ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KOMPLEKS *q*-BASKAKOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2014

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

25/07/2014

Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KOMPLEKS $q-$ BASKAKOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tezde kullanılacak olan, kompleks analizin temel kavramları ve teoremlerine, $q-$analizin gerekli gösterimlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, reel Baskakov operatörleri ve $q-$Baskakov operatörleri, bu operatörlerin bölünmüş farklar ile ifadeleri ve Stancu genelleşmeleri verilerek, Voronovskaja-tipli sonuçlar ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde, uygun disklerde analitik fonksiyonlar için Baskakov ve Baskakov-Stancu operatörlerinin bölünmüş farklar ile ifadelerinin kompleks genelleşmeleri ele alınarak, kompakt disklerde eş zamanlı yaklaşım ve Voronovskaja-tipli sonuçlar için nicel tahminlere yer verilmiştir. Beşinci bölüm orijinal olup, iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, kompleks $q-$Baskakov operatörü $Z_{n,q}(f)(z)$ ve bölünmüş farklar ile ifadesi olan $W_{n,q}(f)(z)$ operatörü tanımlanarak, operatörlerin varlığı için yeter koşullar belirtilmiştir. $W_{n,q}(f)(z)$ operatörleri, uygun disklerde analitik, kompakt disklerde üstel büyüyen ve $[0,\infty)$ aralığında her basamaktan türevleri sınırlı olan f fonksiyonları için dikkate alınarak, kompakt disklerde eş zamanlı yaklaşım ve Voronovskaja-tipli sonuç için nicel tahminler, yaklaşımın kesin derecesi bulunmuştur. İkinci kısımda, kompleks $q-$Baskakov operatörlerinin Stancu genelleşmesi tanımlanarak, ilk kısımdaki sonuçlar bu operatörlere genişletilmiştir.

Temmuz 2014, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler : $q-$Baskakov operatörleri, Voronovskaja-tipli sonuç, eş zamanlı yaklaşım, kesin yaklaşım derecesi, kompleks $q-$Baskakov-Stancu operatörleri

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

APPROXIMATION BY COMPLEX q-BASKAKOV OPERATORS

Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, basic definitions and theorems of complex analysis, essential representations of $q-$calculus have been given. In the third chapter, real Baskakov and $q-$Baskakov operators, their representation in the terms of divided differences, Stancu generalization of these operators have been given. Voronovskaja-type results have been stated. In the fourth chapter, considering complex generalization of Baskakov and Baskakov-Stancu operators represented in terms of divided differences for the analytic functions in the suitable disks, quantitative estimates for simultaneous approximation in compact disks and Voronovskaja-type results have been given. The fifth chapter includes original results and consists of two sections. In the first section, complex $q-$Baskakov operator $Z_{n,q}(f)(z)$ and its representation in terms of divided differences $W_{n,q}(f)(z)$, have been introduced. Conditions of existence and analyticity of these operators have been stated. Considering $W_{n,q}(f)(z)$, such f that is analytic on suitable disks, has exponential growth in a compact disks and with all its derivatives bounded in $[0,\infty)$ by the same constant, simultaneous approximation in compact disks and quantitative estimates for Voronovskaja-type result and exact degree of approximation have been obtained. In the second section, Stancu generalization of complex $q-$Baskakov operators have been defined. The results given in the first section, have been extended for the new operators.

July 2014, 70 pages

Key Words: $q-$Baskakov operators, Voronovskaja-type result, simultaneous approximation, exact degree of approximation, complex $q-$Baskakov-Stancu operators.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında en yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda destek olan değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımız esnasında öğrendiğim ve bundan sonra öğreneceğim bilgiler hayatımın her aşamasında bana yol gösterecektir.

Yakın ilgileriyle çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren, tez izleme kurulu üyeleri değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve Prof. Dr. Ali ARAL'a (Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü) teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım süresince hep yanımda olan ve beni cesaretlendiren arkadaşım Araş. Gör. Mehmet ÜNVER'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), tezimin gerçekleşmesinde benimle birlikte tüm sıkıntılara katlanarak büyük özveri ve sabır gösteren sevgili eşim Sabri ÖZDEN'e, hayatımın tüm aşamalarında yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi ve minnetlerimi sunarım.

Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN
Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$[\alpha]$	$\frac{1-q^{\alpha}}{1-q},\ \alpha \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}^{+} \setminus \{1\}$
$(z,q)_n$	$\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(1-q^k z\right),\ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
D_r	$\{z \in \mathbb{C};\ \lvert z\rvert < r\}$
$\overline{D}_r$	$\{z \in \mathbb{C};\ \lvert z\rvert \leq r\}$
$C\left(\overline{D}_r\right)$	$\overline{D}_r$ diskinde sürekli olan fonksiyonların uzayı
$\lVert f\rVert_r$	f fonksiyonunun $C\left(\overline{D}_r\right)$ uzayındaki normu
D_q	$q-$türev operatörü
$[x_0, x_1, ..., x_n; f]$	f fonksiyonunun $x_0, x_1, ..., x_n$ noktalarındaki $n-$nci bölünmüş farkı
∇_q^r	$q-$ileri fark operatörü
$Z_n(f)(x)$	$n-$nci Baskakov operatörü $(n \in \mathbb{N})$
$W_n(f)(x)$	$n-$nci Baskakov operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$W_n^{\alpha,\beta}(f)(x)$	$n-$nci Baskakov-Stancu operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$Z_{n,q}(f)(x)$	$n-$nci $q-$Baskakov operatörü
$W_{n,q}(f)(x)$	$n-$nci $q-$Baskakov operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$Z_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(x)$	$n-$nci $q-$Baskakov-Stancu operatörü
$W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(x)$	$n-$nci $q-$Baskakov-Stancu operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$Z_n(f)(z)$	$n-$nci Kompleks Baskakov operatörü
$W_n(f)(z)$	$n-$nci Kompleks Baskakov operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$W_n^{\alpha,\beta}(f)(z)$	$n-$nci Kompleks Baskakov-Stancu operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$Z_{n,q}(f)(z)$	$n-$nci Kompleks $q-$Baskakov operatörü
$W_{n,q}(f)(z)$	$n-$nci Kompleks $q-$Baskakov operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)$	$n-$nci Kompleks $q-$Baskakov-Stancu operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi
$e_k(z)$	$z^k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ z \in \mathbb{C}$
$T_{n,k}(z)$	$W_{n,q}(e_k)(z),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)$	$W_{n,q}^{\alpha,\beta}(e_k)(z),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$A \sim B$	$A \leq CB$ ve $B \leq CA,\ C > 0$ bir sabit

1. GİRİŞ

Analizin bir alanı olan Yaklaşım Teori, temelde, fonksiyonlara daha basit ve kolay hesaplanabilen fonksiyonlar ile yaklaşım düşüncesi ile ilgilidir. Basit fonksiyonlar, genelde iyi bilinen polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar olarak alınmaktadır. Reel değişkenli fonksiyonların yaklaşım teorisinin temeli, Weierstrass tarafından 1885 yılında elde edilen yaklaşım teoremidir. Bu teorem, $[a, b]$ sonlu aralığında sürekli olan herhangi bir f fonksiyonu için, f ye $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsak olacak şekilde bir cebirsel polinom dizisinin var olduğunu ifade eder. (Yani, $span\,(1, x, ..., x^n) = \Pi_n$, en fazla $n-$nci dereceden cebirsel polinomların uzayını göstermek üzere Π_n uzayı $C\,[a, b]$ uzayında yoğundur: $\overline{\Pi_n} = C\,[a, b]$).

Weierstrass'ın yaklaşım teoreminin ispatları bir çok yazar tarafından yapılmıştır. 1912 yılında Bernstein, yaklaşılmak istenen $f \in C\,[0, 1]$ fonksiyonuna $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsak olan

$$B_n\,(f; x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\, f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in [0, 1])$$

şeklindeki cebirsel polinomların bir $B_n\,(f; x)$ dizisini inşa ederek Weierstrass teoreminin basit ve şık bir ispatını vermiştir. Bu düzgün yakınsama probleminden sonra, yaklaşımın hızı problemi ortaya çıkmıştır. Bu problemin çözümü farklı yönlerden incelenmiştir. Bir yöntem de; Voronovskaja (1932) tarafından ispatlanan, $[0, 1]$ aralığındaki bir x noktasında ikinci basamaktan sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonlar için Bernstein polinomlarının asimptotik davranışıdır.

$B_n\,(f; x)$ Bernstein polinomları lineer pozitif operatörlerin sınıfındandır (Bir V lineer fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı olan L lineer operatörü, her $f \in V,\ f \geq 0$ için $L\,(f) \geq 0$ şartını sağlıyorsa pozitiftir denir).

1951 yılında Popoviciu, 1952' de Bohman ve 1953'de Korovkin, yoğunluk için, birbirlerinden bağımsız olarak, basit ve kolayca uygulanabilen bir yöntem geliştirdiler. Bu yönteme göre; lineer pozitif A_n operatörlerinin bir dizisinin $[a, b]$ kompakt aralığında f sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, sadece üç tane $e_k(x) = x^k,\ k = 0, 1, 2$ fonksiyonu için $A_n(e_k)$ dizisinin e_k fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasıdır. Yani, kompakt kümede sürekli olan fonksiyonlara polinomlar ile yaklaşımda bazı lineer pozitif operatör dizileri kullanılabilir. 1974 yılında Gadzhiev, sınırsız aralıkta sürekli fonksiyonlar için Korovkin-tipli bir teoremi, pozitif ve sürekli bir ağırlık fonksiyonu ile tanımladığı ağırlıklı uzayda ispat etmiştir.

Yaklaşım teoride iki temel araştırma problemi vardır. Birincisi nitel olan, yani bir operatör dizisinin birim operatöre yaklaşımı için gerekli olan koşulların bulunmasıdır. İkincisi nicel olandır, yani operatör dizisinin birim operatöre yaklaşımının derecesinin ölçülmesidir.

$B_n(f; x)$ Bernstein polinomlarının ifadesinde $x \in [0, 1]$ değişkeni, kompleks düzlemde f fonksiyonunun analitik olduğu ve $[0, 1]$ aralığını kapsayan uygun bir bölgedeki z değişkeni ile değiştirilerek oluşturulan kompleks Bernstein polinomlarının yakınsaklık özellikleri Wright (1930), Kantorovich (1931), Bernstein (1943), Lorentz (1953) ve Tonne (1969) tarafından çalışılmıştır. Lorentz'in kitabında (1953) Bernstein operatörlerinin ve dejenere formunun yakınsaklık özellikleri kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde (örneğin kompakt diskler, elipsler, ilmikler, bağımsız kümeler) verilmiştir. Bu nitel sonuçlar, reel değişkenli Bernstein-tipli operatörler ile kompleks Bernstein operatörleri arasında, Vitali teoremi ile kurulan bağa dayanmaktadır, ancak bu çalışmalarda yaklaşımın sonuçları için nicel tahminler elde edilmemiştir. Gal (2009) tarafından; Bernstein, $q-$Bernstein, Bernstein-Stancu, Bernstein-Kantorovich, Favard-Szász-Mirakjan, Baskakov, Balázs-Szabados gibi operatörlerin kompleks formları ile kompakt disklerde eşzamanlı yaklaşım ve Voronovskaja-tipli sonuçlar için nicel tahminler elde edilmiştir ve yaklaşımın kesin dereceleri bulunmuştur.

Stancu, 1969 yılında negatif olmayan iki parametreye bağlı olacak şekilde, Bernstein operatörlerinin bir genelleşmesini tanımlamıştır. Bazı lineer pozitif operatörlerin Stancu genelleşmeleri; Gal (2009), Büyükyazıcı ve Atakut (2010), Mahesvari ve

Sharma (2012), Mahmudov ve Gupta (2012) gibi çalışmalarda görülebilir. Gupta ve Verma (2012) kompleks Szasz-Mirakjan operatörünün Stancu genelleşmesini, uygun bir bölgede analitik fonksiyonlar için tanımlamışlar ve bu operatörler ile yaklaşımın hızını hesaplayarak, Voronovskaja-tipli sonuç elde etmişlerdir. Kompleks Baskakov Stancu operatörleri için benzer sonuçlar Gal vd. (2012) tarafından elde edilmiştir.

Son zamanlarda $q-$analizin gösterim ve yöntemleri kullanılarak, lineer pozitif operatör dizilerinin $q-$genelleşmelerinin yaklaşım özellikleri yoğun olarak çalışılmaktadır. 1987 yılında Lupaş ilk olarak Bernstein operatörlerinin $q-$genelleşmesini tanımlamış ve bazı özellikleri incelemiştir. Phillips (1997) de Bernstein polinomlarının $q-$genelleşmesini tanımlayıp yaklaşım özellikleri ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. Buna göre, $q-$Bernstein polinomları ile yaklaşımda elde edilen sonuçların, klasik Bernstein polinomlarına göre daha esnek veya daha iyi olduğu görülmektedir. Kompleks $q-$Bernstein polinomları üzerine yapılan çalışmalar hakkında bilgi, Gal'ın kitabında (2009) zaman dizini olarak verilmiştir.

Son zamanlarda, $q-$Baskakov operatörlerinin çeşitli genelleşmeleri ile ilgili bazı araştırmalar için; Gupta ve Heping (2008), Gupta ve Radu (2009), Aral ve Gupta (2009, 2010 ve 2011), Finta ve Gupta (2010) Gupta, Kim ve Lee (2012) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Bu tezde, Aral ve Gupta (2011) tarafından inşa edilen $q-$Baskakov operatörlerinin bölünmüş farklar ile ifadesinin kompleks modeli $q > 1$ için ele alınarak, kompakt disklerde, eş zamanlı yaklaşım ve Voronovskaja-tipli bir sonuç için nicel tahminler verilecek, eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi bulunacaktır.

Bu tezde son olarak kompleks $q-$Baskakov operatörünün Stancu genelleşmesi tanımlanıp, bu operatörler için de benzer sonuçlar elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilecektir. Bu tez boyunca, $r > 0$ olmak üzere, D_r ve $\overline{D_r}$ sırası ile

$$D_r = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < r\}$$

ve

$$\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq r\}$$

disklerini gösterecektir. $C\left(\overline{D_r}\right)$, $\overline{D_r}$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere, $f \in C\left(\overline{D_r}\right)$ fonksiyonun normu

$$\|f\|_r = \max\{|f(z)|;\ |z| \leq r\}$$

ile tanımlanır.

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1 *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x_{0,}\ x_{1,}\ x_2, ..., x_n,$ $\mathbb{R}$ de birbirinden farklı noktalar (yani $i \neq j$ iken $x_i \neq x_j$) ve $f : \{x_i\}_{i=0}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_i,\ i = 0, ..., n,$ noktalarında tanımlı olsun ve $[x_0; f] := f(x_0)$ ile gösterilsin.*

$$[x_0, x_1, ..., x_n; f] := \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0,\ i\neq j}^{n} (x_j - x_i)}$$

ifadesine f fonksiyonunun $x_{0,}\ x_{1,}\ x_2, ..., x_n$ noktalarındaki $n-$nci bölünmüş farkı denir (Dzyadyk and Shevchuk (2008)).

Örneğin, *f fonksiyonunun birinci bölünmüş farkı*

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{[x_0; f] - [x_1; f]}{x_0 - x_1},$$

f fonksiyonunun ikinci bölünmüş farkı

$$\begin{aligned}[x_0, x_1, x_2; f] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{[x_0, x_1; f] - [x_1, x_2; f]}{x_0 - x_2},\end{aligned}$$

benzer şekilde f *fonksiyonunun* $n-$*nci bölünmüş farkı*

$$[x_0, x_1, ..., x_n; f] = \frac{[x_0, x_{1,...,} x_{n-1}; f] - [x_1, x_2, ..., x_n; f]}{x_0 - x_n}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1 *Eğer her* $i = 0, ..., n$ *için* $x_i \in [a, b]$ *ve* f *fonksiyonu* (a, b) *üzerinde* $n-$*nci basamaktan türevlenebilir ise*

$$[x_0, x_1, ..., x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $\xi \in (a, b)$ *noktası vardır* (*Dzyadyk and Shevchuk (2008)*).

Teorem 2.2 $k \in \mathbb{N}$ *olmak üzere, iki fonksiyonun çarpımının* k. *bölünmüş farkı için*

$$[x_0, x_1, ..., x_k; f.g] = \sum_{i=0}^{k} [x_0, ..., x_i; f] . [x_i, ..., x_k; g]$$

eşitliği sağlanır (*Phillips* 2003).

Teorem 2.3 ***(Vitali Teoremi)*** Ω, $\mathbb{C}$ *kompleks düzlemde bir bölge,* $F \subset \Omega$, Ω *içinde en az bir yığılma noktasına sahip olan bir küme olsun.* Ω *üzerinde analitik olan fonksiyonların bir* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi* Ω *daki her kompakt kümede sınırlı ve herhangi bir* $z \in F$ *için* $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ $f(z)$ *ye yakınsak ise bu durumda* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Ω *daki herhangi bir kompakt kümede* f *ye düzgün yakınsaktır (Gal 2009).*

Teorem 2.4 (***Bernstein Eşitsizliği***) *Her* $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ *için,* $a_k \in \mathbb{C}$ *olmak üzere ve* $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *olsun ve* $r > 0$ *için* $\|P_n\|_r = \max\{|P_n(z)|; |z| \leq r\}$ *göstersin. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.*

(i) $|z| \leq 1$ *için* $|P_n'(z)| \leq n \|P_n\|_1$

(ii) $r > 0$ *ise her* $|z| \leq r$ *için* $|P_n'(z)| \leq \frac{n}{r} \|P_n\|_r$ (*Gal 2009*).

Teorem 2.5 *(**Maksimum Modül**) $\Omega \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olsun. $f : \Omega \to \mathbb{C}$, fonksiyonu Ω üzerinde analitik, $\overline{\Omega}$ da sürekli ise Γ, Ω nın sınırı olmak üzere*

$$\max\left\{|f(z)|; z \in \overline{\Omega}\right\} = \max\{|f(z)|; z \in \Gamma\}$$

sağlanır (Gal 2009).

Teorem 2.6 *(**Cauchy Türev Formülü**) $r > 0$ olmak üzere $f : \overline{D_r} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu D_r diskinde analitik ve $\overline{D_r}$ kapanışında sürekli olsun. Her $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ ve her $|z| < r$ için*

$$\Gamma = \{u \in \mathbb{C}; |u| = r\}$$

iken

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z)^{k+1}}du$$

gerçeklenir (Gal 2009).

