

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ROSENAU-BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNE
YENİ BİR YAKLAŞIM**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Azat AHMEDOV

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

HAZİRAN 2022

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ROSENAU-BURGERS DENKLEMINİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNE
YENİ BİR YAKLAŞIM**



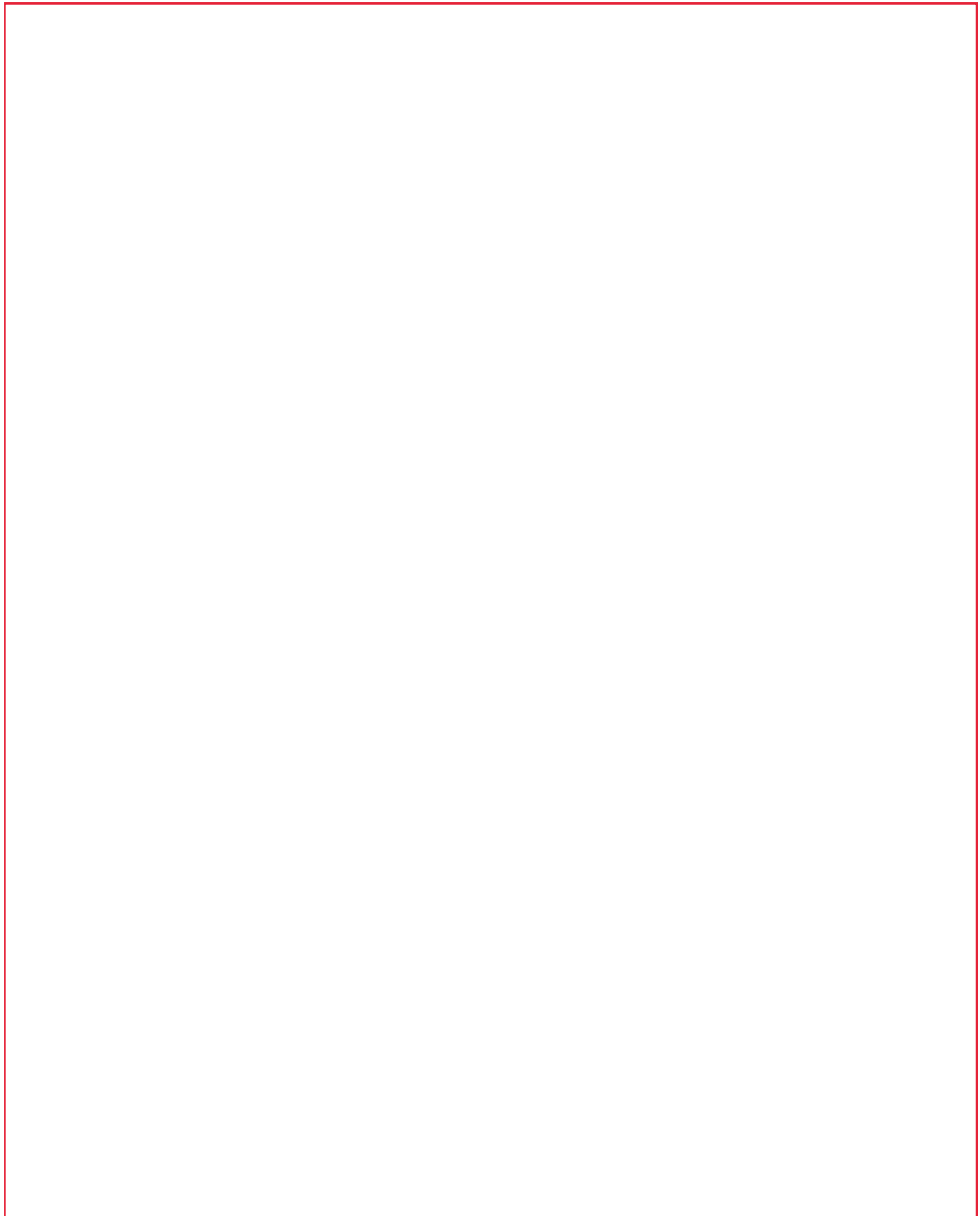
YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Azat AHMEDOV
(36183614064)**

Matematik Ana Bilim Dalı

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU
Eş Danışman: Doç. Dr. Yusuf UÇAR**

HAZİRAN 2022



TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten, tezimin hazırlanmasında emeklerini esirgemeyen tez danışmanlığımı yapan çok değerli hocalarım Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU ve Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a teşekkürü bir borç bilir ve şükranlarımı sunarım. Bu tez çalışmama deneyim ve tecrübeleriyle büyük ölçüde katkıda bulunan ve üzerimde çok büyük emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY ve Prof. Dr. Alaattin ESEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca başta bölüm Başkanımız Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ olmak üzere tüm bölüm hocalarıma, tezimin yazım düzeninde önerilerinden faydalandığım her zaman değerli vaktini ayıran Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, eğitim-öğretim hayatım süresince sabır ve sevgiyle daima yanımda bulunan hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen ve hayatımdaki en kıymetli hazinem olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Rosenau-Burgers Denkleminin Nümerik Çözümüne Yeni Bir Yaklaşım” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Azat AHMEDOV



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
2. SONLU FARK YÖNTEMLERİ VE BAZI TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Sonlu Fark Yaklaşımları	4
2.1.1 Açık Sonlu Fark Yaklaşımı (ASFY).....	10
2.1.2 Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yaklaşımı (ISFY)	10
2.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)	11
2.1.4 Ağırlıklı Averaj Sonlu Fark Yaklaşımı (AASFY)	12
2.1.5 Korunumlu (Conservative) Sonlu Fark Yaklaşımı (KSFY).....	12
2.2 Bazı Temel Kavramlar.....	13
2.2.1 Lokal Kesme Hatası.....	14
2.2.2 Tutarlılık	14
2.2.3 Kararlılık.....	15
2.2.4 Yakınsaklık	15
2.2.5 Lax'ın Denklik Teoremi	15
2.2.6 Kararlılık Analizi.....	15
3. ROSENAU-BURGERS DENKLEMİ	18
3.1 Giriş	18
3.2 Model Problemler	23
4. ROSENAU-BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ	25
4.1 Rosenau-Burgers Denkleminin Standart Sonlu Fark Yaklaşımı (SSFY)	25
4.1.1 Nümerik Çözümler	31
4.2 Rosenau-Burgers Denkleminin Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı (KSFY).....	38
4.2.1 Nümerik Çözümler	45
4.3 Konuma Göre Parçalanmış Rosenau-Burgers Denkleminin Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı (KKSFY)	52
4.3.1 Nümerik Çözümler	61
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	69
KAYNAKLAR.....	72
ÖZGEÇMİŞ	76

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.	32
Çizelge 4.2 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.	32
Çizelge 4.3 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.	33
Çizelge 4.4 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.	33
Çizelge 4.5 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları	34
Çizelge 4.6 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları	35
Çizelge 4.7 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları	36
Çizelge 4.8 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları	36
Çizelge 4.9 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [29] ile karşılaştırılması.	37
Çizelge 4.10 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/320$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının [27] ile karşılaştırılması.	37
Çizelge 4.11 : Model Problem 2'nin SSFY ile $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [30] ile karşılaştırılması.	38
Çizelge 4.12 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.	46
Çizelge 4.13 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.	46
Çizelge 4.14 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan maksimum L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.	47
Çizelge 4.15 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarına [28] ile karşılaştırılması.	47

Çizelge 4.16: Model Problem 1'in $\alpha = 0.5, \beta = 1, k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	48
Çizelge 4.17: Model Problem 1'in $\alpha = 5, \beta = 1, k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	49
Çizelge 4.18: Model Problem 1'in $\alpha = 0.5, \beta = 1, N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	50
Çizelge 4.19: Model Problem 1'in $\alpha = 5, \beta = 1, N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	50
Çizelge 4.20: Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 1, \beta = 1, k = 0.05$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [29] ile karşılaştırılması.....	51
Çizelge 4.21: Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 1, \beta = 1, k = 0.05$ ve $h = 1/320$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının [27] ile karşılaştırılması.....	51
Çizelge 4.22: Model Problem 2'nin KSFY ile $\alpha = 30, \beta = 0.001, k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [30] ile karşılaştırılması.....	52
Çizelge 4.23: Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 0.5, \beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.....	61
Çizelge 4.24: Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 5, \beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.....	62
Çizelge 4.25: Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 0.5, \beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.....	62
Çizelge 4.26: Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 5, \beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.....	63
Çizelge 4.27: Model Problem 1'in $\alpha = 0.5, \beta = 1, k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	63
Çizelge 4.29: Model Problem 1'in $\alpha = 0.5, \beta = 1, N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	65
Çizelge 4.28: Model Problem 1'in $\alpha = 5, \beta = 1, k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	66
Çizelge 4.30: Model Problem 1'in $\alpha = 5, \beta = 1, N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları.....	66

Çizelge 4.31: Model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [29] ile karşılaştırılması.....	67
Çizelge 4.32: Model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/320$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının [27] ile karşılaştırılması.....	67
Çizelge 5.1 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının karşılaştırılması.....	69
Çizelge 5.2 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.....	70
Çizelge 5.3 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının karşılaştırılması.....	70
Çizelge 5.4 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.....	70
Çizelge 5.5 : Model Problem 2'ye uygulanan SSFY, KSFY şemalarının $\alpha = 30$, $\beta = 0.0011$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 11$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının ve yakınsaklık mertebelerinin karşılaştırılması.....	71

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 : Model Problem 1'in SSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	34
Şekil 4.2 : Model Problem 1'in SSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	35
Şekil 4.3 : Model Problem 2'nin SSFY ile $h = 0.0125$, $k = 0.01$ ve $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	39
Şekil 4.4 : Model Problem 1'in KSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	48
Şekil 4.5 : Model Problem 1'in KSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	49
Şekil 4.6 : Model Problem 2'nin KSFY ile $h = 0.0125$, $k = 0.01$ ve $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	53
Şekil 4.7 : Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	64
Şekil 4.8 : Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri	65

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

ASFY : Açık (Explicit) Sonlu Fark Yaklaşımı

ISFY : Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yaklaşımı

CNSFY : Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı

AASFY : Ağırlıklı Averaj Sonlu Fark Yaklaşımı

KSFY : Korunumlu (Conservative) Sonlu Fark Yaklaşımı

KKSFY : Konuma Göre Parçalanmış Rosenau-Burgers Denklemi için Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı

$\Delta t, k$: Zaman Adım Uzunluğu

$\Delta x, h$: Konum Adım Uzunluğu



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ROSENAU-BURGERS DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNE YENİ BİR YAKLAŞIM

AZAT AHMEDOV

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

76+x sayfa

2022

Danışman: Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümünde, tezde ele alınan Rosenau-Burgers denkleminin fiziksel özellikleri hakkında özet bir bilgi verildikten sonra tezde yapılacak çalışmalardan kısaca bahsedildi.

Tezin ikinci bölümünde ise standart sonlu fark ve korunumlu sonlu fark yaklaşımları ile birlikte kararlılık, tutarlılık ve yakınsaklık gibi bazı temel kavramlar sunuldu. Bu bölümde ayrıca kararlılık analizi hakkında kısa bir ön bilgi verildikten sonra von Neumann Fourier seri yöntemi anlatıldı.

Üçüncü bölümde, Rosenau-Burgers denklemi hakkında detaylı bir literatür taraması yapılarak mevcut çalışmalar hakkında bilgi sunuldu ve tezde göz önüne alınacak model problemler başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verildi.

Dördüncü bölümde sırasıyla standart ve korunumlu sonlu fark yaklaşımları uygulanan Rosenau-Burgers denkleminde lineer olmayan terim yerine bir lineerleştirme tekniği kullanıldı. Bu uygulamalar sonucu elde edilen nümerik şemalar üçüncü bölümde başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen model problemlere uygulandı. Ardından $V = U_{xx}$ dönüşümü kullanılarak elde edilen konuma göre parçalanmış Rosenau-Burgers denkleminde lineer olmayan terim yerine yine aynı lineerleştirme tekniği ve korunumlu sonlu fark yaklaşımı kullanılarak nümerik şemalar elde edildi. Bu nümerik şemalar üçüncü bölümde başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen model problemlere uygulanarak yaklaşık sonuçlar hesaplandı. Son olarak, yine bu bölümde standart, korunumlu ve konuma göre parçalanmış denkleme karşılık gelen korunumlu sonlu fark şemalarının model problemlere uygulanması ile yaklaşık çözümden hesaplanan hata normları çizelgeler ve grafikler halinde sunuldu. Ayrıca her bir şema ile elde edilen sayısal sonuçlar literatürde bazı mevcut çalışmalarda verilen sonuçlar ile karşılaştırıldı.

Beşinci bölüm olan tezin son bölümünde ise uygulanan tüm yöntemlerden hesaplanan sayısal sonuçlar üçüncü bölümde başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen model problemler için kendi içerisinde çizelgeler halinde karşılaştırıldı ve yaklaşımlar hakkında kısa bir değerlendirme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Rosenau-Burgers Denklemi, Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı, Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme



ABSTRACT

Master Thesis

A NEW APPROACH FOR NUMERICAL SOLUTIONS OF ROSENAU-BURGERS EQUATION

Azat AHMEDOV

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

76+xi pages

2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

This master thesis consists of five chapters. In the first chapter of the thesis, after giving a brief information about the physical properties of the Rosenau-Burgers equation discussed in the thesis, the studies to be done in the thesis are briefly mentioned.

In the second chapter of the thesis, some basic concepts such as stability, consistency and convergence along with standart finite difference and conservative finite difference approaches are presented. In this section, after giving a brief overview of stability analysis, the von Neumann Fourier series method is explained.

In the third chapter, a detailed literature review about the Rosenau-Burgers equation is made and information about the current studies is presented and the model problems to be considered in the thesis are given together with the initial and boundary conditions.

In the fourth chapter, a linearization technique is used instead of the non-linear term in the Rosenau-Burgers equation, in which standart and conservative finite difference approaches are applied, respectively. The numerical schemes obtained as a result of these applications are applied to the model problems with initial and boundary conditions given in the third chapter. Then, numerical diagrams are obtained by using the same linearization technique and conservative finite difference approaches instead of the nonlinear term in the space split Rosenau-Burgers equation obtained by using the $V = U_{xx}$ transformation. These numerical schemes are applied to the model problems with initial and boundary conditions in the third chapter, and approximate results are calculated. Finally, in this section, the error norms calculated from the approximate solution by applying the conservative finite difference schemes corresponding to the standart, conservative and space split equations to the model problems are presented in tables and graphs. In addition, the numerical results obtained with each scheme are compared with the results given in some existing studies in the literature.

In the last chapter of the thesis, which is the fifth chapter, the numerical results calculated from all of the applied methods are compared in the third chapter for the model problems with initial and boundary conditions, and a brief evaluation has been made about the approaches.

Keywords: Rosenau-Burgers Equation, Conservative Finite Difference Approach,
Rubin-Graves Type Linearization



1. GİRİŞ

Günümüzde bilim insanlarının üzerinde çalıştıkları öne çıkan görevlerden biri de doğa olaylarını matematiksel olarak modellemektir. Uzay, tıp, kimya, biyoloji, jeoloji, fizik ve mekanik vs. alanlarındaki problemlerin yanısıra doğada karşılaşılan her bir olay genellikle cebirsel, integral ya da diferansiyel denklemler kullanılarak tanımlanabilir. Termal ve/veya aerodinamiğin yanısıra mekanik yük ve basınç altında olan farklı yapıda delik ve aynı zamanda çok sayıda gergiyi barındıran bir basınç tüpündeki basıncın yüzey boyunca dağılımı; nehir, denizsuyu veya atmosferdeki kirleticilerin ortamdaki yoğunluğunun hesaplanması; şimşek veya kasırgaların meydana gelişini anlamak ve hava tahminlerinin simülasyonunu yapmak bilim insanları ve mühendislerin günümüzde yoğunlukla ilgilendikleri öne çıkan problemlerden bazıları olarak sayılabilir. Aslında ele alınan bu tip problemlerin bir çoğunun matematiksel modellerinin çıkartılması düşünüldüğü kadar güç olmamakla birlikte karmaşık yapı ve kullanılan malzeme türleri yüzünden analitik çözümlerini elde etmek genellikle zordur. İşte bu şartlarda nümerik yöntem veya teknikler ele alınan bu tip denklemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde önemli bir alternatif olarak karşımıza çıkarlar. Nümerik yöntemler genellikle ele alınan olayları iyi modelleyen bir diferansiyel denklemini bilgisayar programları yardımıyla kolayca çözümü bulunabilecek bir takım lineer veya lineer olmayan cebirsel denklem sistemine dönüştürür. Günümüzde, literatür incelendiğinde çoğu diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için geliştirilen çok sayıda nümerik yöntemlerin mevcut olduğu görülür. Bunlardan biri olan sonlu fark yöntemleri, hem lineer hem de lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Bu yöntemler ele alınırken ilk önce verilen problemin çözüm bölgesi çeşitli geometrik yapılar içeren kafeslere parçalanır ve daha sonra ele alınan problemin nümerik çözümü her bir kafesin düğüm (ızgara, grid veya mesh) noktalarında hesaplanır. Ardından başlangıç ve sınır şartları ile ele alınan diferansiyel denklemde bulunan farklı mertebeden türevler yerine Taylor seri açılımı yardımıyla bulunan uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Dolayısıyla, başlangıçta göz önüne alınan diferansiyel denklemin çözümü problemi, uygulanan bu adımların sonunda fark denklemlerini içeren lineer veya lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenmiş olur. Sonuçta elde edilen fark denklemlerinde problemin çözüm bölgesine düşmeyen hayali düğüm noktalarındaki değerler verilen sınır şartlarının kullanılmasıyla kolayca yok edilir. Son olarak ortaya çıkan cebirsel denklem sistemi uygun bir yöntem yardımıyla direkt ya da iteratif olarak çözülür. [1–4].

Bu yüksek lisans tezinde, $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$U_t + U_{xxxxt} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x = 0 \quad (1.0.1)$$

şeklinde verilen Rosenau-Burgers [5] denkleminin sonlu fark yöntemleri ile nümerik çözümlerinin bulunması amaçlanmaktadır.

Şimdi (1.0.1) ile verilen Rosenau-Burgers denkleminin tarihçesine kısaca bakalım: Yoğun ayrıklaştırılmış sistemlerin dinamiğinde, dalga-duvar ve dalga-dalga etkileşimleri durumları iyi bilinen KdV denklemi ile ele alınamaz. Bunun yanısıra, yüksek genliğe sahip dalgaların davranışı ve eğimi iyi tahmin edilemeyebilir. KdV denklemindeki bu eksikliğin üstesinden gelmek için Rosenau [6, 7]

$$U_t + U_{xxxxt} + U_x + UU_x = 0 \quad (1.0.2)$$

biçiminde verilen Rosenau denklemini önerdi. Rosenau denklemine yönelik çözümlerin varlığı ve tekliğine dair teorik sonuçlar Park [8] tarafından araştırılmıştır. Örneğin: Faedo-Galerkin yöntemi [9], sonlu elemanlar Galerkin yöntemi [10], sonlu fark yöntemi [11, 12], ortogonal kübik spline kollokasyon yöntemi [13] gibi bazı yöntemler (1.0.2) ile verilen denklemin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanılmıştır.

KdV denkleminin modellemede eksik kaldığı bu durumları tanımlayabilen Rosenau denklemini lineer olmayan dalgaların daha geniş çaplı özelliklerini modelleyemiyordu. İşte lineer olmayan dalgaların bu geniş çaplı özelliklerini de göze önüne almak ve dinamik sistemlerdeki yayılım (dissipation) olayını da modelleyebilmek için $-u_{xx}$ vizkoz teriminin eklenmesine ihtiyaç duyuldu. Böylece literatürde Rosenau-Burgers denklemi olarak bilinen

$$U_t + U_{xxxxt} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x = 0, x \in [0, l], t \in [0, T]$$

denklemi ortaya çıkmış oldu [5, 14].

Bu tezde ele alınacak olan Rosenau-Burgers denklemi

$$U(x, 0) = U_0(x), x \in [0, l]$$

başlangıç şartı ve

$$\left. \begin{aligned} U(0, t) &= U(l, t) = 0 \\ U_{xx}(0, t) &= U_{xx}(l, t) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, T]$$

homojen sınır şartları ile göz önüne alındı.

Bu başlangıç sınır değer probleminin çözümünde denklemdaki lineer olmayan UU_x terimi yerine Rubin-Graves benzeri bir lineerleştirme tekniği kullanılarak standart sonlu fark yaklaşımı

(SSFY), korunumlu sonlu fark yaklaşıımı (KSFY) ve konuma göre parçalanmış Rosenau-Burgers denklemi için korunumlu sonlu fark yaklaşımı (KKSFY) uygulandı. Bu yöntemlerden elde edilen nümerik yaklaşıımların Bölüm 3’de verilecek olan model problemlere uygulanması ile hesaplanan sayısal çözümler çizelgeler ve grafikler halinde karşılaştırmalı olarak sunuldu.



2. SONLU FARK YÖNTEMLERİ VE BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Tezin bu bölümünde takip eden bölümlerde ele alınacak olan standart ve korunumlu sonlu fark yöntemleriyle beraber bazı temel kavramlar hakkında bilgiler sunuldu.

2.1 Sonlu Fark Yaklaşımları

Sonlu Fark Yöntemleri (SFY) doğada sıklıkla karşılaşılan olayları modelleyen problemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında yaygın olarak kullanılan nümerik yöntemlerden biridir. Bu yöntemin uygulaması esnasında öne çıkan ve dikkat edilmesi gereken bazı temel esaslar aşağıda maddeler halinde verilmiştir [1, 15].

1. İlk önce, ele alınan problemin üzerinde tanımlı olduğu çözüm bölgesi genellikle düzgün geometrik şekillerden oluşan kafes yapılarına bölünür ve ardından problemin yaklaşık çözümü oluşturulan bu kafeslerin düğüm (*ızgara*, *grid*, *mesh*) noktalarında hesaplanır.

2. İkinci adımda, problemde görülen türevler yerine, Taylor seri açılımından bulunan sonlu fark yaklaşımları kullanılarak düğüm noktalarındaki sonuçlarla ilişkilendirilen bir sonlu fark denklemi bulunur.

3. Bir sonraki adımda eğer problemin çözüm bölgesine düşmeyen hayali değerler var ise bunlar sınır şartları kullanılarak yok edilir. Böylece, ele alınan problem lineer veya lineer olmayan çözülebilir bir cebirsel denklem sistemiyle sonuçlanır.

4. Cebirsel denklem sisteminin çözümüne geçmeden önce elde edilecek olan yaklaşık çözümlerin problemin analitik çözümüne hangi koşullar altında yakın kalacağı incelenir. Bu ise matematikte yakınsaklık analizi olarak bilinir.

5. Son olarak, yöntemin yakınsaklığı gösterildikten sonra cebirsel denklem sistemi lineer veya lineer olmamasına göre ya direkt ya da iteratif yöntemlerden biri yardımı ile uygun bir programlama dili kullanılarak çözülür ve sonuçta ele alınan problemin istenilen düğüm noktalarındaki yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

Bu kısımda, tezde Rosenau-Burgers denklemine uygulanması planlanan SSFY, KSFY ve KKSFY yöntemlerinin okuyucu tarafından daha iyi anlaşılabilmesi ve yöntemlerin ayrıntılı detaylarının daha rahat görülebilmesi için 2–boyutlu ısı iletim denklemi örnek uygulama olarak seçildi. Bu denkleme SSFY, KSFY ve KKSFY yöntemlerinin uygulanmasıyla elde edilen nümerik yaklaşımların bulunması aşağıda ayrıntılı olarak verildi.

Şimdi x, y, t birer bağımsız değişkeni temsil etmek üzere u bilinmeyenli bir kısmi diferansiyel denklemin çözüm bölgesi $[0, l] \times [0, l] \times [0, \infty)$ olsun. Genellikle sonlu fark yöntemleri uygulanırken üzerinde çalışılan çözüm bölgesi $h_x (= \Delta x)$ x -konum yönünde adım uzunluğu, $h_y (= \Delta y)$ y -konum yönünde adım uzunluğu ve $\Delta t (= k)$ t zaman yönünde adım uzunluğu alınarak genellikle düzgün kafes yapılarına bölünür.

