T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLARININ BAZI EĞRİLİKLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UYGAR YILDIRIM

TEMMUZ

UYGAR YILDIRIM

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2022

PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLARININ BAZI EĞRİLİKLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Uygar YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2022

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Uygar YILDIRIM tarafından hazırlanan "Parakontak Metrik Manifoldlarının Bazı Eğriliklerinin Geometrisi Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

Matematik Anabilim Dalı, Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Üye : Doç. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Tez Savunma Tarihi: 20/07/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

…………………….

Uygar YILDIRIM

20/07/2022

PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLARININ BAZI EĞRİLİKLERİNİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Uygar YILDIRIM

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasında, bir normal parakontak metrik manifoldunun concircular eğrilik tensörünün, Riemann, projektif, concircular, Ricci ve quasi konformal eğrilik tensörleri üzerine etkileri çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre bir normal parakontak metrik manifoldu karakterize eden teorem ve sonuçlar verildi.

Sayfa Adedi : 34
Anahtar Kelimeler : Normal parakontak metrik manifold, concircular eğrilik tensörü, quasi konformal
Danışman : Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

ON THE GEOMETRY OF SOME CURVATURES OF PARACONTACT METRIC MANIFOLDS

(M. Sc. Thesis)

Uygar YILDIRIM

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2022

ABSTRACT

In this thesis, we study the effects of the concircular curvature tensor of a normal paracontact metric manifold on Riemann curvature tensor, Projective curvature tensor, concircular curvature tensor, Ricci tensor and quasi-conformal curvature tensor. According to the results obtained, the theorem and results characterizing a normal paracontact metric manifold are given.

Number of pages : 34
Keywords : Normal paracontact metric manifold, concircular curvature tensör, quasi-konformal
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ümit YILDIRIM

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının konusunun belirlenmesinde, çalışma sürecinde ve bu aşamalara kadar gelmesinde şahsıma göstermiş olduğu her türlü desteklerinden dolayı saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Ümit YILDIRIM'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu süreçte desteğini esirgemeyen sevgili eşime ve aileme de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
g	Metrik tensor
ϕ	(1,1)-tipinden tensör alanı
η	1-form
ξ	Vektör alanı
R	Riemann eğrilik tensörü
∇	Riemann Konneksiyonu
$\tilde{Z}$	Concircular eğrilik tensörü
P	Projektif eğrilik tensörü
$\tilde{C}$	Quasi-konformal eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
S	Ricci tensörü
$[,]$	Lie bracket(parantez) operatörü
$\otimes$	Tensörel çarpım
L_X	Lie operatörü
$T_P(M)$	p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$\chi(M)$	Vektör alanlarının cümlesi

1. GİRİŞ

Günümüze kadar olan süreçte geometri biliminin önemi giderek artmıştır. Zamanın gerektirdiği şekilde ve insanlığın ihtiyaçları doğrultusunda geometri bilimi farklı dallara ayrılarak birçok özgün çalışmalar yapılmıştır. Diferansiyel hesaplamanın geometriye uygulandığı diferansiyel geometri bu alanlardan birisidir.

Gauss'un yüzeylerin eğrilikleri ile ilgili çalışması diferansiyel geometrinin başlangıcına dayanır. Gauss'un bu çalışmaları Riemann manifoldu kavramına temel oluşturmuştur. Yerel olarak IR^n öklidyen uzayına benzeyen noktalar kümelerine manifoldlar diyebiliriz. Bir manifold sonlu sayıda koordinat komşuluklarından meydan gelir. Her bir koordinat komşuluğu IR^n uzayının bir açık kümesine homeomorfiktir. Koordinat komşulukları, manifold için yerel koordinat sistemleri tanımlamaya imkân tanır.

Manifoldlar üzerinde tanımlanan Tanjant vektör kavramı en temel kavramdır. Tanjant vektör kavramını birçok şekilde tanımlayabiliriz. Manifoldlar üzerinde eğri kavramını kullanarak tanımlamak, geometrik olarak tanımlayabileceğimiz en uygun metottur. Manifoldun üzerinde bir eğri, $I \subset IR$ açık aralığından M manifolduna bir diferansiyellenebilir dönüşüm olarak ifade edilir. Manifold üzerinde bir p noktasından geçen iki eğrinin bu noktadaki birinci türevleri aynı ise bu iki eğriye denktir denir. Vektör alanı kavramı ise, manifoldun her noktasına bir tanjant vektörü karşılık getiren bir diferansiyellenebilir dönüşüm olarak tanımlanır.

Riemann manifoldlarının özellikleri ile diferansiyel geometri çok yakından alakalıdır. Diğer bir ifadeyle manifoldlar üzerindeki metrik kavramlar ile ilgilenir. Diğer yandan bu manifoldların eğrilikleri, yüzeyler için değişik eğrilikler ve eğriler için burulmalar çalışılan konulardan bazılarıdır.

Diğer taraftan n-boyutlu bir (M, g)- Riemann manifoldunda $\forall\, V_1, V_2 \in \chi(M)$ için $S(V_1, V_2) = \lambda g(V_1, V_2)$ olacak şekilde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise, yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye Einstein manifoldu denir. Ayrıca (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldunda, Ricci tensör S için $\forall\, V_1, V_2 \in \chi(M)$ olmak üzere, $S(V_1, V_2) = ag(V_1, V_2) + b\eta(V_1)\eta(V_2)$ eşitliği sağlanırsa M ye η-Einstein manifold denir.

Hemen hemen kontak manifoldların bir benzeri olan ve aynı şekilde diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde

$$\eta(\xi) = 1$$
$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi$$

şartlarını sağlayan (ϕ, ξ, η) yapısını ilk olarak I. Sato tanımlamıştır (Sato, 1976). Bu yapı hemen hemen parakontak metrik yapı olarak adlandırılır. Hemen hemen parakontak manifoldlar, hemen hemen kontak manifoldlar gibi daima tek boyutlu olmak zorunda değildir.

Bu tez çalışmasında bir normal parakontak metrik manifoldun concircular eğrilik tensörünün, concircular eğrilik tensörü, Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, Ricci tensör ve quasi-konformal eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri araştırılmış ve elde edilen sonuçlara göre normal parakontak metrik manifoldların belirli şartlar altında indirgendiği durumlar incelenerek yeni sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-*boyutlu topolojik manifolddur* (Hacısalihoğlu, 1980).

i) M bir Hausdorff uzayıdır.

ii) M nin her bir açık alt cümlesi E^n veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.2. M topolojik manifoldu üzerinde bir $p \in M$ olsun. M nin p noktasının bir komşuluğu U olmak üzere

$$C^\infty(U, IR) = \{f \mid f : U \xrightarrow{dif-bilir} IR\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümlede $\forall\, f, g \in C^\infty(U, IR)$ ve $a, b \in IR$ için

i) Lineerlik

$$V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_P(g),$$

ii) Leibniz

$$V_P(f.g) = V_P(f)g(p) + f(p)V_P(g)$$

özelliklerini sağlayan V_p fonksiyonuna M nin p noktasındaki *tanjant vektörü* denir (O'Neill, 1983).