Teorem 2.7 *$G \subset \mathbb{C}$ açık bir küme olsun. G üzerinde analitik olan fonksiyonların $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi f analitik fonksiyonuna G de yakınsak ve G deki her bir kompakt küme üzerinde düzgün yakınsak ise bu durumda her $p \in \mathbb{N}$ için $p-$inci basamaktan türevlerin dizisi $\left(f_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de G deki her kompakt küme üzerinde $f^{(p)}$ ye düzgün yakınsaktır (Gal 2009).*

Teorem 2.8 *(**Özdeşlik Teoremi**) $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. Eğer $f,\ g : \Omega \to \mathbb{C}$ fonksiyonları Ω üzerinde analitik ve $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ kümesi Ω da en az bir yığılma noktasına sahip ise bu durumda Ω üzerinde $f \equiv g$ dir (Gal 2009).*

Teorem 2.9 *f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğundaki z ler için geçerli olmak üzere*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

açılımı vardır. Bu kuvvet serisi bir $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < R\}$ diski üzerinde mutlak yakınsar ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür (Başkan 2012).

Bu teoremden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Sonuç 2.1 *A, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir bölge ve $f : A \to \mathbb{C}$ tanımlı olsun. f nin A da analitik olması için gerekli ve yeterli koşul, her bir $z_0 \in A$ noktası için f fonksiyonunun, üzerinde yakınsak bir kuvvet serisine eşit olabileceği bir $D(z_0, R)$ diskinin bulunabilmesidir (Başkan 2012).*

Teorem 2.10 *(i) A, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir bölge ve (f_n), A bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer A da bulunan her kapalı disk üzerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün ise f, A da analitiktir. A daki kapalı diskler üzerinde $f_n' \to f'$ yakınsaması düzgün, A üzerinde ise $f_n' \to f'$noktasaldır.*
(ii) Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere g_n ler A kümesinde analitik fonksiyon ve

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$$

serisi A bölgesindeki her kapalı disk üzerinde düzgün olarak yakınsıyorsa, g fonksiyonu A bölgesinin tümünde analitiktir (Başkan 2012).

2.2 $q-$Analizin Bazı Gösterimleri

Bu kısımda, çalışmada kullanılacak olan $q-$analizin bazı kavramlarına yer verilecektir.

Tanım 2.2 *q, pozitif bir reel sayı olsun. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $[n]_q$ $q-$tamsayısı,*

$$[n] = [n]_q = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Ernst 2000).

Tanım 2.3 *$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[\alpha] := [\alpha]_q = \frac{1-q^\alpha}{1-q}$ şeklinde tanımlanır.*

Tanım 2.4 *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $[n]!$ $q-$faktoriyeli*

$$[n]_q! := \begin{cases} [1][2]...[n], & n = 1, 2, ... \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

ve $n \geq r \geq 0$ tamsayıları için $q-$binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[r]!\,[n-r]!}$$

olarak tanımlanır (Ernst 2000).

Tanım 2.5 *Pochammer sembolünün $q-$genişlemesi $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} (z,q)_0 &= \ 1 \\ (z,q)_n &= \ \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - q^k z\right) \end{aligned}$$

ile gösterilir (Ernst 2000).

Tanım 2.6 *$q \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ olmak üzere bir f fonksiyonunun $q-$türevi $D_q f(z)$ ile gösterilir ve*

$$D_q f(z) = \begin{cases} \frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Uyarı 2.1 *Tanımdan, yüksek basamaktan $q-$türevler*

$$D_q^0 f := f,\ D_q^n f := D_q(D_q^{n-1} f),\ n = 1, 2, ...$$

olarak bulunur. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının çarpımının $q-$türevi

$$D_q(f(z)g(z)) = f(z)D_q(g(z)) + g(qz)D_q(f(z))$$

şeklindedir (Ernst 2000).

3. REEL BASKAKOV OPERATÖRLERİ

Bu bölümde, Baskakov operatörleri, Baskakov-Stancu operatörleri, $q-$Baskakov operatörleri, $q-$Baskakov-Stancu operatörleri ve bu operatörlerin bölünmüş farklar ile ifadeleri verilecektir, Voronovskaja-tipli sonuçlar ifade edilecektir.

3.1 Baskakov Operatörü

Bu kısımda, çalışmada kullanılacak olan reel değişkenli Baskakov operatörleri ile ilgili sonuçlar ifade edilecektir.

3.1.1 Operatörün tanımı

$x \in [0, \infty)$, $f \in C[0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, reel değişkenli Baskakov operatörü

$$Z_n(f)(x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Baskakov 1957).

Lupaş, 1967 de Baskakov operatörünü bölünmüş farklar ile

$$W_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+j-1)}{n^j} \left[0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{j}{n}; f\right] x^j, \ n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

şeklinde ifade etmiştir. Burada $j = 0$ için $n(n+1)\ldots(n+j-1) = 1$ alınmaktadır. Lupaş'ın teoremine göre; her $x \geq 0$ için $Z_n(f)(x) = W_n(f)(x)$ sağlanmaktadır (f nin hipotezleri, $Z_n(f)(x)$ iyi tanımlı olacak şekildedir).

3.1.2 Voronovskaja-tipli sonuç

Voronovskaja'nın, Bernstein polinomları $B_n(f, x)$ için elde ettiği asimptotik sonuç, lokal şekli ile aşağıdaki gibi verilir:

Teorem 3.1 *f, $[0, 1]$ aralığında sınırlı, bir $x \in [0, 1]$ için x in bir komşuluğunda türevlenebilir ve ikinci basamaktan $f''(x)$ türevi var ise*

$$\lim_{n \to \infty} n[B_n(f, x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

gerçeklenir. Eğer $f \in C^2[0,1]$ ise yakınsama düzgündür (DeVore and Lorentz 1993).

Teorem 3.1; eğer $f''(x) \neq 0$ ise $n \to \infty$ iken $B_n(f,x) - f(x)$ farkının derecesinin $\frac{1}{n}$ den daha iyi olmadığını gösterir.

Reel Baskakov operatörleri için Voronovskaja-tipli bir sonuç, Sikkema tarafından 1970' de aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 3.2 *$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ üzerinde ikinci basamaktan sürekli diferensiyellenebilir ise*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[Z_n(f)(x) - f(x)\right] = \frac{x(1+x)}{2} f''(x)$$

gerçeklenir. Yakınsama, $[0,\infty)$ aralığının her kompakt alt aralığında düzgündür.

Her $x \geq 0$ için $Z_n(f)(x) = W_n(f)(x)$ olduğundan Teorem 3.2 de $W_n(f)(x)$ alınabilir.

3.1.3 Baskakov-Stancu operatörü

Stancu (1969), $0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan α, β parameterelerine bağlı olan ve Bernstein-Stancu operatörü olarak bilinen

$$B_n^{\alpha,\beta}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

operatörünü inşa ederek, her $f \in C[0,1]$ için $n \to \infty$ iken $[0,1]$ üzerinde $B_n^{\alpha,\beta}(f) \to f$ düzgün yakınsaklığını, Voronovskaja-tipli teorem gibi sonuçlar elde etmiştir. Bernstein-Stancu polinomları $\alpha = \beta = 0$ durumunda Bernstein polinomlarına indirgenmektedir.

$0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan α, β parameterelerine bağlı olan reel değişkenli Baskakov-Stancu operatörü

$$Z_n^{\alpha,\beta}(f)(x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır ve $\alpha = \beta = 0$ durumunda Baskakov operatörleri elde edilir. Baskakov operatörünün Stancu genelleşmesi için eş zamanlı yaklaşımın derecesi Atakut (1997) tarafından çalışılmıştır. Reel değişkenli Baskakov-Stancu operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi, $x \in [0, \infty)$ için

$$W_n^{\alpha,\beta}(f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n(n+1)...(n+j-1)}{n^j} \left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{\alpha+1}{n+\beta}, ..., \frac{\alpha+j}{n+\beta}; f \right] x^j, \; n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

şeklindedir. Burada $j = 0$ için $n(n+1)...(n+j-1) = 1$ alınmaktadır. Lupaş'ın (1967) yöntemine göre; her $x \geq 0$ için $Z_n^{\alpha,\beta}(f)(x) = W_n^{\alpha,\beta}(f)(x)$ olur (f üzerindeki hipotezler, $Z_n^{\alpha,\beta}(f)(x)$ iyi tanımlı olacak şekilde alınmaktadır) (Gal vd. 2012).

3.2 $q-$Baskakov Operatörü

Bu kısımda, Aral ve Gupta (2011) tarafından tanımlanmış olan reel değişkenli $q-$Baskakov operatörü ve bu operatörün bölünmüş farklar ile ifadesi verilerek, bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlara yer verilecektir.

3.2.1 Operatörün tanımı

$x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C[0, \infty)$ ve $q > 0$ olmak üzere, reel değişkenli $q-$Baskakov operatörü Aral ve Gupta (2011) tarafından

$$Z_{n,q}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x, q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]}{q^{k-1}[n]} \right), \tag{3.4}$$

şeklinde inşa edilerek, yaklaşım hızı, operatörlerin şekil koruma ve monotonluk gibi özellikleri çalışılmıştır.

3.2.2 Voronovskaja-tipli sonuç

$$\begin{aligned} & C_2[0, \infty) \\ : &= \left\{ f \in C[0, \infty) : \; f \; [0, \infty) \text{ üzerinde düzgün sürekli ve sınırlı ve } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} < \infty \right\} \end{aligned}$$

ağırlıklı uzayı ve

$$C_2^r[0,\infty) := \left\{ f \in C_2[0,\infty) : \ D_q^r f \in C_2[0,\infty) \right\}, \ r \in \mathbb{N}$$

olmak üzere, $0 < q < 1$ için, reel değişkenli $Z_{n,q}(f,x)$ $q-$Baskakov operatörünün $q-$türevleri için Voronoskaja-tipli bir sonuç Aral ve Acar (2012) tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 3.3 *$q = q_n$, $0 < q_n < 1$ olmak üzere $n \to \infty$ iken $q_n \to 1$ ve $q_n^n \to a$ $(a > 0)$ sağlansın. Bu durumda her $f \in C_2^3[0,\infty)$ için her bir $x \geq 0$ noktasında*

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} [n]_{q_n} \left[D_{q_n} Z_{n,q_n}\left(f, \frac{x}{q_n}\right) - \frac{D_{q_n} f(x)}{q_n} \right] \\ = \ & \frac{1+2x(3-2a)}{2} \lim_{n\to\infty} D_{q_n}^2 f(x) + x(1+x) \lim_{n\to\infty} D_{q_n}^3 f(x) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

Aral ve Gupta (2011) tarafından, $q-$Baskakov operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi

$$W_{n,q}(f,x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{[n+r-1]!}{[n-1]!} q^{\frac{-r(r-1)}{2}} \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q[n]}, ..., \frac{[r]}{q^{r-1}[n]}; f \right] \frac{x^r}{[n]^r}, \ n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

şeklinde elde edilmiş ve her $x \geq 0$ için $Z_{n,q}(f,x) = W_{n,q}(f,x)$ olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada, ∇_q^r, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q-$ileri fark operatörü aşağıdaki gibi tanımlanarak, bölünmüş farklar ile ilişkisi bir sonraki lemmada verilmiştir.

Tanım 3.1 *f, (a,b) aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve j, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. f fonksiyonunun $q-$ileri farkları $\nabla_q^r f$,*

$$\begin{aligned} \nabla_q^0 f(x_j) & : = f(x_j) \\ \nabla_q^{r+1} f(x_j) & : = q^r \nabla_q^r f(x_{j+1}) - \nabla_q^r f(x_j) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Aral ve Gupta 2011).

Lemma 3.1 $x_j = \frac{[j]_q}{q^{j-1}}$ *olmak üzere, her* $j,\ r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *için*

$$[x_j, x_{j+1}, ...x_{j+r}; f] = q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}} \frac{\nabla_q^r f(x_j)}{[r]!} \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanır (Aral ve Gupta 2011).

İspat. İspat tümevarımla yapılabilir. $r = 0$ için doğrudur. $r \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere r için (3.6) eşitliği doğru olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} x_{j+r+1} - x_j &= \frac{[j+r+1]}{q^{j+r}} - \frac{[j]}{q^{j-1}} \\ &= \frac{[j+r+1] - q^{r+1}[j]}{q^{j+r}} \\ &= \frac{[r+1]}{q^{j+r}} \end{aligned}$$

sağlanır. Bu eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned} & [x_j, x_{j+1}, ...x_{j+r+1}; f] \\ = & \frac{[x_{j+1}, ...x_{j+r+1}; f] - [x_j, ...x_{j+r}; f]}{x_{j+r+1} - x_j} \\ = & \frac{q^{j+r}}{[r+1]} \left(q^{\frac{r(2j+r+1)}{2}} \frac{\nabla_q^r f(x_{j+1})}{[r]!} - q^{\frac{r(2j+r-1)}{2}} \frac{\nabla_q^r f(x_j)}{[r]!} \right) \\ = & q^{\frac{r(2j+r-1)}{2} + j + r} \left(\frac{q^r \nabla_q^r f(x_{j+1} - \nabla_q^r f(x_j)}{[r+1]!} \right) \\ = & q^{\frac{(r+1)(2j+r)}{2}} \frac{\nabla_q^{r+1} f(x_j)}{[r+1]!} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.1 ve (2.1) eşitliği göz önünde bulundurulursa $q-$ileri fark operatörü ve bölünmüş farklar arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

Sonuç 3.1 $x_j = \frac{[j]_q}{q^{j-1}}$ *olmak üzere, her* $j,\ r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*için*

$$\left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q[n]}, ..., \frac{[j]}{q^{j-1}[n]}; f\right] \tag{3.7}$$

$$= \frac{q^{j(j-1)} \nabla_q^j f(0)}{[j]!} [n]^j = \frac{f^{(j)}(\zeta)}{j!},\ \zeta \in \left(0, \frac{[j]}{q^{j-1}[n]}\right)$$

eşitliği sağlanır (Aral ve Gupta 2011).

3.2.3 $q-$Baskakov-Stancu operatörü

$0 \leq \alpha \leq \beta$ ve $q > 1$ olmak üzere, aşağıdaki $q-$Baskakov-Stancu operatörünü dikkate alalım

$$\begin{aligned} Z_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(x) \quad : &= Z_{n,q}^{[\alpha],[\beta]}(f)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x,q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]+[\alpha]}{q^{k-1}([n]+[\beta])} \right), \; n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bu operatörün $\alpha = \beta = 0$ durumu, $q-$Baskakov operatörünü vermektedir.

$0 < q < 1$ iken $q-$Baskakov operatörünün genel bir formunun Stancu genelleşmesi Büyükyazıcı ve Atakut (2010) tarafından verilerek, lokal yaklaşım özellikleri ve ağırlıklı uzayda yaklaşım oranı elde edilmiştir. Ayrıca, (3.5) ile verilen $q-$Baskakov operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi olan $W_{n,q}(f)(x)$ operatörünün Stancu genelleşmesini

$$\begin{aligned} W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n+j-1]!}{[n-1]!} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \\ &\left[\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]}, \frac{[\alpha]+[1]}{[n]+[\beta]}, \ldots, \frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])}; f \right] \frac{x^j}{([n]+[\beta])^j}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

ile gösterirsek, Aral ve Gupta'nın (2011) yöntemine göre,

(f nin koşulları, $Z_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(x)$ operatörünü iyi tanımlı yapacak şekilde olmak üzere) her $x \geq 0$ için $Z_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(x) = W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(x)$ gerçeklenir. Burada, gösterimde basitlik olması için, operatörü $W_{n,q}^{\alpha,\beta}$ şeklinde göstereceğiz. Bu gösterimde alt indiste bulunan q parametresi; operatörün Stancu genelleşmesinin inşasında alınan α ve β parametrelerinin aslında $[\alpha]$ ve $[\beta]$ $q-$sayıları ve dizinin n indisinin de $[n]$ $q-$tamsayısı olarak yer aldıklarını belirtecektir.

4. KOMPLEKS BASKAKOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Gal (2009), sırasıyla (3.1) ve (3.2) ile verilen $Z_n(f)(x)$ ve $W_n(f)(x)$ Baskakov operatörlerinde x yerine z alarak Baskakov operatörlerinin kompleks genelleşmesini oluşturmuştur.

4.1 Kompleks Baskakov Operatörleri

$Z_{n,q}(f,x)$ Baskakov operatörü ve $W_n(f)(x)$ bölünmüş farklar ile ifadesinin kompleks genelleşmesi, sırasıyla

$$Z_n(f)(z) = \frac{1}{(1+z)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right),\ n\in\mathbb{N} \qquad (4.1)$$

ve

$$W_n(f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+j-1)}{n^j}\left[0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{j}{n};f\right]z^j,\ n\in\mathbb{N} \qquad (4.2)$$

şeklinde olur. Lupaş'ın (1967) sonucuna göre, her $x\geq 0$ için $Z_n(f)(x) = W_n(f)(x)$ gerçeklenir. Fakat x in negatif değerleri için $Z_n(f)(x)$ ve $W_n(f)(x)$ eşit olmak zorunda değildirler. Gerçekten; $x = -\frac{1}{2}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için $f(t) = 1$ sabit fonksiyonu alınırsa her $n\in\mathbb{N}$ için

$$W_n(f)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

olurken

$$Z_n(f)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(-1)^k$$

serisinin ıraksak olduğu görülür. Kompleks düzlemde $Z_n(f)(z)$ ve $W_n(f)(z)$ operatörleri her $z\in\mathbb{C}$ noktasında örtüşmediğinden, yaklaşım özellikleri, f ve z üzerinde farklı hipotezler alınarak ayrı ayrı incelenmiştir.

$Z_n(f)(z)$ operatörünün varlığı için yeter koşullar aşağıdaki gibi verilmiştir.

$z\in\mathbb{C}$ için $\operatorname{Re} z\geq 0$, $|z|\leq r$ sağlansın ve her $x\in[0,\infty)$ için $|f(x)|\leq M$ $(M>0)$

olsun. O halde $1+z\neq 0$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\rho=\sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}}<1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left|Z_n(f)(z)\right| &\leq M\left|1+z\right|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^k \\
&\leq M\left|1+z\right|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\rho^k \\
&= :M\sum_{k=0}^{\infty}a_k
\end{aligned}$$

sağlanır. Gerçekten; $h(t)=\frac{t}{1+t}$ fonksiyonu $t\geq 0$ için artan olduğundan $z=x+iy\in\mathbb{C}$, $Rez=x\geq 0$ ve $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\leq r$ için $\left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{1+2x+x^2+y^2}\leq\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\leq\frac{r^2}{1+r^2}$ olur. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\rho^k:=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ serilerine oran testi uygulanırsa her sabit $n\in\mathbb{N}$ için öyle bir k_0 sayısı bulunur ki, her $k\geq k_0$ için $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\rho\frac{k+n}{k+1}<\rho'<1$ olduğu elde edilir. Yani; $Z_n(f)(z)$ iyi tanımlı ve z nin bir fonksiyonu olarak analitiktir.