Örneğin; ele alınan problemin verilen $[0, l] \times [0, l] \times [0, \infty)$ yarı açık bölgesi üzerindeki (x_i, y_j, t_n) biçiminde temsil edilen bir düğüm noktası

$$\begin{aligned} x_i &= i(\Delta x) = ih_x, & i &= 0, 1, \dots, M, \\ y_j &= j(\Delta y) = jh_y, & j &= 0, 1, \dots, N, \\ t_n &= n(\Delta t) = nk, & n &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

olarak verilmiş olsun. Bu kafes yapısı üzerinde ele alınan herhangi bir keyfi $Q(ih_x, jh_y, nk)$ düğüm noktasında $U(x, y, t)$ fonksiyonunun yaklaşık değeri

$$U_Q, U(ih_x, jh_y, nk) \text{ veya } U_{i,j}^n$$

notasyonlarından birisi ile temsil edilebilir. Buna göre (x_i, y_j, t_n) grid noktasındaki U 'nın yaklaşık değeri $U(x_i, y_j, t_n) \simeq U_{i,j}^n$ olarak gösterilebilir. Böylece, U fonksiyonunun çeşitli mertebeden türevlerine karşılık gelen sonlu fark yaklaşım ifadeleri de bu gösterimler cinsinden yazılabilir.

Ancak bu gösterim kolaylıklarına ek olarak, bir kısmi diferansiyel denklemde görülen çeşitli mertebeden türevlerin günümüz dijital bilgisayarında etkin bir şekilde depolanabilmesi ve işlenebilmesi için yaklaşık bir türde yazılmaları gereklidir. İşte bu yaklaşık tarzda ifade etme işlemi Taylor Seri açılımı yardımıyla gerçekleştirilebilir. Konuya açıklık getirmek için, ilk olarak bir değişkenli herhangi bir fonksiyonun Taylor seri açılımını yaparak birinci mertebeden türevler için ileri fark yaklaşımlarını verelim.

Keyfi bir $U(x+h)$ fonksiyonunun, $h > 0$ yeterince küçük bir pozitif reel sayı olmak üzere, bir x noktasındaki değeri Taylor seri açılımı

$$U(x+h) = U(x) + h \frac{dU}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3U}{dx^3} + \dots \quad (2.1.1)$$

dir. Buradan

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U(x+h) - U(x)}{h} - \frac{h}{2!} \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3U}{dx^3} - \dots \quad (2.1.2)$$

yazılabilir. Son eşitlik,

$$O(h) = -\frac{h}{2!} \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3U}{dx^3} + \dots$$

olmak üzere

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U(x+h) - U(x)}{h} + O(h)$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu son eşitlik U değişkeninin x değişkenine göre birinci mertebeden türevi için birinci mertebeden hataya sahip bir yaklaşım olup indis gösterimi kullanılarak

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + O(h) \quad (2.1.3)$$

biçiminde yazılabilir. $h > 0$ 'nın yeterince küçük bir pozitif reel sayı olması durumunda açıkça $O(h) \rightarrow 0$ olacağından $O(h)$ hata terimi ihmal edilebilir ve böylece yukarıdaki eşitlik

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_i \cong \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \quad (2.1.4)$$

olarak alınabilir. (2.1.3) ile verilen bu eşitlik yaygın olarak birinci mertebeden türev için ileri fark yaklaşımı olarak bilinir.

Daha sonra, birinci mertebeden türev için geri fark yaklaşımını bulmak amacıyla Taylor seri açılımı

$$U(x-h) = U(x) - h \frac{dU}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3U}{dx^3} + \dots \quad (2.1.5)$$

biçiminde yazılır ve ileri fark gösteriminin elde edilmesinde uygulanan işlemlere benzer şekilde işlemler uygulanırsa

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + O(h)$$

şeklinde birinci mertebeden geri fark yaklaşımı bulunur. (2.1.1)'den (2.1.5) çıkartılırsa

$$U(x+h) - U(x-h) = 2h \frac{dU}{dx} + 2 \frac{h^3}{3!} \frac{d^3U}{dx^3} + 2 \frac{h^5}{5!} \frac{d^5U}{dx^5} + \dots$$

veya

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U(x+h) - U(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \frac{d^3U}{dx^3} - \frac{h^4}{5!} \frac{d^5U}{dx^5} - \dots$$

elde edilir. Buradan

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

şeklinde merkezi fark yaklaşımı bulunur. Bu gösterimin ilk iki gösterimden farklı olarak ikinci mertebeden hataya sahip olduğu gerçeğine dikkat edilmelidir.

Birinci mertebeden türev yaklaşımlarından sonra, ikinci mertebeden türevler içinde sonlu fark yaklaşımları Taylor seri açılımı kullanılarak kolayca elde edilebilir. Bunun için Taylor serisinin $U(x+2h)$ ve $U(x-2h)$ fonksiyonları için x düğüm noktalarındaki Taylor seri açılımları sırasıyla

$$U(x+2h) = U(x) + (2h)\frac{dU}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3U}{dx^3} + \dots \quad (2.1.6)$$

$$U(x-2h) = U(x) - (2h)\frac{dU}{dx} + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3U}{dx^3} + \dots \quad (2.1.7)$$

formunda yazılır. Ardından (2.1.7) denklemini (2.1.6) denklemini ile taraf tarafa toplanır

$$U(x+2h) + U(x-2h) = 2U(x) + 4h^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2\frac{(2h)^4}{4!}\frac{d^4U}{dx^4} + \dots$$

elde edilir. Bu gösterimde d^2U/dx^2 ikinci türev terimi sol tarafta kalacak şekilde düzenleme yapılırsa

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{U(x+2h) - 2U(x) + U(x-2h)}{4h^2} + O(h^2) \quad (2.1.8)$$

bulunur. İndis formunda

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_i = \frac{U_{i+2} - 2U_i + U_{i-2}}{4h^2} + O(h^2)$$

şeklinde gösterilir ve bu gösterim ikinci mertebeden türevin üç nokta ileri fark yaklaşımı olarak bilinir.

İkinci mertebeden türev için yukarıda yapılanlara benzer işlemler bu defa (2.1.5) ile verilen $U(x-h)$ ve (2.1.7) ile verilen $U(x-2h)$ fonksiyonları için Taylor seri açılımları uygulanırsa

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_i = \frac{U_i - 2U_{i-1} + U_{i-2}}{h^2} + O(h^2)$$

formunda ikinci mertebeden türevin üç nokta geri fark yaklaşımı bulunur.

(2.1.1) ile verilen $U(x+h)$ ve (2.1.5) ile verilen $U(x-h)$ 'nin Taylor seri açılımları taraf tarafa toplanırsa

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

formunda ikinci mertebeden türevin merkezi fark yaklaşımı bulunur.

Tek değişkenli bir fonksiyonunun türevlerine sonlu fark yaklaşımlarının elde edilmesine benzer şekilde üç değişkenli bir $U = U(x,y,t)$ fonksiyonunda türevlerine sonlu fark yaklaşımları Taylor seri açılımı yardımıyla aşağıdaki şekilde kolayca bulunur.

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{h_x} \quad (2.1.9)$$

x değişkenine göre birinci mertebeden türev için $O(h_x)$ mertebeli iki nokta ileri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial U}{\partial y} \cong \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{h_y} \quad (2.1.10)$$

y değişkenine göre birinci mertebeden türev için $O(h_y)$ mertebeli iki nokta ileri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{h_x} \quad (2.1.11)$$

x değişkenine göre birinci mertebeden türev için $O(h_x)$ mertebeli iki nokta geri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial U}{\partial y} \cong \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{h_y} \quad (2.1.12)$$

y değişkenine göre birinci mertebeden türev için $O(h_y)$ mertebeli iki nokta geri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h_x} \quad (2.1.13)$$

x değişkenine göre birinci mertebeden türev için $O(h_x^2)$ mertebeli üç nokta merkezi fark yaklaşımı ve

$$\frac{\partial U}{\partial y} \cong \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h_y} \quad (2.1.14)$$

y değişkenine göre birinci mertebeden türev için $O(h_y^2)$ mertebeli üç nokta merkezi fark yaklaşımıdır.

Tezde ele alınan problemdeki zaman yönünde birinci mertebeden türev için $O(k)$ mertebeli ileri ve geri fark yaklaşımları sırasıyla

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} \quad (2.1.15)$$

ve

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}}{k} \quad (2.1.16)$$

dir.

İkinci mertebeden türevler için ise, aşağıdaki fark yaklaşımları kullanılır.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i,j}^n - 2U_{i+1,j}^n + U_{i+2,j}^n}{h_x^2} \quad (2.1.17)$$

x değişkenine göre $O(h_x^2)$ mertebeden türev için üç nokta ileri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cong \frac{U_{i,j}^n - 2U_{i,j+1}^n + U_{i,j+2}^n}{h_y^2} \quad (2.1.18)$$

y değişkenine göre $O(h_y^2)$ mertebeden türev için üç nokta ileri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-2,j}^n - 2U_{i-1,j}^n + U_{i,j}^n}{h_x^2} \quad (2.1.19)$$

x değişkenine göre $O(h_x^2)$ mertebeden türev için üç nokta geri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cong \frac{U_{i,j-2}^n - 2U_{i,j-1}^n + U_{i,j}^n}{h_y^2} \quad (2.1.20)$$

y değişkenine göre $O(h_y^2)$ mertebeden türev için üç nokta geri fark yaklaşımı,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n}{h_x^2} \quad (2.1.21)$$

x değişkenine göre $O(h_x^2)$ mertebeden türev için üç nokta merkezi fark yaklaşımı ve

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cong \frac{U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n}{h_y^2} \quad (2.1.22)$$

y değişkenine göre $O(h_y^2)$ mertebeden üç nokta merkezi fark yaklaşımıdır.

Sonlu fark gösterimlerini kullanarak diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan sonlu fark yöntemleri şunlardır:

- Açık (*Explicit*) Sonlu Fark Yaklaşımı.
- Kapalı (*Implicit*) Sonlu Fark Yaklaşımı.
- Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı.
- Ağırlıklı Averaaj Sonlu Fark Yaklaşımı.
- Korunumlu (Conservative) Sonlu Fark Yaklaşımı.

Verilen bu yöntemlerden ilk dördü standart sonlu fark yöntemleri olarak adlandırılır [1, 15]. Tezde kullanılacak standart sonlu fark yöntemlerinin nasıl uygulandığını gösterebilmek için $D = [0, l] \times [0, l]$ çözüm bölgesi üzerinde verilen

$$\frac{1}{K} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in D, \quad t > 0 \quad (2.1.23)$$

2-boyutlu ısı iletim denklemini

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y)$$

başlangıç şartı ve

$$\begin{aligned} U(x, y_0, t) &= g_1(x, t), & 0 \leq x \leq l, & & t > 0, \\ U(x, y_N, t) &= g_2(x, t), & 0 \leq x \leq l, & & t > 0, \\ U(x_0, y, t) &= h_1(y, t), & 0 \leq y \leq l, & & t > 0, \\ U(x_M, y, t) &= h_2(y, t), & 0 \leq y \leq l, & & t > 0. \end{aligned}$$

sınır şartlarıyla ele alınacaktır. Burada g_1, g_2, h_1 ve h_2 nümerik hesaplamalar esnasında verilecek olan fonksiyonlardır.

2.1.1 Açık Sonlu Fark Yaklaşımı (ASFY)

Yukarıda verilen 2-boyutlu ısı iletim problemindeki $\partial^2 U / \partial x^2$, $\partial^2 U / \partial y^2$ ve $\partial U / \partial t$ türevlerinin yerlerine Taylor serisinden gelen hatalar ihmal edilerek

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cong \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h_y^2},$$

ve

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k}$$

ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa ısı iletim problemine karşılık gelen standart açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} = \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h_y^2}$$

biçiminde elde edilir. Burada $(n+1)$. zaman seviyesindeki bilinmeyen terimler eşitliğin sol tarafında ve n . zaman seviyesindeki bilinen terimler eşitliğin sağ tarafında olacak şekilde yazılırsa

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + r_1(U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) + r_2(U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n) \quad (2.1.24)$$

açık sonlu fark yaklaşımı elde edilir. Elde edilen bu yaklaşımda $r_1 = Kk/h_x^2$ ve $r_2 = Kk/h_y^2$ olarak alınmıştır. (2.1.24) ile verilen açık sonlu fark yaklaşımı yardımıyla herhangi bir t_n final zaman adımında bilinen $U_{i,j}^n$ değerleri kullanılarak bir sonraki t_{n+1} zaman adımındaki $U_{i,j}^{n+1}$ değerleri kolaylıkla elde edilebilir.

2.1.2 Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yaklaşımı (ISFY)

(2.1.23) denkleminde verilen 2-boyutlu ısı iletim problemindeki $\partial^2 U / \partial x^2$, $\partial^2 U / \partial y^2$ ve $\partial U / \partial t$ türevlerinin yerlerine Taylor serisinden gelen hatalar ihmal edilerek sırasıyla

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cong \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2},$$

ve

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k}$$

formunda verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa probleme karşılık gelen kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} = \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde bilinmeyenler eşitliğin sol tarafında bir önceki zaman adımından bilinenler eşitliğin sağ tarafında olacak şekilde düzenlenirse kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$U_{i,j}^{n+1} - r_1(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) - r_2(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) = U_{i,j}^n \quad (2.1.25)$$

olarak yazılabilir. Yine burada $r_1 = Kk/h_x^2$ ve $r_2 = Kk/h_y^2$ olarak alınmıştır.

(2.1.25) ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımı bir lineer cebirsel denklem sistemidir ve uygun bir algoritma ile çözülebilir. Sonuç olarak n -inci zaman adımında verilen noktasal değerler yardımıyla $(n+1)$ -inci zamanında bilinmeyen noktasal değerler kolaylıkla bulunur.

2.1.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)

Şimdi (2.1.23) denkleminin verilen 2-boyutlu ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson yaklaşımını elde etmek için ilk önce sırasıyla

$$\frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} = \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h_y^2}$$

ve

$$\frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} = \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}$$

formunda bulunan açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının aritmetik ortalamaları alınır ve daha sonra gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} &= \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{2h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{2h_y^2} \\ &+ \frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{2h_y^2} \end{aligned}$$

formunda Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı elde edilmiş olur. Öncekilerine benzer şekilde $r_1 = Kk/2h_x^2$ ve $r_2 = Kk/2h_y^2$ alınırsa bu sonlu fark yaklaşımı

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} - r_1(U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}) - r_2(U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) \\ = U_{i,j}^n + r_1(U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) - r_2(U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n) \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Bu yaklaşımı kullanarak $(n + 1)$. zaman adımında bilinmeyen $U_{i,j}^{n+1}$ değerlerini bulmak için CNSFY ile verilen yukarıdaki sistem kapalı sonlu fark yaklaşımında olduğu gibi uygun bir algoritma ve bilgisayar programı yardımıyla çözülür.

2.1.4 Ağırlıklı Averaj Sonlu Fark Yaklaşımı (AASFY)

Bu kısımda yukarıda verilen sonlu fark yaklaşımlarının daha genel bir formu olan ağırlıklı averaj yaklaşımı kullanılarak (2.1.23) ile verilen ısı iletim problemine bir yaklaşım

$$\frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} = \varphi \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} \right) + (1 - \varphi) \left(\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right)$$

formunda yazılabilir. Burada $0 \leq \varphi \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayıdır. Buradan açık bir şekilde görülmektedir ki, ağırlıklı averaj yaklaşımından

- $\varphi = 0$ alındığında Açık Sonlu Fark Yaklaşımı
- $\varphi = 1$ alındığında Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı
- $\varphi = 1/2$ alındığında Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı

elde edilir .

2.1.5 Korunumlu (Conservative) Sonlu Fark Yaklaşımı (KSFY)

$U(x,t)$ fonksiyonunun x konum değişkenine göre (x_j, t_n) düğüm noktasındaki birinci mertebeden türevi için sırasıyla $O(h)$, $O(h)$ ve $O(h^2)$ mertebeden

$$\begin{aligned} (U_j^n)_x &\cong \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} \\ (U_j^n)_{\bar{x}} &\cong \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} \\ (U_j^n)_{\hat{x}} &\cong \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \end{aligned}$$

olarak verilen ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımları ve t zaman değişkenine göre birinci mertebeden türev için $O(k)$ mertebeden

$$(U_j^n)_t \cong \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k}$$

olarak verilen ileri fark yaklaşımı ile birlikte ardışık iki zaman seviyesinin ortalaması için

$$U_j^{n+1/2} \cong \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2}$$

olarak verilen fark yaklaşımı kullanılacaktır [16, 17].

Şimdi tezde kullanacağımız korunumlu sonlu fark yaklaşımını aşağıda verilen ısı iletim denkleminde uygulayalım. İlk olarak

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial U}{\partial t}$$

biçiminde verilen ısı iletim denklemindeki $\partial^2 U / \partial x^2$, $\partial^2 U / \partial y^2$ ve $\partial U / \partial t$ türevleri yerlerine sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\cong (U_j^n)_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{U_{i+2,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-2,j}^n}{4h_x^2}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\cong (U_j^n)_{\hat{y}\hat{y}} = \frac{U_{i,j+2}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-2}^n}{4h_y^2}, \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k}$$

ile verilen sonlu fark yaklaşımları yazılırsa ısı iletim denkleminin korunumlu sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{1}{K} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{k} = \frac{U_{i+2,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-2,j}^n}{4h_x^2} + \frac{U_{i,j+2}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-2}^n}{4h_y^2}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + r_1 (U_{i+2,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-2,j}^n) + r_2 (U_{i,j+2}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-2}^n) \quad (2.1.26)$$

elde edilir. Burada $i = 1(1)M - 1$, $j = 1(1)N - 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $r_1 = Kk/h_x^2$ ve $r_2 = Kk/h_y^2$ dir. (2.1.26) cebirsel bir denklem sistemi olup uygun bir algoritma ile çözülür. Böylece (n) . zaman adımındaki bilinen noktasal değerler kullanılarak $(n + 1)$. zaman adımındaki noktasal değerler bulunur.

2.2 Bazı Temel Kavramlar

Uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen bir kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında yaygın olarak kullanılan nümerik yöntemlerden bir tanesi sonlu fark yöntemleridir. Bu yöntemlerin doğruluğunun kolayca hesaplanabilir olması ve çok boyutlu problemlere uygulanırken daha az işleme ihtiyaç duyması tercih edilme sebeplerinden bazıları olarak verilebilir [18]. Sonlu fark yöntemleri bir kısmi diferansiyel denkleme uygulanırken öncelikle ele alınan başlangıç-sınır değer probleminin çözüm bölgesi sonlu sayıda dikdörtgensel

kafeslere bölünür. Yöntem bu kafeslerin kesişim noktası olan düğüm noktasında problemin nümerik çözümünü hesaplama esasına dayanmaktadır. Bu amaçla diferansiyel denklemde ve sınır şartlarında yer alan kısmi türevli terimler yerine Taylor serisi kullanılarak bulunan sonlu fark yaklaşımları kullanılır. Dolayısıyla başlangıç-sınır değer problemi cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Elde edilen cebirsel denklem sisteminde çözüm bölgesi dışında kalan hayali noktalar problemin sınır şartlarına uygun sonlu fark yaklaşımları yazılarak yok edilir. Daha sonra yöntemin yakınsaklığı incelenir Lax'ın denklik teoremine göre bir sonlu fark yaklaşımının yakınsaklığı için gerek ve yeter şart tutarlı ve kararlı olmasıdır. Sonlu fark yöntemleri Taylor serisinden yararlanılarak oluşturulduğundan çoğunlukla tutarlıdır. Dolayısıyla sadece yöntemin kararlılığını incelemek yeterlidir [19,20]. Son olarak, eğer yöntem yakınsaksa, yaklaşımdan elde edilen cebirsel denklem sistemi uygun bir yöntemle çözülerek başlangıç ve sınır şartlı kısmi diferansiyel denklemle verilen problemin yaklaşık çözümü bulunur.

2.2.1 Lokal Kesme Hatası

Ele alınan problemin üzerinde tanımlı olduğu çözüm bölgesinde (m,n) -inci nodal noktasındaki bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımı, U kullanılan fark denkleminin karşılık gelen tam çözümün yerine geçmek üzere, $F_{m,n}(U) = 0$ olarak yazılabilir. (m,n) -inci nodal noktasında sonlu fark yaklaşımının lokal kesme hatası, U fonksiyonu göz önüne alınan kısmi diferansiyel denklemin tam çözümünü göstermek üzere,

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U)$$

biçimde ifade edilir.

Bu şekilde ifade edilen lokal kesme hatası sonlu fark yaklaşımının kullanılmasıyla bulunacak çözümün kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümüne ne derecede iyi yaklaştığını gösteren ölçütlerden biridir. Lokal kesme hatasında konum yönündeki adım uzunluğu h ile zaman yönündeki adım uzunluğu k nın kuvvetlerinin Taylor seri açılımında yerine yazılmasıyla (mh,nk) düğüm noktasında ele alınan kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü olan U fonksiyonunun kısmi türevleri türünden basit bir şekilde elde edilebilir [20].

2.2.2 Tutarlılık

Yaklaşık çözümde kullanılan konum ve zaman adımları $k, h \rightarrow 0$ iken, lokal kesme hatasının limit değeri sıfıra yaklaşıyorsa bu durumda ele alınan sonlu fark yaklaşımı tutarlıdır denir. Bir

başka ifadeyle sonlu fark yaklaşımının tutarlı olması için

$$\lim_{k,h \rightarrow 0} T_{m,n} = 0$$

şartı sağlanmalıdır [20].

2.2.3 Kararlılık

Ele alınan kısmi diferansiyel denkleme karşılık elde edilen sonlu fark yaklaşımından bulunan çözüm kısmi diferansiyel denklemin tam çözümüne oldukça yakın kalıyorsa, yöntemin kararlı olduğu söylenir [20].

2.2.4 Yakınsaklık

Göz önüne alınan probleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin analitik çözümü U ve kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü U olmak üzere

$$\lim_{k,h \rightarrow 0} U_m^n = U_m^n$$

şartı sağlandığında sonlu fark yönteminin yakınsak olduğu söylenir [20].

2.2.5 Lax'ın Denklik Teoremi

Lax'ın Denklik Teoremine göre bir sonlu fark yönteminin yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter şart yöntemin hem kararlı hem de tutarlı olmasıdır [20].

2.2.6 Kararlılık Analizi

Ele alınan herhangi bir diferansiyel denklemin yerine geçen standart veya korunumlu sonlu fark denkleminde elde edilen nümerik sonuçların diferansiyel denklemin analitik çözümüne yakınsak olması için gerekli olan koşullara kararlılık koşulları denir. Kararlılık koşullarının bulunması için gerekli olan işlemlerin yapılması ise kararlılık analizi olarak adlandırılır.

Kararlılık analizi uygulanırken (m,n) -inci nodal noktasında herhangi bir kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümünün U ile ve yine bu KDD'ye karşılık gelen yaklaşık sonlu fark denkleminin nümerik çözümünün U ile gösterildiği varsayılırsa, kararlılık analizinin esası

$$U_m^n - U_m^n$$

hata miktarının mutlak değerinin n zaman adımı artarken sınırlı kalmasıdır. Farklı yöntemler mevcut olsa da lineer olan sonlu fark yaklaşımlarının kararlılık analizleri incelenirken genellikle Fourier seri yöntemi kullanılır [21].

Fourier Seri (von Neumann) Yöntemi

Kararlılık analizinde sıklıkla kullanılan Fourier seri yöntemi, diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımının kararlı olup olmadığını hatanın zaman ilerledikçe yayılımını göz önüne alarak araştırır. Yöntem uygulanırken $k \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ olması durumunda $0 \leq t \leq t_{son} = kN$ final zamanına kadar $U(x, t)$ ye karşılık gelen lineer ve iki zaman seviyeli fark denkleminin kararlılığı ele alınır. Fourier seri yöntemi $t_0 = 0$ başlangıç zamanında düğüm noktası boyunca Fourier serisine göre başlangıçta verilen değerleri gösterir. Dolayısıyla, kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında göz önüne alınan değişkenlere ayırma yöntemiyle benzer bir şekilde $t = 0$ zamanında Fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon olarak ele alınır. Fourier serileri literatürde yaygın olarak sinüs ve cosinüs fonksiyonları türünden ifade edilseler de, üstel formda yazılması kararlılık analizi için daha uygun olur. Bir başka deyişle, $\sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ veya $\sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ ifadeleri yerine $\sum A_n e^{in\pi x}$ üstel ifadesinin yazılması kararlılık analizinde daha çok kullanılmaktadır. Bu ifadelerde $i = \sqrt{-1}$ olup ℓ ise x -yönünde konum değişkeninin tanımlı olduğu aralığın uzunluğunu temsil etmektedir. $\ell = Mh$ ve $\beta_n = n\pi/Mh$ olmak üzere

$$A_n e^{in\pi x/\ell} = A_n e^{in\pi mh/\ell} = A_n e^{i\beta_n m h}$$

olur. $t_0 = 0$ başlangıç noktasında verilen değerler $U_m^0 = U(mh, 0)$, $(m = 0(1)M)$ olup $(M+1)$ -adet denklem ve $A_0, \dots, A_n$ $(N+1)$ -adet bilinmeyenlerden oluşan bu denklem sistemini çözmek mümkündür. Elde edilen çözüm başlangıç düğüm değerlerinin üstel şekilde yazılabileceğini gösterir. Burada yalnızca lineer fark denklemleri ortaya çıkacağı için $e^{i\beta m h}$ formunda tek bir başlangıç değerinin ele alınması gerekir. Bu kolaylık ayrık çözümlerin toplanabileceği esastan kaynaklanmaktadır.

