

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ESNEK TOPOLOJİK GRUPLARIN KATEGORİSİ**

**Hazırlayan  
Halim AYZ**

**Danışman  
Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2022  
KAYSERİ**

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ESNEK TOPOLOJİK GRUPLARIN KATEGORİSİ  
(Yüksek lisans Tezi )**

**Hazırlayan  
Halim AYZ**

**Danışman  
Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR**

**Ağustos 2022  
KAYSERİ**

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Adı-Soyadı: Halim AYZ

İmza :

## YÖNERGEYE UYGUNLUK

"Esnek Topolojik Grupların Kategorisi" adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

Halim AYZ

Danışman

Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

## TEŞEKKÜR

“Esnek Topolojik Grupların Kategorisi” konulu tez çalışmasının seçimine, yürütülmesine ve sonuçlandırılmasına vakit ayıran ve bu bağlamda yardımlarını esirgemeyen hocam Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR’a çok teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde yapmıŐ oldukları fedakarlıktan, verdikleri maddi-manevi destekten, göstermiŐ oldukları sınırsız sevgi, sabır ve anlayıŐtan ötürü anneme ve babama teşekkür ederim. Ayrıca; çalıŐmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen aileme en içten teŐekkürlerimi sunarım.

ÇalıŐmalarım süresince sabır göstererek beni daima destekleyen sevgili eŐime ve biricik oğluma en içten teŐekkürlerimi sunarım.

Halim AYZ

Kayseri, Ağustos 2022

# ESNEK TOPOLOJİK GRUPLARIN KATEGORİSİ

Halim AYZ

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2022

Danışman: Doç. Dr. Nazmiye ALEMDAR

## ÖZET

Bu tez esnek topolojik grupların kategorisi üzerine hazırlanmıştır. Üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde esnek küme, kategori teorisi ile ilgili kavramlar ve bunların özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde topolojik grup, esnek topoloji ve esnek topolojik grup kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölümde esnek topolojik grupların morfizmi tanımlanmış ve kategorisi elde edilmiştir. Bu kategorinin bazı sonuçlarına ulaşılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Esnek kümeler; esnek topoloji; esnek topolojik grup; kategori;

esnek topolojik grupların kategorisi

## CATEGORY OF SOFT TOPOLOGICAL GROUPS

Halim AYZ

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, August 2022

Supervisor: Assoc. Doc. Dr. Nazmiye ALEMDAR

### ABSTRACT

This thesis is based on category of soft topological groups concepts and category theory. It consists of three parts.

In the first chapter, concepts related to soft set, category theory and their properties are given.

In the second chapter, the concepts of topological group, soft topology and soft topological group are given.

In the third chapter, the morphism of soft topological groups is defined and the category of the soft topological groups is obtained and also some results of this category have been reached.

**Keywords:** Soft sets; soft topology; soft topological group; category;

category of soft topological groups

## İÇİNDEKİLER

### ESNEK TOPOLOJİK GRUPLARIN KATEGORİSİ

|                                      | <u>Sayfa</u> |
|--------------------------------------|--------------|
| BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI..... | ii           |
| YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI.....      | iii          |
| KABUL VE ONAY SAYFASI.....           | iv           |
| TEŞEKKÜR.....                        | v            |
| ÖZET.....                            | vi           |
| ABSTRACT.....                        | vii          |
| İÇİNDEKİLER.....                     | viii         |
| GİRİŞ.....                           | 1            |

### 1. BÖLÜM

#### ESNEK KÜME VE KATEGORİ KAVRAMLARI İLE İLGİLİ ÖZELLİKLER

|   |   |
|---|---|
| 1.1. Esnek Küme Kavramı ve Özellikleri..... | 3 |
| 1.2. Kategori Kavramı ve Özellikleri.....   | 9 |

### 2. BÖLÜM

#### TOPOLOJİK GRUP, ESNEK TOPOLOJİ VE ESNEK TOPOLOJİK GRUP KAVRAMLARI

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| 2.1. Topolojik Grup.....       | 15 |
| 2.2. Esnek Topoloji.....       | 18 |
| 2.3. Esnek Topolojik Grup..... | 25 |

### 3. BÖLÜM

## ESNEK TOPOLOJİK GRUPLARIN KATEGORİSİ

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Esnek Topolojik Grupların Kategorisi..... | 28 |
| KAYNAKLAR.....                                 | 40 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                 | 42 |



## GİRİŞ

Dünyada bazı kavramlar fazlasıyla karmaşıktır, bu karmaşıklığı gidermek için bazı modeller oluşturulmuştur. Fakat bu modellerle kesin çözüme ulaşılamamıştır. Ayrıca, bir kişi bir çözüm elde etmeyi başarsa bile ilk verilerdeki çeşitli belirsizlikler nedeniyle, bu elde edilen çözüm nesneyi mükemmel bir şekilde tanımlamamıştır.

Belirsizliklerle ilgili sorunları ele almamızı sağlayan sistem geliştirmenin önemi o zaman ortaya çıkmıştır. Aslında, bunun için birkaç girişimde bulunulmuştur. Zadeh'in Bulanık Kümeler Teorisi [1] ve Pawlak'ın Kaba Kümeler Teorisi [2] bunlardan ikisidir. Bu belirsizliklerle baş etmek için ortaya atılan en önemli teorilerden biri de Molodtsov'un esnek kümeler teorisidir [3]. Molodtsov'un bu teoriyi tanımlamasındaki nedenlerinden biri, geleneksel teorilerin sahip olduğu bazı zorlukların üstesinden gelmektir. Aynı zamanda fizik, ekonomi ve mühendislik gibi alanlardaki çok çeşitli problemleri modellemeyle çözmeyi amaçlar ki gerçekten de Molodtsov'un [3] teorisi yönelem araştırması, oyun teorisi, olasılık teorisi gibi bilim dallarındaki problemleri çözmeye kullanılmıştır.

Başlangıçtaki nedenlerinden biraz farklı olmasına rağmen, esnek kümelerin matematiksel yönlerinin araştırılması da ilgi çekicidir. Birçok araştırmacı bu alana katkıda bulunmuştur: Maji ve arkadaşları [4] de esnek küme teorisinin temel kavramlarını tanımlamış ve incelemiştir. Esnek topolojik uzay Shabir ve Naz [5] ve Çağman ve arkadaşları [6] da eş zamanda tanımlamış ve özellikleri incelemiştir. Esnek grup kavramı Aktaş ve Çağman [7] de verilmiştir ve o zamandan beri bu kavram üzerinde yoğun çalışmalar yapılmıştır. Hida [8] esnek topolojik grup üzerine çalışmalar yapmıştır.

Monoid kategoriler ilk olarak, Bénabou tarafından 'çarpma ile kategori' adı altında [9] da ve Mac Lane tarafından 'bikategori' adı altında [10] da (iki kategori ile karıştırılmamalıdır) bağımsız olarak tanıtılmıştır. Monoid kategori, nesnelere ve morfizmlerin paralel olarak nasıl birleştirilebileceğini açıklayan ekstra verilerle

donatılmış bir kategoridir. Monoid kategorilerin, temel kategori teorisinin dışında çok sayıda uygulaması vardır. Sezgisel doğrusal mantığın çarpımsal parçası için modelleri tanımlamak için kullanılırlar. Ayrıca yoğun madde fiziğinde topolojik düzenin matematiksel temelini oluştururlar. Örgülü monoid kategorilerinin kuantum bilgisi, kuantum alan teorisi ve sicim teorisinde uygulamaları vardır. Herhangi bir kategoride sonlu çarpım mevcut ve bitiş objesi varsa çarpım, monoidal çarpım ve bitiş objesi birim olup bu kategori bir monoidal kategoridir. Benzer şekilde herhangi bir kategoride dual sonlu çarpım mevcut ve başlangıç objesi varsa dual çarpım, monoidal çarpım ve başlangıç objesi birim olup bu kategori bir monoid kategoridir. Bu tür kategorilere kartezyen monoid kategori denir [10]. Herhangi bir kartezyen monoid kategori bir simetrik monoid kategoridir [11]. Oyun teorisinde simetrik monoid kategori kullanılır. Açık oyunlar simetrik monoid kategorinin morfizmleridir ve bu nedenle kategorik kompozisyonla sıralı hareket oyunlarına ve monoid ürünlerle eşzamanlı hareket oyunlarına dönüştürülebilir. Açık oyunlar, bilgi akışlarının sezgisel ancak resmi bir görselleştirmesini sağlayan dizi diyagramları ile temsil edilebilir [12].

Bu tezde esnek topolojik grupların kategorisi oluşturup bazı sonuçları elde edildi. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de esnek küme kavramının ve kategori kavramının özellikleri verildi. Bölüm 2'de topolojik grup, esnek topoloji ve esnek topolojik grup kavramları verildi. Bölüm 3'te ise esnek topolojik grupların morfizmi tanımlandı ve kategorisi elde edildi. Bu kategorinin bitiş objesi elde edildi ve çarpımın varlığı gösterildi. Böylelikle esnek topolojik grupların kategorisinin bir simetrik monoidal kategori olduğu sonucuna varıldı.

## BÖLÜM 1

### ESNEK KÜME VE KATEGORİ

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız esnek küme ve kategori ile ilgili kavramlar ve özellikleri verildi.

#### 1.1. Esnek Küme ile İlgili Kavramlar ve Özellikleri

**Tanım 1.1.1.**  $U$  başlangıç evrensel kümesi,  $P(U)$  kümesi  $U$  üzerinde kuvvet kümesi ve  $E$  parametrelerin kümesi olsun.  $F : E \rightarrow P(U)$  bir küme değerli fonksiyon olmak üzere

$$F_E = \{(x, F(x)) : x \in E, F(x) \in P(U)\}$$

şeklinde tanımlanan  $F_E$  ye *esnek küme* denir [3].

Yukarıdaki  $F$  fonksiyonu yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılabilir.  $e \in E$  parametreleri ile alakalı nesnelere içeren  $F(e)$  kümesi de  $e$ -yaklaşım kümesi olarak adlandırılır.

**Örnek 1.1.1.**  $U$  göz önüne alınan cep telefonları ve  $E$  parametrelerin kümesi olsun.  $E = \{\text{pahalı, ucuz, sıfır, ikinci el, yerli üretim}\}$  olarak ele alalım. Esnek kümeyi ifade etmek için parametre kümesinin elemanlarını; pahalı cep telefonu, ucuz cep telefonu, sıfır cep telefonu, ikinci el cep telefonu, yerli üretim cep telefonu olarak ifade edeceğiz.

$U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  olarak alalım ve parametreleri  $e_1 = \text{pahalı}$ ,  $e_2 = \text{ucuz}$ ,  $e_3 = \text{sıfır}$ ,  $e_4 = \text{ikinci el}$  ve  $e_5 = \text{yerli üretim}$  olmak üzere  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  dir.

$$F(e_1) = \{a_2, a_4, a_6\}$$

$$F(e_2) = \{a_1, a_3\}$$

$$F(e_3) = \{a_2, a_4, a_6\}$$

$$F(e_4) = \{a_1, a_3, a_5\}$$

$$F(e_5) = \{a_1, a_2\}$$

şeklinde tanımlansın.

$F_E = \{(\text{pahalı cep telefonları}, \{a_2, a_4, a_6\}), (\text{ucuz cep telefonları}, \{a_1, a_3\}), (\text{sıfır cep telefonları}, \{a_2, a_4, a_6\}), (\text{ikinci el cep telefonları}, \{a_1, a_3, a_5\}), (\text{yerli üretim cep telefonları}, \{a_1, a_2\})\} = \{(e_1, \{a_2, a_4, a_6\}), (e_2, \{a_1, a_3\}), (e_3, \{a_2, a_4, a_6\}), (e_4, \{a_1, a_3, a_5\}), (e_5, \{a_1, a_2\})\}$  dir.

Bundan sonra esnek kümelerdeki nesnelere küme teorisindeki nesnelere ayırmak için  $(\tilde{\bullet})$  tilda sembolünü kullanacağız.

**Tanım 1.1.2.**  $U$  başlangıç evrensel kümesi ve  $E$  parametrelerin kümesi olsun. Her  $e \in E$  için  $F(e) = \Phi$  oluyorsa  $F_E$  esnek kümesine *esnek boş küme* denir ve  $\tilde{\Phi}$  ile gösterilir [13].

**Örnek 1.1.2.**  $U$  başlangıç evrensel kümesi olsun.  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  parametre kümesi için  $F(e_1) = F(e_2) = F(e_3) = \Phi$  olsun.  $F_E$  esnek kümesi esnek boş kümedir.