$W_n(f)(z)$ operatörünün varlığı için yeter bir koşul olarak, $[0,\infty)$ aralığında f fonksiyonunun tüm türevlerinin aynı bir $M>0$ sabitiyle sınırlı olması alınmıştır. Böylece her $r>0$, $z\in\mathbb{C}$ ve $|z|\leq r$ ve $\xi\in\left(0,\frac{k}{n}\right)$ için (2.1) den

$$\begin{aligned}
\left|W_n(f)(z)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{n^k}\left[0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{k}{n};f\right]z^k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{n^k}\left|\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}z^k\right| \\
&\leq M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{n^k k!}r^k \\
&: = M\sum_{j=0}^{\infty}a_k(n,r)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{a_{k+1}(n,r)}{a_k(n,r)}=\frac{r(n+k)}{n(1+k)}$$

sağlanır. $k\to\infty$ iken $\frac{a_{k+1}(n,r)}{a_k(n,r)}\to\frac{r}{n}$ olur. O halde sabit bir $n_0\in\mathbb{N}$ ve $r<\frac{n_0}{2}$ için öyle bir k_0 bulunabilir ki, $k>k_0$ olduğunda $\frac{a_{k+1}(n_0,r)}{a_k(n_0,r)}<\frac{2r}{n_o}$ olduğu elde edilir. Oran testinden, her $n>n_0$ ve $|z|\leq\frac{n_0}{2}$ için $W_n(f)(z)$ iyi tanımlı ve analitiktir.

4.1.1 Kompleks Baskakov operatörleri ile yaklaşım

Gal (2011), bölünmüş farklar ile ifade edilen $W_n(f)(z)$ kompleks Baskakov operatörlerini; $\overline{D_R} \cup [R,\infty)$, $R > 0$, bölgesinde tanımlı, kompleks değerli, D_R üzerinde analitik ve üstel büyümeye sahip olan (yani her $z \in D_R$ için $|f(z)| \leq Me^{A|z|}$ olacak şekilde M, $A > 0$ sabitleri var) ve her basamaktan türevleri $[0,\infty)$ aralığında aynı pozitif sabit ile sınırlı kalan f fonksiyonları için dikkate alarak kompakt disklerde, eş zamanlı yaklaşım için üst tahminler ve nicel bir tahmin ile Voronovskaja-tipli bir sonuç ve eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesini elde etmiştir.

Kompakt disklerde $W_n(f)(z)$ operatörleri ile yaklaşım ve eş zamanlı yaklaşım için üst nicel tahminler aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.1 *$n_0 \in \mathbb{N}$, $R > 0$ ve $3 \leq n_0 < 2R < +\infty$ olmak üzere*

$$f : \overline{D_R} \cup [R,\infty) \to \mathbb{C}$$

fonksiyonun her basamaktan türevleri $[0,\infty)$ aralığında aynı pozitif sabit ile sınırlı ve D_R bölgesinde analitik olsun, yani her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olur ve her $k = 0,1,2...$ için, $|c_k| \leq M\frac{A^k}{k!}$ şartını sağlayan $M > 0$ ve $A \in \left(\frac{1}{R},1\right)$ sayılarının var olduğunu kabul edelim, (bu durumda her $z \in D_R$ için $|f(z)| \leq Me^{A|z|}$ olur).

i) *$1 \leq r < \min\left\{\frac{n_0}{2},\frac{1}{A}\right\}$ olsun. Bu durumda her $|z| \leq r$ ve $n > n_0$ için*

$$M_r(f) = 6M\sum_{k=2}^{\infty}(rA)^k(k+1)(k-1) < \infty \tag{4.3}$$

olmak üzere

$$|W_n(f)(z) - f(z)| \leq \frac{M_r(f)}{n}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) *Kompleks Baskakov operatörleri ile eş zamanlı yaklaşımda; $1 \leq r < r_1 < \min\left\{\frac{n_0}{2},\frac{1}{A}\right\}$ sabitlensin. Bu durumda her $|z| \leq r$, $p \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ için*

$$\left|W_n^{(p)}(f)(z) - f^{(p)}(z)\right| \leq \frac{p!r_1 M_{r_1}(f)}{n(r_1 - r)^{p+1}}$$

*eşitsizliği sağlanır. Buradaki $M_{r_1}(f)$ **i)** de verildiği gibidir (Gal 2011).*

Sikkema (1970) tarafından Baskakov operatörleri için elde edilen Voronoskaja-tipli sonuç, kompleks Baskakov operatörlerine Gal (2009) tarafından, bir üst nicel tahmin elde edilerek aşağıdaki gibi genişletilmiştir.

Teorem 4.2 *f fonksiyonu ve n_0, R, M, A sabitleri için Teorem 4.1 deki şartlar sağlansın ve $1 \leq r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ sabitlensin. Her $n > n_0$, $|z| \leq r$ için*

$$K_r(f) = 16M \sum_{k=3}^{\infty} (rA)^k (k-1)(k-2)^2 < \infty \tag{4.4}$$

olmak üzere aşağıdaki Voronovskaja-tipli sonuç gerçeklenir.

$$\left| W_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1+z)}{2n} f''(z) \right| \leq \frac{K_r(f)}{n^2}.$$

$W_n(f)(z)$ operatörleri ile yaklaşımın kesin derecesini bulmak için aşağıdaki alt tahmin elde edilmiştir.

Teorem 4.3 *f fonksiyonu ve n_0, R, M, A sabitleri için Teorem 4.1 deki şartlar sağlansın ve $1 \leq r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ olsun. Eğer f, derecesi ≤ 1 olan bir polinom değil ise her $n > n_0$ için*

$$\|W_n(f) - f\|_r \geq \frac{C_r(f)}{n}$$

sağlanır. Burada $C_r(f)$ sabiti sadece f ve r ye bağlıdır.

Teorem 4.1 $i)$ ve Teorem 4.3 den eğer f, derecesi ≤ 1 olan bir polinom değilse $W_n(f)$ kompleks Baskakov operatörleri ile yaklaşımın kesin derecesinin $\frac{1}{n}$ olduğu elde edilir. Bu durum aşağıdaki sonuçta ifade edilmiştir:

Sonuç 4.1 *f fonksiyonu ve n_0, R, M, A sabitleri için Teorem 4.1 deki şartlar sağlansın ve $1 \leq r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ keyfi sabit olsun. Eğer f, derecesi ≤ 1 olan bir polinom değil ise her $n > n_0$ için*

$$\|W_n(f) - f\|_r \sim \frac{1}{n}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler f ve r ye bağlıdır.

Eş zamanlı yaklaşımın derecesi için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.4 *f fonksiyonu ve n_0, R, M, A sabitleri için Teorem 4.1 deki şartlar sağlansın ve $1 \leq r < r_1 < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer f derecesi $\leq \max\{1, p-1\}$ olan bir polinom değil ise her $n > n_0$ için*

$$\left\|W_n^{(p)}(f) - f^{(p)}\right\|_r \sim \frac{1}{n}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler f, r, r_1 ve p ye bağlıdır.

$Z_n(f)(z)$ için benzer sonuçlar, f ve z ye farklı koşullar yüklenerek elde edilmiştir (Gal (2009)).

4.2 Kompleks Baskakov-Stancu Operatörleri

Gal vd. (2012), (4.2) ile verilen kompleks Baskakov operatörleri için önceki kısımda verilen sonuçları, bölünmüş farklar ile ifade edilen kompleks Baskakov-Stancu genelleşmesi için elde etmişlerdir. Bu kısımda, bu sonuçlara yer verilecektir.

$0 \leq \alpha \leq \beta$, $n \in \mathbb{N}$, olmak üzere (3.3) reel Baskakov operatörlerinin bölünmüş farklar ile olan ifadesinde $x \geq 0$ yerine $z \in \mathbb{C}$ alınarak, kompleks Baskakov-Stancu operatörleri

$$\begin{aligned} W_n^{\alpha,\beta}(f)(z) &: = V_n^{\alpha,\beta}(f)(z) \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{n(n+1)...(n+v-1)}{(n+\beta)^v} \left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{\alpha+1}{n+\beta}, ..., \frac{\alpha+v}{n+\beta}; f\right] z^v \end{aligned}$$

ile gösterilmiştir. (Burada $v = 0$ için $n(n+1)...(n+v-1) = 1$ olarak alınmaktadır).

$f : \overline{D_R} \cup [R, \infty) \to \mathbb{C}$, fonksiyonunun her basamaktan türevleri $[0, \infty)$ aralığında aynı pozitif sabit ile sınırlı ve D_R bölgesinde analitik ve üstel büyüme koşulunu sağlasın. Kompleks Baskakov operatörleri için (Gal 2009) tarafından elde edilen ve kısım 4.1.1 de verilen açıklamalara benzer olarak, $W_n^{\alpha,\beta}(f)(z)$ operatörleri iyi tanımlı ve analitiktir.

$W_n^{\alpha,\beta}(f)(z)$ operatörleri $\alpha=\beta=0$ iken $W_n(f)(z)$ kompleks Baskakov operatörlerine dönüşmektedir.

4.2.1 Kompleks Baskakov-Stancu operatörleri ile yaklaşım

Kompakt disklerde $W_n^{\alpha,\beta}(f)(z)$ operatörleri ile yaklaşım ve eş zamanlı yaklaşım için üst nicel tahminler aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.5 *$n_0 \in \mathbb{N}$, $R>0$ ve $3 \leq n_0 < 2R < +\infty$ olmak üzere*

$$f : \overline{D_R} \cup [R,\infty) \to \mathbb{C}$$

fonksiyonunun her basamaktan türevleri $[0,\infty)$ aralığında aynı pozitif sabit ile sınırlı ve D_R bölgesinde analitik olsun, yani her $z \in D_R$ için $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olur ve her $k=0,1,2...$ için, $|c_k| \leq M\frac{A^k}{k!}$ şartını sağlayan $M>0$ ve $A \in \left(\frac{1}{R},1\right)$ sayılarının var olduğunu kabul edelim, (bu durumda her $z \in D_R$ için $|f(z)| \leq Me^{A|z|}$ olur).
$0 \leq \alpha \leq \beta$, $1 \leq r < \min\left\{\frac{n_0}{2},\frac{1}{A}\right\}$ olsun. Bu durumda her $|z| \leq r$ ve $n>n_0$ için

$$\left|W_n^{\alpha,\beta}(f)(z)-f(z)\right|$$

$$\leq \frac{\alpha+\beta r}{n+\beta}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,r^{k-1}+\frac{A_r(f)}{n+\beta}+\frac{\alpha B_r(f)}{n+\beta}+\frac{\beta C_r(f)}{n+\beta}$$

Burada f, D_R de analitik olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,r^{k-1}<+\infty$ ve $B_r(f)=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,kr^{k-1}<+\infty$, $C_r(f)=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,kr^k<+\infty$ olur. Ayrıca $|c_k| \leq M\frac{A^k}{k!}$ olduğundan

$$A_r(f)=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,(1+r)\,k\,(k+1)!r^{k-1}<+\infty$$

sağlanır.

Kompakt disklerde Voronovskaja-tipli bir formül, üst nicel eşitsizlik ile aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

Teorem 4.6 $0 \leq \alpha \leq \beta,\ 1 \leq r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ *olsun.* f *fonksiyonu ve* $n_0,\ R,\ M,\ A$ *sabitleri için Teorem 4.5 deki şartlar sağlansın. Her* $|z| \leq r$ *ve* $n > n_0$ *için aşağıdaki Voronovskaja-tipli sonuç gerçeklenir.*

$$\left|W_n^{\alpha,\beta}(f)(z) - f(z) - \frac{\alpha - \beta z}{n+\beta} f'(z) - \frac{z(1+z)}{2n} f''(z)\right| \leq \frac{M_{1,r}(f)}{n^2} + \sum_{j=2}^{6} \frac{M_{j,r}(f)}{(n+\beta)^2}$$

Burada $|c_k| \leq M\frac{A^k}{k!}$ *olduğundan*

$$M_{1,r}(f) = 16\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|(k-1)(k-2)^2 k! r^k < +\infty,$$

$$M_{2,r}(f) = \alpha^2 \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \frac{(k-1)k!}{2} r^{k-2} < +\infty,$$

$$M_{3,r}(f) = 2\alpha \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| k^2 k! r^{k-1} < +\infty,$$

$$M_{4,r}(f) = \left(\frac{\beta^2}{2} + 2\beta\right) \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| k^2 (k+1)! r^k < +\infty,$$

$$M_{5,r}(f) = \alpha\beta \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| k(k-1) r^{k-1} < +\infty,$$

ve

$$M_{6,r}(f) = \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| k(k-1) r^k < +\infty$$

elde edilir.

Teorem 4.5 deki yaklaşımın kesin derecesini elde etmek için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 4.7 $0 \leq \alpha \leq \beta,\ 1 \leq r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ *olsun.* f *fonksiyonu ve* $n_0,\ R,\ M,\ A$ *sabitleri için Teorem 4.5 deki şartlar sağlansın. Eğer* f*, derecesi* ≤ 0 *olan bir polinom değil ise her* $n > n_0$ *ve* $|z| \leq r$ *için*

$$\left\|W_n^{\alpha,\beta}(f) - f\right\|_r \geq \frac{C_r(f)}{n}$$

sağlanır. Burada $C_r(f)$ *sabiti* $f,\ \alpha,\ \beta$ *ve* r *ye bağlıdır.*

Uyarı 4.1 *Teorem 4.5 ve Teorem 4.7 den f, sabit fonksiyon değil ise $W_n^{\alpha,\beta}(f)$ kompleks Baskakov-Stancu operatörleri ile yaklaşımın kesin derecesinin $\frac{1}{n}$ olduğu görülür.*

$W_n^{\alpha,\beta}(f)$ kompleks Baskakov-Stancu operatörleri ile eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi, aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.8 $0 \leq \alpha \leq \beta,\ 1 \leq r < r_1 < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ *ve* $p \in \mathbb{N}$ *olsun.* f *fonksiyonu ve* $n_0,\ R,\ M,\ A$ *sabitleri için Teorem 4.5 deki şartlar sağlansın. Eğer* f, *derecesi* $\leq p-1$ *olan bir polinom değil ise, her* $n > n_0$ *için*

$$\left\| \left[W_n^{\alpha,\beta}(f)\right]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r \sim \frac{1}{n}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler $f,\ p$ *ve* r *ye bağlıdır.*

5. KOMPLEKS $Q-$BASKAKOV OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde, sırasıyla (3.4) ve (3.5) ile verilen $Z_{n,q}(f)(x)$ ve $W_{n,q}(f)(x)$ $q-$Baskakov operatörlerinde x yerine z alınarak, kompleks $q-$Baskakov operatörleri $Z_{n,q}(f)(z)$ ve bölünmüş farklar ile ifadesi olan $W_{n,q}(f)(z)$ operatörleri tanıtılacak, operatörlerin varlığı için yeter koşullar belirtilecektir. Uygunluk açısından, tezde $W_{n,q}(f)(z)$ operatörleri ile çalışılacaktır. Kompleks Baskakov operatörleri ve Kompleks Baskakov-Stancu operatörleri için yapılmış olan ve dördüncü bölümde verilen sonuçlar, kompleks $q-$Baskakov operatörleri ve kompleks $q-$Baskakov-Stancu operatörleri için araştırılacaktır. Bu doğrultuda; ilk kısımda, merkezi orijinde olan kompakt disklerde $W_{n,q}(f)(z)$ operatörleri ile $f(z)$ fonksiyonuna eş zamanlı yaklaşım için üst ve alt tahminler, Voronovskaja-tipli bir sonuç üst nicel tahmin ile verilecektir. Eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi bulunacak, İkinci kısımda, $q-$Baskakov-Stancu operatörleri tanımlanarak benzer teoremler ispatlanacaktır.

5.1 Kompleks $q-$Baskakov Operatörleri

$q>1$ olmak üzere, (3.4) ile verilen $Z_{n,q}(f)(x)$ $q-$Baskakov operatöründe, x yerine z alıdığında kompleks $q-$Baskakov operatörü $Z_{n,q}(f)(z)$

$$Z_{n,q}(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}} z^k (-z,q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]}{q^{k-1}[n]}\right), \tag{5.1}$$

şeklinde olur. $Z_{n,q}(f)(z)$ operatörleri, $q>1$, $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z\geq 0$, ve her $x\in[0,\infty)$ için $|f(x)|\leq M$ sağlayan f fonksiyonları için $|z|\leq r$ dairesinde iyi tanımlıdır. Gerçekten bu koşullar ile $\prod_{j=0}^{n+k-1}(1+q^j z)\neq 0$ olur ve

$$\begin{aligned} & |Z_{n,q}(f)(z)| \qquad\qquad (5.2)\\ \leq\ & M\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{|z|^k}{|1+z|\,|1+qz|\ldots|1+q^{n+k-1}z|} \\ =\ & M\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \left|\frac{z}{1+z}\right|\left|\frac{qz}{1+qz}\right|\ldots\left|\frac{q^{k-1}z}{1+q^{k-1}z}\right|\left(\frac{1}{|1+q^k z|\ldots|1+q^{n+k-1}z|}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\rho_0:=\sqrt{\frac{r^2}{1+r^2}}$, $\rho_1:=\sqrt{\frac{q^2r^2}{1+q^2r^2}}$, ..., $\rho_{k-1}:=\sqrt{\frac{q^{2(k-1)}r^2}{1+q^{2(k-1)}r^2}}$ şeklinde belirtilirse $z=x+iy\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z=x\geq 0$ ve $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\leq r$ iken $j=0,1,\ldots,k-1$

için

$$\left(\frac{q^j|z|}{1+q^jz}\right)^2=\frac{q^{2j}\left(x^2+y^2\right)}{1+2q^jx+q^{2j}\left(x^2+y^2\right)}\leq\frac{q^{2j}\left(x^2+y^2\right)}{1+q^{2j}\left(x^2+y^2\right)}\leq\frac{q^{2j}r^2}{1+q^{2j}r^2}=\rho_j^2 \quad (5.3)$$

sağlanır. Ayrıca $|z|\leq r$ de $\operatorname{Re} z\geq 0$ olduğundan $j=k,k+1,...,n+k-1$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{|1+q^jz|} &= \frac{1}{|1+q^jx+iq^jy|}=\frac{1}{\sqrt{1+2q^jx+q^{2j}\left(x^2+y^2\right)}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1+q^{2j}\left(x^2+y^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1+q^{2j}r^2}}\end{aligned} \quad (5.4)$$

eşitsizliği gerçeklenir. (5.3) ve (5.4), (5.2) de yerine koyularak

$$\begin{aligned}& \left|Z_{n,q}(f)(z)\right| \\ \leq\ & M\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}\rho_0\rho_1...\rho_{k-1}\frac{1}{\sqrt{1+q^{2k}r^2}...\sqrt{1+q^{2(n+k-1)}r^2}} \\ =\ & :M\sum_{k=0}^{\infty}a_{k,q}(n,r)\end{aligned}$$

elde edilir. En son elde ettiğimiz seriye oran testi uygulanırsa her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1,q}(n,r)}{a_{k,q}(n,r)}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-q^{n+k}}{1-q^{k+1}}\right)\rho_k\frac{\sqrt{1+q^{2k}r^2}}{\sqrt{1+q^{2(n+k)}r^2}} \\ =\ &\lim_{k\to\infty}\frac{q^n-\frac{1}{q^k}}{q-\frac{1}{q^k}}\sqrt{\frac{q^{2k}r^2}{1+q^{2k}r^2}}\frac{\sqrt{1+q^{2k}r^2}}{\sqrt{1+q^{2(n+k)}r^2}} \\ =\ &\lim_{k\to\infty}\frac{q^n-\frac{1}{q^k}}{q-\frac{1}{q^k}}\frac{\sqrt{q^{2k}r^2}}{\sqrt{1+q^{2(n+k)}r^2}} \\ =\ &\lim_{k\to\infty}\frac{q^n-\frac{1}{q^k}}{q-\frac{1}{q^k}}\frac{r}{\sqrt{q^{2n}r^2+\frac{1}{q^{2k}}}}=\frac{1}{q}<1\end{aligned}$$

bulunur. Böylece seri mutlak ve düzgün yakınsaktır. Teorem 2.10 dan $Z_{n,q}(f)(z)$, $|z|\leq r$ de iyi tanımlı ve z nin bir fonksiyonu olarak analitiktir.