Ele alınan problemlerde zamana göre değişimi gösteren t değerinin artmasını temsil edecek şekilde üstel dağılımı elde etmek için

$$U_m^n = e^{\alpha t} e^{i\beta x} = e^{\alpha n k} e^{i\beta m h} = e^{i\beta m h \xi n}$$

biçiminde yazılan eşitlik göz önüne alınacaktır. Bu eşitlikte α terimi çoğunlukla kompleks bir skaler sabit olarak ele alındığında $\xi = e^{\alpha k}$ olur ve ξ ise güçlendirme çarpanı (amplification factor) olarak bilinir. Bu gösterimler ışığında, ele alınan probleme karşılık gelen sonlu fark

yaklaşımının kararlı olması için $k \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ değerlerine karşılık her bir $n \leq N$ değeri için uygun başlangıç/sınır koşullarını sağlayan her β değeri için $|U_m^n|$ kalıntısının (rezidü) sabit kalması gerekir. Kullanılan bu nostasyonlarla birlikte ifade edilen bu tanımlar "Lax-Richtmyer" denklik tanımını olarak adlandırılır.

Eğer göz önüne alınan probleme karşılık elde edilen sonlu fark yaklaşımı problemin tam çözümüne zamana göre üstel bir şekilde artış göstermiyorsa, o zaman kararlılık için gerek ve yeter şart

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

bir başka ifadeyle $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. Bu durumun aksine eğer $|U_m^n|$ terimi zamana bağlı olarak artış gösteriyorsa, bu durumda kararlılık için gerek ve yeter şart keyfi bir K pozitif sayısının k, h ve β değerlerinden bağımsız olarak

$$\xi \leq 1 + Kk \leq 1 + O(k)$$

olmasıdır.

3. ROSENAU-BURGERS DENKLEMİ

3.1 Giriş

Bu bölümde, SSFY, KSFY ve KKSFY yöntemleri

$$U_t + U_{xxxxt} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x = 0, x \in [0, l], t \in [0, T], \quad (3.1.1)$$

biçiminde verilen Rosenau – Burgers denklemine uygulandı. Şimdi Rosenau-Burgers denkleminin geniş çaplı bir literatür taramasını verelim.

Zheng vd. [22] genelleştirilmiş Rosenau-Burgers denklemine Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımını önerdiler ve önerdikleri sonlu fark yaklaşımı için çözümlerin varlığını, kararlılığını, yakınsaklığını ve ön hata tahminini ispatladılar. Sonuç olarak, önerdikleri sonlu fark şemasının etkili ve güvenilir olduğu sonucuna vardılar. Xue vd. [23] genelleştirilmiş Rosenau-Burgers denklemi için iki seviyeli yeni bir lineer kapalı sonlu fark yaklaşımı önerdiler. Aynı zamanda elde edilen bu sonlu fark çözümünün ön tahminini elde ettiler. Sayısal çözümlerin tek olarak elde edilebildiğini gösterdiler. Aynı zamanda elde ettikleri sonlu fark yaklaşımının yakınsak ve kararlı olduğu kanıtladılar. Ele aldıkları sayısal test problemleri ile kullandıkları yöntemin verimli olduğu gösterdiler. Janwised vd. [24] Rosenau-Burgers denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için, üç seviyeli yeni bir lineer kapalı sonlu fark yöntemini sundular. sunulan yöntemin hem konum hem de zaman yönünde ikinci mertebeden hataya sahip bir sonlu fark yaklaşımı olduğunu gösterdiler. Yazarlar daha sonra kullandıkları sayısal çözümünün varlığını ve tekliğini kanıtladılar. Bunun ötesinde yazarlar, sayısal yöntemin yakınsak ve kararlı olduğunu gösterdiler. Elde edilen sayısal sonuçlarla, kullanılan yöntemin problemin sayısal çözümünü önemli ölçüde iyileştirdiğini gösterdiler. Hu vd. [25] Rosenau-Burgers denkleminin sayısal çözümü için Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı önerdiler ve önerdikleri şemanın çözümlerinin varlığı ve tekliğini göstererek, $o(k^2 + h^2)$ mertebeden yakınsak ve kararlı olduğunu ispatladılar. Sayısal simülasyonlar kullanarak yöntemin etkin olduğunu gösterdi. Li vd. [26] Rosenau-Burgers denklemi için bir lineer sonlu fark yaklaşımı sundular. Yazarlar yaklaşımının çözülebilirliğini, kararlılığını ve yakınsaklığını ayrıntılı olarak ele almakla kalmayıp aynı zamanda elde ettikleri yaklaşımının sayısal çözümünün $\|.\|_\infty$ normu açısından tam çözümüne yaklaştığını ispatladılar. Ref. ([25])’de elde edilen sonuçlarla kendi makalelerinde elde ettikleri sonuçları karşılaştırıldığında, kendi yöntemlerinin doğruluğunu ve verimli olduğu gösterdi.

Ma vd. [27] Rosenau-Burgers denklemi için sonlu bir fark yöntemini ele aldılar. Yazarlar bu çalışmalarında, hem konum ve hem de zaman yönünde ikinci mertebeden, lineerleştirilmiş üç seviyeli bir sonlu fark yaklaşımı önerdiler. Daha sonra elde ettikleri bu fark çözümünün yakınsaklık ve kararlılığını ayırık enerji yöntemi ile kanıtladılar. Sonuç olarak, kullandıkları test problemlerinin yöntemlerinin güvenilir olduğunu ve uygulamada Crank-Nicolson yaklaşımına göre daha az CPU zamanı harcadığını doğruladılar. Hu vd. [5] genelleştirilmiş Rosenau-Burgers denkleminin başlangıç ve sınır değer probleminin sayısal çözümü için lineer üç seviyeli kapalı avaraj sonlu fark yaklaşımını ele aldılar. Ardından, elde ettikleri nümerik çözümlerin varlığı ve tekliğini tartıştılar. Daha sonra elde ettikleri sonlu fark yaklaşımının $o(k^2 + h^2)$ mertebeden yakınsak ve aynı zamanda kararlı olduğu kanıtladılar. Sonuç olarak, ele aldıkları test problemlerinden elde ettikleri nümerik çözümlerin kullandıkları yöntemin verimli olduğunu gösterdiğini belirttiler. Yazarlar çalışmalarında ele aldıkları problemin tam çözümünü bilmedikleri için, karşılaştırmaları kaba ve ince düğümler üzerinde yaptıklarını, hata tahminlerini elde etmek için ise $h = 1/160$ değerine karşılık gelen ızgara yapısı üzerindeki çözümü referans çözüm kabul ettiklerini belirttiler. Pan ve Zhang [28] Rosenau-Burgers denkleminin yakınsak ve koşulsuz olarak kararlı olan başlangıç-sınır değer problemi için lineer kapalı sonlu fark yaklaşımı üzerine bir çalışma sundular. Yazarlar, elde ettikleri nümerik çözümlerin tek olarak çözülebildiğini gösterdiler. Daha sonra, sonlu fark yaklaşım yöntemi ile bulunan çözümün tahminini ve ikinci mertebeden yakınsamasını enerji yöntemi kullanılarak incelediler. Son olarak, buldukları nümerik sonuçların kullandıkları yöntemin etkin ve doğru olduğunu gösterdiği sonucuna vardılar. Yazarlar bu çalışmalarında Hu vd.'nin Ref. [25] çalışmalarında belirttiği gibi hata tahminini elde edebilmek için $h = 1/160$ değerine karşılık gelen çözümü referans çözüm olarak kabul ettiklerini ve karşılaştırmalarını bu referans çözüme göre yaptıklarını belirttiler.

Bu tez çalışmasında da, benzer şekilde $h = 1/160$ değerine karşılık gelen çözümü referans çözüm olarak kabul edilecektir. Mittal vd. [29] bazı Rosenau tipi lineer olmayan yüksek mertebeden oluşum (evolution) denklemlerini Dirichlet tipi sınır şartları ile çözmek için bir kollokasyon yöntemi üzerine çalışma başlattılar. Kullandıkları yaklaşım, bağımlı değişken ve dördüncü mertebeye kadar türevlerinin çözüm aralığı boyunca sürekliliğini sağlamak için beşinci mertebeden B-spline'ların sonlu elemanlar üzerinde bir araya getirilmesine dayanmaktaydı. Beşinci mertebeden B-spline bazlar konum değişkenler ve türevleri için kullanıldığından, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sistem ürettiler. Elde edilen bu sistem SSP-RK3 yaklaşımı kullanılarak çözüldü. Bu yöntem nümerik hataların daha az

birikmesine neden olan daha az depolama alanına ihtiyaç duymaktaydı. Rosenau tipi lineer olmayan evolüsyon denklemlerinin sayısal yaklaşık çözümleri, denklemler dönüştürülmeden ve lineerleştirme kullanılmadan hesaplanmıştır. Yazarlar, bu yöntemi, örneklerden birinin değişken katsayılar olduğu dört test problemi üzerinde incelemişlerdir. Sonuç olarak, kolay ve ekonomik uygulanmasının bu yöntemin gücü olduğunu ileri sürdüler. Piao vd. [30] Rosenau-Burgers denkleminin B-spline Galerkin sonlu eleman çözümü için L_∞ -hata analizini göz önüne aldılar. Yarı ayırık B-spline Galerkin yaklaşımı uygun yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Tamamen ayırık B-spline Galerkin yaklaşımı için Crank-Nicolson yöntemini göz önünde bulundurdular ve bu yönteme karşılık gelen hata tahminlerini analiz ettiler. Önerilen yöntemin geçerliliğini ve doğruluk mertebesini göstermek için nümerik çözümler sundular. Arora vd. [31] bu çalışmalarında, Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için yeni bir sayısal yöntem olan "modifiye edilmiş kübik B-spline diferansiyel kuadratür yöntemi (MCB-DQM)" önerdiler. Diferansiyel kuadratür yöntemini uygularken, ağırlık katsayılarını belirlemek için modifiye edilmiş kübik-B-spline baz fonksiyonlarını kullandılar. Elde edilen adi diferansiyel denklem sistemini çözmek için, konum yönünde MCB-DQM yöntemini ve zaman yönünde optimum dört aşamalı, üçüncü mertebeden güçlü kararlılığı koruyan Runge-Kutta (SSP-RK43) yaklaşımını kullandılar. Yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu kontrol etmek için, Burgers denkleminin dört örneğini ele aldılar. Ele aldıkları bu örneklerin sayısal çözümlerini, L_2 ve L_∞ hataları ve literatürde verilen sonuçlarla birlikte sundular. Yazarlar, önerilen yöntemin literatürde bulunan hemen hemen tüm yaklaşımlardan elde edilen sonuçlara kıyasla daha iyi sonuçlar verdiği ve kesin çözümlere yaklaştığı sonucuna vardılar. Sunulan yöntemin çeşitli lineer/lineer olmayan fiziksel modeller için sayısal çözümler bulmaya yönelik mevcut tekniklerle karşılaştırıldığında, uygulanması kolay, güçlü, verimli ve ekonomik olduğunu ileri sürdüler. Hasan vd. [32] çalışmalarında Rosenau-Burgers denkleminin periyodik başlangıç sınır değer problemi için sayısal yöntemleri ile ilgilendiler. Yazarların bu çalışmada ana amaçları zaman ayrıklaştırması için kararlı zaman adımlama yaklaşımı, konumsal ayrıklaştırma için spektral bir yöntem oluşturmak ve analiz etmektir. Kullandıkları bütünleşik yöntemin şartsız kararlı olduğu ve $O(\Delta t^2 + N^{1-m})$ mertebeden yakınsak olduğunu kanıtlanmışlardır, burada Δt , N ve m sırasıyla zaman adım uzunluğunu, polinom derecesini ve konum değişkenindeki düzenliliği göstermektedir. Makalede yapılan sayısal testlerin önerilen yöntemin verimli olduğunu gösterdiği sonucuna vardılar. Bunlara ek olarak, mevcut bazı teoremleri kullanılarak, çözümün asimptotik analizini tartıştılar. Ganaie vd. [33] lineer olmayan Burgers denkleminin sayısal çözümü, kübik Hermite kollokasyon yöntemini (CHCM) kullanarak elde

etmişlerdir. Uygulanan yöntemin avantajı, bağımlı değişkenin ve türevinin çözüm aralığı boyunca sürekliliğidir. Yazarlar çalışmalarında, lineer bir kararlılık analizi ile zaman içinde Crank-Nicolson yaklaşımına dayalı sayısal yaklaşımının koşulsuz olarak kararlı olduğunu gösterdiler. Yazarlar bu yöntemi, yöntemin doğruluğunu onaylamak için farklı kollokasyon noktaları seçerek bazı test problemlerine uyguladılar. Makalede elde edilen sayısal sonuçlar, kullanılan yöntemin, kesin çözümün bulunamadığı yüksek Reynolds sayıları için bile verimli, sağlam ve güvenilir olduğunu göstermektedir. Yazarlar sonuç olarak, ele aldıkları yöntemin, daha geniş bir aralıktaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sınıfına da uygulanabileceği sonucuna vardılar. Korpusov [34] bazı sınır koşulları için $(0, L) \otimes S$, $S \subset \mathbb{R}^2$ silindiri üzerinde tanımlı iyi bilinen üç boyutlu Rosenau – Burgers denklemi için başlangıç sınır değeri problemini göz önüne aldı. Yazar test fonksiyon yöntemini kullanarak, bu başlangıç sınır değer probleminin çözümlerinin patlamasına ilişkin sonuçları sonlu bir süre zarfında elde etti. Yazar bu çalışmasının, bu denklem için "patlama" yönündeki ilk sonuçlardan biri olduğunu ileri sürdü. Korpusov [35] bir diğer çalışmada, bir segment üzerindeki tanımlı iyi bilinen Benjamin-Bona-Mahony-Burgers ve Rosenau-Burgers denklemleri için başlangıç-sınır değeri problemlerinin çözümlerinin patlaması (blow-up) için yeterli koşulları incelemiştir. Yazar bu çalışmasının, "patlama" alanındaki bu denklemler için ilk sonuç olduğuna dikkat çekmiştir. Liu vd. [36] çalışmalarında, periyodik bir başlangıç sınır koşulu ile birlikte verilen $u_t + u_{xxxx} - \alpha u_{xx} + f(u)_x = 0$ Rosenau–Burgers denkleminin odaklanmışlardır. Yazarlar, düzgün bir başlangıç değeri ile verilen küresel çözümün tek olarak var olduğu kanıtlanmışlardır. Bununla birlikte, $\alpha > 0$ için, küresel çözümün zaman olarak asimptotik biçimde üslü bir formdaki başlangıç değerinin ortalamasına yakınsadığı ve yakınsama oranının optimal olduğu; $\alpha = 0$ için tek olan çözümün her zaman ilk ortalama etrafında salınım gösterdiğini ileri sürdüler. Yazarlar, son olarak, teorik sonuçları doğrulamak için sayısal simülasyonları rapor ettiler. Liu ve Mei [37] bu makalelerinde, $u_t + u_{xxxx} - \alpha u_{xx} + (u^{p+1}/(p+1))_x = 0$ ile verilen Rosenau–Burgers (R-B) denklemi için Cauchy problemine yönelik global çözümlerin büyük zamanlı davranışını incelemişlerdir. Değişken ölçekleme yöntemiyle, lineer olmayan parabolik $u_t - \alpha u_{xx} + (u^{p+1}/(p+1))_x = 0$ denkleminin çözümünün, Rosenau – Burgers (R-B) denkleminin asimptotik profilinden daha iyi olduğunu keşfettiler. Rosenau – Burgers denkleminin asimptotik profile yakınsama oranlarını enerji tahminleri ile Fourier dönüşümü yöntemini kullanarak geliştirdiler. Bu sonucun asimptotik davranış olarak sıfırı elde etmesi ile önceki çalışmadan [1,2] daha iyi olduğunu ileri sürdüler. Ayrıca, yazarlar birkaç test örneği üzerinde sayısal simülasyonları tartışmış ve elde edilen sayısal sonuçların teorik

sonuçları doğruladığı sonucuna varmışlardır. Zhang vd. [14] çalışmalarında, Rosenau-Burgers denkleminin asimptotik kararlılığı sonucunu, durağan hal özdeğer problemi ve zorlama fonksiyonu üzerine uygun varsayımlar altında oluşturmuşlardır. Ek olarak, yazarlar bu lineer olmayan Rosenau-Burgers denklemini çözmek için lineerleştirilmiş sayısal bir yöntem önermiş ve bu yöntemi analiz etmişlerdir. Daha sonra, sayısal yaklaşımının şartsız olarak kararlı olduğunu kanıtlamış ve hata tahmini ile kullanılan sayısal yöntemin $O(\Delta t^2 + N^{2-m})$ mertebeden olduğunu göstermişlerdir, burada Δt , N ve m sırasıyla, zaman adımı, polinom derecesi ve u 'nun düzenliliğini göstermektedir. Son olarak, teorik sonuçları doğrulamak için sayısal örnekler sunmuşlardır. Omrani vd. [12] KdV denklemine benzeyen Rosenau-Burgers denklemi için korunumlu bir fark yaklaşımı vermişlerdir. Ardından, sayısal çözümlerin tek olarak elde edilebildiğini göstermişlerdir. Son olarak, fark yaklaşımının önceden bağlı, yakınsak ve kararlı olduğunu kanıtlanmışlardır. Guo vd. [38] Rosenau-Burgers denkleminin başlangıç-sınır değer problemini çoklu integral sonlu hacim yöntemi (MIFVM) ile incelediler. Yazarların kullandıkları bu yöntem ele aldıkları orijinal denklem özelliğini çok iyi koruyabilme özelliğine sahiptir. Yazarlar bu çalışmalarında, orijinal denklemin enerji düşüş özelliğini koruyan iki seviyeli kapalı lineer olmayan ayrık bir yaklaşım önerdiler. Bu çalışmada ayrıca elde edilen sayısal çözümün varlığı ve tekliği gösterildi. $O(\tau^2 + h^3)$ yakınsaklık mertebesi ve sayısal yaklaşımının koşulsuz kararlılığı doğrulandı. Yazarlar, sonuç olarak ele aldıkları sayısal örneklerin, kullandıkları yaklaşımın güvenilir ve etkili olduğunu gösterdiği sonucuna vardılar. Maxim vd. [39] Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, Rosenau-Burgers ve Korteweg-de-Vries Benjamin-Bona-Mahony denklemleri için matematiksel fizikte iyi bilinen bazı problemleri ele aldılar. Ele alınan bu denklemler, özellikle hidro ve elektrodinamik olmak üzere farklı fizik alanlarındaki önemli süreçleri tanımlamaktadırlar. Yazarlar doğal fiziksel sınır koşulları ile başlangıç-sınır problemlerini incelediler. Yerel çözülebilirlik için yeterli koşulları ve sonlu zamanda patlama olayını elde ettiler. Bunun için Galaktionov, Pokhozhaev ve Mitidieri tarafından geliştirilen büzülme haritalama ve lineer olmayan kapasite yöntemleri kullandılar. Omrani vd. [40] Rosenau-Burgers (RB) denklemi adı verilen lineer olmayan evrimsel problemi sayısal olarak çözmeyi amaçladılar. İlk olarak, Rosenau-Burgers probleminin yaklaşımı için yarı kesikli sonlu eleman yönteminin hata tahminlerini türettiler. Zaman içinde ikinci mertebeden bir doğruluk için, Galerkin-Crank-Nicolson tamamen ayrık yöntemini önerdiler. İkinci olarak, Rosenau-Burgers denklemi için lineerleştirilmiş bir fark yaklaşımını göz önüne aldılar. Önerilen fark yaklaşımının benzersiz bir şekilde çözülebilir olduğu kanıtlayıp, yöntemin hem zaman hem de konum yönünde maksimum normda ikinci mertebeden yakınsak olduğunu

gösterdiler. Yazarlar, son olarak, elde ettikleri lineerleştirilmiş fark yaklaşımının geçerliliğini ve doğruluğunu göstermek için bazı sayısal deneyler verdiler. Abazari ve Yıldırım [41] çalışmalarında Rosenau-Burgers denkleminin başlangıç sınır değer probleminin nümerik çözümünü hesaplamak için kuintik B-spline yöntemini uyguladılar. Bu yöntemde elde ettikleri yaklaşım zaman integrasyonu için Crank-Nicolson formülasyonuna konum integrasyonu için ise kuintik B-spline fonksiyonlarına dayanıyordu. Yazarlar uyguladıkları yöntemin şartsız kararlı olduğunu Von-Neumann yaklaşımı ile ispat ettiler. Xu vd. [42] Rosenau-Burgers denkleminin sayısal çözümlerini kübik B-spline sonlu eleman yöntemine dayalı olarak buldular. Zaman yönünde ayrıklaştırma için geri (backward) Euler yöntemini uygulayan yazarlar, elde ettikleri lineer olmayan cebirsel sistemi Newton yöntemiyle lineer sisteme dönüştürdüler. Sonuç olarak elde ettikleri sayısal sonuçların tam çözümle uyum içerisinde olduğunu gösterdiler. Zürcü ve Seydaoğlu [43] lineer olmayan Rosenau-Burgers denklemine uygulanan operatör split yöntemlerinin yakınsaklık analizini sundular. Yazarlar, çalışmalarının sonunda ise beklenen yakınsaklık mertebesini doğrulamak için bir sayısal örnek ele aldılar. Wongsaijai ve Poonanaporn [44] Rosenau-RLW ve Rosenau-Burgers denklemlerinin birleştirilmesiyle modellenen dispersif sıg su dalgalarının çözümlerinin asimptotik davranışını incelediler. Yazarlar Fourier dönüşüm yöntemiyle elde ettikleri çözümün enerji bozulma oranlarını incelediler ve sonuçta teorik sonuçları desteklemek için başarılı bir şekilde simülasyonlar oluşturdular. Wang [45] bir H^1 -Galerkin mix sonlu eleman yöntemi (H^1 MFEM) ile dördüncü mertebeden lineer olmayan Rosenau-Burgers denklemini analiz etti. Yazar üç tane yardımcı değişken ekleyerek, birinci mertebeden dört adet denklem elde etmiş ve skaler bilinmeyen yanısıra birinci, ikinci ve üçüncü türevleri içinde tahminlerde bulunmuştur. Panin [46] farklı sınır şartlarına sahip Rosenau-Burgers denklemi için sınır-değer problemlerinin bir kaç modelini göz önüne aldı. Yazar ele aldığı problemlerin tek olarak çözülebilirliğini ispatladı. Korpusov ve Yushkov [47] çalışmalarında matematiksel fizik alanında iyi bilinen Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, Rosenau-Burgers ve Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony denklemlerini göz önüne aldılar. Yazarlar, bu denklemler için doğal fiziksel sınırlara sahip başlangıç-sınır değer problemlerini incelediler. Jun [48] Rosenau-Burgers denkleminin sıg sularını modelleyen sayısal çözümlerini ele aldı. Yazar kullandığı yaklaşımın detaylı bir analizini yaptı ve yaklaşımın şartsız kararlı olduğunu gösterdi. Yazar çalışmasının sonunda önerdiği yöntemleri sıg su dalga denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını incelemek için kullanmıştır.

3.2 Model Problemler

Bu kısımda tezde ele alınacak olan (3.1.1) ile verilen Rosenau-Burgers denklemi için aşağıdaki iki model problem verildi.

