	3	3	1	2	16
Ayşe	1	3	1	3	1	2	2	12
Esra	2	3	3	3	--	3	3	**20**
Ömer	1	3	3	3	--	3	3	16+
Murat	1	3	3	3	3	3	3	19
Yağmur	1	3	3	3	2	2	3	17
Berna	1	1	3	3	--	3	2	13
Leyla	1	3	2	3	2	3	3	17
Ozan	1	2	1	3	2	2	2	13
Seher	0	3	1	1	1	1	2	9
Zehra	1	2	2	3	1	2	2	13
ORT	1	2,63	2,27	**2,81**	1,87	2,27	2,45	
TOPLAM	11	29	25	**31**	15	25	27	

9) LEYLA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	2	1	3	0	3	0	12
Ayşe	1	2	1	3	0	2	0	9
Esra	3	3	2	3	--	3	0	14
Ömer	2	2	1	3	--	3	0	11
Murat	2	2	1	3	0	3	0	11
Yağmur	3	3	3	3	0	3	0	**15**
Berna	3	3	3	3	--	3	0	**15**
Oğuz	2	3	2	3	0	3	0	13
Ozan	1	1	1	2	0	2	0	7
Seher	1	2	1	2	0	2	0	8
Zehra	1	3	2	2	0	2	0	10
ORT	2	2,36	1,63	**2,72**	0	2,63	0	
TOPLAM	22	26	18	**30**	0	29	0	

10) OZAN'IN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	2	2	0	2	0	3	0	9
Ayşe	2	3	0	2	0	2	0	9

Esra	3	3	0	2	--	3	0	11
Ömer	3	3	0	3	--	3	0	**12**
Murat	3	3	0	3	0	3	0	**12**
Yağmur	3	3	0	2	0	2	0	10
Berna	3	3	0	2	--	3	0	11
Oğuz	3	2	0	1	0	3	0	9
Leyla	1	3	0	2	0	3	0	9
Seher	3	3	0	2	0	2	0	10
Zehra	3	3	0	1	0	2	0	9
ORT	2,63	**2,81**	0	2	0	2,63	0	
TOPLAM	29	**31**	0	22	0	29	0	

11) SEHER'İN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	2	3	2	3	3	3	3	19
Ayşe	2	2	1	3	2	3	3	16
Esra	3	2	3	3	--	3	3	17
Ömer	1	3	3	3	--	3	3	16+
Murat	2	3	3	3	2	3	3	19
Yağmur	3	3	3	3	3	3	3	**21**
Berna	2	2	1	3	--	3	3	14+
Oğuz	3	1	1	3	3	3	3	17
Leyla	2	3	2	3	3	3	3	19
Ozan	2	2	1	2	3	3	3	16
Zehra	2	3	2	2	1	3	3	16
ORT	2,18	2,45	2	2,81	2,5	**3**	**3**	
TOPLAM	24	27	22	31	20	**33**	**33**	

12) ZEHRA'NIN İSPAT PUANLARI

İnceleyen Kişi	1. ispat	2. ispat	3. ispat	4. ispat	5. ispat	6. ispat	7. ispat	TOPLAM
Tuğba	3	3	3	3	3	3	3	**21**
Ayşe	3	3	3	3	3	2	3	20
Esra	3	3	3	3	2	3	3	20
Ömer	3	3	1	3	--	3	2	15
Murat	3	3	1	3	3	3	2	18
Yağmur	3	3	3	3	2	3	3	20
Berna	2	2	3	3	--	3	3	16
Oğuz	3	3	3	3	3	3	2	20
Leyla	1	3	1	3	3	3	1	15
Ozan	3	2	1	3	2	2	2	15
Seher	1	1	3	2	3	3	3	16
ORT	2,54	2,63	2,27	**2,9**	2,18	2,81	2,45	
TOPLAM	28	29	25	**32**	24	31	27	

Bu tablolar incelendiğinde diğer öğrencilerin değerlendirmesi sonucu en yüksek puanları alan kişiler sırasıyla Zehra, Seher ve Ayşe'dir. En düşük puanları alanlar ise Tuğba, Ömer ve Ozan'dır. Her bir katılımcının en yüksek ortalamaya sahip olduğu ispatlara bakılacak olunursa; Tuğba 6. ispat 1.63; Ayşe 7. ispat 3; Esra 2. ispat 2.72; Ömer 1.,2.,4. ve 7. ispat 2; Murat 6. ispat 2.63; Yağmur 2. ispat 2.9; Berna 4. ispat 2.72; Oğuz 4. ispat 2.81; Leyla 4. ispat 2.72; Ozan 2. ispat 2.81; Seher 6. ve 7. ispat 3; Zehra 4. ispat 2.9. Bu bilgilere göre 3 kişi 6. ispattan, 3 kişi 7. ispattan, 4 kişi 2. ispattan, 5 kişi de 4. ispattan en yüksek puanlarını almışlardır.

Her bir katılımcının diğer katılımcılar tarafından değerlendirilen kimi ispatlarında çok çeşitli değerlendirmeler dikkat çekmiştir. Ömer'in 2. İspatına 4 kişi (Ayşe, Esra, Murat, Leyla) 3 puan verirken, 3 kişi (Tuğba, Ozan, Seher) 2 puan vermiş, 4 kişi de (Yağmur, Berna, Oğuz, Zehra) 1 puan vermiştir. Aynı şekilde Murat'ın da 2. İspatına 5 kişi (Esra, Yağmur, Oğuz, Leyla, Zehra) 3 puan verirken, 3 kişi (Tuğba, Ömer, Seher) 2 puan, 3 kişi de (Ayşe, Berna, Ozan) 1 puan vermiştir. Berna'nın da 2. İspatına 4 kişi (Tuğba, Esra, Yağmur, Ozan) 3 puan verirken, 5 kişi (Ömer, Murat, Leyla, Seher, Zehra) 2 puan, 2 kişi de (Ayşe ve Oğuz) 1 puan vermişlerdir. Görüldüğü üzere diğer gruplardaki bulgularla benzer sonuçlar çıkmıştır. Aynı sınıfta okumakta olan 3-4 kişinin doğru dediği ispata 3-4 kişi yanlış diyebilmektedir.

Her bir öğrencinin arkadaşlarından aldığı en fazla puanlar incelenecek olunursa; Tuğba 12, Ayşe 21, Esra 15, Ömer 11, Murat 18, Yağmur 16, Berna 18, Oğuz 20, Leyla 15, Ozan 12, Seher 21, Zehra 21 puan almışlardır. Seher ve Zehra bu alanda da yüksek ortalamaya sahip öğrenciler olmuşlardır. Bu sonuç da araştırmacının verdiği puanlarla da örtüşmektedir.

4. 3. Üçüncü Aşamada Yapılan Uygulamaların Bulguları

Araştırmanın son aşamasında üçüncü alt probleme cevap aranmıştır. Bu alt problem şu şekildedir;

Öğrencilerin -matematiksel ifadelerin farklı formlarına dayalı- doğrulama örnekleri çerçevesinde ispat algıları nasıl şekillenmektedir?

Bu aşamada araştırmacı ve danışman öğretim üyesi tarafından oluşturulan bir form ile birlikte öğrencilerin kendilerine sunulan doğrulamalar üzerinden ispat algılarının nasıl şekillendiğinin gözlenmesine çalışılmıştır. Kullanılan formda şu doğrulama örnekleri mevcuttur; tümevarım, doğrudan ve dolaylı ispat yöntemlerini; vektörel, sentetik ve analitik yaklaşımları içeren ve farklı ispat biçimlerini kapsayan (örn. Sözsüz ispat, iki kolonlu (çift sütun) ispat, paragraf ispat, akış diyagramı ispat); bunların dışında, origami ile modellenen, sadece sonlu adımda örnekle doğrulamayı içeren ve sadece metinsel açıklamaya (düz yazı formatında, sayı, sembol, notasyon içermeyen) dayalı örneklerdir. Doğrulama örneği denmesinin sebebi ise bazı çevrelerce mantıken doğru sayılan ancak bilimsel açıdan değerlendirildiğinde ispat kabul edilmeyen, bazı çevrelerce de ispat olmayıp ancak matematik öğretiminde fayda sağlayan, görsel destek sağlamasıyla ispatı somutlaştırma özelliğinde olan bir etkinlik olarak düşünülmesidir. Çalışmadaki kimi örnekler ise (devreden sayı, çoklu örneklemeye dayalı deneysel ispat, tümü sözel yazılmış doğrulama) bu çalışmanın öğrencilerin ispat algılarını çeşitli boyutlarda incelemeyi amaçlaması sebebi ile tarafımızca hazırlanıp, kullanılması uygun görülen doğrulamalardır.

Bu formda yer alan gösterim biçimleri, doğrulama örneklerinin gerek şekilsel formları gerek amaçları göz önünde bulundurularak araştırmacı tarafından sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma hem araştırma hem de veri analizi açısından kolaylık sağlamıştır. Bu sınıflama ise, "Yazınsal", "Görsel" ve "Deneysel" şeklinde 3 bölüme ayrılmıştır. Bunlar;

-- Yazınsal (tümevarım, paragraf ispat, tümü sözel yazılmış ispat, vektörel ispat, doğrudan ispat);

-- Görsel (sözsüz ispat, akış diyagramı ispat, çift sütun ispat, origami) ve

-- Deneysel (örneklemeye dayalı, Geogebra ile modellenen) şeklinde oluşturulmuştur.

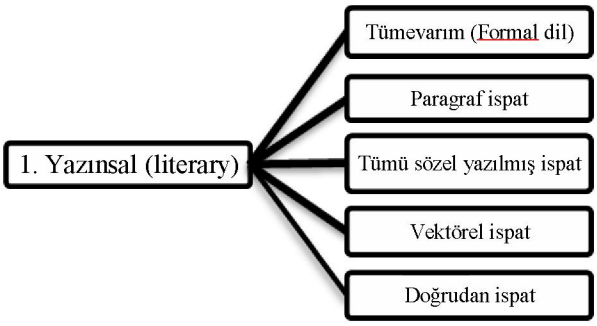
Bu aşamada yarı yapılandırılmış görüşmelerden faydalanılmıştır. Katılımcılara bu formdaki doğrulama örneklerini ispat kabul edip etmedikleri sorulmuştur. Aynı zamanda kimi katılımcılara doğrulama örneklerini ispat kabul etmiyorsa ne olarak kabul ettiği de sorulmuştur (Örn. öğretimde kolaylık sağlamak, doğrulama, örnek verme, gösterme, ...).

Bu gruptaki veri analizi üçlü sınıflamaya göre yazınsal, görsel ve deneysel olarak yapılmıştır. Sonrasında her bir öğrencinin verdiği cevaplar tek tek incelenerek bireysel olarak ispat algısı temelinde irdelenmiştir.

4.3.1. Doğrulama Örneklerinde "Yazınsal" Sınıfına Ait Bulgular

Yazınsal olarak adlandırılan sınıfta 5 doğrulama çeşidi bulunmaktadır. Bunlar Şekil-19 de sunulmuştur. Öğrencilerin önlerine koyulan görüş formunda ise bu isimlendirmeler onları yönlendirmemek amacıyla yer almamaktadır.

Şekil 19
Yazınsal Sınıftaki Doğrulama Örneklerinin Alt Başlıkları



Bu sınıfa ait 8 doğrulama örneği hakkında katılımcılardan görüş alınmıştır. Bu doğrulama örnekleri Ek-7'de gösterildiği gibidir. Aşağıdaki tabloda (Tablo-27) katılımcılardan bu gösterimlerin ispat olup olmadıklarına dair görüşleri yer almaktadır. Bunları ispat olarak görüyorsa tabloda "✓", görmüyorsa "✗" işaretiyle gösterilmiştir. Bu cevapların nedenleri ise ilerleyen paragraflarda sunulmuştur.

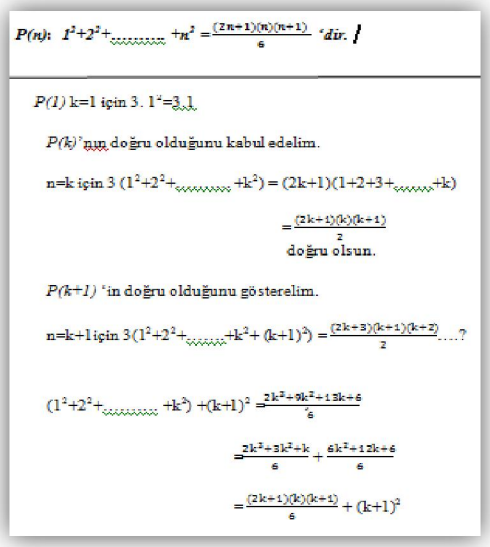
Tablo 27
Öğrencilerin Yazınsal Sınıfa Ait Doğrulama Örneklerini İçin Görüşleri

Doğrulama Örneği / Öğrenci	1) Tümevarım	2) Devreden sayı formülü	3) Paragraf ispat	4) Tümü sözel yazılmış-1	5) Tümü sözel yazılmış-2	6) Vektörel ispat	7) Doğrudan ispat-1 (Mat)	8) Doğrudan ispat-2 (Geo)
Zehra	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗
Ayşe	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ozan	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Berna	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✗
Seher	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✗
Leyla	✓	✗	✓	✗	✓	✓	✓	✗
Murat	✓	✓	✗	✗	✓	✓	✓	✗
Ömer	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tuğba	✓	✗	✓	✓	✗	✗	✓	✓
Esra	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✓	✗
Oğuz	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Yağmur	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✗
Toplam sayı	**12**	5	9	8	9	9	**12**	5

Tümevarımı 12, devreden sayı formülünü 5, paragraf ispatı 9, tümü sözel yazılmış ispatın birincisini 8, ikincisini 9, vektörel ispatı 9, doğrudan ispatın

birincisini 12, ikincisini 5 kişi ispat olarak kabul etmiştir. Bu veriler yığılımın nerede olduğuna yönelik bilgi vermektedir. Aşağıdaki bölümlerde bu doğrulama örneklerine verilen cevaplar tek tek incelenmiştir.

4.3.1.1 Birinci Örneğe Yönelik Bulgular


P(n): $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{(2n+1)(n)(n+1)}{6}$ 'dir.

P(1) k=1 için 3. $1^2=3.1$

P(k)'nın doğru olduğunu kabul edelim.

n=k için 3 $(1^2+2^2+\ldots+k^2)=(2k+1)(1+2+3+\ldots+k)$

$=\frac{(2k+1)(k)(k+1)}{2}$

doğru olsun.

P(k+1) 'in doğru olduğunu gösterelim.

n=k+1 için $3(1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2)=\frac{(2k+3)(k+1)(k+2)}{2}$....?

$(1^2+2^2+\ldots+k^2)+(k+1)^2=\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$

$=\frac{2k^3+3k^2+k}{6}+\frac{6k^2+12k+6}{6}$

$=\frac{(2k+1)(k)(k+1)}{6}+(k+1)^2$

Katılımcıların hepsi *tümevarımı* içeren birinci örneğe ispat olarak kabul etmiştir. Bu, derslerinde benzer pek çok örneği görmüş/ yapmış olmaları nedeniyle beklenen bir durumdur. Öğrenciler düşüncelerini belirtirken tümevarım yönteminin işleyişine dair ifadeler kullanmışlardan. Genel olarak bu ifadeler doğru ve beklendik şekilde iken Zehra farklı ve ilginç yanıt vermiştir. Zehra, tümevarımı mantıklı görmediğini, herkes tarafından mantıklı görüldüğünü ama kendisinin yarı yarıya inandığını söylemiştir. Başta P(k)'yı ispat yapanın kendinin kabul ettiğini aslında kabul etmese ispat olmayacağını söylemiştir. Aşağıda buna ait Zehra ile yapılan görüşmeden bir kesit sunulmuştur (Tablo 28).

Tablo 28
Zehra İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

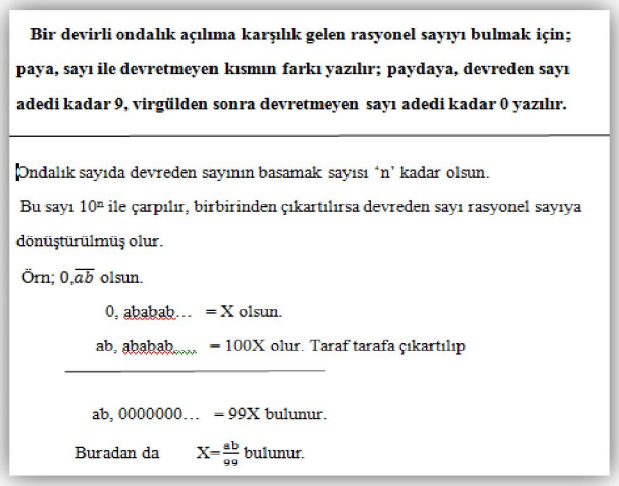
18	**Ö**	*Gösteriyoruz aslında yani başlayacağın yeri, doğrusunu gösteriyorsun, varsayımla ilgili konuşuyorsun ondan sonra böyle olsun diyorsun.*
19	**A**	*Aslında öyle değil mi öyle olsun dediğimiz?*
20	**Ö**	*Orası varsayım.*

21	**A**	*Aslında aradakiler öyle değil mi, yani ifadeyi sağlamıyor mu, sağlamayabilir mi diyorsun?*
22	**Ö**	*Şimdi sağlamıyor, olmuyor diyeceğim ama…*
23	**A**	*Hayır hayır gerçekten ne düşünüyorsan onu söyleyebilirsin.*
24	**Ö**	*Yok olmayabilir de ama oluyor insanlar kabul ediyor.*
25	**A**	*İspat olarak kabul ediliyor tümevarım ama aslında öyle değil mi ben ikna olmuyorum mu diyorsun?*
26	**Ö**	*Evet tam anlamıyla ikna olmuyorum.*
27	**A**	*Tam anlamıyla ikna olmuyorsun yani, anladım...*
***A**: Araştırmacı, **Ö**: Öğrenci*		

Bu cevap şaşırtıcıdır. Zehra'nın tümevarım ile yapılan doğrulamaları tam olarak ispat kabul etmediği ve bunun nedeni olarak başlangıçta kabul yapılarak onun üzerine bir gösterim yapılmasının aklına yatmadığını belirtmiştir. Zehra 3,5/4 akademik ortalamayla bu grubun en iyi notuna sahip olup onun tümevarımı ispat olarak ("tam manasıyla") görmemesi ilginçtir.

4.3.1.2 İkinci Örneğe Yönelik Bulgular

Devreden sayı olarak isimlendirilen gösterimde aslında bir ispat yapılmamıştır. Var olan bir formülden öğretimi kolaylaştırmak için de kullanılan bir çıkarım yapılmıştır. Öğrencilerin ispat olarak neyi algıladıkları bu çalışmanın temel sorusu olduğu için bu tarz gösterimler de öğrencilere yöneltilmiştir.



Bir devirli ondalık açılıma karşılık gelen rasyonel sayıyı bulmak için; paya, sayı ile devretmeyen kısmın farkı yazılır; paydaya, devreden sayı adedi kadar 9, virgülden sonra devretmeyen sayı adedi kadar 0 yazılır.

Ondalık sayıda devreden sayının basamak sayısı 'n' kadar olsun.
Bu sayı 10^n ile çarpılır, birbirinden çıkartılırsa devreden sayı rasyonel sayıya dönüştürülmüş olur.
Örn; $0,\overline{ab}$ olsun.

0, ababab… = X olsun.
ab, ababab…. = 100X olur. Taraf tarafa çıkartılıp

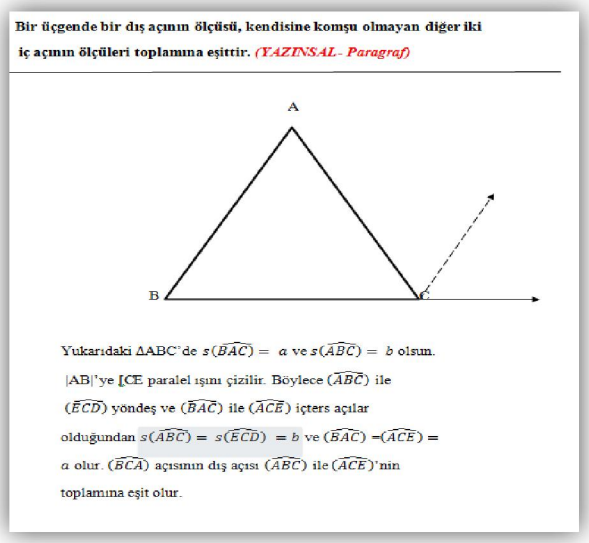
ab, 0000000… = 99X bulunur.
Buradan da $X=\frac{ab}{99}$ bulunur.

Ozan, Seher, Murat, Ömer ve Oğuz olmak üzere 5 kişi bu doğrulamanın ispat olduğunu kabul etmiştir. Oğuz iki düşünce arasında kalmıştır. Başta '*bir şeyi kabul*

edip de onu ispatlamıyoruz, üzerinde işlem yaparak göstermiş' ispat değildir fikrini savunmuştur. Ancak sonrasında biraz daha düşününce '*bu bir ispattır ancak bir örneğin üzerinden ispat yapılmış gibi, doğruluğunu gösterme gibi olmuş*' diyerek görüş olarak arada kaldığını dile getirmiştir. Seher ise ilkokulda bunun zaten böyle verildiğini dile getirmiş, ispat yöntemi olarak da 'örnekleme' olduğunu söylemiştir. Ozan genelleme yapıldığını o yüzden ispat olacağını söylemiştir. Murat, bu gösterim harflerle yapıldığı için ispat olduğunu, harf değil de rakamlar kullanılsaydı bunun ispat olmayacağını, (sayısal) örneklerle ispat yapılamayacağını dile getirmiştir. Yani Murat'ın özellikle harflendirme (soyutlama) olduğu takdirde ispat olarak kabul etme eğiliminde olduğu fark edilmiştir. Bu örneği ispat olarak kabul etmeyen öğrencilerin sundukları gerekçeler ise şöyledir;

Berna, Esra	Doğru olan önermede örnekleme yapılmış
Zehra	Genelleştirme yapılmamış
Ayşe, Tuğba	Özel bir durum alınmış (genelleştirme yok)
Yağmur	Sadece bu öğretimi kolaylaştırmak için bir yöntem

4.3.1.3 Üçüncü Örneğe Yönelik Bulgular



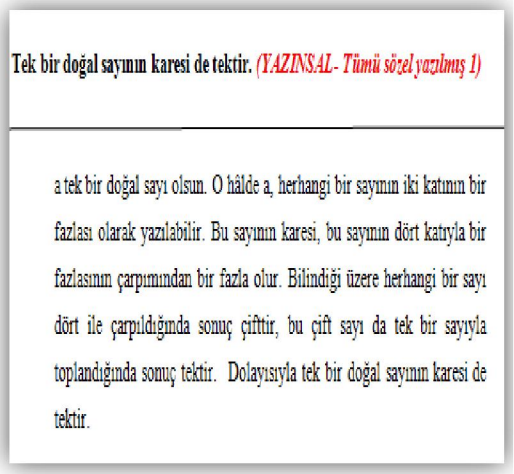
Bu örnekte sunulan *paragraf ispat* bir ispat biçimidir. İspat boyunca detaylı açıklamalara yer verilir. İspat sonlandırılana kadar her adım için gerekçeler ayrıntılı bir şekilde belirtilir (MEB, 2011b: 78). İspat biçimi olarak ortaöğretim geometri öğretim programında 3 çeşit ispat gösterilmekte olup, paragraf ispat da bunlardan biridir. İçerik olarak bakıldığında bu yaklaşım tüm ispat yöntemleriyle yapılabilir

olan şeyi sadece şekilsel (sunma biçimi) olarak farklı biçimde göstermektedir. 12 kişiden 9'u paragraf ispatı, ispat olarak kabul etmiştir. Berna, Murat ve Yağmur ise ispat olmadığını düşünmüşlerdir. Bu öğrencilerin gerekçeleri şöyledir.