M nin p noktasındaki vektörlerin cümlesi $T_p(M)$ ile gösterilir. Buna göre

$T_P(M) = \left\{\vec{V}_P \,\middle|\, \vec{V}_P : C^\infty(M, IR) \xrightarrow{lineer\ ve\ leibniz} IR\right\}$ ile gösterelim. Bu cümlede iç ve dış işlemler

$$\oplus : T_P(M) \times T_p(M) \to T_P(M)$$

$$\left(\vec{V}_P, \vec{W}_P\right) \to \vec{V}_P \oplus \vec{W}_P : C^\infty(M, IR) \to IR$$

$$\left(\vec{V}_P \oplus \vec{W}_P\right)[f] = \vec{V}_P[f] + \vec{W}_P[f]$$

ve

$$\odot: IR \times T_p(M) \to T_P(M)$$
$$\left(\lambda, \vec{V}_P\right) \to \lambda\vec{V}_P: C^\infty(M, IR) \to IR$$
$$\left(\lambda\vec{V}_P\right)[f] = \lambda\vec{V}_P[f], \qquad \forall f \in C^\infty(M, IR)$$

olarak tanımlanırlar. Yukarıdaki işlemlere göre $T_p(M)$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına M manifoldunun p noktasındaki *tanjant uzayı* adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3. M, n- boyutlu bir manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olsun.

$$T_P^*(M) = \{W_p \mid W_p: T_P(M) \xrightarrow{lineer} IR\}$$

uzayına $T_p(M)$ nin p noktasındaki *dual uzayı* veya *kotanjant uzay* adı verilir.

Tanım 2.4. M, n- boyutlu bir manifold ve M manifoldunun kotanjant uzayı $T_p^*(M)$ olsun. $\omega(p) \in T_p^*(M)$ elemanına bir *kovektör* denir. Her bir ω kovektörü; U, M nin bir koordinat komşuluğu olmak üzere

$$\omega: U \to \bigcup_{p \in U} T_P^*(M)$$

$$p \to \omega(p): T_P^*(M) \to IR$$

biçiminde tanımlı bir lineer fonksiyon olup, M üzerinde bir *1-form* olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5. Reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V ve V^* , V nin duali olsun.

$$L(V^r, V^{*s}: R) = \{f \mid f: V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)lineer} IR\}$$

cümlesinde iç ve dış işlemler sırasıyla

$$(f \oplus g)(\alpha_1, .., \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = f(\alpha_1, .., \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) + g(\alpha_1, .., \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1, .., \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = \lambda f(\alpha_1, .., \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu uzaya $r.$ *mertebeden kovaryant* ve $s.$ *mertebeden kontravaryant tensör uzayı* denir. Bu uzayın elemanlarına da (r, s) *mertebeli tensör* adı verilir (Boothby, 1986).

Tanım 2.6. M diferansiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M, IR)$ olsun.

$$V_1 : C^\infty(M, IR) \rightarrow C^\infty(M, IR) \text{ dönüşümü}$$

i) $V_1(af + bg) = aV_1(f) + bV_1(g) \quad \forall f, g \in C^\infty(M, IR),\ a, b \in IR$

ii) $V_1(f.g) = V_1(f)g + fV_1(g)$

özelliklerini sağlıyorsa V_1 e M üzerinde bir *vektör alan* denir. M üzerinde vektör alanların cümlesi $\chi(M)$ şeklinde gösterilir (Boothby, 1986).

Tanım 2.7. M bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere $V_1, V_2 \in \chi(M)$ için

$$[,] \ : \ \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$
$$(V_1, V_2) \rightarrow [V_1, V_2]$$

dönüşümü $\forall\, f \in C^\infty(M, IR)$ fonksiyonu için

$$[V_1, V_2]f = V_1\big(V_2(f)\big) - V_2(V_1(f))$$

şeklinde tanımlansın. $[,]$, $\chi(M)$ üzerinde bir *Lie operatörü*dür. Burada $V_1(f)$, f fonksiyonunun V_1 vektör alanına göre yöne göre türevidir.

M bir diferansiyellenebilir manifold, $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ olmak üzere $f, g \in C^\infty(M, IR)$ fonksiyonları ve $\lambda \in IR$ için Lie operatörü

i) $[V_1, V_2](f+g) = [V_1, V_2](f) + [V_1, V_2](g)$

ii) $[V_1, V_2](\lambda f) = \lambda [V_1, V_2] f$

iii) $[V_1, V_2](fg) = g[V_1, V_2](f) + f[V_1, V_2](g)$

özelliklerini sağlar (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.8. M ve $\bar{M}$ m ve n boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar ve $f: M \to \bar{M}$ fonksiyonu p noktasında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$f_*: T_M(P) \to T_{\bar{M}}(f(p))$$
$$V_P \to f_*\big|_p(V_P) = (\bar{V}_P[f_1]\big|_{f(p)}, \ldots, \bar{V}_P[f_n]\big|_{f(p)})$$

ile tanımlı f_* dönüşümüne f nin *türev dönüşümü* denir. Eğer $g \in C(\bar{M}, IR), f(p)$ nin komşuluğunda diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\big(f_*(V_P)\big)g = V_P(gof)$$

dır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.9. M bir diferensiyelenebilir manifold M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve M den IR ye C^∞ fonksiyonlarının cümlesi de $C^\infty(M, IR)$ olsun. $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ ve $a, b \in IR$ için

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR) \text{ dönüşümü}$$

i) Simetrik, yani $\quad g(V_1, V_2) = g(V_2, V_1)$

ii) Pozitif tanımlılık, $\quad V_1 \neq 0$ için $g(V_1, V_1) \geq 0$ ve $g(V_1, V_1) = 0 \Leftrightarrow V_1 = 0$

iii) Bilineerlik, $\quad g(aV_1 + bV_2, V_3) = ag(V_1, V_3) + bg(V_2, V_3)$

$$g(V_1, aV_2 + bV_3) = ag(V_1, V_2) + bg(V_1, V_3)$$

şartlarını sağlıyorsa g ye M üzerinde bir *Riemann metriği* veya $(2,0)$ *mertebeli metrik tensör* ve (M, g) ikilisine de bir *Riemann manifoldu* adı verilir (O'Neill, 1983).

