

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİNCİ AŞAMASI FAZ TIPLI OLAN BİR TANDEM KUYRUK MODELİNİN  
ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fevziye MAHMUTOĞLU GÜNDOĞDU**

**İstatistik Anabilim Dalı**

**OCAK 2015  
SAMSUN**





T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ AŞAMASI FAZ TIPLI OLAN BİR TANDEM KUYRUK MODELİNİN  
ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fevziye MAHMUTOĞLU GÜNDOĞDU  
(08210012)

Tezin Savunma Tarihi : 13 Ocak 2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Vedat SAĞLAM



**Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**İstatistik Anabilim Dalında**  
**Fevziye MAHMUTOĞLU GÜNDOĞDU Tarafından Hazırlanan**  
**İKİNCİ AŞAMASI FAZ TIPLI OLAN BİR TANDEM KUYRUK**  
**MODELİNİN ANALİZİ**

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 13/01/2015 tarihinde yapılan sınav ile  
**YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

**Başkan** : **Doç. Dr. Yüksel ÖNER** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Jüri Üyeleri** : **Doç. Dr. Kamil ALAKUŞ** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Doç. Dr. Vedat SAĞLAM** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Erol TERZİ** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Elif BULUT** .....  
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**13/01/2015**

**Prof. Dr. Hüseyin DEMİR**  
Enstitü Müdürü



## **ÖNSÖZ**

Çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Doç. Dr. Vedat SAĞLAM' a, Araş. Gör. Murat SAĞIR ve Araş. Gör. Erdiç YÜCESOY' a ve her zaman destek ve teşvikiyle yanımda olan eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak 2015

Fevziye MAHMUTOĞLU GÜNDOĞDU



# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

ÖNSÖZ .....	v
İÇİNDEKİLER .....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	xi
İKİNCİ AŞAMASI FAZ TİPLİ OLAN BİR TANDEM KUYRUK MODELİNİN ANALİZİ .....	xiii
ÖZET .....	xiii
ANALYSIS OF A TANDEM QUEUEING MODEL WITH PHASE TYPE SECOND STAGE .....	xv
ABSTRACT.....	xv
1. GİRİŞ .....	1
1.2 Tezin Amacı .....	1
1.3 Literatür Araştırması .....	2
2. GENEL BİLGİLER.....	3
3. MARKOV ZİNCİRLERİ .....	7
4. STOKASTİK KUYRUK SİSTEMLERİ.....	17
4.1 Kuyruk Sistemlerinin Genel Yapısı .....	17
4.2 Tek Kanallı Markovian Kuyruk Sistemleri ve Performans Ölçüleri.....	19
5. FAZ TİPİ DAĞILIMLAR.....	33
5.1 Faz Tipi Dağılımlarda Seri ve Paralel Bileşenler .....	33
5.2 Erlang-2 Dağılımı.....	34
5.3 Hiperüstel Dağılım .....	36
6. İKİNCİ AŞAMASI FAZ TİPLİ VE HETEROJEN KANALLI OLAN BİR TANDEM KUYRUK MODELİ .....	41
6.1 Geçiş Olasılıkları .....	43
6.2 Kaybolma Olasılığı .....	43
6.3 Performans Ölçüleri .....	44
7. SONUÇ.....	47
KAYNAKLAR .....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51



## ŞEKİLLER LİSTESİ

	<b><u>Sayfa</u></b>
Şekil 2.1. Sayma sürecinin örneklem fonksiyonu	5
Şekil 3.1. Markov zincirinin oturma süreleri	10
Şekil 4.1. Tandem kuyruk modeli	25
Şekil 4.2. Jackson teoremi $r = 2$ ve $c = 1$ durumu	26
Şekil 5.1. Bir üstel hizmet fazı	34
Şekil 5.2. Tandem biçiminde iki üstel faz	35
Şekil 5.3. Paralel biçiminde iki üstel faz	37
Şekil 5.4. Paralel biçimde çoklu üstel fazlar	38
Şekil 6.1. Stokastik model	41



## SİMGELER VE KISALTMALAR

- $A(t)$  : Sisteme giriş akımının dağılım fonksiyonu
- $B(t)$  : Servis süresinin dağılım fonksiyonu
- $E(N) = L$  : Sistemdeki ortalama müşteri sayısı
- $E(N_q) = L_q$  : Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı
- $E(W)$  : Sistemde ortalama bekleme süresi
- $E(W_q)$  : Kuyrukta ortalama bekleme süresi
- $E_r$  : Erlang-r dağılımı
- FIFO** : İlk giren ilk çıkar
- G** : Keyfi servis süresi
- GI** : Keyfi giriş akımı
- M** : Markovian dağılım
- M / M / n** : Gelişler arası sürenin ve hizmet sürelerinin üstel dağılım olduğu ve  $n$  tane homojen servis sağlayıcısına sahip paralel servis sistemi
- $N(t)$ , :  $t$  süresinde sistemdeki müşteri sayısı
- $N_q(t)$ , :  $t$  süresinde kuyruktaki müşteri sayısı
- W** : Müşterinin sistemde kalma süresi
- W<sub>q</sub>** : Müşterinin kuyrukta bekleme süresi
- $\lambda$  : Birim zamanda sisteme gelen ortalama müşteri sayısını gösterir (doğum parametresi)
- $\mu$  : Birim zamanda her bir kanaldan giden ortalama müşteri sayısını gösterir (ölüm parametresi)
- B.A.S** : Bağımsız artımlı süreç



# İKİNCİ AŞAMASI FAZ TIPLI OLAN BİR TANDEM KUYRUK MODELİNİN ANALİZİ

## ÖZET

Bu tezde iki aşamalı bir kuyruk modeli analiz edilmiştir. Bu aşamalardan birincisinde  $\mu_1$  parametrelili üstel dağılımlı tek hizmet kanalı bulunmakta ve kanal önünde beklemeye müsaade edilmemekte, ikinci aşamada ise iki fazlı paralel hizmet kanalları bulunmaktadır. Bu paralel kanalların hizmet süreleri  $\mu_2$  parametrelili üstel hizmet süresine sahiptir. Sisteme gelen müşteri eğer birinci aşamadaki hizmet kanalı boş ise hizmetini alır. Eğer dolu ise sistemden ayrılır. Böylece birinci kaybolma gerçekleşmiş olur. Birinci aşamada hizmetini tamamlayan bir müşteri, eğer ikinci aşamadaki paralel faz kanallarının ikisinde boş ise hizmetini almak için ikinci aşamadaki faz kanallarından birincisini veya ikincisini sırası ile  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$ , ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ) olasılıkları ile tercih eder. Eğer ikinci aşamadaki paralel faz kanallardan herhangi biri dolu ise müşteri sistemi terk eder ve ikinci kayıp meydana gelir. Birinci ve ikinci aşamada hizmetini tamamlayan müşteri sistemden ayrılır. Böylesi modelin diferansiyel ve fark denklemleri bulunmuş ve denge durumu (steady-state) olasılıkları yardımı ile sistemde ortalama müşteri sayısı ve sistemde ortalama bekleme süreleri elde edilmiştir. Birinci ve ikinci aşamadaki müşteri sayılarının bağımlı olduğu gösterildi. Ayrıca birinci ve ikinci kaybolma olasılıkları hesaplandı. Birinci aşamadaki kaybolma olasılığının sadece geliş akımına ve birinci aşamadaki hizmet süresine bağlı olduğu, ancak ikinci aşamadaki hizmet süresine ve  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  olasılıklarına bağlı olmadığı gösterildi. İkinci aşamadaki kaybolma olasılığı; olasılığının geliş akımına, birinci aşamadaki hizmet süresine ve ikinci aşamadaki paralel faz kanallarının hizmet sürelerine bağlı olduğu, fakat  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  olasılıklara bağlı olmadığı gösterildi.

**Anahtar Kelimeler:** Üç Boyutlu Markov Zinciri; Tandem Kuyruk Sistemi; Poisson Akımı; Faz Dağılımları; Kaybolma olasılığı.



## ANALYSIS OF A TANDEM QUEUEING MODEL WITH PHASE TYPE SECOND STAGE

### ABSTRACT

In this thesis a two-stage queuing model is analyzed. In the first of these two stages there is one service channel having exponential service time with  $\mu_1$  parameter and there is no waiting room in front of this channel. In the second stage there are two parallel service channels with exponential service time having parameter  $\mu_2$ . The incoming customer has service if the first channel in the first stage is available else the customer leaves the system, so the first loss occurs. When a customer has service in the first stage chooses first or second channels in the second stage with  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ , ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ) probabilities respectively if both the channels in second stage is empty. If any of two channels in the second stage is busy then the customer leaves the system so the second loss occurs. A customer who has service in both stages leaves the system. The differential and difference equations of this model is obtained, mean customer number and mean waiting time in the system is found by the help of steady-state probabilities. It is shown that the customer numbers in first and second stages are dependent. First and second loss probabilities are calculated. It is figured out that the first loss depends on the arrival rate and service time in the first stage yet not depends on  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  probabilities and the service time in the second stage. On the other hand it is shown that the second loss depends on arrival rate and both the service times of the channels in both stages but independent from  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  probabilities.

**Keywords:** Three Dimension Markovian Chains; Tandem Queuing System; Poisson Current; Phase Distributions; Loss Probability.



## 1. GİRİŞ

Bir hizmet için beklemek günlük yaşantının bir parçasıdır. Örneğin, restoranlarda yemek için beklemek, hastanelerde hasta kuyruğunda beklemek, marketlerde ödeme yapmak için beklemek, araçların trafik ışıklarında beklemesi ve her türlü depolama işlemleri gibi (Pala ve diğ., 1966).

Kuyruk teorisi, kuyruktaki ya da sistemdeki ortalama müşteri sayısı ve bir müşterinin sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme süresini içeren performans ölçülerini hesaplamayı ve bunları üretmeyi sağlar. Aynı zamanda kuyruk teorisi belirli kısıtlar altında bu performans ölçülerinin optimizasyonunu inceler.

Kuyruk teorisinin temeli, Danimarkalı A. K. Erlang tarafından 1909 yılında atılmıştır (Gross ve Harris, 1974).

Kuyruk teorisinin daha yaygın kullanım olanakları ikinci Dünya Savaşı sonrasında ortaya çıkmıştır. 1917 yılından sonar birçok bilim adamı Erlang'ın araştırmalarının değerlendirilmesi niteliğinde eserler vermiştir (Saaty ve Thomas, 1961).

1930 ve 1950 yılları arasında Crommelin, Pollaczek, Khintchine, Kolmogorov ve Palm gibi ünlü bilim adamları kuyruk teorisinin gelişimine katkılarda bulunmuşlardır (Torun, 2002). Kuyruk modelleme yolları ve kuyrukta istatistiksel çıkarımlar üzerine kapsamlı bir araştırma Bhat (2008) tarafından yapılmıştır (Zobu, 2012).

1950 yılından itibaren bütün işletmecilik alanlarında; ulaştırma sektöründe, sanayide, sağlık hizmeti sektöründe, bankacılıkta ve stoklamada kuyruk teorisi yaygın olarak kullanım alanına erişmiştir.

### 1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada literatürde olmayan iki aşamalı ve faz tipli bir stokastik kuyruk modeli, kolmogorov diferansiyel denklemleri yardımıyla oluşturuldu. Bu denklemlerin limit dağılımları elde edildi, geçiş olasılıklarına ilişkin fark denklemleri çözüldü. Daha sonra kaybolma olasılıkları ve sistemin performans ölçüleri elde edildi.

### 1.3 Literatür Araştırması

Tek fazlı kuyruk sistemleri, Kuyruk Teorisinin önemli bölümlerinden birisini teşkil etmektedir. Çok daha karmaşık kuyruk sistemleri modelleyebilmek için hypoexponential ve hiperexponential dağılımların beraber kullanıldığı faz tipli dağılımlar oluşturulabilir. Kompleks olasılıklar ve kompleks oranların matematiksel olarak ifade edilmeye başlanmasıyla birlikte Cox (1955), rasyonel bir Laplace dönüşümünün üstel fazların bir dizisi olarak ifade edilebileceğini göstermiştir. Stewart (2009), herhangi bir fazda hizmet tamamlandıktan sonra diğer faza geçerek hizmetini seri alacak şekilde ard arda hizmetlerin serisi olarak hizmet dizisini tanımlamıştır. Coxian dağılımlarının başka bir geniş alt kümesi Neuts (1975) tarafından tanımlanan, Erlang dağılımının olasılıksal genellemesi olarak değerlendirilmesi mümkün, faz tipli dağılımlardır. Marie (1980), hizmet süreleri Cox'un genelleştirilmiş aşama metoduna uyan ve Poisson giriş akımları yük bağımlı kuyruk ile belirlenmiş modelin denge durumunu incelemiştir. Bu modelde çözüm bu modelle aynı denge durumuna sahip doğum - ölüm süreci ile elde edilmiştir. Sağlam ve Zobu (2013), iki aşamalı tandem kuyruk modelinin performans ölçülerini ve bunların optimal değerlerini elde etmişler ve ayrıca birinci ve ikinci aşamadaki müşteri sayılarının bağımsızlığını göstererek, bununla birlikte hizmet sürelerinin optimal sıralamasını bulmuşlardır. Zobu ve Sağlam (2013) tip-1 ve tip-2 olasılıklarına bağlı olarak hizmet süresi Coxian giriş akımları Poisson dağılımlı iki kanallı bir hizmet sistemine ait optimal örneklem genişliğini elde etmiştir. Zobu ve ark. (2013) her iki kanalda da beklemenin olmadığı iki kanallı heterojen bir Stokastik kuyruk modelini analiz ettiler; Birinci kanalda hizmetini tamamlayan bir müşteri ikinci kanal dolu olduğunda birinci kanalı  $Q$  olasılığı ile blokluyor veya  $1-Q$  olasılıkla sistemi terk ediyor demişlerdir. Bu modelde müşteri sayısının beklenen değeri ve kaybolma olasılıkları hesaplanmıştır. Parametreleri minimize eden optimal kanal sıralaması bulunmuştur. Sağlam ve ark. (2014) faz tipli kuyruk modellerinden olan Coxian kuyruk modelinin etkinlik ölçülerini z-dönüşümü ve Laplace dönüşümü yardımıyla geniş bir biçimde incelemiştir.

Bu çalışmada iki aşamalı birinci aşaması tek kanallı ikinci aşaması paralel faz kanallarından oluşan iki aşamalı bir tandem kuyruk modelinin analizi yapıldı.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde stokastik süreçlere ait aşağıdaki genel tanımlar verilecektir.