**Tanım 1.1.3.**  $U$  başlangıç evrensel kümesi ve  $E$  parametrelerin kümesi olsun. Her  $e \in E$  için  $F(e) = U$  oluyorsa  $F_E$  esnek kümesine *tamamen esnek küme* denir ve  $\tilde{U}$  ile gösterilir [13].

**Örnek 1.1.3.** Bir markette ürünlerin kümesi  $U = \{a_1, a_2, a_3\}$  ve parametrelerin kümesi  $e_1 = \text{ucuz}$  ve  $e_2 = \text{yerli}$  olmak üzere  $E = \{e_1, e_2\}$  olsun. Marketteki bütün ürünler  $F(e_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$  ve  $F(e_2) = \{a_1, a_2, a_3\}$  ise  $F_E = \tilde{U}$  tamamen esnek küme olur.

**Tanım 1.1.4.**  $F_E$  ve  $F'_{E'}$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $F_E$  ye  $F'_{E'}$  nün *esnek alt kümesi* denir ve  $F_E \tilde{\subset} F'_{E'}$  şeklinde gösterilir [13].

- (i)  $E \subset E'$
- (ii) Her  $e \in E$  için  $F(e) \subset F'(e)$  dir.

**Örnek 1.1.4.**  $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  başlangıç evrensel kümesi olsun. Parametre kümeleri  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  ve  $E' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  olmak üzere

$$F(e_1) = \{a_1, a_2\} \qquad F'(e_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$F(e_2) = \{a_3\} \qquad F'(e_2) = \{a_1, a_3\}$$

$$F(e_3) = \{a_4, a_5\} \qquad F'(e_3) = \{a_3, a_4, a_5\}$$

$$F'(e_4) = \{a_4, a_5\}$$

şeklinde tanımlansın.  $E \subset E'$  ve her  $e \in E$  için  $F(e) \subset F'(e)$  olduğu açıktır. Bu da  $F_E$  nin,  $F'_{E'}$  nün esnek alt kümesi olduğunu gösterir.

**Tanım 1.1.5.**  $F_E$  ve  $F'_{E'}$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer  $F_E \tilde{\subset} F'_{E'}$  ve  $F'_{E'} \tilde{\subset} F_E$  oluyorsa  $F_E$  ve  $F'_{E'}$  *esnek eşittir* denir ve  $F_E \cong F'_{E'}$  ile gösterilir [13].

**Tanım 1.1.6.**  $F_E$  ve  $F'_{E'}$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu iki esnek küme için  $H_C$  esnek kümesi,  $C = E \cap E'$  ve her  $e \in C$  için  $H(e) = F(e) \cap F'(e)$  şeklinde

tanımlansın.  $H_C$  ye  $F_E$  ile  $F'_{E'}$  nün *esnek kesişimi* denir ve  $F_E \tilde{\cap} F'_{E'}$  şeklinde gösterilir [13].

**Örnek 1.1.6.**  $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  başlangıç evrensel kümesi ve parametre kümeleri  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$  ve  $E' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  olmak üzere  $U$  üzerinde aşağıda verilen  $F_E$  ve  $F'_{E'}$  esnek kümelerini ele alalım.

$$F(e_1) = \{a_1, a_2, a_5\} \quad F'(e_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$F(e_2) = \{a_3, a_4\} \quad F'(e_2) = \{a_1, a_3\}$$

$$F(e_3) = \{a_1, a_4, a_5\} \quad F'(e_3) = \{a_3, a_4, a_5\}$$

$$F(e_5) = \{a_3, a_4\} \quad F'(e_4) = \{a_1, a_4\}$$

$$C = E \cap E' = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ için}$$

$$e_1 \in C \text{ için } F(e_1) \cap F'(e_1) = \{a_1, a_2\}$$

$$e_2 \in C \text{ için } F(e_2) \cap F'(e_2) = \{a_3\}$$

$$e_3 \in C \text{ için } F(e_3) \cap F'(e_3) = \{a_4, a_5\}$$

$$F_E \tilde{\cap} F'_{E'} = \{(e_1, \{a_1, a_2\}), (e_2, \{a_3\}), (e_3, \{a_4, a_5\})\} \text{ olur.}$$

**Tanım 1.1.7.**  $F_E$  ve  $F'_{E'}$ ,  $U$  üzerinde iki esnek küme ve bu iki esnek kümenin *esnek birleşimi*  $H_D$  esnek kümesi olsun. Burada  $D = E \cup E'$  olmak üzere her  $x \in D$  için

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in E - E' \\ F'(x) & , x \in E' - E \\ F(x) \cup F'(x) & , x \in E \cap E' \end{cases}$$

olarak tanımlanır.  $F_E$  ve  $F'_{E'}$  esnek kümelerinin esnek birleşimi  $F_E \tilde{\cup} F'_{E'}$  şeklinde gösterilir [13].

**Örnek 1.1.7.**  $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  başlangıç evrensel kümesi ve parametrelerin kümesi  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$  ve  $E' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  olmak üzere  $U$  üzerinde aşağıda verilen  $F_E$  ve  $F'_{E'}$  esnek kümelerini ele alalım.

$$F(e_1) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \quad F'(e_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$F(e_2) = \{a_3, a_4, a_5\} \quad F'(e_2) = \{a_1, a_2\}$$

$$F(e_3) = \{a_1, a_2, a_5\} \quad F'(e_3) = \{a_3, a_4, a_5\}$$

$$F(e_5) = \{a_1, a_2, a_3\} \quad F'(e_4) = \{a_3, a_4\}$$

$D = E \cup E'$  olmak üzere

$$e_1 \in E \cap E' \text{ için } F(e_1) \cup F'(e_1) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$e_2 \in E \cap E' \text{ için } F(e_2) \cup F'(e_2) = U$$

$$e_3 \in E \cap E' \text{ için } F(e_3) \cup F'(e_3) = U$$

$$e_5 \in E - E' \text{ için } F(e_5) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$e_4 \in E' - E \text{ için } F'(e_4) = \{a_3, a_4\}$$

$$F_E \tilde{\cup} F'_{E'} = \{(e_1, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}), (e_2, U), (e_3, U), (e_4, \{a_3, a_4\}), (e_5, \{a_1, a_2, a_3\})\}$$

olur.

**Tanım 1.1.8.**  $F_E, U$  üzerinde bir esnek küme olsun. Her  $e \in E$  için  $F^{\bar{c}}(e) = U \setminus F(e)$  olmak üzere  $F_E^{\bar{c}}$  ye  $F_E$  nin *esnek tümleyeni* denir [13].

**Örnek 1.1.8.**  $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  başlangıç evrensel kümesi ve  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  parametre kümesi için

$$F(e_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$F(e_2) = \{a_3, a_4\}$$

$F(e_3) = \{a_1, a_4, a_5\}$  olmak üzere  $F_E$  esnek kümesini göz önüne alalım.

$$F^{\tilde{c}}(e_1) = \{a_3, a_4\}$$

$$F^{\tilde{c}}(e_2) = \{a_1, a_2, a_5\}$$

$$F^{\tilde{c}}(e_3) = \{a_2, a_3\} \text{ olup}$$

$$F_E^{\tilde{c}} = \{(e_1, \{a_3, a_4\})(e_2, \{a_1, a_2, a_5\})(e_3, \{a_2, a_3\})\} \text{ dir.}$$

**Tanım 1.1.9.**  $x$ ,  $U$  nun bir elemanı ve  $F_E$ ,  $U$  üzerinde bir esnek küme olsun. Her  $e \in E$  parametreleri için  $x \in F(e)$  ise  $x$ ,  $F_E$  nin *esnek elemanıdır* denir ve  $x \tilde{\in} F_E$  şeklinde gösterilir. Fakat en az bir parametre için sağlamazsa *esnek elemanı değildir* denir ve  $x \tilde{\notin} F_E$  şeklinde gösterilir [13].

**Örnek 1.1.9.**  $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$  başlangıç evrensel kümesi ve  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  parametrelerin kümesi olmak üzere  $F_E$  esnek kümesini göz önüne alalım.

$$F(e_1) = \{a_1, a_2, a_5\}$$

$$F(e_2) = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}$$

$$F(e_3) = \{a_1, a_4, a_5\}$$

Her  $e \in E$  parametreleri için  $a_1 \in F(e)$  olduğu açıktır. Dolayısıyla  $a_1 \tilde{\in} F_E$  dir.

$e_2 \in E$  parametresi için  $a_2 \notin F(e_2)$  olduğundan  $a_2 \tilde{\notin} F_E$  dir.

$e_3 \in E$  parametresi için  $a_3 \notin F(e_3)$  olduğundan  $a_3 \tilde{\notin} F_E$  dir.

$e_1 \in E$  parametresi için  $a_4 \notin F(e_1)$  olduğundan  $a_4 \tilde{\notin} F_E$  dir.

Her  $e \in E$  parametreleri için  $a_5 \in F(e)$  olduğu açıktır. Dolayısıyla  $a_5 \tilde{\in} F_E$  dir.

**Tanım 1.1.10.**  $F_E$  ve  $F_{E'}$  sırasıyla  $U$  ve  $U'$  başlangıç evrensel kümeleri üzerinde esnek kümeler olsun. Her  $(x, y) \in E \times E'$  için  $H(x, y) = F(x) \times F'(y)$  şeklinde tanımlansın.  $F_E \tilde{\times} F_{E'} = (H, E \times E')$  esnek kümesine  $F_E$  ve  $F_{E'}$  nin *esnek çarpımı* denir [14].

## 1.2. Kategori İle İlgili Temel Kavramlar ve Özellikleri

**Tanım 1.2.1.** Bir  $C$  sistemi aşağıdaki gibi oluşturulsun.

- 1)  $C$  sisteminin objeler olarak adlandırılan üyeleri genelde  $X, Y \dots$  gibi harflerle ve tüm objelerin oluşturduğu sınıf  $ob(C)$  ile gösterilir.
- 2)  $ob(C)$  den alınan herhangi iki  $X$  ve  $Y$  objesi için  $X$  ile  $Y$  arasındaki  $X$  ve  $Y$  nin özelliklerini koruyan dönüşümlere morfizm denir.  $X$  den  $Y$  ye giden bir morfizm  $f: X \rightarrow Y$  ve  $X$  den  $Y$  ye tüm morfizmlerin sınıfı  $C(X, Y)$  ile gösterilir.  $Mor(C) = \bigcup_{X, Y \in ob(C)} C(X, Y)$  kategorinin tüm morfizmlerinin sınıfıdır.

- 3)  $X, Y, Z \in ob(C)$  ve  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  olmak üzere

$$\circ: C(Y, Z) \times C(X, Y) \rightarrow C(X, Z)$$

$$(g, f) \rightarrow g \circ f$$

şeklinde tanımlı kısmi işlemi için

1. Birleşme özelliği:  $X, Y, Z, T \in ob(C)$  ve  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  ve  $h: Z \rightarrow T$  birer morfizm olmak üzere her zaman

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

olmalıdır.

2. Birimlilik özelliği: Her  $X \in ob(C)$  için  $f: X \rightarrow Y$  ve  $g: Z \rightarrow X$  iken

$$f \circ 1_X = f, 1_X \circ g = g$$

olacak şekilde  $1_X : X \rightarrow X$  birim morfizimi vardır.

Bu özelliklere sahip olan  $C$  sistemine bir *kategori* denir [15].

**Örnek 1.2.1.** Set ile göstereceğimiz kümelerin kategorisi aşağıdaki gibidir:

Objeler = Bütün kümeler

Morfizmler = Kümeler arasındaki fonksiyonlar

$X, Y, Z$  herhangi kümeler ve  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  iki fonksiyon olduğunda  $g \circ f : X \rightarrow Z$  fonksiyon bileşkesi kısmi işlemi olur.

Her  $X$  kümesi için  $1_X : X \rightarrow X$  şeklinde birim fonksiyon her zaman vardır.

$X, Y, Z, T$  herhangi kümeler ve  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  ve  $h : Z \rightarrow T$  birer fonksiyon olsun.

1) Her  $x \in X$  için  $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$  ve

$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$  olup

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dir.

2) Her  $X$  kümesi için  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Z \rightarrow X$  iken

$$f \circ 1_X = f \text{ ve } 1_X \circ g = g$$

dir [16].

**Örnek 1.2.2.** Grp ile göstereceğimiz grupların kategori aşağıdaki gibidir:

Objeler = Bütün gruplar

Morfizmler = Grup homomorfizmaları

$G, H, K$  herhangi gruplar ve  $f: G \rightarrow H$ ,  $g: H \rightarrow K$  iki grup homomorfizması olduğunda  $g \circ f: G \rightarrow K$  bileşkesi grup homomorfizması olduğundan grup homomorfizmalarının bileşkesi Grp kategorisinin kısmi işlemi olarak alınır.

