

**T.C.  
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NÖTROSOFİK TAMSAYILARIN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ**

**Ayşe Nur YURTTAKAL**

**Danışman  
Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
ISPARTA - 2022**

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET .....	ii
ABSTRACT .....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	2
3. NÖTROSOFİK SAYI HALKALARI.....	5
3.1. Nötrosofik Halkalar .....	5
3.2. Bazı Nötrosofik Cebirsel Denklemler Üzerine .....	7
3.3. Nötrosofik Tamsayıların Bazı Özellikleri.....	12
3.4. Nötrosofik Sayılar Teorisinin Kısmi Temelleri.....	20
3.5. Nötrosofik Tamsayılarda En Büyük Ortak Bölen ve En Küçük Ortak Kat. 31	
4. NÖTROSOFİK TAMSAYILARIN BAZI ELEMANTER ÖZELLİKLERİ.....	43
4.1. Nötrosofik Reel Sayılarda Sıralama .....	43
4.2. Bir Pozitif Nötrosofik Sayının Faktöriyeli .....	50
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR .....	54
ÖZGEÇMİŞ.....	55

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### NÖTROSOFİK TAMSAYILARIN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Ayşe Nur YURTTAKAL

Süleyman Demirel Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN

Bu tez çalışması, grup ve halka teorilerinin bir genişlemesi olarak bilinen ve 1980 li yıllarda çalışılmaya başlanan nütrosolik yapılarından nütrosolik tamsayılar halkası üzerinedir. Bu tezin amacı, tamsayılar halkasının bilinen temel cebirsel özelliklerinin nütrosolik tamsayılar halkasında geçerli olup olmadığını araştırmak; tamsayılar halkasında geçerli olup, nütrosolik tamsayılar halkasında henüz incelenmemiş olan tanım ve özellikleri, nütrosolik tamsayılar halkasına uyarlamaktır.

Bu tez çalışmasında nütrosolik tamsayıların tersi, mutlak değeri, asal ve bileşik nütrosolik tamsayılar, nütrosolik tamsayılar kümesinde bölme algoritması, bir denklem sistemi içerisinde yer alma ve modüler denklemlerle ifade edilme gibi cebirsel özellikleri verilmiştir.

Tezin son kısmında ise  $Z[I]$  nütrosolik tamsayılar kümesinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısından yola çıkarak tanımlanan denklik bağıntısıyla denklik sınıfları oluşturulmuştur. Sıralı ikililer şeklinde ifade edilen nütrosolik tamsayılar kartezyen koordinat sisteminde bölgesel olarak belirlenmiştir. Ayrıca pozitif bir nütrosolik tamsayının faktöriyel ve kuvvetleri kavramları verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Nütrosolik tamsayılar, nütrosolik tamsayılarda sıralama, bir nütrosolik tamsayının faktöriyel.

2022, 55 sayfa

## ABSTRACT

M.Sc. Thesis

### SOME ELEMENTARY PROPERTIES OF NEUTROSOPHIC INTEGERS

Ayşe Nur YURTTAKAL

Süleyman Demirel University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN

This thesis is on the ring of neutrosophic integers, which is one of the neutrosophic structures that is known as an extension of group and ring theories and started to be studied in the 1980s. The aim of this thesis is to investigate whether the known basic algebraic properties of the ring of integers are valid for the ring of neutrosophic integers and to adapt the definitions and properties that are valid in the ring of integers but not yet studied in the ring of neutrosophic integers, to the ring of neutrosophic integers.

In this thesis, algebraic properties of neutrosophic integers such as inverse, absolute value, prime and composite neutrosophic numbers, division algorithm in the set of neutrosophic integers, being in a system of equations and expressing with modular equations are given.

In the last part of the thesis, equivalence classes are created with the equivalence relation defined by starting from the partial order relation defined in the set of  $\mathbb{Z}[I]$  neutrosophic integers. Neutrosophic integers expressed as ordered pairs are determined locally in the Cartesian coordinate system. Also, the concepts of factorial and powers of a positive neutrosophic integer are given.

**Keywords:** Neutrosophic integers, ordering in neutrosophic integers, factorial of a neutrosophic integer.

**2022, 55 pages**

## TEŞEKKÜR

Uzun bir aradan sonra tekrar çıktığım öğrencilik yolculuğumda bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan, insancıl ve yardımsever yaklaşımları ile bana cesaret veren değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Yılmaz ÇEVEN' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu yolculuğun her aşamasında bana destek olan, olumlu yaklaşımlarıyla varlığını daima yanımda hissettiğim saygıdeğer eşim Ferhat' a, sevgileriyle dünyamı güzelleştiren canım kızlarım Nisanur ve Elif' e teşekkür ederim.

Çalışmamın her aşamasında sağladıkları motivasyon desteği için Rabia ve Tuba' ya teşekkürü borç bilirim.

Başta ailem olmak üzere; bugünlere gelmemde katkısı olan tüm güzel insanlara müteşekkirim.

Ayşe Nur YURTTAKAL  
ISPARTA, 2022

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.5.1 Nötrosifik tamsayılar .....	40
Şekil 4.1.1 Kartezyen düzlemde $1+I \leq x+yI$ olan $x+yI \in \mathbb{Z}[I]$ kümesi.....	46
Şekil 4.1.2 Kartezyen düzlemde pozitif ve negatif tamsayılar .....	47
Şekil 4.1.3 $\mathbb{Z}[I]+U\{0+0I\}$ kümesinin alt yarılatısı.....	47



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$a \in A$	$a$ , $A$ kümesinin elemanıdır
$a \notin A$	$a$ , $A$ kümesinin elemanı değildir
$a b$	$a$ sayısı, $b$ sayısını böler
$a \nmid b$	$a$ sayısı, $b$ sayısını bölmez
$\bar{a}$	$a$ sayısının eşleniği
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}[I]$	Nötrosifik kompleks sayılar halkası
$\text{Ebob}\{a,b\}$	$a$ ve $b$ sayılarının en büyük ortak böleni
$\text{Ekok}\{a,b\}$	$a$ ve $b$ sayılarının en küçük ortak katı
$F(I)$	Nötrosifik cisim
$F(I_1, I_2)$	Türetilmiş nötrosifik cisim
$I$	Nötrosifik bilinmeyen
$i$	$\sqrt{-1}$
$n!$	$n$ sayısının faktöriyeli
$N(\alpha)$	$\alpha$ sayısının normu
$ N(\alpha) $	$\alpha$ sayısının normunun mutlak değeri
$N(G)=(G[I], *)$	Nötrosifik Grup
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}[I]$	Nötrosifik rasyonel sayılar halkası
$R(+, \cdot)$	Halka
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}[I]$	Nötrosifik reel sayılar halkası
$\mathbb{R}[I]$	Nötrosifik halka
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_n$	$n$ tamsayısına göre kalan sınıfları kümesi
$\mathbb{Z}_n \setminus \{0\} = \mathbb{Z}_n^*$	0 hariç $n$ tamsayısına göre kalan sınıfları kümesi
$\mathbb{Z}[I]$	Nötrosifik tamsayılar halkası
$\mathbb{Z}[I]^+$	Pozitif nötrosifik tamsayılar halkası
$\mathbb{Z}[i]$	Gauss tamsayıları halkası
$\varphi$	Euler fonksiyonu
$  $	Mutlak değer
$\cong$	Yaklaşık değer

## 1. GİRİŞ

Nötrosofi kavramı, 1980 yılında F. Smarandache tarafından doğa ve bilimdeki belirsizliği araştırmak için felsefenin yeni bir dalı ve yeni bir mantık çeşidi olarak sunulmuş, ilk özellikleri Smarandache tarafından verilmiştir. Smarandache' nin çalışmalarına göre her fikir üç doğruluk değeriyle sunulabilir: doğruluk, yanlışlık ve belirsizlik. Nötrosofi, kelime anlamı olarak da "nötr" ve "sofi" kelimelerinin birleşimi olup "nötr düşünce" olarak ifade edilebilir. Nötrosofi, fuzzy lojikin bir genişlemesi olan nötrosofik lojike dayalı bir kavramdır ve bir bilinmeyen içerir. Nötrosofik küme ise klasik küme teorisinin bir genellemesidir.

Gerçek dünya problemlerinin çoğunda veya genel olarak gördüğümüz durumlarda bir olayın meydana gelmesi veya gelmemesi her zaman net bir şekilde ifade edilemeyebilir. Meydana gelip gelmeme belirsiz olabilir. Bu nedenle bu tür durumları kolay bir şekilde karşılayabilen bir yapı olarak nötrosofik halkalar tanımlanmıştır. Gerçek hayatta, optimizasyon yöntemlerinden akıllı sistemlere, bilgisayardan tıbbi araştırmalara kadar birçok alanda uygulanma fırsatı bulan nötrosofi, kısa zamanda cebirsel çalışmalardaki yerini de almıştır. Birçok durumda belirsizlik kavramının hayali kavramdan daha somut olduğu hissedilmiş, bu nedenle nötrosofik cebirsel kavramlar tanımlanmıştır.

Genel olarak cebirsel yapıya  $I^2=I$  şartını sağlayan belirsiz bir  $I$  ögesi eklenip  $I$ , cebirsel yapının elemanlarına bir ikili işlemle bağlanarak nötrosofik cebirsel yapılar oluşturulmuştur. Bu cebirsel yapılardan bazıları nötrosofik yarıgrup, nötrosofik grup, nötrosofik halka, nötrosofik cisim ve nötrosofik vektör uzayıdır. Örneğin;  $(G,*)$  bir grup olmak üzere  $\langle G \cup I \rangle = \{a + bI : a, b \in G\}$  olsun.  $(\langle G \cup I \rangle, *) = N(G)$  yapısına  $G$  grubundaki ikili işlem altında  $G$  ve  $I$  ile üretilen nötrosofik grup denir. Ayrıca karmaşık sayılar halkasının  $i^2 = -1$  şartını sağlayan bir "  $i$  " ögesini içermesi gibi, bilinen bir halkaya  $I$  belirsiz ögesinin eklenmesiyle de nötrosofik halkalar elde edilir.

## 2. KAYNAK ÖZETLERİ

İlk olarak F. Smarandache tarafından felsefenin bir dalı olarak ortaya atılan nütrosofi kavramı, zamanla farklı alanlarda çalışılarak geliştirilmiştir. Fuzzy küme kavramından yola çıkılarak tanımlanan kavram, birçok alanda önemli problemlere uyarlanmıştır. Matematikte de nütrosofik cebirsel yapılar tanımlanmış; nütrosofik grup, nütrosofik halka, nütrosofik cisim ve nütrosofik vektör uzayı gibi kavramlar tanımlanmıştır.

1980 li yıllarda F. Smarandache nütrosofi kavramının ilk özelliklerini vermiştir. Nütrosofi kavramını kullanarak Vasantha Kandasamy ve Florentin Smarandache, nütrosofik cebirsel yapılarla ilgili çalışmalar yapmışlardır. Kandasamy ve Smarandache (2006), Neutrosophic Rings isimli çalışmalarında nütrosofik gruplar ve nütrosofik halkalarla ilgili temel özellikleri vermişlerdir. Bu özellikler arasında, nütrosofik grubun mertebesi, sonlu ve sonsuz mertebeli nütrosofik gruplar, nütrosofik normal alt gruplar, nütrosofik gruplarda yan kümeler, maksimal nütrosofik ideal, nütrosofik cisim, nütrosofik halkada karakteristik, pseudo nütrosofik halka, nütrosofik homomorfizm, nütrosofik bölüm halkası sayılabilir.

2011 yılında Agboola v.d., nütrosofik polinom halkalarının özelliklerini incelemişlerdir. Bu doğrultuda, nütrosofik polinom halkaları tanımlanmış ve bu halkalarda has idealler, asal idealler ve tek çarpanlama bölgesi özellikleri incelenmiştir. 2012 yılında Agboola v.d., nütrosofik halkaların idealleri ve nütrosofik bölüm halkalarını çalışarak önceki çalışmalarını genişletmişlerdir.

$Z[i]=\{a + bi: a, b \in Z\}$  kümesiyle tanımlanan ve nütrosofik tamsayılar halkasına benzerlik gösteren Gauss tamsayılar halkasının cebirsel özellikleri Conrad'ın (2013) çalışmasında detaylı olarak ele alınmıştır. Bu çalışmada Gauss tamsayılarının normu, bölünebilirlik, bölme algoritması, Öklid algoritması ve Bezout teoremi, tek çarpanlama, modüler aritmetik, asal sayılar vb. konular

çalışılmış,  $\mathbb{Z}$  tamsayılar kümesinin cebirsel özellikleri, Gauss tamsayılar kümesinde incelenmiştir.

Abobala M. (2020),  $F$  bir cisim olmak üzere bir  $F[I]$  nütrosifik cismi üzerinde tanımlanan bir nütrosifik cebirsel lineer denklem ve bir nütrosifik kuadratik denklemin çözüm kümesini vermiş;  $F[I_1, I_2]$  türetilmiş cismi üzerinde tanımlı türetilmiş nütrosifik lineer denklem ve türetilmiş nütrosifik kuadratik denklemin çözüm kümesini araştırmıştır.

Çeven Y. ve Tekin Ş. S. (2020), bir nütrosifik rasyonel sayının tersi, nütrosifik tamsayılar kümesinde tersinir elemanlar, bir nütrosifik tamsayının eşleniği ve normu, nütrosifik tamsayılarda bölünebilme, asal nütrosifik tamsayılar ve bunların formlarını vermiş, temel özelliklerini incelemişlerdir.

Abobala M. (2021),  $X$  ve  $Y$  bilinmeyen olmak üzere  $X^2 - DY^2 = N$ ;  $D, N \in \mathbb{Z}$  olarak bir Diofant denklemi formunda ifade edilen Pell denklemini  $\mathbb{Z}[I]$  nütrosifik tamsayılar kümesine uyarlayarak bu denklemin çözüm kümesini araştırmış,  $\mathbb{Z}[I]$  için Euler fonksiyonunu tanımlamıştır. Ayrıca bu çalışmada  $\mathbb{Z}[I]$  da lineer kongrüans sistemlerinin çözüm kümesini araştırmıştır.

Çeven Y. ve Yurttakal A. N. (2021),  $\mathbb{Z}[I]$  kümesinde bir " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısı ve bir denklik bağıntısı tanımlamışlar, denklik bağıntısıyla denklik sınıfları oluşturup  $\mathbb{Z}[I]$  nin ayrışımını elde etmişlerdir. Bu denklik sınıflarını sıralı ikililer şeklinde ifade ederek bilinen kartezyen koordinat sisteminde nütrosifik tamsayıları göstermişlerdir. Denklik sınıflarını doğrularla ifade ederek eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini kartezyen koordinat sisteminde bölgesel olarak belirlemişlerdir. Pozitif ve negatif nütrosifik tamsayı tanımlarını vererek, denklik sınıflarını latis diyagramı ile göstermiş, pozitif bir nütrosifik tamsayının faktöriyeli, bir nütrosifik tamsayının kuvvetleri kavramlarını vermişlerdir.

Çeven Y. (2022),  $Z[I]$ ' da bölünebilme özellikleri ve en büyük ortak bölen (ebob) tanımından yola çıkarak bir nütrosifik tamsayının ebob'unun pozitif ve tek olduğunu ispatlamış, bu ebob'un maksimal normlu ortak bölen olduğunu göstermiştir. Çeven Y.,  $Z$  tam sayılar halkasındakine benzer şekilde Öklid Algoritması'ndan yola çıkılarak iki nütrosifik tamsayının ebob'unun bulunabileceğini göstermiş, Bezout Teoremi' nin  $Z[I]$  halkası için de sağlandığını ispatlamıştır. Nütrosifik tamsayılar için en küçük ortak kat (ekok) tanımını vererek, tamsayılardakinden farklı olarak, iki nütrosifik tamsayının ebob ile ekok'unun çarpımının sayıların çarpımına veya sayılar çarpımının eksilisine eşit olduğunu göstermiştir. Çalışmada son olarak negatif, pozitif ve ne negatif ne pozitif nütrosifik tamsayıların birbirleriyle çarpımlarının negatif, pozitif veya ne negatif ne pozitif olma durumları incelenmiştir.

### 3. NÖTROSOFİK SAYI HALKALARI

#### 3.1. Nötrosofik Halkalar

Bu bölümde nötrosofik grup tanımı ve nötrosofik grupların temel özellikleri verilecek, nötrosofik halka tanımı ve nötrosofik halkaların özelliklerinden hareketle nötrosofik tamsayılar halkasına geçiş yapılacaktır. Bu bölümde verilecek bilgiler Vasantha Kandasamy ve Florentin Smarandache (2006) kaynağından alınmıştır.

**Tanım 3.1.1**  $(G, *)$  bir grup olsun.  $I$  elemanı  $I^2=I$  özelliğini sağlayan bir bilinmeyen olmak üzere  $N(G)=\langle G \cup I, * \rangle$  kümesine  $*$  işlemi altında  $G$  ve  $I$  tarafından üretilen nötrosofik grup denir.  $G$ , bir toplamsal grup olduğunda nötrosofik grup  $\langle G \cup I \rangle = \{a + bI : a, b \in G\}$  biçiminde,  $G$  bir çarpımsal grup olduğunda da nötrosofik grup  $\langle G \cup I \rangle = G \cup \{aI : a \in G\}$  biçimindedir.

**Örnek 3.1.1**  $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  kümesi 5 modülüne göre toplama işlemi altında bir grup yapısıdır.  $N(Z_5) = \langle Z_5 \cup I \rangle = (Z_5[I], +) = \{a + bI : a, b \in Z_5\}$  kümesi, bilinen toplama işlemi altında  $Z_5$  ve  $I$  ile üretilen bir nötrosofik gruptur. Bu kümenin elemanları  $\langle Z_5 \cup I \rangle = \{0, I, 2I, 3I, 4I, 1, 1 + I, 1 + 2I, 1 + 3I, 1 + 4I, 2, 2 + I, 2 + 2I, 2 + 3I, 2 + 4I, 3, 3 + I, 3 + 2I, 3 + 3I, 3 + 4I, 4, 4 + I, 4 + 2I, 4 + 3I, 4 + 4I\}$  şeklindedir.  $(Z_5 \cup I)$  kümesi incelendiğinde bilinen toplama işlemine göre grup olduğu görülür.

**Örnek 3.1.2**  $G = Z_5 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$  kümesi 5 modülüne göre çarpma işlemi altında bir gruptur. Bu durumda  $N(G) = \{1, 2, 3, 4, I, 2I, 3I, 4I\}$  şeklindedir.  $N(G)$  kümesi,  $G$  kümesinin işlemi altında  $G \cup I$  tarafından üretilen nötrosofik gruptur. Ancak  $N(G)$  kümesinin grup olmadığı açıktır. Çünkü  $I^2=I$  şartını sağladığını bildiğimiz  $I$  belirsiz elemanı için  $I$  elemanının tersi yoktur.

