

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇATILANDIRILMIŞ BİR EĞRİ İLE BAĞLANTILI
İNTEGRAL EĞRİLERİ

Zeynep BÜLBÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Temmuz, 2022

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇATILANDIRILMIŞ BİR EĞRİ İLE BAĞLANTILI
İNTEGRAL EĞRİLERİ

Zeynep BÜLBÜL tarafından hazırlanan tez çalışması 04.07.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Danışman

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE, Üye

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye

İstanbul Gelişim Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Çatılandırılmış Bir Eğri İle Bağlantılı İntegral Eğrileri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Zeynep BÜLBÜL

İmza



*Aileme
ve
yakın arkadaşlarıma*

TEŐEKKÜR

Bu çalıőmanın konusunun belirlenmesinde ve hazırlanma sürecinin her aőamasında beni destekleyen değerli bilgilerini ve zamanını benden esirgemeyerek her fırsatta çalıőmamla yakından ilgilenen, eleőtirileriyle yol gősteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL'e teőekkür ederim.

Güven, anlayıő ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme minnet ve őükranlarımı sunarım.

Çalıőmalarım boyunca yardımını ve desteğini hiç esirgemeyen değerli arkadaşlarım Beydullah GEMİCİ, Alican AA ve Hüseyin TOKSOY'a teőekkürü borç bilirim.

Zeynep BÜLBÜL

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Orijinal Katkı	2
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
3 ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİ VE UYARLANMIŞ ÇATI	8
3.1 Çatılandırılmış Eğri Boyunca Uyarlanmış Çatı	9
3.1 Çatılandırılmış Rektifiyan Eğriler	14
4 ÇATILANDIRILMIŞ DOĞRULTU EĞRİLERİ	17
4.1 Çatılandırılmış Asli Donör Eğrisi	18
4.2 Çatılandırılmış Genelleştirilmiş Asli Doğrultu Eğrisi	20
4.3 Çatılandırılmış Genelleştirilmiş Binormal Doğrultu Eğrisi	24
4.4 Çatılandırılmış Darboux Doğrultu Eğrisi	24
5 SONUÇ VE ÖNERİLER	35
KAYNAKÇA	36
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	37

SİMGE LİSTESİ

t	Eğrinin birim teğet vektör alanı
n	Eğrinin birim normal vektör alanı
b	Eğrinin birim binormal vektör alanı
κ	E^3 uzayında eğrilik
τ	E^3 uzayında torsiyon (burulma)
\mathbb{R}	Reel Sayılar kümesi



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1 Çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi	30
Şekil 4.2 Çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisi	33
Şekil 4.3 Çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğrultu eğrisi	34



Çatılandırılmış Bir Eğri İle Bağlantılı İntegral Eğrileri

Zeynep BÜLBÜL

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış olup, bu bölümde literatür özeti, tezin amacı ve orjinal katkı verilmiştir.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında tez boyunca kullanılacak olan eğriler ile ilgili bazı tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında singüler noktalara sahip olan eğrileri incelemek için tanımlanan çatılandırılmış eğri kavramına yer verilmiştir. Bu tür eğriler boyunca tanımlı hareketli çatının Frenet tipi formülleri elde edilerek, bir regüler eğrinin eğriliğine benzer şekilde çatılandırılmış eğrinin eğriliği tanımlanmıştır. Daha sonra çatılandırılmış helis, çatılandırılmış slant helis ve çatılandırılmış rektifiyan eğri tanımları verilerek, bu tür eğrilerin karakterizasyonları ifade edilmiştir. Ayrıca bir regüler eğrinin eğrilikleri ile çatılandırılmış eğriliği arasındaki ilişkiler de verilmiştir.

Tezin orijinal kısmını oluşturan dördüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış bir eğri ile bağlantılı bazı yeni eğriler tanımlanmıştır. Çatılandırılmış bir eğrinin bazı vektör alanlarının integral eğrileri olarak tanımlanan bu yeni eğriler, sırasıyla, çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu

eğrisi, çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğru eğrisi ve çatılandırılmış Darboux doğru eğrisi olarak adlandırılmıştır. Bu yeni tanımlanmış çatılandırılmış eğrilerin çatılandırılmış eğriliği ile verilen çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış eğriliği arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Elde edilen ilişkiler kullanılarak bu tür eğriler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Son bölümde ise bu tezde elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Çatılandırılmış eğri, çatılandırılmış helis, çatılandırılmış slant helis, çatılandırılmış doğru eğrisi.



Integral Curves Connected With a Framed Curve

Zeynep BÜLBÜL

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is reserved for the introduction, and in this chapter, the literature summary, the aim of the thesis and the original contribution are given.

In the second chapter, some definitions and theorems about curves that will be used throughout the thesis in 3-dimensional Euclidean space are mentioned.

In the third chapter, the concept of framed curve, which is defined to examine curves with singular points in 3-dimensional Euclidean space, is given. By obtaining the Frenet type formulas of the moving frame defined along such curves, the curvature of the framed curve is defined similar to the curvature of a regular curve. Then, by giving definitions of framed helix, framed slant helix and framed rectifying curves, the characterizations of such curves are expressed. Also, the relationships between the curvatures and the framed curvature of a regular curve are given.

In the fourth chapter which constitutes the original part of the thesis, some new curves associated with a framed curve in 3-dimensional Euclidean space are defined. These new curves, which are defined as the integral curves of some vector

fields of a framed curve, are called as the framed generalized principal direction curve, the framed generalized binormal direction curve, and the framed Darboux direction curve, respectively. Relationships between the framed curvature of these newly defined framed curves and the framed curvature of the given framed curve are obtained. Some characterizations are given for such curves using the obtained relations.

In the last part, the results obtained in this thesis are mentioned and some suggestions are made.

Keywords: Framed curve, framed helix, framed slant helix, framed direction curve.



1.1 Literatür Özeti

3-boyutlu Öklid uzayında eğriler teorisi, diferansiyel geometrideki en temel çalışma alanlarından biridir. Eğriler arasında en çok çalışılanlar ise regüler eğrilerdir. Bu tür eğriler için literatürde sadece farklı eğri türleri değil, aynı zamanda belirli bir eğri için çeşitli bağlantılı eğrilerde vardır. Regüler eğriler arasında ise en dikkat çekici olanlar helis eğrileridir. Choi ve Kim [1], belirli bir Frenet eğrisinin asli-doğrultu eğrisi ve binormal-doğrultu eğrisi olarak adlandırılan bazı yeni eğrileri tanıtmışlardır. Frenet eğrisi ile bağlantılı bu eğrilerin uygulaması olarak, helisel eğrileri bu eğrilerin bağlantılı eğrilerinden yararlanarak karakterize etmişlerdir. Ayrıca düzlemsel bir eğri kullanarak helisel eğriler inşa etmek için kuralsal bir yöntem ortaya koymuşlardır. Bu çalışmadan esinlenerek Macit ve Düldül [2] bir yüzey eğrisi olarak teğet normal slant helisleri tanımlamışlar ve bu eğriler için bazı karakterizasyonlar vermişlerdir.

E^3 Öklid uzayında verilmiş bir regüler eğrinin Frenet çatısını ve eğriliklerini tanımlamak mümkündür. Ancak, E^3 uzayında bir uzay eğrisinin bazı singüler noktaları olabilir. Bu singüler noktalarda teğet vektörler tanımlı olmadığı için bu noktalarda Frenet çatısı oluşturulamaz. Honda ve Takahashi [3] 2016'da singüler noktalara sahip eğrileri incelemek için çatılandırılmış eğri tanımını vermiştir. Bir çatılandırılmış eğri, hareketli çatıya sahip bir uzay eğrisidir. Bu tür eğriler lineer bağımsızlık şartına sahip regüler eğrilerin bir genellemesidir. 2019'da singüler noktalara sahip rektifiyan eğrileri incelemek için Wang, Pei ve Gao [4] çatılandırılmış rektifiyan eğrileri tanımlamışlar ve bu eğrilerin karakterizasyonlarını vermişlerdir. Bunun yanısıra çatılandırılmış helisleri de tanımlayarak, çatılandırılmış helisler ile çatılandırılmış rektifiyan eğriler arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. 2020 yılında Honda ve Takahashi [5], E^3 Öklid uzayında çatılandırılmış eğrilerin Bertrand ve Mannheim eğrilerini tanımlamışlardır. Okuyucu ve Canbirdi [6] ise çatılandırılmış slant helisi tanımlayarak, bu tür eğrilerin karakterizasyonunu vermişlerdir.

1.2 Tezin Amacı

3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış eğrilerle ilişkili integral eğrileri tanımlamak ve yeni tanımlanan integral eğrilerinin eğrilikleri ile verilen çatılandırılmış eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi incelemektir.

1.3 Orjinal Katkı

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış bir eğri ile bağlantılı bazı yeni eğriler tanımlanmıştır. Çatılandırılmış bir eğrinin vektör alanlarının integral eğrileri yardımıyla tanımlanan bu yeni eğrilerin eğrilikleri ile verilen çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir. Elde edilen ilişkiler kullanılarak bu tür eğriler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Tanım 2.1 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir diferansiyellenebilir eğri denir. Buradaki I aralığı α eğrisinin parametre aralığı olarak tanımlanır. $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

Tanım 2.2 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun.

$$v: I \rightarrow \mathbb{R}, v(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı v fonksiyonuna skaler hız fonksiyonu, $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ değerine de α 'nın $\alpha(t)$ 'deki skaler hızı,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n(t)}{dt} \right)$$

vektörüne de α eğrisinin hız vektörü denir.

Tanım 2.3 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisi için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri, $s \in I$ parametresine de eğrinin yay parametresi denir.

Tanım 2.4 $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi için her noktadaki hız vektörü sıfırdan farklı ($\alpha'(t) \neq 0$) ise α eğrisine regüler eğri denir.