M üzerinde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lokal koordinat sistemi olmak üzere, g metriğinin bu koordinat sistemi için bileşenleri,

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

ile verilir. Burada $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n, T_p(M)$ nin bir bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.10. M diferansiyellenebilir manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$
$$(V_1, V_2) \longrightarrow \nabla(V_1, V_2) = \nabla_{V_1} V_2$$

dönüşümü $\forall\, f, g \in C^\infty(M, IR)$, $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ için,

$i)$ $\nabla_{V_1}(V_2 + V_3) = \nabla_{V_1} V_2 + \nabla_{V_1} V_3,$

$ii)$ $\nabla_{fV_1 + gV_2} V_3 = f\nabla_{V_1} V_3 + g\nabla_{V_2} V_3,$

$iii)$ $\nabla_{V_1}(fV_2) = f\nabla_{V_1} V_2 + V_1(f) V_2$

özelliklerini sağlarsa , ∇ ya M üzerinde bir *afin konneksiyon* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.11. (M, g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon ∇ olmak üzere $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ için ∇ dönüşümü aşağıdaki önermeleri sağlarsa ∇ ya M manifoldu üzerinde tanımlı bir sıfır torsiyonlu *Riemann konneksiyonu* veya *Levi-Civita konneksiyonu* denir.

$i)$ $\nabla_{V_1} V_2 - \nabla_{V_2} V_1 = [V_1, V_2]$ (konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)

$ii)$ $V_1 g(V_2, V_3) = g\left(\nabla_{V_1} V_2, V_3\right) + g(V_2, \nabla_{V_1} V_3)$ (metrikle bağdaşma özelliği)) (O'Neill, 1983).

Tanım 2.12. (M, g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan Riemann konnneksiyonu ∇ olmak üzere, $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ için

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$R(V_1, V_2)V_3 = \nabla_{V_1} \nabla_{V_2} V_3 - \nabla_{V_2} \nabla_{V_1} V_3 - \nabla_{[V_1, V_2]} V_3$$

ile tanımlanan R fonksiyonu $(3,1)$ mertebeli bir tensör alanıdır. Bu tensöre M nin *Riemann eğrilik tensörü* adı verilir (O'Neill, 1983).

Ayrıca $\forall\, V_4 \in \chi(M)$ için
$$K(V_1, V_2, V_3, V_4) = g(R(V_1, V_2)V_3, V_4)$$

tensörüne de M nin *Riemann-Christofel eğrilik tensörü* adı verilir (O'Neill, 1983).

Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir. $\forall\, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \in \chi(M)$ olmak üzere,

$i)$ $R(V_1, V_2)V_3 = -R(V_2, V_1)V_3$,

$ii)$ $g(R(V_1, V_2)V_4, V_5) = -g(R(V_1, V_2)V_5, V_4)$,

$iii)$ $R(V_1, V_2)V_3 + R(V_2, V_3)V_1 + R(V_3, V_1)V_2 = 0$,

$iv)$ $g(R(V_1, V_2)V_4, V_5) = g(R(V_4, V_5)V_1, V_2)$.

Tanım 2.13. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $T_P(M)$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $V_1, V_2 \in \Pi$ tanjant vektörleri için

$$g(V_1, V_1)g(V_2, V_2) - g(V_1, V_2)^2 \neq 0$$

olmak üzere

$$K(V_1 \wedge V_2) = \frac{g(R(V_1, V_2)V_2, V_1)}{g(V_1, V_1)g(V_2, V_{2)} - g(V_1, V_2)^2}$$

ile tanımlı $K(V_1 \wedge V_2)$ ye Π düzleminin *kesit eğriliği* denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir. Buradan kolayca görülebilir ki kesit eğriliği $T_P(M)$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π den seçilen bazlardan bağımsızdır (Yano ve Kon,1984).

Tanım 2.14. Bir n-boyutlu Riemann manifoldu (M, g), M üzerinde Riemann eğrilik tensörü R ve $\chi(M)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere,

$$Q: \chi(M) \to \chi(M)$$

$$V_1 \to QV_1 = \sum_{i=1}^{n} R(V_1, e_i)e_i$$

şeklinde tanımlanan Q operatörüne *Ricci operatörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.15. (M, g) bir n −boyutlu Riemann manifoldu ve bu manifoldun Riemann eğrilik tensörü R olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cümlesi $\chi(M)$ nin ortonormal vektör alanları olmak üzere $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR)$$

$$(V_1, V_2) \to S(V_1, V_2) = izR(., V_1)V_2$$

dönüşümü ile tanımlı $(0,2)$ −mertebeli

$$S(V_1, V_2) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, V_1)V_2, e_i)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun *Ricci tensörü* adı verilir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1. M manifoldunun eğrilik tensörü $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ için,

$$R(V_1, V_2)V_3 = c\{g(V_2, V_3)V_1 - g(V_1, V_3)V_2\}$$

olmak üzere, M manifoldunun kesit eğriliği c sabitine eşit ise, M manifolduna bir *reel uzay form* denir ve $M(c)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.16. (M, g), $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu S ise manifoldun Ricci tensörü olmak üzere $\forall\, V_1, V_2 \in \chi(M)$ için

$$S(V_1, V_2) = ag(V_1, V_2) + b\eta(V_1)\eta(V_2)$$

eşitliği sağlanıyor ise M ye η-*Einstein manifoldu* denir. Buradaki a ve b, M manifoldu üzerinde fonksiyonlar ve η-da bir 1-formdur (Boothby, 1986).

Tanım 2.17. (M, g), n-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere $\forall\, V_1, V_2 \in \chi(M)$ için

$$S(V_1, V_2) = \lambda g(V_1, V_2)$$

şeklinde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise bu durumda M manifolduna bir *Einstein manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.18. (M, g), n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

ifadesinin değerine M nin *skaler eğriliği* adı verilir (O'Neill,1983).

3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, bir hemen hemen parakontak metrik manifold ve bir normal parakontak metrik manifoldun tanımları verilmiştir. Ayrıca bir normal parakontak metrik manifoldun concircular eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörünün tanımları verilerek ve bu tensörlere ilişkin ileride kullanacağımız bazı temel sonuçlar elde edilmiştir.

n-boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olan M üzerindeki her bir V_1, V_2 vektör alanları için, ξ bir kovaryant vektör alanı, η bir $1-form$ ve $(1,1)$ $-$tipinden bir tensör ϕ olmak üzere

$$\phi^2 V_1 = V_1 - \eta(V_1)\xi, \qquad \phi\xi = 0, \qquad \eta(\phi V_1) = 0, \qquad \eta(\xi) = 1 \tag{3.1}$$

ve

$$g(\phi V_1, \phi V_2) = g(V_1, V_2) - \eta(V_1)\eta(V_2), \qquad \eta(V_1) = g(V_1, \xi), \tag{3.2}$$

şartlarını sağlayan (M, ϕ, ξ, η, g) yapısına bir *hemen hemen parakontak metrik manifold* adı verilir (Kaneyuki ve Williams, 1985).

Bir hemen hemen parakontak metrik manifoldu

$$(\nabla_{V_1}\phi)V_2 = -g(V_1, V_2)\xi - \eta(V_2)V_1 + 2\eta(V_1)\eta(V_2)\xi \tag{3.3}$$

ve

$$\phi V_1 = \nabla_{V_1}\xi \tag{3.4}$$

eşitliklerini sağlıyorsa bu durumda manifolda *normal parakontak metrik manifold* adı verilir (Kaneyuki ve Williams, 1985).