**Teorem 3.1.1**  $(G, *)$  bir grup,  $N(G) = \langle G \cup I, * \rangle$ ,  $*$  işlemi altında  $G$  ve  $I$  tarafından üretilen nötrosofik grup olsun.

1.  $N(G)$  genel olarak bir grup değildir.
2.  $N(G)$  daima bir grup içerir.

**İspat** Kandasamy ve Smarandache (2006), Teorem 1.1.1' de verilmiştir.

**Örnek 3.1.3**  $Z[I]$ ,  $Q[I]$ ,  $R[I]$ ,  $C[I]$  kümeleri bildiğimiz toplama işlemine göre sırayla tam sayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar ve kompleks sayılar kümelerinin nütrosifik gruplarıdır.

**Örnek 3.1.4**  $Q^*[I]$ ,  $R^*[I]$ ,  $C^*[I]$  kümeleri bildiğimiz çarpma işlemine göre sırayla rasyonel sayılar, reel sayılar ve kompleks sayılar kümelerinin nütrosifik gruplarıdır.

**Tanım 3.1.2**  $(R, +, \cdot)$  bir halka,  $I$  da  $I^2=I$  özelliğini sağlayan bir eleman olsun.  $\langle R \cup I \rangle = R[I] = \{a + bI : a, b \in R\}$  kümesine,  $R'$  nin işlemleri altında  $R$  ve  $I$  ile üretilen nütrosifik halka denir.  $R$  halkası bir cisim ise  $R[I]$ ' ya nütrosifik cisim denir.

**Örnek 3.1.5**  $Z[I]$ ,  $Q[I]$ ,  $R[I]$ ,  $C[I]$  kümeleri bildiğimiz toplama ve çarpma işlemlerine göre sırasıyla tamsayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar ve kompleks sayılar kümelerinin nütrosifik halkalarıdır. Burada çalışmanın ana konusu olan nütrosifik tamsayılar kümesi açık olarak  $Z[I] = \{a + bI : a, b \in Z\}$  şeklinde yazılabilir. □

$Q$ ,  $R$  ve  $C$  kümeleri, bilinen toplama ve çarpma işlemleri altında cisim olduklarından  $Q[I]$ ,  $R[I]$ ,  $C[I]$  kümeleri de nütrosifik cisimdir. Ancak  $I$  elemanının tersi olmadığından  $Q[I]$ ,  $R[I]$ ,  $C[I]$  nütrosifik halkaları cisim değildir.

**Teorem 3.1.2**  $\langle R \cup I \rangle$  bir nütrosifik halka olsun.  $\langle R \cup I \rangle$  bir halkadır.

**İspat** Kandasamy ve Smarandache (2006), Teorem 2.1.1' de verilmiştir.

**Tanım 3.1.3**  $R[I]$  bir ntrosofik halka olsun. Her  $x, y \in R[I]$  için  $xy=yx$  oluyorsa  $R[I]$ ' ya değişmeli ntrosofik halkadır denir. Ek olarak her  $x \in R[I]$  için  $1.x=x.1=x$  olacak Şekilde  $1 \in R[I]$  varsa  $R[I]$  ya birimli değişmeli bir ntrosofik halkadır denir.

**rnek 3.1.6**  $Z[I]=\{a+bi: a, b \in Z\}$  ve  $Q[I]=\{a+bi: a, b \in Q\}$  olduğunu biliyoruz.  $Z[I]$  ve  $Q[I]$ , birimi  $1+0.I=1$  olan değişmeli halkalardır. Ayrıca  $Z \subset Z[I]$  ve  $Q \subset Q[I]$  olduğu açıktır.

### 3.2. Bazı Ntrosofik Cebirsel Denklemler zerine

Tezin bu kısmında  $R$  reel sayılar cismi üzerinde tanımlı klasik denklemlerden yola çıkılarak ntrosofik reel sayılar cisminin elemanlarıyla kurulan bazı cebirsel denklemler incelenecektir. Bu kısımda ntrosofik cebirsel denklem adı altında, ntrosofik lineer denklem ve ntrosofik kuadratik denklemler incelenecek ve bir  $F[I]$  ntrosofik cisminde ntrosofik cebirsel denklemi çözen temel algoritmalar verilerek örneklerle açıklanacak ve  $F[I_1, I_2]$  türetilmiş ntrosofik cismi tanıtılacaktır. Bu bölümde verilecek bilgiler Abobala (2020) kaynağından alınmıştır.

**Tanım 3.2.1**  $F[I]$  bir ntrosofik cisim olsun.  $A = a_0 + a_1I, B = b_0 + b_1I \in F[I]$  ve  $X = x_0 + x_1I$  bilinmeyen olmak üzere ntrosofik lineer denklem

$$AX + B = 0$$

biçiminde tanımlanır. Ntrosofik kuadratik denklem ise Őu Şekilde tanımlanır:  $A = a_0 + a_1I, B = b_0 + b_1I, C = c_0 + c_1I \in F[I]$  ve  $X = x_0 + x_1I$  bilinmeyen olmak üzere

$$AX^2 + BX + C = 0.$$

**Teorem 3.2.1**  $A = a_0 + a_1I, B = b_0 + b_1I$  ve  $X = x_0 + x_1I$  olsun.  $AX + B = 0$  denklemi ile aşağıdaki iki lineer denklem denktir.

$$a_0x_0 + b_0 = 0 \quad (3.1)$$

$$(a_0 + a_1)(x_0 + x_1) + (b_0 + b_1) = 0 \quad (3.2)$$

**İspat:**  $AX + B = 0$  denkleminde  $A, X$  ve  $B$  yerlerine konulduğunda  $a_0x_0 + b_0 + (a_0x_1 + a_1x_0 + a_1x_1 + b_1)I = 0$  bulunur. Böylece (3.1) denklemi ve

$$a_0x_1 + a_1x_0 + a_1x_1 + b_1 = 0 \quad (3.3)$$

denklemi elde edilir.(3.1) ile (3.3) toplanırsa  $(a_0 + a_1)(x_0 + x_1) + (b_0 + b_1) = 0$  elde edilir. Bu da (3.2) denklemdir.

**Sonuç 3.2.1** Bir  $F[I]$  nütrosifik cisminde  $AX + B = 0$  nütrosifik lineer denklemini çözmek için (3.1) ve (3.2) denklik sistemi çözülerek istenen çözüm elde edilir.

**Örnek 3.2.1**  $R[I]$  reel sayıların nütrosifik cisminde

$$(1 + 2I)X + (2 - 3I) = 0 \quad (3.4)$$

nütrosifik lineer denklemi ile

$$x_0 + 2 = 0,$$

$$3(x_0 + x_1) + (-1) = 0$$

sistemi denktir. Sistemin çözümü  $x_0 = -2, x_1 = \frac{7}{3}$  olup (3.4) denkleminin

çözümü  $X = -2 + \frac{7}{3}I$  bulunur.

**Örnek 3.2.2**  $Z_3 [I]$  üzerinde

$$(1 + 2I)X + (2 - 3I) = 0 \quad (3.5)$$

nötrosifik lineer denklemi verilsin. Denk sistem:

$$x_0 + 2 = 0$$

$$3(x_0 + x_1) + (-1) = 0.$$

Bu denklem  $Z_3'$  te çözümsüzdür. Öyleyse (3.5) denklemi  $Z_3[I]'$  da çözülebilir değildir.

**Teorem 3.2.2**  $F[I]$  bir nötrosifik cisim,  $AX^2 + BX + C = 0$  bir nötrosifik kuadratik denklem olsun. Bu denklem aşağıdaki iki klasik lineer denkleme denktir:

$$a_0x_0^2 + b_0x_0 + c_0 = 0 \quad (3.6)$$

$$(a_0 + a_1)(x_0 + x_1)^2 + (b_0 + b_1)(x_0 + x_1) + c_0 + c_1 = 0. \quad (3.7)$$

**İspat:**  $AX^2 + BX + C = 0$  denkleminde terimleri yerlerine koyarak  $(a_0x_0^2 + b_0x_0 + c_0) + (2a_0x_0x_1 + a_0x_1^2 + a_1x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_1x_1^2 + b_0x_1 + b_1x_0 + b_1x_1 + c_1)I = 0$  elde edilir. Böylece (3.6) denklemi ve

$$2a_0x_0x_1 + a_0x_1^2 + a_1x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_1x_1^2 + b_0x_1 + b_1x_0 + b_1x_1 + c_1 \quad (3.8)$$

denklemi bulunur. (3.6) ile (3.8) toplanarak  $(a_0 + a_1)(x_0 + x_1)^2 + (b_0 + b_1)(x_0 + x_1) + c_0 + c_1 = 0$  ((3.7) denklemi) elde edilir.

**Sonuç 3.2.2** Bir  $F[I]$  nötrosifik cisminde bir  $AX^2 + BX + C = 0$  nötrosifik kuadratik denklemini çözerken Teorem 3.2.2 ile verilen denklem sistemini çözmek yeterlidir.

**Örnek 3.2.3** Reel sayıların nötrosifik cismi  $R[I]$  üzerinde

$$(1 + I)X^2 + (2 - I)X + 3I = 0 \quad (3.9)$$

nötrosifik kuadratik denklemini verilsin. Eşdeğer sistem:

$$x_0^2 + 2x_0 = 0 \quad (3.10)$$

$$2(x_0 + x_1)^2 + (x_0 + x_1) + 3 = 0. \quad (3.11)$$

Birinci denklemden  $x_0 = 0$  veya  $x_0 = -2$  bulunur. Bu durumda (3.11) denkleminin  $R$  de çözümü olmadığından (3.9) denklemi,  $R[I]$  da çözülebilir değildir.

**Örnek 3.2.4**  $(1 + I)X^2 + (2 - I)X + 3I = 0 \quad (3.12)$

nötrosifik kuadratik denklemini kompleks sayıların nötrosifik cismi olan  $C[I]$  üzerinde düşünelim. Eşdeğer sistem:

$$x_0^2 + 2x_0 = 0 \text{ (çözümü } x_0 = 0 \text{ veya } x_0 = -2) \quad (3.13)$$

$$2(x_0 + x_1)^2 + (x_0 + x_1) + 3 = 0 \quad (3.14)$$

Burada  $x_0 + x_1 = \frac{-1+i\sqrt{23}}{4}$  veya  $x_0 + x_1 = \frac{-1-i\sqrt{23}}{4}$  olmak üzere iki çözüm

sistemi vardır. Böylece  $x_0 = 0$  için  $x_1 \in \left\{ \frac{-1+i\sqrt{23}}{4}, \frac{-1-i\sqrt{23}}{4} \right\}$  ve  $x_0 = -2$

için  $x_1 \in \left\{ 2 + \frac{-1+i\sqrt{23}}{4}, 2 + \frac{-1-i\sqrt{23}}{4} \right\}$  bulunur. (3.12) denkleminin çözümü

$X = \frac{-1+i\sqrt{23}}{4}I$ , veya  $X = \frac{-1-i\sqrt{23}}{4}I$ , veya  $X = -2 + \left( 2 + \frac{-1+i\sqrt{23}}{4} \right)I$ , veya

$X = -2 + \left( 2 + \frac{-1-i\sqrt{23}}{4} \right)I$  şeklindedir.

**Teorem 3.2.3** Bir nötrosifik  $F[I]$  cismi üzerinde  $n$  değişkenli bir nötrosifik lineer denklem,  $C = c_0 + c_1I, A_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}I, X_i = x_0^{(i)} + x_1^{(i)}$ ;  $c_i, x_j^{(i)}, a_j^{(i)} \in F$  olmak üzere

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \dots + A_nX_n = C \quad (3.15)$$

olsun. (3.15) denklemi aşağıdaki denklem sistemine denktir :

$$a_0^{(1)}x_0^{(1)} + a_0^{(2)}x_0^{(2)} + \dots + a_0^{(n)}x_0^{(n)} = c_0. \quad (3.16)$$

$$(a_0^{(1)} + a_1^{(1)})(x_0^{(1)} + x_1^{(1)}) + (a_0^{(2)} + a_1^{(2)})(x_0^{(2)} + x_1^{(2)}) + \dots + (a_0^{(n)} + a_1^{(n)})(x_0^{(n)} + x_1^{(n)}) = c_0 + c_1. \quad (3.17)$$

**İspat:** Abobala (2020)

**Sonuç 3.2.3** Bir  $F[I]$  nötrosifik cismindeki bir nötrosifik lineer denklem sistemi  $F$  cisminde bilinen anlamda bir denklem sistemiyle çözülebilir.

**Örnek 3.2.5** Reel sayılar nötrosifik cisminde aşağıdaki nötrosifik lineer sistemi verilsin:

$$(1 + I)X + (2 - I)Y = 1 + 3I \quad (3.18)$$

$$(2 + I)X + 5IY = -1 + I \quad (3.19)$$

(3.18) denkleminin eşdeğer denklem sistemi

$$x_0 + 2y_0 = 1 \quad (3.20)$$

$$2(x_0 + x_1) + (y_0 + y_1) = 4, \quad (3.21)$$

(3.19) denkleminin eşdeğer denklem sistemi:

$$2x_0 + 0 \cdot y_0 = -1 \quad (3.22)$$

$$3(x_0 + x_1) + 5(y_0 + y_1) = 0. \quad (3.23)$$

(3.20) ve (3.22) eşitliklerinden  $x_0 = -\frac{1}{2}, y_0 = \frac{3}{4}$  elde edilir. (3.21) ve (3.23)

eşitliklerinden de  $x_0 + x_1 = \frac{20}{7}, y_0 + y_1 = -\frac{12}{7}$  elde edilir.  $x_0$  ve  $y_0$  değerleri

yerlerine yazılırsa  $x_1 = \frac{47}{14}$  ve  $y_1 = -\frac{69}{28}$  bulunur. Öyleyse  $X = -\frac{1}{2} + \frac{47}{14}I$  ve

$Y = \frac{3}{4} - \frac{69}{28}I$  çözümdür.

**Tanım 3.2.2**  $F$  bir cisim ve  $I_1, I_2$  belirsiz iki eleman olsun.  $F(I_1, I_2) = \{(a, bI_1, cI_2) : a, b, c \in F\}$  ile verilen nütrosifik yapıya  $F$  cisminin işlemleri altında  $I_1$  ve  $I_2$  tarafından üretilen türetilmiş (refined) nütrosifik cisim denir.

**Tanım 3.2.3**  $F(I_1, I_2)$  bir türetilmiş nütrosifik cisim olsun.  $A = (a_0, a_1I_1, a_2I_2), B = (b_0, b_1I_1, b_2I_2), X = (x_0, x_1I_1, x_2I_2); b_i, a_i, x_i \in F$  olmak üzere  $AX + B = (0, 0, 0)$  denkleminin tek değişkenli türetilmiş nütrosifik lineer denklem ve  $C = (c_0, c_1I_1, c_2I_2)$  olmak üzere  $AX^2 + BX + C = (0, 0, 0)$  denkleminin tek değişkenli türetilmiş nütrosifik kuadratik denklem denir.

### 3.3. Nütrosifik Tamsayıların Bazı Özellikleri

Tezin bu kısmında  $Z \subset Z[I]$  olduğu gözönünde bulundurularak  $Z$  tamsayılar kümesinin özelliklerinin  $Z[I]$  nütrosifik tamsayılar kümesinde genişlemeleri olan bölünebilirlik, asallık, çarpanlarına ayrılış ve norm konularında bilgiler verilmiştir. Burada verilecek bilgiler Çeven ve Tekin (2020) kaynağından alınmıştır.

**Teorem 3.3.1**  $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$  olsun.  $x+yi \in \mathbb{Z}[i]$  için  $(a+bi)(x+yi) \in \mathbb{Z}$  olması için gerek ve yeter şart  $x=(a+b)k$  ve  $y=-bk$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) olmasıdır.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ):  $x+yi \in \mathbb{Z}[i]$  için  $(a+bi)(x+yi) \in \mathbb{Z}$  olsun. Çarpım açılırsa;  
 $ax + ayi + bxi + byi = ax + (bx + (a + b)y)i \in \mathbb{Z}$  olur. Buradan  $bx + (a + b)y = 0$  olup  $bx = -(a + b)y$  bulunur. Öyleyse  $x = -(a + b)k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ve  $y = -bk$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  olmalıdır.

( $\Leftarrow$ ):  $x = (a + b)k$ ,  $y = -bk$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) olsun.  $(a + bi)(x + yi)$  çarpımında  $x$  ve  $y$  yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}(a + bi)((a + b)k - bki) &= a(a + b)k + [b(a + b)k - b^2k - abk]i \\ &= a(a + b)k + 0i \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 3.3.2**  $\mathbb{Z}[i]$ 'nin tersinir elemanlarının kümesi  $\{\pm 1, \pm(1 - 2i)\}$ 'dir.

**İspat**  $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$  alalım.  $a+bi$  tersinir eleman ve tersi de  $x+yi$  olsun. Buradan  $(a + bi)(x + yi) = 1$  olmalıdır.  $ax + (bx + (a + b)y)i = 1 + 0i$  denkleminde  $ax = 1$  ve  $bx + (a + b)y = 0$  bulunur. Buradan da aşağıdaki durumlar elde edilir:

**Durum 1:**  $a = x = 1$  ve  $b + (1 + b)y = 0$  olur ki  $y = -\frac{b}{1+b}$  bulunur.  $y \in \mathbb{Z}$

olacağından  $b=0$  ve  $y=0$  veya  $b=-2$  ve  $y=-2$  çifti bulunur. Buradan  $1 - 2i$  ve  $1 + 0i$  tersinir elemanlar olarak elde edilir.

**Durum 2:**  $a = x = -1$  ve  $-b + (-1 + b)y = 0$  olur ki  $y = \frac{b}{-1+b}$  bulunur.  $y \in \mathbb{Z}$

olacağından  $b=0$  ve  $y=0$  veya  $b=2$  ve  $y=2$  çifti bulunur. Buradan  $-1 + 2i$  ve  $-1 + 0i$  tersinir elemanlar olarak elde edilir. Ayrıca bulunan bu tersinir elemanların tersleri de kendileridir.

**Teorem 3.3.3**  $\mathbb{Q}[I]$  nütrosifik rasyonel sayılar kümesinin tersinir elemanlarının kümesi  $U = \{a + bI : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0, a + b \neq 0\}$  şeklindedir ve bir  $a + bI \in U$  için  $(a + bI)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+b)}I$  'dır.

**İspat**  $a + bI \in \mathbb{Q}[I]$  alalım.  $a + bI$ ' nin tersi de  $x + yI$  olsun.  $(a + bI)(x + yI) = 1$  olduğundan  $ax = 1$  ve  $bx + (a + b)y = 0$  olup  $x = \frac{1}{a}$  ve  $y = -\frac{b}{a(a+b)}$  bulunur.