Tanım 2.5 E^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$t(s) = \alpha'(s)$$

ile tanımlı $t(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir.

t fonksiyonu I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $\alpha'(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Buna göre t , α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir.

Tanım 2.6 E^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisi için

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|t'(s)\|$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 2.7 E^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisi için $\kappa(s) > 0$ olmak üzere

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{t}'(s)$$

ile tanımlı $\mathbf{n}(s)$ vektörüne, α 'nın $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü ve \mathbf{n}' 'ye de α eğrisinin asli normal vektör alanı denir.

Tanım 2.8 E^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisi için

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

ile tanımlı $\mathbf{b}(s)$ vektörüne, α 'nın $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü ve \mathbf{b}' 'ye de α eğrisinin binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.9 E^3 uzayındaki birim hızlı α eğrisinin Frenet vektör alanları $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ olmak üzere

$$\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması (torsiyonu) denir.

Teorem 2.1 $\alpha, \kappa > 0$ eğriliğine sahip E^3 de birim hızlı bir eğri olsun. $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ vektör alanları α eğrisinin her noktasında bir ortonormal çatı tanımlar (Bu çatıya α eğrisi boyunca Frenet çatısı denir) [7-8].

Teorem 2.2 $\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$$

şeklindedir [7-8]. Bu eşitliklere Frenet formülleri denir.

Teorem 2.3 α, E^3 de bir regüler eğri olsun. Bu durumda eğrinin Frenet vektörleri ile eğrilik ve burulma fonksiyonları

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \quad N = B \times T, \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

şeklindedir [7-8].

Tanım 2.10 $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olsun.

1. $sp\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ alt uzayına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskütatör düzlemi denir.
2. $sp\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ alt uzayına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlemi denir.
3. $sp\{\mathbf{b}(s), \mathbf{t}(s)\}$ alt uzayına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlemi denir.

Tanım 2.11 Bir eğrinin her noktasındaki teğet vektörü sabit bir vektör ile sabit bir açı yapıyorsa o eğriye bir helis denir.

Teorem 2.4 E^3 de eğriliği $\kappa > 0$ olan regüler bir eğrinin helis olması için gerek ve yeter koşul τ/κ oranının sabit olmasıdır [7-8].

İspat: (\Rightarrow): α eğrisinin bir helis olduğunu kabul edelim. α eğrisinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ alınırsa, helisin tanımı gereğince

$$\langle \mathbf{t}(s), U \rangle = \cos\theta$$

olacak şekilde sabit bir U birim vektörüyle sabit bir θ açısı vardır. Bu eşitliğin eğrinin s yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle \mathbf{t}'(s), U \rangle = 0 \Rightarrow \kappa \langle \mathbf{n}(s), U \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{n} \perp U$$

olduğu görülür. Burada $U \in sp\{\mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\}$ olduğundan

$$U(s) = \cos\theta \mathbf{t}(s) + \sin\theta \mathbf{b}(s)$$

bulunur. Diğer yandan

$$\langle \mathbf{n}, U \rangle = 0$$

ifadesinin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \mathbf{n}'(s), U \rangle + \langle \mathbf{n}(s), U' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), U \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), U \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \kappa(s)\langle \mathbf{t}(s), U \rangle - \tau(s)\langle \mathbf{b}(s), U \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \cot\theta = s\kappa$$

elde edilir.

(\Leftarrow): Kabul edelim ki $\forall s \in I$ için τ/κ oranı sabit olsun. α eğrisinin bir helis olduğunu göstermek istiyoruz.

$\tau/\kappa = s\kappa$ ise $\tau/\kappa = \cot\theta = s\kappa$ olacak şekilde sabit bir θ açısı vardır. Buradan

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0$$

olur.

$$U(s) = \cos\theta \cdot \mathbf{t}(s) + \sin\theta \cdot \mathbf{b}(s)$$

vektörünü tanımlayalım. Açının sabit olduğu dikkate alınır ve türev alınırsa

$$U' = \cos\theta \mathbf{t}' + \sin\theta \mathbf{b}'$$

veya

$$U' = [\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta]\mathbf{n}(s)$$

olup, $\kappa(s)\cos\theta - \tau(s)\sin\theta = 0$ olduğu kullanılırsa $U' = 0$ yani $U = s\kappa$ bulunur. Buradan

$$\langle \alpha'(s), U \rangle = \langle \mathbf{t}(s), U \rangle = \langle \mathbf{t}(s), \cos\theta \mathbf{t}(s) + \sin\theta \mathbf{b}(s) \rangle = \cos\theta = s\kappa$$

olur ki, bu da α nın bir helis olduğunu gösterir.

Tanım 2.12 $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisinin yer vektörü her zaman eğrinin rektifiyan düzleminde bulunuyorsa α eğrisine rektifiyan eğri denir. Eğrinin Frenet vektörleri $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, yay parametresi $s \in I$ olmak üzere bir rektifiyan eğrinin $\alpha(s)$ yer vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{t}(s) + \mu(s)\mathbf{b}(s)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır [9].

Tanım 2.13 α eğrisinin her noktasındaki normal vektörü sabit bir vektör ile sabit bir açı yapıyorsa α ya bir slant helis denir.

Tanım 2.14 $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$

$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ E^3 de bir eğri olsun. $X \in \chi(E^n)$ olmak üzere $\forall t \in I$ için $\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$ oluyorsa α eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir.

Tanım 2.15 $\alpha: I \rightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, eğriliği κ ve burulması τ olsun. $D = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ vektör alanına α 'nın Darboux vektör alanı denir.

$$\tilde{D} = \frac{D(s)}{\|D(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}(\tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b})$$

vektörüne α eğrisinin Darboux göstergesi denir.

Tanım 2.16 γ eğrisi boyunca $\{\gamma', \gamma''\}$ kümesi lineer bağımsız ise bu eğriye Frenet eğrisi denir.

Tanım 2.17 $\gamma: I \rightarrow E^3$ bir Frenet eğrisi ve eğrinin Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere, \mathbf{n} ve \mathbf{b} vektör alanlarının integral eğrilerine, sırasıyla, γ eğrisinin asli-doğrultu ve binormal-doğrultu eğrileri denir [1].

ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİ VE UYARLANMIŞ ÇATI

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ herhangi bir eğri olsun. Eğer γ eğrisi, $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \neq 0$ şartını sağlayan bir regüler eğri ise, bu eğriyi Frenet çatısı veya diğer uyarlanmış çatılar aracılığıyla çatılandırabiliriz [10]. Ancak eğer γ eğrisi singüler noktalara sahip ise, o noktalarda Frenet çatısı tanımlanamaz. Bu durumda, böyle bir eğri aşağıdaki metodla çatılandırılabilir [3,4]:

$$\Delta_2 = \{\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}, i, j = 1, 2\} \quad (3.1)$$

kümesini göz önüne alalım.

Eğer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \Delta_2$ ise $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ vektörünün \mathbb{R}^3 de birim vektör olduğu açıktır.

Tanım 3.1 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ herhangi bir eğri ve $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \Delta_2$ olsun. Eğer $\forall t \in I$ ve $i = 1, 2$ için $\langle \gamma'(t), \mathbf{v}_i(t) \rangle = 0$ ise $(\gamma, \mathbf{v}): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ ikilisine bir çatılandırılmış eğri denir. Eğer (γ, \mathbf{v}) çatılandırılmış bir eğri olacak şekilde $\mathbf{v}: I \rightarrow \Delta_2$ varsa γ eğrisine çatılandırılmış taban eğrisi denir [3].

$(\gamma, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğri ve $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ olsun. O halde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \boldsymbol{\mu}\}$ üçlüsü γ boyunca hareket eden bir çatı tanımlar. Bu çatının Frenet tipi formülleri

$$\langle \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2 \rangle = l, \quad \langle \mathbf{v}'_1, \boldsymbol{\mu} \rangle = m, \quad \langle \mathbf{v}'_2, \boldsymbol{\mu} \rangle = n$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_1(t) = l(t)\mathbf{v}_2(t) + m(t)\boldsymbol{\mu}(t) \\ \mathbf{v}'_2(t) = -l(t)\mathbf{v}_1(t) + n(t)\boldsymbol{\mu}(t) \\ \boldsymbol{\mu}'(t) = -m(t)\mathbf{v}_1(t) - n(t)\mathbf{v}_2(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

şekindedir. Ayrıca, γ' vektörü \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 vektörlerine dik olduğundan $\boldsymbol{\mu}$ vektörüne paraleldir. Böylece

$$\gamma' = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t) \quad (3.3)$$

olacak şekilde $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu vardır.

Tanım 3.2 $(\gamma, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2): I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisi boyunca tanımlanan (l, m, n, α) fonksiyonlarına γ eğrisinin eğriliği denir [3].

Bir t_0 noktası γ 'nın bir singüler noktası ise $\alpha(t_0) = 0$ olacağı, tersine $\alpha(t_0) = 0$ ise t_0 noktasının γ 'nın bir singüler noktası olacağı (3.3) eşitliğinden açıktır.

Lineer bağımsızlık şartına sahip regüler eğriler çatılandırılmış eğrilere örnek olarak verilebilir.

Örnek 3.1 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ bir regüler eğri ve $\forall t \in I$ için $\gamma'(t)$ ile $\gamma''(t)$ vektörleri lineer bağımsız olsun. γ eğrisi boyunca Frenet çatısı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olmak üzere $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{n}(t), \mathbf{v}_2(t) = \mathbf{b}(t)$ alınır, $(\gamma, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ bir çatılandırılmış eğridir. Burada $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{v}_1(t) \times \mathbf{v}_2(t) = \mathbf{t}(t)$ olacağı açıktır [3].

Teorem 3.1 (Çatılandırılmış Eğriler İçin Varlık Teoremi) $(l, m, n, \alpha): I \rightarrow \mathbb{R}^4$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. Eğriliği (l, m, n, α) olan bir (γ, \mathbf{v}) çatılandırılmış eğrisi vardır [3].