Her  $G$  grubu için  $1_G: G \rightarrow G$  birim fonksiyonu bir homomorfizmdir.

1)  $G, H, K, L$  herhangi gruplar ve  $f: G \rightarrow H$ ,  $g: H \rightarrow K$  ve  $h: K \rightarrow L$  grup homomorfizmaları olmak üzere

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dir.

2) Her  $G$  grubu için  $f: G \rightarrow H$  ve  $g: K \rightarrow G$  grup homomorfizimleri iken

$$f \circ 1_G = f \text{ ve } 1_G \circ g = g$$

dir [16].

**Örnek 1.2.3.** Top ile göstereceğimiz topolojik uzayların kategorisi aşağıdaki gibidir:

Objeler = Bütün topolojik uzaylar

Morfizmler = Sürekli fonksiyonlar

$(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$  ve  $(Z, \gamma)$  herhangi topolojik uzaylar ve  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ ,  $g: (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \gamma)$  sürekli fonksiyonlar olsun.  $g \circ f$  sürekli fonksiyon olduğundan sürekli fonksiyonların bileşkesi Top kategorisinin kısmi işlemidir.

Her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı için  $1_{(X, \tau)}: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$  birim fonksiyonu süreklidir.

1)  $(X, \tau)$ ,  $(Y, \sigma)$ ,  $(Z, \gamma)$  ve  $(T, \alpha)$  herhangi topolojik uzaylar ve  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ ,  $g: (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \gamma)$  ve  $h: (Z, \gamma) \rightarrow (T, \alpha)$  sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dir.

2) Her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı  $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  ve  $g: (Z, \gamma) \rightarrow (X, \tau)$  sürekli fonksiyonları için  $f \circ 1_{(X, \tau)} = f$  ve  $1_{(X, \tau)} \circ g = g$  dir [16].

**Tanım 1.2.2.**  $C$  bir kategori ve  $f : X \rightarrow Y$ ,  $C$  de bir morfizm olsun. Eğer  $f$  soldan sadeleşebilir ise yani  $g, h : Z \rightarrow X$  için her zaman  $f \circ g = f \circ h$  olduğunda  $g = h$  oluyorsa  $f$  ye *monik morfizm (monomorfizm)* denir [15].

**Tanım 1.2.3.**  $C$  bir kategori ve  $f : X \rightarrow Y$ ,  $C$  de bir morfizm olsun. Eğer  $f$  sağdan sadeleşebilir ise yani  $g, h : Y \rightarrow W$  için her zaman  $g \circ f = h \circ f$  olduğunda  $g = h$  oluyorsa  $f$  ye *epik morfizm (epimorfizm)* denir [15].

**Önerme 1.2.3.**  $C$  bir kategori,  $f : X \rightarrow Y$  ve  $g : Z \rightarrow X$ ,  $C$  de iki morfizm olsun.

1.  $f$  ve  $g$  monik ise  $f \circ g$  moniktir.
2.  $f$  ve  $g$  epik ise  $f \circ g$  epiktir.
3.  $f \circ g$  monik ise  $g$  moniktir.
4.  $f \circ g$  epik ise  $f$  epiktir [15].

**Tanım 1.2.4.**  $C$  bir kategori  $X, Y$  objeler ve  $f : X \rightarrow Y$   $C$  de bir morfizm olsun.  $f \circ g = 1_Y$  ve  $g \circ f = 1_X$  olacak şekilde bir  $g : Y \rightarrow X$  morfizmi mevcut ise  $f$  ye *izomorfizm* denir [15].

**Önerme 1.2.4.** Set kategorisinde  $X, Y$  kümeleri ve  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyon için aşağıdakiler doğrudur.

1.  $f$  moniktir ancak ve ancak  $f$  birebirdir.
2.  $f$  epiktir ancak ve ancak  $f$  örtendir.
3.  $f$  izomorfizmdir ancak ve ancak  $f$  birebir ve örtendir [15].

**İspat:** (1.) ( $\Rightarrow$ )  $Z = \{\alpha\}$  ve  $g, h : Z \rightarrow X$  fonksiyonları  $g(\alpha) = x$ ,  $h(\alpha) = y$  şeklinde tanımlansın. Kabul edelim ki  $f(x) = f(y)$  olsun. Bu durumda  $x = g(\alpha)$ ,  $y = h(\alpha)$

olduğundan  $f(g(\alpha)) = f(h(\alpha))$  yani  $(f \circ g)(\alpha) = (f \circ h)(\alpha)$  bulunur. Kabule göre  $f \circ g = f \circ h$  iken  $g = h$  idi. O halde  $g(\alpha) = h(\alpha)$  yani  $x = y$  olur ki bu da  $f$  nin birebir olduğunu gösterir.

(1.) ( $\Leftarrow$ )  $f$  birebir olsun.  $Z$  herhangi bir küme,  $g, h: Z \rightarrow X$  fonksiyonları için  $f \circ g = f \circ h$  olsun. Herhangi bir  $z \in Z$  için  $h(z), g(z) \in X$  olup  $f(h(z)) = f(g(z))$  dir.  $f$  birebir olduğundan  $h(z) = g(z)$  olup  $h = g$  dir, böylece  $f$  moniktir.

(2.) ( $\Rightarrow$ )  $f: X \rightarrow Y$  epik olsun.  $f$  nin örten olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki  $f$  örten olmasın yani  $f(X) \neq Y$  dir.  $Z = \{a, b\}$  alalım.  $g, h: Y \rightarrow Z$  olsun.

Her  $y \in Y$  için  $g(y) = a$  ve  $h(y) = \begin{cases} a, y \in f(X) \\ b, y \notin f(X) \end{cases}$  şeklinde tanımlansın.

$x \in X$  olsun.  $f$  epik olduğundan

$$(g \circ f)(y) = (h \circ f)(y) \text{ ise } g(f(y)) = h(f(y))$$

olup  $g(a) = h(a)$  olur. Buradan  $g = h$  olur ki buda çelişkidir(epik olmasıyla). O halde kabulümüz yanlış olup  $f$  örtendir.

(2.)( $\Leftarrow$ )  $f: X \rightarrow Y$  örten fonksiyon ve  $Z$  herhangi bir küme olmak üzere  $g, h: Y \rightarrow Z$  fonksiyonları verilsin.  $g \circ f = h \circ f$  olsun.

Her  $b \in Y$  için  $g(b) = h(b)$  olduğunu gösterelim.  $f$  örten olduğundan her  $b \in Y$  için en az  $a \in X$  vardır öyle ki  $b = f(a)$  dir.

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) \text{ ve}$$

$(h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(b)$  olup kabulden  $g(b) = h(b)$  dir. Buradan  $g = h$  olur ki  $f$  epiktir.

(3.) ( $\Rightarrow$ )  $f$  izomorfizm olsun. En az bir  $g: Y \rightarrow X$  vardır öyle ki  $f \circ g = 1_Y$  ve  $g \circ f = 1_X$  dir. Dolayısıyla  $f$  birebir ve örtendir.

(3.)( $\Leftarrow$ )  $f$  birebir ve örten olsun.  $f^{-1}:Y \rightarrow X$  mevcuttur.  $f \circ f^{-1} = 1_Y$  ve  $f^{-1} \circ f = 1_X$  olur ki buradan  $f$  izomorfizdir.

**Önerme 1.2.5.** Grp kategorisi için  $G$  ve  $H$  iki grup ve  $f:G \rightarrow H$  grup homomorfizmi olsun.

1.  $f$  moniktir ancak ve ancak  $f$  birebirdir.
2.  $f$  epiktir ancak ve ancak  $f$  örtendir.
3.  $f$  izomorfizmdir ancak ve ancak  $f$  birebir ve örtendir [15].

**İspat:** (1), (2) ve (3) nin ispatı Önerme 1.2.4. benzer şekilde yapılır.

**Önerme 1.2.6.** Top kategorisi için  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar ve  $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  sürekli fonksiyon olsun.

1.  $f$  moniktir ancak ve ancak  $f$  birebirdir.
2.  $f$  epiktir ancak ve ancak  $f$  örtendir.
3.  $f$  izomorfizmdir ancak ve ancak  $f$  homeomorfizmdir [15].

**İspat:** (1), (2) ve (3) ispatı Önerme 1.2.4. benzer şekilde yapılır.

## BÖLÜM 2

### TOPOLOJİK GRUP, ESNEK TOPOLOJİ VE ESNEK TOPOLOJİK GRUP KAVRAMLARI

Bu bölümde topolojik grup, esnek topoloji, esnek topolojik grup kavramlarına ve bazı özelliklere yer verilecektir.

#### 2.1. Topolojik Grup

**Tanım 2.1.1.**  $G$  bir grup ve  $\tau$  da  $G$  üzerinde bir topoloji olsun. Eğer  $G$  grubundaki  $m: G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \rightarrow ab$  işlemi ile  $n: G \rightarrow G$ ,  $a \rightarrow a^{-1}$  ters eleman fonksiyonu sürekli ise  $(G, m, \tau)$  üçlüsüne bir *topolojik grup* denir. Burada  $G \times G$  kartezyen çarpımı üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir [16].

**Önerme 2.1.1.** Bir  $G$  grubu üzerinde topoloji verilsin.  $m: G \times G \rightarrow G$   $(a, b) \rightarrow ab$  işlemi ve  $n: G \rightarrow G$   $a \rightarrow a^{-1}$  ters fonksiyonları sürekli ise ancak ve ancak  $\delta: G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$  fark fonksiyonu sürekli [16].

**İspat:** Eğer  $m$  ve  $n$  fonksiyonları sürekli ise

$$G \times G \xrightarrow{(1, n)} G \times G \xrightarrow{m} G$$

$$(a, b) \rightarrow (a, b^{-1}) \rightarrow ab^{-1}$$

bileşke fonksiyonunun sürekliliğinden  $\delta$  süreklidir.

Tersine olarak eğer  $\delta : G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$  sürekli ise

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{(s,1)} G \times G \xrightarrow{\delta} G \\ a &\rightarrow (e, a) \rightarrow a^{-1} \end{aligned}$$

bileşke fonksiyonun sürekliliğinden  $n : G \rightarrow G$ ,  $a \rightarrow a^{-1}$  nin sürekliliği elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} G \times G &\xrightarrow{(1,n)} G \times G \xrightarrow{\delta} G \\ (a, b) &\rightarrow (a, b^{-1}) \rightarrow ab \end{aligned}$$

bileşke fonksiyonun sürekliliğinden ise  $m : G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \rightarrow ab$  nin sürekliliği elde edilir.

**Örnek 2.1.1.**  $(R^*, \square)$  ve  $(R, +)$  alışılmış topolojiye göre topolojik gruplar olduğundan

$$R^* \times R^* \rightarrow R, (k, l) \rightarrow \frac{k}{k^2 + l^2}$$

fonksiyonu süreklidir [16].

**İspat:**  $R^* \rightarrow R^*$ ,  $x \rightarrow x^2$  sürekli olduğundan

$$R^* \times R^* \rightarrow R^* \times R^*, (k, l) \rightarrow (k^2, l^2)$$

süreklidir.

$$R^* \times R^* \rightarrow R^*, (x, y) \rightarrow x + y$$

nin sürekliliğinden

$$R^* \times R^* \rightarrow R^*, (k, l) \rightarrow k^2 + l^2$$

süreklidir. O halde

$$R^* \times R^* \rightarrow R^* \times R^*, (k, l) \rightarrow (k, k^2 + l^2)$$

sürekli dir.

$$\mathcal{D}: R^* \times R^* \rightarrow R^*, (x, y) \rightarrow xy^{-1}$$

nin sürekliliğinden ise

$$R^* \times R^* \rightarrow R, (k, l) \rightarrow \frac{k}{k^2 + l^2}$$

sürekli dir.

**Örnek 2.1.2.**  $C^*$ , sıfırdan farklı kompleks sayıların kümesi olmak üzere  $(k, l), (p, r) \in C^*$  için  $(k, l) \cdot (p, r) = (kp - lr, kr + lp)$  ile tanımlanan kompleks sayıları çarpma işlemi ve alışılmış topoloji ile birlikte topolojik gruptur [16].