Böylece  $(a + bI)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a(a+b)}I$  olduğu görülür.

**Not:**  $(3 - 3I)(0 + 4I) = 0$  olup  $\mathbb{Z}[I]$  nütrosifik halkası sıfır bölenli bir halkadır. Bu sebeple  $\mathbb{Z}[I]$ ' nin tamlık bölgesi olmadığı açıktır. Buna benzer olarak  $\mathbb{Z}$ ' nin kendine has bazı özelliklerinin  $\mathbb{Z}[I]$  nütrosifik halkasında sağlanmadığı da aşağıdaki tanım ve teoremlerden görülecektir.

**Tanım 3.3.1**  $x = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$  alalım.

1.  $a + b - bI$  nütrosifik rasyonel sayısına  $x$ ' in eşleniği denir ve  $\bar{x}$  ile gösterilir.
2.  $x = a + bI$  sayısının normu  $N(x) = x \cdot \bar{x} = a(a + b)$  olarak tanımlanır.

**Teorem 3.3.4**  $x = a + bI$  ve  $y = c + dI \in \mathbb{Q}[I]$  olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:

- i.  $N(x) \in \mathbb{Q}$ ,
- ii.  $x \in \mathbb{Z}[I]$  ise  $N(x) \in \mathbb{Z}$ ,
- iii.  $N(x) = 0 \Leftrightarrow a = 0$  veya  $a = -b$ ,
- iv.  $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow N(a) = a^2$ ,
- v.  $N(bI) = 0$ ,
- vi.  $N(xy) = N(x)N(y)$ ,
- vii.  $x \neq 0$  ve  $N(x) \neq 0$  ise  $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[I]$ ,

viii.  $y \neq 0$  ve  $N(y) \neq 0$  ise  $N\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{N(x)}{N(y)}$ .

**İspat**

i.  $x = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$  olup  $a, b \in \mathbb{Q}'$  dur.  $\mathbb{Q}$  halka olduğundan  $N(x) = N(a + bI) = a(a + b) \in \mathbb{Q}$  bulunur.

ii.  $x = a + bI \in \mathbb{Z}[I]$  ise  $a, b \in \mathbb{Z}$  'dir.  $\mathbb{Z}$  halka olduğundan  $N(x) = N(a + bI) = a(a + b) \in \mathbb{Z}$  bulunur.

iii.  $(\Rightarrow)$ :  $N(x) = N(a + bI) = a(a + b) = 0$  ise  $a = 0$  veya  $a = -b$  bulunur.

$(\Leftarrow)$ :  $a = 0$  veya  $a = -b$  olsun.  $N(x) = N(a + bI) = a(a + b)$  değeri  $a = 0$  için  $N(x) = 0$  ve  $a = -b$  değeri için  $N(x) = 0$  bulunur.

iv.  $a \in \mathbb{Q}$  ise  $a = a + 0I$  olup  $N(a) = a(a + 0) = a^2$  bulunur.

v.  $N(bI) = N(0 + bI) = 0 \cdot (0 + b) = 0$  bulunur.

vi.  $xy = ac + (bc + bd + ad)I$  olup norm tanımında yerlerine yazılırsa

$$N(xy) = ac(ac + bc + bd + ad) = (a^2 + ab)(c^2 + cd) = N(x)N(y)$$

bulunur.

vii.  $x = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$  olduğunu biliyoruz.  $\frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}} = \frac{a+b}{N(x)} - \frac{b}{N(x)}I \in \mathbb{Q}[I]$  bulunur.

viii.  $x = a + bI \in \mathbb{Q}[I]$  olduğu biliniyor.

$$N\left(\frac{1}{x}\right) = N\left(\frac{a+b}{N(x)} - \frac{bI}{N(x)}\right) = \frac{a+b}{N(x)}\left(\frac{a+b}{N(x)} - \frac{b}{N(x)}\right) = \frac{1}{N(x)}$$

olduğundan

$$N\left(\frac{x}{y}\right) = N\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = N(x) \cdot N\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{N(x)}{N(y)}$$

bulunur.

**Teorem 3.3.5**  $u \in \mathbb{Z}[I]$  alalım.  $u$ ' nun tersinir eleman olması için gerek ve yeter şart  $N(u) = \pm 1$  olmasıdır.

**İspat**  $u$ , tersinir eleman olsun. Bu durumda  $u \cdot v = 1$  olacak şekilde bir  $v \in \mathbb{Z}[I]$  vardır. Buradan her iki tarafın normu alınır  $N(u \cdot v) = N(1)$  ' dir. Teorem 3.3.4

(vi) 'den normun çarpımsallığı ile  $N(u)N(v) = 1$  ve buradan  $N(u) = \pm 1$  bulunur. Tersine  $u = a + bI$  ve  $N(u) = a(a + b) = \pm 1$  olsun. Buradan  $u$ 'nun  $-1$ ,  $+1$ ,  $1 - 2I$ ,  $-1 + 2I$  sayılarından biri olması gerektiği görülür ki Teorem 3.3.2' den  $u$ , tersinir elemandır.

**Tanım 3.3.2**  $x$  ve  $y$  nütrosifik tamsayılar olmak üzere eğer  $y = xz$  olacak şekilde bir  $z$  nütrosifik tamsayısı varsa  $x, y'$  yi böler denir ve  $x|y$  ile gösterilir.  $x$  ve  $z'$  ye,  $y'$  nin bölenleri denir.

### Örnek 3.3.1

i.  $10 = (5 - 3I).(2 + 3I)$  olup  $(5 - 3I)|10$  ve  $(2 + 3I)|10$  'dur.

ii.  $7 - I$  sayısının  $1 + 3I$  sayısını bölüp bölmediğine bakılırsa:

$$\frac{1 + 3I}{7 - I} = \frac{(1 + 3I)(6 + I)}{(7 - I)(6 + I)} = \frac{6 + 22I}{42} = \frac{1}{7} + \frac{11}{21}I \notin \mathbb{Z}$$

olduğundan  $\mathbb{Z}[I]$ ' da,  $7 - I$  sayısı  $1 + 3I$  sayısını bölmez.

**Teorem 3.3.6**  $a + bI \in \mathbb{Z}[I]$  ve  $m \in \mathbb{Z}$  olsun.  $m|a + bI$  olması için gerek ve yeter şart  $\mathbb{Z}$  'de  $m|a$  ve  $m|b$  olmasıdır.

**İspat**  $\mathbb{Z}[I]$ ' da  $m|(a + bI)$  olsun. Bu durumda  $x, y \in \mathbb{Z}$  için  $a + bI = m(x + yI)$  biçimindedir. Buradan  $a = mx$  ve  $b = my$  ' dir. Böylece  $m|a$  ve  $m|b$  bulunur. Tersinin de doğru olduğu benzer şekilde bulunabilir.  $\square$

Teorem 3.3.6' da  $b=0$  alınırsa tamsayılardaki bölünebilme bağıntısının  $\mathbb{Z}[I]$ ' da da değişmediği görülür. Yani  $a, c \in \mathbb{Z}$  için  $\mathbb{Z}[I]$ ' da  $c|a$  olması için gerek ve yeter şart  $\mathbb{Z}$  'de  $c|a$  olmasıdır. Fakat bu,  $\mathbb{Z}$  'deki diğer özelliklerin aynı kalacağı anlamına gelmez. Örneğin aşağıda  $\mathbb{Z}$  'deki tüm asalların  $\mathbb{Z}[I]$ ' da çarpanlarına ayrılabilirdiği görülecektir.

**Teorem 3.3.7**  $u, v \in \mathbb{Z}[I]$  için  $\mathbb{Z}[I]$ ' da  $u|v$  ise  $\mathbb{Z}$ ' de  $N(u)|N(v)$ ' dir.

**İspat**  $u|v$  olduğundan  $v=w.u$  olacak şekilde bir  $w \in \mathbb{Z}[I]$  vardır. Her iki tarafın normu alınır  $N(v)=N(w.u)=N(w).N(u)$  olur. Buradan da  $\mathbb{Z}'$  de  $N(u)|N(v)$  olarak elde edilir.  $\square$

Teorem 3.3.7' nin tersi genellikle yanlıştır. Örneğin  $2+I$  ve  $3+5I$  sayıları incelenirse  $N(2+I)=2.(2+1)=6$ ;  $N(3+5I)=3.(3+5)=24$  olur. Buradan  $N(2+I)|N(3+5I)$  dır. Fakat  $2+I$ ,  $3+5I$ ' yı bölmez.

**Teorem 3.3.8** Tüm  $u \in \mathbb{Z}[I]$  için en az iki çarpan vardır.

**İspat**  $1 \in \mathbb{Z}[I]$  için,  $1=(1-2I)(1-2I)=(-1+2I)(-1+2I)=(-1)(-1)=1.1$  olduğu açıktır. Buradan her  $u=a+bi \in \mathbb{Z}[I]$  için;

$u=u.1=(-u)(-1)=u(1-2I)(1-2I)=u(-1+2I)(-1+2I)=(-u)(-1+2I)(1-2I)$  biçiminde yazılabilir.  $\square$

$u \in \mathbb{Z}[I]$  alınır  $u$ ' nun daima sekiz tane aşikar çarpanı vardır:  $\pm 1, \pm u, \pm(-1+2I), \pm(1-2I)u$ . Bunlara  $u$ ' nun aşikar çarpanları denir. Bu çarpanların normlarının  $\pm 1$  ve  $\pm N(u)$  olduğuna dikkat edilmelidir.  $u$ ' nun diğer çarpanlarına da aşikar olmayan çarpanlar denir.  $u$ ' nun aşikar olmayan çarpanlarının normları  $\pm 1$  ve  $\pm N(u)$ ' dan farklıdır.

**Tanım 3.3.3**  $u$ , bir nütrosifik tamsayı olsun.  $u$ ' nun en az iki aşikar olmayan çarpanı varsa  $u$ ' ya birleşik nütrosifik tamsayı denir.  $u$ ' nun çarpanları sadece ünit elemanlar ve kendisi ise  $u$ ' ya asal nütrosifik tamsayı denir.

**Örnek 3.3.2**  $3$ ' ün aşikar olmayan bir çarpanlarına ayrılışı  $(1+2I)(3-2I)$ ' dır. Genel olarak  $\mathbb{Z}'$  de bir  $p$  asal için,  $\mathbb{Z}[I]$ ' da  $p$ ' nin bir aşikar olmayan çarpanlarına ayrılışı  $(p+(1-p)I).(1+(p-1)I)$ ' dır. Yani  $p$ ,  $\mathbb{Z}'$  de asal olsa bile  $\mathbb{Z}[I]$ ' da asal değildir.  $3+5I=(1-9I)(3-4I)$  olduğundan  $3+5I$ ,  $\mathbb{Z}[I]$ ' da asal değildir. Dahası  $5-4I$ ,  $\mathbb{Z}[I]$ ' da bir asaldır.

$5 - 4I'$  nın  $Z[I]'$  da asal olduğunu ispatlamak için;  $5 - 4I'$  nin bir birleşik sayı olduğu ve  $5 - 4I = u.v$  olarak aşikar olmayan çarpanlarına ayrıldığı kabul edilsin.  $N(5 - 4I) = N(u.v)$  ve buradan da  $5 = N(u).N(v)$  elde edilir.  $N(u) = \pm 5$  veya  $\pm 1$  olarak bulunur. Çarpanlarına ayırma aşikar olmadığından çelişkiye düşülmüş olur. Böylece  $Z[I]'$  da  $5 - 4I'$  nın sadece aşikar çarpanları vardır ve  $5 - 4I$ ,  $Z[I]'$  da asaldır.

Buradan aşağıdaki teorem yazılabilir:

**Teorem 3.3.9**  $p$ ,  $Z'$  de bir asal osun.  $Z[I]'$  da bir  $x$  nötrosifik tamsayısının normu  $\pm p$  ise  $x$ ,  $Z[I]'$  da asaldır.

**İspat**  $u \in Z[I]$  ve  $N(u) = p$  olsun.  $u$ ' nun birleşik bir sayı olduğunu kabul edilsin ve  $x, y \in Z[I]$  için  $u = x.y$  olarak aşikar olmayan çarpanlarına ayrılınsın. Her iki tarafın normu alınarak  $p = N(x).N(y)$  elde edilir. Buradan  $N(x) = \pm 1$  veya  $\pm p$ ' dir. Böylece  $u$ ' nun aşikar çarpanları bulunur. Bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla normu  $\pm p$  olan bir nötrosifik tamsayı,  $Z[I]'$  da asaldır.

**Sonuç 3.3.1**  $p$ ,  $Z'$  de bir asal sayı olmak üzere,  $Z[I]'$  da asal sayılar aşağıdaki formlardan birine sahiptir:

$$\pm(p + (1 - p)I), \pm(p - (1 + p)I), \pm(1 + (p - 1)I), \pm(1 - (p + 1)I).$$

**İspat**  $a + bI \in Z[I]$  olmak üzere  $N(a + bI) = a.(a + b) = \pm p$  ise sekiz farklı durum vardır. Bunlar:

$$a = -p \text{ ve } a + b = -1 \text{ için } b = -1 + p \text{ olup asal sayı: } -p + (-1 + p)I$$

$$a = p \text{ ve } a + b = -1 \text{ için } b = -1 - p \text{ olup asal sayı: } p - (1 + p)I$$

$$a = -p \text{ ve } a + b = 1 \text{ için } b = 1 + p \text{ olup asal sayı: } -p + (1 + p)I$$

$$a = p \text{ ve } a + b = 1 \text{ için } b = 1 - p \text{ olup asal sayı: } p + (1 - p)I$$

$$a = -1 \text{ ve } a + b = p \text{ için } b = p + 1 \text{ olup asal sayı: } -1 + (p + 1)I$$

$$a = -1 \text{ ve } a + b = -p \text{ için } b = -p + 1 \text{ olup asal sayı: } -1 + (-p + 1)I$$

$$a = 1 \text{ ve } a + b = p \text{ için } b = p - 1 \text{ olup asal sayı: } 1 + (p - 1)I$$

$a = 1$  ve  $a + b = -p$  için  $b = -p - 1$  olup asal sayı:  $1 - (p + 1)I$ .

**Teorem 3.3.10** Normu bir çift sayı olan nütrosifik tamsayıların bir çarpanı  $2-I$  veya  $1+I'$  dir.

**İspat**  $a + bI \in Z[I]$  ve  $N(a + bI) = a \cdot (a + b)$  çift sayı olsun. Buradan  $k \in Z[I]$  olmak üzere  $a = 2k$  ise  $2k + bI = (k + (k + b)I)(2 - I)$  ve  $N(2 - I) = 2$  olup  $a + bI, 2 - I$  nın bir katıdır. Eğer  $k, t \in Z$  olmak üzere  $a = 2k + 1$  ve  $b = 2t + 1$  ise  $2k + 1 + (2t + 1)I = (2k + 1 + (t - k)I)(1 + I)$  ve  $N(1 + I) = 2$  olup  $a + bI, 1 + I'$  nın bir katıdır.

**Teorem 3.3.11** (Bölme Algoritması)  $u, v \in Z[I]$  ve  $N(v) \neq 0$  olsun.

$$u = qv + r, |N(r)| < |N(v)|$$

olacak şekilde  $q, r \in Z[I]$  vardır.

**İspat**  $N(v) \neq 0$  olduğundan  $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}[I]$ ' dir.  $x, y \in \mathbb{Q}$  olmak üzere  $\frac{u}{v} = x + yI$  olsun.

$m, n \in Z$  de sırasıyla  $x$  ve  $y'$  ye en yakın tamsayılar olsunlar.  $|x - m| \leq \frac{1}{2}$  ve

$|y - n| \leq \frac{1}{2}$  yazılabilir.  $q = m + nI$  olsun. Buradan;

$$\begin{aligned} N\left(\frac{u}{v} - q\right) &= N((x - m) + (y - n)I) \\ &= (x - m)((x - m) + (y - n)) \\ &= (x - m)^2 + (x - m)(y - n) \\ &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \left|N\left(\frac{u}{v} - q\right)\right| &= \left|N\left(\frac{u - qv}{v}\right)\right| \\ &= \left|\frac{N(u - qv)}{N(v)}\right| \\ &= \frac{|N(u - qv)|}{|N(v)|} < 1 \end{aligned}$$

olduğundan  $|N(u - qv)| < |N(v)|$  elde edilir.  $u - qv = r$  alınarak sonuca ulaşılır.

**Örnek 3.3.3**  $u=5 + 6I$  ve  $v=3 + 2I$  olsun.

$$\frac{u}{v} = \frac{5 + 6I}{3 + 2I} = \frac{(5 + 6I)(5 - 2I)}{(3 + 2I)(5 - 2I)} = \frac{25 + 8I}{15} = \frac{25}{15} + \frac{8}{15}I = x + yI$$

olsun.  $25/15$ 'e ve  $8/15$ 'e en yakın tamsayılar olarak  $m=2$  ve  $n=1$  alınırsa  $q=2+I$  ve  $r = u - qv = (5+6I) - (3+2I)(2+I) = -1 - 3I$  bulunur.  $u = qv + r$  olup  $|N(r)| = 4 < |N(v)| = 15$  sağlanmış olur.  $\square$

$Z$  ve  $Z[I]$ 'daki bölme algoritmaları arasında önemli bir farklılık olduğuna da dikkat etmek gerekir ki  $Z[I]$ 'da bölen ve kalan tek değildir.

**Örnek 3.3.4**  $u=8 + 6I$  ve  $v=3 + 2I$  olsun.

$$\frac{u}{v} = \frac{8 + 6I}{3 + 2I} = \frac{(8 + 6I)(5 - 2I)}{(3 + 2I)(5 - 2I)} = \frac{40 + 2I}{15} = \frac{40}{15} + \frac{2}{15}I$$

$40/15$ 'e ve  $2/15$ 'e en yakın tamsayılar alınırsa;

$$8 + 6I = (3 + 2I)(2 + I) + 2 - 3I \text{ ve } 8 + 6I = (3 + 2I)(4 - I) - 4 + 3I$$

şeklinde yazılabilir. Burada hem  $|N(2 - 3I)| = 2 < |N(3 + 2I)| = 15$  hem de  $|N(-4 + 3I)| = 4 < |N(3 + 2I)| = 15$  olup her iki eşitlik de sağlanmış olur.

### 3.4. Nötrosifik Sayılar Teorisinin Kısmi Temelleri

Tezin bu kısmında  $X$  ve  $Y$  bilinmeyen olmak üzere  $X^2 - DY^2 = N$ ;  $D, N \in \mathbb{Z}$  olarak bir Diophantine denklemi formunda ifade edilen Pell denklemi,  $Z[I]$  nötrosifik tamsayılar kümesine uyarlanmış, elde edilen denklemin çözüm kümesi araştırılmış,  $Z[I]$  için Euler fonksiyonunu tanımlanmıştır. Ayrıca bu çalışmada  $Z[I]$  da lineer kongrüans sistemlerinin çözüm kümesi araştırılmıştır. Bu bölümde verilecek bilgiler, Abobala M. (2021) kaynağından alınmıştır.