Teorem 3.2 (Çatılandırılmış Eğrilerin Teklik Teoremi) Çatılandırılmış eğrilikleri (l, m, n, α) ve $(\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{\alpha})$ olan iki çatılandırılmış eğri, sırasıyla, (γ, \mathbf{v}) ve $(\tilde{\gamma}, \tilde{\mathbf{v}})$ olsun. Eğer bu eğrilerin çatılandırılmış eğrilikleri aynı ise (γ, \mathbf{v}) ve $(\tilde{\gamma}, \tilde{\mathbf{v}})$ çatılandırılmış eğrileri denktirler [3].

3.1 Çatılandırılmış Eğri Boyunca Uyarlanmış Çatı

$(\gamma, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ eğrisi (l, m, n, α) eğriliğiyle verilen bir çatılandırılmış eğri olsun. Burada \mathbf{v}_1 ve \mathbf{v}_2 vektörleri $\gamma(t)$ 'nin normal düzleminin taban vektörleridir.

$(\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2) \in \Delta_2$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{v}_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

vektörlerini tanımlayalım. Burada $\theta(t)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. $(\gamma, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2) \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ ikilisinin de bir çatılandırılmış eğri olduğu açıkça görülmektedir. (3.4) eşitliğinden

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = \cos\theta \mathbf{v}_1 - \sin\theta \mathbf{v}_2$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \sin\theta \mathbf{v}_1 + \cos\theta \mathbf{v}_2$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(t) &= \bar{v}_1(t) \times \bar{v}_2(t) = (\cos\theta v_1 - \sin\theta v_2) \times (\sin\theta v_1 + \cos\theta v_2) \\
&= \cos^2\theta v_1 \times v_2 - \sin^2\theta v_2 \times v_1 \\
&= \mu
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (3.2) türev formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{v}'_1 &= v_1[-\theta' \sin\theta + \sin\theta l] + v_2[\cos\theta l - \theta' \cos\theta] + \mu[m \cos\theta - \sin\theta n] \\
&= v_1 \sin\theta[l - \theta'] + v_2 \cos\theta[l - \theta'] + \mu[m \cos\theta - \sin\theta n] \\
&= [l - \theta'](v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta) + \mu[m \cos\theta - \sin\theta n] \\
&= [l - \theta']\bar{v}_2 + \mu[m \cos\theta - \sin\theta n]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\bar{v}'_2 &= v_1[\theta' \cos\theta - \cos\theta l] + v_2[\sin\theta l - \theta' \sin\theta] + \mu[m \sin\theta - n \cos\theta] \\
&= v_1 \cos\theta[\theta' - l] - v_2 \sin\theta[\theta' - l] + \mu[m \sin\theta + n \cos\theta] \\
&= [\theta' - l](v_1 \cos\theta - v_2 \sin\theta) + \mu[m \sin\theta + n \cos\theta]
\end{aligned}$$

bulunur.

$\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \sin\theta + n \cos\theta = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$m = -p \cos\theta, \quad n = p \sin\theta$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{v}'_1 &= [l - \theta']\bar{v}_2 + \mu[-p \cos^2\theta - p \sin^2\theta] \\
&= [l - \theta']\bar{v}_2 - p \mu
\end{aligned}$$

elde edilir. $q = l - \theta'$ alınırsa

$$\bar{v}'_1 = q \bar{v}_2 - p \mu$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\bar{v}'_2 = -q \bar{v}_1$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\mu'(t) = -m(t)v_1(t) - n(t)v_2(t)$$

eşitliğinden

$$\mu' = p\bar{v}_1$$

bulunur.

$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \mu)$ üçlüsü γ eğrisi boyunca bir uyarlanmış çatı oluşturur ve bu çatının Frenet-tipi formülleri aşağıdaki şekildedir [4]:

$$\begin{pmatrix} \mu'(t) \\ \bar{v}_1'(t) \\ \bar{v}_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & p(t) & \mathbf{0} \\ -p(t) & \mathbf{0} & q(t) \\ \mathbf{0} & -q(t) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(t) \\ \bar{v}_1(t) \\ \bar{v}_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Burada $\mu, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ vektörlerine, çatılandırılmış eğrinin, sırasıyla, genelleştirilmiş teğet vektörü, genelleştirilmiş asli normal vektörü ve genelleştirilmiş binormal vektörü adı verilir.

$p(t) = \|\mu'(t)\| > 0$ ve $q(t) = l(t) - \theta'(t)$ olmak üzere (p, q, α) fonksiyonları γ eğrisinin çatılandırılmış eğriliği olarak adlandırılır.

Tanım 3.3 γ, E^3 de eğriliği $p(t) > 0$ olan çatılandırılmış bir eğri olsun. γ eğrisinin her noktasındaki genelleştirilmiş teğet vektörü μ sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisine çatılandırılmış helis denir [4].

Teorem 3.3 E^3 Öklid uzayında çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$, $p(t) > 0$, olan çatılandırılmış bir eğrinin çatılandırılmış helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{q(t)}{p(t)} = \mp \cot \phi \quad (3.6)$$

olmasıdır. Burada ϕ sabit bir açıdır [4].

İspat: γ eğrisinin çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$, $p(t) > 0$, olan bir çatılandırılmış helis olduğunu kabul edelim. Tanım 3.3 gereğince

$$\langle \mu(s), U \rangle = \cos \phi$$

yazılabilir. Burada U sabit birim vektör ve ϕ sabit bir açıdır. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\langle \mu'(s), U \rangle = 0$$

veya (3.5) formülleri kullanılırsa $p(t)\langle \bar{v}_1(s), U \rangle = 0$ bulunur. $p(t) > 0$ olduğundan $\langle \bar{v}_1(s), U \rangle = 0$ elde edilir. Bu da bize U birim vektörünün \bar{v}_2 ile μ vektörlerinin gerdiği düzlemde olduğunu gösterir. O halde

$$U = \cos\phi \boldsymbol{\mu}(s) \pm \sin\phi \bar{\boldsymbol{v}}_2(s)$$

yazılabilir.

Diğer yandan $\langle \bar{\boldsymbol{v}}_1(s), U \rangle = 0$ ifadesinin türevi alınır ve (3.5) formülleri kullanılırsa $\langle -p(t)\boldsymbol{\mu}(t) + q(t)\bar{\boldsymbol{v}}_2(t), U \rangle = 0$ veya $p(t)\langle \boldsymbol{\mu}(t), U \rangle = q(t)\langle \bar{\boldsymbol{v}}_2(t), U \rangle$ olduğu görülür. Buradan

$$\frac{q(t)}{p(t)} = \mp \cot\phi = \text{sabit}$$

elde edilir.

Tersine, çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$, $p(t) > 0$, olan bir γ eğrisi için (3.6) sağlanıyorsa, γ eğrisinin bir çatılandırılmış helis olduğu görülebilir.

Tanım 3.4 γ, E^3 de çatılandırılmış eğriliği (p, q, α) , $p(t) > 0$, olan çatılandırılmış bir eğri olsun. γ eğrisinin her noktasındaki genelleştirilmiş asli normal vektörü $\bar{\boldsymbol{v}}_1$ sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa γ eğrisine çatılandırılmış slant helis denir [6].

Teorem 3.4 E^3 Öklid uzayında çatılandırılmış eğriliği (p, q, α) , $p(t) > 0$, olan çatılandırılmış bir eğrinin çatılandırılmış slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{H'}{p(1 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.7)$$

fonksiyonunun sabit olmasıdır. Burada $H = \frac{q(t)}{p(t)}$ çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış harmonik eğrilik fonksiyonunu göstermektedir [6].

Önerme 3.1: $(\gamma, \bar{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri olsun. Bir regüler eğrinin $\kappa(t)$ eğriliği ve $\tau(t)$ burulması ile $(p(t), q(t), \alpha(t))$ çatılandırılmış eğriliği arasındaki ilişki

$$\kappa(t) = \frac{p(t)}{|\alpha(t)|}, \quad \tau(t) = \frac{q(t)}{\alpha(t)} \quad (3.8)$$

şeklindedir [4].

İspat: γ bir regüler eğri ise (3.5) formülleri kullanılarak

$$\gamma' = \alpha\mu,$$

$$\gamma'' = \alpha'\mu + \alpha\mu'$$

$$\gamma'' = \alpha'\mu + \alpha p\bar{v}_1$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma''' &= \alpha''\mu + \alpha'\mu' + \alpha'p\bar{v}_1 + \alpha p'\bar{v}_1 + \alpha p\bar{v}_1' \\ &= \alpha''\mu + \alpha'p\bar{v}_1 + \alpha'p\bar{v}_1 + \alpha p'\bar{v}_1 + \alpha p[-pv + q\bar{v}_2] \\ &= \mu(\alpha'' - \alpha p^2) + \bar{v}_1(2\alpha'p + \alpha p') + \bar{v}_2(\alpha p q)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\gamma' \times \gamma'' &= \alpha\mu \times \alpha'\mu + \alpha p\bar{v}_1 \\ &= \alpha^2 p\bar{v}_2\end{aligned}$$

olup,

$$\|\gamma'\| = |\alpha| \text{ ve } \|\gamma' \times \gamma''\| = \alpha^2 p$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}(\gamma', \gamma'', \gamma''') &= \langle \gamma' \times \gamma'', \gamma''' \rangle \\ &= \langle \alpha^2 p\bar{v}_2, \mu(\alpha'' - \alpha p^2) + \bar{v}_1(2\alpha'p + \alpha p') + \bar{v}_2(\alpha p q) \rangle \\ &= \alpha^3 p^2 q\end{aligned}$$

eşitliği de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\alpha^2 p}{|\alpha|^3} = \frac{p}{|\alpha|} \\ \tau &= \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{\alpha^3 p^2 q}{\alpha^4 p^2} = \frac{q}{\alpha}\end{aligned}$$

bulunur.