**Tanım 2.1**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olasılık uzayı olsun. Burada  $\Omega$ , örnek uzayı;  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma$  – cebir;  $P$  de olasılık ölçüsüdür. Bu uzayda tanımlanan  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  tesadüfi değişkenler ailesine *stokastik süreç* denir. Burada  $t$ –zamanı gösteren bir parametredir.

**Tanım 2.2.**  $\xi(t)$  sürecinin alabileceği değerler kümesi  $\mathfrak{R}_x$  ile,  $t$  parametresinin alabileceği değerler kümesi de  $T$  ile gösterilirse  $\mathfrak{R}_x$ 'e durum uzayı,  $T$ 'ye ise *indis kümesi* ya da *parametre kümesi* denir.

Böylece  $\mathfrak{R}_x = (-\infty, +\infty)$ , ve  $T = [0, \infty)$  yazılır.

Eğer  $T = (-\infty, +\infty)$  ise  $\xi(t)$ 'ye *stokastik fonksiyon* denir ve  $\{\xi, T\}$  ile ifade edilir.

Stokastik süreçler durum uzayına ve parametre kümesine göre dört kısma ayrılır:

1. Kesikli parametrelili kesikli durum uzaylı stokastik süreç.

- Bir ülkede oluşan yıllık nüfus artışı miktarı
- Bir fabrikanın aylık enerji tüketim miktarı

2. Kesikli parametrelili sürekli durum uzaylı stokastik süreç.

- Bir serada yetiştirilen ürünün aylık ölçülen boy uzunluğu

3. Sürekli parametrelili kesikli durum uzaylı stokastik süreç .

- Belli zaman aralığında ölçülen ortalama rüzgar hızı.
- Bir laboratuvarın bir saat boyunca ölçülen ortalama ısısı

4. Sürekli parametrelili sürekli durum uzaylı stokastik süreçtir.

- Her an ölçülen rüzgar hızı,
- Sürekli üretim yapan bir kimyasal işlem ünitesindeki sıcaklık,basınç gibi değerlerin her an izlenmesi.

$\xi(t) = k$  olduğu varsayalım  $k \in \mathfrak{R}_x$  olur. Bu durumda stokastik süreç,  $t$  anında  $k$  durumundadır. Stokastik süreç tesadüfi değişken kavramının genel hali, tesadüfi değişken kavramı da stokastik süreç kavramının özel halidir.  $t$  parametrelili  $t = t_0$  gibi bir sabite eşit olduğunda stokastik süreç  $\xi(t_0)$  gibi bir boyutlu tesadüfi

değişkene dönüşür.  $t \in \{t_1, t_2\}$  alabiliyorsa stokastik süreç  $\{\xi(t_1), \xi(t_2)\}$  gibi iki boyutlu tesadüfi değişkene dönüşür (Karlin ve Taylor, 1975).

$t \in \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$  için stokastik süreç  $n$  boyutlu tesadüfi değişkenler vektörüne dönüşür, yani  $\{\xi(t_1), \xi(t_2) \dots \xi(t_n)\}$  olur.

**Tanım 2.3.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olasılık uzayı olsun  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  stokastik süreç ve  $t' > t$  için  $\xi(t') - \xi(t) \sim \xi(t' - t)$  ise  $\xi(t)$ 'ye *homojen süreç* denir.

**Tanım 2.4.**  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer  $n = 1, 2, \dots$  ve  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  için,

$$\xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}),$$

tesadüfi değişkenleri bağımsız iseler bu sürece *bağımsız artımlı süreç (B.A.S.)* denir.

**Tanım 2.5.**  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer  $n = 1, 2, \dots$   $h > 0$  ve  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  için

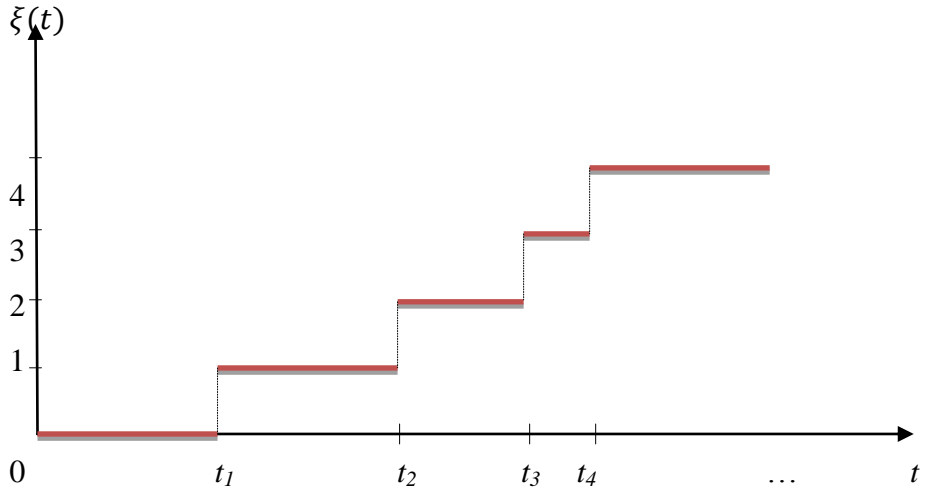
$$\xi(t_1 + h), \xi(t_2 + h), \dots, \xi(t_n + h)$$

değişkenlerinin ortak dağılımı ile  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$  değişkenlerinin ortak dağılımı aynı ise bu sürece *durağan süreç* denir. Böylece durağan sürecin dağılımı, başlangıç zamanındaki değişimle etkilenmeyecek ve herhangi bir  $h > 0$  için  $\xi(t)$  ile  $\xi(t + h)$  aynı dağılıma sahip olacaktır.

**Tanım 2.6.**  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  tesadüfi süreci  $(0, t)$  aralığında meydana gelmiş olan olayların toplam sayısını temsil ederse bu sürece *sayma süreci* denir.

Bu tanımdan sayma süreci  $\xi(t)$  aşağıdaki koşulları sağlar.

1.  $\xi(t) \geq 0$  ve  $\xi_0 = 0$
2.  $\xi(t)$  tamsayı değerlidir.
3.  $s \leq t$  ise  $\xi(s) \leq \xi(t)$
4.  $(s, t)$  aralığında meydana gelen olayların sayısı  $\xi(t) - \xi(s)$ 'ye eşittir.



**Şekil 2.1.** Sayma sürecinin örneklem fonksiyonu



### 3. MARKOV ZİNCİRLERİ

Bu çalışmada sürekli parametrelili Markov zincirleri kullanıldığından kesikli parametrelili Markov zincirinin sadece tanımını verilecektir.

**Tanım 3.1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bir olasılık uzayı ve bu uzayda tanımlı kesikli parametrelili kesikli durum uzaylı  $\{\xi_n, n \geq 0\}$  süreci aşağıdaki koşulu sağlarsa bu sürece *kesikli parametrelili Markov zinciri* denir.

$$P(\xi_{n+1} = x_{n+1} | \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = P(\xi_{n+1} = x_{n+1} | \xi_n = x_n) \quad (3.1)$$

Bu özelliğe belleksizlik özelliği denir ve  $x_i \in E$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ . Burada  $x_n$ 'lerin her biri  $E = N = \{0, 1, 2, \dots\}$  kümesinden değerler alan tesadüfi değişkenlerdir. Burada  $E$  durum uzayı,  $N$  doğal sayılar kümesidir. Markov zincirinin geçmiş ve geleceği birbirinden bağımsızdır.

**Tanım 3.2.**  $\{\xi(t), t \geq 0\}$ , durum uzayı  $E = \{0, 1, \dots\}$  olan sürekli parametrelili bir süreç olsun. Aşağıdaki özellikler geçerli olduğunda bu sürece *sürekli parametrelili Markov zinciri* denir.

Her bir  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq t$  ve  $n_1, \dots, n_k \in E$  için,

$$P\{\xi(t) = j / \xi(t_1) = n_1, \dots, \xi(t_k) = n_k\} = P\{\xi(t) = j / \xi(t_k) = n_k\}. \quad (3.2)$$

$t > t'$  için,

$$P\{\xi(t) = j / \xi(u), u \leq t'\} = P\{\xi(t) = j / \xi(t')\}. \quad (3.3)$$

Bu iki eşitliğe de Markov özelliğidir. Bu bağlamda Markov sürecinin herhangi bir  $t$  anında durumu belli olduğunda bunun geçmiş ve geleceği birbirinden bağımsız olur.  $P_{ij}(t) = P\{\xi(t + t') = j / \xi(t') = i\}$ , ifadesinin anlamı;  $t'$  anında  $i$  durumunda olan sürecin  $t + t'$  anında  $j$  - durumunda olması olasılığıdır. Özel olarak,  $t' = 0$  alındığında,

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j / \xi(0) = i\}. \quad (3.4)$$

olurki, bu durumda  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  süreci homojen süreç ve  $P_{ij}(t)$  olasılığı da  $i$  durumundan  $j$  durumuna geçiş olasılığı olarak adlandırılır. Bunlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

Geçiş olasılıkları  $\forall i, j \in E$  için,

- 1)  $P_j(t) = P\{\xi(t) = j\}$
- 2)  $P_j(t) \geq 0$
- 3)  $P_{ij}(t) \geq 0$
- 4)  $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$

özellikleri sağlar.

**Tanım 3.3.**  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  sayma süreci aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa bu sürece *Poisson süreci* denir. Poisson süreci sürekli parametrelili kesikli durum uzaylı stokastik süreçtir.

1.  $P(\xi(0) = 0) = 1$
2.  $\xi(t)$  bağımsız artımlı süreçtir. Her bir  $t, s \geq 0$  için,
3. Herhangi bir  $t$  süresindeki olayların sayısı  $\lambda t$  ortalama ile Poisson dağılmıştır. Yani tüm  $t, s > 0$  için,

$$P\{\xi(t+s) - \xi(s) = k\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (3.5)$$

Bu 3. özellik Poisson sürecinin durağan artımlı olduğunu gösterir. Poisson sürecinin ortalaması, varyansı ve kovaryansı sırası ile,

- i)  $E(\xi(t)) = \lambda t$
- ii)  $V(\xi(t)) = E(\xi(t)^2) - E(\xi(t))^2 = \lambda t$
- iii)  $\forall s, t > 0$  için  $Cov(\xi(t), \xi(s)) = \lambda \min(t, s)$

şeklinde verilir.

1)  $h \rightarrow 0$  iken,  $\xi(h) \sim Pois(\lambda h)$  ve  $f(x_h) = \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  olduğunda,

- a)  $P(\xi(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
- b)  $P(\xi(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
- c)  $P(\xi(h) \geq 2) = o(h)$

şeklinde verilir.

2. Poisson sürecinin geliş anları  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  olsun.  $T_i$ 'ler sıçrayış anları olup bu dizi bağımsız artımlı bir dizidir.

$$T_1 = t_1 - t_0 , T_2 = t_2 - t_1 , \dots , T_n = t_n - t_{n-1} \quad (3.6)$$

eşitlik yazılır.

i)  $T_i$ 'ler  $\lambda$  parametrelili üstel dağılıma sahiptirler.

ii)  $T_i$ 'ler bağımsızdır.

3.  $\{\xi(t)^{(1)}, t \geq 0\}, \{\xi(t)^{(2)}, t \geq 0\}, \dots, \{\xi(t)^{(n)}, t \geq 0\}$ ,  $n$ -tane bağımsız Poisson süreci veriliyor ve ortalama oranları sırasıyla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ve  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  olarak alındığında  $Y(t) = \sum_{i=1}^n \xi(t)^{(i)}$ 'de bir Poisson sürecidir.

4.  $\{\xi(t), t \geq 0\}$ ,  $\lambda$  parametrelili Poisson süreci olsun.  $t_1 < t_2 < \dots$  geliş anlarıdır.  $\xi(t) = 1$  koşulu altında  $t_1$  geliş anı  $(0, t)$  aralığında düzgün dağılıma sahiptir.

5.  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  Poisson süreci ve  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  bu sürecin geliş anlarıdır. Her bir geliş anı  $p$  olasılığı ile veya  $1 - p = q$  olasılığı ile sağlanmaktadır.  $\xi(t)$  ile  $(0, t)$  aralığında yerleşen ve sağlanan gelişlerin sayısını gösterelim. Bu durumda  $\xi(t)$ ,  $\lambda pt$  parametrelili Poisson dağılımına sahiptir.

$$P\{\xi(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda pt} (\lambda pt)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

6.  $\{\xi(t), t \geq 0\}$ ,  $\lambda$  parametrelili Poisson süreci olsun.  $t_1 < t_2 < \dots$  ler geliş anlarıdır.  $\xi(t) = n$  koşulu altında  $(0, t)$  aralığında  $t_1, t_2, \dots, t_n$  geliş anlarının ortak olasılık fonksiyonu;

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \xi = n) = \frac{n!}{t^n}; \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad (3.8)$$

şeklinde verilir.

7.  $\lambda$  parametrelili Poisson sürecinde  $n$ . geliş anı  $n$  ve  $\lambda$  parametrelili gamma dağılımına sahiptir. Yani  $t_n$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{t_n}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}; \quad \lambda > 0, x > 0 \quad (3.9)$$

şeklinde verilir.

8.  $\{\xi(t), t \geq 0\}$ ,  $\lambda$  parametrelili Poisson süreci olsun.  $t_1 < t_2 < \dots$  ler geliş anlarıdır.  $t_1, t_2, \dots, t_n$  geliş anlarının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu;

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n}; \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad (3.10)$$

şeklinde verilir.

**Tanım 3.4.** Kabul edelim ki;

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3.11)$$

olsun. Burada  $\delta_{ij}$ 'e *kronecker delta* denir.

$P_{ij}(t)$ 'nin sıfır noktasında türevi varsa, yani,

$$P'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h} \quad (3.12)$$

ise ve  $P'_{ij}(0) = a_{ij}$ 'lere *geçiş oranları* denir.

Eğer  $i = j$  ise  $a_{ii}$ 'ye  $i$  durumunda kalma oranı,  $i \neq j$  ise  $a_{ij}$ 'ye  $i$  durumundan  $j$  durumuna *geçiş oranı* denir ve bu oranlar aşağıdaki özellikleri sağlar (İnal,1988).