$q>1$ olmak üzere, (3.5) ile verilen $W_{n,q}(f)(x)$ operatöründe x yerine z alınarak, kompleks $q-$Baskakov operatörünün bölünmüş farklar ile ifadesi olan $W_{n,q}(f)(z)$ operatörü

$$W_{n,q}(f)(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n+j-1]!}{[n-1]!}q^{\frac{-j(j-1)}{2}}\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j]}{q^{j-1}[n]};f\right]\frac{z^j}{[n]^j} \quad (5.5)$$

şeklinde bulunur. Operatörün varlığı için bir yeter koşul şöyle verilebilir: f fonksiyonunun her basamaktan türevleri $[0,\infty)$ aralığında aynı $M>0$ sabiti ile sınırlı olsun. Lemma 3.1 den

$$\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q\,[n]},\ldots,\frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]};f\right]=\frac{f^{(j)}\left(\xi\right)}{j!}\leq\frac{M}{j!} \tag{5.6}$$

sağlanır. $(5.6)\,,(5.5)$ dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\left|W_{n,q}\left(f\right)\left(z\right)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n+j-1]!}{[n-1]!}q^{\frac{-j(j-1)}{2}}\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q\,[n]},\ldots,\frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]};f\right]\frac{z^{j}}{[n]^{j}}\right| \\
&\leq M\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n+j-1]!}{[n-1]!}q^{\frac{-j(j-1)}{2}}\frac{|z|^{j}}{[n]^{j}}\frac{1}{j!} \\
&\leq M\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n+j-1]!}{[n-1]!}q^{\frac{-j(j-1)}{2}}\frac{r^{j}}{[n]^{j}}\frac{1}{j!} \\
&: = M\sum_{j=0}^{\infty}a_{j,q}\left(n,r\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son seriye oran testi uygulanırsa her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_{j+1,q}\left(n,r\right)}{a_{j,q}\left(n,r\right)}=\frac{r}{[n]}\lim_{j\to\infty}\frac{[n+j]}{q^{j}\left(j+1\right)}=0<1$$

bulunur. Bu durumda Teorem 2.10 dan $W_{n,q}\left(f\right)\left(z\right)$, $q>1$ için $|z|\leq r$ de iyi tanımlı ve analitiktir.

$Z_{n,q}\left(f\right)\left(z\right)$ ve $W_{n,q}\left(f\right)\left(z\right)$ her z kompleks sayısı için birbirine eşit olmak zorunda değildir. Bu nedenle bu operatörler f ve z için farklı koşullar altında incelenmelidir.

5.1.1 Kompleks $q-$Baskakov operatörleri ile yaklaşım

$q>1$ olmak üzere, kompakt disklerde $W_{n,q}\left(f\right)\left(z\right)$ operatörleri ile analitik fonksiyonlara yaklaşımda, Kısım 4.1.1 deki gibi, f fonksiyonları $\overline{D_R}\cup[R,\infty)$ bölgesinde tanımlı, kompleks değerli, her basamaktan türevleri $[0,\infty)$ aralığında aynı pozitif sabit ile sınırlı ve D_R bölgesinde analitik ve üstel büyümeye sahip olacak şekilde alınacaktır. Böylece f nin D_R bölgesinde analitikliği, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ gösterimini verir, bu da herhangi bir $\overline{D_r}$, $1\leq r<R$, kompakt diskinde nicel tahminlerin ispatında önemli bir yer tutar. Diğer yandan, $[0,\infty)$ aralığında reel durumda iyi

bilinen bazı eşitsizlikler kullanılabilir. Bir önceki kısımdan, her z kompleks sayısı için $W_{n,q}(f)(z)$ iyi tanımlı olmaktadır. Bu kısımda, böyle f analitik fonksiyonları ile oluşturulan $W_{n,q}(f)(z)$ operatörleri ile, kompakt disklerde eş zamanlı yaklaşım ve Voronovskaja-tipli bir sonuç için üst nicel tahminler elde edilecek, ayrıca eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi için gerekli olan alt tahminler bulunarak yaklaşımın kesin derecesi elde edilecektir.

Beşinci bölüm boyunca, kompleks $q-$Baskakov operatörlerinde ve Stancu genelleşmesinde $e_k(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fonksiyonu alındığında, bu durum sırasıyla

$$\begin{aligned} T_{n,k}(z) &: = W_{n,q}(e_k)(z), \\ T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z) &: = W_{n,q}^{\alpha,\beta}(e_k)(z) \end{aligned}$$

ile gösterilecektir. Burada sadelik için, $T_{n,q,k}(z)$ yerine $T_{n,k}(z)$ gösterimi kullanılmıştır. $T_{n,k}(z)$ ve $T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)$ $k-$nci dereceden polinomlar oldukları açıktır.

Lemma 5.1 *$q \geq 1$ olmak üzere $j,\ n \in \mathbb{N}$ için*

$$\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \leq j! \tag{5.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. *İspat tümevarımla yapılabilir. $j = 1$ için doğrudur. $j,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $j = m$ için (5.7) eşitliği doğru olsun. Yani;*

$$\frac{[n][n+1]...[n+m-1]}{[n]^m} q^{\frac{-m(m-1)}{2}} \leq m! \tag{5.8}$$

sağlansın. (5.8) *ifadesinde eşitsizliğin sol tarafı q^m ile çarpılıp bölünürse*

$$\begin{aligned} & \frac{[n]}{[n]} \frac{[n+1]}{[n]} ... \frac{[n+m-1]}{[n]} \frac{1}{q^{\frac{m(m-1)}{2}}} \left(\frac{q^m}{q^m} \right) \\ = & \frac{[n+1]}{[n]} ... \frac{[n+m-1]}{[n]} \frac{1}{q^{\frac{m(m+1)}{2}}} \left(\frac{[n]}{[n]} q^m \right) \leq m! \end{aligned} \tag{5.9}$$

bulunur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\frac{[n]}{[n]}q^m &= \left(\frac{1-q^n}{1-q^n}\right)q^m \\
&= \frac{q^m - q^{n+m} + 1 - 1}{1-q^n} \\
&= \frac{1-q^{n+m}}{1-q^n} - \frac{1-q^m}{1-q^n} \\
&= \frac{[n+m]}{[n]} - \frac{[m]}{[n]} \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır. (5.10) (5.9) *da yerine yazılarak*

$$
\begin{aligned}
& \frac{[n+1]}{[n]}\cdots\frac{[n+m-1]}{[n]}\frac{1}{q^{\frac{m(m+1)}{2}}}\left(\frac{[n+m]}{[n]} - \frac{[m]}{[n]}\right) \\
=\ & \frac{[n+1]}{[n]}\cdots\frac{[n+m-1]}{[n]}\frac{[n+m]}{[n]}\frac{1}{q^{\frac{m(m+1)}{2}}} \\
& -\frac{[n+1]}{[n]}\cdots\frac{[n+m-1]}{[n]}\frac{1}{q^{\frac{m(m-1)}{2}}}\frac{1}{q^m}\frac{[m]}{[n]} \\
\leq\ & m! \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $q > 1$ *için sağlanan* $[m] \leq q^{m-1}m$ *eşitsizliğinden ve* (5.8) *den*

$$
\begin{aligned}
& \frac{[n+1]}{[n]}\cdots\frac{[n+m-1]}{[n]}\frac{[n+m]}{[n]}\frac{1}{q^{\frac{m(m+1)}{2}}} \\
=\ & \frac{[n][n+1]\ldots[n+m]}{[n]^{m+1}}\frac{1}{q^{\frac{m(m+1)}{2}}} \\
\leq\ & m! + \frac{[n+1]}{[n]}\cdots\frac{[n+m-1]}{[n]}\frac{1}{q^{\frac{m(m-1)}{2}}}\frac{1}{q^m}\frac{[m]}{[n]} \\
\leq\ & m! + m!\frac{1}{q^m}\frac{[m]}{[n]} \\
\leq\ & m! + m!m = (m+1)!
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Lemma 5.2 $z \in \mathbb{C}$ *ve* $k,\ n \in \mathbb{N}$ *için*

$$
T_{n,k+1}(z) = \frac{qz}{[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)D_q T_{n,k}\left(\frac{z}{q}\right) + zT_{n,k}^q(z) \qquad (5.12)
$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 2.2 de $f = e_k$, $g = e_1$ ve $x_j = \frac{[j]}{q^{j-1}[n]}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]}; e_{k+1}\right] \\
= \; & \frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]} \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]}; e_k\right] + \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j-1]}{q^{j-2}\,[n]}; e_k\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $T_{n,k+1}(z)$ de kullanılarak

$$\begin{aligned}
T_{n,k+1}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \\
&\quad \times \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]}; e_{k+1}\right] z^j \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j} q^{\frac{-j(j+1)}{2}+1} \\
&\quad \times \frac{[j]}{[n]} \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]}; e_k\right] z^j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \\
&\quad \times \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j-1]}{q^{j-2}\,[n]}; e_k\right] z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n][n+1]...[n+j]}{[n]^{j+1}} q^{\frac{-(j+1)(j+2)}{2}+1} \\
&\quad \times \frac{[j+1]}{[n]} \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j+1]}{q^{j}\,[n]}; e_k\right] z^{j+1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j} \frac{[n+j]}{[n]} q^{\frac{-j(j+1)}{2}} \qquad (5.13) \\
&\quad \times \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q\,[n]}, ..., \frac{[j]}{q^{j-1}\,[n]}; e_k\right] z^{j+1}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $T_{n,k}(z)$ polinomunun $q-$türevi alınarak

$$\begin{aligned} D_qT_{n,k}(z) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j}q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \\ &\quad\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j]}{q^{j-1}[n]};e_k\right][j]z^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j]}{[n]^j}q^{\frac{-j(j+1)}{2}} \\ &\quad\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j+1]}{q^j[n]};e_k\right]\frac{[j+1]}{[n]}z^j \end{aligned} \tag{5.14}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} & D_qT_{n,k}\left(\frac{z}{q}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j}q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \\ &\quad\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j]}{q^{j-1}[n]};e_k\right]\frac{[j]}{q^j}z^{j-1} \\ &= \frac{1}{q}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j]}{[n]^j}q^{\frac{-j(j+1)}{2}} \\ &\quad\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j+1]}{q^j[n]};e_k\right]\frac{[j+1]}{[n]}\left(\frac{z}{q}\right)^j \end{aligned} \tag{5.15}$$

dır. (5.14) ve (5.15) göz önünde bulundurulursa

$$qD_qT_{n,k}\left(\frac{z}{q}\right) = D_qT_{n,k}(w)\big|_{w=\frac{z}{q}} \tag{5.16}$$

olduğu açıktır. (5.13) de $\frac{[n+j]}{[n]}=\frac{[j]}{[n]}+q^j$, $\frac{-(j+1)(j+2)}{2}+1=\frac{-j(j+1)}{2}-j$, ve $j-\frac{j(j+1)}{2}=\frac{-j(j-1)}{2}$, (5.15) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
T_{n,k+1}(z) &= q\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j]}{[n]^{j+1}}q^{\frac{-j(j+1)}{2}} \\
&\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j+1]}{q^{j}[n]};e_k\right]\frac{[j+1]}{q^{j+1}[n]}z^{j+1} \\
&+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^{j}}\frac{[j]}{[n]}q^{\frac{-j(j+1)}{2}} \\
&\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j]}{q^{j-1}[n]};e_k\right]z^{j+1} \\
&+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^{j}}q^{j-\frac{j(j+1)}{2}} \\
&\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j]}{q^{j-1}[n]};e_k\right]z^{j+1} \\
&= \frac{qz}{[n]}D_qT_{n,k}\left(\frac{z}{q}\right) \\
&+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j]}{[n]^{j+1}}\frac{[j+1]}{[n]}q^{\frac{-(j+1)(j+2)}{2}} \\
&\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j+1]}{q^{j}[n]};e_k\right]z^{j+2} \\
&+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^{j}}q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \\
&\times\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j]}{q^{j-1}[n]};e_k\right]z^{j+1} \\
&= \frac{qz}{[n]}D_qT_{n,k}\left(\frac{z}{q}\right) \\
&+\frac{z^2}{[n]}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n][n+1]...[n+j]}{[n]^{j}}q^{\frac{-j(j+1)}{2}} \\
&\times\frac{[j+1]}{q^{j+1}[n]}\left[0,\frac{1}{[n]},\frac{[2]}{q[n]},...,\frac{[j+1]}{q^{j}[n]};e_k\right]z^{j}+zT_{n,k}(z) \\
&= \frac{qz}{[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)D_qT_{n,k}\left(\frac{z}{q}\right)+zT_{n,k}(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teoremde, kompakt disklerde $W_{n,q}(f)(z)$ kompleks $q-$Baskakov operatörleri ile yaklaşım ve eş zamanlı yaklaşım için üst nicel tahminler elde edilmiştir.

Teorem 5.1 *$q>1$ ve $1<R<\infty$ olmak üzere*

$$f:\overline{D_R}\cup[R,\infty)\to\mathbb{C}$$

fonksiyonu her basamaktan türevleri ile $[0,\infty)$ aralığında aynı pozitif sabit ile sınırlı ve D_R bölgesinde analitik olsun, yani her $z\in D_R$ için $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ olur ve her $k=0,1,2...$ için, $|c_k|\le M\frac{A^k}{k!}$ şartını sağlayan $M>0$ ve $A\in\left(\frac{1}{R},1\right)$ sayılarının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda

i) *$1\le r<\frac{1}{A}$ ve her $|z|\le r$ ve $n\in\mathbb{N}$ için*

$$|W_{n,q}(f)(z)-f(z)|\le\frac{M_r(f)}{[n]}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $M_r(f)$, (4.3) ile verilen toplam olup, $rA<1$ olduğundan

$M_r(f)<\infty$ olur.

ii) *$1\le r<r_1<\frac{1}{A}$ ve $M_{r_1}(f)$, (4.3) ile verilen toplam olmak üzere ($r_1A<1$ olduğundan $M_{r_1}(f)<\infty$ olur), her $|z|\le r$ ve $n,\ p\in\mathbb{N}$ için*

$$\left|[W_{n,q}(f)]^{(p)}-f^{(p)}(z)\right|\le\frac{M_{r_1}(f)}{[n]}\frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $z\in\mathbb{C}$ ve $k=0,1,2$ için $T_{n,0}(z)=1$, $T_{n,1}(z)=z$ sağlanır. Ayrıca Lemma 5.2 den $z\in\mathbb{C}$ ve $n,\ k\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}T_{n,k}(z)-z^k &= \frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]}D_q\left(T_{n,k-1}\left(\frac{z}{q}\right)-\left(\frac{z}{q}\right)^{k-1}\right)\\ &\quad +z\left(T_{n,k-1}(z)-z^{k-1}\right)+\frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]}\frac{[k-1]z^{k-2}}{q^{k-1}}\end{aligned}\tag{5.17}$$

sağlanır. $T_{n,k}(z)$ polinomunun derecesi $\le k$ olduğundan $\overline{D_r}$ de Bernstein eşitsizliğinden (Teorem 2.4) $|D_q(T_{n,k}(z))|\le\left\|T'_{n,k}\right\|_r\le\frac{k}{r}\|T_{n,k}\|_r$ sağlanır. Bu eşitsizlik, ayrıca