**Tanım 3.4.1** Pell denklemi,  $X^2 - DY^2 = N, D, N \in \mathbb{Z}$  formundaki Diophantine denklemdir.

**Teorem 3.4.1**  $X^2 - DY^2 = 1$  denkleminin bir çözümü varsa  $D > 0$  ve  $D$ , karekökten bağımsız bir sayıdır.

**Teorem 3.4.2**  $d_1$ , karekökten bağımsız bir tamsayı olmak üzere  $Z[d_1]$  bir tamlık bölgesidir.

**Tanım 3.4.2**  $R[I] = \{a + bI : a, b \in R\}$  nütrosifik reel sayılar cismi olmak üzere  $a + bI \leq c + dI$  olması için gerek ve yeter şart  $a \leq c$  ve  $a + b \leq c + d$  olmasıdır.

**Teorem 3.4.3** Tanım 3.4.2 de verilen bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

**Uyarı 3.4.1** Tanım 3.4.2' ye göre pozitif nütrosifik reel sayılar şu şekilde tanımlanabilir:

$$a + bI \geq 0 = 0 + 0I; a \geq 0, a + b \geq 0$$

$R[I]$  üzerinde mutlak değer şu şekilde tanımlanabilir:

$$|a + bI| = |a| + I[|a + b| - |a|]; |a + bI| \geq 0$$

**Örnek 3.4.1**  $x = 2 - I$ ,  $2 \geq 0$  ve  $(2 - 1) = 1 \geq 0$  olduğundan bir pozitif nütrosifik reel sayıdır.

**Teorem 3.4.4** ( $Z[I]$ ' da bölme)  $Z[I] = \{a + bI : a, b \in Z\}$  nütrosifik tamsayılar halkası ve  $x = x_1 + x_2I$  ile  $y = y_1 + y_2I$  da  $Z[I]$ 'da iki eleman olsun.  $x|y$  olması için gerek ve yeter şart  $x_1|y_1$  ve  $x_1 + x_2|y_1 + y_2$  olmasıdır.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ):  $x|y$  olsun. Buradan  $r.x = y$  olacak şekilde  $r = r_1 + r_2I \in Z[I]$  vardır. Bu da  $(r_1 + r_2I)(x_1 + x_2I) = y_1 + y_2I$  demektir. Buradan;

$$r_1x_1 = y_1 \text{ yani } x_1|y_1 \tag{3.24}$$

$$r_1x_2 + r_2x_1 + r_2x_2 = y_2 \tag{3.25}$$

(3.24)' i, (3.25)' e ekleyerek;

$$r_1x_1 + r_1x_2 + r_2x_1 + r_2x_2 = y_1 + y_2 \text{ ya da } (r_1 + r_2)(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

bulunur. Buradan da  $x_1 + x_2 | y_1 + y_2$  olur.

( $\Leftarrow$ ): Tersine  $x_1 | y_1$  ve  $x_1 + x_2 | y_1 + y_2$  olsun. Buradan  $ax_1 = y_1$  ve  $b(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{Z}[I]$  vardır.  $r = a + (b - a)I$  ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} rx &= (a + (b - a)I)(x_1 + x_2)I \\ &= ax_1 + (b(x_1 + x_2) - ax_1)I \\ &= y_1 + (y_1 + y_2 - y_1)I \\ &= y_1 + y_2I = y \end{aligned}$$

olup  $x|y$ ' dir.

**Tanım 3.4.3** (Asallar)  $\mathbb{Z}[I] = \{a + bI : a, b \in \mathbb{Z}\}$  nütrosifik tamsayılar halkasında herhangi bir  $x \in \mathbb{Z}[I]$  elemanı için,  $x|y.z$  şartı  $x|y$  veya  $x|z$  olduğunda sağlanıyorsa  $x$ ' e asaldır denir.

**Tanım 3.4.4** (Kongrüans)

(a)  $x = a + bI, y = c + dI, z = m + nI \in \mathbb{Z}[I]$ ' da üç eleman olsun.  $x \equiv y \pmod{z}$  olması için gerek ve yeter şart  $z | x - y$  olmasıdır.

(b)  $z = \text{ebob}\{x, y\}$  olması için gerek ve yeter şart  $z | x, z | y$  ve her  $c | x, c | y$  olan  $c$  elemanı için  $c | z$  olmasıdır.

$\mathbb{Z}[I]$ ' da  $x$  ve  $y$ ' nin aralarında asal olması için gerek ve yeter şart  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  olmasıdır.

**Teorem 3.4.5** ( $\mathbb{Z}[I]$ ' da kongrüanslar)

$x = a + bI, y = c + dI, z = m + nI \in \mathbb{Z}[I]$ ' da üç eleman olsun.  $x \equiv y \pmod{z}$  olması için gerek ve yeter şart  $a \equiv c \pmod{m}$  ve  $a + b \equiv c + d \pmod{m + n}$  olmasıdır.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ):  $x \equiv y \pmod{z}$  olsun. Buradan  $z | (x - y)$  yani  $(m + nI) | (a - c) + (b - d)I$  olur. Bu da  $m | (a - c)$  ve  $m + n | (a + b) - (c + d)$  demektir. Buradan

$a \equiv c \pmod{m}$  ve  $a + b \equiv c + d \pmod{m + n}$  bulunur.

( $\Leftarrow$ ): Tersine  $a \equiv c \pmod{m}$  ve  $a + b \equiv c + d \pmod{m + n}$  olsun. Buradan  $m|a - c$  ve  $m + n|(a + b) - (c + d)$  olur. Bu ifade  $m + n|(a - c) + (b - d)$  şeklinde de yazılabilir. Öyleyse  $m + n|(a - c) + (b - d)$  yani  $z|x - y$  olur ki buradan  $x \equiv y \pmod{z}$  bulunur.

**Teorem 3.4.6**  $x=a+bI$ ,  $y=c+dI$ ,  $z=m+nI$   $Z[I]$ ' da üç eleman olsun. Eğer  $m=\text{ebob}\{a, c\}$  ve  $m+n=\text{ebob}\{a+b, c+d\}$  ise  $z=\text{ebob}\{x, y\}$ ' dir.

**İspat**  $m=\text{ebob}\{a, c\}$  ve  $m+n=\text{ebob}\{a+b, c+d\}$  olacak şekilde  $z=m+nI$  olsun.

$m=\text{ebob}\{a, c\} \mid a$  ve  $m=\text{ebob}\{a, c\} \mid c$ ;  $m+n=\text{ebob}\{a+b, c+d\} \mid a+b$  ve  $m+n=\text{ebob}\{a+b, c+d\} \mid c+d$  olduğundan  $z|x$  ve  $z|y$ ' dir. ( $z$ ' nin ortak bölen olduğu yani hem  $x$ ' i hem de  $y$ ' yi böldüğü gösterilmiştir. Şimdi de  $z$ ' nin bu bölenlerin en büyüğü olduğu gösterilecektir.)

Diğer taraftan  $x$  ve  $y$ ' nin bir ortak böleninin de  $t=f+gI$  olduğu kabul edilsin.  $t|z$  olduğu ispatlanacaktır:

$t$  bir ortak bölen olduğundan  $f|a$  ve  $f|c$  elde edilir. Buradan  $f|\text{ebob}\{a, c\}=m$ ' dir. Dahası  $f+g|a+b$  ve  $f+g|c+d$ ' dir. Böylece  $f+g|\text{ebob}\{a+b, c+d\}=m+n$  olur. Bu da  $t|z$  olduğunu gösterir. Öyleyse  $z=\text{ebob}\{x, y\}$ ' dir.

### Örnek 3.4.2

(a)  $3+5I \equiv (1+3I) \pmod{2+2I}$ ' dir. Çünkü  $3 \equiv 1 \pmod{2}$  ve  $3+5=8 \equiv 1+3=4 \pmod{4}$

(b)  $\text{ebob}\{3+5I, 1+3I\}=1+3I$ ' dir. Çünkü  $\text{ebob}\{3, 1\}=1=m$ ,  $\text{ebob}\{3+5, 1+3\}=\text{ebob}\{8, 4\}=1+3=4=m+n$ .  $m+nI=1+3I=\text{ebob}\{3+5I, 1+3I\}$ .

**Teorem 3.4.7** ( $Z[I]$ ' da Öklid Bölme Teoremi)

$Z[I]$  nütrosifik tamsayılar halkası,  $Z[I]$ ' da iki keyfi eleman  $x=a+bI$  ve  $y=c+dI$  olsun.  $x=q.y+r$  olacak şekilde  $q=s+tI$  ve  $r=m+nI$  elemanları vardır.

**İspat**  $Z$  'de bölme teoreminden  $a = q_1c + r_1$ ,  $a + b = (c + d)q_2 + r_2$  olacak şekilde  $q_1, q_2, r_1, r_2$  tamsayıları vardır.  $s=q_1, t=(q_2-q_1), m=r_1$  ve  $n=(r_2-r_1)$  yerlerine yazılarak  $q = q_1 + (q_2 - q_1)I$ ,  $r = r_1 + (r_2 - r_1)I$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} qy + r &= (q_1 + (q_2 - q_1)I)(c + dI) + (r_1 + (r_2 - r_1)I) \\ &= q_1c + r_1 + (q_2(c + d) + r_2 - (q_1c + r_1))I \\ &= a + (a + b - a)I = a + bI = x \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.4.3**  $x = 5 + 4I$  ve  $y = 3 + I$  nütrosifik tamsayıları için  $x = qy + r$  olacak şekilde  $q = 1 + I$ ,  $r = 2 - I$  vardır:

$$5 + 4I = (1 + I)(3 + I) + 2 - I$$

**Uyarı 3.4.2** ( $Z[I]$ ' da bir lineer kongrüansın çözülebilirliği)

Bir  $x + yI \equiv a + bI \pmod{m + nI}$  lineer kongrüansını çözmek için Teorem 3.4.5' e göre dengi olan

$$x \equiv a \pmod{m} \quad \text{ve} \quad x + y \equiv a + b \pmod{m + n}$$

kongrüansı alınmalıdır. Burada  $x$  ve  $y$  bulunarak eşitlik sistemi çözülür.

**Örnek 3.4.4** Aşağıdaki nütrosifik lineer kongrüansı ele alınsın.

$$x + yI \equiv 1 + 7I \pmod{4 + I} \tag{3.26}$$

Bu kongrüansa eşit olan sistem:

(a)  $x \equiv 1 \pmod{4}$  ( $x=1$  bir çözümdür.)

(b)  $x + y \equiv 8 \pmod{5}$  ( $x+y=3$  bir çözümdür. Buradan  $y=2$  olur.)

Bu demektir ki  $1 + 2I$ , (3.26) nütrosifik kongrüansının bir çözümüdür.

$4 + I \mid (1 + 2I) - (1 + 7I)$  olduğu görülür. Çünkü  $(4 + I)(-I) = -5I$  dır.

**Tanım 3.4.5** ( $Z[I]$ ' da Euler Fonksiyonu)

$Z[I]$ ' da Euler fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\varphi(a + bI) = |\{x = c + dI : \text{ebob}\{c + dI, a + bI\} = 1\}|, c + dI \leq a + bI.$$

**Teorem 3.4.8** ( $Z[I]$ ' da Euler Teoremi)

(a)  $Z[I]$ ' da  $x=a+bl$  elemanı için  $\varphi(x) = \varphi(a) \cdot \varphi(b + a)$ ,

(b)  $y=c+dI$ ,  $\text{ebob}(x, y)=1$  olacak şekilde bir nütrosifik tamsayı ise

$$y^{\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{x}$$

tir.

**İspat**

(a)  $c + dI \leq a + bI$  ve  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  olmak üzere  $y=c + dI$  bir nütrosifik tamsayı olsun. Teorem 3.3.6' dan  $\text{ebob}\{a, c\} = 1$  ve  $\text{ebob}\{a + b, c + d\} = 1$  olduğu görülür. Yani  $a$  ve  $c$  aralarında asaldır ve  $a+b$  ile de  $c+d$  aralarında asaldır. Öyleyse  $\varphi(x) = \varphi(a) \cdot \varphi(b + a)$  bulunur.

(b)  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  kabulü altında klasik Euler Teoremi'nden  $\text{ebob}\{a, c\} = \text{ebob}\{a + b, c + d\} = 1$  olduğundan  $c^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{a}$  ve  $(c + d)^{\varphi(a+b)} \equiv 1 \pmod{a + b}$  elde edilir. Şimdi

$$c^{\varphi(a) \cdot \varphi(a+b)} \equiv c^{\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{a}$$

$$(c + d)^{\varphi(a) \cdot \varphi(a+b)} = (c + d)^{\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{a + b}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} y^{\varphi(x)} &= (c + dI)^{\varphi(x)} = c^{\varphi(x)} + I \left[ \sum_{i=1}^{\varphi(x)} \binom{\varphi(x)}{i} \cdot c^{\varphi(x)-i} \cdot d^i \right] \\ &= c^{\varphi(x)} + I[(c + d)^{\varphi(x)} - c^{\varphi(x)}] = m + nI \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $m = c^{\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{a}$ ,  $m + n = (c + d)^{\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{a + b}$  olduğuna dikkat edilmelidir. Bu da Teorem 3.4.5' e göre

$$y^{\varphi(x)} = m + nI \equiv 1 \pmod{a + bI}$$

olduğunu açıklar.

**Uyarı 3.4.3** ( $Z[I]$ ' da bir lineer kongrüans sistemini çözme)

$Z[I]$ ' da bir lineer kongrüans sistemini çözmek için  $Z'$  de karşılık gelen denklik sistemi çözülebilir.

**Örnek 3.4.5**  $Z[I]$ ' da aşağıdaki lineer kongrüans sistemi verilsin:

$$2x + (3y - 2x)I \equiv 3 + I \pmod{7 + 4I}$$

$$4x + (y - 4x)I \equiv 7 - 5I \pmod{13 - 10I}$$

Teorem 3.4.5' e göre  $Z'$  de karşılık gelen lineer sistem

$2x \equiv 3 \pmod{7}$ ,  $3y \equiv 4 \pmod{11}$ ,  $4x \equiv 7 \pmod{13}$ ,  $y \equiv 2 \pmod{3}$   
ve çözüm  $x=y=5$ ' tir. Böylece  $Z[I]$ ' da nütrosifik kongrüansın çözümü  $10+5I$ ,  
 $20-15I$ ' dir.

**Tanım 3.4.6**  $Z[I]=\{a+bI: a, b \in \mathbb{Z}\}$  nütrosifik tamsayılar halkası olsun.  $Z[I]$ ' da nütrosifik Pell denklemi şu şekilde tanımlanır:

$$X^2 - DY^2 = C; X, Y, D, C \in Z[I]$$

Burada nütrosifik Pell denkleminin çözümü için gerek şartlar gösterilecektir.

**Teorem 3.4.9**  $Z[I]=\{a+bI:a, b \in \mathbb{Z}\}$  nütrosifik tamsayılar halkası alınsın.

$$X^2 - DY^2 = C \tag{3.27}$$

$X = x_1 + x_2I$ ,  $Y = y_1 + y_2I$ ,  $D = d_1 + d_2I$ ,  $C = c_1 + c_2I \in Z[I]$  olmak üzere bir nütrosifik Pell denklemi olsun. Bu eşitlik, aşağıdaki iki klasik Pell denklemine eşittir:

$$x_1^2 - d_1y_1^2 = c_1 \tag{3.28}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - (d_1 + d_2)(y_1 + y_2)^2 = c_1 + c_2 \tag{3.29}$$

**İspat** (3.27) denklemini açmak, (3.28) ve (3.29)' u açıklamak için yeterlidir.

(3.27) açılırsa:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2I)^2 - (d_1 + d_2I)(y_1 + y_2I)^2 &= c_1 + c_2I \\ [x_1^2 - d_1y_1^2] + I[2x_1x_2 + x_2^2 - d_1y_2^2 - d_2y_1^2 - 2d_1y_1y_2 - 2d_2y_1y_2 - d_2y_1^2 - d_2y_2^2 \\ - 2d_1d_2y_1^2 - 2d_1d_2y_1y_2 - 2d_1d_2y_2^2] &= c_1 + c_2I \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan  $x_1^2 - d_1y_1^2 = c_1$  (3.28 denklemi) ve

$$2x_1x_2 + x_2^2 - d_1y_2^2 - d_2y_1^2 - 2d_1y_1y_2 - 2d_2y_1y_2 - d_2y_1^2 - d_2y_2^2 - 2d_1d_2y_1^2 - 2d_1d_2y_1y_2 - 2d_1d_2y_2^2 = c_2 \quad (3.30)$$

elde edilir. (3.28) denklemini (3.30)'a eklenerek

$$x_1^2 - d_1y_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - d_1y_2^2 - d_2y_1^2 - 2d_1y_1y_2 - 2d_2y_1y_2 - d_2y_1^2 - d_2y_2^2 - 2d_1d_2y_1^2 - 2d_1d_2y_1y_2 - 2d_1d_2y_2^2 = c_1 + c_2$$

bulunur ve buradan da (3.29) denklemini elde edilir.

**Uyarı 3.4.4**  $X^2 - DY^2 = C$  nütrosifik Pell denklemini çözmek için aşağıdaki adımlar takip edilmelidir:

- 1) Mümkünse  $x_1^2 - d_1y_1^2 = c_1$  çözülür.
- 2) Mümkünse  $(x_1 + x_2)^2 - (d_1 + d_2)(y_1 + y_2)^2 = c_1 + c_2$  çözülür.
- 3)  $x_2$  ve  $y_2$  hesaplanır.

Şimdi bazı özel nütrosifik Pell denklemlerini çalışılacaktır.

**Teorem 3.4.10**  $X^2 - DY^2 = 1$  nütrosifik Pell denkleminin aşikar olmayan bir çözümü varsa  $d_1 > 0, d_1 + d_2 > 0$  ve  $d_1, d_1 + d_2$  karekökten bağımsızdır.

**İspat** Teorem 3.4.9' a göre  $X^2 - DY^2 = 1$  denklemini;

$$x_1^2 - d_1y_1^2 = 1 \quad (3.31)$$

$$(x_1 + x_2)^2 - (d_1 + d_2)(y_1 + y_2)^2 = 1 \quad (3.32)$$

denklemlerine eşittir. Teoremden, (3.31) ve (3.32) aşikar olmayan çözümlerdir. Teorem 3.4.1' den  $d_1 > 0, d_1 + d_2 > 0$  ve  $d_1, d_1 + d_2$  karekökten bağımsızdır.