Ayrıca bir normal parakontak metrik manifoldun Riemann eğrilik tensörü R, c –sabit kesit eğriliğine sahipse o zaman manifoldun Riemann eğrilik tensörü, $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$R(V_1,V_2)V_3 = \frac{c+3}{4}\{g(V_2,V_3)V_1 - g(V_1,V_3)V_2\}$$
$$+\frac{c-1}{4}\{\eta(V_1)\eta(V_3)V_2 - \eta(V_2)\eta(V_3)V_1 + g(V_1,V_3)\eta(V_2)\xi$$
$$-g(V_2,V_3)\eta(V_1)\xi + g(\phi V_2,V_3)\phi V_1 - g(\phi V_1,V_3)\phi V_2$$
$$-2g(\phi V_1,V_2)\phi V_3\} \tag{3.5}$$

şeklindedir (Kaneyuki ve Williams, 1985).

n-boyutlu (M,g) Riemann manifoldunda concircular, projektif ve quasi-konformal eğrilik tensörleri, sırasıyla $\forall\, V_1, V_2, V_3 \in \chi(M)$ için

$$\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3 = R(V_1,V_2)V_3 - \frac{r}{n(n-1)}[g(V_2,V_3)V_1 - g(V_1,V_3)V_2], \tag{3.6}$$

$$P(V_1,V_2)V_3 = R(V_1,V_2)V_3 - \frac{1}{n-1}[S(V_2,V_3)V_1 - S(V_1,V_3)V_2], \tag{3.7}$$

ve

$$\tilde{C}(V_1,V_2)V_3 = aR(V_1,V_2)V_3 + b[S(V_2,V_3)V_1 - S(V_1,V_3)V_2 + g(V_2,V_3)QV_1$$

$$-g(V_1,V_3)QV_2] - \frac{r}{n}[\frac{a}{n-1} + 2b][g(V_2,V_3)V_1 - g(V_1,V_3)V_2] \tag{3.8}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada a ve b birer sabit, Q, Ricci operatörü ve S, Ricci tensörü, r ise manifoldun skaler eğriliğidir (Yano, 1940).

Şimdi daha sonra kullanacağımız bazı eşitlikler bulacağız.

M, n-boyutlu bir normal parakontak metrik manifoldu ve M nin Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere, (3.5) denkleminde $V_1 = \xi$ seçtiğimizde,

$$R(\xi,V_2)V_3 = g(V_2,V_3)\xi - \eta(V_3)V_2, \tag{3.9}$$

benzer şekilde (3.5) de $V_3 = \xi$ seçtiğimizde

$$R(V_1,V_2)\xi = \eta(V_2)V_1 - \eta(V_1)V_2, \tag{3.10}$$

eşitlikleri elde edilir. Yine (3.10) de $V_2 = \xi$ için

$$R(V_1,\xi)\xi = V_1 - \eta(V_1)\xi \tag{3.11}$$

bulunur. Ayrıca (3.5) denkleminde eşitliğin her iki yanına $\xi \in \chi(M)$ uyguladığımızdaysa

$$\eta(R(V_1,V_2)V_3) = g(V_2,V_3)\eta(V_1) - g(V_1,V_3)\eta(V_2) \tag{3.12}$$

olarak hesaplanır.

Benzer şekilde, (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden

$$\tilde{Z}(\xi,V_2)V_3 = \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][g(V_2,V_3)\xi - \eta(V_3)V_2], \tag{3.13}$$

$$\tilde{Z}(\xi,V_2)\xi = \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][\eta(V_2)\xi - V_2], \tag{3.14}$$

$$P(\xi,V_2)V_3 = g(V_2,V_3)\xi - \frac{1}{n-1}[S(V_2,V_3)\xi + \eta(V_3)V_2], \tag{3.15}$$

$$P(\xi,V_2)\xi = \frac{1}{n-1}[\eta(V_2)\xi - V_2], \tag{3.16}$$

$$\tilde{C}(\xi,V_2)V_3 = [\frac{4a + b[c(n-6) + 7n - 6]}{4} - \frac{r}{n}[\frac{a}{n-1} + 2b]]$$

$$\otimes[g(V_2,V_3)\xi - \eta(V_3)V_2], \tag{3.17}$$

$$\tilde{C}(\xi,V_2)\xi = [\frac{4a + b[c(n-6) + 7n - 6]}{4} - \frac{r}{n}[\frac{a}{n-1} + 2b]]$$

$$\otimes[\eta(V_2)\xi - V_2] \tag{3.18}$$

elde edilir.

Ayrıca burada M nin $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \xi\}$ bazı için

$$S(V_1, V_2) = g(R(V_1, e_i)e_i, V_2) + g(R(V_1, \xi)\xi, V_2)$$

eşitliği yardımıyla Ricci tensörü ve Ricci operatörü sırasıyla,

$$S(V_1, V_2) = \left(\frac{c(n-6)+3n+2}{4}\right) g(V_1, V_2) + \left(\frac{c(6-n)+n-10}{4}\right) \eta(V_1)\eta(V_2) \quad (3.19)$$

ve

$$QV_1 = \left(\frac{c(n-6)+3n+2}{4}\right) V_1 + \left(\frac{c(6-n)+n-10}{4}\right) \eta(V_1)\xi \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. Buradan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.1. Her normal sabit kesit eğrilikli parakontak metrik manifold η- Einstein manifoldudur.

Ayrıca (3.19) denkleminde $V_1 = \xi$ seçtiğimizde

$$S(V_1, \xi) = (n-2)\eta(V_1) \quad (3.21)$$

benzer şekilde

$$Q\xi = (n-2)\xi \quad (3.22)$$

olarak bulunur. Diğer yandan M nin skaler eğriliği

$$r = \frac{(n-1)[c(n-6)+3n+4]-4}{4} \quad (3.23)$$

dir.

4. BİR NORMAL PARAKONTAK METRİK MANİFOLDUN CONCİRCULAR EĞRİLİK TENSÖRÜ

Bu bölümde ise $\tilde{Z}(\xi, V_1)R = 0$, $\tilde{Z}(\xi, V_1)P = 0$, $\tilde{Z}(\xi, V_1)S = 0$, $\tilde{Z}(\xi, V_1)\tilde{Z} = 0$ ve $\tilde{Z}(\xi, V_1)\tilde{C} = 0$ şartları altında ortaya çıkan sonuçlar ve bu sonuçlara göre bir normal parakontak metrik manifold için bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Teorem 4.1. $n-$ boyutlu bir $M(c)$ sabit kesit eğrilikli normal parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi, V_1)R = 0$ şartının sağlanması için gerek ve yeter şart ya manifold $M(1)$ –şeklinde bir reel uzay forma indirgenir ya da manifoldun skaler eğriliği $r = n(n-1)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki n –boyutlu bir normal parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi, V_1)R = 0$ olsun. Burada $\forall\, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\big(\tilde{Z}(V_1, V_2)R\big)(V_3, V_5, V_4) &= \tilde{Z}(V_1, V_2)R(V_3, V_5)V_4 - R\big(\tilde{Z}(V_1, V_2)V_3, V_5\big)V_4 \\ &\quad - R\big(V_3, \tilde{Z}(V_1, V_2)V_5\big)V_4 - R(V_3, V_5)\tilde{Z}(V_1, V_2)V_4 \\ &= 0 \qquad (4.1)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. (4.1) de $V_1 = \xi$ seçtiğimizde bu denklem

$$\begin{aligned}\big(\tilde{Z}(\xi, V_2)R\big)(V_3, V_5, V_4) &= \tilde{Z}(\xi, V_2)R(V_3, V_5)V_4 - R\big(\tilde{Z}(\xi, V_2)V_3, V_5\big)V_4 \\ &\quad - R\big(V_3, \tilde{Z}(\xi, V_2)V_5\big)V_4 - R(V_3, V_5)\tilde{Z}(\xi, V_2)V_4 \\ &= 0 \qquad (4.2)\end{aligned}$$

halini alır.