Geçiş oranları matrisi;

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

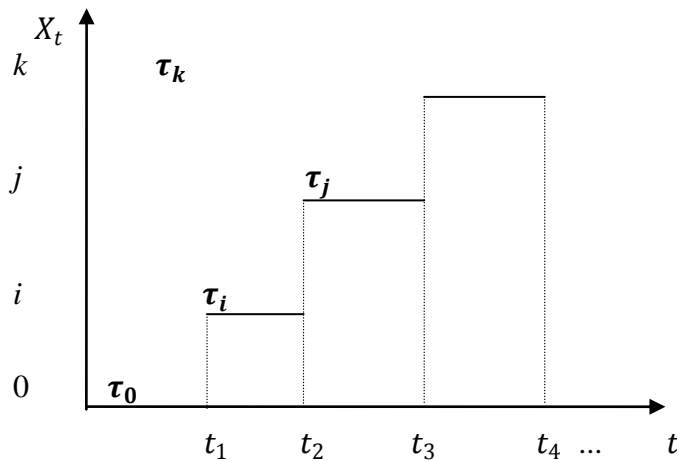
olmak üzere , geçiş oranlarının özellikleri,

- 1)  $i \neq j$  için  $a_{ij} \geq 0$
- 2)  $i = j$  için  $a_{ii} \leq 0$
- 3)  $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$ .

şeklinde sağlanır.

**Teorem 3.4.1.**  $\tau_i$  Markov zincirinin  $i$  durumunda oturma süresi olsun. Bu durumda  $\tau_i$  üstel dağılıma sahiptir.

**İspat.**  $t_1, t_2, \dots$ ler durum değiştirme anları olsun.



**Şekil 3.1.** Markov zincirinin oturma süreleri

$P\{(\tau_i > t + s)/(\tau_i > s)\}$  olasılığını göz önüne alalım. Markov zincirlerinin belleksizlik özelliğinden dolayı,

$$P\{(\tau_i > t + s)/(\tau_i > s)\} = P(\tau_i > t) \quad (3.14)$$

ve koşullu olasılıktan dolayı,

$$P\{(\tau_i > t + s)/(\tau_i > s)\} = P\{((\tau_i > t + s) \cap (\tau_i > s))/P(\tau_i > s)\} = P(\tau_i > t + s)/P(\tau_i > s) \quad (3.15)$$

şeklinde verilir. Yukarıda verilen bu iki denklemi birbirine eşitlersek;

$$P(\tau_i > t + s) = P(\tau_i > t)P(\tau_i > s) \quad (3.16)$$

denklemi elde edilir.  $F_i(t) = P(\tau_i \leq t)$  ve  $\Phi_i(t) = P(\tau_i > t)$  alalım. Yukarıdaki denklem;  $\Phi_i(t)\Phi_i(s) = \Phi_i(t + s)$  dir ve  $\Phi_i(t + s)$  türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\Phi_i(t + s) - \Phi_i(t) = \Phi_i(t)\Phi_i(s) - \Phi_i(t) = \Phi_i(t)(\Phi_i(s) - 1) \quad (3.17)$$

Bu eşitlik  $s'$ ye bölünüp limite geçilirse;

$$\Phi_i(t + s) - \Phi_i(t) = \Phi_i(t) \lim_{s \rightarrow 0} (\Phi_i(s) - 1)/s$$

$$\Phi_i(0) = 1 - P(\tau_i < 0) = 1 - P(\emptyset) = 1 - 0 = 1 \quad (3.18)$$

$$\Phi'_i(t) = \Phi_i(t)\Phi'_i(0) \quad (3.19)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan ;

$$\Phi'_i(0) = \Phi'_i(t)/\Phi_i(t) = [\ln(\Phi_i(t))]' \quad (3.20)$$

bulunur. Bu ifade  $[0, t]$  aralığında integrallenirse,

$$\ln \Phi_i(t) - \ln \Phi_i(0) = \Phi'_i(0)t - \Phi'_i(0)$$

$$\ln \Phi_i(t) = \Phi'_i(0)t \quad \text{veya} \quad \Phi_i(t) = e^{\Phi'_i(0)t} \quad (3.21)$$

eşitlik (3.21)'den  $F_i(t) = 1 - e^{\Phi'_i(0)t}$  ve  $\theta_i = -\Phi'_i(0)$  alındığında,

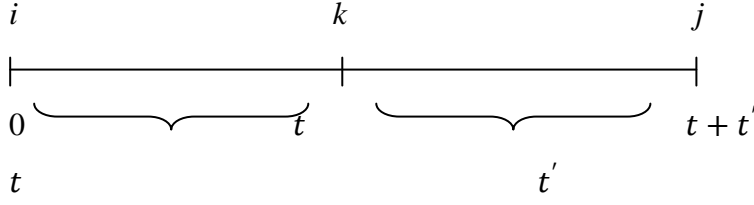
$$F_i(t) = 1 - e^{-t\theta_i}, \quad t > 0 \quad (3.22)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak Markov sürecinin  $i$  durumda kalma süresinin üstel dağılıma uyduğu görülür. Ayrıca beklenen değer ve varyans;

$$E(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i}, \quad Var(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i^2} \quad (3.23)$$

elde edilir.

**Tanım 3.5.**  $t' \geq 0$  ve  $t \geq 0$  birbirini izleyen iki zaman aralığı olsun. Ayrıca  $\forall i, k, j \in E$  olsun



$t + t'$  zaman aralığında  $i$  durumundan  $j$  durumuna geçiş olasılığı toplam olasılık formülüne göre aşağıdaki gibi düzenlenirse,

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)P'_{kj}(0) = \sum_{k \in E} P_{ik}(t)a_{kj} \quad (3.24)$$

$$P'_{ij}(t') = \sum_{k \in E} a_{ik}P_{kj} \quad (3.25)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (3.24) ve eşitlik (3.25) denklemleri sırasıyla *Kolmogorov'un ileriye ve geriye doğru diferansiyel denklemleri* denir. Eşitlik (3.25) denkleminde başlangıç durumu dikkate alınmadığında,

$$P'_j(t) = \sum_{k \in E} P_k(t)a_{kj} \quad (3.26)$$

elde edilir.

**Tanım 3.6.** Sürekli parametrelili Markov zinciri indirgenemez ise  $t \rightarrow \infty$  için geçiş olasılıkları sabit bir değere yaklaşır. Bu sabit olasılık başlangıç durumuna bağlı değildir.  $\forall_i$  için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j \quad (3.27)$$

eşitliği bulunur. Bu limit durumuna *denge durumu (stability -state)* denir. Elemanları  $\pi_j, j = 0, 1, 2, \dots$  olan vektörü  $P$  ile gösterelim. Buna göre;  $P = [\pi_0, \pi_1, \dots]$  olur.  $P$ 'ye *limit dağılımı* ya da *limit olasılık dağılımı* denir. Eşitlik (3.27) ifadesinin her iki tarafını  $t'$ 'ye göre türevini alırsak,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_{ij}(t) = \sum_k \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_{ik}(t)a_{kj} \quad (3.28)$$

$$\sum_k \pi_k a_{kj} = 0 \quad (3.29)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlik kuyruk modellerinin kurulmasında temel bir ifadedir.

**Tanım 3.7.** Farzedelim  $\xi(t)$ ,  $t \geq 0$  sürekli parametrelili ve kesikli durum uzaylı homojen Markov sürecidir. Bu sürecin geçiş olasılıkları olan  $P_{ij}$  aşağıdaki koşulu sağlar.

$$P_i(\xi(h) = j) = P_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & ; j = i + 1 \\ \mu_i h + o(h) & ; j = i - 1 \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & ; j = i \\ o(h) & ; j = i \mp 2, i \mp 3, \end{cases} \quad (3.30)$$

Bu durumda  $\xi(t)$  sürecine *doğum-ölüm süreci* denir.  $\lambda_i$ 'ye *doğum parametresi*,  $\mu_i$ 'ye *ölüm parametresi* denir. Farzedelim  $\pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$  olsun. Burada,  $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$  ve bu sürecin durum uzayı  $k \in N$  olmak üzere, bu süreçle ilgili olarak aşağıdaki iki problem ortaya çıkabilir.

- a.  $P_k(t)$  için diferansiyel denklemin bulunması.
- b.  $P_k$  ihtimallerinin hesaplanması.

Burada (a) ve (b)'nin bulunması için geçiş oranlarının hesaplanması gerekir (Kleinrock,1975).

Eşitlik (3.12)'ye göre;

$$a_{i,i+1} = P'_{i,i+1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i+1}(h) - P_{i,i+1}(0)}{h} \quad (3.31)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_i h + o(h)}{h} = \lambda_i \quad (3.32)$$

$$a_{i,i-1} = P'_{i,i-1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i-1}(h) - P_{i,i-1}(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{i,i-1}(h)}{h} = \mu_i \quad (3.33)$$

eşitlikleri elde edilir.

Burada indislerin farklı olduğu durumlar bulunmuştur. Şimdi de aynı olduğu durumları inceleyelim.

$$\sum_i P_{ij}(t) = 1 \quad (3.34)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P'_{ij}(t) = 0.$$

Eşitlik (3.41)'de,  $[0,t]$  aralığında sürekli ve türevlenebilir olduğundan 0 noktasında da sürekli ve türevlenebilir olacağından;

$$\sum_{i=0}^{\infty} P'_{ij}(0) = 0$$

olur.

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = a_{i0} + a_{i1} + \dots + a_{i,i-2} + a_{i,i-1} + a_{ii} + a_{i,i+1} + a_{i,i+2} + \dots = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = a_{i,i-1} + a_{ii} + a_{i,i+1} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \lambda_i + a_{ii} + \mu_i = 0$$

Böylece,

$$a_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i) \quad (3.35)$$

elde edilir. Eşitlik (3.32), (3.33) ve (3.35)'den:

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & ; j = i + 1 \\ \mu_i & ; j = -1 \\ -(\lambda_i + \mu_i) & ; j = i \\ 0 & ; j = i \pm 2, i \pm 3, \dots \end{cases} \quad (3.36)$$

Eşitlik (3.36) elde edilir. Tanımda başlangıçta ölüm olmadığından  $\mu_i = 0$  dir. Burada  $\xi_t$  Markov sürecidir.  $a_{ij}$ 'lerin yardımıyla,

$$P_j'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t) a_{ij}$$

denklemini açıldığında,

$$\begin{aligned} P_j'(t) &= P_0(t) a_{0j} + \dots + P_{j-2}(t) a_{j-2,j} + P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + P_j(t) a_{jj} \\ &\quad + P_{j+1}(t) a_{j+1,j} + P_{j+2}(t) a_{j+2,j} + \\ &\quad P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + P_j(t) a_{jj} + P_{j+1}(t) a_{j+1,j} \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir.

Eşitlik (3.37) denklem sistemi,  $j$ 'ye göre fark  $t$ 'ye göre diferansiyel denklemdir.

Eşitlik (3.37) denkleminin her iki tarafı için denge durumu uygulanırsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_j' = \lim_{t \rightarrow \infty} (P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + P_j(t) a_{j,j} + P_{j+1}(t) a_{j+1,j})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_j' = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j-1}(t) a_{j-1,j} + \lim_{t \rightarrow \infty} P_j(t) a_{j,j} + \lim_{t \rightarrow \infty} P_{j+1}(t) a_{j+1,j}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_j' = P_{j-1} a_{j-1,j} + P_j a_{j,j} + P_{j+1} a_{j+1,j}$$

bulunur. Sol taraf için denge durumu;

$$P_k(t) \rightarrow P_k, \quad P_k'(t) \rightarrow P_k' = 0$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
0 &= P_{j-1}a_{j-1,j} + P_j a_{j,j} + P_{j+1}a_{j+1,j} \\
0 &= \lambda_{j-1}P_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)P_j + \mu_{j+1}P_{j+1}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir.  $j = 0$  alındığında,

$$\left. \begin{aligned}
-(\lambda_j + \mu_j)P_j + \lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{j+1}P_{j+1} \\
-(\lambda_0 + \mu_0)P_0 + \mu_1P_1 = 0
\end{aligned} \right\} , j = 0,1, \dots \tag{3.39}$$

eşitlik yazılır. Eşitlik (3.39) denklem sistemini çözersek,

$$\begin{aligned}
-\lambda_j P_j - \mu_j P_j + \lambda_{j-1} P_{j-1} + \mu_{j+1} P_{j+1} &= 0 \\
\frac{\mu_{j+1} P_{j+1} - \lambda_j P_j}{\mu_{j+1}} &= \frac{\mu_j P_j - \lambda_{j-1} P_{j-1}}{\mu_j}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$u_{j+1} = u_j = u_{j-1} \Rightarrow u_j = u_{j-1} = u_{j-2} = \dots = u_1 = 0 \tag{3.40}$$

$$u_j = 0 \Rightarrow \mu_{j+1} P_{j+1} - \lambda_j P_j = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
P_{j+1} &= \frac{\lambda_j P_j}{\mu_{j+1}} \\
P_j &= \frac{\lambda_{j-1} P_{j-1}}{\mu_j} , \quad P_{j-1} = \frac{\lambda_{j-2} P_{j-2}}{\mu_{j-1}} , \dots
\end{aligned} \right\} (j = 0,1, \dots) \tag{3.41}$$

eşitlikleri yazılır.  $j = 1$  için  $P_1 = (\lambda_0 P_0) / \mu_1$  elde edilir. O halde;

$$\begin{aligned}
P_j &= \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \frac{\lambda_{j-2}}{\mu_{j-1}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \\
P_j &= P_0 \prod_{i=1}^j \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$\prod_{i=1}^j \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \theta_j$  alındığında,

$$P_j = \theta_j P_0 \tag{3.43}$$

elde edilir.

$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$  olur. Eşitlik (3.43)'de her iki tarafı  $j$  üzerinden toplanırsa,

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j P_0 \Rightarrow P_0 = 1 / (\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j) \tag{3.44}$$

elde edilir. Eşitlik (3.44)'de yerine yazırsa,

$$P_j = \theta_j / (\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j) \tag{3.45}$$

olur. Burada, iki durum söz konusudur.

1)  $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j < \infty \Rightarrow$  seri yakınsaktır. Bu durumda  $P_j$  'ler bulunur (istasyonel dağılım vardır).

2)  $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \infty \Rightarrow$  seri ıraksak ve  $P_0 = \frac{1}{\infty} = 0$  olur.

$$P_j = \theta_j P_0 = \theta_j / (\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j) = \theta_j 0 = 0 \quad (3.46)$$

eşitlik (3.45)'deki  $P_j$  değerini (3.46)'de yerine koyduk ve bu durumda istasyonel dağılımın olmadığını gördük. İstasyonel dağılımın olabilmesi için,

$P_j \geq 0$  ve  $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$  olması gerekir.

## 4. STOKASTİK KUYRUK SİSTEMLERİ

### 4.1 Kuyruk Sistemlerinin Genel Yapısı

1953 yılında D. Kendall çok servis biriminin olduğu kuyruk problemlerinde; geliş dağılımı, servis süresi dağılımı ve sistemde bulunan paralel servis sayısını tanımlamak üzere bir notasyon önermiştir. 1966 yılında A. Lee bu notasyona servis disiplini ve sistemde bulunan maksimum müşteri sayısını eklemiştir. 1968 yılında Hamdy A. Taha altıncı karakteristik olan geliş kaynağını notasyona katmıştır (Halaç, 1991).