Bu işleme göre  $C^*$  nin bir grup olduğu açıktır. Burada birim eleman  $(1, 0)$  ve bir  $(k, l) \in C^*$  nin tersi  $\left(\frac{k}{k^2 + l^2}, -\frac{l}{k^2 + l^2}\right)$  dir. O halde  $C^*$  nin bir topolojik grup olduğunu göstermek için

$$m: C^* \times C^* \rightarrow C^*, ((k, l), (p, r)) \rightarrow (kp - lr, kr + lp)$$

ve

$$n: C^* \rightarrow C^*, (k, l) \rightarrow \left(\frac{k}{k^2 + l^2}, -\frac{l}{k^2 + l^2}\right)$$

fonksiyonlarının sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat

$$C^* \times C^* \rightarrow R, ((k, l), (p, r)) \rightarrow kp - lr$$

ve

$$C^* \times C^* \rightarrow R, ((k, l), (p, r)) \rightarrow kr + lp$$

fonksiyonları sürekli olduğundan  $m$  sürekli dir.

Diğer yandan Örnek 2.1.1. den

$$C^* \rightarrow R, (k,l) \rightarrow \frac{k}{k^2+l^2}$$

ve

$$C^* \rightarrow R, (k,l) \rightarrow -\frac{l}{k^2+l^2}$$

fonksiyonları sürekli olduğundan  $n$  süreklidir.

## 2.2. Esnek Topolojik Uzaylar

**Tanım 2.2.1.**  $\tau$ ,  $U$  üzerindeki esnek kümelerin bir kolleksiyonu ve  $E$  parametrelerin kümesi olsun.  $\tau$  için eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $\tau$  ya  $U$  üzerinde esnek topoloji denir:

- $\tilde{\Phi}$  ve  $\tilde{U}$ ,  $\tau$  nun elemanıdır.
- $\tau$  daki herhangi bir sayıda esnek kümelerin esnek birleşimi  $\tau$  ya aittir.
- $\tau$  daki herhangi iki esnek kümenin esnek kesişimi  $\tau$  ya aittir.

$(U, \tau, E)$  üçlüsüne *esnek topolojik uzay* denir [5].

Bu bölümde  $U$  başlangıç evrensel kümesi üzerindeki esnek kümelerde parametre kümesi tek ise esnek kümeyi  $F_E$  ile göstermek yerine  $F$  ile göstereceğiz.

**Örnek 2.2.1.**  $U = \{a_1, a_2, a_3\}$  başlangıç evrensel kümesi,  $E = \{e_1, e_2\}$  parametre kümesi ve  $\tau = (\tilde{\Phi}, \tilde{U}, \{(e_1, \{a_1, a_2\})(e_2, \{a_1, a_2, a_3\})\}, \{(e_1, \{a_3\}), (e_2, \Phi)\})$  olsun.

$F = \{(e_1, \{a_1, a_2\})(e_2, \{a_1, a_2, a_3\})\}$ ,  $F' = \{(e_1, \{a_3\}), (e_2, \Phi)\}$  esnek kümeleri için

- $\tilde{\Phi}$  ve  $\tilde{U}$ ,  $\tau$  nun elemanıdır
- $F \tilde{\cap} F' = \tilde{\Phi}$  esnek kümelerin esnek kesişimi  $\tau$  nun elemanıdır.
- $F \tilde{\cup} F' = \tilde{U}$  esnek kümelerin esnek birleşimi  $\tau$  nun elemanıdır.

$(U, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olur.

**Tanım 2.2.2.**  $U$  bir başlangıç evrensel kümesi,  $E$  parametre kümesi ve  $\tau = \{\tilde{\Phi}, \tilde{U}\}$  olsun.  $\tau$  ya,  $U$  üzerindeki *esnek indiske topoloji* ve  $(U, \tau, E)$  ye,  $U$  üzerinde *esnek indiske topolojik uzay* denir [5].

**Tanım 2.2.3.**  $(U, \tau, E)$  bir esnek topolojik uzay olsun.  $\tau$  sınıfının her bir elemanına *esnek açık* denir.  $U$  başlangıç evrensel kümesinde  $F$  esnek kümesinin esnek tümleyeni  $F^c$  esnek açık ise  $F$  *esnek kapalıdır* denir [5].

**Örnek 2.2.2.** Örnek 2.2.1. de ki  $F$  ve  $F'$  esnek açığa örnek gösterilebilir.  $F^c = F'$  olduğundan  $F$  esnek kapalıya örnektir.

**Önerme 2.2.1.**  $(U, \tau, E)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek topolojik uzay olsun. Her  $\alpha \in E$  için  $\tau_\alpha = \{F(\alpha) \mid F \in \tau\}$ ,  $U$  üzerinde bir topolojidir [5].

**İspat:** Herhangi bir  $\alpha \in E$  için  $\tau_\alpha = \{F(\alpha) \mid F \in \tau\}$  olsun. Şimdi,

- $\tilde{\Phi}, \tilde{U} \in \tau$  olduğundan  $\Phi, U \in \tau_\alpha$  dir.
- $\{F_i(\alpha) \mid i \in I\}$ ,  $\tau_\alpha$  daki kümelerin bir koleksiyonu olsun. Tüm  $i \in I$  için  $F_i \in \tau$  olduğundan  $\tilde{\bigcup}_{i \in I} F_i \in \tau$  olup  $\bigcup_{i \in I} F_i(\alpha) \in \tau_\alpha$  dir.
- $F_1, F_2 \in \tau$  için  $F_1(\alpha), F_2(\alpha) \in \tau_\alpha$  olsun.  $F_1 \tilde{\cap} F_2 \in \tau$  olduğundan  $F_1(\alpha) \cap F_2(\alpha) \in \tau_\alpha$  olur.

Böylece her  $\alpha \in E$  için  $\tau_\alpha$ ,  $U$  üzerinde bir topolojidir.

**Örnek 2.2.3.**  $U = \{a_1, a_2, a_3\}$  başlangıç evrensel kümesi ve  $E = \{e_1, e_2\}$  parametre kümesi olsun.  $\tau = \{\tilde{\Phi}, \tilde{U}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$  için  $U$  üzerinde  $F_1, F_2, F_3, F_4$  esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F_1(e_1) = \{a_2\} \quad F_1(e_2) = \{a_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{a_2, a_3\} \quad F_2(e_2) = \{a_1, a_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{a_1, a_2\} \quad F_3(e_2) = U$$

$$F_4(e_1) = \{a_1, a_2\} \quad F_4(e_2) = \{a_1, a_3\}$$

Burada  $\tau$ ,  $U$  üzerinde bir esnek topolojidir ve  $(U, \tau, E)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek topolojik uzaydır.

$$\tau_{e_1} = \{\Phi, U, \{a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2\}\}$$

ve

$$\tau_{e_2} = \{\Phi, U, \{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2\}\}$$

$U$  üzerinde birer topolojidir.

**Önerme 2.2.2.**  $(U, \tau, E)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek topolojik uzay ve  $V$ ,  $U$  nun boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her  $\alpha \in E$  için  $(V, \tau_{\alpha_v})$ ,  $(U, \tau_{\alpha})$  nın bir *alt uzayıdır* [5].

**Tanım 2.2.4.**  $(U, \tau, E)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek topolojik uzay ve  $V$ ,  $U$  un boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$${}^v F : E \rightarrow P(U)$$

$$V \rightarrow {}^v F(e) = F(e) \cap V$$

$$\tau_v = \{{}^v F \mid F \in \tau\}$$

ya  $V$  üzerindeki *esnek alt topoloji* adı verilir ve  $(V, \tau_v, E)$  ye  $(U, \tau, E)$  nin bir *esnek alt uzayı* denir [5].

**Örnek 2.2.4.**  $U = \{a_1, a_2, a_3\}$  başlangıç evrensel kümesi,  $V = \{a_1, a_2\}$  kümesi  $U$  nun bir alt kümesi ve  $E = \{e_1, e_2\}$  parametre kümesi olsun.  $\tau = \{\tilde{\Phi}, F_1, F_2, F_3, F_4, \tilde{U}\}$  için  $U$  üzerinde  $F_1, F_2, F_3, F_4$  esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F_1(e_1) = \{a_2\} \qquad F_1(e_2) = \{a_1\}$$

$$F_2(e_1) = \{a_2, a_3\} \qquad F_2(e_2) = \{a_1, a_2\}$$

$$F_3(e_1) = \{a_1, a_2\} \qquad F_3(e_2) = U$$

$$F_4(e_1) = \{a_1, a_2\} \qquad F_4(e_2) = \{a_1, a_3\}$$

Buna göre

$${}^v F_1(e_1) = \{a_2\} \qquad {}^v F_1(e_2) = \{a_1\}$$

$${}^v F_2(e_1) = \{a_2\} \qquad {}^v F_2(e_2) = V$$

$${}^v F_3(e_1) = V \qquad {}^v F_3(e_2) = V$$

$${}^v F_4(e_1) = V \qquad {}^v F_4(e_2) = \{a_1\}$$

olur. Burada açıkça görüldüğü gibi  $\tau_v = \{\tilde{\Phi}, {}^v F_1, {}^v F_2, {}^v F_3, \tilde{V}, {}^v F_4, \tilde{V}\}$  esnek topolojik uzay oluşturur.  $(V, \tau_v, E)$ ,  $(U, \tau, E)$  nin bir esnek alt uzayıdır.

**Tanım 2.2.5.**  $x$ ,  $U$  başlangıç evrensel kümesinin bir elemanı olsun. Eğer  $x \in F' \tilde{C} F$  olacak şekilde  $F'$  esnek açık kümesi varsa,  $F$  esnek kümesine  $x$  in *esnek komşuluğu* denir.  $x$  in tüm esnek komşuluklarının koleksiyonuna  $x$  in *esnek komşuluk sistemi* denir [8].

**Örnek 2.2.5.**  $U = \{a_1, a_2, a_3\}$  başlangıç evrensel kümesi ve  $E = \{e_1, e_2\}$  parametre kümesi olsun.  $\tau = (\tilde{\Phi}, \{(e_1, \{a_1, a_2\})(e_2, \{a_1, a_2, a_3\})\}, \{(e_1, \{a_3\}), (e_2, \Phi)\}, \tilde{U})$  olmak üzere  $F = \{(e_1, \{a_1, a_2\})(e_2, \{a_1, a_2, a_3\})\}$  bir esnek açık kümedir.

Burada  $a_1 \in F$  dir.  $F' = \{(e_1, \{a_1, a_2, a_3\}), (e_2, U)\}$

$a_1 \in F \tilde{c} F'$  olup  $F', a_1$  in esnek komşuluğudur.

**Tanım 2.2.6.**  $\beta$ , sonlu esnek kesişim altında kapalı bir esnek kümeler ailesi olsun. Bu durumda  $\beta$  bazı tarafından üretilen esnek topoloji  $\{\tilde{\Phi}, \tilde{U}\} \cup \{\tilde{U} \mid I \subset \beta\}$  dir [8].

**Tanım 2.2.7.** Esnek kümelerin herhangi bir  $S$  ailesi için,  $S$  tabanı tarafından üretilen esnek topoloji,  $\{F_1 \tilde{\cap} \dots \tilde{\cap} F_k \mid F_1, \dots, F_k \in S\}$  tabanı tarafından üretilen esnek topolojidir [8].

**Tanım 2.2.8.**  $(U, \tau, E)$  ve  $(U', \tau', E')$  birer esnek topolojik uzay ve  $\phi: U \rightarrow U'$ ,  $\varphi: E \rightarrow E'$  birer fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şart sağlanırsa  $(\varphi, \phi): E \times U \rightarrow E' \times U'$  fonksiyonuna esnek süreklidir denir;

**(SC1):** Her  $x \in U$  ve  $\phi(x)$  in her  $F'$  esnek komşuluğu için  $\phi(x) \in ((\varphi, \phi))(F) \tilde{c} F'$  olacak şekilde  $x$  in bir  $F$  esnek komşuluğu vardır [8].