$q>1$ için sağlanan $[k-1]\leq (k-1)\,q^{k-2}$ eşitsizliği, (5.16), (5.17) de kullanılarak $|z|\leq r$, $r\geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
&\left|T_{n,k}(z)-e_k(z)\right| \\
\leq\ & \frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}q\left|D_q\left(T_{n,k-1}\left(\frac{z}{q}\right)-\left(\frac{z}{q}\right)^{k-1}\right)\right| \\
&+r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}[k-1]\left(\frac{r}{q}\right)^{k-2} \\
=\ & \frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left|D_q\left(T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right)\big|_{z=\frac{z}{q}}\right| \\
&+r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}[k-1]\left(\frac{r}{q}\right)^{k-2} \\
\leq\ & \frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left\|\left(T_{n,k-1}-e_{k-1}\right)'\right\|_r \\
&+r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}q^{k-2}(k-1)\left(\frac{r}{q}\right)^{k-2} \\
\leq\ & \frac{(k-1)\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left\|T_{n,k-1}-e_{k-1}\right\|_r \\
&+r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}(k-1)\,r^{k-2} \\
\leq\ & \frac{(k-1)\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left[\left\|T_{n,k-1}\right\|_r+r^{k-1}\right] \\
&+r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}(k-1)\,r^{k-2} \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca $\frac{r}{q} \leq r$ olduğundan (5.18) den

$$\begin{aligned} & \left|T_{n,k}(z) - e_k(z)\right| \\ \leq & \frac{(k-1)(1+r)}{[n]}\left[\|T_{n,k-1}\|_r + r^{k-1}\right] \\ & + r\left|T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z)\right| + \frac{r(1+r)}{[n]}(k-1)r^{k-2} \\ \leq & \frac{(k-1)2r}{[n]}\left[\|T_{n,k-1}\|_r + r^{k-1}\right] \\ & + r\left|T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z)\right| + \frac{2r^2}{[n]}(k-1)r^{k-2} \\ = & \frac{2r(k-1)}{[n]}\left[\|T_{n,k-1}\|_r + r^{k-1}\right] \\ & + r\left|T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z)\right| + \frac{2r^k(k-1)}{[n]} \end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir. $\|T_{n,k-1}\|_r$ ifadesi için bir üst sınır bulalım. Bu amaçla $k \in \mathbb{N}$ için

$$T_{n,k}(z) = \sum_{j=0}^{k} \frac{[n+j-1]!}{[n-1]!} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \left[0, \frac{1}{[n]}, \frac{[2]}{q[n]}, ..., \frac{[j]}{q^{j-1}[n]}; e_k\right] \frac{z^j}{[n]^j}$$

yazılabilir. (3.7) ve Lemma 5.1 den $q > 1,\ |z| \leq r,\ r \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \|T_{n,k}(z)\|_r \leq & \sum_{j=1}^{k} \frac{[n+j-1]!}{[n-1]!} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \frac{k(k-1)...(k-j+1)}{j!} r^{k-j} \frac{r^j}{[n]^j} \\ = & r^k \sum_{j=1}^{k} \frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \frac{k(k-1)...(k-j+1)}{j!} \\ \leq & r^k \sum_{j=1}^{k} k(k-1)...(k-j+1) \\ = & r^k \sum_{j=1}^{k} k(k-1)...(k-j+1) \\ \leq & r^k \sum_{j=1}^{k} k! \\ = & r^k k! k \leq r^k (k+1)! \end{aligned} \tag{5.20}$$

bulunur. (5.20), (5.19) da yerine yazılarak $q>1,\ |z|\leq r,\ r\geq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|T_{n,k}(z)-e_k(z)\right| \\
\leq\ & \frac{2r(k-1)}{[n]}\left[r^{k-1}k!+r^{k-1}\right]+r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{2r^k(k-1)}{[n]} \\
\leq\ & \frac{2r^k(k-1)k!}{[n]}+\frac{4r^k(k-1)}{[n]}+r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right| \\
\leq\ & r\left|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right|+\frac{6r^k(k+1)!}{[n]} \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.21) de $k=2,3,...$ alınarak devam edilirse

$$\begin{aligned}
\left|T_{n,2}(z)-z^2\right| &\leq r\left|T_{n,1}(z)-z\right|+\frac{6}{[n]}r^2 3! \\
&= \frac{6}{[n]}r^2 3! \\
\left|T_{n,3}(z)-z^3\right| &\leq r\left|T_{n,2}(z)-z^2\right|+\frac{6}{[n]}r^3 4! \\
&\leq \frac{6}{[n]}r^3(3!+4!) \\
&\vdots \\
\left|T_{n,k}(z)-z^k\right| &\leq \frac{6r^k}{[n]}(3!+4!+...+(k+1)!) \\
&= \frac{6r^k}{[n]}\sum_{j=2}^{k}(j+1)! \\
&\leq \frac{6r^k}{[n]}(k+1)!\,(k-1) \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan; $1\leq r<\frac{1}{A}$ ve her $|z|\leq r$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$W_{n,q}(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k T_{n,k}(z) \qquad (5.23)$$

eşitliği vardır. Gerçekten, f fonksiyonu her basamaktan türevleri ile $[0,\infty)$ da aynı pozitif sabitle sınırlı olduğundan, f nin 0 civarındaki Taylor serisini, yani $x\geq 0$ için $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, alırsak kalan terimin Lagrange formundan her $x\geq 0$ için $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ bulunur. Ayrıca seri her bir kompakt $[0,a]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Hipotezden $z\in D_R$ için $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ ve her $x\geq 0$ için

$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ bulunur. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$|z| \leq r \text{ için } f_m(z) = \sum_{j=0}^{m} c_j z^j \text{ ve } r < x < \infty \text{ için } f_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^j$$

tanımlanırsa f_m sonsuz kez türevlenebilir ve bütün türevleri aynı sabitle sınırlı olur. Teorem 2.3 (Vitali Teoremi) kullanalım. Bu amaçla $\Omega = \overline{D_R} \cup [R, \infty)$ ve bunun kompakt alt kümelerini $\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq r,\ 1 \leq r < R\}$ kümesi ile belirtelim. F yi ise D_R diskinde bir doğru parçası yani, $0 < x_0 < 1$ olmak üzere $[0, x_0]$ aralığı olarak alalım. Bu durumda $W_{n,q}$ operatörünün lineerliği ve (5.20) kullanılarak $q > 1$, $r \in \left[1, \frac{1}{A}\right)$ olmak üzere her $m,\ n \in \mathbb{N}$ ve $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned}
|W_{n,q}(f_m)(z)| &\leq \sum_{k=0}^{m} |c_k W_{n,q}(e_k)(z)| \\
&= \sum_{k=0}^{m} |c_k| \, |T_{n,k}(z)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \, |T_{n,k}(z)| \\
&\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} r^k (k+1)! \\
&\leq M \sum_{k=0}^{\infty} (rA)^k (k+1) < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 < x_0 < 1$ olmak üzere $x \in [0, x_0]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m \to \infty} W_{n,q}(f_m)(x) = W_{n,q}(f)(x)$$

eşitliğini göstermek yeterlidir. $[k] \leq kq^{k-1}$ ve $x_0 \geq 0$ için $W_{n,q}(f)(x_0) = Z_{n,q}(f)(x_0)$

olduğu hesaba katılırsa ve f için hipotezden

$$\begin{aligned}
&|W_{n,q}(f_m)(x_0) - W_{n,q}(f)(x_0)| \\
\leq\ & \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x_0^k}{(1+x_0)(1+qx_0)\cdots(1+q^{k-1}x_0)} \\
&\times \frac{1}{(1+q^k x_0)\cdots(1+q^{n+k-1}x_0)} \sum_{j=m+1}^{\infty} |c_j| \left(\frac{[k]}{q^{k-1}[n]} \right)^j \\
=\ & \frac{M}{[n]^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x_0^k}{(1+x_0)(1+qx_0)\cdots(1+q^{k-1}x_0)} \\
&\times \frac{1}{(1+q^k x_0)\cdots(1+q^{n+k-1}x_0)} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \left(\frac{[k]}{q^{k-1}} \right)^j \frac{1}{[n]^{j-m-1}} \\
\leq\ & \frac{M}{[n]^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x_0^k}{(1+x_0)(1+qx_0)\cdots(1+q^{k-1}x_0)} \\
&\times \frac{1}{(1+q^k x_0)\cdots(1+q^{n+k-1}x_0)} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{(kA)^j}{j!}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $0 < x_0 < 1$ olmak üzere

$$\rho_{k,q}(x_0) := \frac{x_0 e^{2A}}{(1+x_0)} \frac{q x_0 e^{2A}}{(1+qx_0)} \cdots \frac{q^{k-1} x_0 e^{2A}}{(1+q^{k-1}x_0)} < 1$$

sağlayan q ya bağlı bir x_0 vardır. Gerçekten; $h_{k,q}(x) = \frac{x}{1+x} \frac{qx}{1+qx} \cdots \frac{q^{k-1}x}{1+q^{k-1}x}$ sürekli, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde artan ve $h_{k,q}(0) = 0$ olur. Böylece

$$|W_{n,q}(f_m)(x_0) - W_{n,q}(f)(x_0)| \leq \frac{M}{[n]^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{(1+q^k x_0)\cdots(1+q^{n+k-1}x_0)}$$

elde edilir. Son seride oran testi uygulanarak

$$\lim_{k\to\infty} \frac{q^{n+k}-1}{q^{k+1}-1} \frac{1+q^k x_0}{1+q^{n+k}x_0} = \frac{1}{q} < 1$$

bulunur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{m\to\infty} W_{n,q}(f_m)(x_0) = W_{n,q}(f)(x_0)$$

elde edilir. Ayrıca her $x \in [0, x_0]$ için $h_{k,q}(x) \leq h_{k,q}(x_0)$ ve $\rho_{k,q}(x) \leq \rho_{k,q}(x_0) < 1$ olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} W_{n,q}(f_m)(x) = W_{n,q}(f)(x)$$

gerçeklenir. Böylece Teorem 2.3 ü kullanarak (5.23) eşitliğini göstermiş olduk. Son olarak (5.23) ve (5.22) kullanılarak $1 \leq r < \frac{1}{A}$ ve her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
& |W_{n,q}(f)(z) - f(z)| \\
= & \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) \right| \\
\leq & \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \, |T_{n,k}(z) - e_k(z)| \\
\leq & \sum_{k=2}^{\infty} M \frac{A^k}{k!} \frac{6}{[n]} r^k (k+1)! (k-1) \\
= & \frac{6M}{[n]} \sum_{k=2}^{\infty} (rA)^k (k+1)(k-1) = \frac{M_r(f)}{[n]}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

elde edilir.

ii) $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ olmak üzere Γ, 0 merkezli, r_1 yarıçaplı çemberi göstersin $|z| \leq r$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $|\gamma - z| \geq r_1 - r$ olduğundan (çünkü $|\gamma - z| \geq ||\gamma| - |z|| = r_1 - r$ gerçeklenir.) Teorem 2.6 ve i) den her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left| [W_{n,q}(f)]^{(p)} - f^{(p)}(z) \right| & \leq \frac{p!}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{W_{n,q} f(\gamma) - f(\gamma)}{(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \right| \\
& \leq \frac{M_{r_1}(f)}{[n]} \frac{p!}{2\pi} \frac{2\pi r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \\
& = \frac{M_{r_1}(f)}{[n]} \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}},
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi, $W_{n,q}(f)$ operatörleri için, kompakt disklerde Voronovskaja-tipli bir sonucu, üst nicel eşitsizlik ile verelim.

Teorem 5.2 *$q > 1$, $1 \leq r < \frac{1}{A}$ olsun ve f fonksiyonu ve R, M, A sabitleri için Teorem 5.1 deki şartlar sağlansın. Bu durumda her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki Voronovskaja-tipli sonuç gerçeklenir.*

$$\left| W_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{z}{2[n]} \left(1 + \frac{z}{q}\right) f''(z) \right| \leq \frac{K_r(f)}{[n]^2}$$

Burada $K_r(f)$ (4.4) ile verilen toplam olup, $rA < 1$ olduğundan $K_r(f) < \infty$ olur.

İspat. Hipotezden ve (5.23) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}&\left|W_{n,q}(f)(z)-f(z)-\frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right|\\ \leq\ &\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\left|T_{n,k}(z)-e_k(z)-\frac{k(k-1)}{2[n]}z^{k-1}\left(1+\frac{z}{q}\right)\right| \qquad (5.25)\end{aligned}$$

yazılabilir. Her $n \in \mathbb{N}$, $k=0,1,...$ olmak üzere

$$E_{k,n}(z):=T_{n,k}(z)-e_k(z)-\frac{k(k-1)}{2[n]}z^{k-1}\left(1+\frac{z}{q}\right)$$

ifadesi için bir üst tahmin bulmak istiyoruz. $E_{k,n}(z)$, derecesi $\leq k$ olan bir polinomdur ve

$$qD_qE_{k-1,n}\left(\frac{z}{q}\right)=D_qE_{k-1,n}(w)|_{w=\frac{z}{q}}, \qquad (5.26)$$

eşitliğini gerçekler. Ayrıca Lemma 5.2 den

$$\begin{aligned}&E_{k,n}(z)\\ =\ &T_{n,k}(z)-z^k-\frac{k(k-1)}{2[n]}z^{k-1}\left(1+\frac{z}{q}\right)\\ =\ &\frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]}\\ &\times D_q\left(T_{n,k-1}\left(\frac{z}{q}\right)-\left(\frac{z}{q}\right)^{k-1}-\frac{(k-1)(k-2)}{2[n]}\left(\frac{z}{q}\right)^{k-2}\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\right)\\ &+z\left(T_{n,k-1}(z)-z^{k-1}-\frac{(k-1)(k-2)}{2[n]}z^{k-2}\left(1+\frac{z}{q}\right)\right)\\ &+\frac{z\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]}[k-1]\left(\frac{z}{q}\right)^{k-2}-\frac{k(k-1)}{2[n]}z^{k-1}\left(1+\frac{z}{q}\right)\\ &+\frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]}\frac{(k-1)(k-2)}{2[n]}D_q\left(\left(\frac{z}{q}\right)^{k-2}\left(1+\frac{z}{q^2}\right)\right)\\ &+\frac{(k-1)(k-2)}{2[n]}z^{k-1}\left(1+\frac{z}{q}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Her $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in D_R$, $q>1$ için

$$\begin{aligned}E_{k,n}(z) =\ &\frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]}D_q(E_{k-1,n}(\frac{z}{q}))+zE_{k-1,n}(z)\\ &+\frac{z\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]}\left(\frac{z}{q}\right)^{k-2}\left[[k-1]-q^{k-2}(k-1)\right]\\ &+\frac{z\left(1+\frac{z}{q}\right)}{2[n]^2}(k-2)(k-1)\left(\frac{z}{q}\right)^{k-3}\left[[k-2]+[k-1]\frac{z}{q^2}\right] \qquad (5.27)\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda her $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned}
&\left|E_{k,n}(z)\right| \\
\leq\ & \frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]} q\left|D_q(E_{k-1,n}(\frac{z}{q}))\right| + r\left|E_{k-1,n}(z)\right| \\
&+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left(\frac{r}{q}\right)^{k-2}\left[[k-1]-q^{k-2}(k-1)\right] \\
&+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{2[n]^2}(k-1)(k-2)\left(\frac{r}{q}\right)^{k-3}\left[[k-2]+[k-1]\frac{r}{q^2}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.26) göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\left|E_{k,n}(z)\right| \leq\ & \frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left|D_qE_{k-1,n}(w)|_{w=\frac{z}{q}}\right| + r\left|E_{k-1,n}(z)\right| \\
&+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left(\frac{r}{q}\right)^{k-2}\left[[k-1]-q^{k-2}(k-1)\right] \\
&+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{2[n]^2}(k-1)(k-2)\left(\frac{r}{q}\right)^{k-3}\left[[k-2]+[k-1]\frac{r}{q^2}\right]
\end{aligned} \tag{5.28}$$

yazılabilir. Ayrıca, Bernstein eşitsizliğinden (Teorem 2.4)

$$\begin{aligned}
&\left|D_qE_{k-1,n}(w)|_{w=\frac{z}{q}}\right| \\
\leq\ & \left\|E_{k-1,n}^{'}\right\|_r \leq \frac{k-1}{r}\left\|E_{k-1,n}\right\|_r \\
\leq\ & \frac{k-1}{r}\left\{\left\|T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right\|_r + \frac{r^{k-2}\left(1+\frac{r}{q}\right)(k-1)(k-2)}{2[n]}\right\} \\
\leq\ & \frac{k-1}{r}\left\{\frac{6r^{k-1}}{[n]}k!(k-2) + \frac{r^{k-2}\left(1+\frac{r}{q}\right)(k-1)(k-2)}{2[n]}\right\} \\
\leq\ & \frac{6r^{k-2}}{[n]}k!(k-1)(k-2) + \frac{r^{k-3}(2r)k!(k-1)(k-2)}{2[n]} \\
=\ & \frac{7r^{k-2}}{[n]}k!(k-1)(k-2)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

sağlanır. (5.29), $[k-1] \leq q^{k-2}(k-1)$, $[k-2] \leq q^{k-3}(k-2)$ ve $\frac{r}{q} \leq r$, eşitsizlikleri

(5.28) de kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left|E_{k,n}(z)\right| &\leq \frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left[\frac{7r^{k-2}}{[n]}k!\left(k-1\right)\left(k-2\right)\right]+r\left|E_{k-1,n}(z)\right| \\
&+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{[n]}\left(\frac{r}{q}\right)^{k-2}\left[[k-1]-q^{k-2}\left(k-1\right)\right] \\
&+\frac{r\left(1+\frac{r}{q}\right)}{2\left[n\right]^{2}}\left(k-1\right)\left(k-2\right)\left(\frac{r}{q}\right)^{k-3}\left[[k-2]+[k-1]\frac{r}{q^{2}}\right] \\
&\leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right|+\frac{14r^{k}}{\left[n\right]^{2}}k!\left(k-1\right)\left(k-2\right) \\
&+\frac{r\left(2r\right)}{2\left[n\right]^{2}}\left(k-1\right)\left(k-2\right)\left(\frac{r}{q}\right)^{k-3}\left[[k-2]+[k-1]\frac{r}{q^{2}}\right] \\
&\leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right|+\frac{14r^{k}}{\left[n\right]^{2}}k!\left(k-1\right)\left(k-2\right) \\
&+\frac{r^{2}}{\left[n\right]^{2}}\left(k-1\right)\left(k-2\right)\frac{r^{k-3}}{q^{k-3}}\left\{q^{k-3}\left(k-2\right)\right\} \\
&+\frac{r^{2}}{\left[n\right]^{2}}\left(k-1\right)\left(k-2\right)\frac{r^{k-3}}{q^{k-3}}\left\{q^{k-2}\left(k-1\right)\frac{r}{q^{2}}\right\} \\
&\leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right|+\frac{16r^{k}}{\left[n\right]^{2}}k!\left(k-1\right)\left(k-2\right) \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

bulunur. $k=0,1,2,$ için $E_{k,n}(z)=0$ dır. (5.30) da $k=3,4,...,$ alınarak adım adım

$$
\begin{aligned}
\left|E_{3,n}(z)\right| &\leq \frac{16r^{3}}{\left[n\right]^{2}}3!.2.1 \\
\left|E_{4,n}(z)\right| &\leq \frac{16r^{4}}{\left[n\right]^{2}}\left(3!.2.1+4!.3.2\right) \\
&\vdots \\
\left|E_{k,n}(z)\right| &\leq \frac{16r^{k}}{\left[n\right]^{2}}\sum_{j=3}^{k}j!\left(j-1\right)\left(j-2\right) \\
&\leq \frac{16r^{k}}{\left[n\right]^{2}}k!\left(k-1\right)\left(k-2\right)^{2} \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.31), (5.25) de yerine yazılırsa (4.4) den

$$\begin{aligned}
&\left|W_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right| \\
\leq\ & M\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{A^k}{k!}\right)\frac{16r^k}{[n]^2}k!(k-1)(k-2)^2 \\
=\ & \frac{16M}{[n]^2}\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2 \\
=\ & \frac{K_r(f)}{[n]^2}
\end{aligned}$$

bulunur. $rA < 1$ için $\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2 < \infty$ olur, böylece ispat tamamlanır.

■

Teorem 5.1 deki yaklaşımın kesin derecesini bulmak için gerekli olan alt nicel eşitsizlik, yukarıda verilen nicel Voronovskaja-tipli sonuç kullanılarak, aşağıdaki teoremde elde edilmiştir.

Teorem 5.3 *$q > 1$, $1 \leq r < R$ olsun ve f fonksiyonu ve R, M, A sabitleri için Teorem 5.1 deki şartlar sağlansın. Eğer f, derecesi ≤ 1 olan bir polinom değil ise, her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\|W_{n,q}(f) - f\|_r \geq \frac{C_r(f)}{[n]}$$

sağlanır. Burada $C_r(f)$ sabiti f, q ve r ye bağlıdır.