**(a / b / c) : (d / e / f)**

a: Gelişler arası sürenin dağılım fonksiyonunu (geliş akımını) gösterir.

b: Hizmet süresinin dağılım fonksiyonunu gösterir.

c: Servis (hizmet) kanalı sayısını gösterir.

d: Hizmet disiplinini gösterir.

e: Sistemde (serviste ve kuyrukta) izin verilen çok müşteri sayısını gösterir.

f: Geliş kaynağının büyüklüğünü gösterir.

Kuyruk sistemleri; tek kanallı, paralel çok kanallı, fazlı, ardışık, paralel ve ardışık olabilirler. Tek kanallı servis sistemlerinde bir tane hizmet sağlayıcı vardır. Paralel çok kanallı servis sistemlerinde aynı hizmeti sağlayabilen birden fazla hizmet sağlayıcısı vardır.

Fazlı servis sistemlerindeki yapı çok çeşitli olmakla beraber diğer servis sistemlerinden en belirgin farkı servis sağlayıcılarının birim olarak adlandırılması ve bütün sistemde ünitelerden biri dolu ise sistemin meşgul olmasıdır. Ardışık servis sistemleri ise servis sağlayıcılarının ard arda sıralandığı sistemdir. Paralel ve ardışık servis sistemleri servis sağlayıcıların hem paralel hem de devamında yeniden bir ya da birden fazla servis sağlayıcısının olmasıdır ve bu böyle devam edebilir.

Paralel  $n$  kanallı bir kuyruk sisteminde müşterilerin sisteme geliş anları  $t_1, t_2, \dots, t_k$  olsun.  $t_k$ ,  $k$ -ıncı müşterinin sisteme geliş anı olmak üzere,  $T(k) = t_k - t_{(k-1)}$ ' lar ardışık iki müşteri arasındaki süreyi gösterebilir.

$T(k)$ ' lar tesadüfi değişkendir.  $\{T(1), T(2), \dots, T(k)\}$  dizisine *müşteri akımı* (sisteme giriş akımı) denir.  $T_1, T_2, \dots, T_k$ ' ların bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğu varsayılır.  $T(1), T(2), \dots, T(k)$ ' ların dağılım fonksiyonunu  $P\{T(i) < t\} = A(t)$ ,

$(i = 1, 2, \dots, k)$  ile gösterelim.  $A(t)$  keyfi ya da belirli bir olasılık fonksiyonu olabilir. Keyfi olduğunda giriş akımına *recurent akım* denir ve  $G_I$  ile gösterilir.

a. Eğer  $A(t) = P(T_i < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ise buna Poisson akımı denir ve  $M$  ile gösterilir ( $M$ :Markovian)

b. Eğer  $T(i) = D$  (sabit) ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) ise bu akıma *Deterministik akım* denir ve  $D$  ile gösterilir.

c.  $T(i) = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) olmak üzere  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 'lar bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun.

$P(\eta_j < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  ise bu akıma *Erlang akımı* denir ve  $E_r$  ile gösterilir.  $A(t)$ 'nin verilmesi ile giriş akımı belirlenir.

Sisteme gelen her bir müşteri belli bir zaman içerisinde hizmet alıyorsa bu zamana *hizmet süresi* denir. Sistemin belirlenebilmesi için hizmet süresinin dağılım fonksiyonunun verilmesi gerekir. Bu süre genellikle bir tesadüfi değişkendir.

$\xi(i)$ ,  $i$ -inci müşterinin hizmet süresini göstermek üzere  $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(k)$ 'lar bağımsız tesadüfi değişkenler olup aynı dağılıma sahiptirler. Hizmet süresinin dağılım fonksiyonu  $P\{\xi(i) < t\} = B(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ile gösterilsin,  $B(t)$  keyfi olduğunda hizmet süresi  $G$  ile gösterilir.

a. Eğer  $B(t) = P\{\xi(i) < t\} = 1 - e^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ise buna Poisson akımı denir ve  $M$  ile gösterilir.

b. Eğer  $\xi(i) = D$  (sabit) ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) ise bu akıma *Deterministik akım* denir ve  $D$  ile gösterilir.

c.  $\xi(i) = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) olmak üzere  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ 'lar bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun.

$P(\eta_j < t) = 1 - e^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  ise bu akıma *Erlang akımı* denir ve  $E_r$  ile gösterilir.  $B(t)$ 'nin verilmesi ile hizmet süresi belirlenir.

Sisteme gelen müşteri talep ettiği hizmeti belli bir kurala göre almalıdır. Bu kurala hizmet disiplini denir. Çeşitli hizmet disiplinleri hizmet vermek için esas olarak kullanılmaktadır.

a. FIFO (İlk gelen ilk hizmeti alır)

b. LIFO (Son gelen ilk hizmeti alır)

c. RANDOM (Tesadüfi olarak hizmet alınır)

d. PRIORITY (Öncelikli hizmet)

Servis ve kuyruk kapasitesi, sistemde izin verilen en çok müşteri sayısını belirler. Bu sayı sonlu ya da sonsuz olabilir. Aksi belirtilmediği sürece geliş kaynağı büyüklüğü sonsuzdur.

## 4.2 Tek Kanallı Markovian Kuyruk Sistemleri ve Performans Ölçüleri

### 1) $M/M/1$ sistemi ve analizi:

Bu sistem üç elemanın verilmesiyle tanımlanır.

i) Müşterilerin sisteme geliş anları (varış) anları, bu anlar  $t_1, t_2, \dots$  tesadüfi değişkenlerdir.

ii) Her bir müşterinin hizmet süresi  $\gamma$  tesadüfi değişkenidir ve bu değişken  $\mu$  parametrelili üstel dağılıma sahiptir.

iii) Hizmet sistemi bir tane hizmet verenden (kanaldan) oluşmuştur. Sistemin hizmet disiplini FIFO dur.  $\xi(t)$ ,  $t$  anında sistemde olan müşteri sayısı olsun. O halde  $\{\xi(t), t > 0\}$  ve durum uzayı  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  olan bir stokastik süreç olacaktır. Bu süreç  $P_k(t) = P(\xi(t) = k)$  sistemde  $t$  anında  $k$  tane müşteri olması olasılığıdır.  $P_k(t)$  olasılığını bulmak oldukça zordur. Fakat bu olasılık  $t \rightarrow \infty$  için  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  koşulu altında mevcuttur.

### a) $M/M/1$ sisteminin performans ölçüleri:

i) sistemdeki ortalama müşteri sayısı;

Sistemde  $n$  tane müşteri olması olasılığı  $P_n = \rho^n (1 - \rho)$ 'dur.

$P_0$ : Sistemde hiç müşteri olmaması olasılığı,

$$E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (4.1)$$

Sistemde herhangi bir anda beklenen müşteri sayısıdır.

ii) kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı;

$$E(N_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (4.2)$$

veya,

$$E(N_q) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \quad (4.3)$$

bulunur.

iii) bir müşterinin sistemde bekleme süresinin ortalaması;

$W$ : Bir müşterinin sistemde bekleme süresi

$W_q$ : Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresi

$E(W)$ 'i bulabilmek için önce  $W$ 'nin yoğunluk fonksiyonunu bulmalıyız. Çünkü  $W$  sürekli bir tesadüfi değişkendir.  $f_w(x)$ ,  $W$ 'nin yoğunluk fonksiyonu olsun.

$f_w(x / N = n)$ . Sistemde  $n$  tane müşteri olduğu bilindiğine göre bir müşterinin bekleme süresi;

$$f_w(x / A) = \frac{f_w(x)}{P(A)} \quad (4.4)$$

$$W = \eta'_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n + \eta_{n+1} \sim t_{n+1} \quad (4.5)$$

$t_{n+1}$  -inci sıçrayış anlarının dağılım fonksiyonu ile  $W$  nun dağılım fonksiyonu benzerdir. Burada;  $\eta'_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n+1}$  farklıdır, ancak dağılımları aynıdır ve üstel dağılmış tesadüfi değişkenlerdir.

$$f_w(x / N = n) = f_{t_{n+1}}(x) = \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x} \quad (4.6)$$

sistemde  $n$  tane müşterinin olduğu bilindiğine göre  $(n + 1)$ . müşterinin beklemesinin olasılık fonksiyonu toplam olasılık formülüne göre,

$$f_w(x) \begin{cases} (\mu - \lambda)e^{-(\mu-\lambda)x} & , x \geq 0 \\ 0 & , d. d. \end{cases} \quad (4.7)$$

$$E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (4.8)$$

Bir müşterinin sistemde bekleme süresi,  $W = W_q + \frac{1}{\mu}$  ise ,

bir müşterinin kuyrukta ortalama bekleme süresi,

$$E(W_q) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} \quad (4.9)$$

## 2) $M/M/c/N$ sistemi ve analizi:

### a) sistemin tanımı

Bu sistem  $N$  müşterili Poisson geliş akımlı  $c$  kanaldan oluşmuş olup her bir kanaldaki müşterinin hizmet süreleri üstel dağılıma uymaktadır. Sistem ilk gelene ilk hizmet disiplini ile çalışır. Müşteri sisteme geldiğinde kanalların tümü de doluysa ( $N > c$ ) hizmet almak için bekleme hattına girer. Bekleme hattı sınırlı olduğundan hizmet

için gelen müşteriler bekleme hattı kapasitesi dolu olduğunda hizmet almadan geri döner.

**b)  $M/M/c/N$  için doğum parametresinin bulunması**

İlk önce bu sistemde  $N$  tane müşteri olduğunu varsayalım ve  $h$  süresinde sisteme 1 müşterinin gelmesi ihtimalini bulalım.  $\eta$  bir müşterinin hizmet süresi olsun.

$$P_{n,n+1}(h) = P(\xi(t+h) = n+1 / \xi(t) = n) \quad (4.10)$$

$$P_{n,n+1}(h) = P(\xi(h) = 1)[P(\eta > h)]^n \quad (4.11)$$

$$P_{n,n+1}(h) = P(\xi(h) = 1)[1 - P(\eta \leq h)]^n$$

$$P_{n,n+1}(h) = P(\xi(h) = 1)[1 - F(h)]^n$$

$$P_{n,n+1}(h) = P(\xi(h) = 1)[1 - (1 - e^{-\mu h})]^n$$

$$P_{n,n+1}(h) = e^{-\lambda h} \lambda h e^{-\mu h n}$$

$$P_{n,n+1}(h) = [1 - \lambda h + o(h)] \lambda h e^{-\mu h n} \quad (4.12)$$

Eşitlik (4.12) ifadesinde limite geçerse,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n,n+1}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\lambda h e^{-\mu h n} - (\lambda h)^2 e^{-\mu h n} + o(h)}{h} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n,n+1}(h)}{h} = \lambda \Rightarrow P_{n,n+1}(h) = \lambda h + o(h)$$

olur. Eşitlik (3.37), eşitlik (3.38) ve eşitlik (3.43) yardımıyla,

$$\lambda_n = a_{n,n+1} = P'_{n,n+1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{p_{n,n+1}(h) - p_{n,n+1}(0)}{h} \right], P_{n,n+1}(0) = 0 \quad (4.13)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\lambda h + o(h) - 0}{h} \right) = \lambda$$

elde edilir. Buradan,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; 0 \leq n < N \\ 0 & ; n \geq N \end{cases} \quad (4.14)$$

eşitliği bulunur (Bhat, 2008).

**c)  $M/M/c/N$  için ölüm parametresinin bulunması**

$$\mu_{n,n-1} = a_{n,n-1} = P'_{n,n-1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n,n-1}(h) - P_{n,n-1}(0)}{h} \quad (4.15)$$

Eğer herhangi bir anda sistemde  $n$  tane müşteri varsa  $h$  süresinde bir müşterinin hizmet almasını tamamlaması ihtimali; yada bir kanalın boşalması ve  $h$  süresinde hiç müşteri gelmemesi ihtimali,  $P_{n,n-1}(h)$ 'dir.

$P_{n,n-1}(h)$ 'in bulunması :

$i) n \leq c$  ise sistemde bekleme yoktur (müşteri sayısı en fazla kanal sayısına eşittir).

$$P_{n,n-1}(h) = P(\xi(h) = 0)P(\mu_h = 1) \quad (4.16)$$

eşitliği yazılır. Burada  $\mu_h$  tesadüfi değişkeni sistemden ayrılanların sayısını gösterebilir.

Bir kanalın boşalması ihtimali  $1 - e^{-\mu h} (= p)$ ,

Bir kanalın boşalmaması ihtimali  $e^{-\mu h} (= q)$ ,

$n -$  kanaldan birisinin boşalması yada hizmetin tamamlanması ihtimali;

$p = 1 - e^{-\mu h}$   $q = e^{-\mu h}$  'dir. Yani kanal  $\binom{n}{1} = C_n^1$  şeklinde boşalacaktır. Bunu Bernoulli denemeleri biçiminde ele alacak olursak,

$$P(\mu_h = 1) = C_n^1 p^1 q^{n-1} = \binom{n}{1} (1 - e^{-\mu h})^1 (e^{-\mu h})^{n-1} \quad (4.17)$$

(4.16)'de (4.17)'i yerine yazarsak,

$$P_{n,n-1}(h) = e^{-\mu h} \binom{n}{1} (1 - e^{-\mu h})^1 (e^{-\mu h})^{n-1} + o(h)$$

$$P_{n,n-1}(h) = n [(e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h} e^{-\mu h}) e^{-\mu h (n-1)}] + o(h)$$

$$P_{n,n-1}(h) = n [e^{-\lambda h} e^{-\mu h (n-1)} - e^{-\lambda h} e^{-\mu h n}] + o(h) \quad (4.18)$$

(4.18) için limite geçilirse,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n,n-1}(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{-\lambda h} e^{-\mu h (n-1)} - e^{-\lambda h} e^{-\mu h n}}{h} \right] + o(h) \\ &= n \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-h(\lambda + \mu(n-1))} - e^{-h(\lambda + \mu n)}}{h} \right) \end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$  belirsizliği olduğundan L'Hospital kuralı gereği,

$$= n(-\lambda - \mu(n-1) + \lambda + \mu n) = n\mu \quad (4.19)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\mu_n &= a_{n,n-1} = P'_{n,n-1}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n,n-1}(h) - P_{n,n-1}(0)}{h} \\ \mu_n &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{n,n-1}(h)}{h} = n\mu\end{aligned}\quad (4.20)$$

sonuç olarak,

$n \leq c$  için  $\mu_n = n\mu$  olur.

ii)  $n > c$  için ( tüm kanallar dolu ise )

$$P_{n,n-1}(h) = P(\xi(h) = 0)P(\mu_h = 1)$$

herhangi bir kanaldan bir ayrılışın olması;

$$\mu_n = P'_{n,n-1}(0) = c\mu \text{ bulunur. Yani;}$$

$n \leq c$  için  $\mu_n = c\mu$  bulunur.  $\lambda_n = \lambda$  dır.