**Örnek 2.2.6.**  $U = \{a, b, c\}$ ,  $E = \{e_1, e_2\}$ ,  $U' = \{x, y, z\}$ ,  $E' = \{e_1', e_2'\}$  olsun.

$U$  ve  $E$  üzerindeki esnek topoloji

$$\tau_1 = \{\tilde{\Phi}, \tilde{U}, \{(e_1, \{a, b\}), (e_2, \{a, b\})\}, \{(e_1, \{c\}), (e_2, \{c\})\}\}$$

$U'$  ve  $E'$  üzerindeki esnek topoloji

$$\tau_2 = \{\tilde{\Phi}, \tilde{U}', \{(e_1', \{x, z\}), (e_2', \{x, z\})\}, \{(e_1', \{y\}), (e_2', \{y\})\}\}$$

olmak üzere

$\phi: U \rightarrow U'$ ,  $\varphi: E \rightarrow E'$  fonksiyonları için

$$\phi(a) = x \quad \varphi(e_1) = e_2'$$

$$\phi(b) = x \quad \varphi(e_2) = e_1'$$

$$\phi(c) = y$$

olsun.  $a \in U$ ,  $\phi(a) = x$  in  $\tau_2$  deki esnek açık komşuluğu  $\{(e_1', \{x, z\}), (e_2', \{x, z\})\}$  esnek kümesidir ve diğer esnek komşulukları bu elemanı kapsar. Şimdi  $a$  nın  $\tau_1$  de açık  $a \in \{(e_1, \{a, b\}), (e_2, \{a, b\})\}$  komşuluğu için

$$\phi(a) = x \in ((\varphi, \phi))(\{(e_1, \{a, b\}), (e_2, \{a, b\})\}) = \{(e_1', \{x\}), (e_2', \{x\})\} \tilde{\subset} \{(e_1', \{x, z\}), (e_2', \{x, z\})\}$$

olur buda  $a$  da  $(\varphi, \phi)$  nın sürekli olduğunu gösterir.

$b \in U$   $\phi(b) = x$   $x$  in  $\tau_2$  deki esnek açık komşulukları  $\{(e_1', \{x, z\}), (e_2', \{x, z\})\}$  esnek kümesidir ve diğer esnek komşulukları bu elemanı kapsar. Şimdi  $b$  nin  $\tau_1$  de açık  $b \in \{(e_1, \{a, b\}), (e_2, \{a, b\})\}$  komşuluğu için

$$\phi(b) = x \in ((\varphi, \phi))(\{(e_1, \{a, b\}), (e_2, \{a, b\})\}) = \{(e_1', \{x\}), (e_2', \{x\})\} \tilde{\subset} \{(e_1', \{x, z\}), (e_2', \{x, z\})\}$$

olur buda  $b$  de  $(\varphi, \phi)$  nın sürekli olduğunu gösterir.

$c \in U$   $\phi(c) = y$  nin  $\tau_2$  deki esnek açık komşulukları  $\{(e_1', \{y\}), (e_2', \{y\})\}$  esnek kümesidir ve diğer esnek komşulukları bu elemanı kapsar. Şimdi  $c$  nin  $\tau_1$  de açık  $c \in \{(e_1, \{c\}), (e_2, \{c\})\}$  komşuluğu için

$$\phi(c) = y \in ((\varphi, \phi))(\{(e_1, \{c\}), (e_2, \{c\})\}) \cong \{(e_1', \{y\}), (e_2', \{y\})\} \tilde{\subset} \{(e_1', \{y\}), (e_2', \{y\})\}$$

olur buda  $c$  de  $(\varphi, \phi)$  nın sürekli olduğunu gösterir.

Bütün noktalarda sürekli olduğundan bu  $(\varphi, \phi)$  esnek fonksiyonunu esnek süreklidir.

Genel topolojide, süreklilik kavramını tanımlamanın birkaç eşdeğer yolu vardır. O zaman bunun esnek küme teorisinde olup olmadığını sorgulamak doğaldır. Bu soruyu cevaplamak için, bir fonksiyon üzerinde aşağıdaki koşulu tanıtalım.

**(SC2):** Her esnek açık  $F' \in \tau'$  için,  $\phi^{-1}(F')$  ters görüntüsü de esnek açıktır.

**Önerme 2.2.3.** (SC2) şartı sağlanırsa, (SC1) sağlanır. Fakat tersi doğru değildir [8].

Bazen  $E = E'$  ve  $\phi = id$  özel durumları kullanacağız. Bu durumlarda esnek süreklilik için tanım aşağıdaki gibi alınacaktır.

**Tanım 2.2.9.**  $\phi: U \rightarrow U'$  için aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $\phi$  ye  $(U, \tau, E)$  den  $(U', \tau', E)$  ye *esnek sürekli fonksiyon* olarak adlandırılır;

- Her  $x \in U$  ve  $\phi(x)$  in her  $F'$  esnek komşuluğu için  $(\phi)(F) \tilde{\subset} F'$  olacak şekilde  $x$  in bir  $F$  esnek komşuluğu vardır [8].

**Önerme 2.2.4.**  $(U, \tau, E)$  ve  $(U', \tau', E)$  iki esnek topolojik uzay ve  $\tau' = \{\tilde{\Phi}, \tilde{U}'\}$  indiske esnek topoloji olsun.  $\phi: U \rightarrow U'$  esnek fonksiyon olsun.  $(I_E, \phi)$  fonksiyonu esnek süreklidir.

**İspat:** Her  $x \in U$  için  $\phi(x)$  in tek esnek açık komşuluğu  $\tilde{U}'$  olur.  $x$  in  $\tilde{U}$  açık komşuluğu için  $\phi(\tilde{U}) \tilde{\subset} \tilde{U}'$  olup  $\phi$  esnek süreklidir.

**Tanım 2.2.10.** Eğer hem  $\phi$  hem de  $\phi^{-1}$  esnek sürekli ise,  $\phi: U \rightarrow U'$  birebir ve örten fonksiyona  $(U, \tau, E)$  den  $(U', \tau', E)$  ye bir *esnek homeomorfizm* denir [8].

**Tanım 2.2.11.** Herhangi esnek topolojik uzay  $(U, \tau, E)$  ve  $(U', \tau', E')$  için  $\{F \tilde{\times} F' \mid F \in \tau, F' \in \tau'\}$ ,  $U \times U'$  üzerinde  $\tau_x$  esnek topoloji üretir.  $(U \times U', \tau_x, E \times E')$  esnek uzayına  $(U, \tau, E)$  ve  $(U', \tau', E')$  nin *esnek çarpım uzayı* denir [8].

### 2.3. Esnek Topolojik Grup

Burada, esnek topolojik grup kavramı ve özellikleri ele alındı. Daha fazla ilerlemeden önce bir örnek gösterelim.

**Örnek 2.3.1.**  $E = \{e_1, e_2\}$  ve  $\tau$  da  $R$  üzerinde

$$\{\tilde{\Phi}, E \times R\} \tilde{\cup} \{E \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\} \tilde{\cup} \left\{ \{(e_1, r)\} \mid r \in R \right\} \\ \tilde{\cup} \left\{ \{(e_2, x) \mid r - \varepsilon < x < r + \varepsilon\} \mid r \in R, \varepsilon > 0, 0 \notin (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \right\}$$

alt bazı tarafından üretilen esnek topoloji olmak üzere  $(R, \tau, E)$  bir esnek topolojik uzaydır. Eğer  $R$ , toplamsal grup  $(R, +)$  olarak göz önüne alınır ise  $^{-1}: R \rightarrow R$  esnek süreklidir. Çünkü eğer  $F$  yukarıda tanımlanan  $\tau$  esnek topolojisinin alt bazında ise  $F^{-1}$  de alt bazın elemanıdır.

Ayrıca iddia ediyoruz ki  $+: R \times R \rightarrow R$  de esnek süreklidir.  $a, b \neq 0$  için  $(a, b)$  de esnek süreklilik açıktır. Kabul edelim ki  $a = 0$  ve  $b \neq 0$  olsun.  $b$  nin herhangi bir  $F$  esnek komşuluğu için bir  $\varepsilon > 0$  vardır öyle ki  $\{(e_1, b), (e_2, x) \mid b - \varepsilon < x < b + \varepsilon\} \tilde{\subset} F$  dir. Bu durumda yeterince küçük  $\varepsilon' > 0$  için  $(0, b) \tilde{\in} F'$  ve  $F'$   $\left( \{(e_1, 0)\} \times \{(e_1, b)\} \right) \tilde{\cup} \left( (E \times (-\varepsilon', \varepsilon')) \times \{(e_2, x) \mid b - \varepsilon' < x < b + \varepsilon'\} \right)$  ile verildiğinde  $F'$  nün  $+$  altında görüntüsünün  $\{(e_1, b), (e_2, x) \mid b - \varepsilon < x < b + \varepsilon\} \tilde{\subset} F$  nin bir esnek alt kümesi olduğu açıktır. Bu da  $+$  nın  $(0, b)$  de esnek sürekli olduğunu gösterir. Benzer şekilde  $a \neq 0$  için  $(a, 0)$  da ve  $(0, 0)$  da esnek sürekli olduğu gösterilebilir.

Ancak bu esnek uzay  $(R, \tau, E)$  aşağıdaki koşulu sağlamaz:

- Her  $(r_1, r_2) \in R \times R$  ve  $r_1 + r_2 \in R$  nin esnek komşuluğu  $F$  için,  $F_1 + F_2 \tilde{\subset} F$  olacak şekilde  $r_1, r_2$  nin sırasıyla  $F_1$  ve  $F_2$  nin esnek komşulukları vardır.

Bunu görmek için 5'in bir esnek komşuluğu  $\{(e_1, 5), (e_2, x) \mid 4 < x < 6\}$  alalım. 0 in her  $F$  esnek komşuluğu için,  $(E \times (-\varepsilon_F, \varepsilon_F)) \tilde{\subset} F$  olacak şekilde bir  $\varepsilon_F > 0$  bulunur. Buradan  $(F + F')(e_1)$  in  $(5 - \varepsilon_F, 5 + \varepsilon_F)$  içerdiğini belirterek, 5 in hiçbir  $F'$  esnek komşuluğu için  $F + F' \tilde{\subset} \{(e_1, 5), (e_2, x) \mid 4 < x < 6\}$  sağlanmaz.

Bizim amaçlarımız için her  $(g, h) \in G \times G$  ve  $g * h \in G$  nin  $F$  esnek komşuluğu için,  $F_g * F_h \tilde{\subset} F$  olacak şekilde sırasıyla  $g, h$  esnek komşulukları  $F_g$  ve  $F_h$  var olması uygundur. Yukarıdaki örnek, bu özelliğin,  $G \times G$  üzerinde esnek çarpım topolojisi ile  $*$ :  $G \times G \rightarrow G$  grup işleminin esnek sürekliliğinden gelmediğini göstermektedir. Bu nedenle, bu özellik esnek topolojik grup tanımında açıkça şart olarak eklenmelidir [8].

**Tanım 2.3.1.**  $G = (G, *, 1_G)$  birim elemanı  $1_G$  olan bir grup olsun. Eğer  $\tau$  bir  $E$  parametre kümesi ile  $G$  üzerinde bir esnek topoloji ve

- Her  $(g, h) \in G \times G$   $g * h \in G$  nin  $F$  esnek komşuluğu için  $F_g * F_h \tilde{\subset} F$  olacak şekilde sırasıyla  $g, h$  esnek komşulukları  $F_g$  ve  $F_h$  vardır.
- $^{-1}: G \rightarrow G$  ters fonksiyonu da esnek süreklidir.

Şartları sağlanıyor ise  $\langle G, \tau, E \rangle$  ye bir *esnek topolojik grup* denir [8].

**NOT:** Burada  $e$  sembolü  $G$  grubunun birim elemanını göstermek için değil, sadece parametre göstermek için kullanılacaktır. Birim eleman  $1_G$  ile veya herhangi bir karışıklık ortaya çıkmadığında sadece 1 ile gösterilecektir. Ayrıca  $g, h \in G$  için  $g * h$  yerine  $gh$  yazılacaktır [8].

Literatürde, örneğin [7] referansında esnek grup, her  $e \in E$  için  $G$  nin bir alt grubu ise bir  $F$  esnek kümesi bir esnek gruptur şeklinde tanımlanır. Burada, her esnek açık

kümenin bir esnek grup olması gerekmez. Kavramımız kelimenin tam anlamıyla bir grup üzerinde bir esnek topolojik yapıdır. Bu tanımı şu nedenle seçtik: Esnek topolojik grup kavramı, genel topolojik grup kavramının doğal bir uzantısı olmalıdır. Özellikle,  $E$  parametre kümesi tekli olduğunda, iki tanım örtüşmelidir ancak her bir esnek açık kümenin bir esnek grup olması şartı koysak,  $E$  tek elemanlı küme olduğunda bile iki kavram farklıdır. (Tüm açık kümelerin alt grup olmadığı diskre topolojik uzayı  $(Z, +)$  göz önüne alınabilir.) Bu nedenle okuyucu, esnek topolojik grup tanımının farklı olduğunu akılda tutulmalıdır [8].

**Önerme 2.3.1.**  $\langle G, \tau, E \rangle$  esnek topolojik gruptur ancak ve ancak her  $x, y \in G$  ve  $xy^{-1} \in F$  ye sahip her esnek açık  $F$  için,  $F_1 F_2^{-1} \subset F$ ,  $x \in F_1$ ,  $y \in F_2$  olacak şekilde  $F_1, F_2$  esnek açık kümeleri vardır [8].