Model Problem 1

Birinci model problem olarak

$$U_t + U_{xxxxt} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x = 0, (x, t) \in [0, 1] \times (0, 10]$$

formunda verilen Rosenau-Burgers denklemi

$$U(x, t_0) = U_0(x) = x^4(1-x)^4, x \in [0, 1]$$

başlangıç şartı ve

$$\left. \begin{array}{l} U(0, t) = U(1, t) = 0 \\ U_{xx}(0, t) = U_{xx}(1, t) = 0 \end{array} \right\}, \quad t \in (0, 10]$$

sınır şartları ile ele alındı [49].

Model Problem 2

İkinci model problem olarak ise

$$U_t + U_{xxxxt} - 30U_{xx} + 0.001U_x + \frac{1}{2}(U^2)_x = 0, (x, t) \in [0, 1] \times (0, 1]$$

formunda verilen Rosenau-Burgers denklemi

$$U(x, t_0) = U_0(x) = x^2(1-x)^2, x \in [0, 1]$$

başlangıç şartı ve

$$\left. \begin{array}{l} U(0, t) = U(1, t) = 0 \\ U_x(0, t) = U_x(1, t) = 0 \end{array} \right\}, \quad t \in (0, 1]$$

sınır şartları ile ele alındı [30].

4. ROSENAU-BURGERS DENKLEMİNİN SONLU FARK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde Bölüm 3’de tanıtılan model problemlerin nümerik çözümleri SSFY, KSFY ve KKSFY yöntemleri ile bulundu. Bulunan sayısal çözümlerin tam çözümlere ne kadar yakın olduğunu görmek için (x_j, t_n) düğüm noktasında U ’ya karşılık gelen analitik ve sayısal değerleri sırası ile U_j^n ve $(U_N)_j^n$ olmak üzere

$$L_2 = \left(h \sum_{i=1}^N |U_j^n - (U_N)_j^n|^2 \right)^{1/2}, \quad L_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |U_j^n - (U_N)_j^n|$$

olarak tanımlanan hata normlarının değerleri bulundu. Bunun yanı sıra nümerik yöntemlerin yakınsaklık mertebesi

$$\text{Mertebe}(L_j) = \log_2(L_j(2h, 2k)/L_j(h, k)), \quad j = 2, \infty$$

formülü ile hesaplandı.

Hu vd. [25] ile Pan ve Zhang [28] çalışmalarında elde ettikleri korunumlu sonlu fark şemasının lokal kesme hatasının $O(h^2 + k^2)$ olduğunu ve dolayısıyla yakınsaklık mertebesinin teorik değerinin 2 olduğunu gösterdiler.

4.1 Rosenau-Burgers Denkleminin Standart Sonlu Fark Yaklaşımı (SSFY)

Tezin ana kısmını teşkil eden bu bölümünde (3.1.1) ile verilen Rosenau-Burgers denkleminin Bölüm 2’de örnek uygulaması verilen standart sonlu fark yaklaşımları kullanılarak ve lineer olmayan UU_x terimi yerine

$$(UU_x)_j^{n+1} = U_j^{n+1} (U_x)_j^n + U_j^n (U_x)_j^{n+1} - U_j^n (U_x)_j^n \quad (4.1.1)$$

formunda verilen Rubin-Graves tipi lineerleştirme yazılarak yaklaşık çözümleri bulundu. Bunun için (3.1.1) denkleminde

$$U_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} \text{ ve } (U_j^n)_t = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k}$$

Crank-Nicolson ve ileri fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{(U_{xxx})_j^{n+1} - (U_{xxx})_j^n}{k} - \alpha \frac{(U_{xx})_j^{n+1} + (U_{xx})_j^n}{2} \\ & + \beta \frac{(U_x)_j^{n+1} + (U_x)_j^n}{2} + \frac{(UU_x)_j^{n+1} + (UU_x)_j^n}{2} = 0 \end{aligned}$$

biçimindeki iteratif şema elde edilir. Bu şemada $(UU_x)_j^{n+1}$ terimi yerine (4.1.1) ile verilen lineerleştirme tekniği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{(U_{xxx})_j^{n+1} - (U_{xxx})_j^n}{k} - \alpha \frac{(U_{xx})_j^{n+1} + (U_{xx})_j^n}{2} \\ & + \beta \frac{(U_x)_j^{n+1} + (U_x)_j^n}{2} + \frac{U_j^{n+1} (U_x)_j^n + U_j^n (U_x)_j^{n+1}}{2} = 0 \end{aligned}$$

biçimindeki lineer iteratif şema elde edilir. Şimdi bu lineer iteratif şemadaki

$$\frac{(U_{xxx})_j^{n+1} - (U_{xxx})_j^n}{k}$$

terimi yerine

$$\frac{(U_{xxx})_j^{n+1} - (U_{xxx})_j^n}{k} = \frac{\frac{U_{j+2}^{n+1} - 4U_{j+1}^{n+1} + 6U_j^{n+1} - 4U_{j-1}^{n+1} + U_{j-2}^{n+1}}{h^4} + \frac{U_{j+2}^n - 4U_{j+1}^n + 6U_j^n - 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n}{h^4}}{k}$$

yaklaşımı

$$\alpha \frac{(U_{xx})_j^{n+1} + (U_{xx})_j^n}{2}$$

terimi yerine

$$\alpha \frac{(U_{xx})_j^{n+1} + (U_{xx})_j^n}{2} = \alpha \frac{\frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}}{2}$$

yaklaşımı ve

$$\frac{U_j^{n+1} (U_x)_j^n + U_j^n (U_x)_j^{n+1}}{2}$$

terimi yerine

$$\frac{U_j^{n+1} (U_x)_j^n + U_j^n (U_x)_j^{n+1}}{2} = \frac{U_j^{n+1} \left(\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} \right) + U_j^n \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} \right)}{2}$$

yaklaşımı yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{U_{j+2}^{n+1} - 4U_{j+1}^{n+1} + 6U_j^{n+1} - 4U_{j-1}^{n+1} + U_{j-2}^{n+1} - U_{j+2}^n + 4U_{j+1}^n - 6U_j^n + 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n}{kh^4} \\ & - \alpha \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2h} \\ & + \beta \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} - U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{4h} \\ & + \frac{U_j^{n+1} U_{j+1}^n - U_j^{n+1} U_{j-1}^n + U_j^n U_{j+1}^{n+1} - U_j^n U_{j-1}^{n+1}}{4h} = 0 \end{aligned}$$

biçimindeki sistem elde edilir.

Şimdi bu sistemin daha sade bir gösterimi için, zaman adım uzunluğu Δt yerine k ve konum adım uzunluğu Δx yerine h notasyonu kullanılır ve $(n+1)$. zaman adımındaki terimler sol tarafta ve n . zaman adımındaki terimler sağ tarafta toplanırsa $j = 1(1)(N-1)$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{kh^4}U_{j-2}^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_j^n}{4h} - \frac{\beta}{4h}\right)U_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n}{4h} - \frac{U_{j-1}^n}{4h}\right)U_j^{n+1} \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_j^n}{4h} + \frac{\beta}{4h}\right)U_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_{j+2}^{n+1} \\ & = \frac{1}{kh^4}U_{j-2}^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h}\right)U_{j-1}^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_j^n \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h}\right)U_{j+1}^n + \frac{1}{kh^4}U_{j+2}^n \end{aligned}$$

biçiminde iteratif denklem sistemi elde edilir.

Bu iteratif denklem sisteminin program algoritmasının okuyucu tarafından daha rahat anlaşılabilmesi için bölüntü sayısı özel olarak $N = 8$ seçildi. Bu kapsamda $j = 1(1)7$ değerleri için nümerik şema sırası ile

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{kh^4}U_{-1}^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_1^n}{4h} - \frac{\beta}{4h}\right)U_0^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_2^n}{4h} - \frac{U_0^n}{4h}\right)U_1^{n+1} \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_1^n}{4h} + \frac{\beta}{4h}\right)U_2^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_3^{n+1} \\ & = \frac{1}{kh^4}U_{-1}^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h}\right)U_0^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_1^n \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h}\right)U_2^n + \frac{1}{kh^4}U_3^n \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{kh^4}U_0^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_2^n}{4h} - \frac{\beta}{4h}\right)U_1^{n+1} + \frac{1}{k} + \left(\frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_3^n}{4h} - \frac{U_1^n}{4h}\right)U_2^{n+1} \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_2^n}{4h} + \frac{\beta}{4h}\right)U_3^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_4^{n+1} \\ & = \frac{1}{kh^4}U_0^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h}\right)U_1^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_2^n \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h}\right)U_3^n + \frac{1}{kh^4}U_4^n \end{aligned}$$

$j = 3$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} U_1^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_3^n}{4h} - \frac{\beta}{4h} \right) U_2^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_4^n}{4h} - \frac{U_2^n}{4h} \right) U_3^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_3^n}{4h} + \frac{\beta}{4h} \right) U_4^{n+1} + \frac{1}{kh^4} U_5^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} U_1^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right) U_2^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2} \right) U_3^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right) U_4^n + \frac{1}{kh^4} U_5^n
\end{aligned}$$

$j = 4$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} U_2^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_j^n}{4h} - \frac{\beta}{4h} \right) U_3^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_5^n}{4h} - \frac{U_3^n}{4h} \right) U_4^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_4^n}{4h} + \frac{\beta}{4h} \right) U_5^{n+1} + \frac{1}{kh^4} U_6^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} U_2^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right) U_3^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2} \right) U_4^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right) U_5^n + \frac{1}{kh^4} U_6^n
\end{aligned}$$

$j = 5$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} U_3^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_5^n}{4h} - \frac{\beta}{4h} \right) U_4^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_6^n}{4h} - \frac{U_4^n}{4h} \right) U_5^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_5^n}{4h} + \frac{\beta}{4h} \right) U_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{kh^4} U_7^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} U_3^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right) U_4^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2} \right) U_5^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right) U_6^n + \frac{1}{kh^4} U_7^n
\end{aligned}$$

$j = 6$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} U_4^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_6^n}{4h} - \frac{\beta}{4h} \right) U_5^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_7^n}{4h} - \frac{U_5^n}{4h} \right) U_6^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_6^n}{4h} + \frac{\beta}{4h} \right) U_8^{n+1} + \frac{1}{kh^4} U_9^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} U_4^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right) U_5^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2} \right) U_6^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right) U_7^n + \frac{1}{kh^4} U_8^n
\end{aligned}$$

$j = 7$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4}U_5^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_7^n}{4h} - \frac{\beta}{4h}\right)U_6^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_8^n}{4h} - \frac{U_6^n}{4h}\right)U_7^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_7^n}{4h} + \frac{\beta}{4h}\right)U_8^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_9^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4}U_5^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h}\right)U_6^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_7^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h}\right)U_8^n + \frac{1}{kh^4}U_9^n
\end{aligned}$$

şeklinde yazıldı. Elde edilen bu denklem sistemi

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{kh^4}, \\
b_i &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_i^n}{4h} - \frac{\beta}{4h}, & i = 1(1)7 \\
c_i &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_{i+1}^n}{4h} - \frac{U_{i-1}^n}{4h}, & i = 1(1)7 \\
d_i &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_i^n}{4h} + \frac{\beta}{4h}, & i = 1(1)7 \\
e &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h}, \\
f &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}, \\
g &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a & b_1 & c_1 & d_1 & a & & & & & & \\ & a & b_2 & c_2 & d_2 & a & & & & & \\ & & a & b_3 & c_3 & d_3 & a & & & & \\ & & & a & b_4 & c_4 & d_4 & a & & & \\ & & & & a & b_5 & c_5 & d_5 & a & & \\ & & & & & a & b_6 & c_6 & d_6 & a & \\ & & & & & & a & b_7 & c_7 & d_7 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{-1}^{n+1} \\ U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \\ U_6^{n+1} \\ U_7^{n+1} \\ U_8^{n+1} \\ U_9^{n+1} \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{U^{n+1}} \\
 & = \begin{bmatrix} a & e & f & g & a & & & & & & \\ & a & e & f & g & a & & & & & \\ & & a & e & f & g & a & & & & \\ & & & a & e & f & g & a & & & \\ & & & & a & e & f & g & a & & \\ & & & & & a & e & f & g & a & \\ & & & & & & a & e & f & g & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{-1}^n \\ U_0^n \\ U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \\ U_9^n \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{U^n}
 \end{aligned}$$

şeklinde matris formunda yazılır. Burada $N = 8$ için 7–denklem ve 11–bilinmeyenden oluşan bir cebirsel denklem sistem elde edilir. Ancak genel sistem için $(N - 1)$ denklem ve $(N + 3)$ bilinmeyen vardır. Bu cebirsel denklem sisteminin bir tek çözüme sahip olması için (3.1.1) problemi ile birlikte verilen sınır şartları kullanılarak U_{-1} , U_0 , U_N ve U_{N+1} bilinmeyenleri sistemden yok edilecektir. Bu amaçla, $N = 8$ için U_0 ve genel sistem için de U_0 , $N = 8$ için U_8 ve genel sistem için U_N) bilinmeyenleri problemle birlikte verilen türevsiz sınır şartları kullanılarak, $N = 8$ için U_{-1} ve genel sistem içinde U_{-1} , ve $N = 8$ için U_9 ve genel sistem için U_{N+1} bilinmeyenleri problemle birlikte verilen türevli sınır şartları yardımıyla yok edilecektir. Şimdi, $U_{xx}(0, t) = U_{xx}(l, t) = 0$ olarak kullanılırsa

$j = 0$ için

$$\frac{U_1^n - 2U_0^n + U_{-1}^n}{h^2} = 0 \Rightarrow U_{-1}^n = 2U_0^n - U_1^n \Rightarrow U_{-1}^n = -U_1^n$$

ve $j = 8$ için

$$\frac{U_9^n - 2U_8^n + U_7^n}{h^2} = 0 \Rightarrow U_9^n = 2U_8^n - U_7^n \Rightarrow U_9^n = -U_7^n$$

elde edilir. Bu bilinmeyen değerleri genel sistemin ilk ve son denklemlerinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - a)U_1^{n+1} + d_1U_2^{n+1} + gU_3^{n+1} &= (f - a)U_1^n + gU_2^n + aU_3^n \\ b_2U_1^{n+1} + c_2U_2^{n+1} + d_2U_3^{n+1} + aU_4^{n+1} &= eU_1^n + fU_2^n + gU_3^n + aU_4^n \\ &\vdots \\ aU_4^{n+1} + b_6U_5^{n+1} + c_6U_6^{n+1} + d_6U_7^{n+1} &= aU_4^n + eU_5^n + fU_6^n + gU_7^n \\ aU_5^{n+1} + b_7U_6^{n+1} + (c_7 - g)U_7^{n+1} &= aU_5^n + eU_6^n + (f - a)U_7^n \end{aligned} \right\}$$

şeklinde verilen $N = 8$ için 7×7 tipinde (genel olarak ise $(N - 1) \times (N - 1)$ tipinde) veya

$$\begin{bmatrix} c_1 - a & d_1 & g & & & & \\ & b_2 & c_2 & d_2 & g & & \\ & a & b_3 & c_3 & d_3 & g & \\ & & a & b_4 & c_4 & d_4 & g \\ & & & a & b_5 & c_5 & d_5 & g \\ & & & & a & b_6 & c_6 & d_6 \\ & & & & & a & b_7 & c_7 - g \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \\ U_6^{n+1} \\ U_7^{n+1} \end{bmatrix}}_{U^{n+1}} = \begin{bmatrix} f - a & g & a & & & & \\ & e & f & g & a & & \\ & a & e & f & g & a & \\ & & a & e & f & g & a \\ & & & a & e & f & g & a \\ & & & & a & e & f & g \\ & & & & & a & e & f - a \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \end{bmatrix}}_{U^n} \quad (4.1.2)$$

matris formunda çözülebilir bir iteratif denklem sistemi elde edilir. Bu iteratif denklem sisteminden istenilen herhangi bir $t = t_{son}$ zamanında $U^{n+1} = (U_0^{n+1}, U_1^{n+1}, \dots, U_{N-1}^{n+1}, U_N^{n+1})$ değerlerinin elde edilebilmesi için ilk önce $t = 0$ zamanındaki U^0 değerlerine ihtiyaç duyulur. Bu değerler problemle birlikte verilen

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç şartı kullanılarak elde edilir. Böylece bu iteratif denklem sistemi kullanılarak istenilen herhangi bir t_{son} zamanında düğüm noktalarında bilinmeyen U 'lara karşılık gelen yaklaşık U_N değerleri bulunmuş olur.

4.1.1 Nümerik Çözümler

Bu kısımda, (4.1.2) ile verilen sistemin Bölüm 3'de verilen model problemlere uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçların, literatürde farklı çalışmalardaki sonuçlar hata normlarıyla birlikte karşılaştırılması ve h, k nın farklı seçimleri için elde edilen noktasal değerler çizelgeler halinde sunuldu. Bu çalışmada model problemler için referans çözüm (tam çözüm), Ref. [28], Ref. [29] ve Ref. [30] çalışmaları ile karşılaştırma yapılırken bu referans çalışmalarda verildiği gibi bölüntü sayısı $N = 160$ ve Ref. [27] çalışması ile karşılaştırılırken ise bu referans çalışmadaki gibi bölüntü sayısı $N = 320$ alınarak hesaplandı. Ayrıca problemin

Çizelge 4.1 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

h	L_2		L_∞	
	[28]	SSFY	[28]	SSFY
0.25	$3.797152e-5$		$7.017218e-5$	
0.125	$8.865744e-6$	$8.865732e-6$	$1.630156e-5$	$1.747596e-5$
0.0625	$2.169204e-6$	$2.169197e-6$	$3.969264e-6$	$4.254175e-6$
0.03125	$5.238859e-7$	$5.238834e-7$	$1.026106e-7$	$1.026084e-6$

Çizelge 4.2 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

h	L_2		L_∞	
	[28]	SSFY	[28]	SSFY
0.25	$1.240202e-4$		$1.862903e-4$	
0.125	$2.872177e-5$	$2.872120e-5$	$4.245518e-5$	$4.245585e-5$
0.0625	$6.895192e-6$	$6.895068e-6$	$1.026083e-5$	$1.026101e-5$
0.03125	$1.659468e-6$	$1.659439e-6$	$2.470578e-6$	$2.470625e-6$

fiziksel davranışını görmek amacıyla, problemde bulunan α parametresinin 0.5 ve 5 değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ zamanlarındaki grafikleri sunuldu.

Çizelge 4.1'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve h nın farklı değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden h konum adım uzunluğu küçüldükçe hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile de oldukça iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.2'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve h nın farklı değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile kıyaslaması verildi. Çizelgeden $\alpha = 5$ için de $\alpha = 0.5$ de olduğu gibi h konum adım uzunluğu küçüldükçe hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü kolayca görülmektedir. Yine çizelgeden standart sonlu fark şeması kullanılarak elde edilen hata normları Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içindedir.

Çizelge 4.3'de model Problem 1'in $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/8, 1/16, 1/32$ değerleri için L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28]

Çizelge 4.3 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

t	$h = \frac{1}{8}$		$h = \frac{1}{16}$		$h = \frac{1}{32}$	
	SSFY	[28]	SSFY	[28]	SSFY	[28]
2	$4.700274e-6$	$4.700358e-6$	$1.146071e-6$	$1.146090e-6$	$2.765454e-7$	$2.765485e-7$
4	$8.711315e-6$	$8.711500e-6$	$2.123355e-6$	$2.123405e-6$	$5.123137e-7$	$5.123299e-7$
6	$1.212537e-5$	$1.212563e-5$	$2.954375e-6$	$2.954436e-6$	$7.127485e-7$	$7.127612e-7$
8	$1.502330e-5$	$1.502362e-5$	$3.658873e-6$	$3.658954e-6$	$8.826083e-7$	$8.826300e-7$
10	$1.747596e-5$	$1.630156e-5$	$4.254175e-6$	$3.969264e-6$	$1.026084e-6$	$1.026106e-7$

Çizelge 4.4 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

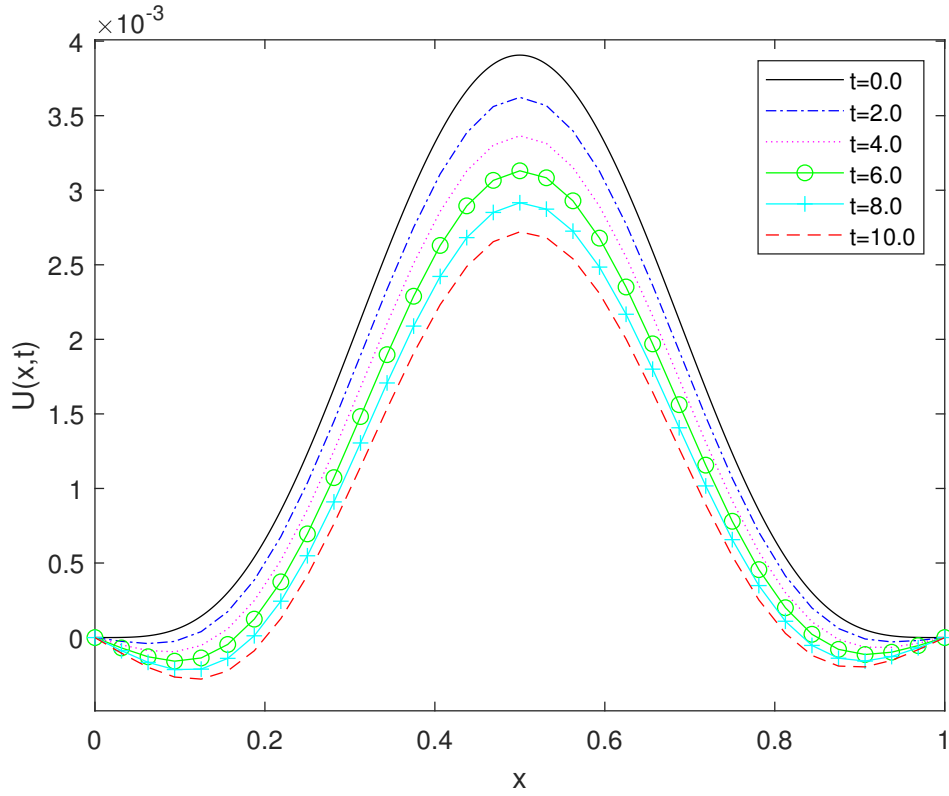
t	$h = \frac{1}{8}$		$h = \frac{1}{16}$		$h = \frac{1}{32}$	
	SSFY	[28]	SSFY	[28]	SSFY	[28]
2	$2.631573e-5$	$2.633269e-5$	$6.385814e-6$	$6.389985e-6$	$1.539062e-6$	$1.540068e-6$
4	$3.304958e-5$	$3.305609e-5$	$7.976878e-6$	$7.978488e-6$	$1.919988e-6$	$1.920378e-6$
6	$3.656364e-5$	$3.656422e-5$	$8.803152e-6$	$8.803290e-6$	$2.117585e-6$	$2.117618e-6$
8	$3.969533e-5$	$3.969443e-5$	$9.565118e-6$	$9.564878e-6$	$2.301363e-6$	$2.301304e-6$
10	$4.245585e-5$	$4.245518e-5$	$1.026102e-5$	$1.026083e-6$	$2.470625e-6$	$2.470578e-6$

tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden h konum adım uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve tüm t zamanlarında elde edilen L_∞ hata normlarının Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.4'de model Problem 1'in $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/8, 1/16, 1/32$ değerleri için hesaplanan L_∞ hata normları sunuldu. Çizelgeden Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile bu yöntemle elde edilen hata normlarının verilen tüm t zamanları için kayda değer ölçüde yakın olduğu açıktır. Ayrıca $\alpha = 0.5$ için olduğu gibi yine h konum adım uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının önemli ölçüde azaldığı bu çizelgeden görüldü.

Şekil 4.1'de model Problem 1'in $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözümlerinin grafikleri verildi.