$$\begin{aligned}(\tilde{Z}(\xi, V_2)R)(V_3, V_5, V_4) &= \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] [\, g(V_2, R(V_3, V_5)V_4)\xi - \eta(R(V_3, V_5)V_4)V_2 \,] \\ &\quad - \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] R\,(g(V_2, V_3)\xi - \eta(V_3)V_2, V_5)V_4 \\ &\quad - \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] R\,(V_3, g(V_2, V_5)\xi - \eta(V_5)V_2)V_4 \\ &\quad - \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] R\,(V_3, V_5)\,(g(V_2, V_4)\xi - \eta(V_4)V_2)\end{aligned}$$

$$= 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}(\widetilde{Z}(\xi,V_2)R)(V_3,V_5,V_4) = \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]&[g(V_2,R(V_3,V_5)V_4)\xi-\eta(R(V_3,V_5)V_4)V_2\\&-g(V_2,V_3)R(\xi,V_5)V_4+\eta(V_3)R(V_2,V_5)V_4\\&-g(V_2,V_5)R(V_3,\xi)V_4+\eta(V_5)R(V_3,V_2)V_4\\&-g(V_2,V_4)R(V_3,V_5)\xi+\eta(V_4)R(V_3,V_5)V_2]\end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur. Burada (3.9) ve (3.10) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}(\widetilde{Z}(\xi,V_2)R)(V_3,V_5)\,V_4) = \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]&[g(V_2,R(V_3,V_5)V_4)\xi-\eta(R(V_3,V_5)V_4)V_2\\&-g(V_2,V_3)g(V_5,V_4)\xi+g(V_2,V_3)\,\eta(V_4)V_5+\eta(V_3)\,R(V_2,V_5)V_4\\&+g(V_2,V_5)\,g(V_3,V_4)\xi-g(V_2,V_5)\eta(V_4)V_3+\eta(V_5)R(V_3,V_2)V_4\\&-g(V_2,V_4)\eta(V_5)V_3+g(V_2,V_4)\eta(V_3)V_5+\eta(V_4)R(V_3,V_5)V_2]\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) denkleminde $V_3 = \xi$ aldığımızda,

$$\begin{aligned}(\widetilde{Z}(\xi,V_2)R)(\xi,V_5)\,V_4) = \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]&[g(V_2,R(\xi,V_5)V_4)\xi-\eta(R(\xi,V_5)V_4)V_2\\&-g(V_2,\xi)g(V_5,V_4)\xi+g(V_2,\xi)\,\eta(V_4)V_5+\eta(\xi)\,R(V_2,V_5)V_4\\&+g(V_2,V_5)\,g(\xi,V_4)\xi-g(V_2,V_5)\eta(V_4)\xi+\eta(V_5)R(\xi,V_2)V_4\\&-g(V_2,V_4)\eta(V_5)\xi+g(V_2,V_4)\eta(\xi)V_5+\eta(V_4)R(\xi,V_5)V_2]\\&=0\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir.

(4.6) denkleminde, (3.1) , (3.2) ve (3.9) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}(\widetilde{Z}(\xi,V_2)R)(\xi,V_5)\,V_4) = \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]&[g(V_2,g(V_5,V_4)\xi-\,\eta(V_4)V_5)\xi\\&-\eta\,(g(V_5,V_4)\xi-\eta(V_4)V_5)V_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \eta(V_2)\, g(V_5, V_4)\xi + \eta(V_2)\eta(V_4)V_5 + R(V_2, V_5)V_4 \\
&+ g(V_2, V_5)\, \eta(V_4)\xi - g(V_2, V_5)\, \eta(V_4)\xi + \eta(V_5)\, g(V_2, V_4)\xi \\
&- \eta(V_5)\, \eta(V_4)V_2 - g(V_2, V_4)\, \eta(V_5)\xi + g(V_2, V_4)V_5 \\
&+ \eta(V_4)\, g(V_5, V_2)\xi - \eta(V_4)\, \eta(V_2)V_5]
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

elde edilir.

Buradan da, gerekli işlemler ve kısaltmalar yapıldığında,

$$
\left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][R(V_2, V_5)V_4 - g(V_5, V_4)V_2 + g(V_2, V_4)V_5] = 0 \tag{4.8}
$$

elde edilir. Bu ifadeden,

Ya $\left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] = 0$ olup buradan $r = n(n-1)$ bulunur. Ya da

$$
R(V_2, V_5)V_4 = g(V_5, V_4)V_2 - g(V_2, V_4)V_5
$$

olup M manifoldu $c = 1$ sabit kesit eğrilikli Reel uzay formdur.

Tersine, M sabit kesit eğrilikli normal parakontak metrik manifoldu $c = 1$ sabit kesit eğrilikli Reel uzay form olsun.

O zaman $R(V_1, V_2)V_3 = g(V_2, V_3)V_1 - g(V_1, V_3)V_2$ eşitliği

$$
\begin{aligned}
(\tilde{Z}(V_1, V_2)R(V_3, V_5)V_4 &= \tilde{Z}(V_1, V_2)\, R(V_3, V_5)V_4 - R\big(\tilde{Z}(V_1, V_2)V_3, V_5\big)V_4 \\
&- R\big(V_3, \tilde{Z}(V_1, V_2)V_5\big)V_4 - R(V_3, V_5)\tilde{Z}(V_1, V_2)V_4
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

eşitliğinde kullanılırsa;

$$
(\tilde{Z}(V_1, V_2)R(V_3, V_5)V_4 = \tilde{Z}(V_1, V_2)\, (g(V_5, V_4)V_3 - g((V_3, V_4)V_5)
$$

$$
\begin{aligned}
&-g(V_5,V_4)\,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3+g\big(\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3,V_4\big)V_5\\
&-g\big(\tilde{Z}(V_1,V_2)V_5,V_4\big)V_3+g(V_3,V_4)\tilde{Z}(V_1,V_2)V_5\\
&-g(V_5,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_4)V_3+g\big(V_3,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_4\big)V_5 \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{Z}(V_1,V_2)R(V_3,V_5)V_4 = {} & g(V_5,V_4)\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3-g(V_3,V_4)\tilde{Z}(V_1,V_2)V_5\\
&-g(V_5,V_4)\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3+g\big(\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3,V_4\big)V_5\\
&-g\big(\tilde{Z}(V_1,V_2)V_5,V_4\big)V_3+g(V_3,V_4)\tilde{Z}(V_1,V_2)V_5\\
&-g\big(V_5,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_4\big)V_3+g\big(V_3,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_4\big)V_5 \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