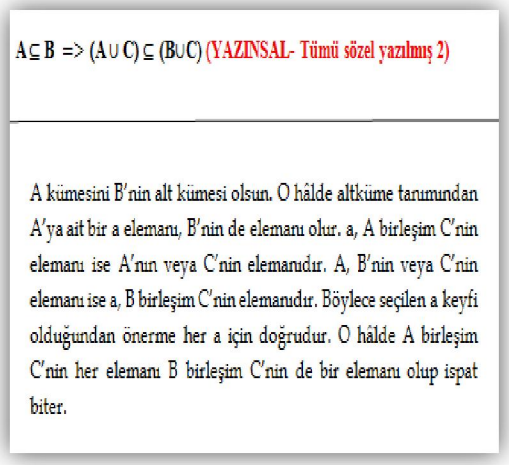
Berna, Yağmur	Soru çözümü gibi görülmesi/ sözel ifade fazlalığı
Murat	Matematik dil (formal dil) eksikliği

Yaptıkları açıklamalarda ortak düşünce bunun "soru çözümü gibi" ve "fazla sözel ifadelerin" yer aldığı şeklindedir. İspatın matematik dilini daha fazla içermesi gerektiğini söylemişlerdir. Sözel ifadelerin fazlalığı, bir matematikçinin fazla sözle değil de matematiksel gösterimlerle ispatı yapabilecek olması, bu türün ispat olarak görülmemesinin sebebi olarak açıklanmıştır. Yani bu öğrencilerin bakış açısında bir matematikçinin ispatı nasıl yapacağı düşüncesi vardır.

4.3.1.4 Dördüncü ve Beşinci Örneklere Yönelik Bulgular


Tek bir doğal sayının karesi de tektir. *(YAZINSAL- Tümü sözel yazılmış 1)*

a tek bir doğal sayı olsun. O hâlde a, herhangi bir sayının iki katının bir fazlası olarak yazılabilir. Bu sayının karesi, bu sayının dört katıyla bir fazlasının çarpımından bir fazla olur. Bilindiği üzere herhangi bir sayı dört ile çarpıldığında sonuç çifttir, bu çift sayı da tek bir sayıyla toplandığında sonuç tektir. Dolayısıyla tek bir doğal sayının karesi de tektir.


$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$ (YAZINSAL- Tümü sözel yazılmış 2)

A kümesini B'nin alt kümesi olsun. O hâlde altküme tanımından A'ya ait bir a elemanı, B'nin de elemanı olur. a, A birleşim C'nin elemanı ise A'nın veya C'nin elemanıdır. A, B'nin veya C'nin elemanı ise a, B birleşim C'nin elemanıdır. Böylece seçilen a keyfi olduğundan önerme her a için doğrudur. O hâlde A birleşim C'nin her elemanı B birleşim C'nin de bir elemanı olup ispat biter.

Tümü sözel yazılmış doğrulama örnekleri, mantık açısından hata bulundurmayacak şekilde, ancak tüm matematiksel ifadeler, gösterimler, kısaltmalar, semboller kullanılmadan tamamen sözel şekilde yazılmış bir formattadır. İspat bu türde yazıldığında, öğrenciler tarafından geçerli kabul edilip edilmediği incelenmiştir.

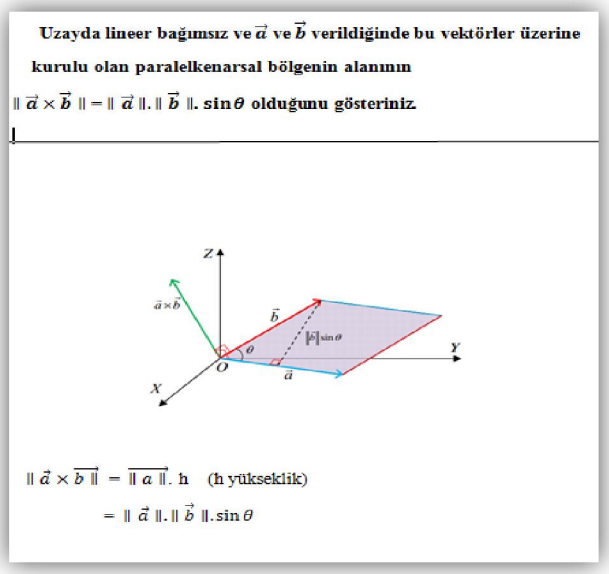
Birinci örneği Zehra, Leyla, Murat ve Yağmur ispat olarak kabul etmemiştir, diğer 8 kişi ispat olarak kabul etmişlerdir. Birinci örneği ispat kabul etmeyen Zehra

ikinciyi de kabul etmemiştir. Farklı olarak Seher ve Tuğba birinci örneği ispat olarak kabul ederken ikinciyi kabul etmemiş, diğer bütün katılımcılar ise bu örnekleri ispat olarak kabul etmiştir.

Örnek1	Yağmur, Murat, Leyla	Matematiksel dilin (formal dil) kullanılmaması
	Zehra	Evrensel bir dille genelleştirme yapılmaması
Örnek2	Seher	Venn şemasıyla ispat yapılır. Konuya göre bu türün ispat kabul edilip edilmemesi değişir
	Zehra, Tuğba	Matematiksel sembollerin kullanılmaması

Birinci örneği ispat kabul etmeyen Zehra, bu ispatı yapılan öğretim seviyesine göre değerlendirmiştir. Ortaokul seviyesinde bir öğrenci tarafından yapıldığında bunun ispat olacağını ancak, üniversite seviyesinde matematik yapan biri için kabul edilmeyeceğini söylemiştir. Ayrıca seviyeye göre değerlendirmesinin yanında yapılanın doğruluğundan şüphe duymadığını ancak, genelleştirme yapılan bir dilin kullanıldığı ispatın kabul edileceğini söylemiştir. Yağmur, Murat ve Leyla da herkesin okuduğunda anlayacağı şekilde matematiksel sembolleri (örn. $\cap$, $\wedge$, $\supset$) kullanmak gerektiğini söylemiştir. Ancak Yağmur ve Seher farklı bir şey daha söylemişlerdir. Bu sözel ifadelerin Türkçe değil de İngilizce yazıldığı takdirde evrensel bir dille yazılmış olacağını ve ispat kabul edileceğini söylemiş, İngilizce'yi evrensel dil olarak belirtmişlerdir. Seher ikinci doğrulama örneğini sözel olarak kabul etmemiş Venn şemalarıyla ispatlanması gerektiğini söylemiştir. Yani aynı mantıkla yapılan iki örnekten birinci doğrulama örneğini ispat olarak kabul edip ikincisini etmeyen Seher ve Tuğba, ikinci doğrulama örneğini ispat olarak kabul edip birincisini kabul etmeyen Leyla, Murat ve Yağmur bu örneklerin konu bazlı değerlendirileceğini, yani konuya göre ispatın geçerliliğinin değişeceğini söylemişlerdir ki bu bulgular oldukça ilginçtir.

4.3.1.5 Altıncı Örneğe Yönelik Bulgular



Vektörel ispatı Zehra, Tuğba ve Esra dışında 9 katılımcı ispat olarak kabul etmiştir. 9 öğrencinin bu doğrulama örneğini ispat olarak kabul etmesinin sebepleri benzer ifadelerle şöyledir: 1) Derslerden aşinalık, 2) Sadece görsele bağlı kalmayıp sözel ifadelerin bulunması, 3) Sözel ifadelerin açıklayıcı bulunması, 4) Geometrik şekil kullanılarak ispat yapılmış olması, 5) Daha önce bu teoremi ders hocasının bu şekilde ispatlamış olması. Katılımcılara göre ispatın bir takım açıklamalarla ikna edici olması gerekmektedir. Bu açıklamaları ispatta gören kişiler ispat olarak kabul etmiştir. Bir diğer kabul etme sebebi ise önceki derslerinde hocalarının ispatı bu şekilde yapmış olması, kitaptan, notlarından bu şekilde yapıldığını görmüş olmasıdır. Diğer doğrulama örneklerine verilen cevaplarla karşılaştırıldığında katılımcıların bir kısmında otoriteye (öğretmen, kitap ...) dayalı karar vermenin olduğu görülmektedir.

Zehra, Tuğba ve Esra'nın ispat kabul etmeme sebepleri ise şekil üzerinde ifade edilen bilgilerin sözel açıklamalarla da desteklenmesi gerektiğidir. Tuğba ile yapılan görüşmeden bir kısım aşağıda verilmiştir (Tablo 29).

Tablo 29
Tuğba İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

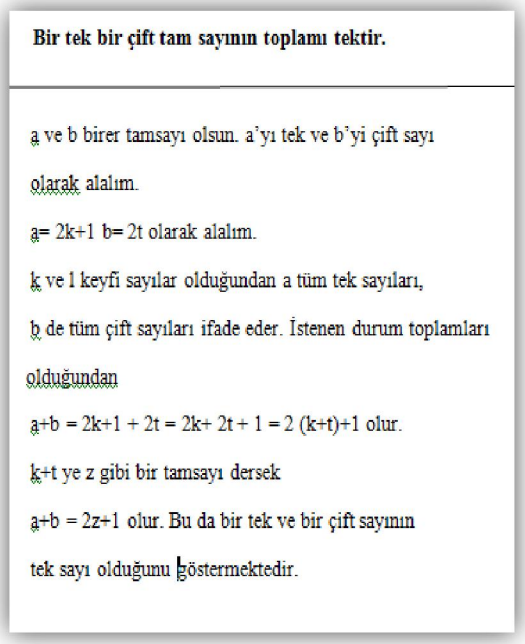
29	**A**	*Bunu incele bakalım bu bir ispat mıdır?*
30	**Ö**	*Biz de böyle şeyler yaptık. Sizin verdiğiniz sorularda da vardı bu tarz ispatlar.*

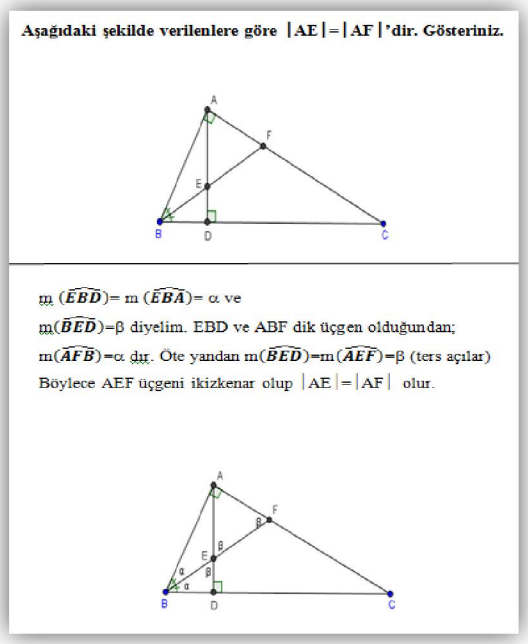
		Ama bence bu proof değil ya.
31	**A**	*Neden?*
32	**Ö**	*Burada direk şeklin üzerinde gösterilmiş, biz proofları şeklin üstünde değil de daha çok yazılı açıklamalar yaparak gösteriyoruz. Sözel olarak açıklama yapmak gerekir şeklin üzerinde yapılan çizimlerle ispat yapılmaz, yapmadık hiç. Mesela h orda nedir yükseklik mi ne? Yazması gerekir onu.*

Tuğba da açıklama yapılması gerektiğini söylemiş, şeklin üzerinde hiç ispat yapmadıklarını sözel açıklamalarla birlikte ispat yaptıklarını söyleyerek daha önce alıştığı biçimde yapılanları ispat olarak kabul etme eğiliminde olduğunu göstermiştir.

4.3.1.6 Yedinci ve Sekizinci Örneklere Yönelik Bulgular

Doğrudan ispat, p=>q nun ispatıdır. Birinci örnekte herkes tarafından bilinmesi muhtemel olan bir ispat verilmiştir. Bu doğrulama örneğinin forma koyulma sebebi, aynı mantıkla hazırlanan ancak geometri alanından alınan 2. örneğe verilen cevapla kıyaslama yapılmak istenmesidir. Her iki ispat da verilen bir durumdan yola çıkarak sonuca doğrudan ulaşılarak (yani (p=>q) p doğru iken q nun da doğru olduğunun gösterilmesi) elde edilen bulgular farklılık göstermektedir.





Birinci örneğe 12 kişinin hepsi ispattır demiştir. Ancak ikincisini sadece 5 kişi ispat olarak kabul etmiştir. Öğrencilerin 2. örneği ispat kabul etmeme nedenleri şöyledir.

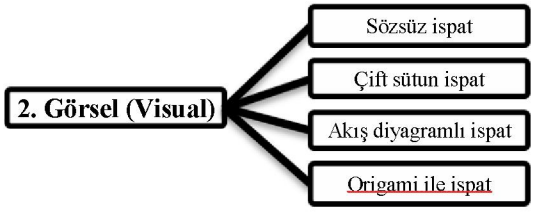
Zehra, Esra, Oğuz	Matematiksel dil eksikliği
Zehra, Oğuz, Berna, Seher, Leyla, Berna, Yağmur, Murat	Açıklama yapılmaması Soru çözümü gibi görünmesi

Sebeplerin biri matematiksel dil (formal dil) kullanılmaması, diğeri açıklama yapılmaması ve sonuncusu ise örneğin ispat değil de bir soru çözümü gibi görülmesidir. Katılımcılar geometrik şekil üzerinden önceden bilinen bir takım bilgilerle yapılan ispata karşı şüpheyle yaklaşmışlardır. Doğrudan ispat mantığını görsel örnekler üzerinde uygularken sözel ifade desteği olması gerektiğini düşünmektedirler. Bu örnekte açıklama yok denmesinin sebebi aslında şekil üzerinde var olan şeylerin ayrıca sözel ifadelerle (örn. içters, ters açı, benzerlik kurulması) yazılmamasıdır. Katılımcıların gerekçelerinden bir diğeri örneği soru çözümü gibi görmeleridir.

4.3.2. Doğrulama Örneklerinde "Görsel" Sınıfına Ait Bulgular

Bu sınıfta sözsüz ispata ait 2 örnek, çift sütun ispata ait 2 örnek, akış diyagramlı ispata 2 örnek ve origami ile ispata bir örnek olmak üzere toplam 7 tane doğrulama örneği hakkında katılımcılardan görüş alınmıştır. Bu doğrulama örnekleri Ek-7'de gösterildiği gibidir. Şekil-23 bu sınıfa ait başlıkları göstermektedir.

Şekil 20
Görsel Sınıftaki Doğrulama Örneklerinin Alt Başlıkları



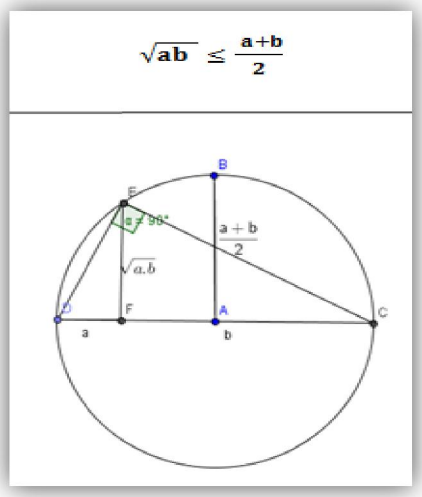
Aşağıdaki tabloda katılımcıların görüşlerine ait bulgular yer almaktadır.

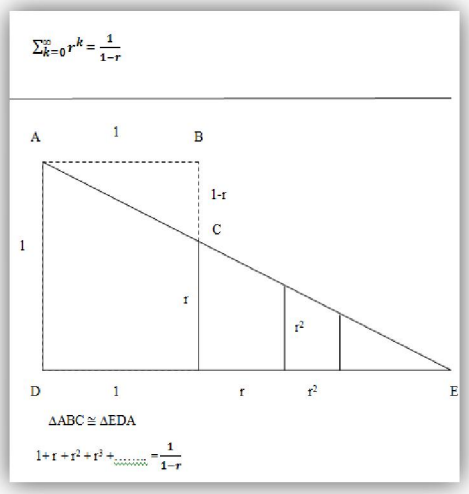
Tablo 30
Öğrencilerin Görsel Sınıfa Ait Doğrulama Örnekleri İçin Görüşleri

Doğrulama Örneği / Katılımcı	1) Sözsüz ispat-1	2) Sözsüz ispat-2	3) Çift sütun ispat-1	4) Çift sütun ispat-2	5) Akış diyagramı ispat	6) Origami ile ispat
Zehra	×	×	✓	✓	✓	×
Ayşe	×	×	✓	✓	✓	×
Ozan	✓	✓	✓	✓	✓	×
Berna	×	×	✓	✓	✓	×
Seher	×	×	✓	✓	✓	✓
Leyla	×	×	×	×	×	×
Murat	✓	×	×	✓	✓	✓
Ömer	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Tuğba	×	×	✓	✓	✓	×
Esra	×	✓	✓	✓	✓	×
Oğuz	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Yağmur	✓	✓	✓	✓	✓	×
Toplam sayı	5	5	10	**11**	**11**	4

Birinci sözsüz ispatı 5, ikinci sözsüz ispatı 5, birinci çift sütun ispatı 10, ikinci çift sütun ispatı 11, akış diyagramı ispatı 11, origami ile ispatı ise 4 katılımcı ispat olarak kabul etmişlerdir. Bu sayısal veriler elbette ki içeriksel bir bilgi sağlamamaktadır, yığılımın nerede olduğuna yönelik bilgi vermektedir. Aşağıdaki bölümlerde bu doğrulama örneklerine verilen cevaplar, nedenleriyle birlikte tek tek incelenmiştir.

4.3.2.1 Birinci ve İkinci Örneklere Yönelik Bulgular





İki sözsüz ispat örneğinden her ikisini de ispat olarak kabul eden Ozan, Ömer, Oğuz ve Yağmur olmak üzere sadece 4 kişidir. Oğuz bunu ispat olarak kabul etmiş ancak 'bu matematik bilen kişi için kabul edilebilir, bilmeyen için de açıklama yapılması gerekir yani sözel ifadelerle desteklenmesi gerekir' demiştir. Ömer için diğer doğrulama örneklerine verdiği açıklamalar da göz önünde bulundurulduğunda Ömer'in yazı, şekil, görsel, formal dil fark etmeksizin eğer mantık doğru kurulduysa yapılanı ispat olarak düşündüğü görülmektedir. Yağmur ise bu iki örnek için 'görselleştirilmiş ispat' isimlendirmesini yapmıştır. Ozan bu görsellere bakarak genel bir şey (genele duruma ait) söylenebildiği (genelleştirme yapılabildiği) için ispat olarak kabul etmiştir.

Birincisini ispat olarak kabul edip de ikincisini kabul etmeyen Murat'la yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıda verilmiştir (Tablo 31).

Tablo 31
Murat İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

29	**A**	*Burada geometrik ortalamanın aritmetik ortalamadan küçük ve eşit olduğunu gösteriyor. Bu gösterim sence bir ispat mıdır?*
30	**Ö**	*Taraf tarafa karesini alırsak... (ispatı yapıyor)*
31	**A**	*O şekilde olabilir. Ancak böyle yaptığımızda bir ispat olur mu?*
32	**Ö**	*İlk defa böyle bir şeyle karşılaştım. Evet aslında olabilir. Ya biz hep matematik üzerinden yaparız şekilden ziyade. ...Bence bu bir ispat. Şekil üzerinde güzel bir gösterim olmuş. Sanırım ispat bu.*
		Diğer ispata geçiliyor (Sözsüz ispat-2)

33	**A**	*Buna ne dersin? (İspatı biraz anlatıyor)*
35	**Ö**	*(İspatı anlamaya çalışıyor) burada bir matematik dili kullanılmamış. İspat için…*
36	**A**	*İlla matematiksel dil mi kullanılması gerekiyor ispat için?*
37	**Ö**	*Çoğu zaman öyle. Ne nerden geldi, kabul mü ediyoruz onları söylemek lazım. Ama görsel olarak yapılanda kullanmıyoruz. Ama burada benzerlik kurmuş ama açıklamadan yazmış hemen bu buradan diye. Aksiyomları falan kullanmak gerekir.*
38	**A**	*Ama diğerinde de böyleydi. Burada benzerliği kullanmışız diğerinde de Öklit teoremini kullandık. Ama o ispat, bu değil mi?*
49	**Ö**	*Evet (Kafası karışıyor) ben şekille hiç ispat yapmaya kalkışmadım. İlk defa gördüm kafam karıştı. Diğerini karesi alarak yaparım, bunu da limitten giderek yaparım … hmm … Ne biz gördük ne de böyle bize anlatıldı ifade edildi. Daha çok görselleştirilmeye çalışılmış şeyler bunlar. Bunlar birbirinden farklı konular aslında. Konu bazlı da ispat olabilir. Bu ispatsa bu da ispattır deme zorunluluğumuz var mı bizim?*
50	**A**	*Hayır yok.*

Murat iki gösterimin de doğru olduğunun farkın olup ancak ispatlarda açıklama olması gerektiğini düşünüyor. Derslerde gördüklerine bağlı olarak daha önce hiç karşılaşmadığını dile getiriyor. Kafasının da karıştığını, son olarak çıkış yolu olarak, ispatı konu bazlı olarak değerlendirebileceğini söylüyor. Yani konuya göre yapılan ispat değişebilir demek istiyor. Birinci ispatı hiçbir açıklama olmadan ispat olarak kabul ediyor, ikincisini de benzerlik kurulmuş ancak açıklama yapılmadığı için ispat olarak kabul etmiyor.