3.2 Çatılandırılmış Rektifiyan Eğriler

Tanım 3.5 $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2) \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış eğri olsun. Eğer γ eğrisinin yer vektörü

$$\gamma(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\mu}(t) + \xi(t)\bar{\nu}_2(t) \quad (3.9)$$

şartını sağlıyorsa γ eğrisine çatılandırılmış rektifiyan eğri denir [4]. Burada $\lambda(t)$ ve $\xi(t)$ birer fonksiyondur.

Teorem 3.5 $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2) \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ eğrisi $p(t) > 0$ olan bir çatılandırılmış eğri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [4]:

i) Çatılandırılmış eğri ile çatılandırılmış eğrilik arasındaki ilişki

$$\langle \gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle' = \alpha(t)$$

şeklindedir.

ii) $d(t)$ uzaklık fonksiyonu ve c pozitif sabiti için

$$d^2(t) = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle \gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle^2 + c$$

eşitliği sağlanır.

iii) $\langle \gamma(t), \bar{\nu}_2(t) \rangle = K$, K bir sabittir.

iv) $\gamma(t)$ bir çatılandırılmış rektifiyan eğridir.

İspat:

$\gamma(t)$ çatılandırılmış rektifiyan eğri olsun. $\gamma(t)$ eğrisinin yer vektörü

$$\gamma(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\mu}(t) + \xi(t)\bar{\nu}_2(t)$$

şeklindedir. Bu eşitliğin t parametresine göre türevi alınırsa

$$\gamma' = \lambda' \boldsymbol{\mu} + \lambda \boldsymbol{\mu}' + \xi' \bar{\nu}_2 + \xi \bar{\nu}_2'$$

elde edilir.

$\gamma' = \alpha \boldsymbol{\mu}$ olduğu göz önüne alınır ve (3.5) formülleri kullanılırsa,

$$\gamma' = \lambda' \boldsymbol{\mu} + \lambda(p\bar{\nu}_1) + \xi' \bar{\nu}_2 + \xi(-q\bar{\nu}_1)$$

veya

$$\alpha \boldsymbol{\mu} = \lambda' \boldsymbol{\mu} + (\lambda p - \xi q)\bar{\nu}_1 + \xi' \bar{\nu}_2$$

eşitliğinden

$$\lambda' = \alpha, \quad \lambda p - \xi q = 0, \quad \xi' = 0$$

bulunur. Böylece $\langle \gamma, \boldsymbol{\mu} \rangle = \lambda$ eşitliğinden

$$\langle \gamma, \boldsymbol{\mu} \rangle' = \lambda' = \alpha$$

elde edilir. Bu sayede *i* eşitliği gösterilmiştir.

$\xi' = 0$ eşitliği kullanılırsa, $\langle \gamma(t), \bar{\boldsymbol{v}}_2(t) \rangle = \xi = K = \text{sabit}$ bulunur. Bu sayede *iii* eşitliği gösterilmiştir. Ayrıca

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = \lambda^2 + \xi^2 = \langle \gamma, \boldsymbol{\mu} \rangle^2 + c, \quad c = K^2,$$

yazılabileceğinden *ii* eşitliği gösterilmiştir.

Tersine kabul edelim ki *i* eşitliği sağlansın.

$$\langle \gamma, \boldsymbol{\mu} \rangle' = \langle \gamma', \boldsymbol{\mu} \rangle + \langle \gamma, \boldsymbol{\mu}' \rangle$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle \alpha \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \rangle + \langle \gamma, p \bar{\boldsymbol{v}}_1 \rangle \\ &= \alpha + p \langle \gamma, \bar{\boldsymbol{v}}_1 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. $p > 0$ olduğu için $\langle \gamma, \bar{\boldsymbol{v}}_1 \rangle = 0$ elde edilir. O halde γ eğrisi $\{ \boldsymbol{\mu}, \bar{\boldsymbol{v}}_2 \}$ ile gerilen düzlemedir. Bu da bize γ eğrisinin çatılandırılmış rektifiyan eğri olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki *ii* eşitliği sağlansın. Bu durumda

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \langle \gamma(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle^2 + c$$

eşitliğinin t parametresine göre türevi alınır

$$2 \langle \gamma', \gamma \rangle = 2 \langle \gamma, \boldsymbol{\mu} \rangle [\langle \gamma', \boldsymbol{\mu} \rangle + \langle \gamma, \boldsymbol{\mu}' \rangle]$$

veya

$$2 \langle \gamma, \alpha \boldsymbol{\mu} \rangle = 2 \langle \gamma, \boldsymbol{\mu} \rangle [\alpha + p \langle \gamma, \bar{\boldsymbol{v}}_1 \rangle]$$

eşitliğinden

$$\alpha = \alpha + p \langle \gamma, \bar{\boldsymbol{v}}_1 \rangle$$

bulunur. Buradan

$$\langle \gamma, \bar{\nu}_1 \rangle = 0$$

elde edilir. Bu da bize γ eğrisinin çatılandırılmış rektifiyan eğri olduğunu gösterir.

Kabul edelim ki *iii* eşitliği sağlansın.

$\langle \gamma, \bar{\nu}_2 \rangle = K$, K bir sabit, eşitliğinden türev alınırsa

$$\langle \gamma', \bar{\nu}_2 \rangle + \langle \gamma, \bar{\nu}_2' \rangle = 0$$

veya

$$\langle \alpha\mu, \bar{\nu}_2 \rangle + \langle \gamma, -q\bar{\nu}_1 \rangle = 0$$

yazılabilir. Buradan $q \neq 0$ alınırsa

$$\langle \gamma, \bar{\nu}_1 \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece γ bir çatılandırılmış rektifiyan eğridir.

Choi ve Kim [1], Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olan bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ Frenet eğrisini ele alarak, γ 'nın asli-doğrultu eğrisini ve binormal doğrultu eğrisini, sırasıyla, N ve B vektör alanlarının integral eğrisi olarak tanımlamıştır.

Bu bölüm tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, verilen bir çatılandırılmış eğri ile bağlantılı bazı yeni çatılandırılmış eğriler tanımlanmıştır. Bu yeni çatılandırılmış eğriler, çatılandırılmış eğrinin bazı vektör alanlarının integral eğrileri olarak tanımlanmıştır.

$p(t) > 0$ olmak üzere çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ olan bir çatılandırılmış eğri $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2) \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ olsun.

$$V = c_1 \bar{\nu}_1(t) + c_2 \bar{\nu}_2(t) + c_3 \bar{\mu}(t), \quad \sum_{i=1}^3 c_i^2 = 1, \quad (4.1)$$

vektör alanını göz önüne alalım. Burada $\bar{\mu}(t) = \bar{\nu}_1(t) \times \bar{\nu}_2(t) = \mu(t)$ şeklindedir.

Şimdi, γ çatılandırılmış eğrisi ile bağlantılı bazı yeni çatılandırılmış eğrileri aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

Tanım 4.1 $\alpha(t)V(t)$ vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin çatılandırılmış V -doğrultu eğrisi denir.

Tanım 4.2 $\alpha(t)\bar{\nu}_1(t)$ vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi, $\alpha(t)\bar{\nu}_2(t)$ vektör alanının integral eğrisine γ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğrultu eğrisi denir.

Uyarı 4.1 Çatılandırılmış genelleştirilmiş asli-doğrultu eğrisi $c_2 = 0, c_3 = 0; c_1 = 1$ olan $\alpha(t)V(t)$ vektör alanının bir integral eğrisidir. Çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal-doğrultu eğrisi $\alpha(t)V(t)$ vektör alanının $c_1 = 0, c_3 = 0; c_2 = 1$ olan bir integral eğrisidir. $\alpha(t)\mu(t)$ vektör alanının integral eğrisi öteleme farkıyla $\gamma(t)$ 'den başka bir şey değildir. Bir başlangıç noktası verildiğinde, integral eğrisinin tek olduğu bilinmektedir.

4.1 Çatılandırılmış Asli Donör Eğrisi

Önerme 4.1 $(\gamma, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan çatılandırılmış bir eğri olsun. $V = c_1 \bar{\mathbf{v}}_1(t) + c_2 \bar{\mathbf{v}}_2(t) + c_3 \bar{\boldsymbol{\mu}}(t)$ olmak üzere, γ eğrisinin V -doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ olsun. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisinin γ olması için gerek ve yeter şart

$$c_1 = \cos \left(\int q(t) dt \right), c_2 = -\sin \left(\int q(t) dt \right), c_3 = 0$$

olmasıdır.

İspat: $\tilde{\gamma}$ eğrisi $\alpha(t)V(t)$ vektör alanının integral eğrisi olduğu için $\tilde{\gamma}'(t) = \alpha(t)V(t)$ yazılabilir. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin genelleştirilmiş asli normal vektörünün \mathbf{a}_1 olduğunu kabul edelim. Böylece $\mathbf{a}_2(t) = V(t) \times \mathbf{a}_1(t)$ olmak üzere $(\tilde{\gamma}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ bir çatılandırılmış eğridir.