Sonuçta;

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , 0 \leq n \leq c \\ c\mu & , N > n \geq c \\ 0 & , n > N \end{cases} \quad \lambda_n = \begin{cases} \lambda & , 0 \leq n < N \\ 0 & , n \geq N \end{cases}\quad (4.21)$$

yazılır (Gross ve Harris,1984).

$$P_n = \theta_n P_0 \quad \text{ve} \quad \theta_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}\quad (4.22)$$

yazılır.

$n \leq c$  için  $\theta_n$ 'yi bulalım,

$$\theta_n = \frac{\lambda^n}{1\mu 2\mu \dots n\mu} = \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\quad (4.23)$$

$$r = \frac{\lambda}{\mu} \rho = \frac{\lambda}{c\mu} \text{ alındığında, } \theta_n = \frac{r^n}{n!} \text{ olur.}\quad (4.24)$$

eşitlikleri elde edilir.

$n > c$  için  $\theta_n$ 'yi bulalım,

$$\begin{aligned}\theta_n &= [\lambda^n]/[\mu_1 \dots \mu_n] = [\lambda^n]/[\mu_1 \dots \dots \mu_c \mu_{c+1} \dots \dots \mu_n] \\ &= [\lambda^n]/[1\mu 2\mu \dots c\mu(c\mu \dots \dots c\mu)] \\ &= [\lambda^n]/[c! \mu^c (c\mu)^{n-c}] \quad \text{burada } n = n - c + c \text{ alalım,} \\ &= [\lambda^{n-c+c}]/[c! \mu^c (c\mu)^{n-c+c-c}] = [\lambda^{n-c} \lambda^c]/[c! \mu^c (c\mu)^{n-c}]\end{aligned}$$

$$\theta_n = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} = \frac{\rho^{n-c} r^c}{c!} \quad (4.25)$$

$$P_n = \theta_n P_0' \text{ dan } , P_n = \frac{\rho^{n-c} r^c}{c!} P_0 \quad (4.26)$$

eşitlikler elde edilir. Böylece aranan ihtimal,

$$P_n = \begin{cases} \frac{r^n}{n!} P_0 & ; 0 \leq n < c \\ P_c \left(\frac{r}{c}\right)^{n-c} & ; c \leq n \leq N \end{cases}$$

ya da,

$$P_n = \begin{cases} \frac{r^n}{n!} P_0 & ; 0 \leq n < c \\ \frac{r^n}{C! C^{n-c}} P_0 & ; c \leq n \leq N \end{cases} \quad (4.27)$$

yazılır. Eşitlik (4.27)'deki sınır şartı olan  $\sum_{n=0}^N P_n = 1$  ifadesi kullanılır. Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} P_0 + \sum_{n=c}^N \frac{r^n}{C^{n-c} C!} P_0 &= 1 \\ P_0 &= \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \sum_{n=c}^N \frac{r^n}{C^{n-c} C!} \right]^{-1} \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{C!} \sum_{n=c}^N \rho^{n-c} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitlik (4.28) ifadesinde,  $\rho = 1$  için,

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{C!} (N - c + 1) \right]^{-1}$$

$\rho \neq 1$  için,

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{C!} \left( \frac{1 - \rho^{N-c+1}}{1 - \rho} \right) \right]^{-1} \quad (4.29)$$

eşitliği olur. Ya da,

$$P_0 = \begin{cases} \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{C!} \left( \frac{1 - \rho^{N-c+1}}{1 - \rho} \right) \right]^{-1} & , \rho \neq 1 \\ \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{C!} (N - c + 1) \right]^{-1} & , \rho = 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

eşitliği elde edilir.

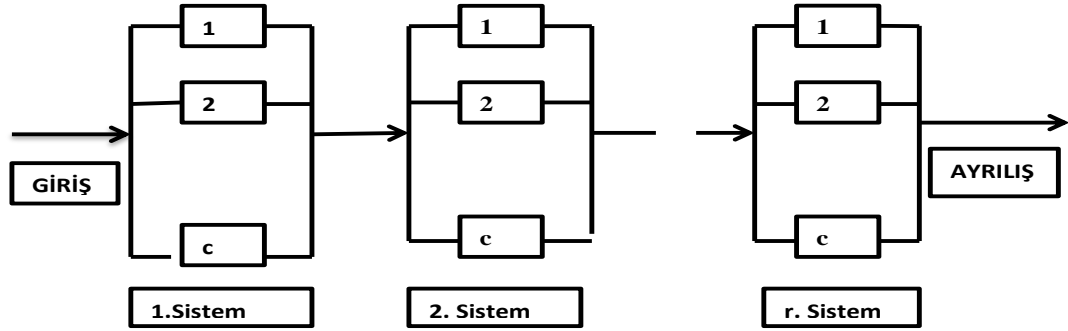
#### d) seri (tandem) kuyruk sistemleri

Günlük yaşantımızda bankacılık sisteminde, üretim hattında, bilgisayar sistemleri gibi birçok alanda bekleme hattı sistemleri kullanılmaktadır. Bu sistemler tek kanallı, paralel kanallı, paralel ve seri kanallı olabileceği gibi seri ve faz tipli kuyruk sistemleri de olabilir. Bu çalışmada iki aşamalı ve ikinci aşaması da faz tipli olan bir kuyruk sistemini vereceğimizden, önce seri kuyruk sisteminin genel yapısından daha sonra da faz tipli kuyruk sistemlerinden bahsedilecektir.

Seri bekleme hattı sistemlerinin en genel yapısı, Jackson(1954) modeli olarak bilineni olup aşağıdaki şekilde gösterilmektedir. Bu seri bekleme hattı sistemlerinde kanalların önlerinde kuyruk olabileceği gibi kuyruk olmayıp, kayıp, bloklamaaçık ve kapalı gibi durumlarda olabilir. Bu bağlamda birçok seri bekleme hattı modeli mevcuttur.

#### i) Jackson modeli

Aşağıdaki gösterilen veriler ile tanımlanan tandem kuyruk modelini göz önüne alalım.



Şekil 4.1. Tandem kuyruk modeli

\* Sistem, ardışık  $r$  tane  $M/M/c$  tipli kuyruk sisteminden oluşur. Müşteriler sisteme  $\lambda$  parametrelili Poisson akımı ile gelmektedir. Her bir bekleme hattında keyfi sayıda müşteri olabilir.

\*  $i$ -inci sistemin her bir kanalında hizmet süresi ( $\eta_i$ ),  $\mu_i$  parametrelili üstel dağılıma sahiptir ve  $\eta_1, \dots, \eta_n$ 'ler bağımsızdır.

\* Her bir müşteri önce 1. sistemde daha sonra 2. sistemde vb. gibi  $r$ . sistemde Jackson teoremiyle ilgili gösterimleri ifade edelim:

$N_k(t)$ ,  $t$  anında  $k$ -ıncı sistemde bulunan müşteri sayısı olsun,

$$P(N_k(t) = n_k) = P_{n_k}(t) (k = 1, \dots, r ; n_k = 0, 1, \dots) \quad (4.31)$$

$$P(N_1(t) = n_1, \dots, N_r(t) = n_r) = P_{n_1, n_2, \dots, n_r}(t) \quad (4.32)$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{n_1, n_2, \dots, n_r}(t) = P_{n_1, n_2, \dots, n_r} \quad (4.33)$$

eşitlikleri elde edilir.

ii) teorem (Jackson)

$\min(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r) > \lambda$  koşulu altında,

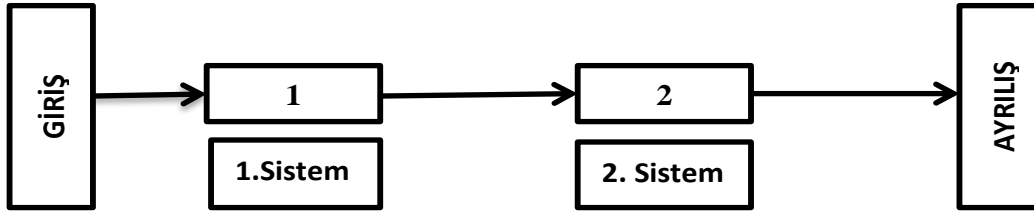
$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{n_1, n_2, \dots, n_r}(t) = P_{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

limiti vardır ve,

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_r} = P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \dots \cdot P_{n_r} \quad (n_1 \geq 0, \dots, n_r \geq 0) \quad (4.34)$$

eşitliği elde edilir. Jackson teoremini  $r = 2$  ve  $c = 1$  durumu için ispatlayalım. Genel durum için ispat benzer yolla yapılır.

**İspat:**



**Şekil 4.2.** Jackson teoremi  $r = 2$  ve  $c = 1$  durumu,

Önce  $P_{n_1, n_2}(t)$  olasılıkları için diferansiyel denklemleri kuralım.

$$\left. \begin{aligned} P'_{n_1, 0}(t) &= -(\lambda + \mu_1)P_{n_1, 0}(t) + \lambda P_{n_1-1, 0}(t) + \mu_2 P_{n_1, 1}(t), \quad n_1 > 0, n_2 = 0, \\ P'_{0, n_2}(t) &= -(\lambda + \mu_2)P_{0, n_2}(t) + \mu_1 P_{1, n_2-1}(t) + \mu_2 P_{0, n_2+1}(t), \quad n_2 > 0, n_1 = 0, \\ P'_{n_1, n_2}(t) &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{n_1, n_2}(t) + \lambda P_{n_1-1, n_2}(t) + \mu_1 P_{n_1+1, n_2-1}(t) + \\ &\quad \mu_2 P_{n_1, n_2+1}(t), \quad n_2 > 0, n_1 > 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Bu denklem sisteminde  $t \rightarrow \infty$  koşulu altında limit alırsak,

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\lambda P_{0, 0} + \mu_2 P_{0, 1}, \quad n_1 = n_2 = 0, \\ 0 &= -(\lambda + \mu_1)P_{n_1, 0} + \lambda P_{n_1-1, 0} + \mu_2 P_{n_1, 1}, \quad n_1 > 0, n_2 = 0, \\ 0 &= -(\lambda + \mu_2)P_{0, n_2} + \mu_1 P_{1, n_2-1} + \mu_2 P_{0, n_2+1}, \quad n_2 > 0, n_1 = 0, \\ 0 &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{n_1, n_2} + \lambda P_{n_1-1, n_2} + \mu_1 P_{n_1+1, n_2-1} + \mu_2 P_{n_1, n_2+1} \\ &\quad n_2 > 0, n_1 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Denklem sistemini elde ederiz. Denklem sisteminin çözümü,

$$P_{n_1, n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P_{0,0} \quad , n_2 \geq 0, n_1 \geq 0 \quad (4.37)$$

formülü elde edilir. Burada  $\rho_1 = \lambda/\mu_1, \rho_2 = \lambda/\mu_2$  dir. Bütün olasılıkları  $P_{0,0}$ (sistemin boş olması olasılığı) türünden yazılmıştır. Bilinmeyen  $P_{0,0}$  olasılığını  $\sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} P_{n_1, n_2} = 1$  ergodiklik koşulundan bulunur.

$$\sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} P_{n_1, n_2} = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} P_{0,0} = 1 \quad (4.38)$$

$$P_{0,0} \left( \frac{1}{1-\rho_1} \right) \left( \frac{1}{1-\rho_2} \right) = 1 \quad (4.39)$$

buradan,

$$P_{0,0} = (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \quad (4.40)$$

böylece;

$$P_{n_1, n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2), \quad n_2 \geq 0, n_1 \geq 0 \quad (4.41)$$

eşitliğibulunur. Buradan marjinal olasılıklar hesaplanırsa,

$$P_{n_1} = \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1, n_2} = \sum_{n_2=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$$

$$P_{n_1} = \rho_1^{n_1} (1 - \rho_1)$$

$$P_{n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} P_{n_1, n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)$$

$$P_{n_2} = \rho_2^{n_2} (1 - \rho_2) \quad (4.42)$$

bulunur. Böylece,

$$P_{n_1, n_2} = P_{n_1} P_{n_2} \quad (4.43)$$

olduğu görülür. Yani alt sistemlerdeki müşteri sayıları bağımsızdır.

a. Sistemdeki ortalama müşteri sayısı:

$$L = E(N_1, N_2) = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} (n_1 + n_2) P_{n_1, n_2} = \sum_{n_1}^{\infty} \sum_{n_2}^{\infty} (n_1 + n_2) \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) = \{ \rho_1 / (1 - \rho_1) \} + \{ \rho_2 / (1 - \rho_2) \} \quad (4.44)$$

olarak bulunur.

b. Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı:

Kuyrukta bekleyen müşterilerin ortalama sayısı  $Q = Q_1 + Q_2$  şeklindedir. Burada  $Q_1$  ve  $Q_2$  sırası ile 1-inci ve 2-nci kanalın önünde bekleyen müşteri sayısıdır.  $M/M/1$  sisteminde ortalama müşteri sayısı formülü kullanıldığında,

$$Q_1 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} \quad \text{ve} \quad Q_2 = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} \quad (4.45)$$

elde ederiz. Böylece,

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} \quad (4.46)$$

eşitliği bulunur.

c. Sistemde ortalama kalma süresi:

Sistemde kalma süresi, ilk kanal önündeki kuyruğa giriş anı ile ikinci kanaldaki hizmetin bitiş anı arasındaki süredir.

$T_1$ : Bir müşterinin 1-inci sistemde kalma süresi

$T_2$ : Bir müşterinin 2-nci sistemde kalma süresi

$T_1$  ve  $T_2$ 'yi aşağıdaki biçimde gösterelim.

$$T_1 = X_1' + X_2 + \dots + X_{N_1+1}, T_2 = Y_1' + Y_2 + \dots + Y_{N_2+1} \quad (4.47)$$

Burada,  $X_i \sim \exp(\mu_1)$  ve  $Y_i \sim \exp(\mu_2)$  dir.  $X_i$  ve  $Y_i$ 'ler bağımsızdır.

$N_1$  ve  $N_2$  sırasıyla 1-inci ve 2-nci sistemdeki müşteri sayısı olmak üzere Jackson teoremine göre;

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2) = P_{n_1, n_2} = \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2), n_{1,2} \geq 0 \quad (4.48)$$

eşitliği elde edilir.