Esra da buna benzer şekilde açıklama yapılması gerektiğini, doğru olsa da sadece görsele dayalı ispat kabul edemeyeceğini söylüyor. İlk örneği ispat olarak kabul etmiyor, ikinci örnekte üçgenlerin benzer olduğu ($\Delta ABC \cong \Delta EDA$) aşağıda yazıldığı için ikincisini kabul ediyor.

Diğer katılımcılar (Zehra, Ayşe, Berna, Seher, Leyla, Tuğba) her iki sözsüz ispata ait doğrulama örneklerini ispat olarak kabul etmemiştir. Bu 6 kişi doğrulamayı benzer sebeplerle reddetmişlerdir. Bu 6 kişiden Seher'le yapılan görüşmenin bir kısmına aşağıda yer verilmiştir (Tablo 32).

Tablo 32
Seher İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

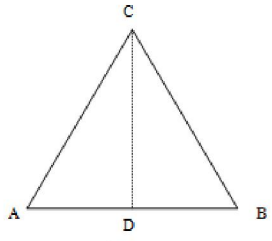
37	**A**	*Bunu bir incele bakalım. Sence ispat mıdır?*

38	**Ö**	*Yani görebilen insana göre aşikar ama herkese göre aşikar değil yani, ama biz bu işin içinde olduğumuz için bu bana göre aşikar ben şimdi gördüğüm zaman neyin ne olduğunu anlıyorum, ama bunu biraz önce dediğim gibi anlamayan bir insan için bu hiçbir şey ifade etmiyor.*
39	**A**	*Peki anlayan insan için ya da anlamayan insan için ispat faklı mıdır?*
40	**Ö**	*Evet.*
41	**A**	*Ne olarak farklıdır, yani, ispat evrensel değil mi sonuçta, kişiye göre mi ispatlıyorsunuz?*
42	**Ö**	*En temel şeyden itibaren yapılması gerekiyor yani en temel dediğim şey en az matematik bilen insan için yapılmalı, ... Burada da matematiksel dil olarak ta en temel en bilinmeyen insan göz önünde bulundurularak bir şeyler yazılması lazım ispatlarda, gidip bir profesöre gösterdiğiniz zaman bu çok açık diyebilir ama bir ilkokul öğrencisine gösterdiğinizde bundan hiçbir şey anlamaz.*

Seher, bir şeye ispat denebilmesi için karşıdaki kişi kim olursa olsun yapılanın aşikar olması gerektiğini belirtiyor. İspata bakan matematiği çok az bilen bir kişinin bile ikna olması sağlanıyorsa o ispattır diyor. Sözsüz ispat olarak yukarıdaki örnekleri inceleyen Seher, ispata bakan kişinin birincisinde Öklit bağıntısını, ikincisinde de benzerlik kurabilmeyi bilmesi gerektiği için, herkesçe (ilkokul öğrencisi) anlaşılabilen bir durum olmadığından bunları ispat olarak nitelendirmiyor. Bizce bu bakış açısı da oldukça ilginç çünkü sözsüz ispatların amaçlarından biri -tam aksine- ispata ve nasıl başlanılacağına dair görsel yani somut bir doğrulama sağlamasıdır.

4.3.2.2 Üçüncü ve Dördüncü Örneklere Yönelik Bulgular

ABC üçgeni bir ikizkenar üçgen ve |CA| = |CB|olmak üzere $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$'dir.



Ifadeler	Gerekçeler
1. CD, $(\widehat{ACB})$ açısının açıortayı.	1. Her açı bir ve yalnız bir açıortaya sahiptir.
2. 1 ve 2 açıları birbirine eşittir.	2. Açıortay tanımından
3. |CA| = |CB|	3. Verilen
4. CD ≅ CD	4. Yansıma özelliği
5. ΔACD ≅ ΔCDB	5. K-A-K benzerliğinden
6. $s(\widehat{A}) = s(\widehat{B})$	6. Eşit kenarların arasında kalan açıların eşitliği

$H \subseteq G$ ve $H \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\forall x, y \in H$ için $x^{-1}.y \in H \Rightarrow H \leq G$.

Ifadeler	Gerekçeler
1. $H \subseteq G$	1. Verilen
2. h ∈ H olsun.	2. $H \neq \emptyset$ verilen
3. H bir gruptur.	3. $h^{-1}h \in H$ (1∈H), birim elemanı olma durumu.
4. x∈H olsun.	4. $H \neq \emptyset$ verilen
5. $x^{-1} \in H$	5. x^{-1} ∈ H, H bir grup
6. x, y ∈ H olsun.	6. (4)'den dolayı
7. $x^{-1} \in H$ ve y ∈ H	7. (2) ve (5)'den dolayı
8. $(x^{-1}).y \in H$	8. Verilen
9. $(x^{-1})^{-1}.y = x.y \in H$	9. Grup tanımı gereği
10. $H \leq G$	10. İstenen

2011 yılından itibaren Ortaöğretim Geometri Dersi Öğretim Programları içerisinde yer alan ve örneklenen çift sütun ispat bir ispat biçimidir. Çift sütun ispatlar ülkemizde yeni yeni tanınıyor olması sebebiyle örneklemdeki öğrencilerin bu biçimi bilmesi beklenmiyordu. Beklendiği şekilde öğrencilerin hepsi bu biçimi ilk defa gördüklerini dile getirmiştir. Çift sütun ispatın ilkinde geometrideki ikizkenar üçgene ait bir özellik, ikincisinde soyut cebir dersinden alt grup olma şartının ispatı yapılmıştır. Katılımcılardan 10 kişi çift sütun ispatın birincisinin, 11 kişi de ikincisinin ispat olduğunu düşünmüştür. Leyla her ikisinin, Murat da ilkinin ispat olmadığını söylemişlerdir. Alışık olmadıkları bir ispat biçimi ile karşılaşmalarına rağmen öğrencilerin hemen hemen hepsi bu çeşit doğrulama örneğini ispat olarak kabul etmektedir. Bunun sebebi olarak ispatlarda neden-sonuç bağlantılarının çok net ve açıklayıcı şekilde verilmesi ve kendilerini ikna etmesidir. Bu fikri kesin ifadelerle dile getiren Seher ile yapılan görüşmenin bir kısmı aşağıdadır (Tablo 33).

Tablo 33
Seher İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

73	**A**	*Neden bunun ispat olduğunu düşündün?*
74	**Ö**	*İspat yapmak demek bir şeyi kesin dille onun gerçekliğini göstermek demek zaten. Onu da göstermek için okuyan kişinin aklında soru işareti bırakmayacak şekilde açıklamalar yapmamız lazım. Bizim amacımız bir şeyi ispatlamaksa karşımızdaki kişiyi o şeyin doğruluğuna inandırmaktır. Bu açıdan bizim mümkün mertebe buradaki gerekçelerin hepsini yazıp en ayrıntılı şekilde hiç eksiklik bırakmadan, hiç kafada soru işaretine yer vermeden, bu şekilde gerekçeleri belirtmemiz lazım ki karşımızdaki kişiyi gerçekten inandıralım ki bunun bir ispat olduğuna inandıralım.*

Katılımcılar gerekçeleriyle verilen ifadeleri, olması gereken gibi görüp bunlar ispattır demişlerdir. Her zaman onlara gösterilen ve alışık oldukları şekilde ayrıntılı, sebep-sonuç ilişkisine dayalı, bir ispat görmeleri çoğunluğunun aynı fikirde olmasını sağlamıştır. Biçimsel olarak gördükleri farklılık düşüncelerinde bir değişiklik oluşturmamıştır. Öğrencilere biçimsel farklılığının ne olduğu ve bunu bize ne sağladığı da sorulmuştur. Çift sütun ispatın düzenli şekilde yazıldığını, öğrenciyi ne düşünmesi gerekiyorsa ona yönlendirdiğini ve bunların öğretim ve öğrenme açısından büyük kolaylıklar sağlayacağını söylemişlerdir. Bu düşünceleri destekleyen görüşme kayıtlarının bir kısmı aşağıda yer almaktadır (Tablo 34-35-36).

Tablo 34
Berna İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

116	**Ö**	*Mesela burada bence doğrudan ispat kullanılmış, çünkü önermelerin aynıları.*
117	**A**	*Sadece şekil olarak bi farklılık var değil mi?*
118	**Ö**	*Aynen şekil olarak farklılık var, bu şekilde **açık ve net** bi şekilde görüyoruz*

Tablo 35
Ömer İle Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

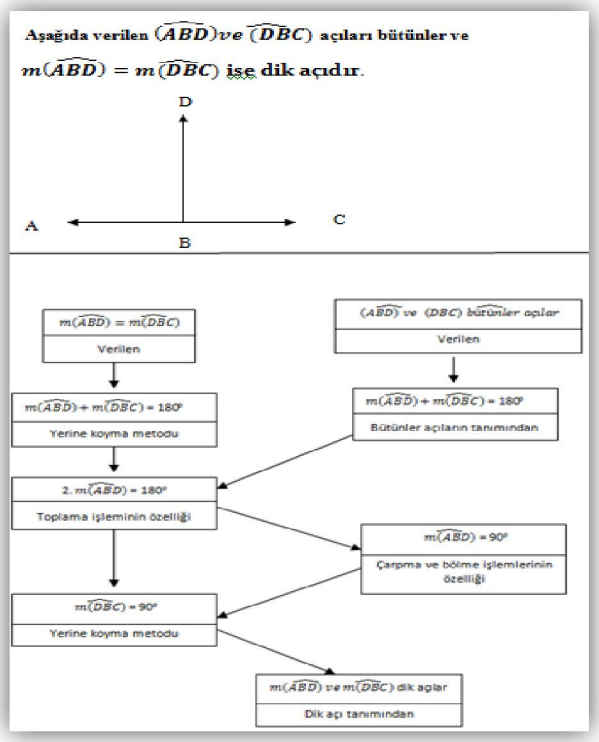
46	**Ö**	*Biz yazarken mesela ya bunları sözlü ifade olarak yazıyoruz, ya da işlemlere dökerek, matematiksel işlemlere dökerek, doğruluğunu bildiğimiz ifadeleri kullanarak matematiksel dil kullanarak yazıyoruz, burada şablonlaştırılmış öyle verilmiş*
47	**A**	*Diğer ispatlardan farkı budur diyorsun?*
48	**Ö**	*Bu doğru bir şekil inceleyerek bütün adımların doğruluğunu kendi içimde **rahat rahat görüyorum**, **daha inandırıcı** olabilir benim için örnekler.*

Tablo 36
Oğuz ile Yapılan Görüşmenin Bir Bölümü

79	**A**	*Peki diğer yapılan ispatlardan bir farkı var mı?*
80	**Ö**	*Hiçbir fark yok, şöyle ki bu ifadeleri yazarken zaten açıklamalarını belirtmek zorundayız bu sadece görsellik açısından **güzel** hem hem de ne nerden gelmiş **net, açık**, her yaptığımız adımı desteklemiş. Bu da **ispatı güzelleştiriyor.***

4.3.2.3 Beşinci Örneğe Yönelik Bulgular

Akış diyagramı ispatta yine çift sütunda olduğu gibi 2011 Geometri Dersi Öğretim Programında tanıtılan bir ispat biçimidir. Burada da yapılan ispatın yöntemine yönelik değil sunumdaki biçimsel forma yöneliktir. Akış diyagramında adından da anlaşılacağı üzere, ispatlama sürecinde yapılanlar kutucuklar ve oklar yarımı ile bir akış çerçevesinde sunulmaktadır. Öğrencilerden 11'i bu biçimi ispat olarak nitelendirmiştir. Öğrenciler kendilerinin de ispat yaparken neden-sonuç ilişkisini verdiklerini, bu gösterimde de buna uyulduğunu söylemişlerdir. Ancak bazı öğrenciler okların kafa karıştırıcı olduğunu söylemiştir.



Bazıları da aksine bunların, kişiyi yönlendirme açısından ve görsel hafızayla öğrenen kişilere kolaylık sağlayacağını belirtmiştir. Yani katılımcılar akış diyagramı

ispat biçimini içerik olarak büyük oranda ispat olarak kabul etmekte ancak sadece içerdiği oklar sebebiyle (bir iki) faklı yorumlar yapmaktadırlar.

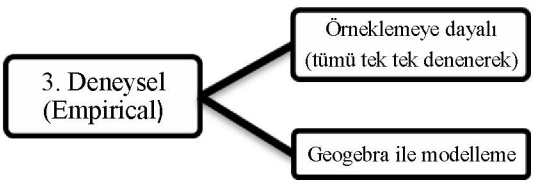
4.3.2.4 Altıncı Örneğe Yönelik Bulgular

Bu sınıftaki son örnek origamiyi içermektedir. Origami ile yapılan doğrulama örneğine Ek-7'de yer verilmiştir. Katılımcıların sadece 4'ü (Seher, Murat, Ömer, Oğuz) bunu ispat olarak nitelendirmiştir. Ömer'in cevabı diğer doğrulama örneklerine verdiği cevaplarla paralellik göstermektedir. Ömer ispatta yazımın, biçimin, sözel açıklamaların ispat için kriter olmadığını, eğer ki yapılan şey doğru ve mantıklıysa bunun ispat olduğunu düşündüğünü dile getirmiştir. Buna da benzer bir cevap vermiştir. Seher, doğrulama örneğinde adım adım ilerlendiği için ikna olduğunu ve bu görselleştirmenin ispatı somutlaştırdığını söylemiştir. Ancak Seher sözsüz ispat örneklerinde sadece görsel olduğu ve açıklama olmadığı için ispat olarak değerlendiremeyeceğini de söylemiştir. Murat yapılanların doğru olduğunu söylemiş, ancak ispat derken kafasının da karıştığını dile getirmiştir. Diğer katılımcılar origami ile yapılan doğrulama örneğinin ispat olmadığını, var olan bir durumun doğrulandığını (Leyla), görselleştirildiğini (Tuğba, Esra, Yağmur), öğretim materyali oluşturulduğunu (Yağmur), ifadenin somutlaştırılmaya çalışıldığını (Ayşe) dile getirmişlerdir. Ancak bunların olması ispat olarak değerlendirilmesini gerektirmediğini söylemişlerdir.

4.3.3. Doğrulama Örneklerinde "Deneysel" Sınıfa Ait Bulgular

Deneysel olarak adlandırılan sınıfta, örneklemeye dayalı olmak üzere 2 tane, Geogebra ile modelleme yapılarak hazırlanan 1 tane toplam 3 doğrulama örneği bulunmaktadır.

Şekil 21
Deneysel Sınıftaki Doğrulama Örneklerinin Alt Başlıkları



Aşağıdaki tabloda (Tablo-37) katılımcılardan bu gösterimlerin ispat olup olmadıklarına dair görüşleri yer almaktadır. Bu sınıfta yer alan doğrulama örnekleri, katılımcıların büyük kısmı tarafından ispat olarak değerlendirilmemiştir. Çoklu örneklemeye dayalı yapılan birinci doğrulama örneğini 2, ikinci doğrulama örneğini 5 ve Geogebra destekli yapılan doğrulama örneğini de 4 kişi ispat olarak değerlendirmiştir.

Tablo 37
Öğrencilerin Deneysel Sınıfa Ait Doğrulama Örneklerini İçin Görüşleri

Doğrulama Örneği / Katılımcı	1) Çoklu örnekleme-1	2) Çoklu örnekleme-2	3) Geogebra ile modelleeme
Zehra	×	×	✓
Ayşe	×	×	×
Ozan	×	✓	×
Berna	×	✓	×
Seher	×	×	×
Leyla	×	×	×
Murat	×	×	✓
Ömer	✓	✓	✓
Tuğba	×	✓	×
Esra	✓	✓	×
Oğuz	×	×	✓
Yağmur	×	×	×
Toplam sayı	2	5	4

4.3.3.1 Birinci ve İkinci Örneklere Yönelik Bulgular

Birinci doğrulamada bir seri açılımının yakınsadığı değer, temel matematik kuralları ile değil de sayı değerleri yerine konularak bulunmuştur. Daha doğrusu bu değere yakınsadığı sezdirilmiştir. Bundan yola çıkılarak bunun ispat olup olmayacağı hakkında görüş alınmıştır. İkinci örnekte ise birincide olduğu gibi sonsuz sayıda değer değil de sonlu sayıda elemanın bulunduğu bir kümede tanımlı bir eşitsizlikte, her bir elemanın tek tek sağlanmasıyla o eşitsizliğin doğruluğu gösterilmiştir. Öğrencilerden arka arkaya bu iki örnek hakkında görüş alınması fikirlerinin bütünsel olup olmadığı hakkında bize bir ipucu sunmuştur.

Kimi öğrenciler her ikisini de ispat kabul etmezken kimileri de birini kabul edip diğerini etmemiştir. Zehra, Ayşe, Seher, Leyla, Murat, Oğuz ve Yağmur her ikisini de ispat olarak kabul etmemişlerdir. Ömer ve Esra ise her ikisini de ispat olarak değerlendirmişlerdir. Ozan, Berna ve Tuğba birincisini ispat kabul etmeyip, ikincisini kabul etmişlerdir. Dolayısıyla 3 öğrencinin aynı bu iki örnek için fikirlerinin sabit olmadığı görülmüştür.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=3$ |

	$\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$	Toplam
n=1	0,750000000000	0,750000000000
n=2	0,562500000000	1,312500000000
n=3	0,421875000000	1,734375000000
n=4	0,316406250000	2,050781250000
n=5	0,237304688000	2,288085938000
n=6	0,177978516000	2,466064454000
n=7	0,133483887000	2,599548341000
n=8	0,100112915000	2,699661256000
n=9	0,075084686000	2,774745942000
n=10	0,056313515000	2,831059457000
n=11	0,042235136000	2,873294593000
n=12	0,031676352000	2,904970945000
n=13	0,023757264000	2,928728209000
n=14	0,017817948000	2,946546157000
n=15	0,013363461000	2,959909618000
n=16	0,010022596000	2,969932214000
n=17	0,007516947000	2,977449161000
n=18	0,005637710000	2,983086871000
n=19	0,004228283000	2,987315154000
n=20	0,003171212000	2,990486366000
n=21	0,002378409000	2,992864775000
n=22	0,001783807000	2,994648582000
n=23	0,001337855000	2,995986437000
n=24	0,001003391000	2,996989828000
n=25	0,000752525430	2,997742353430
n=26	0,000564408000	2,998306761430
n=27	0,000423306000	2,998730067430
n=28	0,000317479000	2,999047546430
n=29	0,000238109000	2,999285655430
n=30	0,000178582000	2,999464237430
n=31	0,000133937000	2,999598174430
n=32	0,000100452000	2,999698626430
n=33	0,000075339000	2,999773965430
n=34	0,000056504500	2,999830469930
n=35	0,000042378400	2,999872848330
n=36	0,000031783800	2,999904632130
n=37	0,000023837800	2,999928469930
n=38	0,000017878400	2,999946348330
n=39	0,000013408800	2,999959757130
n=40	0,000010056600	2,999969813730
n=41	0,000007542400	2,999977356130
n=42	0,000005656830	2,999983012960
n=43	0,000004242620	2,999987255580
n=44	0,000003181970	2,999990437550
n=45	0,000002386470	2,999992824020
n=46	0,000001789860	2,999994613880
n=47	0,000001342390	2,999995956270
n=48	0,000001006790	2,999996963060
n=49	0,000000755096	2,999997718156
n=50	0,000000566322	2,999998301000

A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}kümesi elemanları $a^2 \geq 4\ (a-1)$ eşitsizliğini gerçekler. |

a= 1 için $1^2 \geq 4\ (1-1)$

$1 \geq 0$

a= 2 için $2^2 \geq 4\ (2-1)$

$4 \geq 4$

a= 3 için $3^2 \geq 4\ (3-1)$

$9 \geq 8$

a= 4 için $4^2 \geq 4\ (4-1)$

$16 \geq 12$

a= 5 için $5^2 \geq 4\ (5-1)$

$25 \geq 16$

a= 6 için $6^2 \geq 4\ (6-1)$

$36 \geq 20$

a= 7 için $7^2 \geq 4\ (7-1)$

$49 \geq 24$

a= 8 için $8^2 \geq 4\ (8-1)$

$64 \geq 28$

a= 9 için $9^2 \geq 4\ (9-1)$

$81 \geq 32$

a= 10 için $10^2 \geq 4\ (10-1)$

$100 \geq 36$

İlginç bir şekilde her ikisini ispat kabul edenlerden biri olan Esra, ilk örneğin tümevarım olduğunu söylemiştir. Belli sayıda elemanın sağlandığını, sonrasında sezdirildiğini ve bunun da tümevarım olduğunu söylemiştir. İkinci örneği başta ispat kabul etmeyip, her birinin tek tek denendiğini ancak sonsuz elemanlı olsaydı bu şekilde yapılamayacağını söyleyerek ilk örneğe verdiği cevapla çelişmiştir.

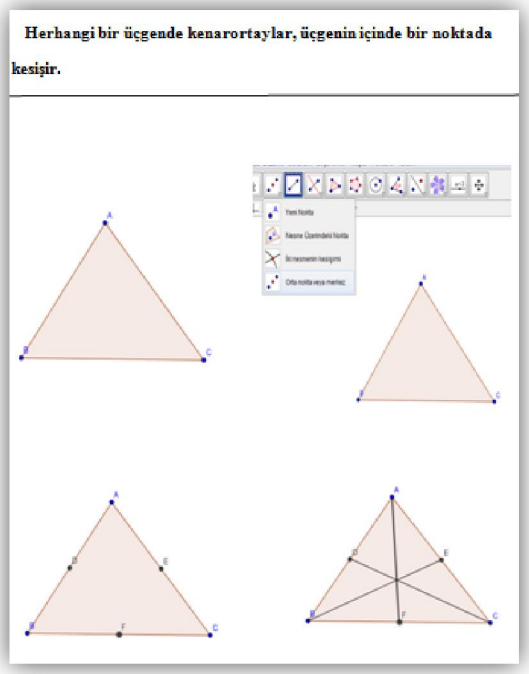
Sonrasında ise sonlu elemanlı olduğu ve her birinin doğruluğunu da gördüğü için ispattır demiştir.

Tuğba, ilk örneği limit kullanmadan yapıldığı için ispat kabul etmemiştir. Bunun öngörü oluşturabilecek işlemler olduğunu dile getirmiştir. İkincisini ise bütün küme için sağlandığı için ispat kabul etmiştir. Aynı düşüncelere Ozan ve Berna da sahiptir.

Diğer 7 kişi ise her ikisini de ispat olarak kabul etmemiştir. İlkinde yapılanların sadece doğrulama, sağlatma, gösterme, sezdirme olduğunu ancak hesaplanan 50 adımın sonucunda seri toplamının 3 olacağının kesin ifade edilemeyeceğini, yani yapılanların "kesinlik" belirten işlemler olmadığını dile getirmişlerdir. Aynı kişiler ikincisinin de doğrulamadan ibaret olduğunu, sadece o sayılar için doğruluğunun gösterildiğini belirtmişlerdir.