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ) Esnek topolojik grup tanımına göre  $x \in F_1'$ ,  $y^{-1} \in F_2'$  ve  $F_1' F_2' \subset F$  olacak şekilde  $F_1'$  ve  $F_2'$  esnek açık kümeleri vardır. Ters eleman fonksiyonunun esnek sürekliliğinden  $y \in F_2''$  ve  $(F_2'')^{-1} \subset F_2'$  şartını sağlayan bir  $F_2''$  esnek açık kümesi vardır. Buradan  $x \in F_1'$ ,  $y \in F_2''$  ve  $F_1'(F_2'')^{-1} \subset F_1' F_2' \subset F$  dir.

( $\Leftarrow$ )  $x^{-1} \in F$  olacak şekilde  $F$  esnek açık kümesi vardır.  $x^{-1} = 1.x^{-1}$  olduğundan  $1 \in F_1$ ,  $x \in F_2$   $F_1 F_2^{-1} \subset F$  olacak şekilde  $F_1$  ve  $F_2$  esnek açık kümeleri vardır. Buradan  $F_2^{-1} \subset F$  elde ederiz, bu ters eleman fonksiyonunun esnek sürekli olduğunu gösterir.

$F$ ,  $xy \in F$  şartını sağlayan esnek açık küme olsun.  $xy = x(y^{-1})^{-1}$  olduğunu dikkat edilirse  $x \in F_1$ ,  $y^{-1} \in F_2$  ve  $F_1 F_2^{-1} \subset F$  olacak şekilde  $F_1$ ,  $F_2$  esnek açık kümeleri bulunur.  $\cdot^{-1}: G \rightarrow G$  esnek sürekli olduğunu gösterdiğimiz için,  $y \in F_2'$  ve  $(F_2')^{-1} \subset F_2$  olacak şekilde bir  $F_2'$  esnek açık kümesi bulunur. Buradan  $F_1 F_2' = F_1 \left( (F_2')^{-1} \right)^{-1} \subset F_1 F_2^{-1} \subset F$  dir. Buda  $\cdot: G \times G \rightarrow G$  nin esnek sürekliliğini kanıtlar.

## BÖLÜM 3

### ESNEK TOPOLOJİK GRUPLARIN KATEGORİSİ

**Tanım 3.1.**  $(G, \otimes_1)$  ve  $(H, \otimes_2)$  iki grup,  $E_1$  ve  $E_2$  parametrelerin kümeleri ve  $\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  sırasıyla  $G$  ve  $H$  üzerinde esnek topolojik gruplar olsun.  $f_1: E_1 \rightarrow E_2$  bir fonksiyon ve  $g_1: G \rightarrow H$  grup homomorfizması olacak şekilde  $(f_1, g_1): \langle G, \tau_1, E_1 \rangle \rightarrow \langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  esnek sürekli ise  $(f_1, g_1)$  ye *esnek topolojik grupların morfizmi* denir.

$\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  esnek topolojik gruplar olmak üzere  $\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  arasındaki tüm morfizmleri belirtmek için  $Hom(\langle G, \tau_1, E_1 \rangle, \langle H, \tau_2, E_2 \rangle)$  kullanacağız.

**Tanım 3.2.**  $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in Hom(\langle G, \tau_1, E_1 \rangle, \langle H, \tau_2, E_2 \rangle)$  olsun.  $(f_1, g_1)$  ve  $(f_2, g_2)$  için  $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$  ise  $f_1 = f_2$  ve  $g_1 = g_2$  dir.

**Tanım 3.3.**  $G$  üzerinde esnek topolojik grup  $\langle G, \tau, E \rangle$  olsun.  $I_{F_G} = (I_E, I_G): \langle G, \tau, E \rangle \rightarrow \langle G, \tau, E \rangle$  (Birim fonksiyonun esnek sürekli olduğu açıktır.)  $I_{F_G}$  ye esnek topolojik grupların *birim morfizmi* kısaca birim morfizm denir.

**Önerme 3.1.**  $(U_1, \tau_1, E_1)$ ,  $(U_2, \tau_2, E_2)$  ve  $(U_3, \tau_3, E_3)$  birer esnek topolojik uzay ve  $g_1: U_1 \rightarrow U_2$ ,  $f_1: E_1 \rightarrow E_2$ ,  $g_2: U_2 \rightarrow U_3$  ve  $f_2: E_2 \rightarrow E_3$  birer fonksiyon olsun.

$(f_1, g_1): E_1 \times U_1 \rightarrow E_2 \times U_2$  ve  $(f_2, g_2): E_2 \times U_2 \rightarrow E_3 \times U_3$  birer esnek süreklî fonksiyon olsun. Bu durumda

$$((f_2, g_2)) \circ ((f_1, g_1)) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$$

de esnek süreklîdir.

**İspat:** Her  $x \in U$  ve  $g_1(x)$  in her  $F'$  esnek komşuluğu için  $g_1(x) \in ((f_1, g_1))(F) \tilde{c} F'$  olacak şekilde  $x$  in bir  $F$  esnek komşuluğu vardır.

Her  $y = g_1(x)$  ve  $g_2(g_1(x))$  in her  $G'$  esnek komşuluğu için  $g_2(g_1(x)) \in ((f_2, g_2)) \circ ((f_1, g_1))(F) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)(F) \tilde{c} G'$  olacak şekilde  $x$  in bir  $F$  esnek komşuluğu vardır. O halde  $((f_2, g_2)) \circ ((f_1, g_1))$  de esnek süreklîdir.

**Teorem 3.1.** Esnek topolojik gruplar ve esnek topolojik grupların morfizmleri birlikte bir kategoridir.

**İspat:** Kategorinin objeleri esnek topolojik gruplar ve morfizimleri esnek topolojik grupların morfizmleridir.  $(G, \otimes_1)$ ,  $(H, \otimes_2)$  ve  $(M, \otimes_3)$  birer grup ve  $\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$ ,  $\langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  ve  $\langle M, \tau_3, E_3 \rangle$  esnek topolojik gruplar olsun.  $f_1: E_1 \rightarrow E_2$ ,  $f_2: E_2 \rightarrow E_3$  birer fonksiyon ve  $g_1: G \rightarrow H$ ,  $g_2: H \rightarrow M$  birer grup homomorfizmi olmak üzere

$$(f_1, g_1) \in \text{Hom}(\langle G, \tau_1, E_1 \rangle, \langle H, \tau_2, E_2 \rangle)$$

$$(f_2, g_2) \in \text{Hom}(\langle H, \tau_2, E_2 \rangle, \langle M, \tau_3, E_3 \rangle)$$

olsun. Kategorinin kısmî bileşke işlemleri

$$(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) \rightarrow (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$$

şeklinde esnek topolojik grupların morfizminin bileşkesi olarak tanımlansın.

$f_1$  ve  $f_2$  iki fonksiyon olup bu iki fonksiyonun  $f_2 \circ f_1$  bileşkesi de bir fonksiyondur.

$g_1$  ve  $g_2$  iki grup homomorfizması olup bu iki grup homomorfizmasının  $g_2 \circ g_1$  bileşkeside bir grup homomorfizmasıdır.

$(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)$  iki esnek sürekli fonksiyonun bileşkesinin esnek sürekli olduğunu

**Önerme 3.1.** den biliyoruz.

**Birleşme özelliği :**

$(N, \otimes_4)$  bir grup,  $\langle N, \tau_4, E_4 \rangle$  esnek topolojik grup  $f_3 : E_3 \rightarrow E_4$  bir fonksiyon,  $g_3 : M \rightarrow N$  grup homomorfizması için  $(f_3, g_3) \in Hom(\langle M, \tau_3, E_3 \rangle, \langle N, \tau_4, E_4 \rangle)$  olsun.

$$\begin{aligned}
 & \text{Buradan } (f_3, g_3) \circ [(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1)] \\
 &= (f_3, g_3) \circ (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) \\
 &= (f_3 \circ (f_2 \circ f_1), g_3 \circ (g_2 \circ g_1)) \\
 & \text{(fonksiyonların ve grup homomorfizmasının birleşme özelliğinden)} \\
 &= ((f_3 \circ f_2) \circ f_1, (g_3 \circ g_2) \circ g_1) \\
 &= [(f_3 \circ f_2), (g_3 \circ g_2)] \circ (f_1, g_1) \text{ olur.}
 \end{aligned}$$

**Birimlilik özelliği :**

Her  $\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$  objesi için

$I_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$  birim fonksiyonu ve  $I_G : G \rightarrow G$  birim homomorfizm olmak üzere

$I_{F_G} \in Hom(\langle G, \tau_1, E_1 \rangle, \langle G, \tau_1, E_1 \rangle)$  esnek topolojik grupların birim morfizmi vardır.

$(f_1, g_1) : \langle G, \tau_1, E_1 \rangle \rightarrow \langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  iken

$$(f_1, g_1) \circ I_{F_G} = (f_1, g_1) \circ (I_{E_1}, I_G) = (f_1 \circ I_{E_1}, g_1 \circ I_G) = (f_1, g_1)$$

dir.

$(K, \otimes')$  bir grup,  $\langle K, \tau_5, E_5 \rangle$  bir esnek topolojik grup

$(f_4, g_4) \in Hom(\langle K, \tau_5, E_5 \rangle, \langle G, \tau_1, E_1 \rangle)$  olsun. Buradan

$$I_{F_G} \circ (f_4, g_4) = (I_{E_1}, I_G) \circ (f_4, g_4) = (I_{E_1} \circ f_4, I_G \circ g_4) = (f_4, g_4)$$

olur.

Kategori olmanın bütün şartları sağlanır. Bu şekilde oluşturulan kategoriye *esnek topolojik grupların kategorisi* denir ve **STGrp** ile gösterilir.

**Önerme 3.2.**  $(G, \otimes_1)$  ve  $(H, \otimes_2)$  iki grup ,  $E_1$  ve  $E_2$  parametrelerin kümeleri ve  $\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  sırasıyla  $G$  ve  $H$  üzerinde esnek topolojik gruplar olsun.  $f_1: E_1 \rightarrow E_2$  bir fonksiyon ve  $g_1: G \rightarrow H$  bir grup homomorfizması olacak şekilde  $(f_1, g_1): \langle G, \tau_1, E_1 \rangle \rightarrow \langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  esnek topolojik grup morfizmi için

- (i)  $f_1$  birebir fonksiyon ve  $g_1$  birebir grup homomorfizmi ise  $(f_1, g_1)$  moniktir.
- (ii)  $f_1$  örten fonksiyon ve  $g_1$  örten grup homomorfizmi ise  $(f_1, g_1)$  epiktir.
- (iii)  $(f_1, g_1)$  izomorfizm ancak ve ancak  $(f_1, g_1)$  esnek homeomorfizmidir.

**İspat:** (i).  $(M, \otimes')$  bir grup  $\langle M, \tau_3, E_3 \rangle$  esnek topolojik grup ve  $(f_2, g_2), (f_3, g_3) \in \text{Hom}(\langle M, \tau_3, E_3 \rangle, \langle G, \tau_1, E_1 \rangle)$  olmak üzere

$$(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) = (f_1, g_1) \circ (f_3, g_3)$$

olsun. Bu durumda

$$(f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) = (f_1 \circ f_3, g_1 \circ g_3)$$

olup  $f_1 \circ f_2 = f_1 \circ f_3$  ve  $g_1 \circ g_2 = g_1 \circ g_3$  dir. Buradan  $f_1$  birebir fonksiyon ve  $g_1$  birebir grup homomorfizmi olduğundan  $f_2 = f_3$ ,  $g_2 = g_3$  dir.  $(f_2, g_2) = (f_3, g_3)$  olur ki buda  $(f_1, g_1)$  in monik olduğunu gösterir.

(ii).  $(N, \otimes_3)$  bir grup  $\langle N, \tau_4, E_4 \rangle$  esnek topolojik grup ve  $(f_4, g_4), (f_5, g_5) \in \text{Hom}(\langle H, \tau_2, E_2 \rangle, \langle N, \tau_4, E_4 \rangle)$  olmak üzere

$$(f_4, g_4) \circ (f_1, g_1) = (f_5, g_5) \circ (f_1, g_1)$$

olsun. Bu durumda

$$(f_4 \circ f_1, g_4 \circ g_1) = (f_5 \circ f_1, g_5 \circ g_1)$$

olup  $f_4 \circ f_1 = f_5 \circ f_1$  ve  $g_4 \circ g_1 = g_5 \circ g_1$  dir. Buradan  $f_1$  ve  $g_1$  örten olduğundan

$f_4 = f_5$ ,  $g_4 = g_5$  olup  $(f_4, g_4) = (f_5, g_5)$  olur. Buda  $(f_1, g_1)$  in epik olduğunu gösterir.