İspat. Her $|z| \leq r$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&W_{n,q}(f)(z) - f(z) \\
=\ & \frac{1}{[n]}\left\{\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right. \\
&\left.+\frac{1}{[n]}\left[[n]^2\left(W_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\|F+G\|_r \geq |\|F\|_r - \|G\|_r| \geq \|F\|_r - \|G\|_r$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left\|W_{n,q}(f)-f\right\|_r\\
\geq\ &\frac{1}{[n]}\left\{\left\|\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r\right.\\
&\left.-\frac{1}{[n]}\left[[n]^2\left\|W_{n,q}(f)-f-\frac{e_1}{2[n]}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r\right]\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. f, derecesi ≤ 1 olan bir polinom olmadığından $D_{R,}$ dairesinde $\left\|\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r > 0$ sağlanır. Gerçekten, aksi kabul edilirse her $z\in\overline{D_r}$ için $\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)=0$ dır. Buradan her $z\in\overline{D_r}\diagdown\{0,-q\}$ için $f''(z)=0$ olur. Ayrıca f analitik olduğundan Teorem 2.8 den her $z\in D_R$ için $f''(z)=0$ olmalıdır. Bu ise hipotez ile çelişir. Teorem 5.2 den

$$[n]^2\left\|W_{n,q}(f)-f-\frac{e_1}{2[n]}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r\leq K_r(f)$$

elde edilir. Ayrıca $n\to\infty$ iken $q>1$ için $\frac{1}{[n]}\to 0$ dır. Bu durumda her $n\geq n_0$ için

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r-\frac{1}{[n]}\left([n]^2\left\|W_{n,q}(f)-f-\frac{e_1}{2[n]}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r\right)\\
\geq\ &\frac{1}{2}\left\|\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r
\end{aligned}$$

olacak şekilde f, q ve r ye bağlı bir n_0 sayısı vardır. Böylece her $n\geq n_0$ için

$$\left\|W_{n,q}(f)-f\right\|_r\geq\frac{1}{2[n]}\left\|\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r$$

gerçeklenir. $n\in\{1,...,n_0-1\}$ için $M_{r,n}(f):=[n]\left\|W_{n,q}(f)-f\right\|_r>0$ olmak üzere

$$\left\|W_{n,q}(f)-f\right\|_r\geq\frac{M_{r,n}(f)}{[n]}$$

dir. Buradan, sonuç olarak her $n\in\mathbb{N}$ için

$$C_r(f)=\min\left\{M_{r,1}(f),...,M_{r,n_0-1}(f),\frac{1}{2}\left\|\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r\right\}$$

f, q ve r ye bağlı olan bir terim olmak üzere

$$\left\|W_{n,q}(f)-f\right\|_r\geq\frac{C_r(f)}{[n]}$$

elde edilir. ■

Teorem 5.1 *i)* ve Teorem 5.3 birlikte düşünüldüğünde eğer f, derecesi ≤ 1 olan bir polinom değil ise $W_{n,q}(f)(z)$ operatörleri ile $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşımın kesin derecesi $\frac{1}{[n]}$ olur. Bunu, aşağıdaki sonuçta ifade edelim:

Sonuç 5.1 *$q>1$, $1\leq r<\frac{1}{A}$ olmak üzere f fonksiyonu ve R,M,A sabitleri için Teorem 5.1 deki şartlar sağlansın. Eğer f, derecesi ≤ 1 olan bir polinom değil ise, her $n\in\mathbb{N}$ için*

$$\left\|W_{n,q}(f)-f\right\|_{r}\sim\frac{1}{[n]}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler f, q ve r ye bağlıdır.

Kompakt disklerde, $W_{n,q}(f)$ kompleks $q-$Baskakov operatörleri ile eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 5.4 *$q>1$ olmak üzere f fonksiyonu ve R, M, A sabitleri için Teorem 5.1 deki şartlar sağlansın. $1\leq r<r_1<\frac{1}{A}$ ve $p\in\mathbb{N}$ olsun. Eğer f derecesi $\leq\max\{1,\ p-1\}$ olan bir polinom değil ise, her $n\in\mathbb{N}$ için*

$$\left\|[W_{n,q}(f)]^{(p)}-f^{(p)}\right\|_{r}\sim\frac{1}{[n]}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler f,r, r_1, q ve p ye bağlıdır.

İspat. Teorem 5.1 *ii)* de eş zamanlı yaklaşım için üst tahmin elde edilmişti. O halde $\left\|[W_{n,q}(f)]^{(p)}-f^{(p)}\right\|_{r}$ ifadesine bir alt tahmin bulunursa ispat tamamlanır. Benzer şekilde $1\leq r<r_1<\frac{1}{A}$ olmak üzere Γ, 0 merkezli, r_1 yarıçaplı çemberi göstersin $|z|\leq r$ ve $\gamma\in\Gamma$ için $|\gamma-z|\geq r_1-r$ sağlanır. Teorem 2.6 dan

$$[W_{n,q}(f)]^{(p)}-f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{W_{n,q}(f)(\gamma)-f(\gamma)}{(\gamma-z)^{p+1}}d\gamma \tag{5.32}$$

olur. Ayrıca her $\gamma\in\Gamma$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}&W_{n,q}(f)(\gamma)-f(\gamma)\\ =\;&\frac{1}{[n]}\left\{\frac{\gamma}{2}\left(1+\frac{\gamma}{q}\right)f''(\gamma)\right.\\ &\left.+[n]^2\left(W_{n,q}(f)(\gamma)-f(\gamma)-\frac{\gamma}{2[n]}\left(1+\frac{\gamma}{q}\right)f''(\gamma)\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.33}$$

yazılabilir. (5.33) (5.32) de yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
& \left[W_{n,q}(f)\right]^{(p)} - f^{(p)}(z) \\
= & \left\{ \frac{1}{[n]} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\gamma \left(1+\frac{\gamma}{q}\right) f''(\gamma)}{2(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \right. \\
& \left. + \frac{1}{[n]} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[n]^2 \left(W_{n,q}(f)(\gamma) - f(\gamma) - \frac{\gamma}{2[n]}\left(1+\frac{\gamma}{q}\right) f''(\gamma)\right)}{(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \right\} \\
= & \frac{1}{[n]} \left\{ \left[\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right) f''(z) \right]^{(p)} \right. \\
& \left. + \frac{p!}{[n]\, 2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[n]^2 \left(W_{n,q}(f)(\gamma) - f(\gamma) - \frac{\gamma}{2[n]}\left(1+\frac{\gamma}{q}\right) f''(\gamma)\right)}{(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Norma geçilirse

$$\begin{aligned}
& \left\| \left[W_{n,q}(f)\right]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r \qquad (5.34) \\
\geq & \frac{1}{[n]} \left\{ \left\| \left[\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right) f'' \right]^{(p)} \right\|_r \right. \\
& \left. - \frac{1}{[n]} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{[n]^2 \left(W_{n,q} f(\gamma) - f(\gamma) - \frac{\gamma}{2[n]}\left(1+\frac{\gamma}{q}\right) f''(\gamma)\right)}{(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \right\|_r \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 5.2 den

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{[n]^2 \left(W_{n,q}(f)(\gamma) - f(\gamma) - \frac{\gamma}{2[n]}\left(1+\frac{\gamma}{q}\right) f''(\gamma)\right)}{(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \right\|_r \\
\leq & \frac{p!}{2\pi} \frac{2\pi r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} [n]^2 \left\| \left(W_{n,q}(f) - f - \frac{e_1}{2[n]}\left(1+\frac{e_1}{q}\right) f'' \right) \right\|_{r_1} \\
\leq & \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} K_{r_1}(f) \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Ayrıca hipotezden

$$\left\| \left[\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right) f'' \right]^{(p)} \right\|_r > 0$$

olur. Gerçekten; $\left\| \left[\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right) f'' \right]^{(p)} \right\|_r = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right) f''(z)$ nin derecesi $\leq p-1$ olan bir polinom olduğunu elde ederiz. Eğer $p = 1$ veya $p = 2$ ise f fonksiyonunun analitikliği, f fonksiyonunun derecesi $\leq$

$1 = \max\{1, p-1\}$ olan polinom olacağını gerektirir, bu da hipotezle çelişir. $p > 2$ ise f fonksiyonunun analitikliği , f fonksiyonunun derecesi $\leq 1 = \max\{1, p-1\}$ olan polinom olacağını gerektirir ki bu yine hipotezle çelişir. Böylece (5.35) den her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\frac{e_1}{2} \left(1 + \frac{e_1}{q}\right) f'' \right]^{(p)} \right\|_r \\ & - \frac{1}{[n]} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_\Gamma \frac{[n]^2 \left(W_{n,q}(f)(\gamma) - f(\gamma) - \frac{\gamma}{2[n]} \left(1 + \frac{\gamma}{q}\right) f''(\gamma) \right)}{(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \right\|_r \\ \geq \; & \frac{1}{2} \left\| \left[\frac{e_1}{2} \left(1 + \frac{e_1}{q}\right) f'' \right]^{(p)} \right\|_r \end{aligned}$$

olacak şekilde f, q ve r ye bağlı bir n_0 sayısı vardır. Böylece her $n \geq n_0$ için

$$\left\| [W_{n,q}(f)]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r \geq \frac{1}{2[n]} \left\| \left[\frac{e_1}{2} \left(1 + \frac{e_1}{q}\right) f'' \right]^{(p)} \right\|_r$$

gerçeklenir. $n \in \{1, ..., n_0 - 1\}$ için $M_{r,n,p}(f) = [n] \left\| [W_{n,q}(f)]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r > 0$ olmak üzere

$$\left\| [W_{n,q}(f)]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r \geq \frac{M_{r,n,p}(f)}{[n]}$$

bulunur. Buradan sonuç olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$C_{r,p}(f) = \min \left\{ M_{r,1,p}(f), ..., M_{r,n_0-1,p}(f), \frac{1}{2} \left\| \left[\frac{e_1}{2} \left(1 + \frac{e_1}{q}\right) f'' \right]^{(p)} \right\|_r \right\}$$

iken

$$\left\| [W_{n,q}(f)]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r \geq \frac{C_{r,p}(f)}{[n]}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Bu kısımda elde edilen sonuçlar kompleks Baskakov operatörleri ile karşılaştırılırsa; $q > 1$ olmak üzere, kompleks $q-$Baskakov operatörleri ile elde edilen yaklaşım derecesi $\frac{1}{[n]} < \frac{q}{q^n}$ geometrik olup, Gal (2009) da kompleks Baskakov operatörleri için elde edilen $\frac{1}{n}$ derecesinden daha iyidir.

5.2 Kompleks $q-$Baskakov Operatörlerinin Stancu Genelleşmesi

Bu kısımda, (3.8) ile verilen reel $q-$Baskakov-Stancu operatöründe $x \geq 0$ yerine $z \in \mathbb{C}$ alınarak, $q-$Baskakov-Stancu operatörünün aşağıda $W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)$ ile gösterilen kompleks formu, $q > 1$ için dikkate alınarak kompakt disklerde yaklaşım ve Voronovskaja-tipli sonuç için üst nicel tahminler elde edilecektir. Ayrıca eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi bulunacaktır.

$0 \leq \alpha \leq \beta,\ n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}$ ve $q > 1$ olmak üzere kompleks $q-$ Baskakov-Stancu operatörleri

$$W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) := W_{n,q}^{[\alpha],[\beta]}(f)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n+j-1]!}{[n-1]!} q^{\frac{-j(j-1)}{2}} \times \left[\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]}, \frac{[\alpha]+[1]}{[n]+[\beta]}, \ldots, \frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])}; f \right] \frac{z^j}{([n]+[\beta])^j} \tag{5.36}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada $j = 0$ için $[n]\,[n+1] \ldots [n+j-1] = 1$ olarak alınmaktadır..

$\alpha = \beta = 0$ durumunda, (5.5) ile verilen kompleks $q-$ Baskakov operatörleri elde edilmektedir.

5.2.1 Kompleks $q-$Baskakov-Stancu operatörleri ile yaklaşım

Bu kısımda, $\overline{D_R} \cup [R, \infty)$ bölgesinde tanımlı, kompleks değerli, D_R diskinde analitik, üstel büyüme koşulunu sağlayan ve $[0, \infty)$ aralığında her basamaktan türevleri aynı pozitif sabit ile sınırlı olan f fonksiyonları için, kompakt disklerde $W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)$ operatörleri ile eş zamanlı yaklaşım için üst tahminler ve Voronovskaja-tipli bir sonuç nicel eşitsizlik ile bulunacak, ayrıca eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi elde edilecektir. Önce, ispatlarda için gerekli olan bazı lemmalar verilecektir.

Lemma 5.3 *$k,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere*

$$T_{n,k+1}^{\alpha,\beta}(z) = \frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]+[\beta]} D_q T_{n,k}^{\alpha,\beta}\left(\frac{z}{q}\right) + \frac{[n]\,z+[\alpha]}{([n]+[\beta])} T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z) \tag{5.37}$$

gerceklenir. Böylece

$$T_{n,1}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{[n]\,z+[\alpha]}{[n]+[\beta]},\qquad T_{n,2}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{z\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]+[\beta]}\frac{[n]}{[n]+[\beta]}+\left(\frac{[n]\,z+[\alpha]}{[n]+[\beta]}\right)^2$$

elde edilir.

İspat.

$$\begin{aligned}
&T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n]\,[n+1]\ldots[n+j-1]}{([n]+[\beta])^j}q^{\frac{-j(j-1)}{2}}\\
&\quad\left[\frac{[\alpha]}{([n]+[\beta])},\ldots,\frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])};e_k\right]z^j
\end{aligned}\tag{5.38}$$

yazılabilir. Teorem 2.2 de $f=e_k$, $g=e_1$ ve $x_j=\frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]},\ldots,\frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])};e_{k+1}\right]\\
&=\frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])}\left[\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]},\ldots,\frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])};e_k\right]\\
&\quad+\left[\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]},\ldots,\frac{q^{j-2}[\alpha]+[j-1]}{q^{j-2}([n]+[\beta])};e_k\right]
\end{aligned}\tag{5.39}$$

elde edilir. (5.39), $T_{n,k+1}^{\alpha,\beta}(z)$ de kullanılarak

$$T_{n,k+1}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]+[\beta]}D_qT_{n,k}^{\alpha,\beta}\left(\frac{z}{q}\right)+\frac{[n]\,z+[\alpha]}{[n]+[\beta]}T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)$$

bulunur. Buradan

$$T_{n,1}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{[n]\,z+[\alpha]}{[n]+[\beta]}$$

ve

$$T_{n,2}^{\alpha,\beta}(z)=\frac{z\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]+[\beta]}\frac{[n]}{[n]+[\beta]}+\left(\frac{[n]\,z+[\alpha]}{[n]+[\beta]}\right)^2$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. ■

Aşağıdaki Lemmada $T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)$, (5.5) operatörleri altında $e_k(z)$ fonksiyonlarının görüntüsü olan $T_{n,k}(z)$ terimleri ile ifade edilmiştir.

Lemma 5.4 *$0 \leq \alpha \leq \beta$, $j = 0, 1, ..., k$ olmak üzere n, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için*

$$T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{k-j}}{([n] + [\beta])^k} T_{n,j}(z) \tag{5.40}$$

sağlanır.

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. Eşitlik $k = 0$ için doğrudur. $k = m$ için doğru olsun. Yani;

$$T_{n,m}^{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{m-j}}{([n] + [\beta])^m} T_{n,j}(z)$$

sağlansın. Lemma 5.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} & T_{n,m+1}^{\alpha,\beta}(z) \\ = \; & \frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]+[\beta]} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{m-j}}{([n]+[\beta])^m} D_q T_{n,j}\left(\frac{z}{q}\right) \\ & + \frac{[n]\,z + [\alpha]}{[n]+[\beta]} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{m-j}}{([n]+[\beta])^m} T_{n,j}(z) \\ = \; & \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{[n]^{j+1} [\alpha]^{m-j}}{([n]+[\beta])^{m+1}} \\ & \left[\frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]} D_q T_{n,j}\left(\frac{z}{q}\right) + \frac{[n]\,z + [\alpha]}{[n]} T_{n,j}(z) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Lemma 5.2 deki

$$T_{n,j+1}(z) = \frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]} D_q T_{n,j}\left(\frac{z}{q}\right) + z T_{n,j}(z)$$

eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&T_{n,m+1}^{\alpha,\beta}(z) \\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{[n]^{j+1}[\alpha]^{m-j}}{([n]+[\beta])^{m+1}}\left[T_{n,j+1}(z)+\frac{[\alpha]}{[n]}T_{n,j}(z)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j-1}\frac{[n]^{j}[\alpha]^{m-j+1}}{([n]+[\beta])^{m+1}}T_{n,j}(z) \\
&\quad+\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{[n]^{j}[\alpha]^{m-j+1}}{([n]+[\beta])^{m+1}}T_{n,j}(z) \\
&= \sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}\frac{[n]^{j}[\alpha]^{m-j+1}}{([n]+[\beta])^{m+1}}T_{n,j}(z),
\end{aligned}
$$

bulunur, böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki lemmalar kullanılarak, merkezi orijinde olan kompakt disklerde $W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)$ kompleks $q-$Baskakov-Stancu operatörleri ile yaklaşım ve eş zamanlı yaklaşım için üst nicel tahminler aşağıdaki teoremde elde edilmiştir.