4.3.2.2 Üçüncü Örneğe Yönelik Bulgular

Son örnek olan Geogebra destekli doğrulama da ise herhangi bir üçgende kenarortayların üçgenin içinde bir noktada kesişecekleri gösterilmiştir.



Kâğıt üzerinde değil de bilgisayar programı ile yapılmış olmasının öğrencilerin düşüncelerinde (ikna olma açısından) bir değişiklik yapıp yapmayacağı merak edilmiştir. 4 kişi (Zehra, Murat, Ömer ve Oğuz) bu örneğe ispat demiş, diğer 8 kişi ise ispat olarak kabul etmemiştir. İspat kabul etmeyenlerden Esra bunu origami ile yapılan doğrulama örneğine benzetmiş, her ikisinin de kesinlik belirttiğini ama sadece gösterilmiş olduğunu söylemiştir. Diğerleri bu örneğin doğrulama, gösterme, somutlaştırma, öğretime yardımcı tasarlanmış bir materyal olduğunu söylemiş ancak ispat olmayacağını dile getirmişlerdir.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışma farklı bilgi ve beceri düzeylerindeki fen-edebiyat bölümü öğrencilerinin ispat algılarının nasıl şekillendiğini ortaya çıkarmaya yönelik yapılmıştır. Algının çok boyutlu incelenmesi gereğine uyularak 3 aşamada tamamlanan çok boyutlu veri toplama sürecine sahip bir çalışma yapılmıştır. Öncelikle öğrencilerin ispat kavramı için temel teşkil eden kavram tanımlarının ne olduğu, sonrasında ispat yapma becerileri ve son olarak tarafımızca hazırlanan belli başlı doğrulama örneklerini içeren bir forma yönelik fikirlerinin ne olduğu araştırılmıştır. Bu araştırmada her bir aşamada elde edilen bulgular ayrı ayrı bir önceki bölümde yer almıştır. Bu bölümde ise bu bulgular ışığında varılan sonuçlar, literatür desteğiyle yapılan tartışma ve bundan sonraki çalışmalara yön vermesi açısından öneriler sunulacaktır.

5.1. Sonuçlar

Bulgular, 3 alt problemin sırasına göre sunulmuştur. Kavramların tanımları bulgular kısmında tek tek incelenmiş, kavramlara verilen tanımlar irdelenmiştir. 2. ve 3. aşama verileri de ayrı ayrı incelenmiştir. Bu bölümde ise varılan sonuçlar bu bulguların birbirini desteklemesi/desteklememesi açısından bütünsel olarak sunulacaktır.

Araştırmada ilk veri grubunda öğrencilerin ispat algılarına zemin oluşturduğu düşünülen ispat ve ispata ilişkin kavramların öğrenciler tarafından tanımlanması istenmiştir. Bu kavramlar; *ispat, ispatlama, ispat yöntemi, önerme, aksiyom/postulat, varsayım, teorem, sanı, lemma, örnekleme, doğrulama, genelleme, soyutlama, gerçekleme* olmak üzere 14 tanedir.

Bu tanımlardan hepsini tanımlayabilen sadece 3 kişidir. Bunlar ise Ayşe, Oğuz ve Seher'dir. Yağmur ise en az tanım yapan kişi olup sadece 4 kavramı tanımlayabilmiştir. Ancak Yağmur'un tanım yapmada zorlanması bu kavramları bilmediği anlamına gelmemelidir. Yağmur gibi, kavramlardan yarısından çoğunu tanımlayamayan Tuğba, Ozan ve Berna bu kavramların hepsini bilmiyor değillerdir. Bu katılımcılara tanımları neden yapamadıkları sorulduğunda kimi bu kavramları (Örn. postulat gibi) duymadıklarını kimi de aslında bu kavramları ispat yaparken kullandıklarını (Örn. gerçekleme, soyutlama) ama kelimelere dökemediklerini dile getirmişlerdir. Ancak bu kavramların tanımlanmasında yaşanan zorlukların, teoremlerin ispatında da bir takım temellendirme hatası oluşturabileceği düşünülmektedir.

Herkes tarafından tanımlanabilen kavramlar ise ispat, teorem ve varsayımdır. Bu kavramların tanım sıklığının çok olması zaten beklenen de bir durumdur. Soyutlama ve gerçekleme gibi kavramlar en az tanımlanabilen kavramlar olmuştur. Hâlbuki soyutlama bilimi olarak tanımlanan matematik biliminin özünde var olan bir kavramının tanımlanamaması dikkat çekici bulunmuştur. Tanımlanabilme sıklıklarındaki farklılığın sebepleri olarak; ispat, teorem, varsayım gibi kavramların sürekli bir örneğiyle karşılaşıldığı, ancak tanımlamada sıkıntı yaşanan kavramların (soyutlama, gerçekleme, genelleme.. gibi), ispat yaparken aslında yapılan ancak yapılanın ne olduğunun fark edilmediği kavramlar olmasından dolayı tanımlamada zorluk yaşanmış olabileceği düşünülmektedir. Ancak yine de her kavrama yönelik yapılan tanımların daha yüksek seviyede olması beklenmiştir. Çünkü kavramın zihinde bir yer edinmesiyle (algı) yapılan tanımlar arasında pozitif bir ilişki söz konusudur.

Katılımcıların büyük çoğunluğuna göre ispatın, her koşulda doğru olması, hiçbir şüpheye yer vermemesi gerekmektedir. Ayrıca ispat kabullerinde, tanımlarında hiç geçmeyen bir takım özellikler de mevcuttur. Katılımcıların büyük çoğunluğu tanımlarında yazmasalar da bir ispatın ikna edici olmasını ve bunu gerekli sözel açıklamalarla sağlaması gerektiğini düşünmektedir. Yani Hanna'nın (2000) doğrulama için verdiği tanım, katılımcıların farkında olmadan kendilerinin gerekli gördüğü bir ispat olma şartıdır. Bu sonuç, 2. aşamada her bir katılımcının arkadaşlarının ispatlarını inceleyip puanlamaları ve 3. aşamada bir takım doğrulama örnekleri hakkında görüş alınması sonucunda ortaya çıkmıştır. Bu durum ise matematiksel ispat algısı araştırmalarında çok boyutlu veri toplamanın faydasını göstermektedir.

Katılımcıların hepsi bir teoremin, doğruluğunun ispatlanabilir olması ve geçerli olması gerektiğini düşünmektedirler. Ancak bazı kavramlar üzerinde hemfikirsizlik olduğu ortaya çıkmıştır. Bu kavramlara yönelik verilen tanımlar birbirinin tam tersi ifadeler bile içermiştir. Örneğin önerme için, kesinlik bildiren yargılar olması gerektiğini söyleyenlerin yanında kesinlik bildirmemesi gerektiğini söyleyenler de vardır. Bu durum temelde var olan bir kavramın çok net bilinmediğini ortaya koymuştur.

Bu çalışma başlı başına beceri ölçme ve bunu değerlendirme çalışması olmasa da algının geniş çapta veriyle tartılması gerektiği düşünülmektedir. Bu sebeple her bir katılımcının diğer 11 arkadaşının kâğıdını incelemesiyle toplamda 187 doğrulamayı ispat kabul edip etmemesi ve buna yönelik puanlama yapması ispat algısını ortaya çıkarmaya önemli ölçüde katkıda bulunmuştur. Katılımcıların 1. aşamadaki kavramları tanımlayabilmesiyle 2. aşamada ispatları yapabilme becerileri karşılaştırıldığında ise pozitif yönde bir ilişki olduğu gözlenmiştir.

Aşağıda verilen tabloda her bir katılımcının 2. uygulamada yaptığı ispatlara diğer katılımcıların verdiği puanların ortalamaları yer almaktadır (Tablo 66). Tanımlarda kimin daha fazla tanım yapabildiğine bakacak olursak Ayşe, Oğuz, Seher ve Zehra bütün tanımları yapmışlardır. Bu kişilerin ispatlarına verilen puanlar da

incelendiğinde 2(1). uygulamada Zehra, Ayşe ve Seher; 2(2). uygulamada Seher, Berna ve Oğuz; 2(3). uygulamada Ayşe, Zehra ve Seher ilk üç sıradadırlar. Buradan yola çıkılarak tanımlamada sıkıntı yaşamayan biri ispatı yapılandırmada da kısmen sıkıntı yaşamamıştır denilebilir.

Tablo 38
Katılımcıların kümülâtif ve 2(1-2-3) uygulamalardaki aldığı puanların ortalamaları

	Kümülatif Not Ortalamaları / 4.00	2(1) Ortalama/ 15.00	2(2) Ortalama/ 15.00	2(3) Ortalama/ 21.00	Verdiği Tanım Sayısı
Tuğba	2.07	9,27	10,72	8,18	8
Ayşe	**3.38**	**14,36**	9,90	**18,45**	**14**
Esra	1.91	6,27	7,27	10,63	12
Ömer	2.11	11,72	9,63	8	12
Murat	2.12	8,18	11,54	13,36	10
Yağmur	1.80	11,63	11	12,63	**4**
Berna	2.97	11,72	**12,90**	12,63	5
Oğuz	1.84	12,18	**11,63**	14,90	**14**
Leyla	2.24	9	4,36	11,36	11
Ozan	**3.06**	9,18	4,36	10,09	8
Seher	2.43	**13,45**	**13,72**	**15,90**	**14**
Zehra	**3.52**	**14,63**	9,18	**17,81**	**13**

Yine tablodan da görülebileceği gibi Ayşe ve Zehra'nın bölümde kümülatif ortalamalarının oldukça yüksek olduğu, ispatlardan aldıkları puanların da buna paralel yüksek olduğu görülmüştür. Not ortalaması yüksek olup da ispat puanlamalarından düşük puan alan Ozan bu genellemeye tabi olmamıştır. Ozan'ın yaptığı ispatlar araştırmacı tarafından incelendiğinde; ispatını yaptığı teoremlerin hemen hemen hepsinden 3 veya 2 puan almıştır. Yani ispatları yeterli görülmüştür. Ancak araştırmacı, her aşamada katılımcının yanında bulunduğundan dikkat çeken bir durumda katılımcıya sorular yöneltebilmiş, boş bıraktığı ispatların sebebini sormuştur. Ozan'ın başarılı bir öğrenci olup da ispatları boş bırakması dikkati çekmiştir. Ozan teoremi ispatlamak için gerekli konuyu, bilgiyi hatırlamada zorluk yaşadığından dolayı teoremleri ispatlayamadığını söylemiştir. Sadece Ozan için bu durum söz konusu değildir. Not ortalamaları dikkate alınmadan kağıtlar

incelendiğinde de özellikle geometri alanında yöneltilen teoremlerde tüm katılımcılarda bilgiyi hatırlamada zorluk çekildiği görülmüştür. Sonuç olarak bilginin olmadığı veya hatırlanmadığı bir alanda ispat yapmanın mümkün görünmediği ortadadır.

Ancak bazı katılımcıların kâğıtlarında bilgi hatırlansa da ispat yolunun da hatırlama ihtiyacı hissedilmiş, hatırlamada zorluk yaşanan ispatlar boş bırakılmıştır. Bazı katılımcılar tarafından, teoremlerin daha önceden herhangi bir kitapta veya ders ortamında gördüğü şekilde ispatlanması ezbere dayalı, otoriteye bağlı (kitap, öğretmen) cevaplar verildiğini göstermektedir. Örneğin 2(1) uygulamasındaki $\sqrt{2}$'nin irrasyonelliğinin ispatı lisans 1. sınıfta muhakkak ki yapılmıştır. Zaten her öğrenci bunu görünce daha önce yaptıklarını dile getirmişlerdir. Ancak ispatlar incelendiğinde, bir kısım ispatların önceki yapılanları hatırlamaya dayalı yapıldığı görülmüştür. İspatın en başının yapılması ancak devamının getirilememesinden dolayı bu sonuca varılmıştır. Ayrıca aynı soruda bir diğer şıkta $\sqrt[3]{2}$ 'nin irrasyonelliğinin de ispatlanması istenmiştir. Bu iki sorunun sorulması katılımcıların ezbere mi yoksa kendi akıl yürütmelerine dayalı mı ispat yaptıklarını ortaya çıkarmaya yöneliktir. Küp kökün ispatını kendi akıl yürütmesine dayalı yapamayıp $\sqrt{2}$'nin ispatına benzetmeye çalışmışlardır. Bu durum ezbere ispat yapıldığını göstermektedir. Katılımcılardan $\sqrt{2}$ 'nin ispatını yapanlar $\sqrt[3]{2}$'nin yapanlardan daha fazladır. Katılımcıların bir kısmının öncesinde yapılanları hatırlamaya çalıştıkları ve hatırlayamadıklarını ise boş bırakma eğiliminde olduğu söylenebilir.

Katılımcılardan 2. aşamada ortaöğretim matematik- geometri- lisans seviyelerinde 3 dalda 17 teoremin ispatı istenmişti. Tüm ispatlar uygulamalar bittikten sonra araştırmacı tarafından incelendiğinde katılımcıların büyük çoğunluğunun formal ispat (aksiyomatik, cebirsel) yapma eğilimde oldukları görülmüştür. Bu düzeyde bir ispatı yapamayan kişiler çoğunlukla ispatı boş bırakmışlardır, farklı türde bir akıl yürütme yoluna gitmemişlerdir. İki katılımcının (Esra, Murat) ise ispatını yapamadığı birkaç teoremde ilkokul seviyesinde kabul edilebilecek ancak lisans seviyesinde çok düşük seviyede kalabilecek bir doğrulamaya (örnek üzerinde gösterme) yer verdikleri görülmüştür. Ancak bu iki

katılımcı arkadaşlarının ispatlarını incelerken ve 3. aşamada görüş alınan doğrulama örneklerinde alternatif ispat tiplerinin ve çoklu örneklemeyle yapılan doğrulamaların ispat olmadığını, bunun olması için kesinlikle formal dil kullanılması gerektiğini söylemiştir. Dolayısıyla kendi yaptığı ispatla değerlendirmedeki görüş farklılığı bu kişinin tutarsız davrandığı ve çelişkili cevaplar verdiğini ortaya koymaktadır.

Kendi ispatlarını yapma ve arkadaşlarının ispatlarını değerlendirmeleri sırasında katılımcıların çoğunluğu matematiksel dil, notasyon, operatör, kalıplaşmış ifade kullanımına dikkat etmişlerdir. Değerlendirmeler sırasında da kendileri bu türlü ispat yapamayanlar dahi bu koşullara dikkat eden ispatlara 3 puan vermişlerdir. Her ispat arka arkaya değerlendirildiğinden öğrencilerin ispata bakış açısı, dikkat ettiği koşullar değişmiştir. Örneğin, Ayşe, Seher ve Zehra'nın 2(3). uygulamasındaki 7. teoremi ispatlama yaklaşımları aynıdır. Üçü de aksiyomatik yaklaşımla, matematiksel dil kurallarına riayet ederek bir ispat yapmışlardır. Ancak Ayşe ve Seher'in yaptığı ispat, sözel ifadelerle desteklenerek daha açıklayıcı bulunmuş ve herkesten 3 puan almıştır. Zehra'nın yaptığı da doğru olmasına karşı 5 kişi tarafından yetersiz bulunmuştur. Bu da şunu göstermektedir ki öğrencilerin farkında olmadan geliştirdikleri bir ispat kabulleri vardır. Daha açıklayıcı, daha ikna edici, sözel ifadelerle desteklenen ispatları tam doğru olarak düşünmektedirler.

Ancak bazı öğrencilerin gözden kaçırdıkları bir durum da ortaya çıkmıştır. Yukarıda sayılan özelliklere sahip olup da içerisinde bilgi/mantık hatası yapılan ispatları doğru olarak değerlendirdikleri de olmuştur. Bu durum ise içeriğin doğru olmasının daha öncelikli olması gerektiği ilkesine ters düşmüştür.

3. aşama uygulamalarında da öğrencilerin kendileriyle çeliştikleri bir çok durum ortaya çıkmıştır. 3 farklı temada hazırlanan, içerisinde 17 farklı doğrulama örneğinin bulunduğu görüş formundan bazen 2. aşama cevaplarına ters düşen bazen de 17 doğrulama içinde kendileriyle ters düşen cevaplar alınmıştır.

Tümevarımla yapılan ispat özünde genellemeyi barındırdığı söylenerek herkes tarafından ispat olarak görülmüştür. 2(1). uygulamadaki 3. teorem de Esra

hariç herkes tarafından tümevarımla ispatlanmıştır. Ancak görüşmeler sonucunda Zehra tümevarımı ikna edici bulmadığını dile getirmiş, P(k) kabulünün ispatlayan kişi tarafından verilmesinden dolayı bu yöntemi kişiye bağlı bir süreç olarak nitelendirmiştir. Zehra, herkesin bu tarz teoremleri böyle ispatladığını, bu yüzden kendisinin de böyle ispatladığını ama ikna olmadığını söylemiştir. Zehra'nın 3,5/4 kümülatif ortalamaya sahip bir öğrenci olmasına karşın bu düşünceye sahip olması hayli ilginç bulunmuştur.

Devreden sayı doğrulama örneği, bir matematikçi için elbette bir ispat değildir. Ancak matematik öğretiminde kullanılacak bir etkinlik olarak düşünülebilir. Bu bilgiden yola çıkılarak bu gruptan 5 kişi buna ispattır demiştir. Sebepleri ise bir takım kavramlara yönelik algılarını ortaya çıkarmıştır. Örneğin, Ozan genelleme yapıldığını söylemiştir. Genellemenin sadece bir formülden ibaret olduğunu düşünmüştür. Murat, bu gösterim harflerle yapıldığı için ispat olduğunu, harf değil de rakamlar kullanılsaydı bunun ispat olmayacağını, (sayısal) örneklerle ispat yapılamayacağını dile getirmiştir. Yani Murat'ın sadece gösterimde harf olduğu takdirde ispat olarak kabul ettiği, mantığına bakmadığı fark edilmiştir.

Paragraf ispat ve tümü sözel yazılmış örnekleri ispatlardaki sözel ifadelerin fazlalığı, bir matematikçinin fazla sözle değil de matematiksel operatörlerle ispatı yapabilecek olması, ispat olarak görülmemelerinin sebebi olarak açıklanmıştır.

Vektörel ispatı Zehra, Tuğba ve Esra dışında 9 katılımcı ispat olarak kabul etmiştir. Sadece görsele bağlı kalmayıp sözel ifadelerin bulunması, bunların açıklayıcı olması ispatın ikna etme fonksiyonunun ön plana hizmet etmektedir. Ayrıca daha önce bu teoremi ders hocasının bu şekilde ispatlamış olması sebebiyle de bunu ispat olarak değerlendirenler de vardır. Aynı soru 2. aşamada da yer almıştır. 3. aşamadakini ispat kabul etmeyen Zehra ve Tuğba ise kendi kâğıtlarında aynı şekilde ispat yapmışlardır. Bu cevapların birbirine ters düştüğü görülmüştür.

Doğrudan ispat örneklerinden ilki matematik alanından diğeri de geometri alanından seçilmiştir. İlk örneğin benzeri tümü sözel yazılmış doğrulama örneğinde

kullanılmış, ancak tümü sözel yazılmış olanda matematiksel operatör kullanımındaki noksanlıktan dolayı ispat olarak kabul etmemişlerdi. Doğrudan ispat örneğindeki tek sayılar için 2n+1, çift sayılar için 2n gibi kalıplaşmış ifadeleri ispatta görmek istemektedirler. Matematikteki doğrudan ispatı herkes kabul ederken geometrideki doğrudan ispatı sadece 5 kişi ispat olarak görmüştür. Her iki ispat da verilen bir durumdan yola çıkılarak sonuca doğrudan şekilde ulaşılması yani (p => q) yapılmasına rağmen katılımcılara geometride yapılan soru çözümü gibi gelmiştir. Doğrudan ispat mantığını bilen, kavrayan kişiler oldukları birinci örnekle teyit edilmişti. Ancak bu mantığın sadece yazınsal düzeyde kaldığı, bir görsel girdiğinde (üçgen, çember, kare vs.) muhakkak sözel ifade desteği olması gerektiğini düşünmektedirler. Katılımcılar geometrik şekil üzerinden önceden bilinen bir takım bilgilerle yapılan ispata karşı hep şüpheyle yaklaşmışlardır. Bu örnekte açıklama yok denmesinin sebebi aslında şekil üzerinde var olan ancak sözel ifadelerle (içters, ters açı, benzerlik kurulması) bunun desteklenmemesidir. Aynı durum sözsüz ispat olarak literatürde yer bulan doğrulama örneğinde de söz konusudur. Yine bu ispat türünü sadece 5 kişi ispat olarak algılamıştır. Bu kişilerden Oğuz, sözsüz ispatı matematik bilen kişi için kabul edilebilir, bilmeyen için sözel ifadelerle desteklenmesi gerektiğini, Seher de ispatın karşıdaki kişinin anladığı kadar ispat olabileceğini söylüyor. İspata bakan kişi ikna olabiliyorsa o ispattır diyor. Ancak sözsüz ispat ispata bakan kişinin birincisinde Öklit bağıntısını, ikincisinde de benzerlik kurabilmeyi bilmesi gerektiği için, herkesçe anlaşılabilen bir durum olmadığından bunları ispat olarak kabul etmemiştir. Daha önce de ifade edildiği gibi ikna olma koşulu her bir ispatta göz önünde bulundurulmaktadır.

Çift sütun ve akış diyagramı ile yapılan ispatlar 2011 yılından itibaren ortaöğretim geometri öğretim programında yer alan ispat biçimleridir. İspatlarda neden-sonuç bağlantılarının çok net ve açıklayıcı şekilde verilmesi, kendilerini ikna etmiş olması ispat olması için kabul edilebilirdir. Ayrıca bu ispat biçimlerinin düzenli şekilde yazılması, öğrenciyi ne düşünmesi gerekir şeklinde yönlendirdiğini, görsel hafızayla öğrenen kişilere yönelik öğretim ve öğrenme açısından büyük kolaylıklar sağlayacağını söylemişlerdir.

Origami ile yapılan doğrulama örneğini sadece 4 kişi ispat olarak düşünmüştür. Diğer katılımcılar bunun, var olan (öncesinde ispatlanan) bir durumun doğrulandığını, görselleştirildiğini, bununla birlikte bir öğretim materyali oluşturulduğunu, ifadenin somutlaştırılmaya çalışıldığını dile getirmişlerdir. Ancak bunların ispat olması için yeterli olmadığını söylemişlerdir.