**Örnek 3.4.6**  $X^2 - (2 + 3I)Y^2 = 1$  denkleminin aşikar olmayan çözümü vardır. Çünkü eşdeğer sistem:

$$x_1^2 - 2y_1^2 = 1 \quad (3.33)$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 5(y_1 + y_2)^2 = 1 \quad (3.34)$$

olur. (3.33)' ün bir çözümü  $x_1 = 3, y_1 = 2$ ' dir. Bu değerler yerlerine yazılırsa (3.34)' ün bir çözümü  $(3 + x_2)^2 - 5(2 + y_2)^2 = 1$  olup  $3 + x_2 = 9$  ve  $2 + y_2 = 4$  ve buradan da  $x_2 = 6, y_2 = 2$  bulunur. Böylece  $X = 3 + 6I, Y = 2 + 2I$  bulunur.  $2 > 0, 2 + 3 = 5 > 0$  ve  $2, 2 + 3 = 5$  karekökten bağımsız olduğu kolayca görülebilir.

**Örnek 3.4.7** Bir nütrosifik Pell denklemi olan  $X^2 - (3 - I)Y^2 = -3 + I$  denklemi verilsin. Eşdeğer sistem:

$$x_1^2 - 3y_1^2 = -3$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2(y_1 + y_2)^2 = -2$$

olur. İlk denklemin bir çözümü  $x_1 = 3, y_1 = 2$ ' dir. İkincinin çözümü  $(3 + x_2)^2 - 2(2 + y_2)^2 = -2$  denkleminde  $3 + x_2 = 4, 2 + y_2 = 3; x_2 = 1$  ve  $y_2 = 1$  bulunur. Böylece  $X=3+I, Y=2+I, X^2 - (3 - I)Y^2 = -3 + I$ ' nın bir çözümüdür.

**Teorem 3.4.11**  $x_1^2 - d_1 y_1^2 = c_1; d_1, c_1 \in \mathbb{Z}$  Pell denkleminin tam olarak  $m$  tane çözümü varsa  $X^2 - d_1 Y^2 = c_1; X = x_1 + x_2 I, Y = y_1 + y_2 I$  nütrosifik Pell denkleminin  $m^2$  çözümü vardır.

**İspat**  $X^2 - d_1 Y^2 = c_1$  sistemi

$$x_1^2 - d_1 y_1^2 = c_1, \quad (3.35)$$

$$(x_1 + x_2)^2 - d_1 \cdot (y_1 + y_2)^2 = c_1 \quad (3.36)$$

sistemine eşittir. (3.35) ve (3.36)' nın Pell denklemiyle aynı olduğu görülebilir. Böylece herbirinin  $m$  tane çözümü vardır. Buradan  $x_1$ ' in her değeri için karşılık gelen ( $m$ ) tane  $x_2$  değeri vardır ve aynı şeyi  $y_1, y_2$  için de elde edilir. Böylece  $X^2 - d_1 Y^2 = c_1$  için tam olarak  $m^2$  çözüm vardır.

**Teorem 3.4.12**  $X^2 - DY^2 = C$ ;  $D = a - aI$ ;  $a \in \mathbb{Z}$  nütrosifik Pell denklemi çözülebilir ise  $c_1 + c_2$  bir tam karedir.

**İspat**  $X^2 - DY^2 = C'$  nin bir çözümü  $X = x_1 + x_2I$ ,  $Y = y_1 + y_2I$  olsun.  $x_1^2 - ay_1^2 = c_1$  ve  $(x_1 + x_2)^2 - (a - a)(y_1 + y_2)^2 = c_1 + c_2$  çözülebilir denklemler olduğundan  $(x_1 + x_2)^2 = c_1 + c_2$  ve bu eşitlikten de  $c_1 + c_2$  bir tam karedir.

**Teorem 3.4.13**  $X^2 - DY^2 = C$ ;  $D = aI$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  nütrosifik Pell denklemi çözülebilir ise  $c_1$  bir tam karedir.

**İspat**  $X^2 - DY^2 = C'$  nin bir çözümü  $X = x_1 + x_2I$ ,  $Y = y_1 + y_2I$  olsun.  $x_1^2 - 0 \cdot y_1^2 = c_1$  ve  $(x_1 + x_2)^2 - a(y_1 + y_2)^2 = c_1 + c_2$  çözülebilir denklemler olduğundan  $x_1^2 = c_1$  ve bu eşitlikten de  $c_1$  bir tam karedir.

**Uyarı 3.4.5**  $X^2 - DY^2 = C$  nütrosifik Pell denklemi çözülebilir ise sonsuz sayıda çözümü vardır. Bunun nedeni  $x_1 = \pm\sqrt{c_1}$  ve  $(y_1 + y_2)^2$ ' nin sabit olmasıdır. Yani olası çözümler sonsuz sayıdadır.  $y_1$ ' in her değeri için  $y_2$ ' nin tek bir ilgili çözümü vardır.

**Örnek 3.4.8**  $X^2 - IY^2 = 1 + 4I$  nütrosifik Pell denklemi verilsin. Eşdeğer sistem:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 1, \\ (x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2 &= 5. \end{aligned}$$

Bir çözüm  $x_1 = 1$ ,  $x_1 + x_2 = 3$ ,  $y_1 + y_2 = 2$ ;  $x_2 = 2$ ,  $y_1 + y_2 = 2$  bulunur.  $X^2 - IY^2 = 1 + 4I$ ' nin çözümlerinin  $X = 1 + 2I$  veya  $X = -1 + 4I$ ,  $Y = y_1 + (2 - y_1)I$  olduğu görülür.

**Teorem 3.4.14** İki klasik Pell denklemi olan  $x_1^2 - d_1y_1^2 = c_1$ ,  $x_2^2 - d_2y_2^2 = c_2$  denklemleri verilsin. Bu denklemler, şu şekilde karşılık gelen tek bir nütrosifik Pell denklemine dönüştürülebilir:

$$X^2 - DY^2 = C; X = x_1 + (x_2 - x_1)I, Y = y_1 + (y_2 - y_1)I, D = d_1 + (d_2 - d_1)I, C = c_1 + (c_2 - c_1)I. \quad (3.37)$$

**İspat** İspat, (3.37) denklemi hesaplanarak yapılabilir.

$$\begin{aligned} X^2 - DY^2 &= (x_1 + (x_2 - x_1)I)^2 - (d_1 + (d_2 - d_1)I) \cdot (y_1 + (y_2 - y_1)I)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_1)I + (x_2 - x_1)^2I - (d_1 + (d_2 - d_1)I) \cdot (y_1^2 + 2y_1(y_2 - y_1)I + (y_2 - y_1)^2I) \\ &= x_1^2 - d_1y_1^2 + I[2x_1(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)^2 - d_2y_2^2 + d_1y_1^2] \\ &= x_1^2 - d_1y_1^2 + I(-x_1^2 + x_2^2 - d_2y_2^2 + d_1y_1^2) \\ &= x_1^2 - d_1y_1^2 + I((x_2^2 - d_2y_2^2) - (x_1^2 - d_1y_1^2)) \\ &= c_1 + I(c_2 - c_1) = C \end{aligned}$$

**Örnek 3.4.9**  $x_1^2 - 2y_1^2 = 1, x_2^2 - 3y_2^2 = 5$  iki Pell denklemi olsun. Karşılık gelen Pell denklemi şudur:

$$[x_1 + (x_2 - x_1)I]^2 - (2 + I)[y_1 + (y_2 - y_1)I]^2 = 1 + 4I.$$

**Teorem 3.4.15**  $X^2 - DY^2 = aI \quad (3.38)$

nötrosifik Pell denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart  $x_2^2 - (d_1 + d_2)y_2^2 = a$  denkleminin çözümünün olmasıdır. Çözüm ise  $X = x_2I, Y = y_2I$  formundadır. ( $d_1$  tamkare bir pozitif tamsayı)

**İspat** (3.38) eşitlik sistemi;

$$x_1^2 - d_1y_1^2 = 0 \quad (3.39)$$

$$(x_1 + x_2)^2 - (d_1 + d_2)(y_1 + y_2)^2 = a. \quad (3.40)$$

sistemine eşdeğerdir. (3.39) denkleminin sadece sıfır çözümü vardır.  $Z[\sqrt{d_1}]$  tamlık bölgesi olduğundan  $x_1 = y_1 = 0$  'dır. (3.40) denklemi  $x_2^2 - (d_1 + d_2)y_2^2 = a$  haline gelir. Buradan (3.38)' in çözümlü olması için gerek ve yeter şart (3.40)'

ın çözülebilir olmasıdır. (3.38)' nın çözümü  $x_1 = y_1 = 0$  özelliğini sağlar. Böylece çözüm  $X = x_2I, Y = y_2I$  formundadır.

### 3.5. Nötrosifik Tamsayılarda En Büyük Ortak Bölen ve En Küçük Ortak Kat

Tezin bu kısmında nötrosifik tamsayıların bölünebilme özellikleri, iki nötrosifik tamsayının ebobunun tek ve pozitif olması, Öklid Teoremi, Bezout Teoremi ve iki nötrosifik tamsayının ebob' u ile ekok' u arasındaki ilişki incelenmiştir. Tezin bu kısmında verilen bilgiler Çeven (2022) kaynağından alınmıştır.

**Tanım 3.5.1**  $a \neq 0$  olmak üzere herhangi  $a, b \in Z$  için  $b = a.k$  olacak şekilde bir  $k \in Z$  varsa  $a, b$ ' yi böler denir.  $a|b$  olarak gösterilir.

**Teorem 3.5.1**  $Z$  tamsayılar halkasında aşağıdaki önermeler doğrudur:

- i. Her  $a \in Z - \{0\}$  için  $a|a$ ,
- ii. Her  $a \in Z - \{0\}$  için  $a|0$ ,
- iii.  $a|b$  ise herhangi bir  $x \in Z$  için  $a|bx$ ,
- iv.  $a|b$  ve  $b|c$  ise  $a|c$ ,
- v.  $a|b$  ve  $a|c$  ise her  $x, y \in Z$  için  $a|bx + cy$ ,
- vi.  $x \neq 0$  için  $ax|bx$  ise  $a|b$ ,
- vii.  $a|b$  ve  $b \neq 0$  ise  $|a| \leq |b|$ ,
- viii.  $a|b$  ve  $a \neq 0$  ise  $\frac{b}{a} | b$ ,
- ix.  $a|b$  ve  $b|a$  ise  $a = \pm b$ .

Nötrosifik reel sayılar kümesi  $R[I]$ , bölme işlemi altında kapalı değildir. Örneğin

$$\frac{4+I}{1-2I} = 4 - 9I \in R[I] \text{ dir, fakat } \frac{1+3I}{2I} = a + bI \text{ olacak şekilde } a+bI \in R[I]$$

yoktur. Aşağıdaki teoremde "Hangi nötrosifik reel sayılar için bölme işlemi kapalıdır?" sorusu cevaplanacaktır.

**Teorem 3.5.2**  $x = a + bI, y = c + dI \in R[I]$  olsun.  $N(x) = x \cdot \bar{x} = a \cdot (a + b) \neq 0$

ise  $\frac{y}{x} \in R[I]$ ' dir.

**İspat**  $\frac{y}{x} = \frac{y \cdot \bar{x}}{x \cdot \bar{x}} = \frac{(c + dI)(a + b - bI)}{a(a + b)} = \frac{c(a + b)}{a(a + b)} + \frac{ad - bc}{a(a + b)}I$  olduğundan sonuç

açıktır.

Buradan  $N(x) \neq 0$  olmak üzere  $\frac{y}{x} \in Z[I]$  ise  $x|y$  yazılabilir.

**Teorem 3.5.3**  $x, y, z \in Z[I]$  olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. Herhangi bir  $0 \neq x \in Z[I]$  için  $x|0$  ve  $x|x'$  tir.

ii. Her  $u \in Z[I]$  için  $x|y$  ise  $x|y \cdot u$

iii.  $x|y$  ve  $y|z$  ise  $x|z$

iv.  $x|y$  ve  $x|z$  ise  $x|yz$

v. Her  $u, v \in Z[I]$  için  $x|y$  ve  $x|z$  ise  $x|yu + zv$

vi.  $x|y$  ve  $y \neq 0$  ise  $N(x)|N(y)$

vii.  $x|y$  ve  $x \neq 0$  ise  $\frac{y}{x} | y$

viii.  $x|y$  ve  $y|x$  ise  $y = ux$ ,  $u$  bir ünit elemandır.

**İspat**  $x = x_1 + x_2I, y = y_1 + y_2I, z = z_1 + z_2I$  ve  $u = u_1 + u_2I \in Z[I]$  olsunlar.

i.  $0 = (0 + 0I) \cdot x$  olduğundan  $x|0'$  dir. Ayrıca  $x = (1 + 0I) \cdot x$  olduğundan  $x|x'$  tir.

ii.  $x|y \Rightarrow y = x \cdot t$  olacak şekilde  $t \in Z[I]$  vardır. Eşitlikte her iki taraf  $u \in Z[I]$  ile çarpılırsa  $y \cdot u = x \cdot (t \cdot u)$  olur. Buradan da  $x|y \cdot u$  bulunur.

iii.  $x|y \Rightarrow y = x \cdot t$  olacak şekilde  $t \in Z[I]$  vardır.  $y|z \Rightarrow z = y \cdot k$  olacak şekilde  $k \in Z[I]$  vardır. Birinci eşitlik, ikincide yerine yazılırsa;  $z = x \cdot t \cdot k$  elde edilir ki buradan  $x|z$  elde edilir.

iv.  $x|y \Rightarrow y = x \cdot t$  olacak şekilde  $t \in Z[I]$  vardır.  $x|z \Rightarrow z = x \cdot k$  olacak şekilde  $k \in Z[I]$  vardır. Buradan  $y \cdot z = x^2 \cdot t \cdot k$  olur ki  $x|y \cdot z$  bulunur.

v.  $x|y \Rightarrow y = x \cdot t$  olacak şekilde  $t \in \mathbb{Z}[I]$  vardır.  $x|z \Rightarrow z = x \cdot k$  olacak şekilde  $k \in \mathbb{Z}[I]$  vardır.  $y'$  nin eşitliği  $u \in \mathbb{Z}[I]$  ile,  $z'$  nin eşitliği  $v \in \mathbb{Z}[I]$  ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa  $y \cdot u + z \cdot v = x \cdot (t \cdot u + k \cdot v)$  bulunur ki  $x|y \cdot u + z \cdot v'$  dir.

vi.  $x|y \Rightarrow x_1|y_1$  ve  $x_1 + x_2|y_1 + y_2$  ve buradan da  $x_1|y_1 \Rightarrow y_1 = x_1 \cdot k_1$  ile  $x_1 + x_2|y_1 + y_2 \Rightarrow y_1 + y_2 = (x_1 + x_2)(k_1 + k_2)$  olur. Norm tanımında yerlerine yazılırsa  $N(x) = x_1 \cdot (x_1 + x_2)$ ,  $N(y) = y_1 \cdot (y_1 + y_2) = x_1 \cdot k_1 \cdot (x_1 + x_2)(k_1 + k_2)$  olup  $N(x)|N(y)$  bulunur.

vii. Teorem 3.4.4' ten,  $x|y$  olması için gerek ve yeter şart  $x_1|y_1$  ve  $x_1 + x_2|y_1 + y_2$  olmasıdır. Bu durumda

$$\frac{y}{x} = \frac{y \cdot \bar{x}}{x \cdot \bar{x}} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot y_1}{(x_1 + x_2) \cdot x_1} + \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{(x_1 + x_2) \cdot x_1} I$$

olur. Teorem 3.5.2 (viii)'den  $x_1|y_1$  olduğunda  $\frac{y_1}{x_1} | y_1$  ve  $x_1 + x_2|y_1 + y_2$  olduğundan

$$\frac{(x_1 + x_2) \cdot y_1}{(x_1 + x_2) \cdot x_1} + \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{(x_1 + x_2) \cdot x_1} = \frac{x_1 \cdot (y_1 + y_2)}{x_1 \cdot (x_1 + x_2)} | y_1 + y_2$$

bulunur. Böylece  $\frac{y}{x} | y$  elde edilir.

viii.  $x|y$  ve  $y|x$  ise  $k, t \in \mathbb{Z}[I]$  için  $x = k \cdot y$  ve  $y = t \cdot x'$  tir. Böylece  $x = (k \cdot t) \cdot y$  olur. Buradan  $k \cdot t = 1$  olmalıdır.  $k = t = \pm 1$  veya  $k = t = \pm(1 - 2I)$  elde edilir. Öyleyse  $u$ , bir ünit eleman olmak üzere  $y = u \cdot x$  olur.

**Teorem 3.5.4** İki nütrosifik tamsayının ebob'u pozitifdir.

**İspat**  $x = a + bI, y = c + dI \in \mathbb{Z}[I]$  ve  $z = m + nI = \text{ebob}\{x, y\}$  olsun. Teorem 3.3.6' dan  $m = \text{ebob}\{a, c\} \in \mathbb{Z}$  ve  $m + n = \text{ebob}\{a + b, c + d\} \in \mathbb{Z}'$  dir. İki pozitif tamsayının ebob'unun pozitif tamsayı olduğu bilindiğinden  $m > 0$  ve  $m + n > 0'$  dir. Uyarı 3.4.1' den  $z = m + nI > 0$  elde edilir.

**Teorem 3.5.5**  $a + bI \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.  $a + bI > 0$  veya  $a + bI < 0$  ise  $N(a + bI) > 0'$  dir.

**İspat**  $a + bI > 0$  veya  $a + bI < 0$  ise Uyarı 3.4.1' den  $(a > 0, a + b > 0)$  veya  $(a < 0, a + b < 0)$ . Buradan  $N(a + bI) = a \cdot (a + b) > 0$ ' dir.

Tanım 3.3.1 ve Teorem 3.5.3 (vi) kullanarak aşağıdaki tanım yazılabilir:

**Tanım 3.5.2**  $Z[I]$ ' da sıfırdan farklı  $x$  ve  $y$  için  $x$  ve  $y$ ' nin en büyük ortak böleni, normu maksimal olan bir ortak bölendir.

Eğer  $z, x$  ve  $y \in Z[I]$  için en büyük ortak bölense  $N(z) > 0$ ' dir.  $z$ 'nin ünit çarpanları  $z, -z, (1 - 2I)z, -(1 - 2I)z$ ' dir. Bunlar,  $x$  ve  $y$ 'nin bazı ortak böleneridir. Çeven ve Tekin (2020)' de Önerme 3.5 (vi)' den  $N(-z) = N((1 - 2I)z) = N(-(1 - 2I)z) = -N(z) < 0$  olduğu görülür.