Teorem 5.5 *$q>1$ ve $1<R<\infty$ olmak üzere*

$$f:\overline{D_R}\cup[R,\infty)\to\mathbb{C}$$

fonksiyonunun her basamaktan türevleri $[0,\infty)$ aralığında aynı pozitif sabitle sınırlı ve D_R bölgesinde analitik olsun, yani her $z\in D_R$ için $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ olur ve her $k=0,1,2...$ için, $|c_k|\leq M\frac{A^k}{k!}$ şartını sağlayan $M>0$ ve $A\in\left(\frac{1}{R},1\right)$ sayılarının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda

i) $0\leq\alpha\leq\beta$, $1\leq r<\frac{1}{A}$ *ve her* $|z|\leq r$ *ve* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$M_{1,r}(f)=6\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|(k+1)!(k-1)r^k<\infty,$$

$$M_{2,r}(f)=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|kr^k<\infty,\ M_{3,r}(f)=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|kr^{k-1}<\infty$$

olmak üzere

$$\left|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)-f(z)\right|$$

$$\leq \frac{M_{1,r}(f)}{[n]+[\beta]}+\frac{[\beta]}{[n]+[\beta]}M_{2,r}(f)+\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]}M_{3,r}(f)=M_{r}^{\alpha,\beta}(f)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $0\leq\alpha\leq\beta,\ 1\leq r<r_1<\frac{1}{A}$ *ve* $M_{r_1}^{\alpha,\beta}(f)$, ***i)*** *de verildiği gibi olmak üzere, her* $|z|\leq r$ *ve* $n,\ p\in\mathbb{N}$ *için*

$$\left|\left[W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)\right]^{(p)}-f^{(p)}(z)\right|\leq\frac{M_{r_1}^{\alpha,\beta}(f)}{[n]}\frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. ***i)*** $q>1,\ |z|\leq r,\ 1\leq r\leq\frac{1}{A}$*için*

$$W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)$$

eşitliği göz önüne alınarak

$$\left|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)-f(z)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-z^k\right| \tag{5.41}$$

bulunur. Burada $\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-z^k\right|$ *ifadesi için bir üst sınır bulalım. Lemma 5.3 den*

$$T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-z^k$$

$$=\frac{qz\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]+[\beta]}D_q\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}\left(\frac{z}{q}\right)\right)+\frac{[n]z+[\alpha]}{[n]+[\beta]}\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(z)-z^{k-1}\right)$$

$$+\frac{[n]z+[\alpha]}{[n]+[\beta]}z^{k-1}-z^k$$

$$=\frac{z\left(1+\frac{z}{q}\right)}{[n]+[\beta]}qD_q\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}\left(\frac{z}{q}\right)\right)+\frac{[n]z+[\alpha]}{[n]+[\beta]}\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(z)-z^{k-1}\right)$$

$$+\left(\frac{[n]}{[n]+[\beta]}-1\right)z^k+\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]}z^{k-1}$$

bulunur. Ayrıca

$$qD_q\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}\left(\frac{z}{q}\right)\right)=\left|D_q\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(w)\right)\right|_{w=\frac{z}{q}}$$

eşitliği ve Teorem 2.4 den

$$qD_q\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}\left(\frac{z}{q}\right)\right)=\left|D_q\left(T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(z)\right)\right|\leq\left|T_{n,k-1}^{'\alpha,\beta}(z)\right|\leq\frac{k-1}{r}\left\|T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}\right\|_r \tag{5.42}$$

yazılabilir. (5.42) *kullanılarak her* $|z|\leq r$ *ve* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned}&\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-z^k\right|\\ &\leq\frac{r(1+r)}{[n]+[\beta]}\left(\frac{k-1}{r}\right)\left\|T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}\right\|_r+\frac{[n]r+[\alpha]}{[n]+[\beta]}\left|T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(z)-z^{k-1}\right|\\ &+\left|\frac{[n]}{[n]+[\beta]}-1\right|r^k+\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]}r^{k-1}\end{aligned} \tag{5.43}$$

elde edilir. Şimdi (5.43) de, $\left\|T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}\right\|_r$ *ifadesine bir üst sınır bulmak amacıyla*

$$\begin{aligned}&T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)\\ &=\sum_{j=0}^{k}\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{([n]+[\beta])^j}q^{\frac{-j(j-1)}{2}}\left[\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]},...,\frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])};e_k\right]z^j\end{aligned}$$

ifadesini dikkate alalım. Lemma 5.1 ve Teorem 2.2 den $q>1$, $|z|\leq r$, $r\geq 1$ *için*

$$\begin{aligned}&\left\|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)\right\|\\ &\leq r^j\sum_{j=0}^{k}\frac{[n][n+1]...[n+j-1]}{[n]^j}q^{\frac{-j(j-1)}{2}}\\ &\cdot\left[\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]},...,\frac{q^{j-1}[\alpha]+[j]}{q^{j-1}([n]+[\beta])};e_k\right]\\ &\leq\sum_{j=0}^{k}j!\frac{kk-1...k-j+1}{j!}r^{k-j}.r^j\\ &=r^k\sum_{j=0}^{k}kk-1...k-j+1\leq r^k(k+1)!\end{aligned} \tag{5.44}$$

elde edilir. (5.44), (5.43) de yerine yazılarak $|z| \leq r,\ r \geq 1,\ q > 1$ *ve* $0 \leq \alpha \leq \beta$ *için*

$$\begin{aligned}
&\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z) - z^k\right| \\
\leq\ & \frac{r(1+r)}{[n]+[\beta]} r^{k-2}(k+1)! + \frac{[n]r+[\alpha]}{[n]+[\beta]} \left|T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(z) - z^{k-1}\right| \\
&+ \left|\frac{[n]}{[n]+[\beta]} - 1\right| r^k + \frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]} r^{k-1} \\
\leq\ & \frac{[n]r+[\alpha]}{[n]+[\beta]} \left|T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(z) - z^{k-1}\right| + \frac{r(1+r)}{[n]+[\beta]} r^{k-2}(k+1)! \\
&+ \frac{[\beta]}{[n]+[\beta]} r^k + \frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]} r^{k-1} \\
\leq\ & r\left|T_{n,k-1}^{\alpha,\beta}(z) - z^{k-1}\right| + \frac{2r^k}{[n]+[\beta]}(k+1)! \\
&+ \frac{[\beta]}{[n]+[\beta]} r^k + \frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]} r^{k-1} \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.45) *de* $k = 2, 3...$ *alınarak devam edilirse*

$$\begin{aligned}
&\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z) - z^k\right| \\
\leq\ & \frac{2r^k}{[n]+[\beta]} \sum_{j=2}^{k} (j+1)! + \frac{[\beta]}{[n]+[\beta]} kr^k + \frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]} kr^{k-1} \\
\leq\ & \frac{6r^k}{[n]+[\beta]}(k+1)!(k-1) + \frac{[\beta]}{[n]+[\beta]} kr^k + \frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]} kr^{k-1} \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $k = 1$ *için*

$$\left|T_{n,1}^{\alpha,\beta}(z) - z\right| = \left|\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}\right| \leq \frac{[\alpha]+[\beta]r}{[n]+[\beta]}$$

olur. Böylece (5.46), (5.41) *de yerine koyularak*

$$\begin{aligned}
&\left|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)-f(z)\right| \\
\leq\ & \frac{6}{[n]+[\beta]}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|(k+1)!(k-1)r^k+\frac{[\beta]}{[n]+[\beta]}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|kr^k \\
&+\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|kr^{k-1} \\
=\ & \frac{M_{1,r}(f)}{[n]+[\beta]}+\frac{[\beta]}{[n]+[\beta]}M_{2,r}(f)+\frac{[\alpha]}{[n]+[\beta]}M_{3,r}(f)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada f, D_R *bölgesinde analitik olduğundan* $M_{2,r}(f)<\infty$ *ve* $M_{3,r}(f)<\infty$ *olur. Ayrıca* $|z|\leq r$, $1\leq r\leq\frac{1}{A}$, $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$M_{1,r}(f)=6\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|(k+1)!(k-1)r^k\leq 6M\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)(k-1)(rA)^k<\infty$$

sağlanır.

ii) $1\leq r<r_1<\frac{1}{A}$ *olmak üzere* Γ, 0 *merkezli,* r_1 *yarıçaplı çemberi göstersin* $|z|\leq r$ *ve* $\gamma\in\Gamma$ *için* $|\gamma-z|\geq r_1-r$ *olduğundan (çünkü* $|\gamma-z|\geq||\gamma|-|z||=r_1-r$ *gerçeklenir.) Teorem 2.6 ve i) den her* $|z|\leq r$ *ve* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$\begin{aligned}
\left|\left[W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)\right]^{(p)}-f^{(p)}(z)\right| &\leq \frac{p!}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(\gamma)-f(\gamma)}{(\gamma-z)^{p+1}}d\gamma\right| \\
&\leq \frac{M_{r_1}^{\alpha,\beta}(f)}{[n]}\frac{p!}{2\pi}\frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{p+1}} \\
&= \frac{M_{r_1}^{\alpha,\beta}(f)}{[n]}\frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}},
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki teoremin *i)* şıkkında $\alpha=\beta=0$ durumu; $M_r(f)$ (4.3) ile verilen toplam olmak üzere, $|c_k|\leq M\frac{A^k}{k!}$ ve $rA<1$ olduğundan $M_{1,r}^{0,0}(f)\leq M_r(f)<\infty$ bulunur, bu da Teorem 5.1 *i)* deki durumu verir. Benzer olarak *ii)* şıkkı için α, $\beta=0$ durumu, Teorem 5.1 *ii)* deki duruma indirgenir.

Aşağıda, $W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)$ kompleks $q-$Baskakov-Stancu operatörleri için kompakt disklerde Voronovskaja-tipli bir sonuç, üst nicel eşitsizlik ile elde edilmiştir.

Teorem 5.6 *$0 \leq \alpha \leq \beta$, $1 \leq r \leq \frac{1}{A}$ ve $q > 1$ olsun ve f fonksiyonu ve R, M, A sabitleri için Teorem 5.5 deki şartlar sağlansın.*

$$K_{1,r}^{\alpha,\beta}(f) = 16\sum_{k=3}^{\infty} |c_k|(k-1)(k-2)^2 k! r^k < \infty,$$

$$K_{2,r}^{\alpha,\beta}(f) = [\alpha]^2 \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \frac{(k-1)k!}{2} r^{k-2} < \infty,$$

$$K_{3,r}^{\alpha,\beta}(f) = 6[\alpha]\sum_{k=2}^{\infty} |c_k| k^2 k! r^{k-1} < \infty,$$

$$K_{4,r}^{\alpha,\beta}(f) = \left(\frac{[\beta]^2}{2} + 6[\beta]\right)\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| k^2 (k+1)! r^k < \infty,$$

$$K_{5,r}^{\alpha,\beta}(f) = [\alpha][\beta]\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| k(k-1) r^{k-1} < \infty,$$

$$K_{6,r}^{\alpha,\beta}(f) = [\beta]^2\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| k(k-1) r^k < \infty$$

olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki Voronovskaja-tipli sonuç

$$\left| W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) - f(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} f'(z) - \frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right) f''(z) \right|$$

$$\leq \frac{K_{1,r}^{\alpha,\beta}}{[n]^2} + \frac{\sum\limits_{j=2}^{6} K_{j,r}^{\alpha,\beta}(f)}{([n]+[\beta])^2}$$

gerçeklenir.

İspat. Her $z \in D_R$ için

$$W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) - f(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} f'(z) - \frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right) f''(z)$$

$$= W_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right) f''(z)$$

$$+ W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) - W_{n,q}(f)(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} f'(z)$$

yazılabilir. $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ eşitliğinden ve (5.31) den $|z|\le r$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&\left|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)-f(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}f'(z)-\frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right|\\
=&\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(T_{n,k}(z)-z^k-\frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)k(k-1)z^{k-2}\right)\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-T_{n,k}(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}kz^{k-1}\right)\right|\\
\le&\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left|E_{k,n}(z)\right|+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-T_{n,k}(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}kz^{k-1}\right|\\
\le&\frac{16}{[n]^2}\sum_{k=3}^{\infty}|c_k|(k-1)(k-2)^2k!r^k\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-T_{n,k}(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}kz^{k-1}\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (5.31) den $1\le r\le\frac{1}{A}$ için $\frac{16}{[n]^2}\sum\limits_{k=3}^{\infty}|c_k|(k-1)(k-2)^2k!r^k<\infty$ olduğunu biliyoruz. Şimdi ikinci toplam için bir üst sınır bulalım. Lemma 5.4 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-T_{n,k}(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}kz^{k-1}\\
=&\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k}W_{n,q}(e_j,z)-T_{n,k}(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}kz^{k-1}\\
=&\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k}T_{n,j}(z)\\
&+\left(\frac{[n]^k}{([n]+[\beta])^k}-1\right)T_{n,k}(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}kz^{k-1}, \qquad (5.47)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$1-\frac{[n]^k}{([n]+[\beta])^k}=\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k}{j}\frac{[n]^j[\beta]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} \qquad (5.48)$$

$$\le\sum_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{[n]}{[n]+[\beta]}\right)=\frac{k[\beta]}{[n]+[\beta]} \qquad (5.49)$$

eşitsizliği sağlanır. (5.48) , (5.47) de yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
& T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z) - T_{n,k}(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} kz^{k-1} \\
= & \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} T_{n,j}(z) + \frac{k[n]^{k-1}[\alpha]}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k-1}(z) \\
& - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\beta]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k}(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} kz^{k-1} \\
= & \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} W_{n,q}(e_j,z) + \frac{k[n]^{k-1}[\alpha]}{([n]+[\beta])^k} W_{n,q}(e_{k-1},z) \\
& - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\beta]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k}(z) \\
& - \frac{k[n]^{k-1}[\beta]}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k}(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} kz^{k-1} \\
= & \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} T_{n,j}(z) \\
& + \frac{k[n]^{k-1}[\alpha]}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k-1}(z) \pm \frac{k[n]^{k-1}[\alpha]}{([n]+[\beta])^k} z^{k-1} \\
& - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\beta]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k}(z) - \frac{k[n]^{k-1}[\beta]}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k}(z) \\
& \pm \frac{k[n]^{k-1}[\beta]}{([n]+[\beta])^k} z^k - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} kz^{k-1} \\
= & \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} W_{n,q}(e_j,z) + \frac{k[n]^{k-1}[\alpha]}{([n]+[\beta])^k} \left(W_{n,q}(e_{k-1},z) - z^{k-1} \right) \\
& - \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} \frac{[n]^j [\beta]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k} T_{n,k}(z) - \frac{k[n]^{k-1}[\beta]}{([n]+[\beta])^k} \left(T_{n,k}(z) - z^k \right) \\
& + \left(\frac{[n]^{k-1}}{([n]+[\beta])^{k-1}} - 1 \right) \frac{k[\alpha]}{[n]+[\beta]} z^{k-1} \\
& + \left(1 - \frac{[n]^{k-1}}{([n]+[\beta])^{k-1}} \right) \frac{k[\beta]}{[n]+[\beta]} z^k \qquad (5.50)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (5.20) den bildiğimiz $|W_{n,q}(e_j,z)| \leq r^j (j+1)!$ eşitliği kullanılırsa

$$\left|\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k}W_{n,q}(e_j,z)\right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k}|W_{n,q}(e_j,z)|$$

$$= \sum_{j=0}^{k-2}\frac{k(k-1)}{(k-j)(k-j-1)}\binom{k-2}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k}|W_{n,q}(e_j,z)|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-2}\frac{k(k-1)}{(k-j)(k-j-1)}\binom{k-2}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^k}r^j(j+1)!$$

$$\leq \frac{k(k-1)}{2}\frac{[\alpha]^2}{([n]+[\beta])^2}r^{k-2}(k-1)!\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-2-j}}{([n]+[\beta])^{k-2}}$$

$$\leq \frac{k(k-1)}{2}\frac{[\alpha]^2}{([n]+[\beta])^2}r^{k-2}(k-1)! \tag{5.51}$$

sağlanır ve aşağıda verilen

$$\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\frac{[n]^j[\alpha]^{k-2-j}}{([n]+[\beta])^{k-2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}\frac{[n]^j}{([n]+[\beta])^j}\frac{[\alpha]^{k-2-j}}{([n]+[\beta])^{k-2-j}}$$

$$= \left(\frac{[n]+[\alpha]}{[n]+[\beta]}\right)^{k-2} \leq 1 \tag{5.52}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca (5.22) den

$$\left|T_{n,k}(z)-z^k\right| \leq \frac{6}{[n]}r^k(k+1)!(k-1) \tag{5.53}$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıda verilen bu eşitsizlikler yani; (5.51), (5.49), (5.52) ve (5.53), (5.50) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\left|T_{n,k}^{\alpha,\beta}(z)-T_{n,k}(z)-\frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}kz^{k-1}\right| \\
\leq\ & \left|\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}\frac{[n]^{j}[\alpha]^{k-j}}{([n]+[\beta])^{k}}W_{n,q}(e_j,z)\right|+\frac{k[n]^{k-1}[\alpha]}{([n]+[\beta])^{k}}\left|W_{n,q}(e_{k-1},z)-z^{k-1}\right| \\
&+\left|\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}\frac{[n]^{j}[\beta]^{k-j}}{([n]+[\beta])^{k}}T_{n,k}(z)\right|+\frac{k[n]^{k-1}[\beta]}{([n]+[\beta])^{k}}\left|T_{n,k}(z)-z^{k}\right| \\
&+\left|\frac{[n]^{k-1}}{([n]+[\beta])^{k-1}}-1\right|\frac{k[\alpha]}{[n]+[\beta]}|z|^{k-1}+\left|1-\frac{[n]^{k-1}}{([n]+[\beta])^{k-1}}\right|\frac{k[\beta]}{[n]+[\beta]}|z|^{k} \\
\leq\ & \frac{(k-1)k!}{2}\frac{[\alpha]^{2}}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-2}+\frac{k[n]^{k-1}[\alpha]}{([n]+[\beta])^{k}}\frac{6}{[n]}r^{k-1}k!(k-2) \\
&+r^{k}(k+1)!\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k}{j}\frac{[n]^{j}[\beta]^{k-j}}{([n]+[\beta])^{k}}+\frac{k[n]^{k-1}[\beta]}{([n]+[\beta])^{k}}\frac{6}{[n]}r^{k}(k+1)!(k-1) \\
&+\frac{k(k-1)[\alpha][\beta]}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-1}+\frac{k(k-1)[\beta]^{2}}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k} \\
\leq\ & \frac{(k-1)k!}{2}\frac{[\alpha]^{2}}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-2}+6\frac{k^{2}[\alpha]}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-1}k!+\frac{k^{2}[\beta]^{2}(k+1)!}{2([n]+[\beta])^{2}}r^{k} \\
&+6\frac{k^{2}(k+1)![\beta]}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k}+\frac{k(k-1)[\alpha][\beta]}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-1}+\frac{k(k-1)[\beta]^{2}}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k} \\
\leq\ & \frac{(k-1)k!}{2}\frac{[\alpha]^{2}}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-2}+6\frac{k^{2}[\alpha]}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-1}k! \\
&+\left(\frac{[\beta]^{2}}{2}+6[\beta]\right)\frac{k^{2}(k+1)!}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k} \\
&+\frac{k(k-1)[\alpha][\beta]}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k-1}+\frac{k(k-1)[\beta]^{2}}{([n]+[\beta])^{2}}r^{k}
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki teoremde $\alpha,\ \beta = 0$ durumu; $K_r(f)$ (4.4) ile verilen toplam olmak üzere $|c_k| \leq M\frac{A^k}{k!}$ ve $rA < 1$ olduğundan $K_{1,r}^{0,0}(f) \leq K_r(f) < \infty$ bulunur, bu da Teorem 5.2 deki durumu verir.

Kompakt disklerde $W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)$ operatörleri ile yaklaşımın kesin derecesi için bir alt tahmin, aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 5.7 *$0 \leq \alpha \leq \beta$, $1 \leq r < R$ ve $q > 1$ olsun ve f fonksiyonu ve R, M, A sabitleri için Teorem 5.5 deki şartlar sağlansın. Eğer f, derecesi ≤ 0 olan bir polinom değilse, her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f) - f\right\|_r \geq \frac{C_r^{\alpha,\beta}(f)}{[n]}$$

sağlanır. Burada $C_r^{\alpha,\beta}(f)$, f, α, β, q ve r ye bağlıdır.