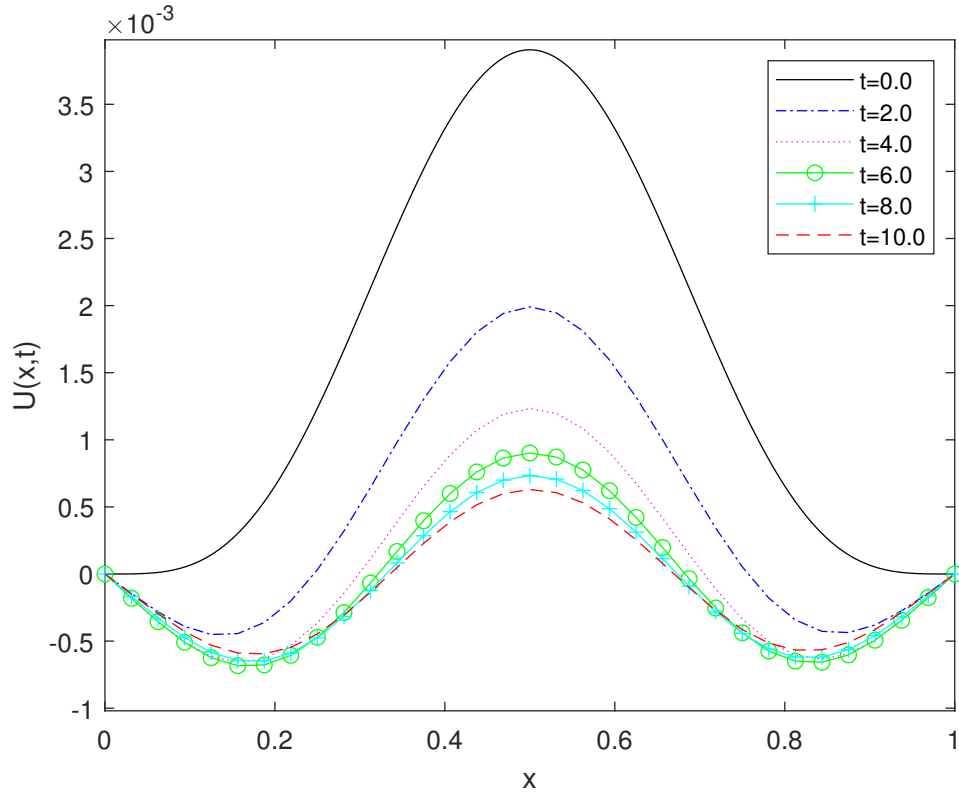
Şekil 4.2'de model Problem 1'in $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'den, ele alınan denklemdaki αU_{xx} dissipatif teriminin etkisi yüzünden zaman ilerledikçe nümerik çözümün genliğinin gittikçe azaldığı kolayca görülmektedir.



Şekil 4.1 : Model Problem 1'in SSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri

Çizelge 4.5 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

Nümerik Çözüm					
x	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	Referans Çözüm
0.1	-0.0002708307	-0.0002720435	-0.0002723199	-0.0002723876	-0.0002724044
0.2	-0.0000111177	-0.0000117267	-0.0000118363	-0.0000118613	-0.0000118674
0.3	0.0009861301	0.0009886999	0.0009893671	0.0009895352	0.0009895773
0.4	0.0021645865	0.0021710546	0.0021726621	0.0021730632	0.0021731634
0.5	0.0027110706	0.0027194394	0.0027214991	0.0027220119	0.0027221400
0.6	0.0022435880	0.0022505548	0.0022522694	0.0022526963	0.0022528029
0.7	0.0011105546	0.0011139184	0.0011147605	0.0011149710	0.0011150237
0.8	0.0001087497	0.0001089198	0.0001089897	0.0001090086	0.0001090135
0.9	-0.0001993007	-0.0002000305	-0.0002001891	-0.0002002275	-0.0002002371
L_2	$5.628953e-06$	$1.377923e-06$	$3.272763e-07$	$6.541643e-08$	
L_∞	$1.106938e-05$	$2.700648e-06$	$6.409067e-07$	$1.280912e-07$	



Şekil 4.2 : Model Problem 1'in SSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri

Çizelge 4.6 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

x	Nümerik Çözüm				Referans Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.1	-0.0004338697	-0.0004486800	-0.0004523046	-0.0004532070	-0.0004534324
0.2	-0.0005585820	-0.0005778236	-0.0005825041	-0.0005836668	-0.0005839570
0.3	-0.0001970938	-0.0002040867	-0.0002057830	-0.0002062041	-0.0002063092
0.4	0.0003459492	0.0003573607	0.0003601568	0.0003608521	0.0003610257
0.5	0.0006057260	0.0006260159	0.0006309815	0.0006322162	0.0006325244
0.6	0.0003672272	0.0003796469	0.0003826877	0.0003834438	0.0003836326
0.7	-0.0001655393	-0.0001709629	-0.0001722745	-0.0001725998	-0.0001726810
0.8	-0.0005310606	-0.0005487978	-0.0005531022	-0.0005541708	-0.0005544374
0.9	-0.0004193278	-0.0004332042	-0.0004365887	-0.0004374306	-0.0004376409
L_2	$1.805258e-05$	$4.372270e-06$	$1.036267e-06$	$2.070215e-07$	
L_∞	$2.679844e-05$	$6.508547e-06$	$1.542879e-06$	$3.082382e-07$	

Çizelge 4.7 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

Nümerik Çözüm				
x	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	Referans Çözüm
0.1	-0.0002723205	-0.0002723199	-0.0002723199	-0.0002724044
0.2	-0.0000118374	-0.0000118363	-0.0000118363	-0.0000118674
0.3	0.0009893657	0.0009893671	0.0009893671	0.0009895773
0.4	0.0021726604	0.0021726621	0.0021726621	0.0021731634
0.5	0.0027214974	0.0027214991	0.0027214991	0.0027221400
0.6	0.0022522678	0.0022522694	0.0022522694	0.0022528029
0.7	0.0011147592	0.0011147605	0.0011147605	0.0011150237
0.8	0.0001089887	0.0001089897	0.0001089897	0.0001090135
0.9	-0.0002001896	-0.0002001891	-0.0002001891	-0.0002002371
L_2	$3.272825e-07$	$3.272763e-07$	$3.273064e-07$	
L_∞	$6.409169e-07$	$6.409067e-07$	$6.409580e-07$	

Çizelge 4.8 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ zamanında SSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

Nümerik Çözüm				
x	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	Referans Çözüm
0.1	-0.0004523100	-0.0004523046	-0.0004523045	-0.0004534324
0.2	-0.0005825150	-0.0005825041	-0.0005825040	-0.0005839570
0.3	-0.0002057988	-0.0002057830	-0.0002057828	-0.0002063092
0.4	0.0003601375	0.0003601568	0.0003601570	0.0003610257
0.5	0.0006309611	0.0006309815	0.0006309818	0.0006325244
0.6	0.0003826687	0.0003826877	0.0003826879	0.0003836326
0.7	-0.0001722898	-0.0001722745	-0.0001722743	-0.0001726810
0.8	-0.0005531126	-0.0005531022	-0.0005531021	-0.0005544374
0.9	-0.0004365939	-0.0004365887	-0.0004365886	-0.0004376409
L_2	$1.036273e-06$	$1.036267e-06$	$1.036266e-06$	
L_∞	$1.542866e-06$	$1.542875e-06$	$1.542854e-06$	

Çizelge 4.9 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [29] ile karşılaştırılması.

N	[29]				SSFY			
	L_∞	Mertebe	L_2	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_2	Mertebe
10	$7.03e-4$	—	$4.58e-4$	—	$2.99e-6$		$1.59e-6$	
20	$2.04e-4$	1.7865	$1.34e-4$	1.7787	$7.30e-7$	2.0342	$3.91e-7$	2.0238
40	$5.23e-5$	1.9613	$3.42e-5$	1.9652	$1.73e-7$	2.0771	$9.30e-8$	2.0719
80	$1.08e-5$	2.2746	$7.08e-6$	2.2739	$3.46e-8$	2.3219	$1.86e-8$	2.3219

Çizelge 4.10 : Model Problem 1'in SSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/320$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının [27] ile karşılaştırılması.

	$h = \frac{1}{5}$	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{40}$
[27]C-N	$8.5176e-4$	$2.0083e-4$	$5.1688e-5$	$1.4486e-5$
[27]L-S	$9.6529e-4$	$1.9023e-4$	$3.9467e-5$	$4.2694e-5$
SSFY	$1.0439e-5$	$2.9964e-6$	$7.3871e-7$	$1.8234e-7$

Çizelge 4.5'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için elde edilen nümerik çözümün bazı noktasal değerleriyle, hata normları referans çözümün noktasal değerleri verildi. Bu çizelgede zaman yönündeki adım uzunluğu $k = 0.01$ için N bölüntü sayısı arttıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve elde edilen sayısal sonuçların referans alınan analitik sonuçlara oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.6'da benzer şekilde bu defa $\alpha = 5$ için model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri alınarak nümerik çözüm ve referans alınan tam çözümün noktasal değerleri verildi. Yine bu çizelgeden de zaman yönündeki adım uzunluğu $k = 0.01$ sabit olup N bölüntü sayısı arttıkça hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve elde edilen sayısal sonuçların referans alınan analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.7'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden konum yönündeki adım sayısı $N = 40$ sabit olup zaman yönündeki adım uzunluğu k küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının uyum içinde kaldığı görülmektedir. Çizelge 4.8'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında SSFY ile Rubin-Graves tipi lineerleştirme ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden

Çizelge 4.11 : Model Problem 2'nin SSFY ile $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [30] ile karşılaştırılması.

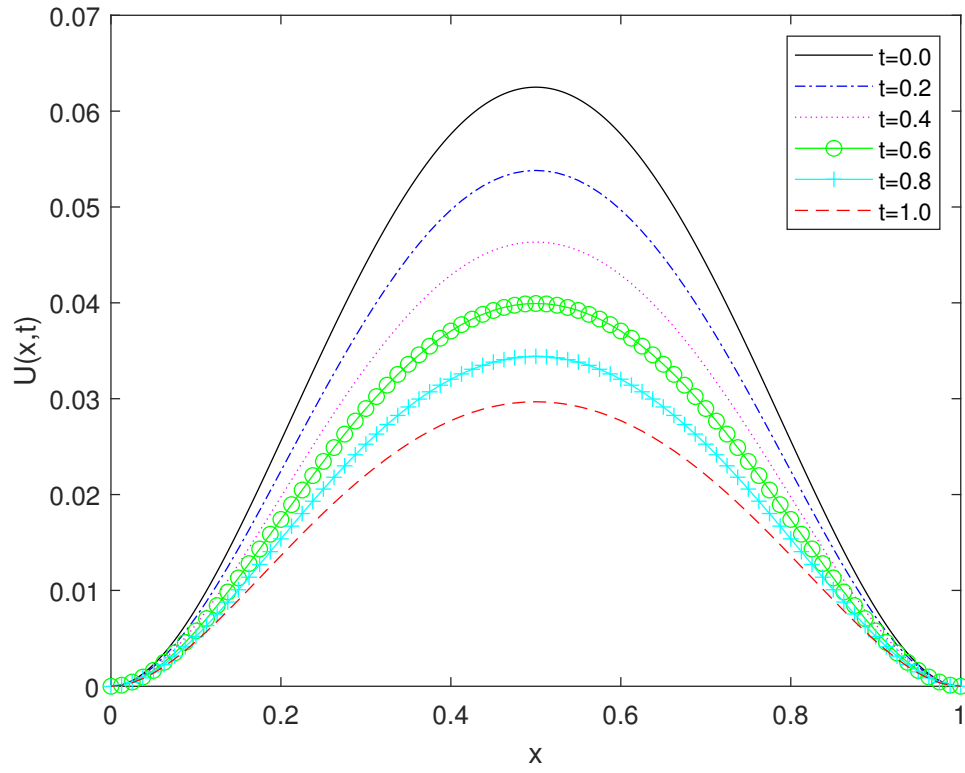
h	[30]		SSFY	
	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
1/10	$6.6428e-4$	—	$7.5580e-4$	
1/20	$1.7898e-4$	1.9265	$1.8435e-4$	2.0356
1/40	$4.4720e-5$	2.0006	$4.4885e-5$	2.0381
1/80	$1.0929e-5$	2.0228	$1.0246e-5$	2.1312

konum yönündeki adım sayısı $N = 40$ sabit olup zaman yönündeki adım uzunluğu k küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarında önemli ölçüde bir değişiklik olmadığı görülmektedir.

Çizelge 4.9'da SSFY ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte yakınsaklık mertebeleri Ref. [29]'da verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden SSFY ile bulunan L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [29]'da verilenlerden oldukça iyi olduğu, yakınsaklık mertebelerinin ise teorikte beklendiği gibi bir davranış sergilediği görülmektedir. Çizelgeden ayrıca N konum yönündeki bölüntü sayısı arttıkça hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.10'da hesaplanan L_∞ hata normları Ref. [27]'de verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden SSFY ile bulunan L_∞ hata normlarının Ref. [27]'de verilenlerden oldukça iyi olduğu görülmektedir. Çizelgeden ayrıca h konum uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Bu çizelgedeki hesaplamalarda referans çözüm olarak Ref. [27]'de olduğu gibi $h = 1/320$, $k = 1/320$ değerleri esas alınmıştır.

Çizelge 4.11'de Problem 2'nin SSFY ile hesaplanan L_∞ hata normları ile birlikte yakınsaklık mertebeleri Ref. [30]'da verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden SSFY ile bulunan L_∞ hata normlarının Ref. [30]'da verilenlerden oldukça iyi olduğu, yakınsaklık mertebelerinin ise teorikte beklendiği gibi bir davranış sergilediği görülmektedir. Çizelgeden ayrıca N konum yönündeki bölüntü sayısı arttıkça L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Şekil 4.3'de model Problem 2' nin $h = 0.0125$, $k = 0.001$ ve $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$ değerleri için $t = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.3'den, ele alınan denklemdeki αU_{xx} dissipatif teriminin etkisi yüzünden zaman ilerledikçe nümerik çözümün genliğinin gittikçe azaldığı kolayca görülmektedir.

4.2 Rosenau-Burgers Denkleminin Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı (KSFY)



Şekil 4.3 : Model Problem 2'nin SSFY ile $h = 0.0125$, $k = 0.01$ ve $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri

Şimdi

$$U_t + U_{xxxx} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0) &= U_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \\ U(0, t) &= U(l, t) = 0 \\ U_{xx}(0, t) &= U_{xx}(l, t) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, T]$$

ile verilen Rosenau-Burgers probleminin yaklaşık çözümü korunumlu sonlu fark yaklaşımı kullanılarak elde edildi. Bunun için denklemden aşağıda verilen ileri fark ve Crank-Nicolson yaklaşımı yazılırsa

$$(U_j^n)_t = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k}, \quad U_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2}$$

aşağıda verilen iteratif

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{(U_{xx\bar{x}\bar{x}})^{n+1}_j - (U_{xx\bar{x}\bar{x}})^n_j}{k} - \alpha \frac{(U_{x\bar{x}})^{n+1}_j + (U_{x\bar{x}})^n_j}{2} \\ & + \beta \frac{(U_{\hat{x}})^{n+1}_j + (U_{\hat{x}})^n_j}{2} + \frac{(UU_x)^{n+1}_j + (UU_x)^n_j}{2} = 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

Rosenau-Burgers denkleminde (4.1.1) ile verilen lineerleştirme kullanılırsa, lineer olmayan terim ortadan kalkar ve aşağıdaki lineer iteratif denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{(U_{xx\bar{x}\bar{x}})^{n+1}_j - (U_{xx\bar{x}\bar{x}})^n_j}{k} - \alpha \frac{(U_{x\bar{x}})^{n+1}_j + (U_{x\bar{x}})^n_j}{2} \\ & + \beta \frac{(U_{\hat{x}})^{n+1}_j + (U_{\hat{x}})^n_j}{2} + \frac{U_j^{n+1} (U_x)^n_j + U_j^n (U_x)^{n+1}_j}{2} = 0 \end{aligned}$$

Şimdi yukarıda verilen denklemlerindeki

$$\frac{(U_{xx\bar{x}\bar{x}})^{n+1}_j - (U_{xx\bar{x}\bar{x}})^n_j}{k}$$

terimi yerine

$$\frac{(U_{xx\bar{x}\bar{x}})^{n+1}_j - (U_{xx\bar{x}\bar{x}})^n_j}{k} = \frac{\frac{U_{j+2}^{n+1} - 4U_{j+1}^{n+1} + 6U_j^{n+1} - 4U_{j-1}^{n+1} + U_{j-2}^{n+1}}{h^4} + \frac{U_{j+2}^n - 4U_{j+1}^n + 6U_j^n - 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n}{h^4}}{k}$$

ifadesi,

$$\alpha \frac{(U_{x\bar{x}})^{n+1}_j + (U_{x\bar{x}})^n_j}{2}$$

terimi yerine

$$\alpha \frac{(U_{x\bar{x}})^{n+1}_j + (U_{x\bar{x}})^n_j}{2} = \alpha \frac{\frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}}{2}$$

ifadesi ve son olarak

$$\frac{U_j^{n+1} (U_x)_j^n + U_j^n (U_x)_j^{n+1}}{2}$$

terimi yerine

$$\frac{U_j^{n+1} (U_x)_j^n + U_j^n (U_x)_j^{n+1}}{2} = \frac{U_j^{n+1} \left(\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} \right) + U_j^n \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h} \right)}{2}$$

ifadesi yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, aşağıdaki iteratif denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} \\ & + \frac{U_{j+2}^{n+1} - 4U_{j+1}^{n+1} + 6U_j^{n+1} - 4U_{j-1}^{n+1} + U_{j-2}^{n+1} - U_{j+2}^n - 4U_{j+1}^n + 6U_j^n - 4U_{j-1}^n + U_{j-2}^n}{kh^4} \\ & = -\alpha \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2h^2} \\ & + \beta \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} + \frac{U_j^{n+1} U_{j+1}^n - 2U_j^{n+1} U_j^n + U_j^n U_{j+1}^{n+1}}{2h} = 0 \end{aligned}$$

Şimdi bu sistemin daha sade bir gösterimi için, zaman adım uzunluğu Δt yerine k ve konum adım uzunluğu Δx yerine h notasyonu kullanılır ve $(n+1)$. zaman adımındaki terimler sol tarafta ve n . zaman adımındaki terimler sağ tarafta toplanırsa $j = 1(1)(N-1)$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{kh^4} U_{j-2}^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} \right) U_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n}{2h} \right) U_j^{n+1} \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_j^n}{2h} \right) U_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{kh^4} U_{j+2}^{n+1} = \frac{1}{kh^4} U_{j-2}^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h} \right) U_{j-1}^n \\ & + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2} \right) U_j^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h} \right) U_{j+1}^n + \frac{1}{kh^4} U_{j+2}^n \end{aligned}$$

biçiminde iteratif denklem sistemi elde edilir.

Bu iteratif denklem sisteminin program algoritmasının okuyucu tarafından daha rahat anlaşılabilmesi için bölüntü sayısı özel olarak $N = 8$ seçildi. Bu kapsamda $j = 1(1)7$ değerleri için nümerik şema sırası ile

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{kh^4} U_{-1}^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} \right) U_0^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_2^n - 2U_1^n}{2h} \right) U_1^{n+1} \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_1^n}{2h} \right) U_2^{n+1} + \frac{1}{kh^4} U_3^{n+1} \\ & = \frac{1}{kh^4} U_{-1}^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h} \right) U_0^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2} \right) U_1^n \\ & + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h} \right) U_2^n + \frac{1}{kh^4} U_3^n \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4}U_0^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2}\right)U_1^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_3^n - 2U_2^n}{2h}\right)U_2^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_2^n}{2h}\right)U_3^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_4^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4}U_0^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)U_1^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_2^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h}\right)U_3^n + \frac{1}{kh^4}U_4^n
\end{aligned}$$

$j = 3$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4}U_1^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2}\right)U_2^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_4^n - 2U_3^n}{2h}\right)U_3^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_3^n}{2h}\right)U_4^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_5^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4}U_1^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)U_2^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_3^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h}\right)U_4^n + \frac{1}{kh^4}U_5^n
\end{aligned}$$

$j = 4$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4}U_2^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2}\right)U_3^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_5^n - 2U_4^n}{2h}\right)U_4^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_4^n}{2h}\right)U_5^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_6^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4}U_2^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)U_3^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_4^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h}\right)U_5^n + \frac{1}{kh^4}U_6^n
\end{aligned}$$

$j = 5$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4}U_3^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2}\right)U_4^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_6^n - 2U_5^n}{2h}\right)U_5^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_5^n}{2h}\right)U_6^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_7^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4}U_3^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)U_4^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_5^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h}\right)U_6^n + \frac{1}{kh^4}U_7^n
\end{aligned}$$

$j = 6$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4}U_4^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2}\right)U_5^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_7^n - 2U_6^n}{2h}\right)U_6^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_6^n}{2h}\right)U_8^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_9^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4}U_4^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)U_5^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_6^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h}\right)U_7^n + \frac{1}{kh^4}U_8^n
\end{aligned}$$

$j = 7$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4}U_5^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2}\right)U_6^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_8^n - 2U_7^n}{2h}\right)U_7^{n+1} \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_7^n}{2h}\right)U_8^{n+1} + \frac{1}{kh^4}U_9^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4}U_5^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h}\right)U_6^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2}\right)U_7^n \\
& + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h}\right)U_8^n + \frac{1}{kh^4}U_9^n
\end{aligned}$$

şeklinde yazıldı. Elde edilen bu denklem sistemi

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{kh^4} \\
b_i &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{U_i^n}{4h}, \quad i = 1(1)7 \\
c_i &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n}{2h}, \quad i = 1(1)7 \\
d_i &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{U_i^n}{2h} \\
e &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{2h} \\
f &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{\alpha}{h^2} \\
g &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{2h}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a & b_1 & c_1 & d_1 & a & & & & & & \\ & a & b_2 & c_2 & d_2 & a & & & & & \\ & & a & b_3 & c_3 & d_3 & a & & & & \\ & & & a & b_4 & c_4 & d_4 & a & & & \\ & & & & a & b_5 & c_5 & d_5 & a & & \\ & & & & & a & b_6 & c_6 & d_6 & a & \\ & & & & & & a & b_7 & c_7 & d_7 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{-1}^{n+1} \\ U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \\ U_6^{n+1} \\ U_7^{n+1} \\ U_8^{n+1} \\ U_9^{n+1} \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10cm}}_{U^{n+1}} \\
 & = \begin{bmatrix} a & e & f & g & a & & & & & & \\ & a & e & f & g & a & & & & & \\ & & a & e & f & g & a & & & & \\ & & & a & e & f & g & a & & & \\ & & & & a & e & f & g & a & & \\ & & & & & a & e & f & g & a & \\ & & & & & & a & e & f & g & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{-1}^n \\ U_0^n \\ U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ U_8^n \\ U_9^n \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10cm}}_{U^n}
 \end{aligned}$$

şeklinde matris formunda yazılır.

Burada $N = 8$ için 7 denklem ve 11 bilinmeyenden oluşan bir sistem elde edilir. Ancak genel sistem için $(N - 1)$ denklem ve $(N + 3)$ bilinmeyen vardır. Bu cebirsel denklem sistemlerinin tek olarak çözülebilmesi için (3.1.1) problemi ile birlikte verilen sınır şartları kullanılarak U_{-1} , U_0 , U_N ve U_{N+1} bilinmeyenleri sistemden yok edilecektir. Bu amaçla, $N = 8$ için U_0 ve genel sistem içinde (U_0) , $N = 8$ için U_8 ve genel sistem için (U_N) değerleri problemle birlikte verilen türevsiz sınır şartları kullanılarak, $N = 8$ için U_{-1} ve genel sistem içinde U_{-1} , ve $N = 8$ için U_9 ve genel sistem için U_{N+1} bilinmeyenleri de problemle birlikte verilen türevli sınır şartları yardımıyla yok edilecektir. Şimdi, $U_{xx}(0, t) = U_{xx}(l, t) = 0$ olarak kullanılırsa

$j = 0$ için

$$\frac{U_1^n - 2U_0^n + U_{-1}^n}{h^2} = 0 \Rightarrow U_{-1}^n = 2U_0^n - U_1^n \Rightarrow U_{-1}^n = -U_1^n$$

ve $j = 8$ için

$$\frac{U_9^n - 2U_8^n + U_7^n}{h^2} = 0 \Rightarrow U_9^n = 2U_8^n - U_7^n \Rightarrow U_9^n = -U_7^n$$

elde edilir. Bu bilinmeyen değerleri genel sistemin ilk ve son denklemlerinde yerlerine yazılır

$$\left. \begin{aligned} (c_1 - a)U_1^{n+1} + d_1U_2^{n+1} + aU_3^{n+1} &= (f - a)U_1^n + gU_2^n + aU_3^n \\ b_2U_1^{n+1} + c_2U_2^{n+1} + d_2U_3^{n+1} + aU_4^{n+1} &= eU_1^n + fU_2^n + gU_3^n + aU_4^n \\ &\vdots \\ aU_4^{n+1} + b_6U_5^{n+1} + c_6U_6^{n+1} + d_6U_7^{n+1} &= aU_4^n + eU_5^n + fU_6^n + gU_7^n \\ aU_5^{n+1} + b_7U_6^{n+1} + (c_7 - a)U_7^{n+1} &= aU_5^n + eU_6^n + (f - a)U_7^n \end{aligned} \right\}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} c_1 - a & d_1 & a & & & & \\ b_2 & c_2 & d_2 & a & & & \\ a & b_3 & c_3 & d_3 & a & & \\ & a & b_4 & c_4 & d_4 & a & \\ & & a & b_5 & c_5 & d_5 & a \\ & & & a & b_6 & c_6 & d_6 \\ & & & & a & b_7 & c_7 - a \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \\ U_6^{n+1} \\ U_7^{n+1} \end{bmatrix}}_{U^{n+1}} = \begin{bmatrix} f - a & g & a & & & & \\ e & f & g & a & & & \\ a & e & f & g & a & & \\ & a & e & f & g & a & \\ & & a & e & f & g & a \\ & & & a & e & f & g \\ & & & & a & e & f - a \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \end{bmatrix}}_{U^n} \quad (4.2.1)$$

şeklinde verilen $N = 8$ için 7×7 tipinde genel olarak ise $(N - 1) \times (N - 1)$ tipinde matris formunda çözülebilir bir iteratif denklem sistemi elde edilir. Bu iteratif denklem sisteminden istenilen herhangi bir $t = t_{son}$ zamanında U^{n+1} değerlerinin elde edilebilmesi için ilk önce $t = 0$ zamanındaki U^0 değerlerine ihtiyaç duyulur. Bu değerler problemle birlikte verilen Bu iteratif denklem sisteminden istenilen herhangi bir t zamanında U^{n+1} değerlerinin elde edilebilmesi için ilk önce $t = 0$ zamanındaki U^0 değerlerine ihtiyaç duyulur. Bu değerler problemle birlikte verilen

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç şartı kullanılarak elde edilir. Böylece bu iteratif denklem sistemi kullanılarak istenilen t_{son} zamanında düğüm noktalarına bilinmeyen U 'lara karşılık gelen yaklaşık U_N değerleri bulunmuş olur.