(\Rightarrow): $\tilde{\gamma}$ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi γ olsun. Tanım 4.2 yardımıyla $\gamma'(t) = \alpha(t)\mathbf{a}_1(t)$ yazılabilir. Ayrıca $\gamma'(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t)$ olduğundan $\mathbf{a}_1(t) = \boldsymbol{\mu}(t)$ eşitliği yazılabilir. $V(t)$ vektörü $\mathbf{a}_1(t)$ vektörüne dik olduğundan son eşitlik gereğince $V(t)$ vektörünün $\boldsymbol{\mu}(t)$ vektörüne de dik olduğu görülür. Bu durumda $\langle V(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle = 0$ olup, $c_3 = 0$ elde edilir. Bu sonuç (4.1) eşitliğinde yerine yazılırsa $V = c_1 \bar{\mathbf{v}}_1(t) + c_2 \bar{\mathbf{v}}_2(t)$ elde edilir. Böylece

$$\mathbf{a}_2(t) = V(t) \times \mathbf{a}_1(t) = (c_1 \bar{\mathbf{v}}_1(t) + c_2 \bar{\mathbf{v}}_2(t)) \times \boldsymbol{\mu}(t) = c_2 \bar{\mathbf{v}}_1(t) - c_1 \bar{\mathbf{v}}_2(t)$$

şeklindedir. Böylece

$$V(t) = c_1 \bar{\mathbf{v}}_1(t) + c_2 \bar{\mathbf{v}}_2(t), \quad \mathbf{a}_2(t) = c_2 \bar{\mathbf{v}}_1(t) - c_1 \bar{\mathbf{v}}_2(t)$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\bar{\mathbf{v}}_1(t) = c_1(t)V(t) + c_2(t)\mathbf{a}_2(t), \quad \bar{\mathbf{v}}_2(t) = c_2(t)V(t) - c_1(t)\mathbf{a}_2(t)$$

bulunur.

Şimdi $V = c_1 \bar{\mathbf{v}}_1(t) + c_2 \bar{\mathbf{v}}_2(t)$ vektörünün türevi alınır ve $c_1^2 + c_2^2 = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} V' &= c_1' \bar{\mathbf{v}}_1(t) + c_1 \bar{\mathbf{v}}_1'(t) + c_2' \bar{\mathbf{v}}_2(t) + c_2 \bar{\mathbf{v}}_2'(t) \\ &= c_1'(c_1 V + c_2 \mathbf{a}_2) + c_1(-p\boldsymbol{\mu} + q\bar{\mathbf{v}}_2) + c_2'(c_2 V - c_1 \mathbf{a}_2) + c_2(-q\bar{\mathbf{v}}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_1'(c_1V + c_2\mathbf{a}_2) - c_1p\boldsymbol{\mu} + c_1q(c_2V - c_1\mathbf{a}_2) + c_2'(c_2V - c_1\mathbf{a}_2) - c_2q(c_1V + c_2\mathbf{a}_2) \\
&= (c_1'c_2 - c_1^2q - c_2'c_1 - c_2^2q)\mathbf{a}_2 + (c_1'c_1 + c_2'c_2)V - c_1p\boldsymbol{\mu} \\
&= (c_1'c_2 - c_2'c_1 - q)\mathbf{a}_2 - c_1p\boldsymbol{\mu} \\
&= (c_1'c_2 - c_2'c_1 - q)\mathbf{a}_2 - c_1p\mathbf{a}_1
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5) türev formülleri gereğince V' vektörünün \mathbf{a}_1 genelleştirilmiş asli normal vektörü ile lineer bağımlı olması için

$$c_1'c_2 - c_2'c_1 - q = 0$$

olmalıdır. $c_1 > 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $c_1 = \sqrt{1 - c_2^2}$ eşitliğinin türevi alınır ve son denklemde yerine yazılırsa

$$c_2' = -q\sqrt{1 - c_2^2}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$c_2(t) = -\sin\left(\int q(t)dt\right)$$

şeklinde dir. Böylece

$$c_1 = \cos\left(\int q(t)dt\right)$$

bulunur.

(\Leftarrow): Tersine

$$c_1 = \cos\left(\int q(t)dt\right), c_2 = -\sin\left(\int q(t)dt\right), c_3 = 0$$

eşitliklerinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$\tilde{\gamma}' = \alpha(t)\left\{\cos\left(\int q(t)dt\right)\bar{\mathbf{v}}_1(t) - \sin\left(\int q(t)dt\right)\bar{\mathbf{v}}_2(t)\right\}$$

eşitliğinden $(\tilde{\gamma}, \boldsymbol{\mu}, -\sin(\int q(t)dt)\bar{\mathbf{v}}_1(t) - \cos(\int q(t)dt)\bar{\mathbf{v}}_2(t))$ eğrisinin bir çatılandırılmış eğri olduğu görülebilir. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisinin γ olduğu açıktır.

Tanım 4.3 $\alpha(t)\{\cos(\int q(t)dt)\bar{\mathbf{v}}_1(t) - \sin(\int q(t)dt)\bar{\mathbf{v}}_2(t)\}$ vektör alanının integral eğrisine $(\gamma, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2)$ eğrisinin çatılandırılmış asli-donor eğrisi denir.

4.2 Çatılandırılmış Genelleştirilmiş Asli Doğrultu Eğrisi

$(\gamma, \bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan çatılandırılmış bir eğri olsun.

$\tilde{\gamma}$ eğrisi γ 'nın çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi ise

$$\tilde{\gamma}' = \alpha(t)\bar{\mathbf{v}}_1(t) \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. $\bar{\mathbf{v}}_p = -\bar{\mathbf{v}}_2$ olmak üzere $(\tilde{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\mathbf{v}}_p): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ eğrisinin de bir çatılandırılmış eğri olduğu açıkça görülür. Regüler eğriler için Bishop [6] çatusına benzer şekilde, $(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\mathbf{v}}_p) \in \Delta_2$ vektörlerini

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \\ \tilde{\mathbf{v}}_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\varphi(t)$ diferansiyellenebilir fonksiyondur.

(4.3) eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) &= \cos\varphi(t)\boldsymbol{\mu}(t) - \sin\varphi(t)\bar{\mathbf{v}}_p(t) \\ \tilde{\mathbf{v}}_p(t) &= \sin\varphi(t)\boldsymbol{\mu}(t) + \cos\varphi(t)\bar{\mathbf{v}}_p(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

yazılabilir. (4.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_1(t) &= \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \times \tilde{\mathbf{v}}_p(t) \\ &= (\cos\varphi(t)\boldsymbol{\mu}(t) - \sin\varphi(t)\bar{\mathbf{v}}_p(t)) \times (\sin\varphi(t)\boldsymbol{\mu}(t) + \cos\varphi(t)\bar{\mathbf{v}}_p(t)) \\ &= \cos^2\theta(\boldsymbol{\mu}(t) \times \bar{\mathbf{v}}_p(t)) - \sin^2\theta(\bar{\mathbf{v}}_p(t) \times \boldsymbol{\mu}(t)) \\ &= \boldsymbol{\mu}(t) \times \bar{\mathbf{v}}_p(t) \\ &= \boldsymbol{\mu}(t) \times -\bar{\mathbf{v}}_2(t) \\ &= \bar{\mathbf{v}}_1(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(4.4) eşitliklerinin t parametresine göre türevi alınır ve (3.5) formülleri kullanılırsa

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}' = -\varphi' \sin\varphi \boldsymbol{\mu} + \cos\varphi \boldsymbol{\mu}' - \varphi' \cos\varphi \bar{\mathbf{v}}_p - \sin\varphi \bar{\mathbf{v}}_p'$$

veya

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}' &= -\varphi' \sin\varphi \bar{\mu} + \cos\varphi(p\bar{v}_1) - \varphi' \cos\varphi \bar{v}_p - \sin\varphi[q\bar{v}_1] \\ &= \varphi' \cos\varphi \bar{v}_2 - \varphi' \sin\varphi \bar{\mu} + [p\cos\varphi - q\sin\varphi] \bar{v}_1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{v}_p' &= \varphi' \cos\varphi \bar{\mu} + \sin\varphi \bar{\mu}' - \varphi' \sin\varphi \bar{v}_p + \cos\varphi \bar{v}_p' \\ &= \varphi' \cos\varphi \bar{\mu} + \sin\varphi [p\bar{v}_1] + \varphi' \sin\varphi \bar{v}_2 + \cos\varphi [q\bar{v}_1] \\ &= \varphi' \sin\varphi \bar{v}_2 + \varphi' \cos\varphi \bar{\mu} + [p\sin\varphi + q\cos\varphi] \bar{v}_1\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu

$$p(t)\sin\varphi(t) + q(t)\cos\varphi(t) = 0 \quad (4.5)$$

şartını sağlasın. Bu durumda

$$p(t) = -\rho(t)\cos\varphi(t), \quad q(t) = \rho(t)\sin\varphi(t) \quad (4.6)$$

olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1' &= \bar{v}_1' = -p\bar{\mu} + q\bar{v}_2 \\ &= \rho\cos\varphi\bar{\mu} + \rho\sin\varphi\bar{v}_2 \\ &= \rho\tilde{\mu}(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}' &= \varphi' \cos\varphi \bar{v}_2 - \varphi' \sin\varphi \bar{\mu} + [-\rho\cos^2\varphi - \rho\sin^2\varphi]\bar{v}_1 \\ &= -\varphi'[-\cos\varphi\bar{v}_2 + \sin\varphi\bar{\mu}] + [-\rho\cos^2\varphi - \rho\sin^2\varphi]\bar{v}_1 \\ &= -\varphi'\bar{v}_p - \rho\tilde{v}_1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{v}_p' &= \varphi'[\sin\varphi\bar{v}_2 + \cos\varphi\bar{\mu}] + [-\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho\cos\varphi\sin\varphi]\bar{v}_p \\ &= \varphi'\tilde{\mu}\end{aligned}$$

elde edilir.

$\{\tilde{v}_1, \tilde{\mu}, \tilde{v}_p\}$ vektörleri $\tilde{\gamma}$ boyunca uyarlanmış çatı oluşturur ve $\sigma(t) = -\varphi'(t)$ olmak üzere bu çatının Frenet tipi formülleri

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_1'(t) \\ \tilde{\mu}'(t) \\ \tilde{v}_p'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho(t) & 0 \\ -\rho(t) & 0 & \sigma(t) \\ 0 & -\sigma(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1(t) \\ \tilde{\mu}(t) \\ \tilde{v}_p(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Böylece $\tilde{\gamma}$ eğrisinin çatılandırılmış eğriliği $(\rho(t), \sigma(t), \alpha(t))$ şeklinde elde edilir.