Deneysel ispatlar hakkındaki görüşlere bakılacak olunursa, öğrencilerin büyük kısmı bunları ispat olarak kabul etmemişlerdir. Çoklu örneklemeye dayalı doğrulama örneklerinde 7 kişi her ikisini de ispat olarak kabul etmemişlerdir. İlkinde yapılanların sadece doğrulama, sağlatma, gösterme, sezdirme olduğunu ancak hesaplanan 50 adımın sonucunda seri toplamının 3 olacağı kesin ifade edilemeyeceğini, yani yapılanların "kesinlik" belirten işlemler olmadığını dile getirmişlerdir. Aynı kişiler ikincisinin de doğrulamadan ibaret olduğunu, sadece o sayılar için doğruluğunun gösterildiğini belirtmişlerdir. Ancak kalan 5 kişiden Tuğba, Ozan, Berna ilk örneğin öngörü oluşturabilecek işlemler olduğunu dile getirmiş, ikincisinin ise bütün küme için sağlandığı için ispat kabul etmişlerdir. Yani sonsuz küme ile sonlu kümede geçerli olma durumlarında bakmışlardır. Bu gruptan çıkan başka bir sonuç ise Esra'nın 50 adımla gösterilen örneğe tümevarım demesidir. Esra, 2(1). uygulamadaki 3. teoremi de tümevarım adımlarını uygulamadan 3-4 ilk adımı gösterip genellemeye vardırmıştır. Bu iki uygulamaya verdiği cevaplardan Esra'nın tümevarımı tam olarak bilmediği kanaatine varılmıştır.

Son olarak Geogebra ile modellenen örneğe de sadece 4 kişi ispat demiştir. Diğer katılımcılar ise bu örneğin doğrulama, gösterme, somutlaştırma, öğretime yardımcı tasarlanmış bir materyal olduğunu söylemiş ancak ispat olmayacağını dile getirmişlerdir.

Öğrencilerin büyük kısmı tüm uygulamalarda ispat algısını ortaya çıkarmaya yönelik paralel davranışlar sergiledikleri, bir o kadar da kendilerine özgü farklı düşünce yapılarına sahip oldukları görülmüştür. Örneğin Ömer yazı, şekil, görsel, formal dil fark etmeksizin eğer ki mantık doğru kurulduysa yapılanın ispat olduğunu düşünmektedir. Ancak Zehra, Ayşe, Seher, Berna gibi öğrenciler ise ispat içindeki

matematiksel bilgi ve mantığın doğru kurulmasının yanı sıra matematiksel dil, notasyon, operatör kullanarak formal dil yapısının olması gerektiğini düşünmektedirler.

Öğrencilerin ispata ilişkin algı oluşumlarında sadece lisans öğrenimine bağlı kalmamakla birlikte önceki lise öğrenimlerinin de etkisi görülmüştür. 2. uygulamadaki geometriye ilişkin teoremlerin ispatlarında çoğunlukla zorlanılmıştır. Boş bırakılan ispat diğerlerine göre daha fazladır. Öğrencilerin kişisel bilgilerine bakıldığında lise geometri derslerinde soru çözmeye dayalı, ispat yapmaktan uzak öğrenim gördükleri ifade edilmiştir. Lisans öğrenimlerinde de bu durumun etkisi görülmüştür.

5.2. Tartışma

Buraya kadar ortaya konan bulgulara dayanarak katılımcıların ispat algılarının çok çeşitlilik gösterdiği görülmüştür. Katılımcıların ispatlara yönelik algılarını oluşturan farklı koşullar söz konusudur. Katılımcıların büyük çoğunluğu bir ispatın doğruluğuna inanmak için matematiksel dil kullanımına özen göstermektedir. İspatın formuna dikkat etmekte, sadece görsel üzerinde yapılan açıklamaların yetersiz olduğu gösterimleri ispat olarak değerlendirmemektedir. Bu da onların yapılan açıklamaları ikna edici yön olarak değerlendirdiklerini göstermektedir. Bazı katılımcıların ise ispatların içeriğinin doğru olup olmamasına bakmaksızın kullanılan dilin formal ve ikna edici yapısına bakmışlardır. Bu sonuçlar Harel ve Sowder'ın (1998) sınıf öğretmeni adaylarıyla yaptığı çalışmayla paralellik göstermiştir. Harel ve Sowder'ın çalışmalarında öğrenciler ispatın doğruluğuna ikna olmak için, ispatın formuna, bir kitap veya öğretmen gibi bir otoriteden iletilmesine veya herhangi bir anlam içermeksizin sembollerden oluşan formal yapılara bakmaktadır. Bu çalışmayla bu sonuç birebir benzerlik göstermiştir.

Katılımcılar, bir ispatın gerekli açıklamalarla desteklenmesi, bu sayede başkalarını ikna etmenin sağlanacağı düşüncesinde olmuşlardır. İspat sürecinin tamamlanması için bunların bir gereklilik arz ettiği 2. ve 3. uygulamalarda ispat yapma ve ispatları incelemede ortaya çıkmıştır. Bu algı Tall'un (1991:20)

"açıklamadan tanımlamaya, mantıksal bir biçimde bu tanımların temelinde yer alan iknadan ispat etmeye giden bir yol" olarak verdiği ispat tanımıyla benzerlik göstermektedir. Ayrıca katılımcıların açıklama ve ikna olmayı gerekli görmeleri kimi (Bell, 1976; de Villiers, 1999; Hanna, 2000) matematik araştırmacılarının oluşturduğu ispatın işlevlerine işaret etmektedir. Aynı bulgular Uğurel'in (2012) ispat algılarına yönelik yaptığı çalışmada 8 öğretmen adayının matematiksel bir ifadenin doğrulanması ve açıklamasına dikkati çekmeleri bu çalışmayla paralellik göstermiştir. Matematik bölümü öğrencilerinin ispat algılarını metaforlarla inceleyen Cansız-Aktaş ve Aktaş (2013) metaforların kaynaklarının ve gerekçelerinin ispatın açıklığa kavuşturma ve doğrulama fonksiyonlarına işaret eder nitelikte olduğunu, yine bu çalışmamızla paralellik gösterdiği görülmüştür.

Ayrıca katılımcıların ispat tanımlarında ispatın kesinlik içermesi gerektiği de belirtilmiştir. Bu sonuç Dickerson'ın (2008) matematik öğretmenleriyle yaptığı ispat algısı çalışmasıyla da aynı sonuçları içermektedir.

Katılımcılardan ispat ve ispatlamaya ilişkin 14 kavramı tanımlamaları istenmişti. Bu çalışma esnasında fark edilen bir durum da öğrencilerin ispat ve ispata ilişkin kavramlara yönelik bilgi eksiklikleri veya bilgilerini aktarmaktaki zorluklarıdır. Hâlbuki Çakıroğlu'na (2013) göre matematiksel bir düşünceyi ifade ederken terimlerin hangi anlamda kullanıldığını ve kavramların tam olarak neyi ifade ettiğini açıkça belirtilmesi gerekir. Tarafımızca tanımların ispat algısına zemin oluşturduğu düşünülmektedir. Varılan sonuç ise lisans 3. ve 4. sınıfta okuyan 12 katılımcının tanım yapmada dahi zorlandıkları görülmüştür. Bu sonuç Raman'ın (2003), Chazan (1993) ve Moore'un (1994) çalışmalarını da örnek göstererek öğrencilerin ispat yapmada değil ispatın ne olduğunu tanımlamada bile zorluk yaşadıklarını söylemesiyle paralellik göstermektedir. Aynı zamanda Uğurel (2012) öğretmen adaylarının ispat tanımlarında formal söylemleri kullanmayı tercih ettiklerini ancak bu tanımlamaları yaparken zorlandıklarını söylemiştir. Bu çalışmada da aynı durum söz konusudur. İspata ilişkin kavramların tanımlanmasındaki yaşanan zorlanmaları ise bu kavramların özelde ve birbirleriyle olan ilişkilerindeki bağıntıları ve anlamlarını öğrencilerin lisans öğrenimlerinde önemsememelerinden dolayı

kaynaklanabilir. Kavramların temelde yatan anlamları ve işlevlerinin önemini fark edememeleri bu kavramlara yönelik tanımlamada yetersizlik oluşturabileceği görülmüştür.

Katılımcıların bir kısmının sadece görselle yapılan doğrulamaları anlamlı bulmaları ancak ispat olarak kabul etmemeleri Raman'ın (2003) sezgisel, işlemsel, anahtar düşünce olarak ifade ettiği 3 düşünce tipinden sezgisel düşünce tanımına işaret etmektedir. Bu düşünce tipinde ise ispat bir anlam ifade eder ancak ikna etmemektedir (Raman, 2003). Öğrencilerin büyük çoğunluğunun 3. uygulamada verdikleri yanıtlara bakarak sezgisel düşünceden uzak oldukları ifade edilebilir. Ancak bazı öğrencilerin (Esra, Murat gibi) de bu düşünce tipinden uzak oldukları ancak yaptıkları ispatlarda buna yönelik ispatlar da yaptıkları görülmüştür. Sezgisel düşünceden uzak oldukları 3. uygulamanın bulguları, ancak buna yönelik ispat yapmaları ise 2. uygulamanın bulgularıyla ortaya çıkmıştır. Bu öğrenciler Almeida'nın (2000) ispata yönelik algılarını sınıflandırdığı öğrenci profiliyle benzerlik gösterir. Almeida, 4 tip ispat algısına sahip öğrenciyi açıklamıştır. Bunlardan Tip A olarak adlandırdığı gruptaki öğrencilerin, formal ispatı kabul edip informal ispatı kabul etmiyor, ancak kendi ispat uygulamalarında formal ispatın zor gelmesinden dolayı bunu yapamayacak durumda olduğunu söylemiştir. Esra ve Murat da bu öğrencilere benzer algıya sahip ve buna yönelik davranış sergilemişlerdir.

Healy & Hoyles'in (2000) lise öğrencilerinin ispat algısını ortaya çıkarmaya yönelik yaptıkları çalışmada, öğrenciler gösterimlerin kendilerini ne derece ikna ettiği ve açıklayıcı olduğuna dikkat etmişler ve buna göre karar vermişlerdir. İspatın deneysel formu en tanıdık ve ikna edici bulunmuştur. Formal olarak ifade edilen cebirsel formu ise ikna edici bulunmamıştır. Ancak lisans seviyesinde yapılan bu çalışmada öğrencilerin büyük çoğunluğu formal ispatı geçerli, ikna edici ve açıklayıcı bulmuşlardır. Bu sonuç ise orta öğretim ve lisans seviyelerindeki ispat algısındaki farklılığı göstermektedir. Bu durumun öğretimdeki farklılıktan dolayı ortaya çıkmış olabileceği düşünülebilir. Çünkü orta öğretim seviyesinde deneysel uygulamalara çok daha fazla yer verilerek gerçekleştirilen matematik-geometri

dersleri öğrencilerde ispata ilişkin bu yönde bir algı oluşmasına sebep olmuş olabileceği düşünülebilir. Ancak lisans seviyesinde kesinlikle deneysel uygulamalara yer verilmemesi ve formal ispatla dolu bir öğretim anlayışıyla yetişen bireylerin bu yöndeki yatkınlığı çok da şaşırtıcı karşılanmamıştır.

Katılımcılar görsel ispatların (sözsüz ispat, doğrudan ispat-2) gerekli açıklamalarla ispat olarak değerlendirilebileceği görüşündedirler. Bu sonuç da Dickerson'ın (2008) çalışmasıyla benzerlik göstermiştir. Dickerson'ın (2008) çalıştığı öğretmen adayları deneysel ispatı geçerli bulmamış ancak ikna edici olarak düşünmüşlerdir. Ancak bizim çalışmamızdaki katılımcılar deneysel ispatları (çoklu deneme) ne ikna edici ne de geçerli bulmuşlardır. Bu bulguyla ters düşmüştür. Yine aynı çalışmada öğretmenlerin bazısı çift sütun ispatın net ve ikna edici olduğunu, bazısı da matematiksel iletişim için doğal bir gösterim olmadığını düşünmüştür. Bizim çalışmamızda da katılımcılar çift sütun ispatın yeterli açıklamaya ve neden-sonuç ilişkisini tam vermesi sebebiyle ikna edici olduğunu düşünmüştür. Dickerson'ın çalışmasında öğretmenler çift sütun ispatın matematiksel iletişim için doğal bir gösterim olmadığını düşünmelerine karşın, bizim çalışmamızda katılımcılar tarafından matematik öğretiminde kolaylık sağlayacak bir materyal olarak görülmüştür.

Katılımcıların bir kısmının ispat yaparken önceki yaptıklarına benzer yollar ve yöntemler denedikleri görülmüştür. Yapılanları hatırlamaya çalışmış, hatırlayamadıklarında ise boş bırakma eğiliminde oldukları görülmüştür. Bu durum ise onların akıl yürütmede zorluk yaşadıklarını göstermiştir.

Çalışmamız matematik bölümü öğrencilerinin ispat algılarını ortaya çıkarmaya yönelik yapılmıştır. Literatüre bu yönde bir katkı sağlamıştır. Ayrıca bu çalışma bu öğrencilerin ispat kavramına yönelik farkındalık oluşturması açısından da önem arz etmektedir.

5.3. Öneriler

Buraya kadarki bölümlerde bu çalışmaya yön veren literatür aktarılmış, çalışma sürecinin neleri içerdiği verilmiş, ulaşılan bulgular ve sonuçlarla birlikte literatür desteğiyle varılan sonuçlar karşılaştırılarak verilmiştir. Bütün bu çalışmanın sonunda bundan sonraki bu alanda yapılan çalışmalara yön vermesi sebebiyle bir takım önerilerde bulunulacaktır.

Öncelikle bu bölümde okuyan her öğrencinin lise seviyesinde aldığı matematik-geometri derslerinin kapsamı, yoğunluğu, içeriği, ispata yer verilip verilmemesi, öğretmenlerinin ve ders kitaplarının ispat yaklaşımı lisans seviyesindeki algısını etkilediği düşünülmektedir. Bu sebeple lisede işlenilen matematik ve geometri derslerindeki konuların formül odaklı anlatılmasından ziyade, ispata ilişkin belli başlı kavramların anlamlandırılması, ispatlama ve akıl yürütme becerilerini geliştirmeye yönelik sınıf içi aktivitelerin arttırılmasına yönelik çalışmaların uygulamada yer bulması önerilmektedir. Bu donanımla lisans seviyesine gelen bir öğrencinin pür matematiğin aksiyomatik yapısını anlamada daha kolaylık yaşayacağı düşünülmektedir. Lisans seviyesinde ise sadece aksiyomatik yapıyı anlamanın/anlamlandırmanın yanında alternatif ispat yöntem ve biçimlerine daha fazla yer verilmesi gerektiği düşünülmektedir. Bu sayede tek tip düşünce yapısına sahip bir matematikçi yetiştirmekten uzak bir eğitim sisteminin oluşacağı öngörülmektedir. Akıl yürütme becerilerinin kitap, öğretmen vb. gibi herhangi bir otoriteye bağlı olmayan bireyler yetiştirilmesi açısından, ispat ve ispata ilişkin kavramlara yönelik sınıf içi tartışmaların/görüş alış verişlerinin olduğu bir lisans öğreniminin pür matematiğin yanında çok daha doyurucu bir öğretim olacağı düşünülmektedir. Bu sayede matematik alanında kendini geliştiren bireyler sadece matematiğin formal yanını öğrenmemiş olacaklardır.

Ülkemizde öğretmen yetiştirmeyi 5 ve 4 yıllık lisans eğitimleriyle eğitim fakülteleri üstlenmiştir. Ancak bunun yanı sıra fen-edebiyat bölümlerinde okumakta ve mezun durumda olan öğrencilere formasyon eğitimi de verilerek öğretmenlik yapabilir sertifikasını almaları sağlanmaktadır. Dolayısıyla bilim adamı yetiştirmek

üzere kurulan fen-edebiyat bölümü programlarından mezun olanlar da öğretmen olarak görev yapabilmektedir. Sadece 2014 yılında devlet üniversitelerinde yaklaşık 4000 kişiye matematik formasyon eğitimi verilmesi için çalışmalar yürütülmüştür. Dolayısıyla ortaöğretim seviyesinde matematik ve geometri derslerinde görev almak üzere sertifika alan öğretmenlerin ispat kavramına yönelik bilinçlendirilmesi gerekmektedir. Ders kitaplarından ve öğretim programlarında yer alan yöntem ve biçimlerini bilen ve aktarabilen bireyler yetiştirilmesi gerekmektedir. Ancak tanım-teorem-ispat-uygulama basamaklarıyla oluşturulan ders programlarından uzaklaşan öğretim programlarını uygulamada sadece bu bakış açısıyla yetişen öğretmenlerin zorluk yaşayacağı düşünülmektedir.

Ülkemizde ispat algıları konusuyla ilgilenen çalışmalar ancak son yıllarda artış göstermiştir. Bu çalışma literatüre ispat algısını çok boyutlu ölçmesi açısından katkı sağlamaktadır. Bu çalışma matematik bölümü öğrencileriyle yapılmıştır. Bundan sonra yapılacak çalışmalar öğretmen adayları, öğretmenler, ortaöğretim öğrencileriyle yapılarak matematikle uğraşan her bireyin ispat algısını ölçülebilir.

KAYNAKÇA

Aktaş, Y. (2002). *Okul Öncesi Dönemde Matematik Eğitimi*. Adana: Nobel Tip Kitapevi.

Alakoç, Z. (2003). Matematik Öğretiminde Teknolojik Modern Öğretim Yaklaşımları, *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 2(1), 43-49.

Albayrak-Bahtiyari, Ö. (2010). *8.Sınıf Matematik Öğretiminde İspat ve Muhakeme Kavramlarının ve Önemlerinin Farkındalığı*, (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Almeida, D. (1995). Mathematics Undergraduates' Perceptions of Proof, *Teaching Mathematics And Its Applications,* 14(4), 171-177.

Almeida, D. (2000). A Survey of Mathematics Undergraduates' İnteraction With Proof: Some İmplications for Mathematics Education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869 – 890.

Almeida, D. (2001). Pupils' Proof Potential, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 53-61.

Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2010). An Invitation to Proof Without Words, *European Journal Of Pure And Applied Mathematics*, 3(1), 118-127.

Altun, M. (2006). Matematik Öğretiminde Gelişmeler, *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19 (2), 223-238.

Arıcı, S. (2011). Geometri Öğretiminde Origami Kullanımı, 1.Matematik Öğretimine Çağdaş Yaklaşımlar Sempozyumu. 6-9 Temmuz, 240-250, Pamukkale Üniversitesi, Denizli.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi*. (Yayınlanmamış doktora tezi), Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Aylar, E. (2014a). *7. Sınıf Öğrencilerinin İspata Yönelik Algı ve İspat Yapabilme Becerilerinin İrdelenmesi.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aylar, E. (2014b). A Study on the Forms of Perception of 7th Grade Students Towards The Concept of Proof, *Journal of Education and Future*, 5, 39-56.

Baki, A. (2006). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Balacheff, N. (1988). Aspects Of Proof İn Pupils' Practice Of School Mathematics, *Mathematics, Teachers and Children*, 216-235.

Baxter, P. & Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers, *The Qualitative Report*, 13(4), 544-559.

Bayazıt, N. (2009). *Prospective Mathematics Teachers' Use Of Mathematical Definitions In Doing Proof,* (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Florida State University College Of Education, Florida.

Bayazıt, İ., Aksoy, Y. (2010). Öğretmenlerin Fonksiyon Kavramı ve Öğretimine İlişkin Pedagojik Görüşleri, *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 9(3), 697 - 723.

Baykul, Y. (1999). *İlköğretimde Etkili Öğrenme ve Öğretme Öğretmen El Kitabı, İlköğretimde Matematik Öğretimi*, Ankara: MEB yayınevi.

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations, *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.

Berg, B. L. (2004). *Qualitative Research Methods for the Social Sciences*. (5th ed.) Boston: Pearson Education.

Berkman, A., Doğanaksoy, A. ve Keyman, A. (1991). Dört Renk Problemi, *Matematik Dünyası*, 1(2), 7-10.

Birinci, K. S. (2010). *Matematik Öğretmen Adaylarının İspatlama Performanslarının Süreç-Nesne İlişkisi Açısından İncelenmesi*, (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Bogdan, R. C, Biklen, S. K. (2003). *Qualitative Research for Education: An introduction to Theories and Methods* (4th ed.). New York: Pearson Education group. (s.110-120).

Boyle, J. D. (2012). *A Study of Prospective Secondary Mathematics Teachers Evolving Understanding of Reasoning-and-Proving*, (Unpublished doctoral dissertation), University of Pittsburgh, Pittsburgh.

Booth, R. D., & Thomas, M. O. (1999). Visualization İn Mathematics Learning: Arithmetic Problem-Solving And Student Difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 169-190.

Brown, E. T., Molfese, V. J., & Molfese, P. (2008). Preschool Student Learning İn Literacy And Mathematics: Impact Of Teacher Experience, Qualifications, And Beliefs On An At-Risk Sample. *Journal of Education for Students Placed at Risk*, 13(1), 106-126.

Büyüköztürk, Ş.; Çokluk, Ö. & Köklü, N. (2010). *Sosyal Bilimler için İstatistik*, 7. Baskı, Ankara: Pegem Akademi.

Cambridge Advanced Learner's Dictionary & Thesaurus, (2008). http://dictionary.cambridge.org/ adresinden 12. 02. 2014 tarihinde alınmıştır.

Cansız-Aktaş, M. ve Aktaş, D. Y. (2013). Matematik Bölümü Öğrencilerinin İspat Yapma ile ilgili Algılarının Metaforlar Yoluyla Belirlenmesi, *International Online Journal of Educational Sciences*, 5 (3), 701-718.

Ceylan, T. (2012). *Geogebra Yazılımı Ortamında İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Geometrik İspat Biçimlerinin İncelenmesi*, (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Chartrand, T. L. & Bargh, J. A. (1999). The Chameleon Effect: The Perception-Behavior Link and Social Interaction, *Journal of Personality and Social Psychology*, 76(6), 893-910.

Chazan, D. (1993) High School Geometry Students' Justifications For Their Views Of Empirical Evidence And Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics* 24 (4), 359-387.

Chen, K. (2006). Math İn Motion: Origami Math For Students Who Are Deaf And Hard Of Hearing. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, 11(2), 262-266.

Coe, R. & Ruthven, K. (1994). Proof Practices And Constructs Of Advanced Mathematics Students, *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-53.

Conner, A. (2007). *Student Teachers'conceptıons Of Proof And Facılıtatıon Of Argumentatıon In Secondary Mathematıcs Classrooms*, (Unpublihed doctoral dissertation), The Pennsylvania State University.

Çakıroğlu, E. (2013). Matematik Kavramlarının Tanımlanması, Zembat, İ. Ö; Özmantar, M. F.; Bingölbali, E.; Şandır, H.; Delice, A (Edt), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* içinde, (s. 1-14) Ankara: Pegem Akademi, 1. Baskı.