4.2.1 Nümerik Çözümler

Bu kısımda, (4.2.1) ile verilen sistemin Bölüm 3 'de verilen model problemlere uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçların, literatürde yine sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen farklı çalışmalardaki sonuçlarla hata normlarıyla birlikte karşılaştırılması ve h, k nın farklı seçimleri için elde edilen noktasal değerler çizelgeler halinde sunuldu. Bu çalışmada model problemler için referans çözüm (tam çözüm), Ref. [28], Ref. [29] ve Ref. [30] çalışmaları

Çizelge 4.12 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

h	L_2		L_∞	
	[28]	KSFY	[28]	KSFY
0.25	$3.797152e-5$		$7.017218e-5$	
0.125	$8.865744e-6$	$8.888425e-6$	$1.630156e-5$	$1.751518e-5$
0.0625	$2.169204e-6$	$2.190842e-6$	$3.969264e-6$	$4.290634e-6$
0.03125	$5.238859e-7$	$5.453479e-7$	$1.026106e-7$	$1.061868e-6$

Çizelge 4.13 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

h	L_2		L_∞	
	[28]	KSFY	[28]	KSFY
0.25	$1.240202e-4$		$1.862903e-4$	
0.125	$2.872177e-5$	$2.872138e-5$	$4.245518e-5$	$4.245775e-5$
0.0625	$6.895192e-6$	$6.895166e-6$	$1.026083e-5$	$1.026294e-5$
0.03125	$1.659468e-6$	$1.659518e-6$	$2.470578e-6$	$2.472544e-6$

ile karşılaştırma yapılırken bu referans çalışmalarda verildiği gibi bölüntü sayısı $N = 160$ ve Ref. [27] çalışması ile karşılaştırılırken ise bu referans çalışmadaki gibi bölüntü sayısı $N = 320$ alınarak hesaplandı. Ayrıca problemin fiziksel yapısını görmek amacıyla, problemde bulunan α parametresinin 0.5 ve 5 değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ zamanlarındaki grafikleri sunuldu.

Çizelge 4.12'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve h nın farklı değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım uzunluğu küçüldükçe hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.13'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve h nın farklı değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım uzunluğu küçüldükçe hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.14 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan maksimum L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

t	$h = \frac{1}{8}$		$h = \frac{1}{16}$		$h = \frac{1}{32}$	
	KSFY	[28]	KSFY	[28]	KSFY	[28]
2	$4.711719e-6$	$4.700358e-6$	$1.156890e-6$	$1.146090e-6$	$2.872162e-7$	$2.765485e-7$
4	$8.732082e-6$	$8.711500e-6$	$2.142902e-6$	$2.123405e-6$	$5.315676e-7$	$5.123299e-7$
6	$1.215369e-5$	$1.212563e-5$	$2.980919e-6$	$2.954436e-6$	$7.388641e-7$	$7.127612e-7$
8	$1.505769e-5$	$1.502362e-5$	$3.690979e-6$	$3.658954e-6$	$9.141581e-7$	$8.826300e-7$
10	$1.751518e-5$	$1.630156e-5$	$4.290634e-6$	$3.969264e-6$	$1.061868e-6$	$1.026106e-6$

Çizelge 4.15 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarına [28] ile karşılaştırılması.

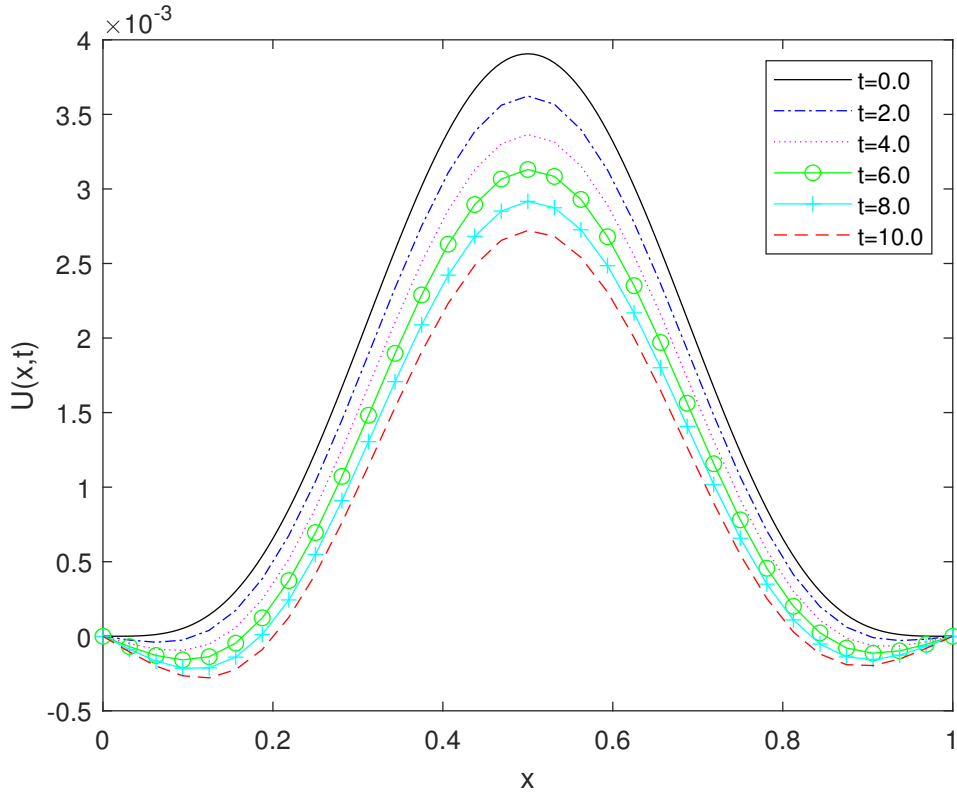
t	$h = \frac{1}{8}$		$h = \frac{1}{16}$		$h = \frac{1}{32}$	
	KSFY	[28]	KSFY	[28]	KSFY	[28]
2	$2.632083e-5$	$2.633269e-5$	$6.390469e-6$	$6.389985e-6$	$1.543607e-6$	$1.540068e-6$
4	$3.305431e-5$	$3.305609e-5$	$7.981129e-6$	$7.978488e-6$	$1.924114e-6$	$1.920378e-6$
6	$3.656727e-5$	$3.656422e-5$	$8.806461e-6$	$8.803290e-6$	$2.120804e-6$	$2.117618e-6$
8	$3.969798e-5$	$3.969443e-5$	$9.567637e-6$	$9.564878e-6$	$2.303836e-6$	$2.301304e-6$
10	$4.245775e-5$	$4.245518e-5$	$1.026294e-5$	$1.026083e-5$	$2.472544e-6$	$2.470578e-6$

Çizelge 4.14'de model Problem 1'in $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/8, 1/16, 1/32$ değerleri için L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.15'de model Problem 1'in $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında $\alpha = 5$, $\beta = 1, k = 0.1$ ve h nın farklı değerleri için L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Şekil 4.4'de model Problem 1'in $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri verildi.

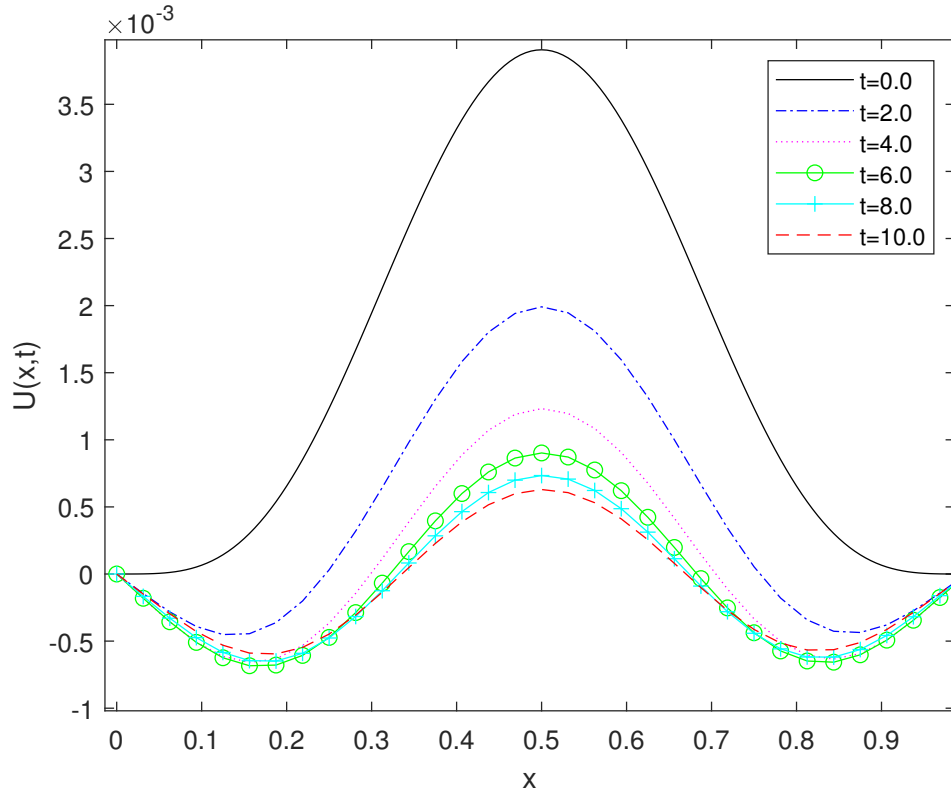
Şekil 4.5'de model Problem 1'in $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'den, ele alınan denklemdeki αU_{xx} dissipatif teriminin etkisi yüzünden zaman ilerledikçe nümerik çözümün yüksekliğinin gittikçe alçaldığı kolayca görülmektedir.



Şekil 4.4 : Model Problem 1'in KSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri

Çizelge 4.16 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

x	Nümerik Çözüm				Referans Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.1	-0.0002708354	-0.0002720480	-0.0002723244	-0.0002723920	-0.0002723986
0.2	-0.0000111246	-0.0000117333	-0.0000118428	-0.0000118677	-0.0000118541
0.3	0.0009861247	0.0009886949	0.0009893621	0.0009895303	0.0009896002
0.4	0.0021645857	0.0021710541	0.0021726616	0.0021730627	0.0021731964
0.5	0.0027110760	0.0027194449	0.0027215047	0.0027220175	0.0027221812
0.6	0.0022435988	0.0022505657	0.0022522803	0.0022527072	0.0022528477
0.7	0.0011105683	0.0011139320	0.0011147742	0.0011149847	0.0011150658
0.8	0.0001087624	0.0001089323	0.0001090022	0.0001090211	0.0001090464
0.9	-0.0001992931	-0.0002000229	-0.0002001816	-0.0002002200	-0.0002002189
L_2	$5.650041e-06$	$1.399173e-06$	$3.487239e-07$	$8.756972e-08$	
L_∞	$1.110518e-05$	$2.736279e-06$	$6.764946e-07$	$1.636638e-07$	



Şekil 4.5 : Model Problem 1'in KSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri

Çizelge 4.17 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

x	Nümerik Çözüm				Referans Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.1	-0.0004338772	-0.0004486875	-0.0004523122	-0.0004532146	-0.0004534394
0.2	-0.0005585942	-0.0005778360	-0.0005825165	-0.0005836791	-0.0005839683
0.3	-0.0001971063	-0.0002040993	-0.0002057956	-0.0002062168	-0.0002063204
0.4	0.0003459410	0.0003573525	0.0003601485	0.0003608439	0.0003610193
0.5	0.0006057252	0.0006260151	0.0006309808	0.0006322154	0.0006325255
0.6	0.0003672339	0.0003796537	0.0003826945	0.0003834506	0.0003836412
0.7	-0.0001655279	-0.0001709515	-0.0001722631	-0.0001725884	-0.0001726681
0.8	-0.0005310492	-0.0005487863	-0.0005530906	-0.0005541592	-0.0005544248
0.9	-0.0004193207	-0.0004331970	-0.0004365815	-0.0004374234	-0.0004376331
L_2	$1.805265e-05$	$4.372343e-06$	$1.036340e-06$	$2.070975e-07$	
L_∞	$2.680036e-05$	$6.510460e-06$	$1.544792e-06$	$3.101514e-07$	

Çizelge 4.18 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

Nümerik Çözüm				
x	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	Referans Çözüm
0.1	-0.0002723652	-0.0002723244	-0.0002723203	-0.0002723986
0.2	-0.0000119020	-0.0000118428	-0.0000118369	-0.0000118541
0.3	0.0009893159	0.0009893621	0.0009893666	0.0009896002
0.4	0.0021726560	0.0021726616	0.0021726620	0.0021731964
0.5	0.0027215532	0.0027215047	0.0027214997	0.0027221812
0.6	0.0022523773	0.0022522803	0.0022522705	0.0022528477
0.7	0.0011148958	0.0011147742	0.0011147619	0.0011150658
0.8	0.0001091139	0.0001090022	0.0001089909	0.0001090464
0.9	-0.0002001143	-0.0002001816	-0.0002001884	-0.0002002189
L_2	$3.487878e-07$	$3.487239e-07$	$3.487188e-07$	
L_∞	$6.766083e-07$	$6.764946e-07$	$6.764845e-07$	

Çizelge 4.19 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

Nümerik Çözüm				
x	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	Referans Çözüm
0.1	-0.0004523860	-0.0004523122	-0.0004523053	-0.0004534394
0.2	-0.0005826386	-0.0005825165	-0.0005825052	-0.0005839683
0.3	-0.0002059252	-0.0002057956	-0.0002057841	-0.0002063204
0.4	0.0003600550	0.0003601485	0.0003601562	0.0003610193
0.5	0.0006309532	0.0006309808	0.0006309817	0.0006325255
0.6	0.0003827363	0.0003826945	0.0003826886	0.0003836412
0.7	-0.0001721756	-0.0001722631	-0.0001722732	-0.0001726681
0.8	-0.0005529974	-0.0005530906	-0.0005531009	-0.0005544248
0.9	-0.0004365222	-0.0004365815	-0.0004365879	-0.0004376331
L_2	$1.036349e-06$	$1.036340e-06$	$1.036340e-06$	
L_∞	$1.544784e-06$	$1.544792e-06$	$1.544805e-06$	

Çizelge 4.20 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [29] ile karşılaştırılması.

N	[29]				KSFY			
	L_∞	Mertebe	L_2	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_2	Mertebe
10	$7.03e-4$	—	$4.58e-4$	—	$2.99e-6$		$1.60e-6$	
20	$2.04e-4$	1.7865	$1.34e-4$	1.7787	$7.35e-7$	2.0243	$3.95e-7$	2.0181
40	$5.23e-5$	1.9613	$3.42e-5$	1.9652	$1.78e-7$	2.0459	$9.65e-8$	2.0333
80	$1.08e-5$	2.2746	$7.08e-6$	2.2739	$3.99e-8$	2.1574	$2.21e-8$	2.1265

Çizelge 4.21 : Model Problem 1'in KSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/320$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının [27] ile karşılaştırılması.

	$h = \frac{1}{5}$	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{40}$
[27]C-N	$8.5176e-4$	$2.0083e-4$	$5.1688e-5$	$1.4486e-5$
[27]L-S	$9.6529e-4$	$1.9023e-4$	$3.9467e-5$	$4.2694e-5$
KSFY	$1.0431e-5$	$2.9948e-6$	$7.3700e-7$	$1.8061e-7$

Çizelge 4.16'da model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden zaman yönündeki adım uzunluğu $k = 0.01$ sabit olup N bölüntü sayısı arttıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve elde edilen sayısal sonuçların referans alınan analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.17'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Yine bu çizelgeden de zaman yönündeki adım uzunluğu $k = 0.01$ sabit olup N bölüntü sayısı arttıkça hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve elde edilen sayısal sonuçların referans alınan analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.18'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden konum yönündeki adım sayısı $N = 40$ sabit olup zaman yönündeki adım uzunluğu k küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının uyum içinde kaldığı görülmektedir. Çizelge 4.19'da model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden konum yönündeki adım sayısı $N = 40$ sabit olup zaman yönündeki adım uzunluğu k küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının uyum içinde kaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.22 : Model Problem 2'nin KSFY ile $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [30] ile karşılaştırılması.

h	[30]		KSFY	
	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
1/10	$6.6428e-4$	—	$7.5587e-4$	
1/20	$1.7898e-4$	1.9265	$1.8441e-4$	2.0352
1/40	$4.4720e-5$	2.0006	$4.4949e-5$	2.0366
1/80	$1.0929e-5$	2.0228	$1.0310e-5$	2.1242

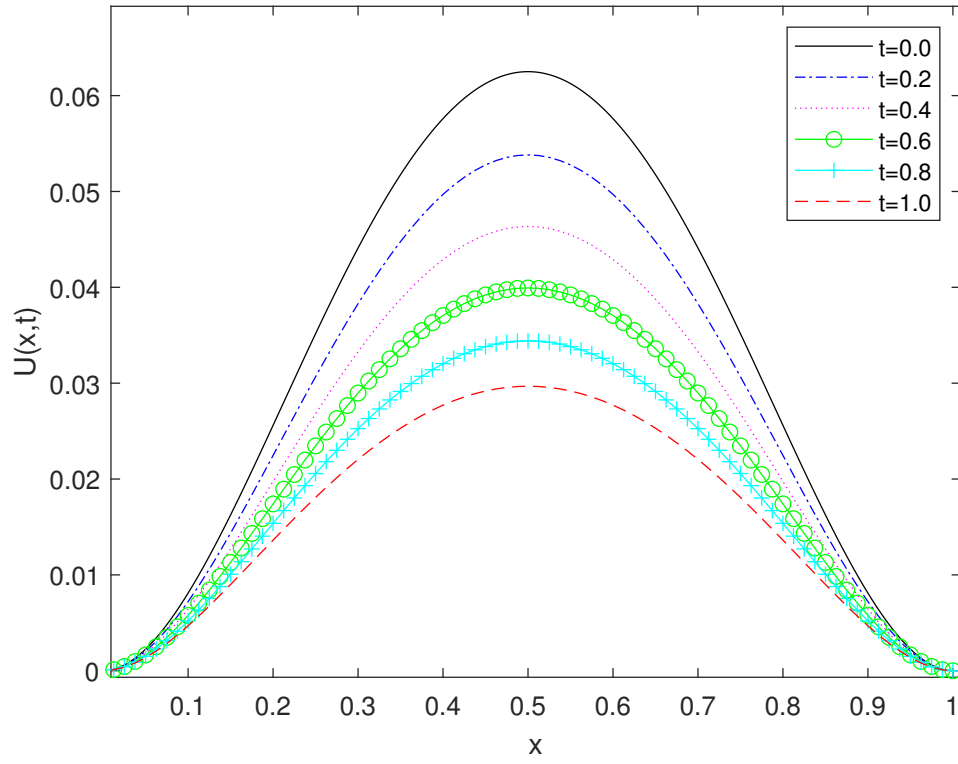
Çizelge 4.20'de KSFY ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte yakınsaklık mertebeleri Ref. [29]'da verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden KSFY ile bulunan L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [29]'da verilenlerden oldukça iyi olduğu, yakınsaklık mertebelerinin ise iyi uyum içinde olduğu görülmektedir.

Çizelgeden ayrıca N konum yönündeki bölüntü sayısı arttıkça hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.21'de hesaplanan L_∞ hata normları Ref. [27]'de verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden KSFY ile bulunan L_∞ hata normlarının Ref. [27]'de verilenlerden oldukça iyi olduğu görülmektedir. Çizelgeden ayrıca h konum uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Bu çizelgedeki hesaplamalarda referans çözüm olarak Ref. [27]'de olduğu gibi $h = 1/320$, $k = 1/320$ değerleri esas alınmıştır.

Çizelge 4.22'de Problem 2'nin KSFY ile hesaplanan L_∞ hata normları ile birlikte yakınsaklık mertebeleri Ref. [30]'da verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden KSFY ile bulunan L_∞ hata normlarının Ref. [30]'da verilenlerden oldukça iyi olduğu, yakınsaklık mertebelerinin ise teorikte beklendiği gibi bir davranış sergilediği görülmektedir.

Çizelgeden ayrıca N konum yönündeki bölüntü sayısı arttıkça L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Şekil 4.6'de model Problem 2'nin $h = 0.0125$, $k = 0.001$ ve $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$ değerleri için $t = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.6'den, ele alınan denklemdeki αU_{xx} dissipatif teriminin etkisi yüzünden zaman ilerledikçe nümerik çözümün genliğinin gittikçe azaldığı kolayca görülmektedir.