M manifoldu $c=1$ sabit eğrilikli olduğundan (3.6) denkleminden

$$
\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3=\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][\,g(V_2,V_3)V_1-g(V_1,V_3)V_2\,]
$$

dir. Bu ifadede (4.11) denkleminde kullanıldığında,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{Z}(V_1,V_2)R(V_3,V_5)V_4=\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right] & [\,g(V_5,V_4)\,g(V_2,V_3)V_1-g(V_5,V_4)\,g(V_1,V_3)V_2\\
&-g(V_3,V_4)\,g(V_2,V_5)V_1+g(V_3,V_4)\,g(V_1,V_5)V_2\\
&-g(V_5,V_4)\,g(V_2,V_3)V_1+g(V_5,V_4)\,g(V_1,V_3)V_2\\
&-g(V_2,V_3)g(V_1,V_4)V_5-g(V_1,V_3)g(V_2,V_4)V_5\\
&-g(\,V_2,V_5)g(V_1,V_4)V_3+g(V_1,V_5)g(V_2,V_4)V_3\\
&+g(V_3,V_4)g(V_2,V_5)V_1-g(V_3,V_4)g(V_1,V_5)V_2\\
&-g(V_2,V_4)\,g(V_5,V_1)V_3+g(V_1,V_4)g(V_2,V_5)V_3\\
&+g(V_2,V_4)g(V_3,V_1)V_5-g(V_1,V_4)g(V_3,V_2)V_5]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}(V_1,V_2)R\,(V_3,V_5)V_4=\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right] & [\,g(V_3,V_4)\,g(V_2,V_5)V_1\\
&-g(V_5,V_4)\,g(V_2,V_3)V_1\,] \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $V_2 = V_4 = \xi$ için

$$\tilde{Z}(V_1,\xi)R(V_3,V_5)\xi = \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][\ \eta(V_3)\eta(V_5)V_1 - \eta(V_5)\eta(V_3)V_1\ ] \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu da

$$\left(\tilde{Z}(V_1,\xi)\ R\right)(V_3,V_5) = 0$$

demektir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. $n-$ boyutlu bir $M(c)$ sabit kesit eğrilikli normal parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi,V_1)P = 0$ şartının sağlanması için gerek ve yeter şart ya M bir Einstein manifolduna indirgenir ya da manifoldun skaler eğriliği $r = n(n-1)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $\tilde{Z}(\xi,V_1)P = 0$ olsun. Bu durumda $\forall\, V_1,V_2,V_3,V_4,V_5 \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{Z}(V_1,V_2)P\right)(V_3,V_5,V_4) = {} & \tilde{Z}(V_1,V_2)P(V_3,V_5)V_4 - P\left(\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3,V_5\right)V_4 \\ & -P\left(V_3,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_5\right)V_4 - P(V_3,V_5)\tilde{Z}(V_1,V_2)V_4\end{aligned} \tag{4.14}$$

dir. (4.14) denkleminde $V_1 = \xi$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{Z}(\xi,V_2)P\right)(V_3,V_5,V_4) = {} & \tilde{Z}(\xi,V_2)\ P(V_3,V_5)V_4 - P\left(\tilde{Z}(\xi,V_2)V_3,V_5\right)V_4 \\ & -P\left(V_3,\tilde{Z}(\xi,V_2)V_5\right)V_4 - P(V_3,V_5)\tilde{Z}(\xi,V_2)V_4\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.15) denkleminde (3.13) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &= \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][\ g(V_2,P(V_3,V_5)V_4)\xi - \eta(P(V_3,V_5)V_4)V_2 \\ &-P(g(V_2,V_3)\xi - \eta(V_3)V_2,V_5)V_4 \\ &-P(V_3,g(V_2,V_5)\xi - \eta(V_5)V_2)V_4 - P(V_3,V_5)(g(V_2,V_4)\xi - \eta(V_4)V_2)]\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Buradan,

$$= \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][g(V_2,P(V_3,V_5)V_4)\xi-\eta(P(V_3,V_5)V_4)V_2$$
$$-g(V_2,V_3)\,P(\xi,V_5)V_4+\eta(V_3)\,P(V_2,V_5)V_4$$
$$-g(V_2,V_5)\,P(V_3,\xi)V_4+\eta(V_5)\,P(V_3,V_2)V_4$$
$$-g(V_2,V_4)\,P(V_3,V_5)\xi+\eta(V_4)P(V_3,V_5)V_2] \tag{4.17}$$

dir. Ki buradan,

$$= \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][gV_2(V_2,P(V_3,V_5)V_4)\xi-\eta(P(V_3,V_5)V_4)V_2$$
$$-g(V_2,V_3)\left[g(V_5,V_4)\xi-\frac{1}{n-1}\,S(V_5,V_4)\xi-\frac{1}{n-1}\,\eta(V_4)V_5\right]+\eta(V_3)\,P(V_2,V_5)V_4$$
$$-g(V_2,V_5)\left[-g(V_3,V_4)\xi+\frac{1}{n-1}\;\eta(V_4)V_3+\;\frac{1}{n-1}\,S(V_3,V_4)\xi\right]+\eta(V_5)\,P(V_3,V_2)V_4$$
$$-g(V_2,V_4)\left[\frac{1}{n-1}\,\eta(V_5)V_3-\frac{1}{n-1}\,\eta(V_3)V_5\right]+\eta(V_4)P(V_3,V_5)V_2] \tag{4.18}$$

bulunur. Bu denklem açıldığında,

$$= \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][\,g(V_2,P(V_3,V_5)V_4)\xi-\eta(P(V_3,V_5)V_4)V_2$$
$$-g(V_2,V_3)g(V_5,V_4)\xi+\frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_3)\,S(V_5,V_4)\xi+\frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_3)\,\eta(V_4)V_5$$
$$+\eta(V_3)\,P(V_2,V_5)V_4+g(V_2,V_5)g(V_3,V_4)\xi-\frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)V_3$$
$$-\frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_5)\,S(V_3,V_4)\xi+\eta(V_5)\,P(V_3,V_2)V_4$$
$$-\frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_4)\,\eta(V_5)V_3+\frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_4)\,\eta(V_3)V_5+\eta(V_4)\,P(V_3,V_5)V_2]=0 \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19) denkleminde $V_3=\xi$ aldığımızda,

$$= \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][\,g(V_2,P(\xi,V_5)V_4)\xi-\eta(P(\xi,V_5)V_4)V_2$$