Çepni, S. (2010). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş*. 5. Baskı, Trabzon.

Çiltaş, A. (2011). Mutlak Değer İçeren Denklem ve Eşitsizliklerin Öğretiminde Grafik Kullanımının Etkinliği, *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(3), 39-53.

Çontay, E. G. (2013). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Dinamik Geometri Yazılımı İle İspat Becerileri, 12. Matematik Sempozyumu, (23-25 Mayıs 2013), Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Dane, A. (2008). İlköğretim Matematik 3.Sınıf Öğrencilerinin Tanım, Aksiyom ve Teorem Kavramlarını Anlama Düzeyleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16 (2), 495-506.

Davis, P. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 333-344.

Denzin, N. K., Y. S. Lincoln (1998). *Introduction: Entering the Field of Qualitative Research.* London, Sage. 2: 1-34.

De Villiers, M. (1990). The Role of Function of Proof in Mathematics, *Pythagoras*, 24, 17-24.

De Villiers, M. (1999). The Role And Functıon of Proof Wıth Sketchpad, *Rethinking Proof with Sketchpad*, Key Curriculum Press.

Dickerson, D. S. (2008). *High School Mathematics Teachers' Understandings of The Purposes Of Mathematical Proof*, (Unpublished doctoral dissertation), Syracuse University.

Doruk, B. K., Kıymaz, Y. & Horzum, T. (2012). *İspat Yapma ve İspatta Somut Modelden Yararlanma Üzerine Sınıf Öğretmeni Adaylarının Görüşleri*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, (27-30 Haziran 2012), Niğde Üniversitesi, Niğde.

Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: Its Role And Its Influence. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, *39*-48.

Dreyfus, T. [Tall, D. (Ed.)]. (1991). *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11). Springer.

Dura, C. (2008). Bilimsel Yöntem Üzerine, 24 ekim 2013 tarihinde alıntılanmıştır. http://www.cihandura.com/eski/index.php?option=com_content&task=view&id=189&Itemid=62

Ersöz, F. A. (2009). *The Development Of Preservice Middle School Teachers' Conceptions Of Proof During A Geometry Course For Teachers*, (Unpublished doctoral thesis), University of Georgia, Georgia.

Filiz, M. (2009). *Geogebra ve Cabri Geometri II Dinamik Geometri Yazılımlarının Web Destekli Ortamlarda Kullanılmasının Öğrenci Başarısına Etkisi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Frasier, B. (2010). *Secondary School Mathematıcs Teachers' Conceptıons Of Proof*, (Unpublihed doctoral dıssertation), Unıversıty Of Massachusetts Lowell.

Gfeller, M. K. (2010). A Teacher's Conception of Communication in Geometry Proofs. *School Science and Mathematics*, 110 (7), 341-351.

Gökkurt, B.; Soylu, Y. (2012). Üniversite Öğrencilerinin Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri, *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56- 64.

Gray, D. M. (2006). *An Investigation Of Pre-Service Teachers' And Professional Mathematicians' Perceptions Of Mathematical Proof At The Secondary School Level*, (Unpublished doctoral dissertation), University of New Hampsire, New Hampsire.

Güler, G. & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematik İspat Hakkındaki Görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof, *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42–49.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation And Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-22.

Harel, G. (1999). Students' Understanding of Proofs: A Historical Analysis and Implications For the Teaching of Geometry and Linear Algebra, *Linear Algebra and its Applications*, 302-303, 601-613.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results From Exploratory Studies. *Research in Collegiate Mathematics Education III*, 7, 234-282.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives On The Learning And Teaching Of Proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning*, 805–842. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Harel, G. (2008). What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question, *Proof And Other Dilemmas: Mathematics And Philosophy*, 265-290.

Haverhals, N. J. (2011). *Students' Develeopment in Proof: A Longitudinal Study*, (Unpublished doctoral dissertation), The University of Montana, Montana.

Healy, L., Hoyles, C. (1998). Justifiing And Proving İn School Mathematics (*Technical Report*). Institute Of Education, University Of London, London.

Healy, L., Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

Heinze, A, Reiss, K (2003). *Reasoning And Proof: Methodological Knowledge As A Component of Proof Competence,* 3. Conference of European Society for Research in Mathematics Education, Italy.

Hemmi, K. (2010). Three Styles Characterizing Mathematicians' Pedagogical Perspectives On Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 75, 271-291.

Hemmi, K., Löfwall, C. (2009). *Why do we need proof ?*, CERME6 - Sixth Conference of European Research in Mathematics Education. Lyon, France. 28 Ocak-1 Şubat 2009.

Işık, A., Konyalıoğlu, C. (2005). Matematik Eğitiminde Görselleştirme Yaklaşımı, *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 462- 471.

İnceoğlu, M. (2010). *Tutum, Algı, İletişim*, İstanbul: Beykent Üniversitesi Yayınevi.

İpek, S. (2010). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Dinamik Geometri Yazılımları Kullanarak Gerçekleştirdikleri Geometrik ve Cebirsel İspat Süreçlerinin İncelenmesi,* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıtlamayla İlgili Görüşleri ve Kullandıkları Kanıt Şemaları*, (Yayınlanmamış doktora tezi), Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Jones, K. (1997). Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof, *Mathematics Education Review*, 9, 21-32.

Karahan, Ö. (2013). *Matematik Öğretmen Adaylarının Çift Sütun İspat Yöntemine Yönelik Görüşleri ve Bu Yönteme Dayalı İspatlama Süreçlerinin Analizi*, (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Kayagil, S. (2012). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri ve Bu Görüşlerin Bazı Değişkenlere Göre İncelenmesi, *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 1(2), 134-141.

Knipping, C. (2003). *Argumentation Structures İn Classroom Proving Situations*. In Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME, (28 February - 3 March 2003).

Knuth, E. J., (2002a). Proof as a Tool for Learning Mathematics, *Mathematics Teacher*, 95, 7, 486–490.

Knuth, E. J., (2002b). Teachers' Conceptıons of Proof in The Context of Secondary School Mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5, 61–88.

Knuth, E. J. (2002c). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof, *Journal For Research in Mathematics Education,* 33(5), 379-405.

Knuth, E.J. & Sutherland, J. (2004). *Student Understanding of Generality*, Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Delta Chelsea Hotel, Toronto, Ontario, Canada Online

Konyalıoğlu, A. C. (2003). *Üniversite Düzeyinde Vektör Uzayları Konusundaki Kavramların Anlaşılmasında Görselleştirme Yaklaşımının Etkinliğinin incelenmesi.* (Yayınlanmamış doktora tezi), Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstıtüsü, Erzurum.

Köğce, D. (2012). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspatı Öğrenmeye Katkısı ile İlgili Görüşleri ve İspat Düzeyleri*, X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik eğitimi Kongresi, Niğde, 2012.

Krier, J. (2007). Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite; The University of Texas at Tyler, Online: http://math.uttyler.edu/nathan/classes/senior-seminar/JaemaKrier.pdf

Kwak, J. Y. (2005*) Pupils' Competence İn Proofs And Argumentation And Their Beliefs On Mathematics – A Comparative Study Between Korea And Germany*, (Unpublished doctoral Dissertation), Universitat Oldenburg, Germany.

Lee, J.K. (2002). Philosophical Perspectives on Proof In Mathematics Education, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16.

Leech, N. L., Onwuegbuzie, A. J. (2007). An Array of Qualitative Data Analysis Tools: A Call for Data Analysis Triangulation, *School Psychology Quarterly Journal*, 22(4), 557–584.

Malaty, G. (2008). *The Role of Visualization in Mathematics Education: Can Visualization Promote the Causal Thinking*?, 11th International Congress on Mathematical Education, (6 – 13 July 2008) Mexico.

Malkoç, G. (2012). Bilişsel Psikoloji, (Ed) Zeynep Cemalcılar, *Psikolojiye Giriş* içinde (98-133) Anadolu Üniversitesi.

Martin, W. G. & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elemantary Teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.

Martin, T. S.; McCrone, S. M. S.; Bower, M. L. W. and Dindyal, J., (2005). The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof, *Educational Studies in Mathematics*, 60, 95–124.

Martinez, M. V. ; Brizuela, B. M. and Superfine, A. C. (2011). Integrating Algebra And Proof İn High School Mathematics: An Exploratory Study, *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 30- 47.

McCrink, K., & Wynn, K. (2004). Large-Number Addition and Subtraction by 9-Month-Old İnfants,. *Psychological Science*, 15(11), 776-781.

Mede, E. (2012). Design And Exaluation of a Language Preparatory Program at an English Medium University in An EFL Settins: A Case Study, (Unpublished doctoral dissertation), Yeditepe University, İstanbul.

MEB. (2009). İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB, (2011a). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB, (2011b). Ortaöğretim Geometri Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB, (2012). 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB (2013a). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB (2013b). 11. Sınıf Matematik Ders Kitabı Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB (2013c). 9. Sınıf Matematik Ders Kitabı Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

Miles, M. B., Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis*, SAGE Publications

Moore, R. C. (1994). Making the Transition to Formal Proof, *Educational Studies In Mathematics, 27(3), 249-266.*

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.

Nelsen, R. B. (1993) *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, The United State of America: Mathematical Association of America.

NCTM, (2000). Principles and Standarts for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

O'Kane, B.L., Bonzo, D., Hoffman, C.E. (1999). *Perception studies*, Paper presented at the RTO SC1 Workshop on "Search and Target Acquisition", held in Utrecht, (21-23 June 1999), The Netherlands.

Ören, D. (2007). *An Investigation of 10th Grade Students' Proof Schemes in Geometry With Respect To Their Cognitive Styles and Gender*, (Unpublished master thesis), Middle East Technical Univercity, Ankara.

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapma düzeyleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi, (16-18 Ekim2002) Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Özer, N. (2009). Algılama ve Pazarlama Uygulamaları, *Ekonomi, Politika ve Sosyoloji Dergisi* (e-dergi) (http://www.paradoks.org), Yıl 5, 1,1-22.

Özdemir, E. & Dikkartın-Ovez, F. T. (2012) A Research On Proof Perceptions And Attitudes Towards Proof And Proving, Some İmplications For Elementary Mathematics Prospective Teachers, *Procedia - Social And Behavioral Sciences*, 46, 2121 – 2125.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation And Research Methods* (2nd Ed.). Newbury Park, CA: Sage

Piatek-Jimenez, K. L. (2004).*Undergraduate Mathematics Students' Understanding of Mathematical Statements and Proofs*, (Unpublished doctoral dissertation), The University of Arizona, Arizona.

Polat, S. (2013). Origami İle Matematik Öğretimi, *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 10 (21), 15-27.

Raman, M. (2003). Key Ideas: What Are They and How Can They Help Us Understand and How People View Proof?, *Educational Studies In Mathematics*, 52, 319-325.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The Idea of Heuristic Examples, *ZDM*, 34(1), 29-35.

Research Advisory Committee of The National Council of Teachers of Mathematics, (1996). Justification and Reform, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 516-520.

Riley, K. J. (2003). *An Investigaiıon of Prospectıve Secondary Mathematıcs Teachers' Conceptıons of Proof and Refutations*, (Unpublished doctoral dissertation), Montana State Unıversity, Montana.

Sarı, M., Altun, A & Aşkar, P. (2007). Üniversite Öğrencilerinin Analiz Dersi Kapsamında Matematiksel Kanıtlama Süreçleri: Örnek Olay Çalışması, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295-319.

Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads To Bad Results: The Disasters Of "Well-Taught" Mathematics Courses, *Educational Psychologist, 23* (2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55-80.

Segal, J. (2000). Learning about Mathematical Proof: Conviction and Validity, *Journal of Behavior*, 18(2), 191-210.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?, *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.

Senemoğlu, N. (2009). *Gelişim Öğrenme ve Öğretim Kuramdan Uygulamaya*, 22. Baskı, Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Siu, M-C. (2008). Proof As a Practice of Mathematical Pursuit in a Cultural, Socio-Political And İntellectual Context, *ZDM*, 40(3), 355-361.

Smith, J. C. (2006). A Sense-Making Approach to Proof: Strategies of Students in Traditional and Problem-Based Number Theory Courses, *Journal of Mathematical Behavior*, 73-90.

Simon, M. A. & Blume, G. W. (1996). Justification in the Mathematics Classroom: A Study of Prospective Elementary Teachers, *JournaL of Mathematıcal Behavior,* 15, 3-31.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Stylianides, A. J; Stylianides, G. J. & Philippou, G. N. (2005). Prospectıve Teachers' Understanding Of Proof: What If The Truth Set Of An Open Sentence Is Broader Than That Covered By The Proof?, Proceedings Of The 29th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education, Vol. 4, Pp. 241-248. Melbourne: PME.

Sui Sum, S. F. (2001*). Difficulties of Secondary Three Students in Writing Geometric Proofs,* (Unpublished master thesis), The Univercity of Hong Kong, Hong Kong.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher, United States of America.

Taştepe, M. (2012). *İspat Kavramının Kitap, Öğretmen Ve Öğrenci Boyutunda İncelenmesi*, (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi), Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Taştepe, M.; Yavuz, İ. ve Baştürk, S. (2013). Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspat Algısı, İnternational Conference On İnnovation And Challenges in Education, 26 - 28 Nisan 2013, Kütahya, Türkiye.

TDK, (2014). 04. 04. 2014 tarihinde www.tdk.gov.tr adresinden alınmıştır.

Tucker, T.W. (1999). On the Role of Proof in Calculus Courses, *Contemporary Issues in Mathematics Education*, 31-35.

Tuğrul, B. ve Kavici, M. (2003). Kâğıt Katlama Sanatı Origami ve Öğrenme, *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 1-18.

Türnüklü, A. (2000). Eğitim Bilimleri Araştırmalarında Etkin Olarak Kullanılabilecek Nitel Bir Araştırma Tekniği: Görüşme, *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi*, 24, 543-559

Uğurel, I. & Moralı, S. (2010). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Ve İspatlamaya Yönelik Bazı Temel Kavramlar Üzerine Düşünceleri, 9. Matematik Sempozyumu, Sergi ve Şenlikler, 20-22 Ekim 2010, Trabzon.

Uğurel, I., Moralı, H. S. & Karahan, Ö. (2011). Matematikte Yetenekli Olan Ortaöğretim Öğrencilerin Sözsüz İspat Oluşturma Yaklaşımları, I. Uluslararası Eğitim Programları ve Öğretimi Kongresi, Anadolu Üniversitesi, (5-8 Ekim) Eskişehir.

Uğurel, I. (2012). Non-thesis Master´s Level Pre-Service Mathematics Teachers' Conceptions of Proof, *BOLEMA: Mathematics Education Bulletin (Boletım De Educação Matemátıca)* (SSCI), 26 (42), 715-742.

Umay, A. & Kaf, Y. (2005). Matematikte Kusurlu Akıl Yürütme Üzerine Bir Çalışma, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 188-195.

Uysal- Koğ, O. & Başer, N. (2012). Görselleştirme Yaklaşımının Matematiğe Yönelik Tutum ve Başarıdaki Rolü, *Elementary Education Online*, 11(4), 945-957, 2012.

Ünlü, S. (2001). Psikoloji, (Edt. Ayhan Hakan), Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayıncılık.

Varghese, T. (2009). Secondary Level Student Teachers' Conceptions Of Mathematical Proof, *Issues İn The Undergraduate Mathematics Preparation Of Scholl Teachers,* 1, 1-14.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.

Weber, K. (2010). Mathematics' Majors Perceptions Of Conviction, Validity, And Proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 306-336

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions, *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209-234.

Woodside, A. G. (2010). *Case Study Research: Theory, Methods and Practice: Theory, Methods and Practice*, Emerald Group Publishing.

Wikipedia, (2013). 06. 05. 2013 tarihinde http://tr.wikipedia.org/wiki/Ana_Sayfa adresinden alınmıştır.

Yeşildere, S. & Türnüklü, B. E. (2007). Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi, *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181-213.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık, 7. Baskı.

Yin, R. K. (2003). *Applied Social Research Methods Series*. London: International Educational and Professional Publisher

Zacharie, M. (2009). Why College or University Students Hate Proofs in Mathematics?, *Journal of Mathematics and Statistics*, 5(1), 32-41

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.). Visualization in Teaching and Learning Mathematics, 1-8, Mathematical Association of America, Washington, DC.

ICME: Institute for Computational & Mathematical Engineering

CERME: Congress of European Research in Mathematics Education

EKLER

Ek-1 Kişisel Tanıtım Formu

Adınız Soyadınız: ……

Cinsiyet: B ☐ E ☐

Mezun Olduğunuz Lise / Mezuniyet/ bitirme notunuz:

…… /
……

(Lisans) Sınıfınız ve bu sınıfa ait Kümülatif not ortalamanız:

…….. /
……..

Lise yıllarında matematik veya geometri derslerinde ispata yönelik çalışmalara yer veriliyor muydu? Verildiyse ne düzeyde ve doğrultuda? Lütfen açıklayınız.

……

……

……

……

……

Lise yıllarında matematik/geometri derslerinde ispata yer verilmesi veya verilmemesi lisans döneminizin ilk yıllarında sizi nasıl etkiledi?

……

……

……

……

(Lisans) Bölüm derslerinizde ispat kavramının ne olduğunu anlamanızı/ algılamanızı sağlayan ve sonunda ispatlama becerisini (yeterli düzeyde) kazandığınız bir ders aldınız mı?

(NOT: İçeriğindeki bütün teoremlerin ispatlandığı bir ders kastedil**meme**ktedir. Sizin kişisel olarak düşünceniz istenmektedir.)

……
……
……
……

Ek-2: Öğrencilere Yöneltilen İspat Kavramlarına Yönelik Tanım Listesi

Aşağıdaki kavramları ayrıntılı şekilde tanımlayınız ve her bir kavram için örnek veriniz.

1. İspat/ Kanıt (Proof)
2. İspatlama / Kanıtlama (Proving)
3. İspat yöntemi (Proof method)
4. Önerme (Proposition)
5. Aksiyom/ postulat (Axiom/ Postulate)
6. Varsayım (Conjecture)
7. Teorem (Theorem)
8. Sanı (Supposition)
9. Lemma (Lemma)
10. Örnekleme (Sampling)
11. Doğrulama (Justification)
12. Genelleme (Generalization)
13. Soyutlama (Abstraction)
14. Gerçekleme (Verification)

Ek-3: Öğrencilere Yöneltilen 1. Tur İspat Problemleri

1) İki sayı ile aralarında asal olan bir sayı bu iki sayının çarpımıyla da aralarında asaldır. İspatlayınız.

2) **a)** $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. Gösteriniz.
   b) $\sqrt[3]{2}$ irrasyoneldir. Gösteriniz.
   c) Hangi x sayıları için $\sqrt{x}$ irrasyonel olur? Tartışınız.

3) $\forall\ n \geq 3\ , n \in \mathbb{Z}$ için $n^2 < 3^n$ olduğunu gösteriniz.

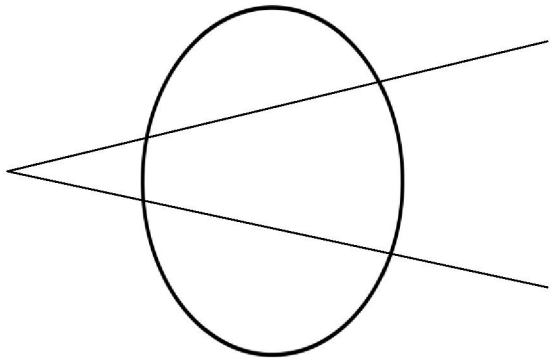
4) $x > 0$ ve $y > 0$, $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ olmak üzere $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$ 'dir. Gösteriniz.

5) $y=ax^2+bx+c$ parabolüne x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetler birbirine dik ise $\Delta=1$ olmalıdır. Gösteriniz.

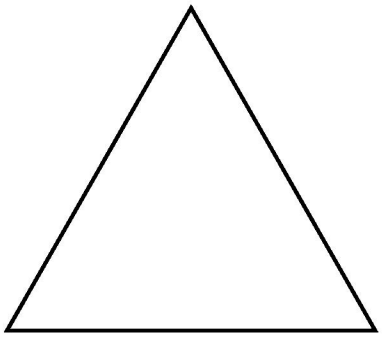
Ek-4: Öğrencilere Yöneltilen 2. Tur İspat Problemleri

1) Düzlemde iki doğru birbirine dik ise eğimleri çarpımı -1'dir. Gösteriniz.

2) Köşe noktası bir çemberin dışında olan ve çemberi iki noktada kesen bir açının ölçüsünün, gördüğü yayların ölçüleri farkının yarısı olduğunu gösteriniz.

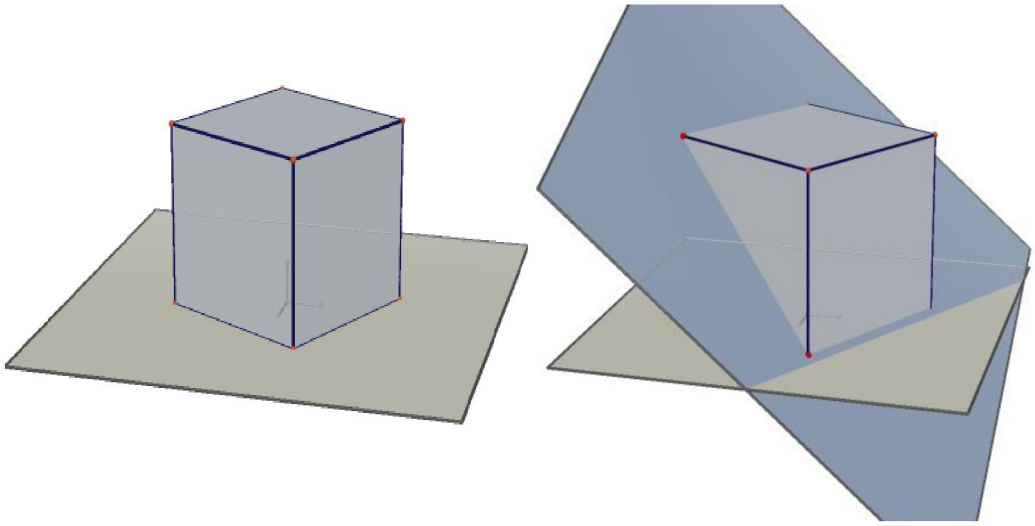


3) Bir üçgenin iç teğet çemberinin kenarlara değdiği noktaları, karşı köşeler ile birleştiren doğru parçalarının bir noktada kesiştiğini gösteriniz.



4) Dik dairesel kesik koninin yanal alanı, tabanlarının çevrelerinin ($a= 2\pi r_1$, $b = 2\pi r_2$) toplamı ile ana doğrusunun (l) uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir. ($A=\frac{(a+b).l}{2}$) Gösteriniz.