4.3 Konuma Göre Parçalanmış Rosenau-Burgers Denkleminin Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı (KKSFY)



Şekil 4.6 : Model Problem 2'nin KSFY ile $h = 0.0125$, $k = 0.01$ ve $\alpha = 30$, $\beta = 0.001$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1.0 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri

Bu bölümde

$$V = U_{x\bar{x}}$$

dönüşümü kullanılarak (3.1.1) ile verilen aşağıdaki Rosenau-Burgers denklemi

$$U_t + U_{xx\bar{x}\bar{x}t} - \alpha U_{x\bar{x}} + \beta U_x + UU_{\hat{x}} = 0$$

denklemini

$$U_t + V_{x\bar{x}t} - \alpha V + \beta U_{\hat{x}} + UU_{\hat{x}} = 0 \quad (4.3.1)$$

$$V - U_{x\bar{x}} = 0 \quad (4.3.2)$$

şeklinde konuma göre parçalanarak bir diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü. Elde edilen bu yeni diferansiyel denklem sisteminin başlangıç şartı

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x),$$

ve sınır şartları

$$U(0, t) = U(1, t) = 0,$$

$$V(0, t) = U_{xx}(0, t) = 0, \quad V(1, t) = U_{xx}(1, t) = 0,$$

olarak alındı. Şimdi (4.3.1) ve (4.3.2) denklemlerine

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{(V_{x\bar{x}})_{j\bar{x}}^{n+1} - (V_{x\bar{x}})_{j\bar{x}}^n}{k} - \alpha \frac{V_j^{n+1} + V_j^n}{2} \\ & + \beta \frac{(U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^{n+1} - (U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^n}{2} + \frac{(UU_x)_{j\bar{x}}^{n+1} + (UU_x)_{j\bar{x}}^n}{2} = 0 \\ & \frac{V_j^{n+1} + V_j^n}{2} - \frac{(U_{x\hat{x}})_{j\bar{x}}^{n+1} + (U_{x\hat{x}})_{j\bar{x}}^n}{2} = 0 \end{aligned}$$

şeklinde korunumlu sonlu fark şeması uygulandı. Konuma göre parçalanmış olan bu denklem sistemindeki lineer olmayan UU_x terimi yerine aşağıda verilen Rubin-Graves tipi lineerleştirme yaklaşımı uygulanırsa

$$(UU_x)_{j\bar{x}}^{n+1} = U_j^{n+1} (U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^n + U_j^n (U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^{n+1} - U_j^n U_{\hat{x}}^n$$

aşağıda verilen lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{(V_{x\bar{x}})_{j\bar{x}}^{n+1} - (V_{x\bar{x}})_{j\bar{x}}^n}{k} - \alpha \frac{V_j^{n+1} + V_j^n}{2} \\ & + \beta \frac{(U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^{n+1} - (U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^n}{2} + \frac{U_j^{n+1} (U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^n + U_j^n (U_{\hat{x}})_{j\bar{x}}^{n+1}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{V_j^{n+1} + V_j^n}{2} - \frac{(U_{x\hat{x}})_j^{n+1} + (U_{x\hat{x}})_j^n}{2} = 0$$

olur. Burada

$$\frac{(V_{x\bar{x}})_j^{n+1} - (V_{x\bar{x}})_j^n}{k}$$

terimi yerine

$$\frac{(V_{x\bar{x}})_j^{n+1} - (V_{x\bar{x}})_j^n}{k} = \frac{(V_{\bar{x}})_{j+1}^{n+1} - (V_{\bar{x}})_j^{n+1} - (V_{\bar{x}})_j^n + (V_{\bar{x}})_{j+1}^n}{kh}$$

ifadesi ve

$$\beta \frac{(U_{\hat{x}})_j^{n+1} - (U_{\hat{x}})_j^n}{2}$$

terimi yerine

$$\beta \frac{(U_{\hat{x}})_j^{n+1} - (U_{\hat{x}})_j^n}{2} = \beta \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4h}$$

ifadesi ve son olarak

$$\frac{U_j^{n+1} (U_{\hat{x}})_j^n + U_j^n (U_{\hat{x}})_j^{n+1}}{2}$$

terimi yerine

$$\frac{U_j^{n+1} (U_{\hat{x}})_j^n + U_j^n (U_{\hat{x}})_j^{n+1}}{2} = \frac{U_j^{n+1} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + U_j^n (U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})}{4h}$$

ve son olarak

$$\frac{(U_{x\hat{x}})_j^{n+1} + (U_{x\hat{x}})_j^n}{2}$$

terimi yerine

$$\frac{(U_{x\hat{x}})_j^{n+1} + (U_{x\hat{x}})_j^n}{2} = \frac{(U_{\bar{x}})_{j+1}^{n+1} - (U_{\bar{x}})_j^{n+1} + (U_{\bar{x}})_j^n - (U_{\bar{x}})_{j+1}^n}{2h}$$

ifadesi alınır gerekli düzenlemeler yapılır ve yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + \frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1} - V_{j+1}^n + 2V_j^n - V_{j-1}^n}{kh^2} - \alpha \frac{V_j^{n+1} + V_j^n}{2} \\ & + \beta \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4h} + \frac{U_j^{n+1} U_{j+1}^n - U_j^{n+1} U_{j-1}^n + U_j^n U_{j+1}^{n+1} - U_j^n U_{j-1}^{n+1}}{4h} = 0 \\ & \frac{V_j^{n+1} + V_j^n}{2} - \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2h^2} = 0 \end{aligned}$$

biçimindeki sistem elde edilir.

Şimdi bu sistemin daha sade bir gösterimi için, zaman adım uzunluğu Δt yerine k ve konum adım uzunluğu Δx yerine h notasyonu kullanılır ve $(n+1)$. zaman adımındaki terimler sol tarafta

ve n . zaman adımındaki terimler sağ tarafta toplanırsa $j = 1(1)(N - 1)$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_j^n}{4h} \right) U_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{4h} \right) U_j^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_j^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_j^n}{4h} \right) U_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{th^2} V_{j+1}^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_{j-1}^n + \frac{1}{kh^2} V_{j-1}^n + \frac{1}{k} U_j^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_j^n - \frac{\beta}{4h} U_{j+1}^n \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2} U_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{h^2} U_j^{n+1} + \frac{1}{2} V_j^{n+1} - \frac{1}{2h^2} V_j^{n+1} = \\ & \frac{1}{2h^2} U_{j-1}^n + \frac{1}{h^2} U_j^n + \frac{1}{2} V_j^n + \frac{1}{2h^2} U_{j+1}^n \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

biçiminde iteratif denklem sistemi elde edilir.

Bu iteratif denklem sisteminin program algoritmasının okuyucu tarafından daha rahat anlaşılabilmesi için bölüntü sayısı özel olarak $N = 8$ seçildi. Bu kapsamda $j = 1(1)7$ değerleri için nümerik şema sırası ile

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_1^n}{4h} \right) U_0^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_0^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_2^n - U_0^n}{4h} \right) U_1^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_1^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_1^n}{4h} \right) U_2^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_2^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_0^n + \frac{1}{kh^2} V_0^n + \frac{1}{k} U_1^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_1^n - \frac{\beta}{4h} U_2^n \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_2^n}{4h} \right) U_1^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_1^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_3^n - U_1^n}{4h} \right) U_2^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_2^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_2^n}{4h} \right) U_3^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_3^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_1^n + \frac{1}{kh^2} V_1^n + \frac{1}{k} U_2^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_2^n - \frac{\beta}{4h} U_3^n \end{aligned}$$

$j = 3$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_3^n}{4h} \right) U_2^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_2^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_4^n - U_2^n}{4h} \right) U_3^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_3^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_3^n}{4h} \right) U_4^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_4^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_2^n + \frac{1}{kh^2} V_2^n + \frac{1}{k} U_3^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_3^n - \frac{\beta}{4h} U_4^n \end{aligned}$$

$j = 4$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_4^n}{4h} \right) U_3^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_3^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_5^n - U_3^n}{4h} \right) U_4^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_4^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_4^n}{4h} \right) U_5^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_5^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_3^n + \frac{1}{kh^2} V_3^n + \frac{1}{k} U_4^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_4^n - \frac{\beta}{4h} U_5^n \end{aligned}$$

$j = 5$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_5^n}{4h} \right) U_4^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_4^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_6^n - U_4^n}{4h} \right) U_5^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_5^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_5^n}{4h} \right) U_6^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_6^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_4^n + \frac{1}{kh^2} V_4^n + \frac{1}{k} U_5^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_5^n - \frac{\beta}{4h} U_6^n \end{aligned}$$

$j = 6$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_6^n}{4h} \right) U_5^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_5^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_7^n - U_5^n}{4h} \right) U_6^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_6^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_6^n}{4h} \right) U_7^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_7^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_5^n + \frac{1}{kh^2} V_5^n + \frac{1}{k} U_6^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_6^n - \frac{\beta}{4h} U_7^n \end{aligned}$$

$j = 7$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta - U_7^n}{4h} \right) U_6^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_6^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{U_8^n - U_6^n}{4h} \right) U_7^{n+1} + \left(-\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \right) V_7^{n+1} \\ & + \left(\frac{\beta + U_7^n}{4h} \right) U_8^{n+1} + \frac{1}{kh^2} V_8^{n+1} \\ & = \frac{\beta}{4h} U_6^n + \frac{1}{kh^2} V_6^n + \frac{1}{k} U_7^n + \left(-\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \right) V_7^n - \frac{\beta}{4h} U_8^n \end{aligned}$$

(4.3.3)-(4.3.4) ile verilen sistemin 2-inci denkleminde

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2} U_0^{n+1} + \frac{1}{h^2} U_1^{n+1} + \frac{1}{2} V_1^{n+1} - \frac{1}{2h^2} U_2^{n+1} \\ & = \frac{1}{2h^2} U_0^n + \frac{1}{h^2} U_1^n + \frac{1}{2} V_1^n + \frac{1}{2h^2} U_2^n \end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2} U_1^{n+1} + \frac{1}{h^2} U_2^{n+1} + \frac{1}{2} V_2^{n+1} - \frac{1}{2h^2} U_3^{n+1} \\ & = \frac{1}{2h^2} U_1^n + \frac{1}{h^2} U_2^n + \frac{1}{2} V_2^n + \frac{1}{2h^2} U_3^n \end{aligned}$$

$j = 3$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2}U_2^{n+1} + \frac{1}{h^2}U_3^{n+1} + \frac{1}{2}V_3^{n+1} - \frac{1}{2h^2}U_4^{n+1} \\ & = \frac{1}{2h^2}U_2^n + \frac{1}{h^2}U_3^n + \frac{1}{2}V_3^n + \frac{1}{2h^2}U_4^n \end{aligned}$$

$j = 4$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2}U_3^{n+1} + \frac{1}{h^2}U_4^{n+1} + \frac{1}{2}V_4^{n+1} - \frac{1}{2h^2}U_5^{n+1} \\ & = \frac{1}{2h^2}U_3^n + \frac{1}{h^2}U_4^n + \frac{1}{2}V_4^n + \frac{1}{2h^2}U_5^n \end{aligned}$$

$j = 5$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2}U_4^{n+1} + \frac{1}{h^2}U_5^{n+1} + \frac{1}{2}V_5^{n+1} - \frac{1}{2h^2}U_6^{n+1} \\ & = \frac{1}{2h^2}U_4^n + \frac{1}{h^2}U_5^n + \frac{1}{2}V_5^n + \frac{1}{2h^2}U_6^n \end{aligned}$$

$j = 6$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2}U_5^{n+1} + \frac{1}{h^2}U_6^{n+1} + \frac{1}{2}V_6^{n+1} - \frac{1}{2h^2}U_7^{n+1} \\ & = \frac{1}{2h^2}U_5^n + \frac{1}{h^2}U_6^n + \frac{1}{2}V_6^n + \frac{1}{2h^2}U_7^n \end{aligned}$$

$j = 7$ için

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2h^2}U_6^{n+1} + \frac{1}{h^2}U_7^{n+1} + \frac{1}{2}V_7^{n+1} - \frac{1}{2h^2}U_8^{n+1} \\ & = \frac{1}{2h^2}U_6^n + \frac{1}{h^2}U_7^n + \frac{1}{2}V_7^n + \frac{1}{2h^2}U_8^n \end{aligned}$$

şeklinde yazıldı. Burada $N = 8$ için 14 denklem ve 18 bilinmeyenden oluşan bir sistem elde edilir. Ancak genel sistem için $2 \times (N - 1)$ denklem ve $2 \times (N + 1)$ bilinmeyen vardır. Bu cebirsel denklem sistemlerinin tek olarak çözülebilmesi için (3.1.1) problemi ile birlikte verilen sınır şartları kullanılarak U_0, U_N ve V_0, V_N bilinmeyenleri sistemden yok edilecektir. Bu amaçla, $N = 8$ için U_0, V_0 ve genel sistem içinde (U_0, V_0) , $N = 8$ için U_8, V_8 ve genel sistem için (U_N, V_N) değerleri problemle birlikte verilen türevsiz sınır şartları kullanılarak yok edilecektir. Böylece

yukarıda elde edilen denklem sistemi

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{k} \\
 b &= -\frac{\beta}{4h} \\
 c &= -\frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{2} \\
 d &= \frac{1}{kh^2} \\
 e &= -\frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{2} \\
 f &= -\frac{1}{h^2} \\
 g &= \frac{1}{2h^2}
 \end{aligned}$$

ve

$$l1U = \begin{bmatrix} \frac{1}{k} + \frac{U_2^n - U_0^n}{4h} & \frac{\beta + U_1^n}{4h} & & & \\ -\frac{\beta - U_2^n}{4h} & \frac{1}{k} + \frac{U_3^n - U_1^n}{4h} & \frac{\beta + U_2^n}{4h} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{\beta - U_{N-2}^n}{4h} & \frac{1}{k} + \frac{U_{N-1}^n - U_{N-3}^n}{4h} & \frac{\beta + U_{N-2}^n}{4h} \\ & & & & -\frac{\beta - U_{N-1}^n}{4h} & \frac{1}{k} + \frac{U_N^n - U_{N-2}^n}{4h} \end{bmatrix}$$

$$l1V = \begin{bmatrix} c & d & & & \\ d & c & d & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & d & c & d \\ & & & d & c & \end{bmatrix}$$

$$l2U = \begin{bmatrix} -f & -g & & & \\ -g & -f & -g & & \\ & -g & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -g & -f & -g \\ & & & -g & -f & \end{bmatrix}$$

$$l2V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
r1U &= \begin{bmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b & a & b \\ & & & & b & a \end{bmatrix} \\
r1V &= \begin{bmatrix} e & d & & & \\ d & e & d & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & d & e & d \\ & & & & d & e \end{bmatrix} \\
r2U &= \begin{bmatrix} f & g & & & \\ g & f & g & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & g & f & g \\ & & & & g & f \end{bmatrix} \\
r2V &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & & & \\ & -\frac{1}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} l1U & l1V \\ l2U & l2V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \\ U_6^{n+1} \\ U_7^{n+1} \\ V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \\ V_3^{n+1} \\ V_4^{n+1} \\ V_5^{n+1} \\ V_6^{n+1} \\ V_7^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r1U & r1V \\ r2U & r2V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \\ U_6^n \\ U_7^n \\ V_1^n \\ V_2^n \\ V_3^n \\ V_4^n \\ V_5^n \\ V_6^n \\ V_7^n \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

Çizelge 4.23 : Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

h	L_2		L_∞	
	[28]	KKSFY	[28]	KKSFY
0.25	$3.797152e-5$		$7.017218e-5$	
0.125	$8.865744e-6$	$1.503405e-5$	$1.630156e-5$	$2.993525e-5$
0.0625	$2.169204e-6$	$4.591414e-6$	$3.969264e-6$	$8.943734e-6$
0.03125	$5.238859e-7$	$1.182997e-6$	$1.026106e-7$	$2.272939e-6$

şeklinde matris formunda yazılır. Bu iteratif denklem sisteminden istenilen herhangi bir $t = t_{son}$ zamanında $\mathbf{U}^{n+1}$ ve $\mathbf{V}^{n+1}$ değerlerinin elde edilebilmesi için ilk önce $t = 0$ zamanındaki $\mathbf{U}^0$ ve $\mathbf{V}^0$ değerlerine ihtiyaç duyulur. Bu değerler problemle birlikte verilen

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$V(x, 0) = V_0(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç şartı kullanılarak elde edilir. Böylece bu iteratif denklem sistemi kullanılarak istenilen herhangi bir t_{son} zamanında düğüm noktalarında bilinmeyen $\mathbf{U}'$ lara karşılık gelen yaklaşık $\mathbf{U}_N$ değerleri bulunmuş olur.

4.3.1 Nümerik Çözümler

Bu kısımda, (4.3.5) ile verilen sistemin Bölüm 3 'de verilen model Problemlere uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçların, literatürde yine sonlu fark yöntemi kullanılarak elde edilen farklı çalışmalardaki sonuçlarla hata normlarıyla birlikte karşılaştırılması ve h, k nın farklı seçimleri için elde edilen noktasal değerler çizelgeler halinde sunuldu. Bu çalışmada model problemler için referans çözüm (tam çözüm), Ref. [28], Ref. [29] ve Ref. [30] çalışmaları ile karşılaştırma yapılırken bu referans çalışmalarda verildiği gibi bölüntü sayısı $N = 160$ ve Ref. [27] çalışması ile karşılaştırılırken ise bu referans çalışmadaki gibi bölüntü sayısı $N = 320$ alınarak hesaplandı. Ayrıca problemin fiziksel yapısını görmek amacıyla, problemde bulunan α parametresinin 0.5 ve 5 değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ zamanlarındaki grafikleri sunuldu.

Çizelge 4.23'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve h 'nın farklı değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım uzunluğu

Çizelge 4.24 : Konuma Göre Parçalanın model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

h	L_2		L_∞	
	[28]	KKSFY	[28]	KKSFY
0.25	$1.240202e-4$		$1.862903e-04$	
0.125	$2.872177e-5$	$7.566378e-5$	$4.245518e-05$	$1.173077e-04$
0.0625	$6.895192e-6$	$1.739454e-5$	$1.026083e-05$	$3.131096e-05$
0.03125	$1.659468e-6$	$4.184171e-6$	$2.470578e-06$	$7.764141e-06$

Çizelge 4.25 : Konuma Göre Parçalanın model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

t	$h = \frac{1}{8}$		$h = \frac{1}{16}$		$h = \frac{1}{32}$	
	KKSFY	[28]	KKSFY	[28]	KKSFY	[28]
2	$7.314514e-6$	$4.700358e-6$	$2.193642e-6$	$1.146090e-6$	$5.590900e-7$	$2.765485e-7$
4	$1.387601e-5$	$8.711500e-6$	$4.159003e-6$	$2.123405e-6$	$1.059270e-6$	$5.123299e-7$
6	$1.977941e-5$	$1.212563e-5$	$5.923480e-6$	$2.954436e-6$	$1.507515e-6$	$7.127612e-7$
8	$2.510809e-5$	$1.502362e-5$	$7.511271e-6$	$3.658954e-6$	$1.909995e-6$	$8.826300e-7$
10	$2.993525e-5$	$1.630156e-5$	$8.943734e-6$	$3.969264e-6$	$2.272939e-6$	$1.026106e-6$

küçüldükçe hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.24'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve h nın farklı değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım uzunluğu küçüldükçe hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.25'de model Problem 1'in $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve $h = 1/8, 1/16, 1/32$ değerleri için L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Çizelge 4.26'da model Problem 1'in $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve h nın farklı değerleri için L_∞ hata normları hesaplanarak Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile karşılaştırılması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adım

Çizelge 4.26 : Konuma Göre Parçalanan model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 5$, $\beta = 1, k = 0.1$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında hesaplanan L_∞ maksimum hata normlarının [28] ile karşılaştırılması.

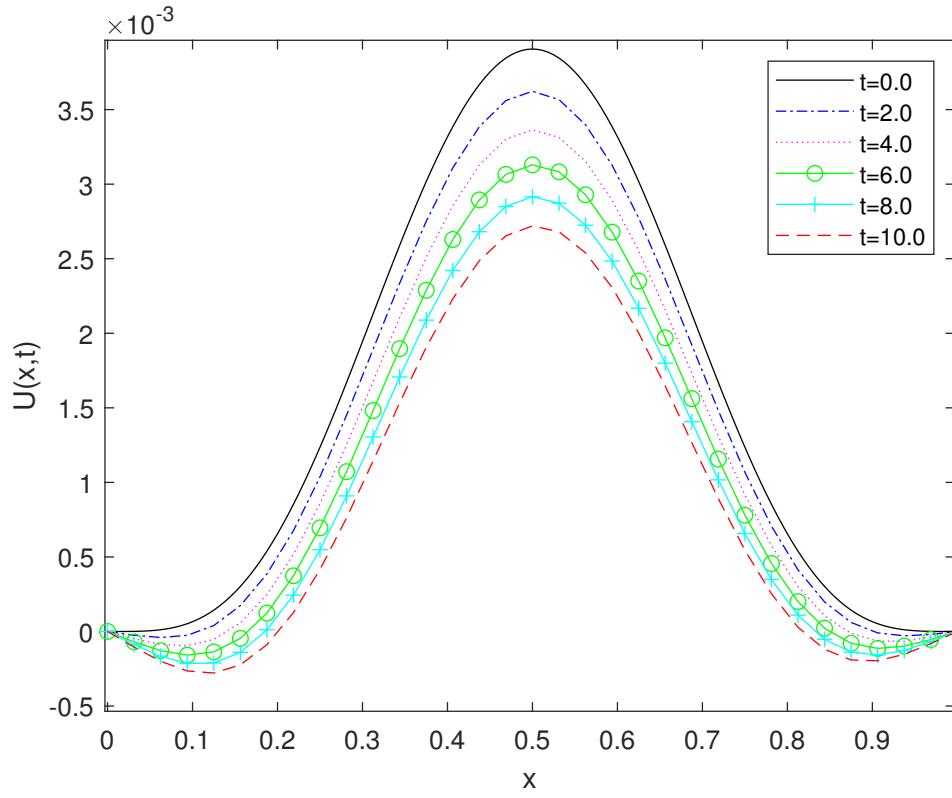
t	$h = \frac{1}{8}$		$h = \frac{1}{16}$		$h = \frac{1}{32}$	
	KKSFY	[28]	KKSFY	[28]	KKSFY	[28]
2	$4.853146e-5$	$2.633269e-5$	$1.435063e-5$	$6.389985e-6$	$4.853146e-5$	$1.540068e-6$
4	$7.206383e-5$	$3.305609e-5$	$2.068769e-5$	$7.978488e-6$	$7.206383e-5$	$1.920378e-6$
6	$8.937229e-5$	$3.656422e-5$	$2.488340e-5$	$8.803290e-6$	$8.937229e-5$	$2.117618e-6$
8	$1.042928e-4$	$3.969443e-5$	$2.833380e-5$	$9.564878e-6$	$1.042928e-4$	$2.301304e-6$
10	$1.173077e-4$	$4.245518e-5$	$3.131096e-5$	$1.026083e-5$	$1.173077e-4$	$2.470578e-6$

uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının küçüldüğü gözlemlendi ve Pan ve Zhang [28] tarafından elde edilen hata normları ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

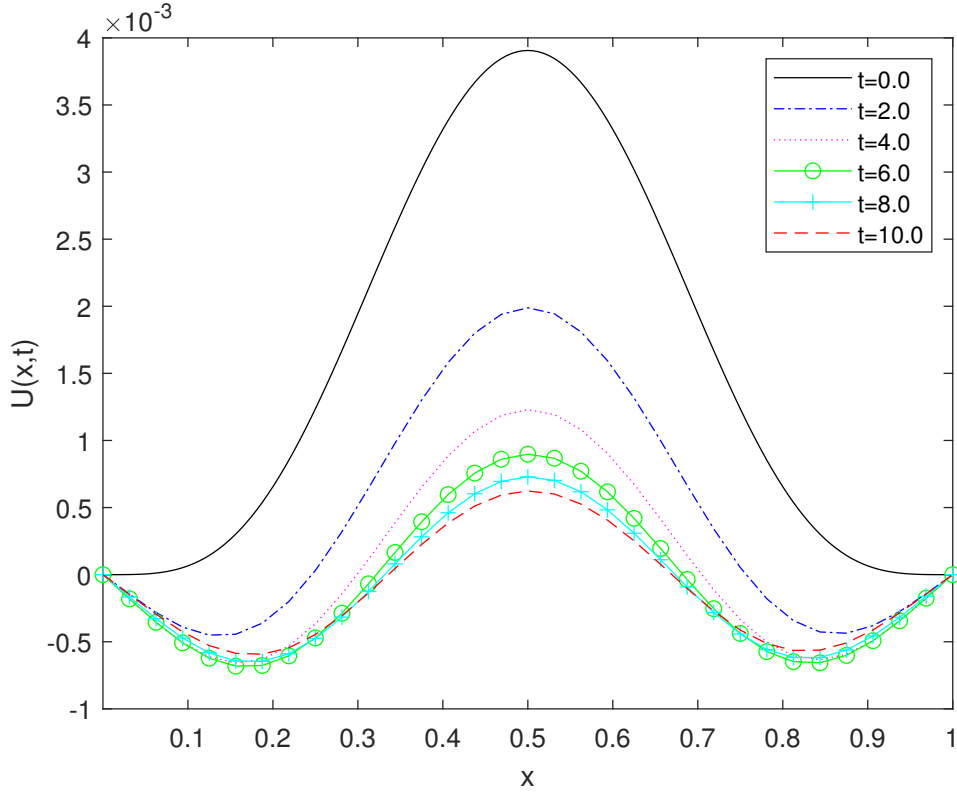
Şekil 4.7'de model Problem 1'in $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri verildi.