$$-\eta(V_2)\, g(V_5,V_4)\xi + \frac{1}{n-1}\,\eta(V_2)\,S(V_5,V_4)\xi + \frac{1}{n-1}\,\eta(V_2)\,\eta(V_4)V_5$$

$$+P(V_2,V_5)V_4 + g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)\xi - \frac{n-2}{n-1}\,g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)\xi$$

$$+\,\eta(V_5)\,P(\xi,V_2)V_4 - \frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_4)\,\eta(V_5)\xi + \frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_4)\,V_5 + \eta(V_4)\,P(\xi,V_5)V_2]$$

$$= 0 \qquad (4.20)$$

elde edilir. (4.20) denkleminde (3.15) kullanıldığında,

$$= \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][\,g(V_2, g(V_5,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,S(V_5,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,\eta(V_4)V_5)\xi$$

$$-\eta\left(g(V_5,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,S(V_5,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,\eta(V_4)V_5\right)V_2$$

$$-\eta(V_2)\,g(V_5,V_4)\xi + \frac{1}{n-1}\,\eta(V_2)\,S(V_5,V_4)\xi + \frac{1}{n-1}\eta(V_2)\,\eta(V_4)V_5 + P(V_2,V_5)V_4$$

$$+g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)\xi - \frac{n-2}{n-1}\,g(V_2,V_5)\eta(V_4)\xi$$

$$+\eta(V_5)(g(V_2,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,S(V_2,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\eta(V_4)V_2)$$

$$-\frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_4)\,\eta(V_5)\xi + \frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_4)V_5$$

$$+\eta(V_4)\left(g(V_5,V_2)\xi - \frac{1}{n-1}\,S(V_5,V_2)\xi - \frac{1}{n-1}\eta(V_2)V_5\right) = 0 \qquad (4.21)$$

bulunur. Buradan gerekli hesaplamalar kısaltmalar yapıldığında,

$$\left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][\,g(V_5,V_4)\eta(V_2)\xi - \frac{1}{n-1}\,S(V_5,V_4)\eta(Y)\xi - \frac{1}{n-1}\eta(V_4)g(V_2,V_5)\xi$$

$$-g(V_5,V_4)V_2 + \frac{1}{n-1}\,S(V_5,V_4)V_2 + \frac{1}{n-1}\,\eta(V_4)\,\eta(V_5)V_2$$

$$-\,\eta(V_2)g(V_5,V_4)\xi + \frac{1}{n-1}\eta(V_2)\,S(V_5,V_4)\xi + \frac{1}{n-1}\eta(V_2)\,\eta(V_4)V_5 + P(V_2,V_5)V_4$$

$$+(V_2,V_5)\eta(V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)\xi - \frac{n-2}{n-1}\,g(V_2,V_5)\eta(V_4)\xi$$

$$+\eta(V_5)g(V_2,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\,\eta(V_5)\,S(V_2,V_4)\xi - \frac{1}{n-1}\eta(V_5)\eta(V_4)V_2$$

$$-\frac{1}{n-1}\ g(V_2,V_4)\eta(V_5)\xi+\frac{1}{n-1}\ g(V_2,V_4)V_5$$

$$+g(V_5,V_2)\eta(V_4)\xi-\tfrac{1}{n-1}\ S(V_5,V_2)\eta(V_4)\xi-\tfrac{1}{n-1}\eta(V_4)\eta(V_2)V_5]=0 \qquad (4.22)$$

(4.22) de $V_4=\xi$ alınırsa,

$$=\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][\ \eta(V_5)\eta(V_2)\xi-\frac{n-2}{n-1}\eta(V_5)\eta(V_2)\xi-\frac{1}{n-1}g(V_2,V_5)\xi$$

$$-\eta(V_5)V_2+\frac{n-2}{n-1}\ \eta(V_5)V_2+\frac{1}{n-1}\ \eta(V_5)V_2$$

$$-\eta(V_2)\eta(V_5)\xi+\frac{n-2}{n-1}\eta(V_2)\eta(V_5)\xi+\frac{1}{n-1}\ \eta(V_2)V_5+\frac{1}{n-1}\eta(V_5)V_2-\frac{1}{n-1}\eta(V_2)V_5$$

$$+g(V_2,V_5)\xi-\frac{1}{n-1}\ g(V_2,V_5)\xi-\frac{n-2}{n-1}\ g(V_2,V_5)\xi$$

$$+\eta(V_5)\eta(V_2)\xi-\frac{n-2}{n-1}\ \eta(V_5)\eta(V_2)\xi-\frac{1}{n-1}\ \eta(V_5)V_2$$

$$-\frac{1}{n-1}\ \eta(V_2)\eta(V_5)\xi+\frac{1}{n-1}\eta(V_2)V_5$$

$$+g(V_5,V_2)\xi-\frac{1}{n-1}\ S(V_5,V_2)\xi-\frac{1}{n-1}\eta(V_2)V_5]=0$$

$$=\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][\eta(V_5)\eta(V_2)\xi-\frac{1}{n-1}\ g(V_2,V_5)\xi-\eta(V_2)\eta(V_5)\xi$$

$$+g(V_5,V_2)\xi-\frac{1}{n-1}\ S(V_5,V_2)\xi]=0$$

$$=\left[1-\tfrac{r}{n(n-1)}\right]\left[\left(\tfrac{n-2}{n-1}\right)g(V_5,V_2)\xi-\tfrac{1}{n-1}\ S(V_5,V_2)\xi\right]=0 \qquad (4.23)$$

bulunur. (4.23) denkleminin her iki tarafı $\xi\in\ \chi(M)$ ile çarptığımızda,

$$=\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[\frac{1}{n-1}\big(-S(V_5,V_2)+(n-2)g(V_5,V_2)\big)\right]=0$$

Ya $r=n(n-1)$ dir. Ya da,

$S(V_5,V_2)=(n-2)\ g(V_5,V_2)$ olup, manifold bir Einstein manifoldudur.

Teoremin tersi açıktır.