5) Aşağıdaki Şekil-1'de verilen dikdörtgenler prizmasının taban kenarları a ve b birimdir. Prizma, bir düzlem tarafından yer yüzeyiyle (Şekil-2) 30^{o}'lik açı yapacak şekilde kesildiğinde üst tarafta oluşan cismin alan ve hacim formüllerini a ve b cinsinden bulunuz.



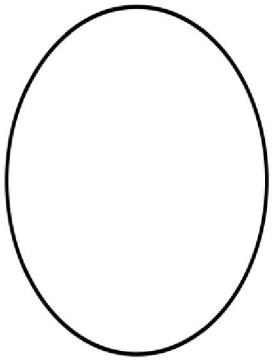
Ek-5: Öğrencilere Yöneltilen 3. Tur İspat Problemleri

1) y=f(x) fonksiyonunun x=a noktasında türevi var ise f fonksiyonu x=a noktasında süreklidir. İspatlayınız.

2) f(x) > 0 olsun. a ≤ b ≤ c olmak üzere => $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx$ olur. İspatlayınız.

3) f fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve $x_1 < x_2$ olmak üzere $x_1, x_2 \in [a, b]$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ olsun. Bu durumda $f(x_1) < d < f(x_2)$ ise f'(c)=d olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ noktası vardır.

4) P_o noktasından geçen bir l doğrusu bir çemberi S ve T noktalarında kessin. M merkez olmak üzere$|P_oM|$= d ise $|P_oS|.|P_oT| = |d^2-r^2| = |k|$'dır.
(NOT: k sayısını k>0, k=0 ve k<0 olarak inceleyiniz.)



5) *G* bir çarpım grubu ve boş olmayan $M = \{x \in G: ax=xa, \forall a \in G\}$ kümesi veriliyor. M ≤ G olduğunu gösteriniz.

6) Uzayda lineer bağımsız ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ verildiğinde bu vektörler üzerine kurulu olan paralelkenarsal bölgenin alanının $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \|.\| \vec{b} \|. \sin\theta$ olduğunu gösteriniz.

7) a ve b tamsayılarının m ile bölündüğünde aynı kalanı vermeleri için gerek ve yeter şart a≡ b (m)'dir.

Ek-6: 2. Aşamada Yapılan İspatlar İçin İnceleme Anahtarları

Birinci Gruptaki İspatlar İçin Araştırmacının İnceleme Anahtarı

Öğrencinin İsmi :								
İspat No	**Teoremin ispatı**							
	Yapılmamış	*Yapılmış*						
	--	Örnekleme **(A)**		Açıklama **(B)**		Matematiksel Dil **(C)**		
		Var 1	*Yok* 0	*Var* 1	*Yok* 0	*Yeterli* 2	*Yetersiz* 1	*Yok* 0
	İspatın doğruluğu (D)							
	Doğru 3	*Eksik* 2		*Yanlış* 1		*Yok* 0		

İkinci Gruptaki İspatlar İçin Araştırmacının İnceleme Anahtarı

Öğrencinin İsmi :										
İspat No	**Teoremin ispatı**									
	Yapılmamış	*Yapılmış*								
	--	Örnekleme **(A)**		Açıklama **(B)**		Matematiksel Dil **(C)**			Geometrik Şekil Kullanımı **(D)**	
		Var 1	*Yok* 0	*Var* 1	*Yok* 0	*Yeterli* 2	*Yetersiz* 1	*Yok* 0	*Sadece şekil üzerinde ispat*	*Şekil var ve ayrıca ispat yapılmış*
	İspatın doğruluğu (E)									
	Doğru 3	*Eksik* 2				*Yanlış* 1			*Yok* 0	

Üçüncü Gruptaki İspatlar İçin İnceleme Anahtarı

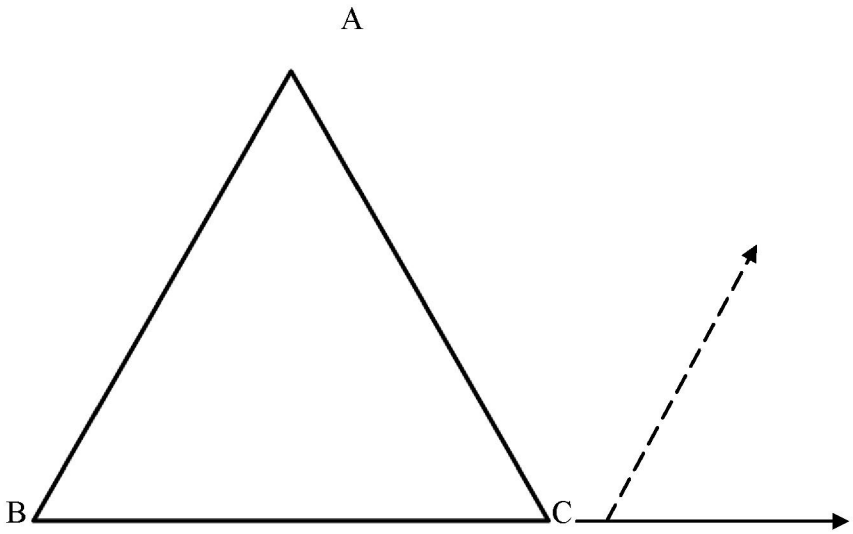
Öğrencinin İsmi :						
İspat No	**Teoremin ispatı**					
	Yapılmamış	*Yapılmış*				
	----	**Açıklama (A)**		**Matematiksel Dil (B)**		
		Var 1	*Yok* 0	*Yeterli* 2	*Yetersiz* 1	*Yok* 0
	İspatın Doğruluğu (C)					
	Doğru 3	*Eksik* 2		*Yanlış* 1		*Yok* 0

Ek. 7: 3. Aşama Doğrulama Örnekleri

Önerme	***P(n):*** $1^2+2^2+\ldots\ldots\ldots +n^2 = \frac{(2n+1)(n)(n+1)}{6}$ ***'dir.*** ***(YAZINSAL-Tümevarım)***
	P(1) k=1 için 3. $1^2=3.1$ *P(k)*'nın doğru olduğunu kabul edelim. n=k için 3 $(1^2+2^2+\ldots\ldots\ldots +k^2) = (2k+1)(1+2+3+\ldots\ldots+k)$ $= \frac{(2k+1)(k)(k+1)}{2}$ doğru olsun. *P(k+1)* 'in doğru olduğunu gösterelim. n=k+1için $3(1^2+2^2+\ldots\ldots+k^2+ (k+1)^2) = \frac{(2k+3)(k+1)(k+2)}{2}$....? $(1^2+2^2+\ldots\ldots\ldots +k^2) +(k+1)^2 = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$ $= \frac{2k^3+3k^2+k}{6} + \frac{6k^2+12k+6}{6}$ $= \frac{(2k+1)(k)(k+1)}{6} + (k+1)^2$

Önerme:	**Bir devirli ondalık açılıma karşılık gelen rasyonel sayıyı bulmak için; paya, sayı ile devretmeyen kısmın farkı yazılır; paydaya, devreden sayı adedi kadar 9, virgülden sonra devretmeyen sayı adedi kadar 0 yazılır.**
	Ondalık sayıda devreden sayının basamak sayısı 'n' kadar olsun. Bu sayı 10^n ile çarpılır, birbirinden çıkartılırsa devreden sayı rasyonel sayıya dönüştürülmüş olur. Örn; $0,\overline{ab}$ olsun. 0, ababab… = X olsun. ab, ababab…. = 100X olur. Taraf tarafa çıkartılıp ab, 0000000… = 99X bulunur. Buradan da X= $\frac{ab}{99}$ bulunur.

Önerme:	**Bir üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan diğer iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.** ***(YAZINSAL- Paragraf)***



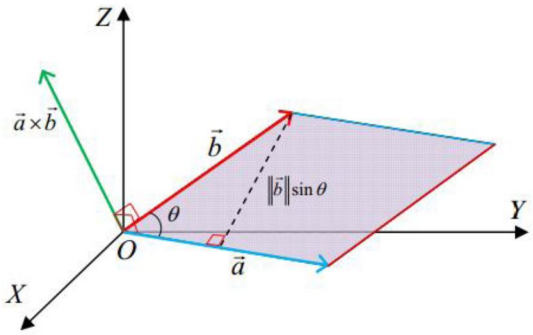
Yukarıdaki ΔABC'de $s(\widehat{BAC}) = a$ ve $s(\widehat{ABC}) = b$ olsun. |AB|'ye [CE paralel ışını çizilir. Böylece $(\widehat{ABC})$ ile $(\widehat{ECD})$ yöndeş ve $(\widehat{BAC})$ ile $(\widehat{ACE})$ içters açılar olduğundan $s(\widehat{ABC}) = s(\widehat{ECD}) = b$ ve $(\widehat{BAC}) = (\widehat{ACE}) = a$ olur. $(\widehat{BCA})$ açısının dış açısı $(\widehat{ABC})$ ile $(\widehat{ACE})$'nin toplamına eşit olur.

Önerme:	**Tek bir doğal sayının karesi de tektir.** ***(YAZINSAL- Tümü sözel yazılmış 1)***
	a tek bir doğal sayı olsun. O hâlde a, herhangi bir sayının iki katının bir fazlası olarak yazılabilir. Bu sayının karesi, bu sayının dört katıyla bir fazlasının çarpımından bir fazla olur. Bilindiği üzere herhangi bir sayı dört ile çarpıldığında sonuç çifttir, bu çift sayı da tek bir sayıyla toplandığında sonuç tektir. Dolayısıyla tek bir doğal sayının karesi de tektir.

Önerme:	**$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$** **(YAZINSAL- Tümü sözel yazılmış 2)**
	A kümesini B'nin alt kümesi olsun. O hâlde altküme tanımından A'ya ait bir a elemanı, B'nin de elemanı olur. a, A birleşim C'nin elemanı ise A'nın veya C'nin elemanıdır. A, B'nin veya C'nin elemanı ise a, B birleşim C'nin elemanıdır. Böylece seçilen a keyfi olduğundan önerme her a için doğrudur. O hâlde A birleşim C'nin her elemanı B birleşim C'nin de bir elemanı olup ispat biter.

Önerme: **Uzayda lineer bağımsız ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ verildiğinde bu vektörler üzerine kurulu olan paralelkenarsal bölgenin alanının $\| \vec{a} \times \vec{b} \| = \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \| . \sin\theta$ olduğunu gösteriniz.**

(YAZINSAL-Vektörel ispat)



$\| \vec{a} \times \overrightarrow{b} \| = \overrightarrow{\| a \|} . \text{h}$ (h yükseklik)

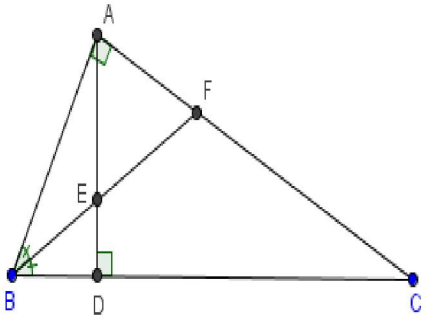
$= \| \vec{a} \| . \| \vec{b} \| . \sin\theta$

Önerme:	**Bir tek bir çift tam sayının toplamı tektir.** **(YAZINSAL- Doğrudan ispat 1)**
	a ve b birer tamsayı olsun. a'yı tek ve b'yi çift sayı olarak alalım. a= 2k+1 b= 2t olarak alalım. k ve l keyfi sayılar olduğundan a tüm tek sayıları, b de tüm çift sayıları ifade eder. İstenen durum toplamları olduğundan a+b = 2k+1 + 2t = 2k+ 2t + 1 = 2 (k+t)+1 olur. k+t ye z gibi bir tamsayı dersek a+b = 2z+1 olur. Bu da bir tek ve bir çift sayının tek sayı olduğunu göstermektedir.

Önerme: **Aşağıdaki şekilde verilenlere göre |AE|=|AF|'dir.**

Gösteriniz.

(YAZINSAL-Doğrudan ispat 2)

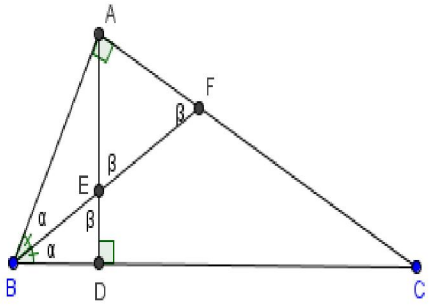


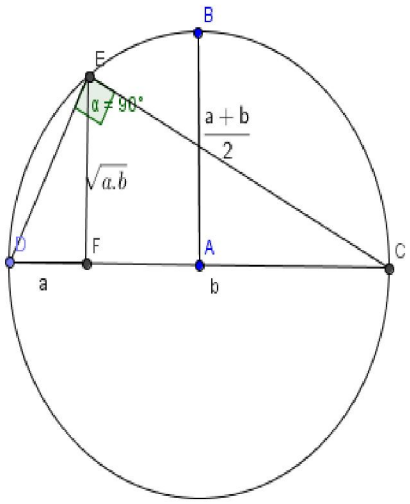
m $(\widehat{EBD})$= m $(\widehat{EBA})$= α ve

m$(\widehat{BED})$=β diyelim. EBD ve ABF dik üçgen olduğundan;

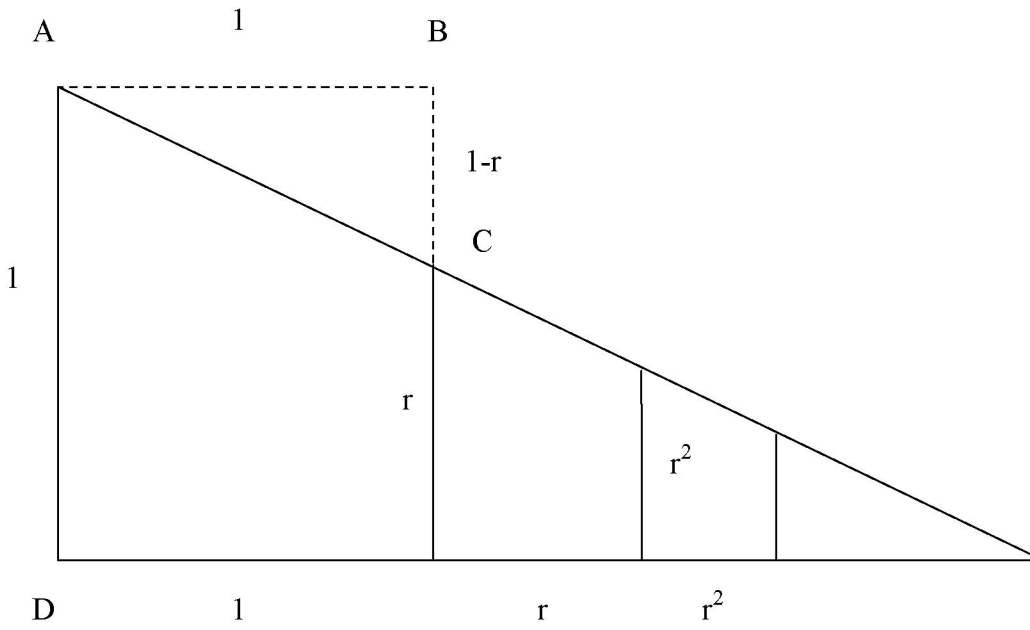
m$(\widehat{AFB})$=α dır. Öte yandan m$(\widehat{BED})$=m$(\widehat{AEF})$=β (ters açılar)

Böylece AEF üçgeni ikizkenar olup |AE|=|AF| olur.



Önerme:	$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ **(GÖRSEL- Sözsüz ispat 1)**
	

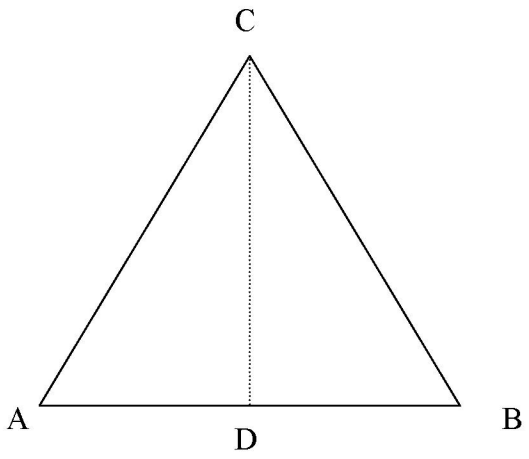
Önerme: $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ **(GÖRSEL- Sözsüz ispat 2)**



$\Delta ABC \cong \Delta EDA$

$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-r}$

Önerme: **ABC üçgeni bir ikizkenar üçgen ve |CA| = |CB|olmak üzere $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$'dir. (GÖRSEL-Çift Sütun İspat-1)**



İfadeler	Gerekçeler
1. CD, $(\widehat{ACB})$ açısının açıortayı.	1. Her açı bir ve yalnız bir açıortaya sahiptir.
2. 1 ve 2 açıları birbirine eşittir.	2. Açıortay tanımından
3. |CA| = |CB|	3. Verilen
4. CD ≅ CD	4. Yansıma özelliği
5. ΔACD ≅ ΔCDB	5. K-A-K benzerliğinden
6. $s(\widehat{A}) = s(\widehat{B})$	6. Eşit kenarların arasında kalan açıların eşitliği

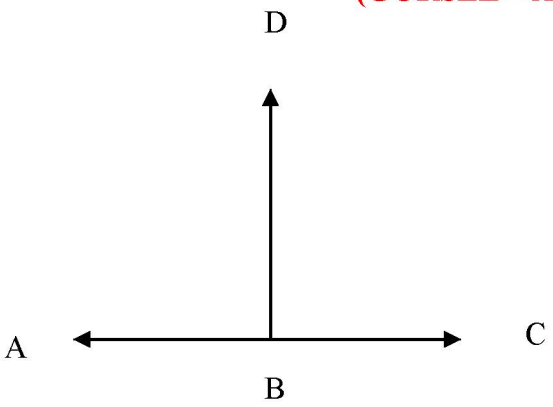
Önerme: **$H \subseteq G$ ve $H \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda $\forall x, y \in H$ için $x^{-1}.y \in H \Rightarrow H \leq G$. (GÖRSEL-Çift Sütun İspat-2)**

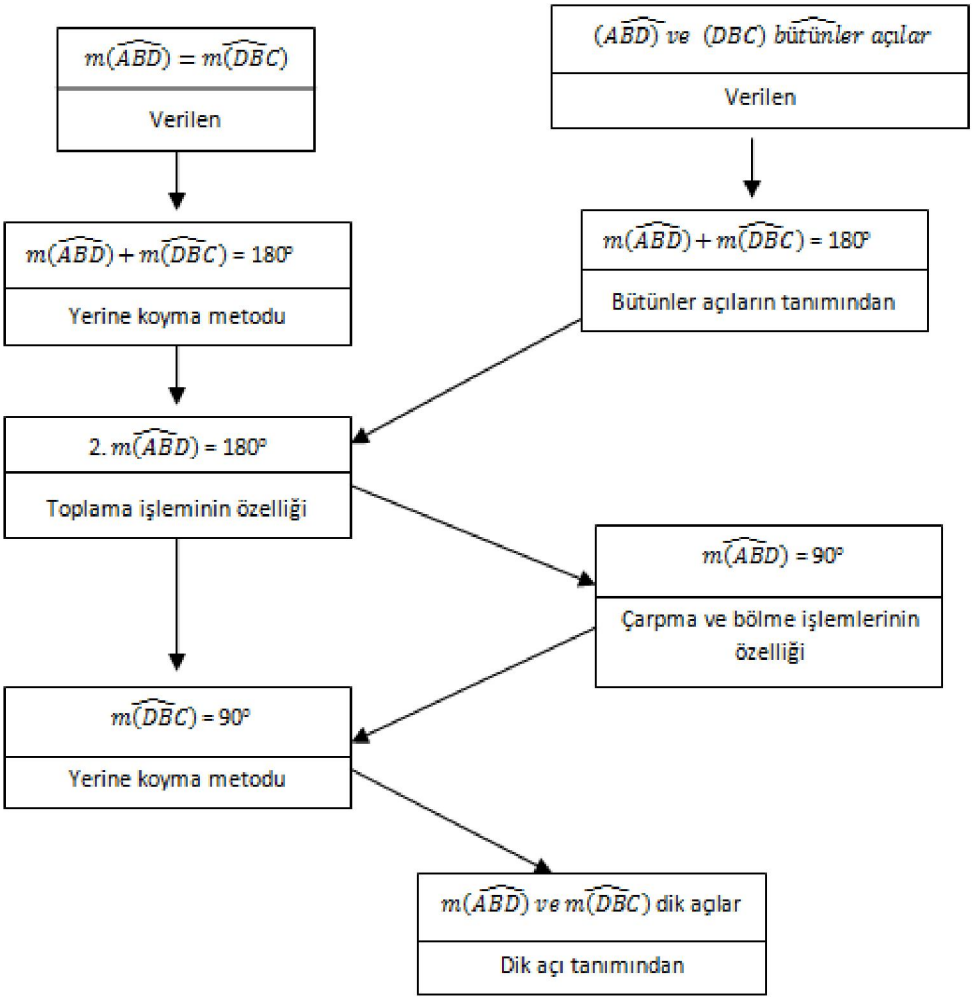
İfadeler	Gerekçeler
1. $H \subseteq G$	1. Verilen
2. $h \in H$ olsun.	2. $H \neq \varnothing$ verilen
3. H bir gruptur.	3. $h^{-1}h \in H$ $(1 \in H)$, birim elemanı olma durumu.
4. $x \in H$ olsun.	4. $H \neq \varnothing$ verilen
5. $x^{-1} \in H$	5. $x^{-1}.1 \in H$, H bir grup
6. $x, y \in H$ olsun.	6. (4)'den dolayı
7. $x^{-1} \in H$ ve $y \in H$	7. (2) ve (5)'den dolayı
8. $(x^{-1}).y \in H$	8. Verilen
9. $(x^{-1})^{-1}.y = x.y \in H$	9. Grup tanımı gereği
10. $H \leq G$	10. İstenen

Önerme:

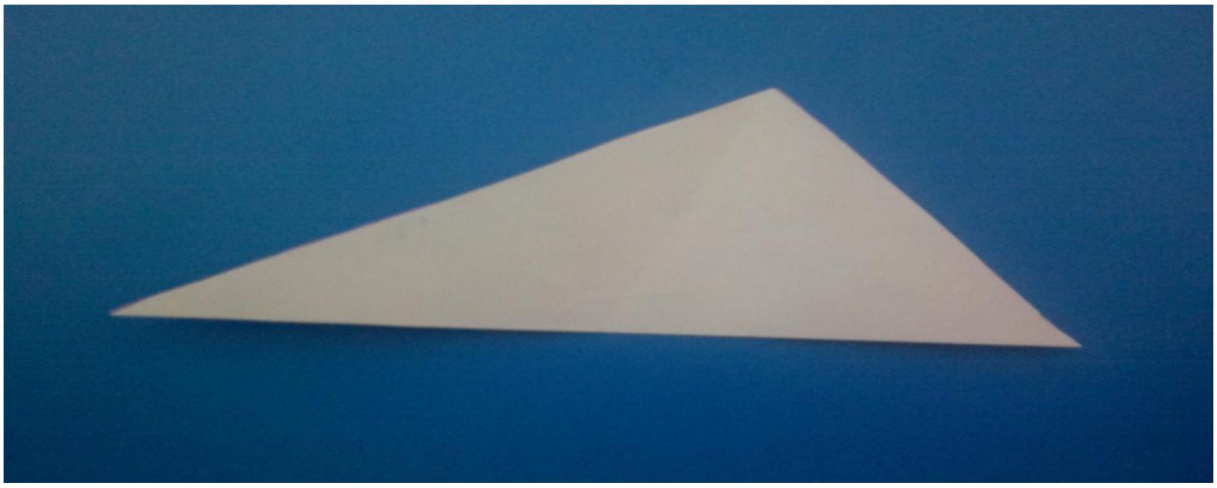
Aşağıda verilen $(\widehat{ABD})ve\ (\widehat{DBC})$ açıları bütünler ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$ ise dik açıdır.