(iii).  $(f_1, g_1)$  izomorfizm olsun.

$(f_6, g_6) \in \text{Hom}(\langle H, \tau_2, E_2 \rangle, \langle G, \tau_1, E_1 \rangle)$   $f_6 : E_2 \rightarrow E_1$  ve  $g_6 : H \rightarrow G$  öyle ki

$$(f_1, g_1) \circ (f_6, g_6) = I_{F_H}$$

$$(f_1, g_1) \circ (f_6, g_6) = (I_{E_2}, I_H)$$

$$(f_1 \circ f_6, g_1 \circ g_6) = (I_{E_2}, I_H)$$

$$f_1 \circ f_6 = I_{E_2} \text{ ve } g_1 \circ g_6 = I_H \quad \dots (A)$$

$$(f_6, g_6) \circ (f_1, g_1) = I_{F_G}$$

$$(f_6, g_6) \circ (f_1, g_1) = (I_{E_1}, I_G)$$

$$(f_6 \circ f_1, g_6 \circ g_1) = (I_{E_1}, I_G)$$

$$f_6 \circ f_1 = I_{E_1} \text{ ve } g_6 \circ g_1 = I_G \quad \dots (B)$$

olacak şekilde  $(f_6, g_6)$  morfizmi vardır.

(A) ve (B) den dolayı  $f_1$  ve  $g_1$  birebir ve örtendir. Tersinin ispatı açıktır.

**Önerme 3.3.**  $(G, \otimes_1)$  ve  $(H, \otimes_2)$  iki grup,  $E_1$  ve  $E_2$  parametrelerin kümeleri ve  $\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  sırasıyla  $G$  ve  $H$  üzerinde esnek topolojik grup ve  $(f_1, g_1) : \langle G, \tau_1, E_1 \rangle \rightarrow \langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  esnek topolojik grup morfizmi olsun.  $(f_1, g_1)$  monik ise  $g_1$  birebirdir.

**İspat.**  $K = \ker(g_1)$  olsun.

$(I_{E_1}, i): \langle K, \tau_K, E_1 \rangle \rightarrow \langle G, \tau, E_1 \rangle$  bir esnek topolojik grup morfizmidir. Burada

$I_{E_1}: E_1 \rightarrow E_1$  birim fonksiyondur.

İlk olarak  $i: K \rightarrow G$  içine fonksiyondur. Bu içine fonksiyonun grup homomorfizmi olduğunu gösterelim.

$x, y \in K$  için  $i(xy) = xy = i(x)i(y)$  olduğundan grup homomorfizmidir.

Şimdi  $(I_{E_1}, i): \langle K, \tau_K, E_1 \rangle \rightarrow \langle G, \tau, E_1 \rangle$  esnek sürekli olduğunu gösterelim.  $\tau_K, \tau$  nun üzerinde esnek alt topolojisidir. İspatı Önerme 2.2.2. den yapacağız.

Her esnek açık  $A' \in \tau$  için  $i^{-1}(A')$  ters görüntüsünün de esnek açık olduğunu göstermeliyiz.

$i^{-1}(A') = A' \cap K \in \tau_K$  olur buda ters görüntüsünün açık olduğunu gösterir. Buradan  $(I_{E_1}, i)$  nin esnek süreklidir.

$(I_{E_1}, g_a): \langle K, \tau_K, E_1 \rangle \rightarrow \langle G, \tau, E_1 \rangle$

$I_{E_1}: E_1 \rightarrow E_1$  birim fonksiyon,  $g_a: K \rightarrow G$  aşikar grup homomorfizmi(trival homomorfizm) olsun. İlk olarak  $g_a: K \rightarrow G$  nin grup homomorfizması olduğunu gösterelim:

$x, y \in K$  için  $g_a(xy) = I_G = I_G I_G = g_a(x) g_a(y)$  olduğundan grup homomorfizmi olur.

Şimdi  $(I_{E_1}, g_a): \langle K, \tau_K, E_1 \rangle \rightarrow \langle G, \tau, E_1 \rangle$  esnek sürekli olduğunu gösterelim.

Her esnek açık  $A' \in \tau$  için  $g_a^{-1}(A')$  ters görüntüsünde esnek açık olduğunu göstermeliyiz.

$$g_a^{-1}(A') = \begin{cases} \tilde{K}, I_G \in A' \\ \tilde{\Phi}, I_G \notin A' \end{cases}$$

$\tilde{K}, \tilde{\Phi} \in \tau_K$  olduğundan esnek açıktır. Buradan  $(I_{E_1}, g_a)$  nin esnek sürekli olduğu görülür.

$$\begin{array}{ccc} (K, \tau_K, E_1) & \xrightarrow{(I_{E_1}, i)} & \langle G, \tau_1, E_1 \rangle \xrightarrow{(f_1, g_1)} \langle H, \tau_2, E_2 \rangle \\ (K, \tau_K, E_1) & \xrightarrow{(I_{E_1}, g_a)} & \end{array}$$

$(f_1, g_1) \circ (I_{E_1}, i) = (f_1, g_1) \circ (I_{E_1}, g_a)$  olup  $(f_1, g_1)$  monik olduğundan

$(I_{E_1}, i) = (I_{E_1}, g_a)$  ve buradan  $i = g_a$  olur

Her  $x, y \in K = \ker(g_1)$

$i(x) = g_a(x)$  ise  $x = 1_G$  ve  $i(y) = g_a(y)$  ise  $y = 1_G$  ki buradan  $x = y$  olup  $K = \ker(g_1) = \{1_G\}$  tek elemanlı olduğunu gösterir. O halde  $g_1$  birebirdir.

**Önerme 3.4.**  $(G, \otimes_1)$  ve  $(H, \otimes_2)$  iki grup,  $E_1$  ve  $E_2$  parametrelerin kümeleri ve  $\langle G, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  sırasıyla  $G$  ve  $H$  üzerinde esnek topolojik grup ve  $(f_1, g_1): \langle G, \tau_1, E_1 \rangle \rightarrow \langle H, \tau_2, E_2 \rangle$  esnek topolojik grup morfizmi olsun.  $(f_1, g_1)$  epik ise  $g_1$  örtendir.

**İspat:**  $K = \text{Im}(g_1)$

$g_2: H \rightarrow H/K$  kanonikal epimorfizm

$g_3: H \rightarrow H/K$  aşikar homomorfizm

$$\begin{array}{ccc} \langle G, \tau_1, E_1 \rangle & \xrightarrow{(f_1, g_1)} \langle H, \tau_2, E_2 \rangle & \xrightarrow{(I_{E_2}, g_2)} \langle H/K, \tau_3, E_2 \rangle \\ & & \xrightarrow{(I_{E_2}, g_3)} \langle H/K, \tau_3, E_2 \rangle \end{array}$$

$\tau_3 = \left\{ \tilde{\Phi}, \frac{\tilde{H}}{K} \right\}$  yani esnek indiske topolojidir. Önerme 2.2.3. de  $(I_{E_1}, g_2)$  ve  $(I_{E_1}, g_3)$

indiske topolojinin esnek sürekli olduğunu gösterildi. Bu da ispatı tamamlar.  $g_1$  epik bir grup homomorfizmi ise  $g_1$  in örten olduğunu [17] de aşağıdaki gibi ispatlamıştır.

Kabul edelim ki  $g_1$  örten olmasın.  $g_1$  örten olmadığından  $|H : K| > 1$  dir.

İlk olarak  $|H : K| = 2$  alalım.

$$(I_{E_2}, g_2) \circ (f_1, g_1) \neq (I_{E_2}, g_3) \circ (f_1, g_1)$$

$g_2 \circ g_1 \neq g_3 \circ g_1$  (trivial olduğunu biliyoruz.)  $g_2 \neq g_3$  ise  $(f_1, g_1)$  epik değildir.

Şimdi  $|H : K| > 2$  olduğunu varsayalım.  $K_1 = Kh_1$  ve  $K_2 = Kh_2$  olmak üzere  $H$  nin  $K_1, K_2 \neq K$  olmak üzere iki ayrı sağ koseti vardır.  $b = h_1^{-1}h_2$  yerine koyun ve  $K_1b = K_2$  ve  $K_2b^{-1} = K_1$  olduğunu unutmayın.  $S_H$ ,  $H$  üzerindeki simetrik grubu göstereceğiz ve  $\sigma \in S_H$  ile verilsin

$$\sigma(h) = \begin{cases} hb, & h \in K_1 \\ hb^{-1}, & h \in K_2 \\ h, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Tüm  $k \in K$  ve  $h \in H$  için  $\sigma^2 = 1_H$  ve ayrıca  $\sigma(kh) = k\sigma(h)$  olduğuna unutmayalım.

$h \in H$  için,  $\lambda_h$ ,  $\lambda_h(x) = hx (x \in H)$  ile verilen  $S_H$  nin elemanı olsun. O zaman yukarıdaki inceleme tüm  $k \in K$  için  $\sigma\lambda_k = \lambda_k\sigma$  verir.  $g_1, g_2 : H \rightarrow S_H$  yi  $g_1(h) = \lambda_h$  ve  $g_2(h) = \sigma\lambda_h\sigma$  ile tanımlayın ve bu haritaların her ikisinin de grup homomorfizmaları olduğuna dikkat edin.  $k \in K$  için,  $g_2(k) = \sigma\lambda_k\sigma = \lambda_k\sigma^2 = \lambda_k = g_1(k)$ , yani  $g_1f_2 = g_2f_2$  ye sahibiz. Öte yandan,  $e$  nin  $H$  nin gösterdiğini bilerek, elimizde

$g_2(h_1)(e) = \sigma\lambda_{h_1}\sigma(e) = \sigma(h_1) = h_2 \neq h_1 = \lambda_{h_1}(e) = g_1(h_1)(e)$  bulunur. Böylece  $g_1 \neq g_2$  olur. Bu nedenle epik değildir ve ispat tamamlanmıştır.

**Önerme 3.5.**  $(G_1, \oplus)$  ve  $(G_2, \square)$  birer grup ve  $G_1 \times G_2$  direkt çarpım grubu olsun.  $\langle G_1, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle G_2, \tau_2, E_2 \rangle$  esnek topolojik grup ve  $\{F_1 \times F_2, F_i \in \tau_i, i=1,2\}$  tarafından üretilen esnek topoloji  $\tau$  olsun.  $\langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle$  esnek çarpım esnek topolojik gruptur. Burada  $E_1 \times E_2$ ,  $E_1$  ve  $E_2$  nin kartezyen çarpımıdır.

**İspat:**  $\langle G_1, \tau_1, E_1 \rangle$  bir esnek topolojik grup ise  $x, a \in G_1$  ve  $xa^{-1} \in F'$  olan  $F'$  esnek açığı için  $x \in F_1'$ ,  $a \in F_2'$  ve  $F_1' F_2'^{-1} \subset F'$  olacak şekilde  $F_1'$  ve  $F_2'$  esnek açıkları vardır.

$\langle G_2, \tau_2, E_2 \rangle$  bir esnek topolojik grup ise  $y, b \in G_2$  ve  $yb^{-1} \in F''$  olan  $F''$  esnek açığı için  $y \in F_1''$ ,  $b \in F_2''$  ve  $F_1'' F_2''^{-1} \subset F''$  olacak şekilde  $F_1''$  ve  $F_2''$  esnek açıkları vardır.

$(x, y), (a, b) \in G_1 \times G_2$  için  $(xa^{-1}, yb^{-1}) \in G_1 \times G_2$  dir.  $xa^{-1} \in F'$  ve  $yb^{-1} \in F''$  olup  $x \in F_1'$ ,  $a \in F_2'$ ,  $y \in F_1''$ ,  $b \in F_2''$  vardır ve  $(xa^{-1}, yb^{-1}) \in F_1' F_2'^{-1} \times F_1'' F_2''^{-1} \subset F' \times F''$  olur buda  $\langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle$  esnek çarpımın esnek topolojik grup olduğunu gösterir.

**Tanım 3.4.**  $\langle G_1, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle G_2, \tau_2, E_2 \rangle$  birer esnek topolojik grup olsun. Bu esnek topolojik grupların çarpımı olan  $\langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle$  esnek topolojik grubuna *çarpım esnek topolojik grup* denir.