Önerme 4.2 $(\gamma, \bar{v}_1, \bar{v}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatılandırılmış eğri olsun. γ eğrisinin çatılandırılmış eğriliği ile γ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ eğrisinin $(\rho(t), \sigma(t), \alpha(t))$ çatılandırılmış eğriliği arasındaki ilişki

$$\rho(t) = \sqrt{p^2(t) + q^2(t)}, \quad \sigma(t) = \frac{p^2(t)}{p^2(t) + q^2(t)} \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right)' \quad (4.8)$$

şeklindedir.

İspat:

(4.6) eşitliğini kullanırsak, $p^2(t) + q^2(t) = \rho^2$ yani $\rho(t) = \sqrt{p^2(t) + q^2(t)}$ elde edilir.

Diğer taraftan

$$p(t) = -\rho(t) \cos\varphi(t), \quad q(t) = \rho(t) \sin\varphi(t)$$

eşitliklerinin türevi alınırsa

$$\begin{cases} p'(t) = -\rho'(t) \cos\varphi(t) + \varphi'(t) \rho(t) \sin\varphi(t) \\ q'(t) = \rho'(t) \sin\varphi(t) + \varphi'(t) \rho(t) \cos\varphi(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

elde edilir.

$$p'(t) = -\rho'(t) \cos\varphi(t) + \varphi'(t) \rho(t) \sin\varphi(t)$$

$$q'(t) = \rho'(t) \sin\varphi(t) + \varphi'(t) \rho(t) \cos\varphi(t)$$

eşitlikleri, sırasıyla, $q(t)$ ve $-p(t)$ ile çarpılırsa

$$q(t)p'(t) = -q(t)\rho'(t)\cos\varphi(t) + \varphi'(t)q^2(t)$$

$$-p(t)q'(t) = -p(t)\rho'(t)\sin\varphi(t) + \varphi'(t)p^2(t)$$

bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$q(t)p'(t) - p(t)q'(t) = \varphi'(t)[p^2(t) + q^2(t)] - \rho'(t)[q(t)\cos\varphi(t) + p(t)\sin\varphi(t)]$$

olup, (4.5) kullanılırsa

$$\frac{p^2(t)}{p^2(t) + q^2(t)} \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right)' = \frac{pq' - qp'}{p^2 + q^2} = -\varphi'(t) = \sigma(t)$$

elde edilir.

Sonuç 4.1 γ , E^3 de çatlandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatlandırılmış eğri ve $\tilde{\gamma}$ da γ eğrisinin çatlandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi olsun. Böylece

$$\frac{\sigma(t)}{\rho(t)} = \frac{p^2(t)}{p^2(t) + q^2(t)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right)' \quad (4.10)$$

sağlanır.

(4.10) eşitliği kullanılırsa, aşağıdaki sonuç verilebilir:

Önerme 4.3 $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatlandırılmış eğri ve $\tilde{\gamma}$ da γ eğrisinin çatlandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi olsun. γ eğrisinin çatlandırılmış slant helis olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{\gamma}$ eğrisinin çatlandırılmış helis olmasıdır.

Önerme 4.4 $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2)$, E^3 de çatlandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatlandırılmış eğri olsun. Eğer γ regüler ise, γ eğrisinin çatlandırılmış eğriliği ile γ eğrisinin $\tilde{\gamma}$ çatlandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisinin $\tilde{\kappa}$ eğriliği ve $\tilde{\tau}$ burulması arasındaki ilişki

$$\tilde{\kappa} = \frac{\sqrt{p^2(t) + q^2(t)}}{|\alpha(t)|}, \quad \tilde{\tau}(t) = \frac{p^2(t)}{\alpha(t)(p^2(t) + q^2(t))} \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right)' \quad (4.11)$$

şeklindedir.

İspat

Çatlandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi tanımı gereğince

$$\tilde{\gamma}' = \alpha \bar{\nu}_1$$

olduğunu biliyoruz. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin çatlandırılmış eğriliği $(\rho(t), \sigma(t), \alpha(t))$ olsun. Eğer γ regüler ise $\tilde{\gamma}$ eğrisi de regüler olup, Önerme 3.1 gereğince

$$\tilde{\kappa} = \frac{\rho}{|\alpha|}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\sigma}{\alpha}$$

yazılabilir. Önerme 4.2 kullanılırsa istenen elde edilir.

4.3 Çatılandırılmış Genelleştirilmiş Binormal Doğrultu Eğrisi

$(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatılandırılmış eğri olsun.

γ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}$ ise

$$\tilde{\gamma}' = \alpha(t)\bar{\nu}_2(t) \quad (4.12)$$

yazılabilir. $\bar{\nu} = -\bar{\nu}_1$ olmak üzere $(\tilde{\gamma}, \bar{\nu}, \bar{\mu}) : I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ eğrisinin de çatılandırılmış bir eğri olduğu açıkça görülür. Bu çatının Frenet tipi formülü

$$\begin{bmatrix} \bar{\nu}_2'(t) \\ \bar{\nu}'(t) \\ \bar{\mu}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & q(t) & 0 \\ -q(t) & 0 & p(t) \\ 0 & -p(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\nu}_2(t) \\ \bar{\nu}(t) \\ \bar{\mu}(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

şeklinindedir. O halde çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğrultu eğrisinin çatılandırılmış eğriliği $(|q(t)|, p(t), \alpha(t))$ ve $p > 0$ ' dır.

4.4 Çatılandırılmış Darboux Doğrultu Eğrisi

$(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatılandırılmış eğri olsun. $\forall t \in I$ için

$$\delta(t) = q(t)\bar{\mu}(t) + p(t)\bar{\nu}_2(t) \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanan vektör alanını göz önüne alalım. Bu durumda $\delta(t)$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'(t) &= \delta(t) \times \bar{\mu}(t), \\ \bar{\nu}_1'(t) &= \delta(t) \times \bar{\nu}_1(t), \\ \bar{\nu}_2'(t) &= \delta(t) \times \bar{\nu}_2(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\delta(t)$ vektör alanına γ çatılandırılmış eğrisinin Darboux vektörü denir. Darboux vektörü normlanırsa

$$\mathfrak{D}(t) = \frac{\mathfrak{d}(t)}{\|\mathfrak{d}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{p^2(t) + q^2(t)}} \{q(t)\bar{\mu}(t) + p(t)\bar{\nu}_2(t)\}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi, γ çatılandırılmış eğrisi ile bağlantılı yeni bir çatılandırılmış eğri tanımlayacağız.

Tanım 4.4 $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatılandırılmış eğri olsun. $\alpha(t)\mathfrak{D}(t)$ vektör alanının integral eğrisi, γ eğrisinin çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisi olarak adlandırılır.

Sonuç 4.2 $\mathfrak{D}(t)$ vektör alanı

$$\mathfrak{D}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{q(t)}{p(t)}\right)^2}} \left\{ \frac{q(t)}{p(t)} \bar{\mu}(t) + \bar{\nu}_2(t) \right\} \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda γ bir çatılandırılmış helis ise

$$\frac{q(t)}{p(t)} = \text{sabit}$$

olacağından,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{q(t)}{p(t)}\right)^2}} \left\{ \frac{q(t)}{p(t)} \bar{\mu}'(t) + \bar{\nu}_2'(t) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{q(t)}{p(t)}\right)^2}} \left\{ \frac{q(t)}{p(t)} p(t) \bar{\nu}_1(t) - q(t) \bar{\nu}_1(t) \right\} \end{aligned}$$

yani $\forall t \in I$ için $\mathfrak{D}'(t) = 0$ bulunur. Böylece bir çatılandırılmış helis için $\mathfrak{D}(t)$ bir sabit vektördür.

Önerme 4.4 γ , E^3 de çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatılandırılmış eğri olsun. Bu durumda γ eğrisinin çatılandırılmış eğriliği ile γ eğrisinin β çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisinin $(\zeta(t), \xi(t), \alpha(t))$ çatılandırılmış eğriliği arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \|\mathfrak{D}'(t)\| = \frac{|p(t)q'(t) - p'(t)q(t)|}{p^2(t) + q^2(t)}, \\ \xi(t) &= \sqrt{p^2(t) + q^2(t)}\end{aligned}\tag{4.17}$$

şeklindedir.

İspat:

γ eğrisinin çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisi β olduğundan

$$\beta' = \alpha(t)\mathfrak{D}(t)\tag{4.18}$$

yazılabilir.

$$\bar{\mathfrak{D}}(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2(t) + q^2(t)}} \{p(t)\bar{\boldsymbol{\mu}}(t) - q(t)\bar{\boldsymbol{v}}_2(t)\}$$

vektör alanını göz önüne alalım. Bu vektör alanının $\mathfrak{D}(t)$ ile iç çarpımının sıfır olduğu açıktır. Aynı zamanda $\bar{\mathfrak{D}}(t) \times \bar{\boldsymbol{v}}_1(t) = \mathfrak{D}(t)$ olduğu açıktır. O halde, $(\beta, \bar{\mathfrak{D}}, \bar{\boldsymbol{v}}_1): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış bir eğridir.

$$\bar{\mathfrak{D}} = \frac{p\bar{\boldsymbol{\mu}} - q\bar{\boldsymbol{v}}_2}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \mathfrak{D} = \frac{q\bar{\boldsymbol{\mu}} + p\bar{\boldsymbol{v}}_2}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$p\mathfrak{D} - q\bar{\mathfrak{D}} = \frac{(p^2 + q^2)\bar{\boldsymbol{v}}_2}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$p\bar{\mathfrak{D}} + q\mathfrak{D} = \frac{(p^2 + q^2)\bar{\boldsymbol{\mu}}}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

yazılabilir. Bu eşitlikler yardımıyla

$$\bar{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{p\mathfrak{D} - q\bar{\mathfrak{D}}}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} = \frac{p\bar{\mathfrak{D}} + q\mathfrak{D}}{\sqrt{p^2 + q^2}}\tag{4.19}$$

elde edilir.