**Teorem:**  $T_1$  ve  $T_2$  bağımsız tesadüfi değişkenlerdir.

**İspat:**  $(T_1, T_2)$ 'nin Laplace dönüşümü  $\varphi(u, v)$ ,  $T_1$  ile  $T_2$ 'nin Laplace dönüşümleri sırasıyla  $\varphi_1(u)$  ve  $\varphi_2(v)$  olsun.  $T_1$  ve  $T_2$ 'nin bağımsız olduğunu göstermek için;

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(u) \varphi_2(v) \quad (4.49)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\varphi(u, v) = E(e^{-uT_1} e^{-vT_2}) \quad (4.50)$$

eşitliği elde edilir.

Tam olasılık teoremi gereğince,

$$\varphi(u, v) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} E(e^{-uT_1} e^{-vT_2} \setminus N_1 = n_1, N_2 = n_2) P_{n_1 n_2} \quad (4.51)$$

eşitliği bulunur (A. Shahbazov, 2005).

$$\varphi(u, v) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} E \left[ e^{-u(X_1+X_2+\dots+X_{n_1+1})} e^{-v(Y_1+Y_2+\dots+Y_{n_2+1})} \right] \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \quad (4.52)$$

$$\varphi(u, v) = \sum_{n_1=0}^{\infty} E \left[ e^{-u(X_1+X_2+\dots+X_{n_1+1})} \right] \rho_1^{n_1} (1 - \rho_1) \sum_{n_2=0}^{\infty} E \left[ e^{-v(Y_1+Y_2+\dots+Y_{n_2+1})} \right] \rho_2^{n_2} (1 - \rho_2) \quad (4.53)$$

Her bir  $X_i$  ve  $Y_i$ 'nin Laplace dönüşümü,

$$E(e^{-uX_i}) = \frac{\mu_1}{\mu_1+u}, \quad E(e^{-vY_i}) = \frac{\mu_2}{\mu_2+v}. \quad (4.54)$$

eşitliği elde edilir. Hem  $X_i$ 'ler, hem de  $Y_i$ 'ler bağımsız olduğundan,

$$E \left[ e^{-v(Y_1+Y_2+\dots+Y_{n_2+1})} \right] = \left( \frac{\mu_2}{\mu_2+v} \right)^{n_2+1} \quad (4.55)$$

$$E \left[ e^{-u(X_1+X_2+\dots+X_{n_1+1})} \right] = \left( \frac{\mu_1}{\mu_1+u} \right)^{n_1+1} \quad (4.56)$$

eşitlikler yazılır. Buradan,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(u, v) &= \sum_{n_1}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu_1+u} \right)^{n_1+1} \rho_1^{n_1} (1 - \rho_1) \sum_{n_2}^{\infty} \left( \frac{\mu_2}{\mu_2+v} \right)^{n_2+1} \rho_2^{n_2} (1 - \rho_2), \\ \varphi(u, v) &= (1 - \rho_1) \left( \frac{\mu_1}{\mu_1+u} \right) \sum_{n_1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu_1+u} \right)^{n_1} (1 - \rho_2) \left( \frac{\mu_2}{\mu_2+v} \right) \sum_{n_2}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu_2+v} \right)^{n_2}, \\ \varphi(u, v) &= (1 - \rho_1) \left( \frac{\mu_1}{\mu_1+u} \right) \left[ \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu_1+u}} \right] (1 - \rho_2) \left( \frac{\mu_2}{\mu_2+v} \right) \left[ \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu_2+v}} \right], \\ \varphi(u, v) &= \left[ \frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_1 - \lambda + u} \right] \left[ \frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_2 - \lambda + v} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

eşitlik (4.57) bulunur. Burada  $v = 0$  alınırsa,

$$\varphi_1(u) = \varphi(u, 0) = \left[ \frac{\mu_1 - \lambda}{\mu_1 - \lambda + u} \right] \quad (4.58)$$

eşitliği bulunur.  $u = 0$  alınırsa,

$$\varphi_2(v) = \varphi(0, v) = \left[ \frac{\mu_2 - \lambda}{\mu_2 - \lambda + v} \right] \quad (4.59)$$

eşitliği bulunur. Böylece,

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(u) \varphi_2(v)$$

elde edilir.

$T_1$ 'in dağılım fonksiyonu;

$$P(T_1 < x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu_1 - \lambda)t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

şeklinde yazılır. Ortalaması,

$$E(T_1) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} \quad (4.61)$$

bulunur. Benzer şekilde  $T_2$ 'in dağılım fonksiyonu;

$$P(T_2 < y) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu_2 - \lambda)t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.62)$$

şeklinde yazılır. Ortalaması,

$$E(T_2) = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} \quad (4.63)$$

bulunur.

Sistemdeki ortalama kalma süresi  $T = T_1 + T_2$  olduğundan;

$$E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda} \quad (4.64)$$

eşitliği ile ifade edilir. Görülüyor ki sistemde ortalama kalma süresi  $\mu_1 - \lambda$  ve  $\mu_2 - \lambda$  parametreleri ile hipoüstel dağılım göstermektedir. Böylece bu sistem için momentler hesaplanabilir.

$$E[X] = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

$$E[X^2] = \frac{2}{(\mu_1 - \lambda)^2} + \frac{2}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)} + \frac{2}{(\mu_2 - \lambda)^2}$$

⋮

$$E(X^k) = \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)^k} + \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)^{(k-1)}(\mu_2 - \lambda)} + \dots + \frac{k!}{(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)^{(k-1)}} + \frac{k!}{(\mu_2 - \lambda)^k}$$

Bu momentler yardımıyla bekleme süresinin varyansı, çarpıklığı ve basıklığı kolayca hesaplanabilir.

d. Kuyrukta ortalama kalma süresi:

Birinci kuyrukta ve ikinci kuyrukta bir müşterinin ortalama bekleme süresi sırasıyla  $W_1$  ve  $W_2$  olsun. Bir müşterinin servislerde ortalama hizmet süreleri,

$$E(X_i) = 1/\mu_1 \quad \text{ve} \quad E(Y_i) = 1/\mu_2 \quad \text{dir.} \quad (4.65)$$

$$W_1 = T_1 - X_i$$

$$E(W_1) = E(T_1 - X_i) = E(T_1) - E(X_i) = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} - \frac{1}{\mu_1} = \frac{\rho_1}{\mu_1 - \lambda} = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \quad (4.66)$$

bulunur. Benzer yolla,

$$E(W_2) = E(T_2 - Y_i) = E(T_2) - E(Y_i) = \frac{1}{\mu_2 - \lambda} - \frac{1}{\mu_2} = \frac{\rho_2}{\mu_2 - \lambda} = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \quad (4.67)$$

eşitliği yazılır. Böylece,

$$E(W) = E(W_1 + W_2) = E(W_1) + E(W_2) = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} + \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} \quad (4.68)$$

Bir müşterinin servislerde ortalama hizmet süreleri eşitlik (4.68)'deki gibi bulunur.



## 5. FAZ TİPİ DAĞILIMLAR

Tek kanallı seri veya paralel fazlardan oluşan hizmet sistemlerini analiz etmek için bazı dağılımların bilinmesine ihtiyaç vardır. Bu bağlamda üstel dağılım yaygın bir biçimde kullanılır. Bunun nedeni dağılımın belleksizlik özelliğindedir. Fakat bazen hizmet yerleri birden fazla ünitelerden meydana gelebilir, dolayısıyla bu da bizi üstel dağılımın işlenebilirliğini kaybetmeksizin genel dağılımlı modeller oluşturmaya götürebilir.

Bu durumda faz tipi dağılımlardan bahsetmek doğru olacaktır. Ayrıca varyans ve beklenen değer bilinirken dağılım türünü biçimlendirmek için faz tipi dağılım kullanışlı bir yöntem olacaktır.

### 5.1 Faz Tipi Dağılımlarda Seri ve Paralel Bileşenler

Faz tipi dağılımların uygulamalarında bileşenler seri veya paralel olarak ölçülebilirler. Bu bileşenlerin her biri kendi dağılımlarına sahiptirler.

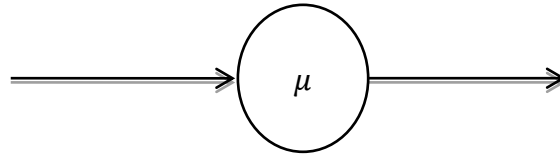
Seri bileşenler durumunda, herhangi bir bileşenin başarısızlığı sonucunda bütün sistem başarısızdır. Bu sistem doğrusal biçimde birbirine bağlanmış bileşenler dizisi gibi grafiksel olarak gösterilir. Bu yüzden eğer bir bileşen başarısızsa hat kopar ve bütün sistem başarısız olur. Sisteme daha çok bileşen eklendikçe sistem daha güvenilir hale gelmez.

Paralel bileşenler durumu için, bileşenlerden birinin çalışıyor olması halinde sistem henüz bozulmaz. Yani, ek bileşenler güvenilirliği arttırmak için sisteme dahil edilmiştir. Genellikle bu tür sistemler bileşenlerin toplamı gibi her biri ayrı satırlara, bir diğerrinin üzerine çizilir. Bu yüzden eğer bir hat ortadan kalkarsa diğerrleri hala çalışır durumdadır ve sistem bozulmaz. Faz tipi dağılımlarda en yaygın olanları, Erlan( $E_r$ ), Karma Erlang( $E_{r,r-1}$ ), Hipoüstel( $Hyp_r$ ), Coxian( $C_r$ ) ve Hiperüstel( $H_r$ ) dir. Çalışmada ayrıca seri faz tipli dağılımın temelini oluşturan Erlang-2 ( $E_2$ )'den bahsedeceğiz ve ikinci aşamada Hiperüstel dağılıma sahip Faz tipini kullanacağımızdan da bu faz tipini detaylı bir biçimde vereceğiz.

## 5.2 Erlang-2 Dağılımı

Faz dağılımı (aşamalı da denilebilir) ismini üstel fazın ve ya aşamanın art arda geçişi olarak gösterilebildiği olaydan alır. Biz tek üstel fazdan oluşan üstel dağılımı inceleyerek başlayacağız. Tartışmayı daha da somut hale getirmek için, bir servis merkezinde bir müşterinin hizmet zamanını ifade eden  $X$  tesadüfi değişkenini ele alalım. Müşterinin hizmette harcadığı zamanla ilgileneceğiz, eğer varsa kuyrukta beklenen zamanı önemsemeyeceğiz. Bu servis zamanının  $\mu > 0$  parametrelili üstel dağıldığını varsayalım.

Şekil 5.1. grafiksel olarak üstel dağılımın parametrelerini kapsayan bir daire tarafından tek üstel faz olarak gösterilmiştir. Müşteriler sol taraftan sisteme girerek hizmete alınırlar, sistemde biraz zaman harcarlar ki bu  $\mu$  parametrelili üstel dağılmıştır ve sağ taraftan da çıkarlar.



Şekil 5.1. Bir üstel hizmet faz

Üstel dağılımın yoğunluk fonksiyonunu;

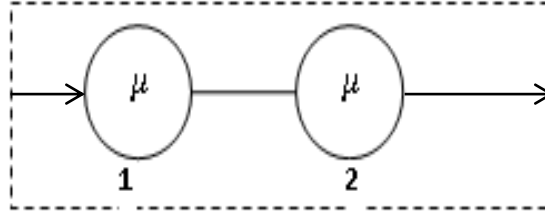
$$f_X(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \mu e^{-\mu x} , \quad x \geq 0 \quad (5.1)$$

Üstel dağılımın beklenen değeri ve varyansı;

$$E(X) = \frac{1}{\mu} , \quad Var(X) = \sigma_x^2 = \frac{1}{\mu^2} \quad (5.2)$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi de bir fazda müşteriye hizmet verildiğinde takibinde ikinci bir faz olduğu zaman ne olacağını ele alalım. Grafiksel olarak Şekil 5.2.'de gösterilmiştir.



**Şekil 5.2.** Tandembişimde iki üstel faz

Bir müşteri hizmet sürecine girdiğinde hemen ilk fazda  $\mu$  parametrelili üstel dağılımı hizmet süreci başlar. Hizmetin bu fazı tamamlandıktan sonra hemen ikinci fazda hizmet başlar ki bu da  $\mu$  parametrelili üstel dağılımıdır. İkinci fazın sonunda müşteri ayrılır ve hizmet süreci diğer müşterinin servisine başlamak için hazırdır. Dikkat edilirse her iki hizmet fazı da aynı parametrelili üstel dağılıma sahiptir ve fazlar birbirinden tamamen bağımsızdır.

Servis sistemi iki bağımsız hizmet veren içermez. Yani, herhangi bir zamanda iki müşteriye aynı anda hizmet verilemez. Şekil 5.2'deki sistemi dikkate alıyoruz.

Şimdi bu sistemde müşterinin toplamda harcadığı zamanın dağılımını araştıracağız. İki bağımsız ve aynı dağılımı üstel tesadüfi değişkenlerin toplamı bir tesadüfi değişkendir.  $Y$ ,  $\mu$  parametrelili üstel dağılımı tesadüfi değişken,  $X$ 'de  $X = Y + Y$  olsun. Konvülasyon formülünden iki bağımsız tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\left. \begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_Y(x-y)dy \\ f_X(x) &= \int_0^x \mu e^{-\mu y} \mu e^{-\mu(x-y)} dy \\ f_X(x) &= \mu^2 e^{-\mu x} \int_0^x dy \\ f_X(x) &= \mu^2 x e^{-\mu x} , x \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

şeklinde bulunur. Bu Erlang-2 dağılımına sahip tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonudur.  $E_2$  ile ifade edilebilir.