Çizelge 4.27 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

x	Nümerik Çözüm				Referans Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.1	-0.0002695088	-0.0002721008	-0.0002723585	-0.0002723987	-0.0002724073
0.2	-0.0000112062	-0.0000123850	-0.0000120415	-0.0000119152	-0.0000118810
0.3	0.0009814722	0.0009868185	0.0009888498	0.0009894029	0.0009895441
0.4	0.0021554390	0.0021680560	0.0021718649	0.0021728608	0.0021731126
0.5	0.0027011924	0.0027162647	0.0027206578	0.0027217986	0.0027220865
0.6	0.0022376869	0.0022483523	0.0022516700	0.0022525433	0.0022527645
0.7	0.0011107497	0.0011132295	0.0011145396	0.0011149127	0.0011150089
0.8	0.0001129434	0.0001093187	0.0001090473	0.0001090204	0.0001090162
0.9	-0.0001956805	-0.0001995158	-0.0002000853	-0.0002002031	-0.0002002311
L_2	$1.050968e-05$	$3.007875e-06$	$7.448722e-07$	$1.504577e-07$	
L_∞	$2.089407e-05$	$5.821830e-06$	$1.432575e-06$	$2.891486e-07$	



Şekil 4.7 : Konuma Göre Parçalanın model Problem 1'in KKSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 0.5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri



Şekil 4.8 : Konuma Göre Parçalanmış model Problem 1'in KKSFY ile $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $U(x,t)$ 'nin $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri

Çizelge 4.29 : Model Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

Nümerik Çözüm				
x	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	Referans Çözüm
0.1	-0.0002723591	-0.0002723585	-0.0002723585	-0.0002724073
0.2	-0.0000120426	-0.0000120415	-0.0000120415	-0.0000118810
0.3	0.0009888484	0.0009888498	0.0009888499	0.0009895441
0.4	0.0021718632	0.0021718649	0.0021718649	0.0021731126
0.5	0.0027206561	0.0027206578	0.0027206579	0.0027220865
0.6	0.0022516684	0.0022516700	0.0022516700	0.0022527645
0.7	0.0011145383	0.0011145396	0.0011145396	0.0011150089
0.8	0.000109046	0.0001090473	0.0001090473	0.0001090162
0.9	-0.0002000857	-0.0002000853	-0.0002000853	-0.0002002311
L_2	$7.448738e-07$	$7.448718e-07$	$7.448629e-07$	
L_∞	$1.432578e-06$	$1.432575e-06$	$1.432577e-06$	

Çizelge 4.28 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

x	Nümerik Çözüm				Referans Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0.1	-0.0004075235	-0.0004436490	-0.0004511420	-0.0004529222	-0.0004533615
0.2	-0.0005285122	-0.0005725601	-0.0005813311	-0.0005833825	-0.0005838865
0.3	-0.0001946386	-0.0002054668	-0.0002062592	-0.0002063315	-0.0002063416
0.4	0.0003113976	0.0003472989	0.0003575426	0.0003601922	0.0003608604
0.5	0.0005549454	0.0006121624	0.0006274348	0.0006313241	0.0006323011
0.6	0.0003341104	0.0003699348	0.0003801601	0.0003828055	0.0003834726
0.7	-0.0001610229	-0.0001718426	-0.0001726270	-0.0001726963	-0.0001727056
0.8	-0.0004993074	-0.0005431281	-0.0005518289	-0.0005538615	-0.0005543607
0.9	-0.0003921748	-0.0004279799	-0.0004353785	-0.0004371340	-0.0004375671
L_2	$4.625936e-05$	$1.102052e-05$	$2.613625e-06$	$5.223983e-07$	
L_∞	$7.735566e-05$	$2.013869e-05$	$4.866271e-06$	$9.769480e-07$	

Çizelge 4.30 : Model Problem 1'in $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken KKSFY ile sayısal ve analitik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları

x	Nümerik Çözüm			Referans Çözüm
	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	
0.1	-0.0004511474	-0.0004511420	-0.0004511419	-0.0004533615
0.2	-0.0005813419	-0.0005813311	-0.0005813310	-0.0005838865
0.3	-0.0002062750	-0.0002062592	-0.0002062592	-0.0002063416
0.4	0.0003575233	0.0003575426	0.0003575427	0.0003608604
0.5	0.0006274143	0.0006274348	0.0006274349	0.0006323011
0.6	0.0003801411	0.0003801601	0.0003801602	0.0003834726
0.7	-0.0001726424	-0.0001726270	-0.0001726269	-0.0001727056
0.8	-0.0005518394	-0.0005518289	-0.0005518289	-0.0005543607
0.9	-0.0004353837	-0.0004353785	-0.0004353785	-0.0004375671
L_2	$2.613632e-06$	$2.613625e-06$	$2.613638e-06$	
L_∞	$4.866274e-06$	$4.866271e-06$	$4.866341e-06$	

Çizelge 4.31 : Model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile yakınsaklık mertebelerinin [29] ile karşılaştırılması.

N	[29]				KKSFY			
	L_∞	Mertebe	L_2	Mertebe	L_∞	Mertebe	L_2	Mertebe
10	$7.03e-4$	—	$4.58e-4$	—	$5.11e-6$		$2.62e-6$	
20	$2.04e-4$	1.7865	$1.34e-4$	1.7787	$1.43e-6$	1.8373	$7.61e-7$	1.7836
40	$5.23e-5$	1.9613	$3.42e-5$	1.9652	$3.50e-7$	2.0306	$1.89e-7$	2.0095
80	$1.08e-5$	2.2746	$7.08e-6$	2.2739	$7.07e-8$	2.3076	$3.81e-8$	2.3105

Çizelge 4.32 : Model Problem 1'in KKSFY ile $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $k = 0.05$ ve $h = 1/320$ referans çözüm için $t = 1.0$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının [27] ile karşılaştırılması.

	$h = \frac{1}{5}$	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{40}$
[27]C-N	$8.5176e-4$	$2.0083e-4$	$5.1688e-5$	$1.4486e-5$
[27]L-S	$9.6529e-4$	$1.9023e-4$	$3.9467e-5$	$4.2694e-5$
KKSFY	$9.5866e-6$	$5.1326e-6$	$1.4459e-6$	$3.6867e-7$

Şekil 4.8'de model Problem 1'in $h = 0.03125$, $k = 0.1$ ve $\alpha = 5$ değerleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8$ ve 10 zamanlarında yaklaşık çözüm grafikleri verildi. Şekil 4.7 ve Şekil 4.8'den, ele alınan denklemdaki αU_{xx} dissipatif teriminin etkisi yüzünden zaman ilerledikçe nümerik çözümün yüksekliğinin gittikçe alçaldığı kolayca görülmektedir. Ayrıca her iki şekil aynı zamanda ele alınan problemin sürekli enerjisini ve tezde kullanılan şemaların doğruluğunu göstermektedir.

Çizelge 4.27'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden zaman yönündeki adım uzunluğu $k = 0.01$ sabit olup N bölüntü sayısı arttıkça L_2 ve L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve elde edilen sayısal sonuçların referans alınan analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.28'de model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $k = 0.01$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Yine bu çizelgeden de zaman yönündeki adım uzunluğu $k = 0.01$ sabit olup N bölüntü sayısı arttıkça hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının küçüldüğü ve elde edilen sayısal sonuçların referans alınan analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.29'da model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden konum yönündeki

adım sayısı $N = 40$ sabit olup zaman yönündeki adım uzunluğu k küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının uyum içinde kaldığı görülmektedir. Çizelge 4.30'da model Problem 1'in $t = 10$ zamanında $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $N = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik çözüm ve referans alınan tam çözüm verildi. Bu çizelgeden konum yönündeki adım sayısı $N = 40$ sabit olup zaman yönündeki adım uzunluğu k küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının uyum içinde kaldığı görülmektedir.

Çizelge 4.31'de KKSFY ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte yakınsaklık mertebeleri Ref. [29]'da verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden KKSFY ile bulunan L_2 ve L_∞ hata normlarının Ref. [29]'da verilenlerden oldukça iyi olduğu, yakınsaklık mertebelerinin ise iyi uyum içinde olduğu görülmektedir.

Çizelgeden ayrıca N konum yönündeki bölüntü sayısı arttıkça hem L_2 hem de L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Çizelge 4.32'de KKSFY ile hesaplanan L_∞ hata normları Ref. [27]'de verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgeden KKSFY ile bulunan L_∞ hata normlarının Ref. [27]'de verilenlerden oldukça iyi olduğu görülmektedir. Çizelgeden ayrıca h konum uzunluğu küçüldükçe L_∞ hata normlarının azaldığı açıkça görülmektedir. Bu çizelgedeki hesaplamalarda referans çözüm olarak Ref. [27]'de olduğu gibi $h = 1/320$, $k = 1/320$ değerleri esas alınmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, Bölüm 4'te Rosenau-Burgers denkleminin farklı sonlu fark yöntemleri kullanılarak elde edilen nümerik şemaların model problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar kendi içerisinde karşılaştırıldı. Ele alınan model Problemler için hangi şemanın daha iyi sonuç verdiği çizelgeler halinde sunulurken incelendi.

Çizelge 5.1'de ele alınan Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY ve KKSFY şemaları kullanılarak $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve 0.01 , $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ ve $\frac{1}{80}$ değerleri için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının birbirleri ile karşılaştırılması verildi. SSFY ile elde edilen sonuçların hem KSFY hem de KKSFY ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü. Yine tablodan, KSFY ile elde edilen sonuçlarında KKSFY ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir.

Daha sonra, Çizelge 5.2'de ise göz önüne alınan Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY ve KKSFY şemaları kullanılarak $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve 0.01 , $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ ve $\frac{1}{80}$ değerleri için $t = 10$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının birbirleri ile karşılaştırılması verildi. SSFY ile elde edilen sonuçların hem KSFY hem de KKSFY ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görüldü. Tablo incelendiğinde, KSFY ile elde edilen sonuçlarında KKSFY ile elde edilen sonuçlardan iyi olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.3'de ele alınan Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY ve KKSFY şemaları kullanılarak bu defa $\alpha = 5$ değeri alınarak $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve 0.01 , $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ ve $\frac{1}{80}$ değerleri için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının birbirleri ile karşılaştırılması verildi. Tablodan SSFY ile KSFY şemaları ile elde edilen sonuçların oldukça iyi uyum içinde olduğu görüldü. Yine tablodan, SSFY ve KSFY ile elde edilen sonuçlarında KKSFY ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmektedir. Çizelge 5.4'de ise göz önüne alınan Problem 1'e

Çizelge 5.1 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının karşılaştırılması.

	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
h	SSFY	KSFY	KKSFY	SSFY	KSFY	KKSFY
$\frac{1}{5}$	$2.345910e-5$	$2.348349e-5$	$3.765709e-5$	$2.345901e-5$	$2.347910e-5$	$3.765708e-5$
$\frac{1}{10}$	$5.628973e-6$	$5.651174e-6$	$1.050971e-5$	$5.628949e-6$	$5.650041e-6$	$1.050968e-5$
$\frac{1}{20}$	$1.377926e-6$	$1.399453e-6$	$3.007882e-6$	$1.377919e-6$	$1.399173e-6$	$3.007875e-6$
$\frac{1}{40}$	$3.272749e-7$	$3.487878e-7$	$7.448738e-7$	$3.272722e-7$	$3.487239e-7$	$7.448722e-7$
$\frac{1}{80}$	$6.541374e-8$	$8.757907e-8$	$1.504579e-7$	$6.541329e-8$	$8.756972e-8$	$1.504577e-7$

Çizelge 5.2 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 0.5$, $\beta = 1, k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

h	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
	SSFY	KSFY	KKSFY	SSFY	KSFY	KKSFY
$\frac{1}{5}$	$3.876469e-5$	$3.880230e-5$	$5.254515e-5$	$3.876454e-5$	$3.879873e-5$	$5.254520e-5$
$\frac{1}{10}$	$1.106941e-5$	$1.110729e-5$	$2.089412e-5$	$1.106937e-5$	$1.110518e-5$	$2.089407e-5$
$\frac{1}{20}$	$2.700653e-6$	$2.736787e-6$	$5.821842e-6$	$2.700641e-6$	$2.736279e-6$	$5.821830e-6$
$\frac{1}{40}$	$6.409043e-7$	$6.766083e-7$	$1.432578e-6$	$6.408998e-7$	$6.764946e-7$	$1.432575e-6$
$\frac{1}{80}$	$1.280867e-7$	$1.636774e-7$	$2.891490e-7$	$1.280861e-7$	$1.636638e-7$	$2.891486e-7$

Çizelge 5.3 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 5$, $\beta = 1, k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının karşılaştırılması.

h	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
	SSFY	KSFY	KKSFY	SSFY	KSFY	KKSFY
$\frac{1}{5}$	$8.042874e-5$	$8.042915e-5$	$2.491097e-4$	$8.042808e-5$	$8.042816e-5$	$2.491084e-4$
$\frac{1}{10}$	$1.805269e-5$	$1.805284e-5$	$4.625951e-5$	$1.805258e-5$	$1.805265e-5$	$4.625936e-5$
$\frac{1}{20}$	$4.372296e-6$	$4.372385e-6$	$1.102055e-5$	$4.372270e-6$	$4.372343e-6$	$1.102052e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.036273e-6$	$1.036349e-6$	$2.613632e-6$	$1.036267e-6$	$1.036340e-6$	$2.613625e-6$
$\frac{1}{80}$	$2.070228e-7$	$2.070995e-7$	$5.223996e-7$	$2.070215e-7$	$2.070975e-7$	$5.223983e-7$

Çizelge 5.4 : Model Problem 1'e uygulanan SSFY, KSFY, KKSFY şemalarının $\alpha = 5$, $\beta = 1, k = 0.1, 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 10$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının karşılaştırılması.

h	$k = 0.1$			$k = 0.01$		
	SSFY	KSFY	KKSFY	SSFY	KSFY	KKSFY
$\frac{1}{5}$	$1.120232e-4$	$1.120305e-4$	$3.642456e-4$	$1.120215e-4$	$1.120213e-4$	$3.642431e-4$
$\frac{1}{10}$	$2.679830e-5$	$2.680022e-5$	$7.735568e-5$	$2.679844e-5$	$2.680036e-5$	$7.735566e-5$
$\frac{1}{20}$	$6.508505e-6$	$6.510427e-6$	$2.013870e-5$	$6.508547e-6$	$6.510460e-6$	$2.013869e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.542866e-6$	$1.544784e-6$	$4.866274e-6$	$1.542879e-6$	$1.544792e-6$	$4.866271e-6$
$\frac{1}{80}$	$3.082330e-7$	$3.101490e-7$	$9.769488e-7$	$3.082382e-7$	$3.101514e-7$	$9.769480e-7$

Çizelge 5.5 : Model Problem 2'ye uygulanan SSFY, KSFY şemalarının $\alpha = 30$, $\beta = 0.0011$, $k = 0.01$ ve $h = 1/160$ referans çözüm için $t = 11$ iken hesaplanan L_2 hata normlarının ve yakınsaklık mertebelerinin karşılaştırılması.

SSFY			KSFY	
h	L_∞	Mertebe	L_∞	Mertebe
$\frac{1}{10}$	$7.5580e-4$		$7.5587e-4$	
$\frac{1}{20}$	$1.8435e-4$	2.0356	$1.8441e-4$	2.0352
$\frac{1}{40}$	$4.4885e-5$	2.0381	$4.4949e-5$	2.0366
$\frac{1}{80}$	$1.0246e-5$	2.1312	$1.0310e-5$	2.1242

uygulanan SSFY, KSFY ve KKSFY şemaları kullanılarak bu defa $\alpha = 5$ değeri alınarak, $\beta = 1$, $k = 0.1$ ve 0.01 , $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ ve $\frac{1}{80}$ değerleri için $t = 10$ iken hesaplanan L_∞ hata normlarının birbirleri ile karşılaştırılması verildi. SSFY ile elde edilen sonuçların hem KSFY hem de KKSFY ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görüldü. Verilen bu son tablo incelendiğinde, KSFY ile elde edilen sonuçlarında KKSFY ile elde edilen sonuçlardan iyi olduğu görülmektedir.

Son olarak, Çizelge 5.5'de ise göz önüne alınan Problem 2'ye uygulanan SSFY ve KSFY şemaları kullanılarak bu defa $\alpha = 300$ değeri alınarak, $\beta = 0.001$, $k = 0.01$ ve $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ ve $\frac{1}{80}$ değerleri için $t = 1$ iken hesaplanan L_∞ hata normları ve yakınsaklık mertebelerinin birbirleri ile karşılaştırılması verildi. SSFY ile elde edilen sonuçların KSFY ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu açıkça görüldü.

Sonuç olarak bu tezde Rosenau-Burgers denkleminde uygulanan SSFY, KSFY ve KKSFY yöntemleri matematik ve fizikte ortaya çıkan benzer çeşitli problemlere de başarılı bir şekilde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Kutluay, S.**, (2018). Klasik Sonlu Fark Yöntemleri, Ders Notları, Malatya, TÜRKİYE.
- [2] **Ateş, M.H.** (2014). Solutions of the Equal Width Wwave (EW) Equation With Finite Difference Methods, *Inonu University Graduate School of Natural and Applied Sciences Department of Mathematics*.
- [3] **Roshan, T.** (2011). A Petrov Galerkin method for equal width equation, *Applied Mathematics and Computation*, 218(6), 2730–2739.
- [4] **Reddy, J.N.** (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press.
- [5] **Hu, J., Hu, B. ve Xu, Y.** (2011). Average implicit linear difference scheme for generalized Rosenau-Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 217(19), 7557–7563.
- [6] **Rosenau, P.** (1986). A Quasi-Continuous Description of a Nonlinear Transmission Line, *Physica Scripta*, 34(6B), 827–829.
- [7] **Rosenau, P.** (1988). Dynamics of Dense Discrete Systems: High Order Effects, *Progress of Theoretical Physics*, 79(5), 1028–1042.
- [8] **Park, M.** (1990). On the Rosenau Equation, *Appl. Math. Comput.*
- [9] **Chunk, S.K. ve Pani, A.K.** (2001). Numerical methods for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 77(3-4), 351–369.
- [10] **Chung, S.K. ve Ha, S.N.** (1994). Finite element Galerkin solutions for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 54(1-2), 39–56.
- [11] **Chung, S.** (1998). Finite Difference Approximate Solutions for the Rosenau Equation, *Applicable Analysis*, 69(1-2), 149–156.
- [12] **Omrani, K., Abidi, F., Achouri, T. ve Khiari, N.** (2008). A new conservative finite difference scheme for the Rosenau equation, *Applied Mathematics and Computation*, 201(1-2), 35–43.
- [13] **Manickam, S.A.V., Pani, A.K. ve Chung, S.K.** (1998). A second-order splitting combined with orthogonal cubic spline collocation method for the Rosenau equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 14(6), 695–716.
- [14] **Zhang, J., Liu, Z., Lin, F. ve Jiao, J.** (2019). Asymptotic Analysis and Error Estimate for Rosenau-Burgers Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2019, 1–8.
- [15] **Smith, G.D.** (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, OUP Oxford.
- [16] **Hu, J. ve Zheng, K.** (2010). Two Conservative Difference Schemes for the Generalized Rosenau Equation, *Boundary Value Problems*, 2010(1), 543503.
- [17] **Atouani, N. ve Omrani, K.** (2014). A new conservative high-order accurate difference scheme for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 94(12), 2435–2455.

- [18] **Özişik, M.N.** (1994). *Finite Difference Methods in Heat Transfer, Second Edition*, CRC Press.
- [19] **Thomas, J.W.** (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Springer New York.
- [20] **Smith, G.D.** (1987). Numerical solution of partial differantial equations: Finite difference methods, *Clarendon Press, Oxford*.
- [21] **Lippold, G.** (1980). The Finite Difference Method in Partial Differential Equations, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 60(12), 741–741.
- [22] **Zheng, K. ve Jinsong, H.** (2009). Crank-Nicolson difference scheme for the generalized Rosenau-Burgers equation, *World Academy of Science, Engineering and Technology*.
- [23] **Xue, G.Y. ve Zhang, L.** (2013). A new finite difference scheme for generalized Rosenau–Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 222, 490–496.
- [24] **Janwised, J., Wongsaijai, B., Mouktonglang, T. ve Poochinapan, K.** (2014). A Modified Three-Level Average Linear-Implicit Finite Difference Method for the Rosenau-Burgers Equation, *Advances in Mathematical Physics*, 2014, 1–11.
- [25] **Hu, B., Xu, Y. ve Hu, J.** (2008). Crank–Nicolson finite difference scheme for the Rosenau–Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 204(1), 311–316.
- [26] **Li, D., Wang, Z., Wu, Y. ve Lu, Y.** (2009). A Finite Difference Simulation for Rosenau-Burgers Equation, *International Conference on Information Engineering and Computer Science*.
- [27] **Ma, W., Yang, A. ve Wang, Y.** (2010). A Second-Order Accurate Linearized Difference Scheme for the Rosenau-Burgers Equation, *Journal of Information and Computational Science*.
- [28] **Pan, X. ve Zhang, L.** (2012). A new finite difference scheme for the Rosenau–Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 218(17), 8917–8924.
- [29] **Mittal, R.C. ve Jain, R.** (2012). Application of Quintic B-splines Collocation Method on Some Rosenau Type Nonlinear Higher Order Evolution Equations, *Int. Journal of Nonlinear Science*, 13, 1749–3889.
- [30] **Piao, G.R., Lee, J.Y. ve Cai, G.X.** (2015). Analysis and computational method based on quadratic B-spline FEM for the Rosenau-Burgers equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 32(3), 877–895.
- [31] **Arora, G. ve Singh, B.K.** (2013). Numerical solution of Burgers equation with modified cubic B-spline differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation*, 224, 166–177.
- [32] **Hasan, M.T. ve Xu, C.** (2018). The stability and convergence of time-stepping spectral methods with asymptotic behaviour for the Rosenau-Burgers equation, *Applicable Analysis*, 99(12), 2013–2025.

- [33] **Ganaie, I. ve Kukreja, V.** (2014). Numerical solution of Burgers' equation by cubic Hermite collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 237, 571–581.
- [34] **Korpusov, M.O.** (2012). Blowup of solutions of the three-dimensional Rosenau-Burgers equation, *Theoretical and Mathematical Physics*, 170(3), 280–286.
- [35] **Korpusov, M.** (2012). On the blow-up of solutions of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers and Rosenau-Burgers equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, 75(4), 1737–1743.
- [36] **Liu, L., Mei, M. ve Wong, Y.S.** (2007). Asymptotic behavior of solutions to the Rosenau–Burgers equation with a periodic initial boundary, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(8), 2527–2539.
- [37] **Liu, L. ve Mei, M.** (2002). A better asymptotic profile of Rosenau–Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*, 131(1), 147–170.
- [38] **Guo, C., Xue, W., Wang, Y. ve Zhang, Z.** (2020). A new implicit nonlinear discrete scheme for Rosenau–Burgers equation based on multiple integral finite volume method, *AIP Advances*, 10(4), 045125.
- [39] **Maxim, O.K. ve Egor, V.Y.** (2014). Local Solvability and Blow-up For Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, Rosenau-Burgers and Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony Equations, *Electronic Journal of Differential Equations*.
- [40] **Omrani, K., Debebria, H. ve Bayarassou, K.** (2020). On the numerical solution of two-dimensional Rosenau–Burgers (RB) equation, *Engineering with Computers*, 38(1), 715–726.
- [41] **Abazari, R. ve Yıldırım, K.** (2019). Quintic B-Spline Method For Numerical Solution of the Rosenau-Burgers Equation, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*.
- [42] **Xu, G.X., Li, C.H. ve Piao, G.R.** (2017). Cubic B-spline finite element method for the Rosenau-Burgers equation, *East Asian Mathematical Journal*.
- [43] **Zürnaci, F. ve Seydaoglu, M.** (2019). On the convergence of operator splitting for the Rosenau-Burgers equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 35(4), 1363–1382.
- [44] **Wongsaijai, B. ve Poochinapan, K.** (2021). Optimal decay rates of the dissipative shallow water waves modeled by coupling the Rosenau-RLW equation and the Rosenau-Burgers equation with power of nonlinearity, *Applied Mathematics and Computation*, 405, 126202.
- [45] **Wang, J.** (2015). Numerical Analysis of A Mixed Finite Element Method for Rosenau-Burgers Equation, *Proceedings of the 2015 International Industrial Informatics and Computer Engineering Conference*, Atlantis Press.
- [46] **Panin, A.A.** (2013). Local solvability and blowup of the solution of the Rosenau-Burgers equation with different boundary conditions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 177(1), 1361–1376.

- [47] **Korpusov, M.O.** (2014). Local solvability and blow-up for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers, Rosenau-Burgers and Korteweg-de Vries-Benjamin-Bona-Mahony equations, *Electronic Journal of Differential Equations*.
- [48] **Jun, Z.** (2019). Numerical Methods for a Shallow Water Rosenau-Burgers Equation, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 252, 052123.
- [49] **Bonkile, M.P., Awasthi, A., Lakshmi, C., Mukundan, V. ve Aswin, V.S.** (2018). A systematic literature review of Burgers equation with recent advances, *Pramana*, 90(6).



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Azat AHMEDOV

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