Şimdi $\{\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}}, \bar{\boldsymbol{v}}_1\}$ çatısının türev formüllerini bulalım.

$\bar{\boldsymbol{v}}_1' = -p\bar{\boldsymbol{\mu}} + q\bar{\boldsymbol{v}}_2$ ifadesinde (4.19) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\bar{\boldsymbol{v}}_1' = \frac{-p^2\bar{\mathfrak{D}} - pq\mathfrak{D}}{\sqrt{p^2 + q^2}} + \frac{qp\mathfrak{D} - q^2\bar{\mathfrak{D}}}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

veya

$$\bar{\mathbf{v}}_1' = -\sqrt{p^2 + q^2} \bar{\mathcal{D}}$$

elde edilir. Burada $\xi = \sqrt{p^2 + q^2}$ olarak alınırsa

$$\bar{\mathbf{v}}_1' = -\xi \bar{\mathcal{D}}$$

olur.

$$\bar{\mathcal{D}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \bar{\boldsymbol{\mu}} - \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \bar{\mathbf{v}}_2$$

vektör alanının türevini alalım. Eğer (3.5) deki eşitlikler kullanılır ve

$$\eta = \frac{pq' - p'q}{p^2 + q^2}$$

alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{D}}' &= (\sqrt{p^2 + q^2})' \bar{\mathbf{v}}_1 + \left(\frac{-p\eta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right) \bar{\mathbf{v}}_2 + \left(\frac{-q\eta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right) \bar{\boldsymbol{\mu}} \\ &= (\sqrt{p^2 + q^2})' \bar{\mathbf{v}}_1 + \left(\frac{-p\eta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right) \frac{p\mathcal{D} - q\bar{\mathcal{D}}}{\sqrt{p^2 + q^2}} + \left(\frac{-q(t)\eta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right) \frac{p\bar{\mathcal{D}} + q\mathcal{D}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ &= (\sqrt{p^2 + q^2})' \bar{\mathbf{v}}_1 - \eta \left(\frac{p^2\mathcal{D} + pq\bar{\mathcal{D}} - pq\bar{\mathcal{D}} + q^2\mathcal{D}}{p^2 + q^2} \right) \\ &= (\sqrt{p^2 + q^2})' \bar{\mathbf{v}}_1 - \eta \mathcal{D} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{D}'(t) = \eta(t) \bar{\mathcal{D}}'(t)$$

olduğu görülebilir. Böylece $(\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}, \bar{\mathbf{v}}_1)$ çatsısının Frenet tipi formülleri

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}'(t) \\ \bar{\mathcal{D}}'(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_1'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \eta(t) & 0 \\ -\eta(t) & 0 & \xi(t) \\ 0 & -\xi(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{D}(t) \\ \bar{\mathcal{D}}(t) \\ \bar{\mathbf{v}}_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\zeta(t) = \|\mathcal{D}'(t)\| = |\eta(t)| = \frac{|p(t)q'(t) - p'(t)q(t)|}{p^2(t) + q^2(t)}$$

olup, istenen elde edilir.

Sonuç 4.3 γ, E^3 de çatılandırılmış eğriliği $(p(t), q(t), \alpha(t))$ ve $p(t) > 0$ olan bir çatılandırılmış eğri olsun. Eğer γ çatılandırılmış helis değil ise, γ eğrisinin β çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisinin $(\zeta(t), \xi(t), \alpha(t))$ çatılandırılmış eğriliği

$$\frac{\xi(t)}{\zeta(t)} = \frac{(p^2(t) + q^2(t))^{3/2}}{p^2(t) \left| \left(\frac{q(t)}{p(t)} \right)' \right|} \quad (4.21)$$

eşitliğini sağlar.

Eğer Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 kullanılırsa, (4.21) gereğince aşağıdaki sonuç verilebilir.

Önerme 4.5 $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2): I \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış helis olmayan çatılandırılmış eğri ve β da γ eğrisinin çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisi olsun. O halde, γ eğrisinin çatılandırılmış slant helis olması için gerek ve yeter koşul β eğrisinin çatılandırılmış helis olmasıdır.

Örnek 4.1 $\gamma: (-2\pi, 2\pi) \rightarrow E^3$ eğrisi

$$\gamma(t) = \frac{\sqrt{6}}{5} \left(\sin\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{7} \sin\left(\frac{7t}{5}\right) - \frac{\sin t}{5}, \frac{\cos t}{5} - \cos\left(\frac{3t}{5}\right) + \frac{2}{7} \cos\left(\frac{7t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}t}{5} - \sqrt{6} \sin\left(\frac{2t}{5}\right) \right)$$

parametrik denklemi ile verilsin. γ eğrisi üzerindeki $\gamma(0)$ noktasının bir singüler nokta olduğu açıktır. $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2): (-2\pi, 2\pi) \rightarrow E^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış bir eğri olup, γ eğrisinin uyarlanmış çatı vektörleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir [6].

$$\mu(t) = \left(\frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right), -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \right)$$

$$\bar{\nu}_1(t) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos t, \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin t, \frac{1}{5} \right)$$

$$\bar{\nu}_2(t) = \left(\frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) - \frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) - \frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right)$$

Ayrıca $(\gamma, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2)$ eğrisinin çatılandırılmış eğriliği

$$p(t) = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right), \quad q(t) = \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \quad (4.22)$$

şeklindedir [6].

γ eğrisinin çatılandırılmış slant helis olduğunu gösterelim. (4.22) kullanılırsa $H = \tan\left(\frac{t}{5}\right)$ elde edilir. Buradan

$$H' = \frac{1}{5} \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right)\right)$$

olup, (3.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{H'}{p(1+H^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\frac{1}{5} \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right)\right)}{\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{5}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize γ eğrisinin çatılandırılmış slant helis olduğunu gösterir [6].

Diğer taraftan, $\gamma'(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t)$ olduğu kullanılırsa

$$\alpha(t) = \langle \gamma'(t), \boldsymbol{\mu}(t) \rangle = \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right)$$

elde edilir.

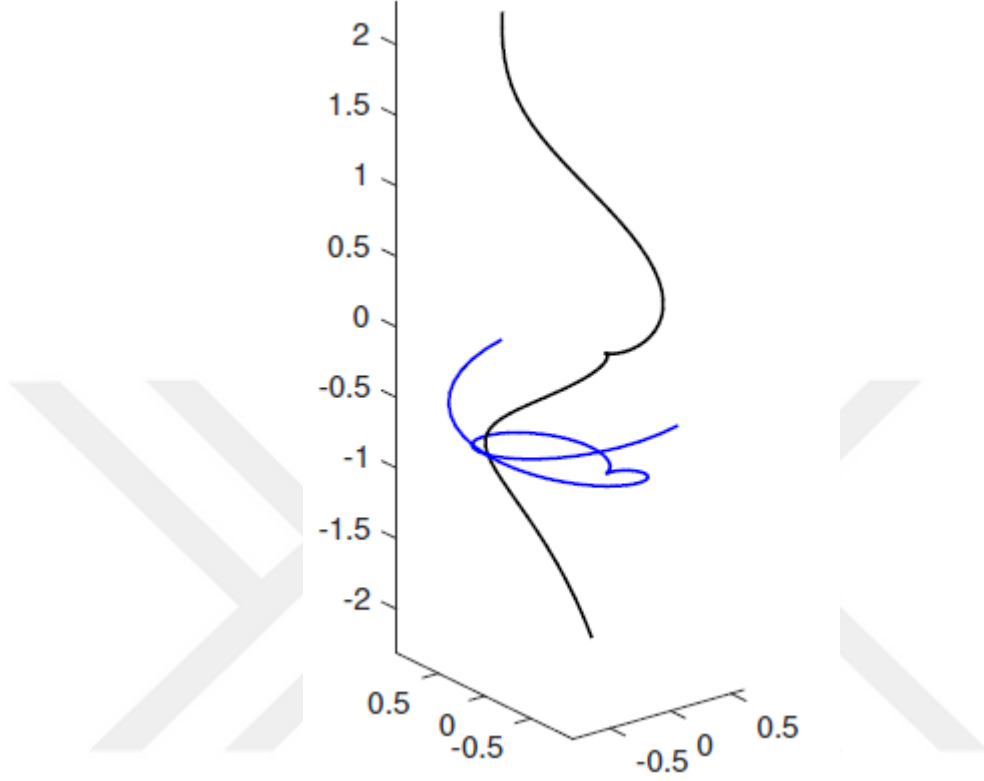
γ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}_p$ olmak üzere $\tilde{\gamma}_p' = \alpha(t)\tilde{\nu}_1(t)$ eşitliği yardımıyla

$$\tilde{\gamma}_p' = \left(\frac{24}{25} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos t, \frac{24}{25} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \sin t, \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \right)$$

bulunur. Bu ifadenin integrali alınırsa

$$\tilde{\gamma}_p = \left(\frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right), \frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) - \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right), -\frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right) + c_1$$

elde edilir. Burada c_1 sabit bir vektördür. γ eğrisinin $\tilde{\gamma}_p(0) = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$ noktasından geçen çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 4.1 Çatılandırılmış genelleştirilmiş asli doğrultu eğrisi (mavi)