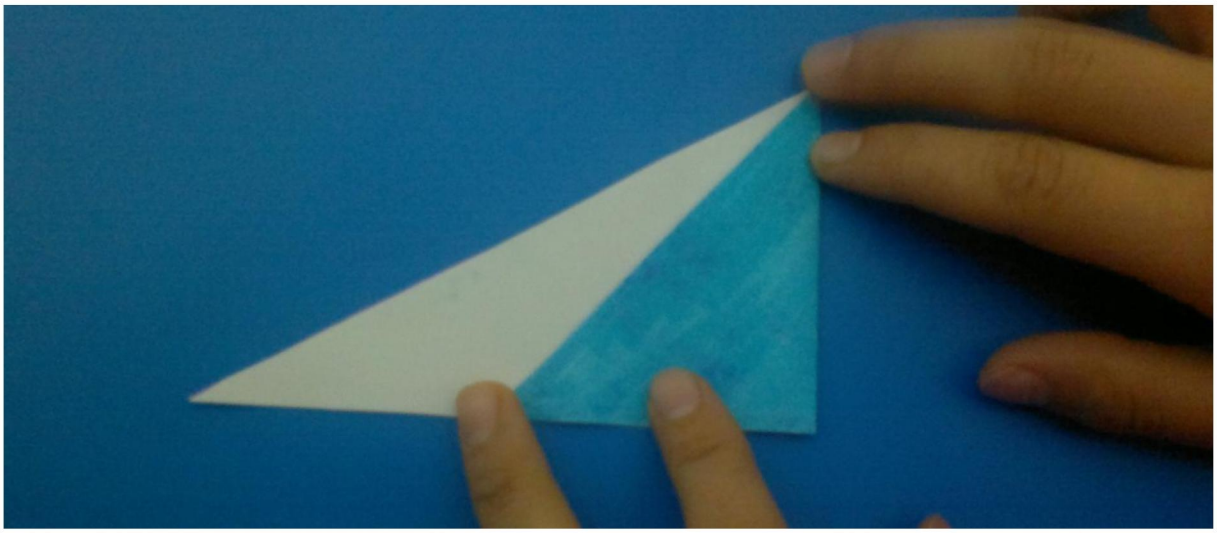
(GÖRSEL – Akış Diyagramı İspat)

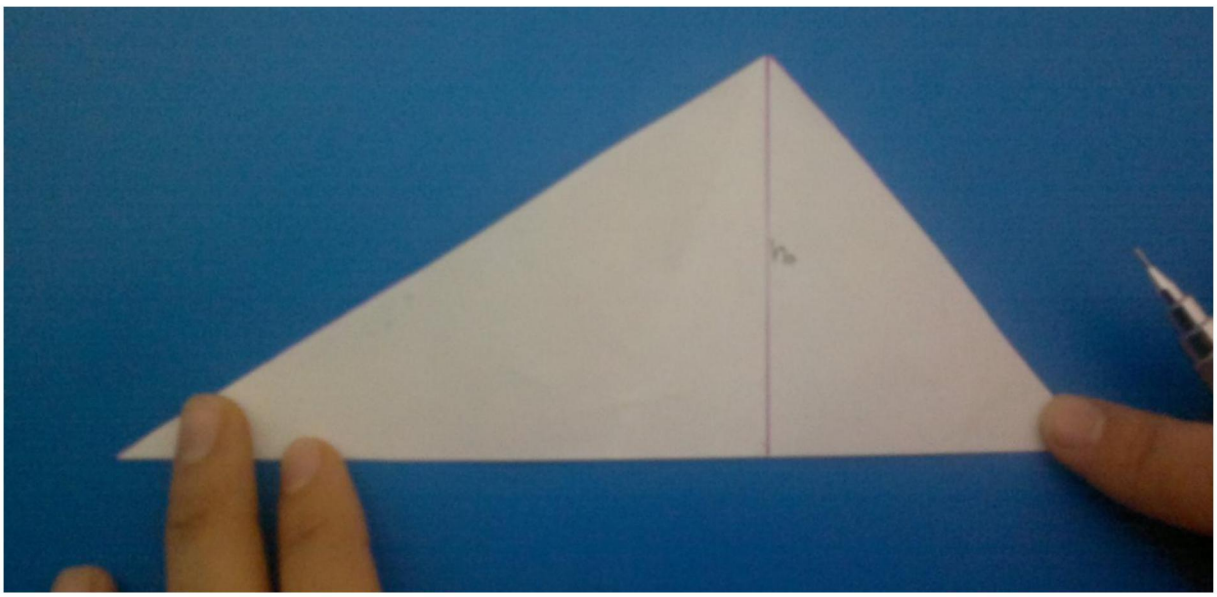


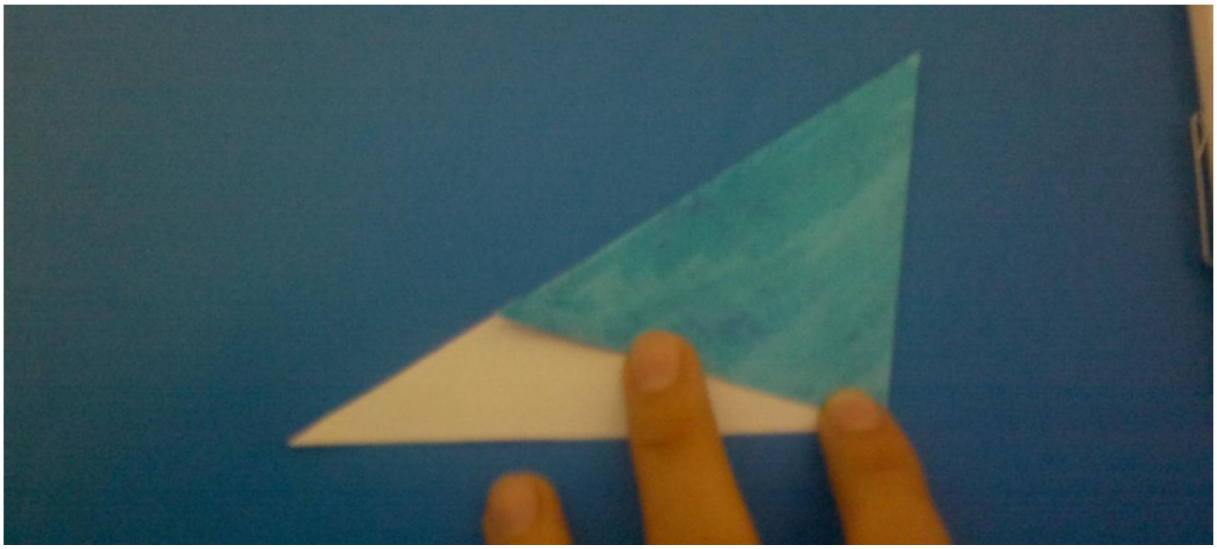

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$
Verilen
$(\widehat{ABD})$ ve (DBC) bütünler açılar
Verilen
$m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) = 180°$
Yerine koyma metodu
$m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{DBC}) = 180°$
Bütünler açıların tanımından
$2.m(\widehat{ABD}) = 180°$
Toplama işleminin özelliği
$m(\widehat{ABD}) = 90°$
Çarpma ve bölme işlemlerinin özelliği
$m(\widehat{DBC}) = 90°$
Yerine koyma metodu
$m(\widehat{ABD})$ ve $m(\widehat{DBC})$ dik açılar
Dik açı tanımından

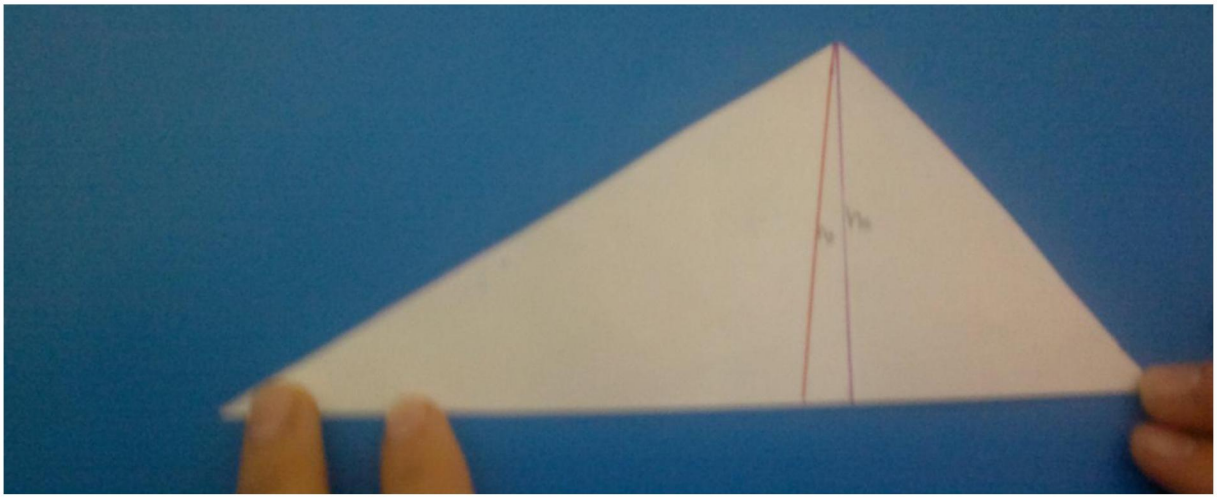
Önerme:	**Çeşitkenar bir üçgende “$h_a < n_A < V_a$” ‘dır.** **(GÖRSEL- Origami ile ispat)**

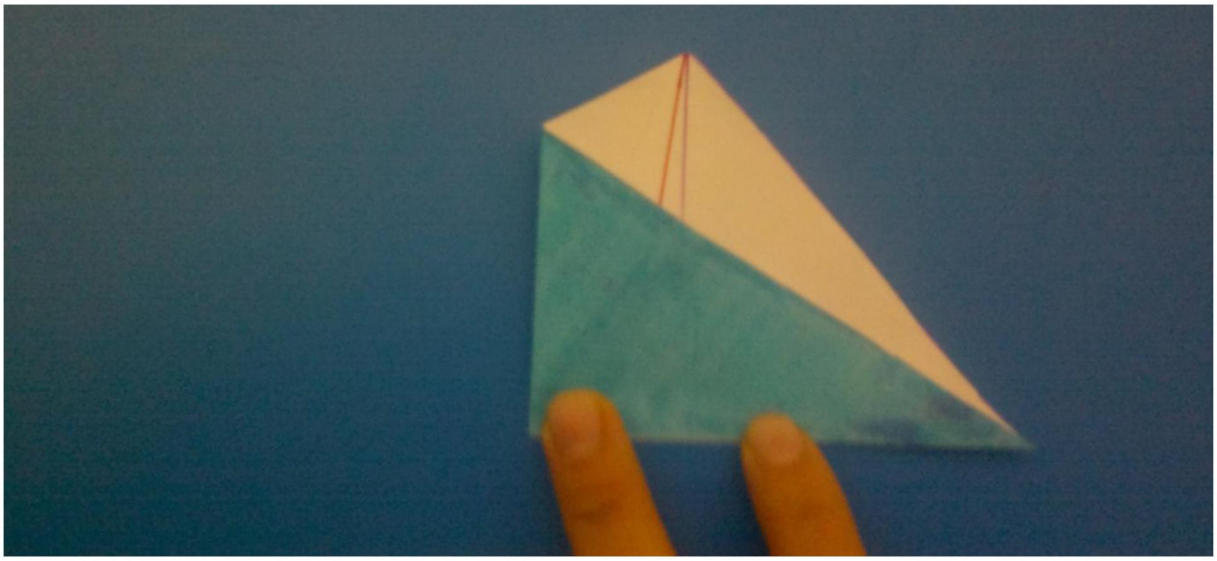


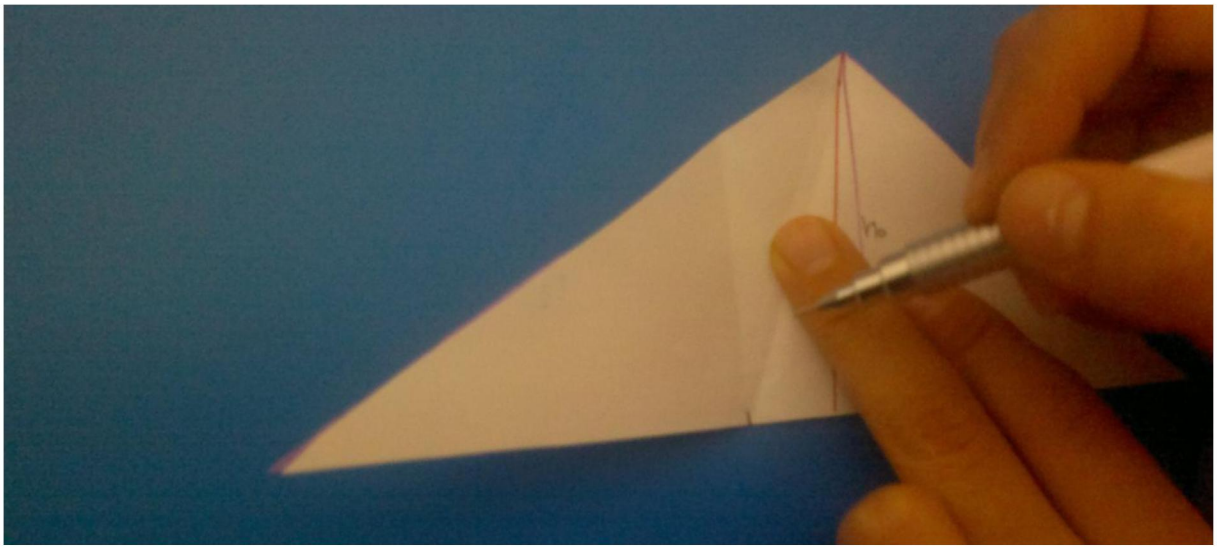


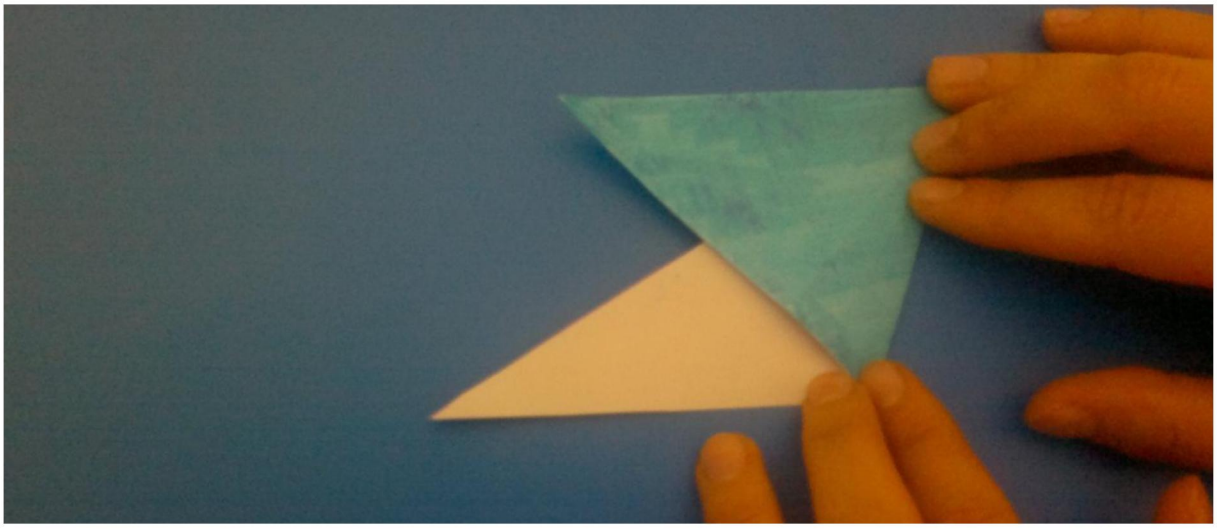


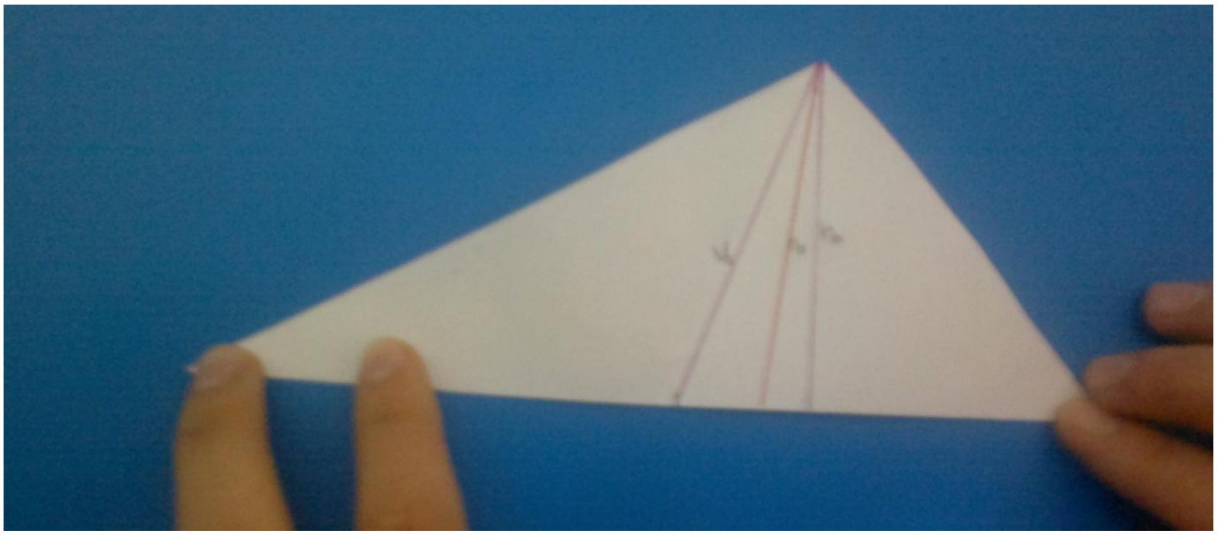












Önerme: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=3$ **(DENEYSEL- Çoklu Örneklemeye Dayalı-1)**

	$\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$	Toplam
n=1	0,750000000000	0,750000000000
n=2	0,562500000000	1.312500000000
n=3	0,421875000000	1.734375000000
n=4	0,316406250000	2.050781250000
n=5	0,237304688000	2.288085938000
n=6	0,177978516000	2.466064454000
n=7	0,133483887000	2.599548341000
n=8	0,100112915000	2.699661256000
n=9	0,075084686000	2.774745942000
n=10	0,056313515000	2.831059457000
n=11	0,042235136000	2.873294593000
n=12	0,031676352000	2.904970945000
n=13	0,023757264000	2.928728209000
n=14	0,017817948000	2.946546157000
n=15	0,013363461000	2.959909618000
n=16	0,010022596000	2.969932214000
n=17	0,007516947000	2.977449161000
n=18	0,005637710000	2.983086871000
n=19	0,004228283000	2.987315154000
n=20	0,003171212000	2.990486366000
n=21	0,002378409000	2.992864775000
n=22	0,001783807000	2.994648582000
n=23	0,001337855000	2.995986437000
n=24	0,001003391000	2.996989828000
n=25	0,000752525430	2.997742353430
n=26	0,000564408000	2.998306761430
n=27	0,000423306000	2.998730067430
n=28	0,000317479000	2.999047546430
n=29	0,000238109000	2.999285655430
n=30	0,000178582000	2.999464237430
n=31	0,000133937000	2.999598174430
n=32	0,000100452000	2.999698626430
n=33	0,000075339000	2.999773965430
n=34	0,000056504500	2.999830469930
n=35	0,000042378400	2.999872848330
n=36	0,000031783800	2.999904632130
n=37	0,000023837800	2.999928469930
n=38	0,000017878400	2.999946348330
n=39	0,000013408800	2.999959757130
n=40	0,000010056600	2.999969813730
n=41	0,000007542400	2.999977356130
n=42	0,000005656830	2.999983012960
n=43	0,000004242620	2.999987255580
n=44	0,000003181970	2.999990437550
n=45	0,000002386470	2.999992824020
n=46	0,000001789860	2.999994613880
n=47	0,000001342390	2.999995956270
n=48	0,000001006790	2.999996963060
n=49	0,000000755096	2.999997718156
n=50	0,000000566322	2,999998301000

Önerme:	**A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}kümesi elemanları $a^2 \geq 4\,(a-1)$ eşitsizliğini gerçekler.** **(DENEYSEL- Çoklu Örneklemeye Dayalı-2)**

a= 1 için $1^2 \geq 4\,(1-1)$

$1 \geq 0$

a= 2 için $2^2 \geq 4\,(2-1)$

$4 \geq 4$

a= 3 için $3^2 \geq 4\,(3-1)$

$9 \geq 8$

a= 4 için $4^2 \geq 4\,(4-1)$

$16 \geq 12$

a= 5 için $5^2 \geq 4\,(5-1)$

$25 \geq 16$

a= 6 için $6^2 \geq 4\,(6-1)$

$36 \geq 20$

a= 7 için $7^2 \geq 4\,(7-1)$

$49 \geq 24$

a= 8 için $8^2 \geq 4\,(8-1)$

$64 \geq 28$

a= 9 için $9^2 \geq 4\,(9-1)$

$81 \geq 32$

a= 10 için $10^2 \geq 4\,(10-1)$

$100 \geq 36$

Önerme: **Herhangi bir üçgende kenarortaylar, üçgenin içinde bir noktada kesişir.**