İspat. Her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) - f(z)$$

$$= \frac{1}{[n]}\left\{\frac{[n]}{[n]+[\beta]}([\alpha]-[\beta]z)f'(z) + \frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right.$$

$$+\frac{1}{[n]}[n]^2\left(W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) - f(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}f'(z)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{[n]}\left\{([\alpha]-[\beta]z)f'(z) + \frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right.$$

$$+\frac{1}{[n]}[n]^2\left(W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) - f(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]}f'(z)\right)$$

$$\left.+\frac{1}{[n]}[n]^2\left(-\frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z) - \frac{[\beta]([\alpha]-[\beta]z)}{[n]([n]+[\beta])}f'(z)\right)\right\}$$

yazılabilir. $G_{k,n}(z)$

$$\begin{aligned} G_{k,n}(z) \quad : \quad &= W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z) - f(z) - \frac{[\alpha]-[\beta]z}{[n]+[\beta]} f'(z) \\ &-\frac{z}{2[n]}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z) - \frac{[\beta]([\alpha]-[\beta]z)}{[n]([n]+[\beta])}f'(z) \end{aligned} \tag{5.54}$$

ile belirtilsin.

$$\|F+G\|_r \geq |\|F\|_r - \|G\|_r| \geq \|F\|_r - \|G\|_r$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f) - f\right\|_r \\ \geq \quad & \frac{1}{[n]}\left\|([\alpha]-[\beta]e_1)f' + \frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r - \frac{1}{[n]}[n]^2\|G_{k,n}\|_r \end{aligned}$$

elde edilir. f, derecesi ≤ 0 olan bir polinom olmadığından $D_{R,}$dairesinde

$$\left\|([\alpha]-[\beta]e_1)f' + \frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r > 0$$

sağlanır. Gerçekten, aksini kabul edelim $|z| \leq r$ için

$$([\alpha]-[\beta]z)f'(z) + \frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z) = 0$$

alalım. $0 = \alpha \leq \beta$ veya $0 < \alpha \leq \beta$ durumlarını inceleyelim. ilk durumda $y(z) = f'(z)$ ile belirtilirse

$$-[\beta]zy(z) + \frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)y'(z) = 0$$

olur. Bu denklemin çözümü olan $y(z)$, $D_{R,}$ de analitik bir fonksiyondur. $z \neq 0$ alınırsa elde edilen son denklem $|z| \leq r$ için

$$-[\beta]y(z) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)y'(z) = 0 \tag{5.55}$$

şeklindedir. $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, (5.55) denkleminde yerine koyularak her $k = 0, 1, ...$ için $b_k = 0$ elde edilir. Böylece $|z| \leq r$ de $y(z) = 0$ olur, Teorem 2.8 den D_R de $y(z) = 0$ olur. Bu ise hipotezle çelişir.

$0 < \alpha \leq \beta$ durumunda ise

$$([\alpha]-[\beta]z)f'(z) + \frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z) = 0$$

denkleminde $y(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ yerine yazılarak benzer şekilde çelişkiye düşülür.

Teorem 5.6 dan

$$
\begin{aligned}
& [n]^2\left\|G_{k,n}\right\|_r \\
\leq\ & [n]^2\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)-f-\left(\frac{[\alpha]-[\beta]e_1}{[n]+[\beta]}\right)f'-\frac{e_1}{2[n]}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r \\
& +\left\|[\beta]([\alpha]-[\beta]e_1)f'\right\|_r \\
\leq\ & \sum_{j=1}^{6}K_{j,r}^{\alpha,\beta}(f)+[\beta]([\alpha]+[\beta]r)\left\|f'\right\|_r
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $n\to\infty$, iken $q>1$ için $\frac{1}{[n]}\to 0$ dır. Bu durumda f, r, α, β ve q ya bağlı olacak şekilde bir n_0 vardır, öyleki her $n\geq n_0$ için

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{[n]}\left\|([\alpha]-[\beta]e_1)f'+\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r-\frac{1}{[n]}[n]^2\left\|G_{k,n}\right\|_r \\
\geq\ & \frac{1}{2[n]}\left\|([\alpha]-[\beta]e_1)f'+\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r,
\end{aligned}
$$

sağlanır. Böylece her $n\geq n_0$ için

$$\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)-f\right\|_r\geq\frac{1}{2[n]}\left\|([\alpha]-[\beta]e_1)f'+\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r$$

gerçeklenir. $n\in\{1,...,n_0-1\}$ için $A_r(f)=[n]\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)-f\right\|_r>0$ olmak üzere

$$\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)-f\right\|_r\geq\frac{A_r(f)}{[n]}$$

dir. Buradan sonuç olarak her $n\in\mathbb{N}$ için

$$C_r^{\alpha,\beta}(f)=\min\left\{A_{r,1}(f),...,A_{r,n_0-1}(f),\tfrac{1}{2}\left\|([\alpha]-[\beta]e_1)f'+\tfrac{e_1}{2}\left(1+\tfrac{e_1}{q}\right)f''\right\|_r\right\}$$

iken

$$\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)-f\right\|_r\geq\frac{C_r^{\alpha,\beta}(f)}{[n]}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 5.7 ve Teorem 5.5 birlikte düşünüldüğünde f, derecesi ≤ 0 olan bir polinom değil ise kompakt disklerde $W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)$ kompleks Baskakov-Stancu operatörleri ile yaklaşımın kesin derecesi $\frac{1}{[n]}$ olur. Bunu aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

Sonuç 5.2 *$0 \leq \alpha \leq \beta$, $1 \leq r < \frac{1}{A}$ ve $q > 1$ olsun ve f fonksiyonu ve R, M, A sabitleri için Teorem 5.5 deki şartlar sağlansın. Eğer f, derecesi ≤ 0 olan bir polinom değilse, her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\left\|W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f) - f\right\|_r \sim \frac{1}{[n]}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler, f, α, β, q ve r ye bağlıdır.

$W_{n,q}^{\alpha,\beta} f(z)$ operatörleri ile eş zamanlı yaklaşımın kesin derecesi aşağıdaki teoremde elde edilmiştir.

Teorem 5.8 *$q > 1$ olsun ve f fonksiyonu ve R, M, A sabitleri için Teorem 5.5 deki şartlar sağlansın. $0 \leq \alpha \leq \beta, 1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ ve $p \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer f derecesi $\leq p-1$ olan bir polinom değilse, her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\left\|\left[W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)\right]^{(p)} - f^{(p)}\right\|_r \sim \frac{1}{[n]}$$

sağlanır. Burada denklikteki sabitler f, r, r_1, q, α, β ve p ye bağlıdır.

İspat. Teorem 5.5 $ii)$ de eş zamanlı yaklaşım için üst tahmin elde edilmişti. O halde $\left\|[W_{n,q}(f)]^{(p)} - f^{(p)}\right\|_r$ ifadesine bir alt tahmin bulunursa ispat tamamlanır. Benzer şekilde $1 \leq r < r_1 < \frac{1}{A}$ olmak üzere Γ, 0 merkezli, r_1 yarıçaplı çemberi göstersin $|z| \leq r$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $|\gamma - z| \geq r_1 - r$ sağlanır. Teorem 2.6 dan

$$\left[W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)(z)\right]^{(p)} - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{W_{n,q}^{\alpha,\beta} f(\gamma) - f(\gamma)}{(\gamma - z)^{p+1}} d\gamma \tag{5.56}$$

olur. Ayrıca (5.54) den her $\gamma \in \Gamma$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & W_{n,q}^{\alpha,\beta} f(\gamma) - f(\gamma) \\ = \; & \frac{1}{[n]}\left\{([\alpha] - [\beta]\gamma) f'(\gamma) + \frac{\gamma}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{q}\right) f''(\gamma) + [n]^2 G_{k,n}(\gamma)\right\} \end{aligned} \tag{5.57}$$

yazılabilir. (5.57), (5.56) da yerine yazılarak

$$
\begin{aligned}
&\left[W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f,z)\right]^{(p)} - f^{(p)}(z) \\
= &\left\{\frac{1}{[n]}\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{([\alpha]-[\beta]\gamma)f'(\gamma)+\frac{\gamma}{2}\left(1+\frac{\gamma}{q}\right)f''(\gamma)}{(\gamma-z)^{p+1}}d\gamma\right. \\
&\left.+\frac{1}{[n]}\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[n]^2 G_{k,n}(\gamma)}{(\gamma-z)^{p+1}}d\gamma\right\} \\
= &\frac{1}{[n]}\left\{\left[([\alpha]-[\beta]\gamma)f'(\gamma)+\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right]^{(p)}+\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[n]^2 G_{k,n}(\gamma)}{(\gamma-z)^{p+1}}d\gamma\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Norma geçilerek

$$
\begin{aligned}
\left\|\left[W_{n,q}^{\alpha,\beta}(f)\right]^{(p)} - f^{(p)}\right\|_r \geq\ & \frac{1}{[n]}\left\{\left\|\left[([\alpha]-[\beta]e_1)f'+\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right]^{(p)}\right\|_r - \right. \\
&\left. -\frac{1}{[n]}\left\|\frac{p!}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{[n]^2 G_{k,n}(\gamma)}{(\gamma-z)^{p+1}}d\gamma\right\|_r\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada son terim için Teorem 5.6 dan

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{p!}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{[n]^2 G_{k,n}(\gamma)}{(\gamma-z)^{p+1}}d\gamma\right\|_r &\leq \frac{p!}{2\pi}\frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{p+1}}[n]^2\left\|G_{k,n}\right\|_{r_1} \\
&\leq \frac{p! r_1}{(r_1-r)^{p+1}}\left[\sum_{j=1}^{6}K_{j,r_1}^{\alpha,\beta}(f)+[\beta]([\alpha]+[\beta]r_1)\left\|f'\right\|_{r_1}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği gerçeklenir. Ayrıca

$$
\left\|\left[([\alpha]-[\beta]e_1)f'+\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right]^{(p)}\right\|_r > 0
$$

olur. Gerçekten; $\left\|\left[([\alpha]-[\beta]e_1)f'+\frac{e_1}{2}\left(1+\frac{e_1}{q}\right)f''\right]^{(p)}\right\|_r = 0$ olduğunu kabul edelim. $Q_{p-1}(z)$ polinomunun derecesi $\leq p-1$ olmak üzere

$$
\left[([\alpha]-[\beta]z)f'(z)+\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)f''(z)\right]^{(p)} = Q_{p-1}(z), |z| \leq r
$$

yazılabilir. $y(z) = f'(z)$ ile gösterilirse

$$
\left[([\alpha]-[\beta]z)y(z)+\frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{q}\right)y'(z)\right]^{(p)} = Q_{p-1}(z)
$$

olur. Bu denklemde $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ yazıldığında $k \geq p-1$ için $b_k = 0$ bulunur, yani $y(z)$ polinomunun derecesi $\leq p-2$ dir. Bu durumda f nin derecesi $\leq p-1$ olan bir polinom olması gerekir ve hipotezle çelişir. İspatın devamı Teorem 5.7 nin ispatına benzer olarak tamamlanır. ■

Uyarı 5.1 $\alpha = \beta = 0$ *için Teorem 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, önceki kısımda ispatlanan Teorem 5.1, 5.2, 5.3 ve 5.4 sonuçlarına indirgenir.*

6. SONUÇ

Weierstrass'ın 1885 yılında verdiği; cebirsel polinomların kapalı bir kapalı bir aralıkta sürekli olan fonksiyonlara düzgün yakınsadığını gösteren teoremi, yaklaşım teorisinin temelini oluşturur. Bernstein 1912'de Weierstrass'ın bu teoremini; toplam biçiminde, lineer ve pozitif olan operatörler dizisi inşa ederek ispat etmiştir. 1953 yılında Korovkin, basit ve kolayca uygulanabilen bir yöntem ile, sürekli bir fonksiyona lineer pozitif operatör dizileri ile düzgün yaklaşımın yeter şartlarını veren bir teorem ispatlamıştır. Korovkin teoremleri lineer pozitif operatörler teorisinin gelişmesine önemli ölçüde katkı sağlamıştır.

Yaklaşım teoride nitel ve nicel olmak üzere iki temel araştırma problemi vardır. Kompleks değerli fonksiyonlara yaklaşımda nitel sonuçlar Wright (1930), Kantorovich (1931), Bernstein (1943), Lorentz (1953) ve Tonne (1969) tarafından çalışılmıştır. Gal (2009), bazı lineer pozitif operatör dizisilerinin kompleks genelleştirilmelerini inşa ederek nicel yaklaşım sonuçları elde etmiştir.

Günümüzde, $q-$analizin metodları kullanılarak oldukça yoğun bir biçimde lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri araştırılmaktadır. Bu sonuçlara göre, $q-$sayıları kullanılarak oluşturulan operatör dizileri, klasik operatör dizilerine göre, yaklaşımın hızını bulma açısından daha etkilidir. 1987 yılında Lupaş, ilk olarak Bernstein operatörlerinin $q-$genelleşmesini tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir.

Bu tezde, kompleks $q-$Baskakov operatörleri ve Stancu genelleşmeleri tanımlanarak, kompakt disklerde eş zamanlı yaklaşım, Voronovskaja-tipli sonuç için nicel tahminler ve yaklaşımın kesin derecesi elde edilmiştir. Elde edilen bu yaklaşım sonuçlarının hem teori hem de uygulama alanında önemli gelişmeler ortaya çıkaracağı beklenmektedir.

KAYNAKLAR

Aral, A. and Acar, T. 2012. Voronovskaja type result for $q-$derivative of $q-$Baskakov operators. Journal of Applied Functional Analysis, vol. 7(4), 321-331.

Aral, A. and Gupta, V. 2009. On $q-$Baskakov type operators. Demonstratio Math. 42 (1), 109–122.

Aral, A. and Gupta, V. 2010. On the Durrmeyer type modification of the $q-$Baskakov type operators. Nonlinear Anal. 72 (3-4), 1171–1180.

Aral, A. and Gupta, V. 2011. Generalized $q-$Baskakov operators, Math. Slovaca, 61(4), 619–634.

Atakut, Ç. 1997. On the approximation of functions together with derivatives by certain linear positive operators. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 46(1-2), 57–65.

Baskakov, V. A. 1957. An example of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions. Doklady Akademii Nauk SSSR 112, 249–251.

Başkan, T. 2010. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Nobel Yayınları. Bursa.

Bernstein, S. 1912-1913. "Démonstration du théorème de Weierstrass, fondeé sur le calcul des probabilités". Commun. Soc. Math. Kharkow. 13(2), 1-2.

Bernstein, S.N. 1943. On the domains of convergence of polynomials (in Russian). Izv. Acad. Nauk., SSSR, ser. math.,7, 49-88.

Büyükyazıcı, İ. and Atakut, Ç. 2010. On Stancu type generalization of $q-$Baskakov operators, Mathematical and Computer Modelling 52(5-6), 752-759.

DeVore, R. A. and Lorentz, G. G. 1993. Constructive approximation. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 303. Springer-Verlag, Berlin.

Dzyadyk, V. K. and Shevchuk, I. A. 2008. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials. Walter de Gruyter GmbH& Co. KG, 10785 Berlin, Germany.

Ernst, T. 2000. The history of $q-$calculus and a new method. U.U.U.D.M Report. 16, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Upsala University.

Finta, Z. and Gupta, V. 2010. Approximation properties of $q-$Baskakov operators. Cent. Eur. J. Math. 8 (1), 199-211.

Gadzhiev, A. D. 1974. The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P. Korovkin. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 218 (5), 1001-1004 [in Russian]; Sov. Math. Dokl. 15 (5), 1433-1436.

Gal, S. G. 2009. Approximation by complex Bernstein and convolution type operators. Series on Concrete and Applicable Mathematics, 8. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

Gal, S. G., Gupta, V., Verma, D. K. and Agrawal, P. N. 2012. Approximation by complex Baskakov-Stancu operators in compact disks. Rend. Circ. Mat. Palermo 61(2), 153-165.

Gupta, V. and Heping, W. 2008. The rate of convergence of $q-$Durrmeyer operators for $0 < q < 1$. Math. Methods Appl. Sci. 31(16), 1946-1955.

Gupta, V. and Radu, C. 2009. Statistical approximation properties of $q-$Baskakov-Kantorovich operators, Cent. Eur. J. Math. 7(4), 809-818

Gupta, V. and Verma, D.K. 2012. Approximation by complex Favard-Szasz-Mirakjan-Stancu operators in compact disks. Mathematical Sciences, 6, Art. 25, p. 8.

Gupta, V., Kim, T. and Lee, S. H. 2012. $q-$analogue of a new sequence of linear positive operators. Journal of Inequalities and Applications. 144, 1-9.

Kantorovich, L.V. 1931. Sur la convergence de la suite de polynômes de S. Bernstein en dehors de l'interval fundamental. Bull. Acad. Sci. URSS, 1103-1115.

Korovkin, P. P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 90: 961-964.

Lorentz, G. G. 1953. Berstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto.

Lorentz, G. G. 1987. Approximation of Functions, Chelsea Publ., New York.

Lupaş, A. 1967. Some properties of the linear positive operators, II. Mathematica (Cluj) 9 (32), 295–298.

Lupaş, A. 1987. A $q-$analogue of the Bernstein operator. University of Cluj-Napoca Seminar on Numerical and Statistical Calculus Preprint 9, 85-92.

Maheshwari, P. and Sharma, D. 2012. Approximation by $q-$Baskakov-Beta-Stancu operators. Rend. Circ. Mat. Palermo(2), 61(2), 297–305.

Mahmudov, N.I. and Gupta, V. 2012. Approximation by genuine Durrmeyer Stancu polynomials in compact disks. Math. Comput. Model. 55(3-4), 278-285.

Özden, D. S., Tunca, G. B. and Aral, A. 2014. Approximation by complex $q-$Baskakov operators in compact disks. Fasc. Mathematica, Tom XXI, No. 1, 167-181.

Phillips, G. M. 1997. Bernstein polynomials based on the q-integers, Annals of Numerical Mathematics, vol 4, no. 1-4, pp.511-518.

Phillips, G. M. 2003. Interpolation and approximation by polynomials. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 14. Springer-Verlag, New York.

Sikkema, P. C. 1970. On some linear positive operators. Indagationes Mathem., 32, 327-337.

Stancu, D.D. 1969. On a generalization of Bernstein polynomials (in Romanian), Studia Univ. Babes-Bolyai, ser. math., 14(2), 31-44.

Tonne, P. C. 1969. On the convergence of Bernstein polynomials for some unbounded analytic functions. Proc. Am. Math. Soc., 22, 1-6.

Weierstrass, K. 1885. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Weranderlichen, Sitzungsbericte der Akademie zu Berlin, pp.633-639.

Voronovskaja, E. W. 1932. Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les pôlynomes de M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 79-85.

Wright, E. M. 1930. The Bernstein approximation polynomials in the complex plane. J. London Math. Soc. 5(4), 265-269.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Dilek SÖYLEMEZ ÖZDEN
Doğum Yeri	:	Sivas
Doğum Tarihi	:	03. 10. 1983
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Sivas Lisesi (2001)
Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2009)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi, Elmadağ Meslek Yüksekokulu (2010−)

Yayınları:

•**Özden, D. S., Tunca, G. B. and Aral, A.** 2014. Approximation by Complex $q-$Baskakov Operators. Oradea Fascicola Mathematica. Tom XXI, Issue No. 1, 167-181.