Eğer (4.5) eşitliği kullanılırsa

$$\cos\left(\frac{t}{5}\right) \sin\varphi(t) + \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\varphi(t) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\sin\left(\varphi(t) + \frac{t}{5}\right) = 0$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\varphi(t) = -\frac{t}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. (4.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) &= \\
&\left(\frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \cos\varphi(t) + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\varphi(t), -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \cos\varphi(t) - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\varphi(t), \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos\varphi(t) \right) + \left(\frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\varphi(t) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\varphi(t), \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\varphi(t) - \frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \sin\varphi(t) \right) \\
&= \left(\frac{2}{5} \sin\left(\varphi(t) + \frac{6t}{5}\right) + \frac{3}{5} \sin\left(-\varphi(t) + \frac{4t}{5}\right), -\frac{2}{5} \cos\left(\varphi(t) + \frac{6t}{5}\right) - \frac{3}{5} \cos\left(-\varphi(t) + \right. \\
&\quad \left. \frac{4t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\varphi(t) + \frac{t}{5}\right) \right) \\
&= (\sin t, -\cos t, 0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{v}}_p(t) &= \left(\frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\varphi(t) + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\varphi(t), -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \sin\varphi(t) - \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \sin\varphi(t), \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \sin\varphi(t) \right) + \left(-\frac{2}{5} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\varphi(t) + \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{5} \cos\left(\frac{4t}{5}\right) \cos\varphi(t), -\frac{2}{5} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) \cos\varphi(t) + \right. \\
&\quad \left. \frac{3}{5} \sin\left(\frac{4t}{5}\right) \cos\varphi, \frac{-2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \cos\varphi(t) \right) = \left(-\frac{2}{5} \cos\left(\varphi(t) + \frac{6t}{5}\right) + \frac{3}{5} \cos\left(-\varphi(t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{4t}{5}\right), -\frac{2}{5} \sin\left(\varphi(t) + \frac{6t}{5}\right) + \frac{3}{5} \sin\left(-\varphi(t) + \frac{4t}{5}\right), \frac{2\sqrt{6}}{5} \left(\varphi(t) + \frac{t}{5}\right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{5} \cos t, \frac{1}{5} \sin t, -\frac{2\sqrt{6}}{5} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca, $\tilde{\boldsymbol{v}}_1(t) = \bar{\boldsymbol{v}}_1(t)$ olduğundan

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1'(t) = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5} \sin t, \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos t, 0 \right)$$

veya

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1'(t) = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{\mathbf{v}}'_p(t) = \left(-\frac{1}{5} \sin t, \frac{1}{5} \cos t, 0\right)$$

veya

$$\tilde{\mathbf{v}}'_p(t) = -\frac{1}{5} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t)$$

bulunur. 0 halde, $\{\tilde{\gamma}_p, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\mathbf{v}}_p\}$ çatılandırılmış eğrisinin, $(\rho(t), \sigma(t), \alpha(t))$ çatılandırılmış eğriliği

$$\rho(t) = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \sigma(t) = \frac{1}{5} \quad (4.23)$$

olarak elde edilir. Eğriliklerin sabit olması Teorem 3.3 gereğince $\tilde{\gamma}_p$ eğrisinin çatılandırılmış helis olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $\tilde{\gamma}_p$ eğrisinin birim Darboux vektörü

$$\mathfrak{D}(t) = \left(-\frac{1}{5} \cos t, -\frac{1}{5} \sin t, \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$$

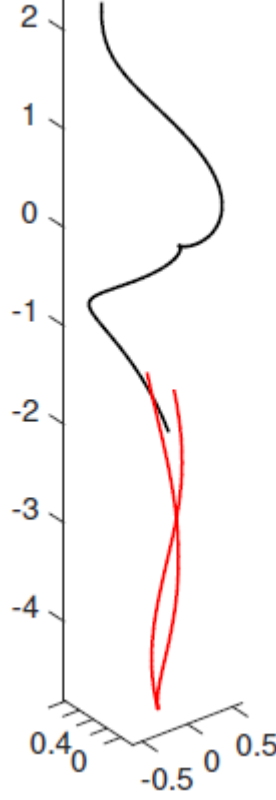
olup, γ eğrisinin çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisi için $\beta' = \alpha(t)\mathfrak{D}(t)$ yardımıyla

$$\beta'(t) = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \cos t, -\frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \sin t, \frac{24}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right)\right)$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınır

$$\beta(t) = \left(\frac{\sqrt{6}}{30} \cos\left(\frac{6t}{5}\right) - \frac{\sqrt{6}}{20} \cos\left(\frac{4t}{5}\right), \frac{\sqrt{6}}{30} \sin\left(\frac{6t}{5}\right) - \frac{\sqrt{6}}{20} \sin\left(\frac{4t}{5}\right), -\frac{24}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right)\right) + c_2$$

elde edilir. γ eğrisinin $\beta(0) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{60}, 0, -\frac{24}{5}\right)$ noktasından geçen çatılandırılmış genelleştirilmiş Darboux doğrultu eğrisi Şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2 Çatılandırılmış Darboux doğrultu eğrisi (kırmızı)

β genelleştirilmiş Darboux doğrultu eğrisinin çatılandırılmış eğriliğini (4.17) eşitliği yardımıyla bulalım. (4.22) deki eşitliklerin türevi alınırsa

$$p'(t) = -\frac{2\sqrt{6}}{25} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \text{ ve } q'(t) = \frac{2\sqrt{6}}{25} \cos\left(\frac{t}{5}\right)$$

olup, (4.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

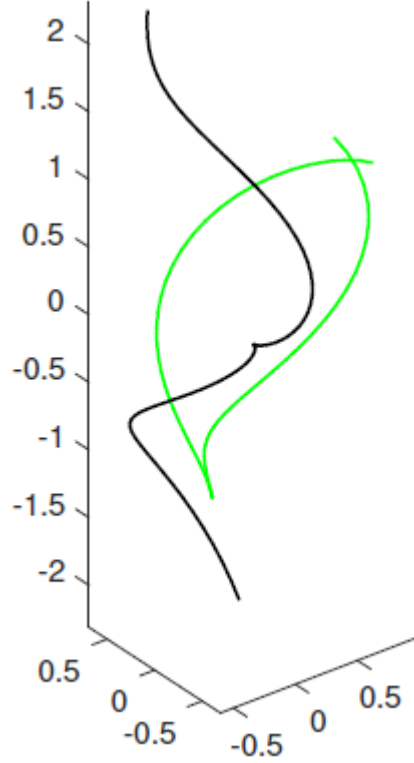
$$\zeta(t) = \frac{\left| -\frac{2\sqrt{6}}{25} \sin\left(\frac{t}{5}\right) \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin\left(\frac{t}{5}\right) - \frac{2\sqrt{6}}{25} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{t}{5}\right) \right|}{\frac{24}{25}} = \frac{1}{5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\xi(t) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ bulunur.

Ayrıca, γ eğrisinin çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğrultu eğrisi $\tilde{\gamma}_b$ olmak üzere $\tilde{\gamma}_b' = \alpha(t)\bar{\nu}_1(t)$ eşitliğinin integrali alınırsa

$$\tilde{\gamma}_b(t) = \sqrt{6} \left(\frac{\cos t}{5} - \frac{1}{5} \cos\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{35} \cos\left(\frac{7t}{5}\right), \frac{\sin t}{5} - \frac{1}{5} \sin\left(\frac{3t}{5}\right) - \frac{2}{35} \sin\left(\frac{7t}{5}\right), -\frac{\sqrt{6}}{5} \cos\left(\frac{2t}{5}\right) \right) + k$$

elde edilir. Burada k bir sabit vektördür. γ eğrisinin $\tilde{\gamma}_b(0) = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{35}, 0, -\frac{6}{5}\right)$ noktasından geçen çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğrultu eğrisi Şekil 4.3'te verilmiştir.



Şekil 4.3 Çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal doğrultu eğrisi (yeşil)

Bu tezde, çatılandırılmış bir eğri ile bağlantılı yeni eğriler tanımlanmıştır. Çatılandırılmış bir eğrinin bazı vektör alanlarının integral eğrileri olarak tanımlanan bu yeni eğriler, sırasıyla çatılandırılmış genelleştirilmiş asli-doğrultu eğrisi, çatılandırılmış genelleştirilmiş binormal-doğrultu eğrisi ve çatılandırılmış Darboux-doğrultu eğrisini olarak tanımlanmıştır. Bu yeni eğrilerin eğrilikleri ile verilen çatılandırılmış eğrinin çatılandırılmış eğrilikleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Elde edilen ilişkiler kullanılarak bu tür eğriler için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Benzer düşünceyle, 4-boyutlu uzayda çatılandırılmış eğri ile ilişkili integral eğrileri tanımlanarak, bunların eğrilikleri arasındaki bağıntılar bulunabilir ve bu eğrilerle ilgili çeşitli karakterizasyonlar verilebilir.

- [1] J.H. Choi, Y.H. Kim, "Associated curves of a Frenet curve and their applications," *Applied Mathematics and Computation*, 218; 9116-9124, 2012.
- [2] N. Macit, M. Dldl, "Relatively normal-slant helices lying on a surface and their characterizations," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 46(3); 397-408, 2017.
- [3] S. Honda, M. Takahashi, "Framed curves in the Euclidean space," *Advances in Geometry*," 16(3);265-276, 2016.
- [4] Y. Wang, D. Pei, R. Gao, "Generic properties of framed rectifying curves," *Mathematics* 7(1); 37, 2019.
- [5] S. Honda, M. Takahashi, "Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space," *Turkish Journal of Mathematics*, 44; 883-899, 2020.
- [6] O.Z. Okuyucu, M. Canbirdi, "Framed slant helices in Euclidean 3-space," *Advances in Difference Equations*, 2021; 504, 2021.
- [7] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.
- [8] S. Yce, *klid uzayında diferansiyel geometri*, Pegem Akademi, 2017.
- [9] B.Y. Chen, "When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?," *American Mathematical Monthly*, 110: 147-152, 2003.
- [10] R.L. Bishop, "There is more than one way to frame a curve," *American Mathematical Monthly*, 82(3); 246-251, 1975.

Konferans Bildirileri

1. Bülbül, Z., Düldül, M., Associated curves of a framed curve in Euclidean 3-space, 1st International Symposium on Current Developments in Fundamental and Applied Mathematics Sciences(ISCDFAMS), May 23-25, 2022.