**Önerme 3.6.**  $\langle G_1, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle G_2, \tau_2, E_2 \rangle$  birer esnek topolojik grup ve  $\langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle$  çarpım esnek topolojik grubu olsun.

$$P_{E_1} : E_1 \times E_2 \rightarrow E_1, \quad q_{G_1} : G_1 \times G_2 \rightarrow G_1$$

$$P_{E_2} : E_1 \times E_2 \rightarrow E_2, \quad q_{G_2} : G_1 \times G_2 \rightarrow G_2 \text{ olmak üzere}$$

$$(P_{E_1}, q_{G_1}) : \langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle \rightarrow \langle G_1, \tau_1, E_1 \rangle,$$

$$(P_{E_2}, q_{G_2}) : \langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle \rightarrow \langle G_2, \tau_2, E_2 \rangle \text{ birer esnek topolojik grup morfizmidir.}$$

**İspat.**  $q_{G_1}: G_1 \times G_2 \rightarrow G_1$  ve  $q_{G_2}: G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$  nin bir grup homomorfizmi olduğu açıktır.

$(P_{E_1}, q_{G_1})$  esnek sürekli olduğunu gösterelim:

Her  $x \in G_1$  ve  $y \in G_2$  olup  $(x, y) \in G_1 \times G_2$  dır ve  $q_{G_1}(x, y) = x$  in her  $F'$  esnek komşuluğu için  $q_{G_1}(x, y) \in (P_{E_1}, q_{G_1})(F' \times F_2) = F' \tilde{c} F'$  olup  $(P_{E_1}, q_{G_1})$  esnek süreklidir.

Aynı şekilde  $(P_{E_2}, q_{G_2})$  de esnek süreklidir.

**Önerme 3.7.** **STGrp** da objeleri  $\langle G_1, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $\langle G_2, \tau_2, E_2 \rangle$  ve  $\{F_1 \tilde{\times} F_2, F_i \in \tau_i, i = 1, 2\}$  tarafından üretilen topoloji  $\tau$  olsun.  $\langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle$  çarpım belirtir.

**İspat.**  $\langle H, \sigma, E \rangle$ , **STGrp** da bir obje ve  $(\alpha_1, \alpha_2): \langle H, \sigma, E \rangle \rightarrow \langle G_1, \tau_1, E_1 \rangle$  ve  $(\beta_1, \beta_2): \langle H, \tau, E \rangle \rightarrow \langle G_2, \tau_2, E_2 \rangle$  birer esnek topolojik grup morfizmi olsun.

$(\vartheta, \chi) = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)): \langle H, \sigma, E \rangle \rightarrow \langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle$  şeklinde tanımlansın.

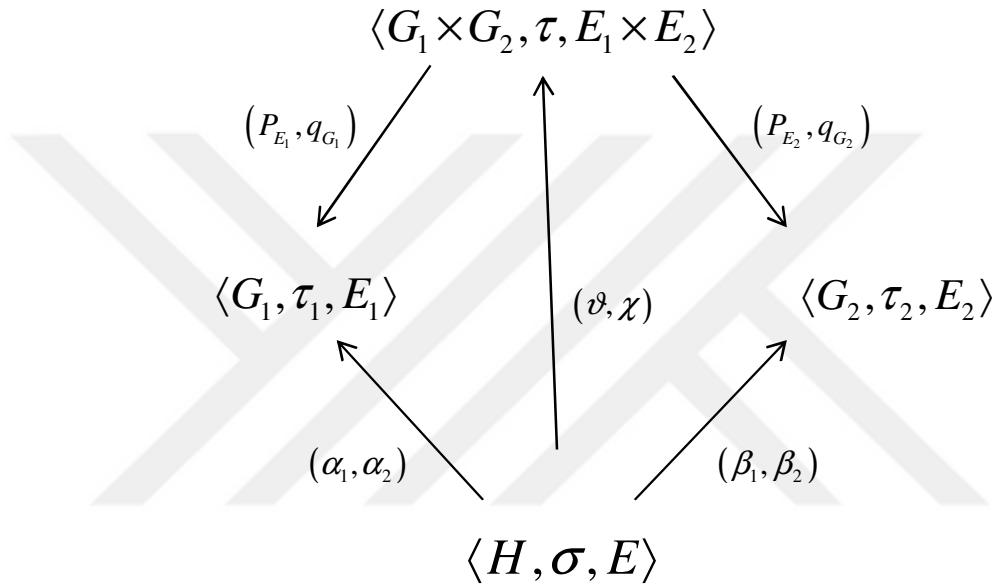
$(\alpha_2, \beta_2): H \rightarrow G_1 \times G_2$ ,  $h \in H$  için  $(\alpha_2, \beta_2)(h) = (\alpha_2(h), \beta_2(h))$  bir grup homomorfizmidir.

Ayrıca her  $h \in H$  ve  $\chi(h)$  in her  $F'$  esnek komşuluğu için  $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)$  esnek sürekli olduğundan her  $h \in H$  ve  $\alpha_2(h)$  in her  $F'_1$  esnek komşuluğu için  $\alpha_2(h) \in (\alpha_1, \alpha_2)(F_1) \tilde{c} F'_1$  olacak şekilde  $F_1$  esnek komşuluğu ve benzer şekilde her  $h \in H$  ve  $\beta_2(h)$  in her  $F'_2$  esnek komşuluğu için  $\beta_2(h) \in (\beta_1, \beta_2)(F_2) \tilde{c} F'_2$  olacak şekilde  $F_2$  esnek komşuluğu vardır. Buradan her  $h \in H$  ve  $\chi(h) = (\alpha_2, \beta_2)(h) = (\alpha_2(h), \beta_2(h))$  in her  $(F'_1, F'_2)$  esnek komşuluğu için  $(\alpha_2, \beta_2)(h) \in ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))(F_1, F_2) \tilde{c} (F'_1, F'_2)$  olduğu açıktır. Buradan  $(\vartheta, \chi)$  esnek süreklidir. Bu da  $(\vartheta, \chi)$  fonksiyonunun var olduğunu gösterir. Şimdi  $(\vartheta, \chi)$  nin tek olduğunu gösterelim.

$$(\gamma, \theta): \langle H, \sigma, E \rangle \rightarrow \langle G_1 \times G_2, \tau, E_1 \times E_2 \rangle$$

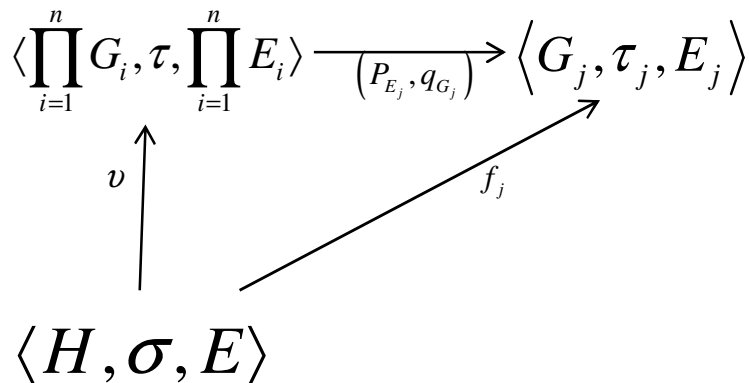
$(P_{E_1}, q_{G_1}) \circ (\gamma, \theta) = (\alpha_1, \alpha_2)$  ve  $(P_{E_2}, q_{G_2}) \circ (\gamma, \theta) = (\beta_1, \beta_2)$  olacak şekilde bir başka esnek topolojik grup morfizmi olsun.

$p_{E_1} \circ \gamma = p_{E_1} \circ \vartheta$  ise  $\gamma = \varphi$  ve  $q_{G_1} \circ \theta = q_{G_1} \circ \chi$  ise  $\theta = \chi$  olup  $(\vartheta, \chi)$  tektir.



**Sonuç 3.1.** STGrp da objeleri  $\{\langle G_i, \tau_i, E_i \rangle\}, 1 \leq i \leq n$  ailesi ve  $\prod_{i=1}^n F_i, F_i \in \tau_i$  tarafından

üretilen topoloji  $\tau$  olsun.  $\langle \prod_{i=1}^n G_i, \tau, \prod_{i=1}^n E_i \rangle$  çarpım belirtir.



**Önerme 3.8. (Bitiş objesi)**  $1_G$  tek elemanlı grup,  $\tau$  esnek indiske topoloji ve  $\{e\}$  tek elemanlı parametre kümesi olmak üzere  $\langle 1_G, \tau, \{e\} \rangle$  esnek topolojik grubu **STGrp** un bitiş objesidir.

**İspat.**  $\langle H, \sigma, E_2 \rangle$  esnek topolojik grup olsun.  $(f_1, g_1)$  esnek sürekli olduğunu  $\tau$  esnek indiske topoloji olduğundan söyleriz.

$$\langle H, \sigma, E_2 \rangle \xrightarrow{(f_1, g_1)} \langle 1_G, \tau, \{e_1\} \rangle$$

$g_1 : H \rightarrow \{1_G\}$  sabit fonksiyon tekdir.

$f_1 : E_2 \rightarrow \{e_1\}$  sabit fonksiyon tekdir.

Dolayısıyla buradan  $(f_1, g_1)$  de tekdir.

**Sonuç 3.2. STGrp** kategorisinde çarpım ve bitiş objesi vardır. O halde bu kategori bir simetrik monoid kategoridir.

## KAYNAKLAR

1. Zadeh L. A.(1965), Fuzzy sets, *Information and Control* 8 338–353.
2. Pawlak Z. (1982), Rough sets, *Int. J. Comput. Inf. Sci.* 11(5) 341–356
3. Molodtsov D. A. (1999), Soft set theory-First results, **Comput. Math. Appl.** 37(4-5) 19–31
4. Maji P. K., Biswas R. and Roy A. R. (2003), Soft set theory, **Comput. Math. Appl.** 45(4-5) 555–562.
5. Shabir, M., & Naz, M. (2011). On soft topological spaces. **Computers & Mathematics with Applications**, 61(7), 1786-1799.
6. Çağman N., Karataş S. and Enginoğlu S. (2011), Soft topology, **Comput. Math. Appl.** 62(1) 351–358
7. Aktaş H. and Çağman N. (2007), Soft sets and soft groups, **Inform. Sci.** 77(13) 2726–2735
8. Hida, T. (2014). Soft topological group. **Ann. Fuzzy Math. Inform**, 8(6), 1001-1025.
9. Bénabou J. (1963). "Catégories avec multiplication". **C. R. Acad. Sci. (in French)**. 256: 1887–1890.
10. MacLane, S. (1963). Natural associativity and commutativity. **Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies**, 49(4).
11. Baez, J., & Stay, M. (2010). Physics, topology, logic and computation: a Rosetta Stone. **In New structures for physics** (pp. 95-172). Springer, Berlin, Heidelberg.
12. Ghani, N., Hedges, J., Winschel, V., & Zahn, P. (2018, July). Compositional game theory. *In Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science* (pp. 472-481).
13. Maji P. K., Biswas R. and Roy A. R. (2003), Soft set theory, **Comput. Math. Appl.** 45(4-5) 555–562.
14. Aktaş, H., & Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. **Information sciences**, 177(13), 2726-2735.
15. Mac Lane, S. (2013). Categories for the working mathematician (Vol. 5). Springer Science & Business Media. Sayfalar 7-31

16. Mucuk, O. (2010). Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, 2. Basım, Ankara.  
Sayfalar 343-347
17. Randall R. Holmes. 2019. Category Theory. (**Web sayfası:**  
<https://web.auburn.edu/holmerr/8970/Textbook/CategoryTheory.pdf>),  
(Erişim tarihi: Şubat 2021). Sayfa 15



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Halim AYAZ

Uyruğu: Türkiye (TC)

### EĞİTİM

| Derece | Kurum  | Mezuniyet Tarihi |
|--------|--|------------------|
| Lisans | Erciyes Üniversitesi Fen<br>Fakültesi Matematik Bölümü | 2011             |
| Lise   | Talas Lisesi, Kayseri                                  | 2006             |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl        | Kurum  | Görev               |
|------------|--|---------------------|
| 2011–2016  | Oltu Yavuz Selim Mesleki ve<br>Teknik Anadolu Lisesi   | Matematik Öğretmeni |
| 2016–2017  | Oltu Anadolu Lisesi                                    | Matematik Öğretmeni |
| 2017–2019  | Hasbekli Hafız Mümin Akan<br>Anadolu İmam Hatip Lisesi | Matematik Öğretmeni |
| 2019–Halen | 15 Temmuz Şehitler Kız Anadolu<br>Lisesi               | Matematik Öğretmeni |

### YABANCI DİL

İngilizce