İlgili kümülatif dağılım fonksiyonu şu şekildedir.

$$F_X(x) = 1 - e^{-\mu x} - \mu x e^{-\mu x} = 1 - e^{-\mu x} (1 + \mu x) , x \geq 0 \quad (5.4)$$

Laplace dönüşümünü kullanmak yararlı olacaktır. Toplam hizmet süresi dağılımının Laplace dönüşümü, bağımsız fazların Laplace dönüşümünün bir ürünüdür. Toplam hizmet süresi dağılımının Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi olur.

$$L_X(s) = E(e^{-sx}) \equiv \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x) dx \quad (5.5)$$

$$L_X(s) = E(e^{-sx}) = E(e^{-s(y+y)}) = E(e^{-sy})E(e^{-sy}) = [E(e^{-sy})]^2 \quad (5.6)$$

Her bir üstel fazın Laplace dönüşümü yine aşağıda belirtildiği gibidir.

$$L_Y(s) = E(e^{-sy}) \equiv \int_0^{\infty} e^{-sy} f_Y(y) dy = \frac{\mu}{\mu+s} \quad (5.7)$$

eşitlikteki gibi olur.

$$L_X(s) = \left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)^2 \quad (5.8)$$

eşitliği ile gösterilir. Bütün momentler Laplace dönüşümünden aşağıdaki eşitlikle bulunur.

$$E[X^k] = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial s^k} L_X(s) \Big|_{s=0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

ortalama ve varyansı bulalım.

$$E[X] = -\frac{\partial}{\partial s} L_X(s) \Big|_{s=0} = -\mu^2 \frac{\partial}{\partial s(s+\mu)^{-2}} \Big|_{s=0} \quad (5.10)$$

$$E[X] = \mu^2 2 (s + \mu)^{-3} \Big|_{s=0}$$

$$E[X] = \frac{2}{\mu}$$

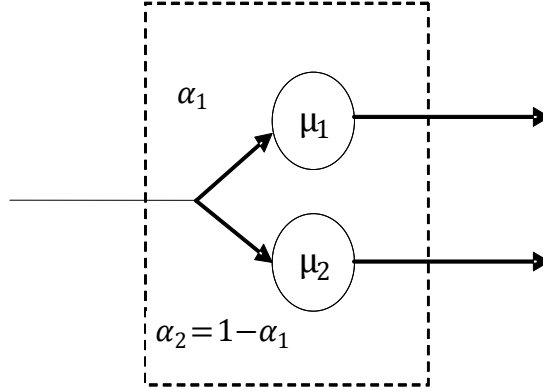
$$E[X^2] = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} L_X(s) \Big|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s} [-\mu^2 2 (s + \mu)^{-3}] \Big|_{s=0} \quad (5.11)$$

$$E[X^2] = 6\mu^2 (s + \mu)^{-4} \Big|_{s=0}$$

$$E[X^2] = \frac{6}{\mu^2} \Rightarrow V[X] = \frac{6}{\mu^2} - \frac{4}{\mu^2} = \frac{2}{\mu^2} \quad (5.12)$$

### 5.3 Hiperüstel Dağılım

Şimdi amacımız, üstel dağılımdan daha büyük görelî varyansa sahip bir faz tipi bulmaktır. Şekil 5.3.'de sunulan yapılandırmayı ele alalım. Eğer böyle bir dağılım serviste uygulanırsa, bir müşteri hizmete girdiğinde  $\alpha_1$  olasılığı ile üst taraftaki  $\mu_1$  parametrelî üstel fazda hizmet alır ve hizmetten ayrılır veya  $\alpha_2$  olasılığı ile alt taraftaki  $\mu_2$  parametrelî üstel fazda hizmet alır ve hizmetten ayrılır.



**Şekil 5.3.** Paralel biçimde iki üstel faz

Bir müşterinin hizmette harcadığı zamanın yoğunluk fonksiyonu şu şekilde verilir.

$$f_X(x) = \alpha_1 \mu_1 e^{-\mu_1 x} + \alpha_2 \mu_2 e^{-\mu_2 x}, \quad x \geq 0 \quad (5.13)$$

İlgili kümülatif dağılım fonksiyonu da şu şekildedir.

$$F_X(x) = \alpha_1 (1 - e^{-\mu_1 x}) + \alpha_2 (1 - e^{-\mu_2 x}), \quad x \geq 0 \quad (5.14)$$

Laplace dönüşümü;

$$L_X(s) = \alpha_1 \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + \alpha_2 \frac{\mu_2}{s + \mu_2} \quad (5.15)$$

şeklinde. Birinci ve ikinci momentleri sırasıyla;

$$E[X] = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2} \quad (5.16)$$

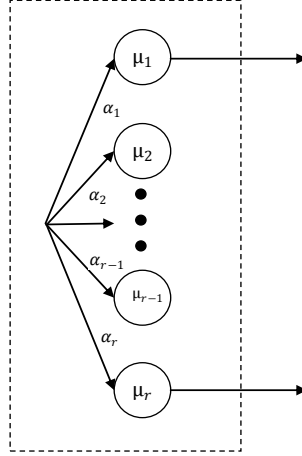
$$E[X^2] = \frac{2\alpha_1}{\mu_1^2} + \frac{2\alpha_2}{\mu_2^2} \quad (5.17)$$

eşitliklerinde verilmiştir. Göreli varyansıda varyansın  $E[X^2] - (E[X])^2$  formülünden yararlanarak hesaplanabilir.

$$C_X^2 = \frac{E[X^2] - (E[X])^2}{(E[X])^2} = \frac{E[X^2]}{(E[X])^2} - 1 = \frac{(2\alpha_1 \mu_1^2 + 2\alpha_2 \mu_2^2)}{(\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2)^2} - 1 \geq 1. \quad (5.18)$$

Eşitlikte verilen değişim katsayısının 1'den büyük olduğunu ileriki bölümlerde anlatacağımız çoklu paralel faz anlatırken ispatlayacağız.

Şimdide paralel faz sayısını artırarak servis olanaklarını genişletelim. Şekil 5.4.'de görüldüğü gibi  $r$  tane paralel faza sahibiz ve  $i$  fazda hizmet alma olasılığı  $\alpha_i$ 'ye eşittir ( $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ ).



Şekil 5.4. Paralel biçimdeçoklu üstel fazlar

Bu faz dağılımı için yoğunluk fonksiyonu ve Laplace dönüşümü şu şekildedir.

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu_i e^{-\mu_i x} \quad , \quad x \geq 0 \quad (5.19)$$

$$L_X(s) = \sum_{i=1}^r \frac{\alpha_i \mu_i}{s + \mu_i} \quad (5.20)$$

Bu dağılım hiperüstel dağılım olarak bahsedilir. İlk iki momenti ise sırasıyla;

$$E[X] = \sum_{i=1}^r \frac{\alpha_i}{\mu_i} \quad (5.21)$$

$$E[X^2] = 2 \sum_{i=1}^r \frac{\alpha_i}{\mu_i^2} \quad (5.22)$$

elde ederiz.

Görelî varyansı ise şu şekildedir;

$$C_X^2 = \frac{E[X^2]}{(E[X])^2} - 1 = \frac{(2 \sum_{i=1}^r \alpha_i |\mu_i^2|)}{(\sum_{i=1}^r \alpha_i |\mu_i|)^2} - 1 \quad (5.23)$$

eşitlik ile ifade edilir. Şimdi de görelî varyansın 1'e eşit veya 1'den büyük olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki eşitsizliği gözlemlemek yeterli olacaktır.

$$(\sum_{i=1}^r \alpha_i |\mu_i|)^2 \leq (\sum_{i=1}^r \alpha_i |\mu_i^2|) \quad (5.24)$$

Bu da bize Cauchy – Schwartz eşitsizliğini kullanmamızı gerektirir.  $a_i$  ve  $b_i$  durumları için bu eşitsizliği gösterecek olursak;

$$(\sum_i a_i b_i)^2 \leq (\sum_i a_i^2)(\sum_i b_i^2) \quad (5.25)$$

şeklinde bulunur. Burada  $a_i = \sqrt{\alpha_i}$  ve  $b_i = \sqrt{\alpha_i}/\mu_i$  olarak alınıp yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak;

$$\left(\sum_i \frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)^2 = \left(\sum_i \sqrt{\alpha_i} \frac{\sqrt{\alpha_i}}{\mu_i}\right)^2 \leq \sum_i \sqrt{\alpha_i}^2 \sum_i \left(\frac{\sqrt{\alpha_i}}{\mu_i}\right)^2 \quad (5.26)$$

$$\left(\sum_i \frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)^2 \leq \left(\sum_i \alpha_i\right) \left(\sum_i \frac{\alpha_i}{\mu_i^2}\right) \quad (5.27)$$

$$\sum_i \alpha_i = 1$$

olduğundan,

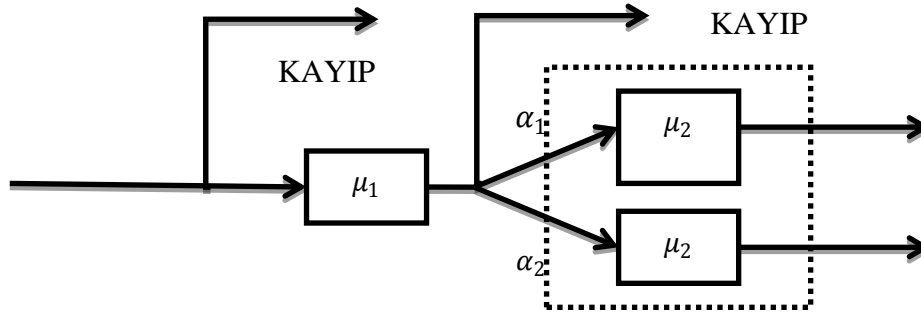
$$\left(\sum_i \frac{\alpha_i}{\mu_i}\right)^2 \leq \sum_i \frac{\alpha_i}{\mu_i^2}$$

istenilen eşitsizlik gösterilmiş oldu. Böylece Hiperüstele ait görelî varyansın 1'e eşit veya 1'den büyük olduğunu gösterilmiş oldu.



## 6. İKİNCİ AŞAMASI FAZ TİPLİ VE HETEROJEN KANALLI OLAN BİR TANDEM KUYRUK MODELİ

Bu çalışmada İki aşamalı yeni bir tandem kuyruk modeli verilecektir. Bu modelde müşteriler Poisson akımı ile sisteme gelirler. Birinci aşamada  $\mu_1$  parametrelili üstel dağılımlı tek bir kanal hizmet vermekte ve bu kanal önünde beklemeye müsaade edilmemektedir. İkinci aşamada ise paralel iki fazlı hizmet kanalları bulunmaktadır. Birinci aşamada hizmetini alan müşteri  $\alpha_1$  olasılığı ile ikinci aşamadaki birinci kanala ya da  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$  olasılıkla ikinci kanala hizmet için gelir. Bu kanalların hizmet süreleri de sırasıyla  $\mu_2$  parametreleri üstel dağılıma sahiptir. İkinci aşamada aynı anda iki kanal hizmet vermez. Bu bakımdan ikinci aşamadaki hizmet süresi faz tipi dağılıma uymaktadır. Birinci aşamada hizmetini alan müşteri ikinci aşamaya geçtiğinde buradaki hizmet kanallarından biri doluysa hizmet almadan sistemi terk eder. Yani kayıp meydana gelir.



Şekil 6.1. Stokastik model

Yukarıda tanımlanan kuyruk disiplini aşağıdaki gibi modellenir.

Birinci kanaldaki müşterilerin sayısı  $\xi(t)$ , ikinci aşamanın birinci fazındaki müşteri sayısını  $\eta_1(t)$  ve ikinci fazındaki müşteri sayısını  $\eta_2(t)$  ile gösterilsin. Bu bağlamda  $\{\xi(t), \eta_1(t), \eta_2(t); t \geq 0\}$  üç boyutlu Markov zinciri tanımlamaktadır.

$$P_{n,n_1,n_2}(t) = Prob\{\xi(t) = n, \eta_1(t) = n_1, \eta_2(t) = n_2\}. \quad (6.1)$$

Burada  $n \in \{0,1\}$ ,  $n_1 \in \{0,1\}$ ,  $n_2 \in \{0,1\}$  olmak üzere bu zincirin durum uzayı da,

$$E = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,0,1)\}. \quad (6.2)$$

şekildeki gibi olur. Durum olasılıkları  $\pi_{n,n_1,n_2}$  olarak gösterilebilir.

Denklem sistemi ve çözümü;

$P_{n,n_1,n_2}(t)$ ,  $n, n_1, n_2 \in \{0,1\}$  olasılıklarına ait geçiş durumları  $h$  çok kısa bir süre olmak üzere aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned}
 P_{000}(t+h) &= (1 - \lambda h + o(h))P_{000}(t) + (\mu_2 h + o(h))P_{010}(t) \\
 &\quad + (\mu_2 h + o(h))P_{001}(t) + o(h), \\
 P_{001}(t+h) &= (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu_2 h + o(h))P_{001}(t) \\
 &\quad + \alpha_2(\mu_1 h + o(h))P_{100}(t) + (\mu_1 h + o(h))P_{101}(t) + o(h), \\
 P_{010}(t+h) &= (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu_2 h + o(h))P_{010}(t) \\
 &\quad + \alpha_1(\mu_1 h + o(h))P_{100}(t) + (\mu_1 h + o(h))P_{110}(t) + o(h), \\
 P_{100}(t+h) &= (1 - \mu_1 h + o(h))P_{100}(t) + (\lambda(h) + o(h))P_{000}(t) \\
 &\quad + (\mu_2 h + o(h))P_{110} + (\mu_2 h + o(h))P_{010}(t) + o(h), \\
 P_{110}(t+h) &= (1 - \mu_1 h + o(h))(1 - \mu_2 h + o(h))P_{110}(t) \\
 &\quad + (\lambda(h) + o(h))P_{010}(t) + o(h), \\
 P_{101}(t+h) &= (1 - \mu_1 h + o(h))(1 - \mu_2 h + o(h))P_{101}(t) \\
 &\quad + (\lambda(h) + o(h))P_{001}(t) + o(h),
 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$h \rightarrow 0$  için  $P_{n,n_1,n_2}(t)$  olasılıkları için diferansiyel denklemler şöyledir.

$$\left. \begin{aligned}
 P'_{000}(t) &= -\lambda P_{000}(t) + \mu_2 P_{010}(t) + \mu_2 P_{001}(t) \\
 P'_{001}(t) &= -(\lambda + \mu_2)P_{001}(t) + \alpha_2 \mu_1 P_{100}(t) + \mu_1 P_{101}(t) \\
 P'_{010}(t) &= -(\lambda + \mu_2)P_{010}(t) + \alpha_1 \mu_1 P_{100}(t) + \mu_1 P_{110}(t) \\
 P'_{100}(t) &= -\mu_1 P_{100}(t) + \lambda P_{000}(t) + \mu_2 P_{110}(t) + \mu_2 P_{010}(t) \\
 P'_{110}(t) &= -(\mu_1 + \mu_2)P_{110}(t) + \lambda P_{010}(t) \\
 P'_{101}(t) &= -(\mu_1 + \mu_2)P_{101}(t) + \lambda P_{001}(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{n,n_1,n_2}(t) = \pi_{n,n_1,n_2} \quad \text{ve} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P'_{n,n_1,n_2}(t) = 0 \quad (6.5)$$

Bu Markov zincirine ait fark denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned}
 0 &= -\lambda \pi_{000} + \mu_2 \pi_{010} + \mu_2 \pi_{001} \\
 0 &= -(\lambda + \mu_2) \pi_{001} + \alpha_2 \mu_1 \pi_{100} + \mu_1 \pi_{101} \\
 0 &= -(\lambda + \mu_2) \pi_{010} + \alpha_1 \mu_1 \pi_{100} + \mu_1 \pi_{110} \\
 0 &= -\mu_1 \pi_{100} + \lambda \pi_{000} + \mu_2 \pi_{110} + \mu_2 \pi_{101} \\
 0 &= -(\mu_1 + \mu_2) \pi_{110} + \lambda \pi_{010} \\
 0 &= -(\mu_1 + \mu_2) \pi_{101} + \lambda \pi_{001}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

## 6.1 Geçiş Olasılıkları

$\pi_{n,n_1,n_2}$ 'ler  $\pi_{100}$  cinsinden yazılırsa,

$$\left. \begin{aligned} \pi_{000} &= \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right] \pi_{100} \\ \pi_{010} &= \frac{\alpha_1 \mu_1 (\mu_1+\mu_2)}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)} \pi_{100} \\ \pi_{001} &= \frac{\alpha_2 \mu_1 (\mu_1+\mu_2)}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)} \pi_{100} \\ \pi_{101} &= \frac{\lambda \alpha_2 \mu_1}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)} \pi_{100} \\ \pi_{110} &= \frac{\alpha_1 \lambda \mu_1}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)} \pi_{100} \\ \pi_{100} &= \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right]} \\ \sum_n \sum_{n_1} \sum_{n_2} \pi_{n,n_1,n_2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

elde edilir.