**Tanım 3.5.3**  $x$  ve  $y$ 'nin ortak çarpanları sadece ünit elemanlar ise  $x$  ve  $y$  aralarında asaldır denir.

**Teorem 3.5.6**  $r, x \in Z[I]$  olsun.  $u$  bir ünit eleman olmak üzere  $r|x$  ve  $u.r|x$ ' tir.

**İspat**  $r|x$  olsun. Bir  $k \in Z[I]$  için  $x=k.r$ ' dir.  $u \in \{1, -1, 1-2I, -(1-2I)\}$  ve  $(1 - 2I)^2 = 1$  olduğu bilindiğinden ve  $x; x=(-k).(-r)$  veya  $x=k.(1-2I).(1-2I).r$  veya  $x=k.(-1+2I)(-1+2I).r$  olarak yazılabileceğinden  $-r|x, (1-2I).r|x$  ve  $(-1+2I).r|x$  elde edilir. Buradan  $u$  bir ünit eleman olduğunda  $u.r|x$  elde edilir.

**Teorem 3.5.7**  $x \in Z[I]$  olsun.  $x, -x, (1-2I)x, (-1+2I)x$  sayılarından sadece biri pozitif nütrosifik tamsayıdır.

**İspat 1.Durum:**  $x = a + bI > 0$  olsun.  $a > 0$  ve  $a + b > 0$ ' dir. Bu durumda  $-x = -a - bI$  ve  $-a < 0, -(a + b) < 0$  olduğundan  $-x < 0$ ' dir.  $(1-2I).x = (1-2I).(a+bI) = a + (-2a-b)I$  ve  $a > 0, a + (-2a - b) = -(a + b) < 0$  olduğundan  $(1-2I).x$  ne negatif ne pozitiftir. Benzer olarak  $-(1-2I).x = -a + (2a+b)I$  ve  $-a < 0, -a + (2a + b) = a + b > 0$  olduğundan  $-(1-2I).x$  ne negatif ne pozitiftir.

**2.Durum:**  $x = a + bI < 0$  olsun.  $a < 0$  ve  $a + b < 0'$  dır. Bu durumda  $-x = -a - bI$  ve  $-a > 0$ ,  $-(a + b) > 0$  olduğundan  $-x > 0'$  dır.  $(1-2I).x = a + (-2a-b)I$  ve  $a < 0$ ,  $a + (-2a - b) = -(a + b) > 0$  olduğundan  $(1-2I).x$  ne pozitif ne negatiftir. Benzer olarak  $-(1-2I).x = -a + (2a+b)I$  ve  $-a > 0$ ,  $-a + (2a + b) = a + b < 0$  olduğundan  $-(1-2I).x$  ne pozitif ne negatiftir.

**3.Durum:**  $x = a + bI$  ne negatif ne pozitif olsun. Bu durumda  $a > 0$ ,  $a + b < 0$  veya  $a < 0$ ,  $a + b > 0'$  dır. Eğer  $a > 0$ ,  $a + b < 0$  ise sadece  $(1 - 2I).x > 0$  olduğu kolayca görülebilir. Eğer  $a < 0$ ,  $a + b > 0$  ise sadece  $-(1 - 2I).x > 0$  olduğu görülür.

**Teorem 3.5.8** Sıfırdan farklı iki nütrosifik tamsayının ebob'u tektir.

**İspat**  $x$  ve  $y$  nütrosifik tamsayılarının ebob'u,  $v$  ve  $z$  olsun.  $v|z$  ve  $z|v$  olduğu açıktır.  $u$  bir ünit eleman olmak üzere Teorem 3.5.3 (viii)' den  $z = u.v$  elde edilir. Teorem 3.5.4' ten iki pozitif tamsayının ebob' u pozitifdir ve Teorem 3.5.7' den  $v$ ,  $-v$ ,  $(1-2I)v$ ,  $-(1-2I)v$  sayılarından biri pozitifdir.  $uv > 0$  olmak üzere  $x$  ve  $y$  nütrosifik tamsayılarının ebob'u,  $z = uv'$  dir.

**Teorem 3.5.9** (Öklid Algoritması)  $x, y \in \mathbb{Z}[I]$  ve  $N(x) \neq 0$ ,  $N(y) \neq 0$  olsun. Bölenler ve kalanlara Bölüm Algoritması' nın tekrarlı olarak uygulanmasıyla  $i > 1$  için  $r_i$  ve  $q_i$  nütrosifik tamsayıları tanımlansın. Bu durumda

$$y = xq_1 + r_1, |N(r_1)| < |N(x)| \text{ ve } N(r_1) \neq 0,$$

$$x = r_1q_2 + r_2, |N(r_2)| < |N(r_1)| \text{ ve } N(r_2) \neq 0,$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, |N(r_3)| < |N(r_2)| \text{ ve } N(r_3) \neq 0,$$

⋮

$$r_{j-2} = r_{j-1}q_j + r_j, |N(r_j)| < |N(r_{j-1})| \text{ ve } N(r_j) \neq 0,$$

$$r_{j-1} = r_jq_{j+1}$$

olur. Bir  $u$  ünit elemanı için,  $r_j$  sıfırdan farklı son kalan olmak üzere  $u.r_j$  pozitif nütrosifik tamsayıdır ve  $x$  ile  $y'$  nin en büyük ortak bölenidir.

**İspat**  $|N(x)| > |N(r_1)| > |N(r_2)| > \dots$  şeklinde pozitif tamsayıların azalan bir zinciri vardır. Bu zincir sonludur ve bir  $k \in \mathbb{Z}^+$  için  $r_k = 0$ 'dır. Şimdi son denklemden başlayarak ilk denkleme kadar  $r_j |r_{j-1}, r_j |r_{j-2}, r_j |r_{j-3}, \dots, r_j |x$  ve  $r_j |y'$  elde edilir. Teorem 3.5.6' dan  $u.r_j |x$  ve  $u.r_j |y'$  dir. Buradan  $ur_j$ ,  $x$  ve  $y'$  nin bir ortak bölenidir.  $z$ ,  $x$  ve  $y'$  nin bir diğer ortak böleniyse  $z|x$  ve  $z|y$  elde ederiz. Böylece ilk denklemden başlayarak son denkleme kadar  $z|r_1, z|r_2, \dots, z|r_j$  elde edilir. Teorem 3.5.3 (ii)' den  $z|ur_j'$  dir. Bir  $u$  ünit elemanı için,  $r_j$  de sıfırdan farklı son kalan olmak üzere Teorem 3.5.7' den  $ur_j$  pozitif nütrosifik tamsayıdır ve  $x$  ve  $y'$  nin en büyük ortak bölenidir.  $\square$

$Z[I]$  ve  $Z'$  de bölme algoritması arasında önemli bir farklılık olduğuna dikkat ediniz:  $Z[I]$ ' da bölüm ve kalan tek değildir.

**Örnek 3.5.1** Bölme algoritması  $x=4+5I$  ve  $y=6+9I$  sayılarına uygulanırsa  $N(4+5I)=36$  ve  $N(6+9I)=90$  olduğundan,  $|N(r)| < |N(x)|$  olacak şekilde  $y=qx+r$  olarak yazılabilir. Bunun için  $\frac{y}{x}$  oranı düşünülerek payda rasyonelleştirilirse;

$$\frac{y}{x} = \frac{y \cdot \bar{x}}{x \cdot \bar{x}} = \frac{54 + 6I}{36} = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}I \cong 1,5 + (0,16)I$$

Koordinat düzleminde  $1,5+(0,16)I$  sayısının yakınındaki nütrosifik tamsayılar  $1+0I$ ,  $2+0I$ ,  $1+I$  ve  $2+I$ ' dir. (Bkz Çeven, Yurttakal (2021)) Eğer  $q_1 = 1 + 0I$ ,  $q_2 = 2 + 0I$ ,  $q_3 = 1 + I$  ve  $q_4 = 2 + I$  seçilirse;

$$\underbrace{6 + 9I}_y = \underbrace{1}_{q_1} \cdot \underbrace{(4 + 5I)}_x + \underbrace{2 + 4I}_{r_1}, |N(r_1)| = 12 < |N(x)| = 36,$$

$$\underbrace{6 + 9I}_y = \underbrace{2}_{q_2} \cdot \underbrace{(4 + 5I)}_x + \underbrace{-2 - I}_{r_2}, |N(r_2)| = 6 < |N(x)| = 36,$$

$$\underbrace{6 + 9I}_y = \underbrace{(1 + I)}_{q_3} \cdot \underbrace{(4 + 5I)}_x + \underbrace{2 - 5I}_{r_3}, |N(r_3)| = 6 < |N(x)| = 36,$$

$$\underbrace{6 + 9I}_y = \underbrace{(2 + I)}_{q_4} \cdot \underbrace{(4 + 5I)}_x + \underbrace{-2 - 10I}_{r_4}, |N(r_4)| = 24 < |N(x)| = 36.$$

Ayrıca diğer eşitlikler de  $|N(r)| < |N(x)|$  olacak şekilde  $y=qx+r$  eşitliğini sağlar.

**Örnek 3.5.2**  $4+5I$  ve  $6+9I$ ' nin en büyük ortak bölenini bulmak için bölme algoritması ve Öklid algoritmasından;

$$6 + 9I = (4 + 5I).2 - 2 - I, |N(-2 - I)| = 6 < |N(4 + 5I)| = 36,$$

$$4 + 5I = (-2 - I).(-2 - I) + 0$$

elde edilir. Buradan  $-2-I < 0$  olduğundan  $-(-2-I)=2+I$ ,  $4+5I$  ve  $6+9I$ ' nin en büyük ortak böleni olarak elde edilir. İkinci olarak;

$$6 + 9I = (4 + 5I).1 + 2 + 4I, |N(2 + 4I)| = 12 < |N(4 + 5I)| = 36,$$

$$4 + 5I = (2 + 4I).1 + 2 + I, |N(2 + I)| = 6 < |N(2+4I)|=12,$$

$$2 + 4I = (2 + I)(1 + I) + 0,$$

olduğundan  $2+I$ ,  $4+5I$  ve  $6+9I$ ' nin en büyük ortak böleni olarak elde edilir. Üçüncü olarak;

$$6 + 9I = (4 + 5I).(1 + I) + 2 - 5I, |N(2 - 5I)| = 6 < |N(4 + 5I)| = 36,$$

$$4 + 5I = (2 - 5I)(2 - 5I) + 0$$

olduğundan ve  $2 - 5I$  bir pozitif nütrosifik tamsayı olmadığından  $(1-2I)(2-5I)=2+I$ ,  $4+5I$  ve  $6+9I$ ' nin en büyük ortak böleni olarak elde edilir.

**Örnek 3.5.3**  $4+5I$  sayısının eşleniği  $9-5I$ ' dir.

$$4 + 5I = (9 - 5I).2I + 4 - 3I, |N(4 - 3I)| = 4 < |N(9 - 5I)| = 36,$$

$$9 - 5I = (4 - 3I)(2 + I) + 1, |N(1)| = 1 < |N(4 - 3I)| = 4,$$

$$4 - 3I = (4 - 3I).1 + 0$$

olduğundan  $\text{ebob}\{4+5I, 9-5I\}=1$  elde edilir. Böylece  $\mathbb{Z}[I]$ ' da aralarında asaldır.

**Teorem 3.5.10** (Bezout Teoremi)  $x, y \in \mathbb{Z}[I]$  sıfırdan farklı ve  $N(x) \neq 0, N(y) \neq 0$  olsun. Eğer  $\text{ebob}\{x, y\}=z$  ise bazı  $a, b \in \mathbb{Z}[I]$  için  $z=xa+yb$ ' dir.

**İspat** Öklid Algoritmasında geriye yerine koyarak  $r_j = xa + yb$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{Z}[I]$  bulunabilir.  $r_j, x$  ve  $y$ ' nin ebob' u ise ispat açıktır.  $r_j$ , ebob değil ancak  $u$  bir ünit eleman olmak üzere  $ur_j, x$  ve  $y$ ' nin ebob' u ise, üstteki eşitlik  $u$  ile çarpılarak  $ur_j = x(ua) + y(ub)$  elde edilir. Böylece ispat açıktır.

**Sonuç 3.5.1**  $x, y \in \mathbb{Z}[I]$  sıfırdan farklı ve  $N(x) \neq 0$  ve  $N(y) \neq 0$  olsun.  $x$  ve  $y$ ' nin aralarında asal olması için gerek ve yeter şart bazı  $a, b \in \mathbb{Z}[I]$  için  $xa + yb = 1$  olmasıdır.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ) :  $x$  ve  $y$  aralarında asal ise  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  olur. Buradan Teorem 3.5.10' dan bazı  $a, b \in \mathbb{Z}[I]$  için  $xa + yb = 1$ ' dir.

( $\Leftarrow$ ) : Tersine, bazı  $a, b \in \mathbb{Z}[I]$  için  $xa + yb = 1$  olsun. Eğer  $z$ ,  $x$  ve  $y$ ' nin bir ortak böleniyse Teorem 3.5.3 (v)' den  $z|(xa + yb) = 1$ ' dir. Böylece  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  elde edilir.

**Teorem 3.5.11**  $x, y, z \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.  $x|yz$  ve  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  ise  $x|z$ ' dir.

**İspat**  $x|yz$  ve  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  olsun. Sonuç 3.5.1' den,  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  olduğunda bazı  $a, b \in \mathbb{Z}[I]$  için  $xa + yb = 1$  elde ederiz.  $z$  ile çarpılarak  $xza + yzb = z$  elde edilir. Teorem 3.5.3 (v)' ten  $x|xza$  ve  $x|yzb$  olduğunda  $x|(xza + yzb) = z$  bulunur.

**Örnek 3.5.4**  $x = 4 + 5I$  ve  $y = 9 - 5I$  sayıları verilsin. Örnek 3.5.3' ten  $\text{ebob}\{x, y\} = 1$  olduğu bilindiğinden Örnek 3.5.3' teki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} 1 &= 9 - 5I - (4 - 3I)(2 + I) \\ &= 9 - 5I - (4 + 5I - (9 - 5I) \cdot 2I)(2 + I) \\ &= -(2 + I)x + (1 + 6I)y \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 3.5.5** Örnek 3.5.2' deki  $x = 4 + 5I$  ve  $y = 6 + 9I$  nütrosifik sayıları için  $6 + 9I = (4 + 5I) \cdot (1 + I) + 2 - 5I$  eşitliği kullanılırsa,  $2 - 5I = 6 + 9I - (4 + 5I) \cdot (1 + I)$  elde edilir. Her iki taraf  $1 - 2I$  ile çarpılarak,  $(1 - 2I) \cdot (2 - 5I) = 2 + I$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \text{ebob}\{4 + 5I, 6 + 9I\} &= 2 + I = (6 + 9I) \cdot (1 - 2I) - (4 + 5I) \cdot (1 + I) \cdot (1 - 2I) \\ &= x \cdot (1 - 2I) + y \cdot (-1 + 3I) \end{aligned}$$

**Tanım 3.5.4** (En küçük ortak kat)  $x$  ve  $y$  iki nütrosifik sayı olsun. Eğer  $x|w$  ve  $y|w$  ise  $w$ ' ye  $x$  ve  $y$ ' nin bir ortak katı denir.  $x$  ve  $y$ ' nin pozitif ortak katlarının en küçüğüne  $x$  ve  $y$ ' nin en küçük ortak katı (ekok) denir.

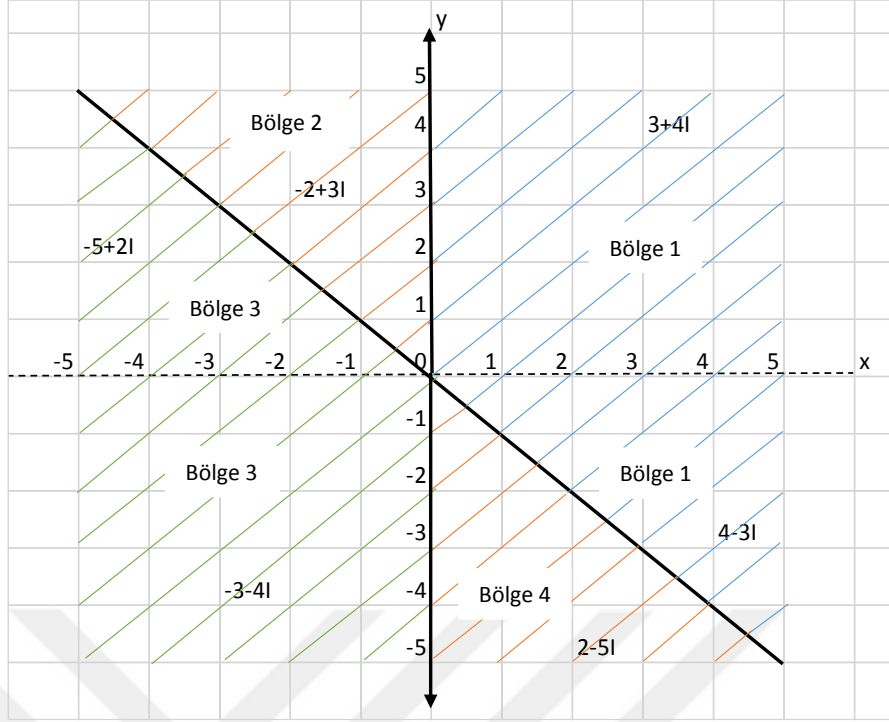
**Teorem 3.5.12**  $x = x_1 + x_2I$  ve  $y = y_1 + y_2I$  iki nütrosifik tamsayı ve  $x_1 \neq 0, x_1 + x_2 \neq 0, y_1 \neq 0, y_1 + y_2 \neq 0$  olsun.  $w = w_1 + w_2I = \text{ekok}\{x, y\}$  olması için gerek ve yeter şart  $w_1 = \text{ekok}\{x_1, y_1\}$  ve  $w_1 + w_2 = \text{ekok}\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$  olmasıdır.

**İspat** ( $\Rightarrow$ ):  $w = w_1 + w_2I = \text{ekok}\{x, y\}$  olsun.  $x|w$  ve  $y|w$  olduğunu bilinmektedir. Eğer  $v = v_1 + v_2I$ ,  $x$  ve  $y$ ' nin başka bir ortak katı ise  $w|v$  dir. Teorem 3.4.4' ten  $x_1|w_1, x_1 + x_2|w_1 + w_2, y_1|w_1, y_1 + y_2|w_1 + w_2, w_1|v_1, w_1 + w_2|v_1 + v_2$  olur. Bu durumda  $w_1 = \text{ekok}\{x_1, y_1\}$  ve  $w_1 + w_2 = \text{ekok}\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$  bulunur.

( $\Leftarrow$ ): Tersine  $w_1 = \text{ekok}\{x_1, y_1\}$  ve  $w_1 + w_2 = \text{ekok}\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$  olsun.  $x_1|w_1, y_1|w_1, x_1 + x_2|w_1 + w_2, y_1 + y_2|w_1 + w_2$  bulunur. Böylece  $x|w$  ve  $y|w$  olduğundan  $w, x$  ve  $y$ ' nin bir ortak katıdır. Şimdi  $x$  ve  $y$ ' nin başka bir ortak katı olan  $v$  alınırsa  $x|v$  ve  $y|v$  dir.  $x_1|v_1, y_1|v_1, x_1 + x_2|v_1 + v_2, y_1 + y_2|v_1 + v_2$  olduğundan  $v_1, x_1$  ve  $y_1$ ' in bir ortak katı ve  $v_1 + v_2$  de  $x_1 + x_2$  ve  $y_1 + y_2$ ' nin bir ortak katıdır.  $w_1 = \text{ekok}\{x_1, y_1\}$  ve  $w_1 + w_2 = \text{ekok}\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$  olduğundan  $w_1|v_1, w_1 + w_2|v_1 + v_2$  bulunur. Böylece  $w|v$  dir ve  $w = w_1 + w_2I = \text{ekok}\{x, y\}$  elde edilir.

**Örnek 3.5.6**  $x=2+4I, y=3+I$  sayıları verilsin.  $\text{ekok}\{2,3\} = 6 = w_1$  ve  $\text{ekok}\{2 + 4, 3 + 1\} = 12 = w_1 + w_2$  olduğundan  $w = w_1 + w_2I = 6 + 6I = \text{ekok}\{2 + 4I, 3 + I\}$  bulunur. □

$\mathbb{Z}[I]$  için Çeven, Yurttakal (2021)' deki koordinat düzlemi hatırlanacak olursa Bölge1 de  $x > 0$ , Bölge3' te  $x < 0$ , Bölge2 ve Bölge4' te  $x'$  in ne negatif ne pozitif olduğu bilinmektedir.



Şekil 3.5.1 Nötrosifik tamsayılar

**Teorem 3.5.13**  $x=a+bl, y=c+dI \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.

- i.  $x$  ve  $y$  aynı işaretliyse  $xy>0$ ,
- ii.  $x$  ve  $y$  zıt işaretliyse  $xy<0$ ,
- iii.  $x$  ve  $y$  ne negatif ne pozitif ve aynı bölgedeysen  $xy>0$ ,
- iv.  $x$  ve  $y$  ne negatif ne pozitif ve farklı bölgedeysen  $xy<0$ ,
- v.  $x$  ve  $y'$  den biri pozitif veya negatif ve diğeri ne pozitif ne negatif ise  $xy$  ne negatif ne pozitiftir.

**İspat**  $x=a+bl, y=c+dI$  olsun. Uyarı 3.4.1' den

- $x=a+bl>0$  olması için gerek ve yeter şart  $a>0, a+b>0$ ,
- $x=a+bl<0$  olması için gerek ve yeter şart  $a<0, a+b<0$ ,
- $x=a+bl$  ne negatif ne pozitif olması için gerek ve yeter şart  $(a<0, a+b>0)$  veya  $(a>0, a+b<0)$  olmasıdır.

$xy=ac+(ad+bc+bd)I$  olduğundan  $ac$  ve  $ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$ ' nin işaretleri araştırılmalıdır.

i.  $x=a+bl$  ve  $y=c+dl$  aynı işaretli olsun. Buradan  $(a>0, a+b>0, c>0, c+d>0)$  veya  $(a<0, a+b<0, c<0, c+d<0)$  bulunur. Böylece  $ac>0, (a+b)(c+d)>0$  elde edilir.  $xy>0$  bulunur.

ii.  $x=a+bl$  ve  $y=c+dl$  zıt işaretli olsun. Buradan  $(a>0, a+b>0, c<0, c+d<0)$  veya  $(a<0, a+b<0, c>0, c+d>0)$  bulunur. Böylece  $ac<0, (a+b)(c+d)<0$  elde edilir.  $xy<0$  bulunur.

iii.  $x=a+bl$  ve  $y=c+dl$  ne negatif ne pozitif ve aynı bölgede olsun. Buradan  $(a<0, a+b>0, c<0, c+d>0)$  veya  $(a>0, a+b<0, c>0, c+d<0)$  bulunur. Böylece  $ac>0, (a+b)(c+d)>0$  elde edilir.  $xy>0$  bulunur.

iv.  $x=a+bl$  ve  $y=c+dl$  ne negatif ne pozitif ve farklı bölgede olsun. Buradan  $(a>0, a+b<0, c<0, c+d>0)$  veya  $(a<0, a+b>0, c>0, c+d<0)$  bulunur. Böylece  $ac<0, (a+b)(c+d)<0$  elde edilir.  $xy<0$  bulunur.

v.  $x=a+bl$  ve  $y=c+dl'$  den yalnız biri pozitif ya da negatif, diğeri de ne pozitif ne negatif olsun. Sekiz durum vardır:

- $a>0, a+b>0, c>0, c+d<0 \Rightarrow ac>0, (a+b)(c+d)<0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif
- $a>0, a+b>0, c<0, c+d>0 \Rightarrow ac<0, (a+b)(c+d)>0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif
- $a>0, a+b<0, c>0, c+d>0 \Rightarrow ac>0, (a+b)(c+d)<0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif
- $a>0, a+b<0, c<0, c+d<0 \Rightarrow ac<0, (a+b)(c+d)>0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif
- $a<0, a+b>0, c>0, c+d>0 \Rightarrow ac<0, (a+b)(c+d)>0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif
- $a<0, a+b>0, c<0, c+d<0 \Rightarrow ac>0, (a+b)(c+d)<0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif
- $a<0, a+b<0, c>0, c+d<0 \Rightarrow ac<0, (a+b)(c+d)>0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif
- $a<0, a+b<0, c<0, c+d>0 \Rightarrow ac>0, (a+b)(c+d)<0 \Rightarrow xy$  ne negatif ne pozitif

**Teorem 3.5.14**  $x$  ve  $y$  iki nütrosifik tamsayı olsun.  $xy>0$  ise  $\text{ebob}\{x,y\} \cdot \text{ekok}\{x,y\} = x \cdot y$  ve  $xy<0$  ise  $\text{ebob}\{x,y\} \cdot \text{ekok}\{x,y\} = -x \cdot y$  ' dir.

**İspat**  $xy>0$  olsun.  $\text{ebob}\{x,y\} = z$  ve  $\frac{xy}{z} = m$  ile gösterilsin.  $z|x$  ve  $z|y$  olduğundan herhangi bir  $k, t \in \mathbb{Z}[I]$  için  $x = z \cdot k$  ve  $y = z \cdot t$  elde edilir.  $\text{Ebob}\{k,t\} = 1$  olduğu açıktır.

Çünkü  $\text{ebob}\{k,t\} = 1$  olmazsa  $\text{ebob}\{x,y\} > z$  olur. Böylece  $m = \frac{xy}{z} = \frac{zky}{z} = ky$  ve

$m = \frac{xy}{z} = \frac{xzt}{z} = xt$  olduğundan  $x|m$  ve  $y|m$  elde edilir. Buradan  $m$ ,  $x$  ve  $y$ ' nin

bir ortak katıdır. Şimdi  $n$ ,  $x$  ve  $y$ ' nin bir başka ortak katı olsun.  $x|n$  ve  $y|n$  olduğundan bazı  $r, s \in \mathbb{Z}[I]$  için  $n=x.r$  ve  $n=y.s$  ' dir. Bu durumda  $x.r=y.s$  ve  $zkr=zts$  olduğunda  $k.r=t.s$  elde edilir. Böylece  $k|ts$  olduğu görülür.  $\text{Ebob}\{k,t\}=1$  olduğundan, Teorem 3.5.11' den  $k|s$  elde edilir. Böylece bazı  $l \in \mathbb{Z}[I]$  için  $s=k.l$  ' dir.  $n=y.s=ykl=m.l$  olduğundan  $m|n$  elde edilir. Buradan  $m=\text{ekok}\{x, y\}$  ' dir.

Eşitlikten  $\frac{xy}{z} = m$  ' dir.  $\text{Ebob}\{x, y\}.\text{ekok}\{x, y\}=x.y$  elde edilir.  $xy < 0$  ise  $-x.y=(-x).y$

veya  $-x.y=x.(-y)$  olduğundan  $-xy=ab > 0$  alarak ispat kolayca yapılır.

**Örnek 3.5.7** Örnek 3.5.6 düşünülürse  $\text{ebob}\{x, y\}=1+I$  ve  $x.y=6+18I > 0$  olduğu görülür.  $\text{Ekok}\{x, y\}=6+6I$  olduğundan  $\text{ebob}\{x, y\}.\text{ekok}\{x, y\}=(1+I)(6+6I) = 6+18I=(2+4I)(3+I)=x.y$  elde edilir.

#### 4. NÖTROSOFİK TAMSAYILARIN BAZI ELEMANTER ÖZELLİKLERİ

Tezin bu kısmında  $Z[I]$  kümesinde tanımlı " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısıyla  $Z[I]$  nin ayrışmaları elde edilmiş, kartezyen koordinat sisteminde nütrosifik tamsayıların yerleri gösterilmiş, eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümeleri bölgesel olarak belirlenmiştir. Pozitif ve negatif nütrosifik tamsayı tanımı verilmiş, pozitif bir nütrosifik tamsayının faktöriyeli, bir nütrosifik tamsayının kuvvetleri kavramları incelenmiştir. Bu bölümde yer alan bilgiler Çeven Y. ve Yurttakal A.N. (2021) kaynağından alınmıştır.

##### 4.1. Nütrosifik Reel Sayılarda Sıralama

**Tanım 4.1.1**  $R$ , reel sayılar cismi olmak üzere  $R[I]=\{a+bi: a, b \in R\}$  nütrosifik reel sayılar cismi olsun.  $a+bi, c+di \in R[I]$  sayılarının sıralaması aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a + bi \leq c + di \Leftrightarrow a \leq c, a + b \leq c + d.$$

**Teorem 4.1.1** Tanım 4.1.1 ile verilen bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

**İspat**  $a+bi, c+di, e+fi \in R[I]$  olmak üzere  $a + bi \leq c + di \Leftrightarrow a \leq c, a + b \leq c + d$  ile tanımlanan bağıntının özellikleri incelenirse;

Yansıma:  $a, b \in R$  olduğundan  $a \leq a$  ve  $a + b \leq a + b$  olup  $a + bi \leq a + bi$  olduğu kolayca görülür.

Ters Simetri:  $a+bi$  ve  $c+di$  nütrosifik reel sayıları için  $a + bi \leq c + di$  ve  $c + di \leq a + bi$  sağlansın. Öyleyse  $a \leq c, a + b \leq c + d$  ve  $c \leq a, c + d \leq a + b$  dir. Reel sayılar kümesindeki ters simetriklikten  $a = c$  ve  $b = d$  elde edilir. O halde  $a+bi=c+di$  olduğu görülür.

Geçişme:  $a + bi \leq c + di$  ve  $c + di \leq e + fi$  olsun. Bu durumda  $a \leq c, a + b \leq c + d$  ve  $c \leq e, c + d \leq e + f$  olur. Reel sayılardaki kısmi sıralamada geçişme özelliği kullanılarak  $a \leq e, a + b \leq e + f$  olur ki  $a + bi \leq e + fi$  sağlandığından, bağıntı geçişme özelliğine sahiptir. Öyleyse Tanım 4.1.1 ile verilen bağıntı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 4.1.1' e göre göre pozitif nütrosifik reel sayılar aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$a + bI \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0, a + b \geq 0.$$

**Tanım 4.1.2**  $a+bI, c+dI \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.  $a+b=c+d$  ise  $a+bI$  ve  $c+dI$  nütrosifik tamsayıları denktir denir ve  $a+bI \sim c+dI$  ile gösterilir. Sembolik olarak da şu şekilde gösterilebilir:

$$a + bI \sim c + dI \Leftrightarrow a + b = c + d.$$

**Örnek 4.1.1**  $-1+1=2-2$  olduğundan  $-1+I \sim 2-2I$  ve  $2+3 \neq 1+2$  olduğundan  $2+3I, 1+2I$ ' ya denk değildir.

**Teorem 4.1.2** “ $\sim$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

**İspat**  $a + bI, c + dI, e + fI \in \mathbb{Z}[I]$  olmak üzere  $a + bI \sim c + dI \Leftrightarrow a + b = c + d$  ile tanımlanan bağıntının özellikleri incelenirse:

Yansıma:  $a, b \in \mathbb{Z}$  olduğundan  $a + b = a + b$  olup  $a + bI \sim a + bI$  olduğu açıktır.

Simetri:  $a+bI$  ve  $c+dI$  nütrosifik tamsayıları için  $a + bI \sim c + dI$  sağlansın. Öyleyse  $a + b = c + d$  ' dir. Tamsayılar kümesinde eşit olma bağıntısı simetrik olduğundan  $c + d = a + b$  olduğu açıktır. Yani  $a + b \sim c + d$  ve  $c + d \sim a + b$  şartlarının her ikisi de sağlanır.

Geçişme:  $a + bI \sim c + dI$  ve  $c + dI \sim e + fI$  olsun.  $a + b = c + d$  ve  $c + d = e + f$  olur. Bu eşitliklerden  $a+b = e + f$  olur ki  $a + bI \sim e + fI$  sağlandığından, bağıntı geçişme özelliğine sahiptir. Öyleyse Tanım 4.1.2 ile verilen bağıntı bir denklik bağıntısıdır.  $\square$

“ $\sim$ ” bağıntısı  $\mathbb{Z}[I]$ ' yı denklik sınıflarına ayırır. Herhangi bir  $a+bI \in \mathbb{Z}[I]$  elemanının denklik sınıfı  $\overline{a + bI}$  ile gösterilir ve

$$\overline{a + bI} = \{x + yI \in \mathbb{Z}[I]: x + yI \sim a + bI\}$$

ile tanımlanır.

$a+bi \in \mathbb{Z}[i]$  kartezyen sistemde  $(a,b)$  noktasıyla eşleştirilirse,  $\overline{a+bi}$  denklik sınıfları  $x, y \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $x+y=a+b$  doğrusundaki  $(x,y)$  noktalarının kümesidir.

$$\begin{aligned}\text{Örnek 4.1.2 } \overline{0+0i} &= \{x+yi \in \mathbb{Z}[i]: x+y \sim 0+0i\} \\ &= \{x+y: x,y \in \mathbb{Z}, x+y=0\} \\ &= \{\dots, -2+2i, -1+i, 0+0i, 1-i, 2-2i, \dots\}\end{aligned}$$

dir.  $\overline{0+0i} = \bar{0}$  ile gösterilir ve  $x, y \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $x+y=0$  doğrusu üzerindeki  $(x,y)$  noktalarının kümesidir.

$$\begin{aligned}\overline{1+0i} &= \{x+yi \in \mathbb{Z}[i]: x+y \sim 1+0i\} \\ &= \{x+y: x,y \in \mathbb{Z}, x+y=1\} \\ &= \{\dots, -2+3i, -1+2i, 0+i, 1-0i, 2-i, \dots\}\end{aligned}$$

dir.  $\overline{1+0i} = \bar{1}$  ile gösterilir ve  $x, y \in \mathbb{Z}$  olmak üzere  $x+y=1$  doğrusundaki  $(x,y)$  noktalarının kümesidir.

Tüm denklik sınıfları kümesi,  $D = \{\overline{a+bi}: a+bi \in \mathbb{Z}[i]\}$  olarak gösterilirse  $D = \{\dots, -\bar{2}, -\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots\} = \{\bar{m}: m \in \mathbb{Z}\}$  olur.  $m, n \in \mathbb{Z}$  ve  $m \neq n$  için  $\bar{m} \cap \bar{n} = \emptyset$  ve  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bar{m} = \mathbb{Z}[i]$  olduğu görülür. Buradan  $D$  kümesinin,  $\mathbb{Z}[i]$ 'nin bir parçalanışı olduğu açıktır.

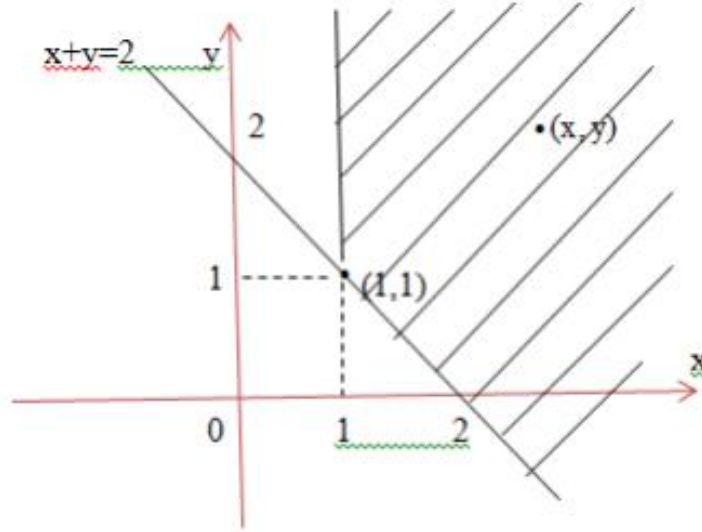
Tanım 4.1.1,  $\mathbb{Z}[i]$  için de geçerlidir. Konu bütünlüğü açısından yeniden yazılırsa:

**Tanım 4.1.3**  $a+bi, c+di \in \mathbb{Z}[i]$  olsun.  $a \leq c$  ve  $a+b \leq c+d$  ise  $a+bi$  nütrosifik tamsayısı  $c+di$ 'ye küçük ya da eşittir denir ve  $a+bi \leq c+di$  ile gösterilir. Kısaca şöyle yazılabilir:

$$a+bi \leq c+di \Leftrightarrow a \leq c, a+b \leq c+d.$$

" $\leq$ " bağıntısının bir kısmi sıralama bağıntısı olduğuna dikkat edilmelidir. Buradan  $\mathbb{Z}[i]$  kümesi, " $\leq$ " bağıntısına göre kısmi sıralı kümedir ancak tam sıralı küme değildir. Çünkü  $\mathbb{Z}[i]$ 'nin tüm elemanları karşılaştırılabilir değildir. Örneğin  $1-2i$  ve  $-1+3i$  karşılaştırılamaz. Yani  $1-2i \not\leq -1+3i$  ve  $-1+3i \not\leq 1-2i$  dir.

**Örnek 4.1.3**  $1+I \leq x+yI$  olan  $x+yI \in \mathbb{Z}[I]$  kümesi Kartezyen düzlemde aşağıdaki taralı bölgedeki  $(x,y) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$  noktalarından oluşur.