$\pi_{100}$  olasılığını yukarıdaki denklemlerde yerine konulduğunda  $\pi_{n,n_1,n_2}$  geçiş olasılıkları bulunur.

$$\left. \begin{aligned} \pi_{000} &= \frac{\frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right]}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right]} \\ \pi_{010} &= \frac{\frac{\alpha_1 \mu_1 (\mu_1+\mu_2)}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)}}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right]} \\ \pi_{001} &= \frac{\frac{\alpha_2 \mu_1 (\mu_1+\mu_2)}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)}}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right]} \\ \pi_{101} &= \frac{\frac{\lambda \alpha_2 \mu_1}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)}}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right]} \\ \pi_{110} &= \frac{\frac{\alpha_1 \lambda \mu_1}{\mu_2 (\lambda+\mu_1+\mu_2)}}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1+\mu_2} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

## 6.2 Kaybolma Olasılığı

Bu modelde kaybolma olasılığı iki farklı biçimdedir:

a. Birinci kanal önünde kaybolma olasılığı  $\Pi_{loss}^{(1)}$  ile gösterelim.

$$\Pi_{loss}^{(1)} = \pi_{100} + \pi_{101} + \pi_{110} \quad (6.9)$$

$$\Pi_{loss}^{(1)} = \frac{1 + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)}}{\left[1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2}\right]} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_1} \quad (6.10)$$

biçiminde bulunur. Bu olasılık  $\lambda$  ve  $\mu_1$  ye bağlıdır.  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  olasılıklarına ve  $\mu_2$  parametresine bağlı değildir. Bunun sebebi birinci kanal önündeki kayboluşun ikinci kanalın parametrelerine bağlı olmamasıdır.

b. İkinci kanal önünde kaybolma olasılığı  $\Pi_{loss}^{(2)}$  ile gösterelim.

$$\Pi_{loss}^{(2)} = 1 - [\pi_{000} + \pi_{100}] \quad (6.11)$$

biçiminde bulunur. Veya;

$$\Pi_{loss}^{(2)} = \pi_{001} + \pi_{010} + \pi_{110} + \pi_{101} \quad (6.12)$$

$$\Pi_{loss}^{(2)} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \pi_{100} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\left[1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2}\right]} \quad (6.13)$$

bu ifadeden anlaşılacağı gibi  $\Pi_{loss}^{(2)}$ ,  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  olasılıklarına bağlı değildir.

### 6.3 Performans Ölçüleri

i) sistemdeki ortalama müşteri sayısı,

$$E(N) = \sum_n \sum_{n_1} \sum_{n_2} (n + n_1 + n_2) \pi_{n,n_1,n_2} \quad (6.14)$$

$$= \pi_{001} + \pi_{010} + \pi_{100} + 2(\pi_{110} + \pi_{101}),$$

$$= \left[ \frac{1 + \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{2\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)}}{1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2}} \right]$$

$$V(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 \quad (6.15)$$

$$E(N^2) = \sum_n \sum_{n_1} \sum_{n_2} (n + n_1 + n_2)^2 \pi_{n,n_1,n_2} \quad (6.16)$$

$$= \pi_{001} + \pi_{010} + \pi_{100} + 4(\pi_{110} + \pi_{101}),$$

$$= \left[ \frac{1 + \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{4\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)}}{1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2}} \right]$$

$$V(N) = \left[ \frac{1 + \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{4\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)}}{1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2}} \right]^2 - \left[ \frac{1 + \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{2\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)}}{1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2}} \right]^2 \quad (6.17)$$

ii) sistemdeki müşteri sayılarının bağımlılığı,

$N_1$ : 1. aşamadaki müşteri sayısı,  $N_2$ : 2. aşamadaki müşteri sayısını gösterebilir.

$$\pi_k = P(N_1 = k) , k = 0,1 ; \quad (6.18)$$

$$\pi_{00} = P(N_2 = 0) , \pi_{01} = P(N_2 = 1) , \pi_{10} = P(N_2 = 1) \quad (6.19)$$

olarak tanımlansın.  $M/M/c/0$  denkleminde  $c = 1$  alınır,

$$\pi_0 = \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1} , \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_1} \quad (6.20)$$

olarak bulunur. 1. sistem önünde kaybolma olduğu için 2. sisteme müşteriler  $\lambda$  ortalaması ile gelmezler. Bu yüzden  $\lambda_{eff} = \left(\frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1}\right)\lambda$  ortalama oranı ile 2. aşamadaki geçiş olasılıkları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\pi_{00} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1)}} \quad (6.21)$$

$$\pi_{10} = \left[\alpha_1 \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1)}\right] / \left[1 + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1)}\right] \quad (6.22)$$

$$\pi_{01} = \left[\alpha_2 \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1)}\right] / \left[1 + \frac{\lambda\mu_1}{\mu_2(\lambda + \mu_1)}\right] \quad (6.23)$$

Bu bağlamda örneğin  $\pi_{100} \neq \pi_1\pi_{00}$  olduğundan genel olarak,

$\pi_{n_1 n_2} \neq \pi_{n_1} \pi_{n_2}$  olur.

Böylece 1. ve 2. aşamadaki müşteri sayıları bağımlıdır.

iii) sistemdeki ortalama bekleme süresi,

$T$  müşterinin sistemde kalma süresi olsun. Tam beklenen formülü gereğince,

$$E(T) = P(A)E(T/A) + P(\bar{A})E(T/\bar{A}) \quad (6.24)$$

olur. Burada A olayı müşterinin birinci kanalın sonunda kaybolmasıdır.

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  ve aşağıdaki koşullu beklenen değerler verilir.

$$E(T/A) = \frac{1}{\mu_1} \quad (6.25)$$

$$E(T/\bar{A}) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \quad (6.26)$$

eşitlikleri bulunur. Bununla birlikte,

$$P(A) = \Pi_{loss}^{(2)} \quad (6.27)$$

eşitliği buluruz. Böylece bir müşterinin sistemde ortalama bekleme süresi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(T) = \frac{1}{\mu_1} + \left( 1 - \left[ \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2} \right]} \right] \right) \left( \frac{1}{\mu_2} \right) \quad (6.28)$$

$$E(T) = \frac{1}{\mu_1} + \left( \frac{1 + \frac{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_2(\lambda + \mu_1 + \mu_2)}}{\left[ 1 + \frac{\mu_1}{\lambda} + \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1 + \mu_2} \right]} \right) \left( \frac{1}{\mu_2} \right) \quad (6.29)$$

## 7. SONUÇ

Bu çalışmanın giriş bölümünde tezin amacını ve literatür çalışması verildi. İkinci bölümde Genel bilgiler verilerek stokastik süreçler ve gerekli tüm tanımlar yapıldı. Daha sonra Markov zincirleri ifade edildi. Dördüncü bölümde ise Stokastik kuyruk sistemlerin tek kanallı, paralel çok kanallı ve seri (tandem) kanallı kuyruk sistemlerine ait fark ve diferansiyel denklemlerin daha sonrada denge durum denklemlerinin nasıl oluşturulduğu gösterildi.

Sözü edilen denklemlerden yararlanılarak geçiş olasılıkları ile performans ölçülerinin bulunması açıklandı. Beşinci bölümde ise Faz tipi kuyruk modellerinden bahsedildi.

Altıncı bölüm ise bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturulmaktadır: Bu tezde iki aşamalı bir kuyruk modeli analiz edildi. Bu stokastik kuyruk sisteminin kanallarındaki müşteri sayıları herhangi bir  $t$  süresi için 3 boyutlu Markov zinciri ile ifade edilmektedir. İki aşamalı bu sistemin birinci aşamasında  $\mu_1$  parametrelili üstel dağılımlı tek hizmet kanalı bulunmakta ve kanal önünde beklemeye müsaade edilmemekte, ikinci aşamada ise iki fazlı paralel hizmet kanalları bulunmaktadır. Bununla birlikte paralel kanalların hizmet süreleri  $\mu_2$  parametrelili üstel hizmet süresine sahiptir. Sisteme gelen müşteri eğer birinci aşamadaki hizmet kanalı boş ise hizmetini alır. Eğer dolu ise sistemden ayrılır. Böylece birinci kaybolma gerçekleşmiş olur. Birinci aşamada hizmetini tamamlayan bir müşteri, eğer ikinci aşamadaki paralel faz kanallarının ikisinde boş ise hizmetini almak için ikinci aşamadaki faz kanallarından birincisini veya ikincisini sırası ile  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$ , ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ) olasılıkları ile tercih eder. Eğer ikinci aşamadaki paralel faz kanallardan herhangi biri dolu ise müşteri sistemi terk eder ve ikinci kayıp meydana gelir. Birinci ve ikinci aşamada hizmetini tamamlayan müşteri sistemden ayrılır. Bu modelin diferansiyel ve fark denklemleri bulunmuş ve limit dağılımı yardımı ile steady-state denklemleri elde edildi. Bu denklemler çözülerek geçiş olasılıkları bulundu. Geçiş olasılıkları yardımı ile sistemde ortalama müşteri sayısı ve sistemde ortalama bekleme süreleri elde edildi. Birinci ve ikinci aşamadaki müşteri sayılarının bağımlı olduğu görüldü. Ayrıca birinci ve ikinci kaybolma olasılıkları hesaplandı. Birinci aşamadaki kaybolma olasılığının sadece geliş akımına ve birinci aşamadaki hizmet süresine bağlı olduğu, ancak ikinci aşamadaki hizmet süresine ve  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  olasılıklarına bağlı olmadığı gösterildi. İkinci aşamadaki kaybolma olasılığı geliş

akımına birinci aşamadaki hizmet süresine ve ikinci aşamadaki paralel faz kanallarının hizmet sürelerine bağlı olduğu, fakat  $\alpha_1, \alpha_2$  olasılıklara bağlı olmadığı gösterildi.

## KAYNAKLAR

- Bhat U. N., 2008. An Introduction to Queuing Theory, New York.
- Cox D. R., 1955. "A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. Proc. Camb. Phil. Soc.," 313-19.
- Gross D., Harris M. C., 1974. Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley and Sons, p.12.
- Halaç O., 1991. Kaltitatif Karar Verme Teknikleri (Yöneylem Araştırması), İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi, Evrim Dağıtım, İstanbul.
- Karlin S., Taylor, H.M., 1975. A First Course in Stochastic Processes, Academic Pres, New York, San Fransisco, London, 556 p.
- Kleinrock L., 1975. Queueing Systems, John Wiley & Sons, Inc. Los Angeles, 414 p.
- Marie R., 1980. "Calculating Equilibrium Probabilities for  $\lambda(n)/C_k/1/N$  Queues," *ACM Sigmetrics Performance Evaluation Review*, Vol. 9, No.2.
- Neuts F., 1975. "Probability distributions of phase type, in Liber Amicorum Professor Emeritus H.Florin, Department of Mathematics", University of Louvain, Louvain, Belgium 173-206.
- Pala R. E., Beloso, A.C., 1966. Hines W. W., Waiting Line Models An Introduction to Their Theory and Application, Reinhold Publishing Corporation, New York.
- Saaty, Thomas L, 1961. Elements of Queueing Theory With Applications, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.,S.21.
- Sağlam V. ve ark., 2014. "On optimization of a Coxian queueing model with twophases", *AppliedandComputationalMathematics*, doi: 10.11648/j.acm.20140302.11, 3(2): 43-47.
- Sağlam V., Zobu M., 2013. "A Two-Stage Model Queueingwith No WaitingLinebetweenChannels", *MathematicalProblems in Engineering*, vol.,Article ID 679369, 5 pages.
- Stewart W. J., 2009. "Probability, Markov Chains, Queues, Simulation, New Jersey".
- Torun H., 2002. İki Heterojen Kanallı Kuyruk Sistemi ve  $M/M/c'$  nin Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Zobu M., 2012. Faz Dağılımlı Kuyruk Sistemlerinde Hipotez Testleri İçin Ardışık Çözümleme Yönteminin Kullanılması, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Zobu M. ve ark., 2013. "The Simulation and Minimization of Loss Probability in the Tandem Queueing with Two Heterogeneous Channels," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013,Article ID 529010, 4, pages.

Zobu M., V. Sağlam, 2013. "Control of Traffic Intensity in Hyperexponential and Mixed Erlang Queueing Systems with a Method Based on SPRT", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 241241, 9 pages.

## **ÖZGEÇMİŞ**

**Adı Soyadı:** Fevziye MAHMUTOĞLU GÜNDOĞDU

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Rize/1976

**E-Posta:** fevziyemahmutoglu@gmail.com

**Lisans:** 2001 Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü

### **Mesleki Deneyim:**

2012 - Or-San Döküm İşleme San Tic., Samsun.

MUHASEBE – İNSAN KAYNAKLARI – SATIN ALMA SORUMLUSU

2005-2011 Rize Meslek Yüksek Okulu, Rize.

ÖĞRETİM GÖREVLİSİ

2009 – 2011 Gün-Mah. Müh.İnş.Turz.San.Tc.Ltd.Şti., Samsun.

GENEL MÜDÜR

2004-2005 Nema Yapı İnş. San Tic. Ltd. Şrk., İzmir.

VERİ GİRİŞ UZMANI

2004 - Vakıfbank, VakıfEmeklilik, İzmir.

FİNANSAL PLANLAMA UZMANI

2002 – 2004 Mahmutoglu İnş.San.Tic.Ltd.şrk., İzmir.

VERİ GİRİŞ UZMANI - SATIŞ GÖREVLİSİ

2000-2002 İstatistik ve Matematik Öğretmeni, İzmir.

MATEMATİK ÖĞRETMEN