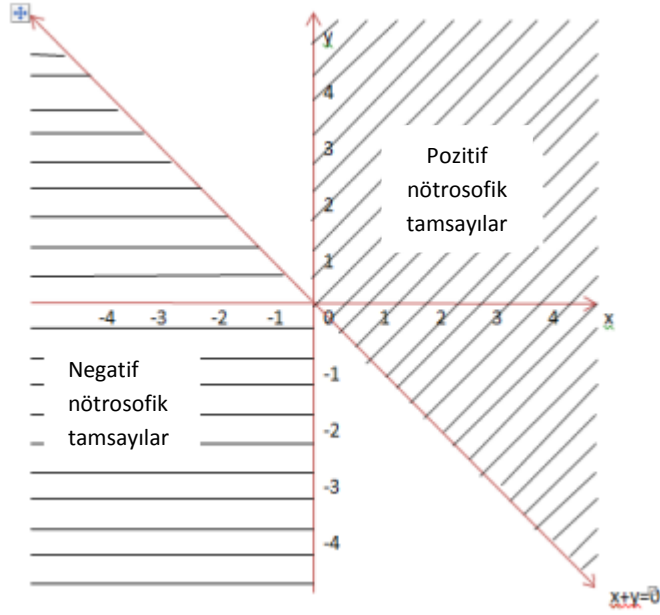
**Şekil 4.1.1** Kartezyen düzlemde  $1+I \leq x+yI$  olan  $x+yI \in \mathbb{Z}[I]$  kümesi

**Sonuç 4.1.1**  $a+bI \in \mathbb{Z}[I]$  alalım.

- i.  $a + bI \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0, a + b \geq 0,$
- ii.  $a + bI \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 0, a + b \leq 0.$

**İspat** i. ve ii. Tanım 4.1.3' den açıktır. □

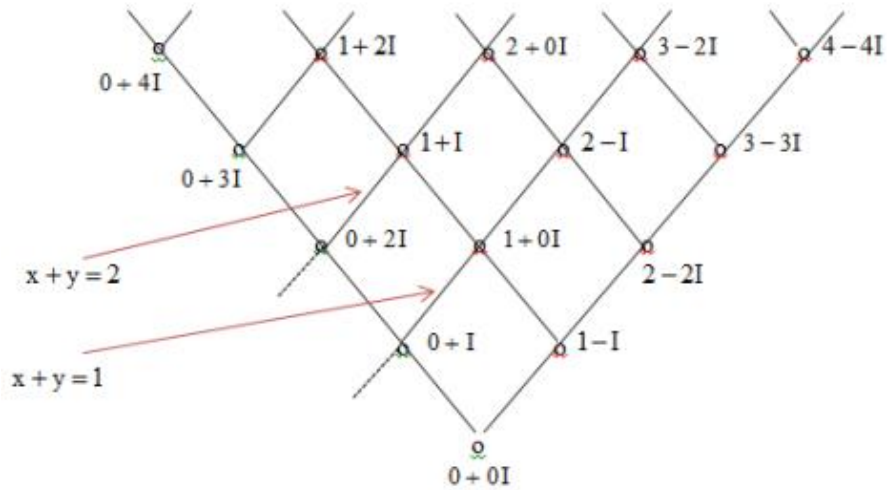
Kartezyen düzlemde  $a+bI \in \mathbb{Z}[I]$  ile  $(a,b)$  noktaları eşleştirilirse pozitif ve negatif nütrosifik tamsayıların bölgeleri şu şekilde gösterilebilir:



**Şekil 4.1.2** Kartezyen düzlemde pozitif ve negatif tamsayılar

Pozitif nütrosifik tamsayılar kümesi  $Z[I]^+$  ile gösterilsin.  $Z[I]^+$  kümesinin tam sıralı küme olmadığı bilinmektedir.  $1 \leq 1+I \leq 2$  ve  $1 \leq 2-I \leq 2$  olduğu görülebilir ancak  $1+I$  ve  $2-I$  karşılaştırılmaz.  $0+0I$ ,  $Z[I]^+ \cup \{0+0I\}$  kümesinin en küçük elemanıdır. Fakat  $Z[I]^+$  kümesinin bir en küçük elemanı yoktur.

$Z[I]^+ \cup \{0+0I\}$  kümesinin alt yarılatisi aşağıdaki şekilde oluşturulabilir:



**Şekil 4.1.3**  $Z[I]^+ \cup \{0+0I\}$  kümesinin alt yarılatisi

**Teorem 4.1.3**  $x=a+bl, y=c+dI \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.  $x \leq y$  olması için gerek ve yeter şart  $u \geq 0$  ve  $x+u=y$  olacak şekilde bir  $u \in \mathbb{Z}[I]$  olmasıdır.

**İspat** ( $\Leftarrow$ ):  $u \geq 0$  ve  $x+u=y$  olacak şekilde bir  $u \in \mathbb{Z}[I]$  var olsun.  $u = u_1 + u_2I$  ise  $u_1 \geq 0$  ve  $u_1+u_2 \geq 0$  elde edilir. Ayrıca  $x + u = y$  olduğunda  $a + bI + u_1 + u_2I = c + dI$  dir. Buradan  $a + u_1 = c, b + u_2 = d$  veya  $u_1 = c - a$  ve  $u_2 = d - b$  olur.  $u_1 \geq 0$  olduğunda  $c - a \geq 0$  veya  $a \leq c$  bulunur. Ayrıca  $u_1 + u_2 \geq 0$  olduğunda  $c - a + d - b \geq 0$  veya  $a + b \leq c + d$  olur. Buradan  $a \leq c$  ve  $a + b \leq c + d$  olduğunda  $x \leq y$  olduğu görülür.

( $\Rightarrow$ ): Tersine,  $x \leq y$  olsun.  $a + b \leq c + d$  dir. Buradan  $\mathbb{Z}$  de  $a \leq c$  ve  $a + b \leq c + d$  elde edilir.  $c - a = u_1$  ve  $d - b = u_2$  denirse  $u_1 \geq 0$  ve  $u_1 + u_2 \geq 0$  olduğu görülür. Buradan  $u = u_1 + u_2I \in \mathbb{Z}[I]$  ve  $u \geq 0$  elde edilir. Böylece

$$x + u = a + bI + u_1 + u_2I = a + bI + (c - a) + (d - b)I = c + dI = y$$

olur.

**Örnek 4.1.4**  $-3+2I \leq 2+I$  olduğu bilinmekte olup  $-3+2I+5-I=2+I$  ve  $5-I \geq 0$  dır.

**Teorem 4.1.4**  $x, y, z$  ve  $u \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.

- i.  $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$ ,
- ii.  $x \leq y$  ve  $z \leq u \Rightarrow x + z \leq y + u$ ,
- iii.  $x \leq y$  ve  $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$ ,
- iv.  $x \leq y$  ve  $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$

dir.

**İspat**  $x = x_1 + x_2I, y = y_1 + y_2I, z = z_1 + z_2I$  ve  $u = u_1 + u_2I$  olsun.

i.  $x + z = x_1 + z_1 + (x_2 + z_2)I$  ve  $y + z = y_1 + z_1 + (y_2 + z_2)I$  olduğunda;

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 + x_2I \leq y_1 + y_2I$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2 \text{ (}\mathbb{Z}\text{ de)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + z_1 \leq y_1 + z_1 \text{ ve } x_1 + x_2 + z_1 + z_2 \leq y_1 + y_2 + z_1 + z_2, (z_1, z_2 \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x_1 + z_1 + (x_2 + z_2)I \leq y_1 + z_1 + (y_2 + z_2)I$$

$$\Leftrightarrow x + z \leq y + z$$

olur.

**ii.**  $x + z = x_1 + z_1 + (x_2 + z_2)I$  ve  $y + z = y_1 + u_1 + (y_2 + u_2)I$  olduğunda

$$x \leq y \text{ ve } z \leq u \Rightarrow x_1 + x_2I \leq y_1 + y_2I \text{ ve } z_1 + z_2I \leq u_1 + u_2I$$

$$\Rightarrow x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2, z_1 \leq u_1 \text{ ve } z_1 + z_2 \leq u_1 + u_2$$

$$\Rightarrow x_1 + z_1 \leq y_1 + u_1, x_1 + x_2 + z_1 + z_2 \leq y_1 + y_2 + u_1 + u_2$$

$$\Rightarrow x_1 + z_1 + (x_2 + z_2)I \leq y_1 + u_1 + (y_2 + u_2)I$$

$$\Rightarrow x + z \leq y + u$$

elde edilir.

**iii.**  $z = z_1 + z_2I \geq 0$  olsun.  $z_1 \geq 0$  ve  $z_1 + z_2 \geq 0$ 'dir.  $xz = x_1z_1 + (x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2)I$  ve  $yz = y_1z_1 + (y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2)I$  olduğundan,

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 + x_2I \leq y_1 + y_2I$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 z_1 \leq y_1 z_1 \text{ ve } (x_1 + x_2)(z_1 + z_2) \leq (y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 z_1 \leq y_1 z_1 \text{ ve } x_1 z_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_2 z_2 \leq y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 +$$

$y_2 z_2$

$$\Leftrightarrow x_1 z_1 + (x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_2 z_2)I \leq y_1 z_1 + (y_1 z_2 + y_2 z_1 + y_2 z_2)I$$

$$\Leftrightarrow xz \leq yz$$

bulunur.

**iv.**  $z = z_1 + z_2I \leq 0$  olsun.  $z_1 \leq 0$  ve  $z_1 + z_2 \leq 0$ 'dir.  $xz = x_1z_1 + (x_1z_2 + x_2z_1 + x_2z_2)I$  ve  $yz = y_1z_1 + (y_1z_2 + y_2z_1 + y_2z_2)I$  olduğundan,

$$x \leq y \Leftrightarrow x_1 + x_2I \leq y_1 + y_2I$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 z_1 \geq y_1 z_1 \text{ ve } (x_1 + x_2)(z_1 + z_2) \geq (y_1 + y_2)(z_1 + z_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 z_1 \geq y_1 z_1 \text{ ve } x_1 z_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_2 z_2 \geq y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 +$$

$y_2 z_2$

$$\Leftrightarrow x_1 z_1 + (x_1 z_2 + x_2 z_1 + x_2 z_2)I \geq y_1 z_1 + (y_1 z_2 + y_2 z_1 + y_2 z_2)I$$

$$\Leftrightarrow xz \geq yz$$

dir.

## 4.2. Bir Pozitif Nötrosifik Sayının Faktöriyeli

Bir  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $n! = n.(n-1)...2.1$  ve  $0! = 1$  olduğu biliniyor.  $n!$  sayısı koordinat sisteminin pozitif reel ekseninde  $n'$  den küçük veya  $n$  ye eşit olan tüm pozitif tamsayıların çarpımıdır.

Şimdi  $\mathbb{Z}$ ' deki faktöriyel kavramı  $\mathbb{Z}[I]$ ' ya genişletilmek istenilmektedir.  $n \in \mathbb{Z}^+$  için  $n = n + 0.I \in \mathbb{Z}[I]$  olduğu bilinmekte olup

$$(n+0I)! = (n+0I).(n-1+0I)...(2+0I).(1+0I)$$

şeklinde yazılabilir.  $n+0I, n-1+0I, \dots, 2+0I, 1+0I$  sayıları  $n+0I'$  dan küçük ya da eşit olan pozitif nötrosifik sayılardır. Bu sayılar  $(n, 0), (n-1, 0), \dots, (2, 0),$

$(1, 0)$  noktalarıyla eşleştirilirse  $y=0, x=0$  yarı doğrusu üzerinde oldukları görülür.

Şimdi,  $5+5I \in \mathbb{Z}[I]$  alınırsa  $5+5I, 4+4I, 3+3I, 2+2I, 1+I$  sayıları,  $5+5I'$  dan küçük eşit olan pozitif nötrosifik tamsayılarıdır. Bu noktalar  $(5,5), (4,4), (3,3), (2,2), (1,1)$  noktalarıyla eşleştirilirse  $y=x$  yarı doğrusu üzerinde oldukları görülür. Buna göre

$$\begin{aligned}(5+5I)! &= (5+5I).(4+4I).(3+3I).(2+2I).(1+I) \\ &= 5.4.3.2.1.(1+I)^5 \\ &= 5!. (1+I)^5\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi benzer şekilde  $(12+16I)!$  sayısı için  $(12,16), (9,12), (6,8), (3,4)$

noktaları,  $y = \frac{16}{12}x = \frac{4}{3}x$  yarıdoğrusu üzerinde olup karşılık gelen  $12+16I,$

$9+12I, 6+8I$  ve  $3+4I$  nötrosifik tamsayıları  $12+16I'$  dan küçük veya eşit olan pozitif sayılardır. Böylece

$$\begin{aligned}(12+16I)! &= (12+16I).(9+12I).(6+8I).(3+4I) \\ &= 4.3.2.1.(3+4I)^4 \\ &= 4!. (3+4I)^4\end{aligned}$$

yazılabilir. Artık bir pozitif nötrosifik tamsayının faktöriyeli tanımlanabilir:

**Tanım 4.2.1**  $a+bI \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.  $d = \text{ebob}\{a,b\}$  olmak üzere;

$$(a+bI)! = d!. \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}I\right)^d$$

olarak tanımlanır.

### Örnek 4.2.1

i.  $5! = (5 + 0I)! = 5! \cdot \left(\frac{5}{5} + \frac{0}{5}I\right)^5 = 5! + 0I, \text{ebob}\{5,0\} = 5.$

ii.  $(0 + 5I)! = 5! \cdot \left(\frac{0}{5} + \frac{5}{5}I\right)^5 = 0 + 5!I, \text{ebob}\{0,5\} = 5.$

iii.  $(9 - 3I)! = 3! \cdot \left(\frac{9}{3} - \frac{3}{3}I\right)^3 = 3! \cdot (3 - I)^3, \text{ebob}\{9, -3\} = 3.$

Aşağıdaki teorem ve ispatı [Abobala vd. (2021), Teorem 3.6] ' da  $n \times n$  kare matrisler için verilmiştir.

**Teorem 4.2.1**  $a+bI \in \mathbb{Z}[I]$  olsun.  $n \in \mathbb{Z}^+$  için

$$(a + bI)^n = a^n + ((a + b)^n - a^n)I$$

dir.

**İspat**  $n$  üzerinden tümevarım ile ispat yapılabilir:  $n=1$  için yukarıdaki eşitlik doğrudur.  $n-1$  için iddianın doğru olduğu kabul edilsin. Yani  $(a + bI)^{n-1} = a^{n-1} + ((a + b)^{n-1} - a^{n-1})I$  olsun. Buradan

$$\begin{aligned} (a + bI)^n &= (a + bI)^{n-1} \cdot (a + bI) \\ &= (a^{n-1} + ((a + b)^{n-1} - a^{n-1})I) \cdot (a + bI) \\ &= a^n + (a^{n-1} \cdot b + (a + b)^{n-1} \cdot a - a^n + (a + b)^{n-1} \cdot b - a^{n-1} \cdot b)I \\ &= a^n + ((a + b)^{n-1} \cdot (a + b) - a^n)I \\ &= a^n + ((a + b)^n - a^n)I \end{aligned}$$

olup teorem doğrudur.

**Sonuç 4.2.1**  $a+bI \in \mathbb{Z}[I]^+$  olsun.  $d=\text{ebob}\{a,b\}$  olmak üzere;

$$(a + bI)! = d! \cdot \left\{ \left(\frac{a}{d}\right)^d + \left[ \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)^d - \left(\frac{a}{d}\right)^d \right] I \right\}$$

dir.

**İspat** Tanım 4.2.1 ve Teorem 4.2.1' den

$$(a + bI)! = d!. \left( \frac{a}{d} + \frac{b}{d} \right)^d$$
$$= d!. \left\{ \left( \frac{a}{d} \right)^d + \left[ \left( \frac{a}{d} + \frac{b}{d} \right)^d - \left( \frac{a}{d} \right)^d \right] I \right\}$$

elde edilir.



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, nütrosolik yapılarından biri olan nütrosolik tamsayılar halkası üzerinde çalışılmıştır. Gauss tamsayılar halkası ile benzerlik gösteren nütrosolik tamsayılar halkasında,  $Z$  tamsayılar kümesindeki bazı cebirsel özelliklerin geçerli olup olmadığı, geçerli olmayan özelliklerin nasıl uyarlanabileceği araştırılmıştır. Bu doğrultuda “ $\leq$ ” kısmi sıralama bağıntısından yola çıkılarak tanımlanan denklik bağıntısıyla denklik sınıfları oluşturulup  $Z[I]$ ’nin ayrışmaları elde edilmiş, denklik sınıfları sıralı ikililer şeklinde ifade edilerek nütrosolik tamsayılar gösterilmiş, denklik sınıfları doğrularla ifade edilerek eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümeleri bölgesel olarak belirlenmiştir. Pozitif ve negatif nütrosolik tamsayı tanımları verilerek, denklik sınıfları latis diyagramı ile gösterilmiş, pozitif bir nütrosolik tamsayının faktöriyeli, bir nütrosolik tamsayının kuvvetleri kavramları verilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda  $Z[I]$  nütrosolik tamsayılar kümesinde bir nütrosolik tamsayının asal çarpanlarına ayrılması, bu çarpanlara ayrılmanın  $Z$  tamsayılar kümesinde olduğu gibi “tek türlü çarpanlara ayırma” olup olmadığı konuları çalışılabilir. Böylece  $Z$  tamsayılar kümesinin birçok cebirsel özelliği  $Z[I]$  nütrosolik tamsayılar kümesinde karşılık bulmuş olacaktır.

## KAYNAKLAR

- Abobala M., 2020, On Some Neutrosophic Algebraic Equations, Journal of New Theory, 33, 26-32.
- Abobala M., 2021, Partial Foundation of Neutrosophic Number Theory, Neutrosophic Sets and Systems, 39, 120- 132.
- Abobala M., Hatip A., Olgun N., Broumi S., Salama A. A., Khaled E. K., 2021, The Algebraic Creativity in the Neutrosophic Square Matrices, Neutrosophic Sets and Systems, 40,1-11.
- Agboola A. A. A., Akinola A. D. and Oyebola O. Y., 2011, Neutrosophic Rings I, International J. Math. Combin., 4, 1-14.
- Agboola A. A. A., Adeleke E. O. and Akinleye S. A., 2012, Neutrosophic Rings II, International J. Math. Combin. , 1-8.
- Conrad, K., 2013, The Gaussian Integers, Eriřim Tarihi:27/01/2021, <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/Zinotes.pdf>
- Çeven Y., Tekin ř. S., 2020, Some Properties of Neutrosophic İntegers, Kırklareli University Journal of Engineering and Science, 6(1), 50-59.
- Çeven Y., Yurttakal A. N., 2021, Some Elementary Proporties of Neutrosophic İntegers, Neutrosophic Sets and Systems, 41(1-7), 106-112.
- Çeven Y., 2022, The Greatest Common Divisors and The Least Common Multiples in Neutrosophic İntegers, Africa Mathematica' ya gönderildi
- Kandasamy W. B. V. , Smarandache F., 2006, Neutrosophic Rings, Hexis, Phoneix, Arizona.