Teorem 4.3. $n-$ boyutlu bir $M(c)$ sabit kesit eğrilikli normal parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi,V_1)S=0$ şartının sağlanması için gerek ve yeter şart ya M bir Einstein manifolduna indirgenir ya da manifoldun skaler eğriliği $r=n(n-1)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $n-$ boyutlu bir M parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi,V_1)S=0$ şartı sağlansın. O zaman $\forall\, V_1,V_2,V_3,V_4,V_5 \in \chi(M)$ üzere

$$S\big(\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3,V_4\big)+S\big(V_3,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_4\big)=0 \qquad \text{dir.} \tag{4.24}$$

(4.24) denkleminde $V_1=\xi$ seçilirse

$$S\left(\tilde{Z}(\xi,V_2)V_3,V_4\right)+S\left(V_3,\ \tilde{Z}(\xi,V_2)V_4\right)=0 \tag{4.25}$$

elde edilir. Burada,

$$\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][\,S(g(V_2,V_3)\xi-\eta(V_3)V_2,V_4)+S(V_3,g(V_2,V_4)\xi-\eta(V_4)V_2)]$$
$$=0 \tag{4.26}$$

bulunur. Buradan

$$\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][g(V_2,V_3)S(\xi,V_4)-S(V_2,V_4)\eta(V_3)+g(V_2,V_4)S(V_3,\xi)-S(V_3,V_2)\eta(V_4)]$$
$$=0 \tag{4.27}$$

bulunur. (4.27) denkleminde (3.21) kullanıldığında,

$$\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][(n-2)g(V_2,V_3)\eta(V_4)-S(V_2,V_4)\eta(V_3)+(n-2)g(V_2,V_4)\eta(V_3)$$
$$-S(V_3,V_2)\eta(V_4)]$$
$$=0 \tag{4.28}$$

bulunur. (4.28) denkleminde $V_3 = \xi$ seçtiğimizde

$$\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][(n-2)g(V_2,\xi)\eta(V_4) - S(V_2,V_4)\eta(\xi) + (n-2)g(V_2,V_4)\eta(\xi) - S(\xi,V_2)\eta(V_4)] = 0 \tag{4.29}$$

dir. (4.29) denkleminde (3.2) ve (3.21) kullanıldığında,

$$\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][(n-2)\eta(V_2)\eta(V_4) - S(V_2,V_4) + (n-2)g(V_2,V_4) - (n-2)\eta(V_2)\eta(V_4)] = 0 \tag{4.30}$$

bulunur. Buradan da,

$$\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right][-S(V_2,V_4) + (n-2)g(V_2,V_4)] = 0 \tag{4.31}$$

bulunur. Buradan ya $r = n(n-1)$ dir. Ya da

$S = (V_2,V_4) = (n-2)g(V_2,V_4)$ olup, manifold bir Einstein manifolduna indirgenir.

Teoremin tersi açıktır.

Teorem 4.4. n boyutlu bir $M(c)$ sabit kesit eğrilikli normal parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi,V_1)\tilde{Z} = 0$ şartının sağlanması için gerek ve yeter şart ya M nin skaler eğriliği $r = n(n-1)$ ya da M, $c = 1 + \frac{r}{n(n-1)}$ sabit kesit eğrilikli bir reel uzay formdur.

İspat: Kabul edelim ki M normal parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi,V_1)\tilde{Z} = 0$ şartı sağlansın. Burada $\forall\, V_1,V_2,V_3,V_4,V_5 \in \chi(M)$ için,

$$\left(\tilde{Z}(V_1,V_2)\tilde{Z}\right)(V_3,V_5,V_4) = \tilde{Z}(V_1,V_2)\,\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4 - \tilde{Z}\left(\tilde{Z}(V_1,V_2)V_3,V_5\right)V_4$$
$$-\tilde{Z}\left(V_3,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_5\right)V_4 - \tilde{Z}(V_3,V_5)\,\tilde{Z}(V_1,V_2)V_4$$

olduğunu biliyoruz. Hipotezden,

$$(\tilde{Z}(\xi,V_2)\,\tilde{Z}(V_3,V_5,V_4) = \tilde{Z}(\xi,V_2)\,\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4 - \tilde{Z}\big(\tilde{Z}(\xi,V_2)V_3,V_5\big)V_4$$
$$-\tilde{Z}\big(V_3,\tilde{Z}(\xi,V_2)V_5\big)V_4 - \tilde{Z}(V_3,V_5)\,\tilde{Z}(\xi,V_2)V_4$$
$$= 0 \tag{4.32}$$

dir. (4.32) denkleminde (3.13) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= \left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[g\left(V_2,\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4\right)\xi - \eta\left(\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4\right)V_2\right] \\ &-\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[\tilde{Z}(g(V_2,V_3)\xi - \eta(V_3)V_2,V_5)V_4\right] \\ &-\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[\tilde{Z}(V_3,g(V_2,V_5)\xi - \eta(V_5)V_2)V_4\right] \\ &-\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[\tilde{Z}(V_3,V_5)(g(V_2,V_4)\xi - \eta(V_4)V_2)\right] \end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.33) denkleminde gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} 0 = &\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[g\left(V_2,\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4\right)\xi - \eta\left(\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4\right)V_2\right. \\ &-g(V_2,V_3)\,\tilde{Z}(\xi,V_5)V_4 + \eta(V_3)\,\tilde{Z}(V_2,V_5)V_4 \\ &-g(V_2,V_5)\,\tilde{Z}(V_3,\xi)V_4 + \eta(V_5)\,\tilde{Z}(V_3,V_2)V_4 \\ &\left.-g(V_2,V_4)\,\tilde{Z}(V_3,V_5)\xi + \eta(V_4)\,\tilde{Z}(V_3,V_5)V_2\right] \end{aligned} \tag{4.34}$$

bulunur. (4.34) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} 0 = &\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[g\left(V_2,\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4\right)\xi - \eta\left(\tilde{Z}(V_3,V_5)V_4\right)V_2\right] \\ &-\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[g(V_2,V_3)\,g(V_5,V_4)\xi - g(V_2,V_3)\,\eta(V_4)V_5\right] + \eta(V_3)\,\tilde{Z}(V_2,V_5)V_4 \\ &-\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[g(V_2,V_5)\,\eta(V_4)V_3 - g(V_2,V_5)\,g(V_3,V_4)\xi\right] + \eta(V_5)\,\tilde{Z}(V_3,V_2)V_4 \\ &-\left[1-\frac{r}{n(n-1)}\right]\left[g(V_2,V_4)\,\eta(V_5)V_3 - g(V_2,V_4)\,\eta(V_3)V_5\right] + \eta(V_4)\tilde{Z}(V_3,V_5)V_2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35) eşitliğinde, $V_3 = \xi$ alındığında,

$$0 = \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right]^2 [g(V_2, g(V_5, V_4)\xi - \eta(V_4)V_5)\xi - \eta(g(V_5, V_4)\xi - \eta(V_4)V_5)V_2$$
$$-\eta(V_2)\, g(V_5, V_4)\xi + \eta(V_2)\, \eta(V_4)V_5 + \tilde{Z}(V_2, V_5)V_4$$
$$-g(V_2, V_5)\, \eta(V_4)\xi + g(V_2, V_5)\, \eta(V_4)\xi$$
$$+\eta(V_5)\, g(V_2, V_4)\xi - \eta(V_5)\, \eta(V_4)V_2$$
$$-g(V_2, V_4)\, \eta(V_5)\xi + g(V_2, V_4)V_5$$
$$+\eta(V_4)\, g(V_5, V_2)\xi - \eta(V_4)\eta(V_2)V_5] \tag{4.36}$$

elde edilir. Buradan,

$$0 = \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right]^2 [g(V_5, V_4)\, \eta(V_2)\xi - \eta(V_4)\, g(V_2, V_5)\xi - g(V_5, V_4)V_2$$
$$+\eta(V_4)\, \eta(V_5)V_2 - g(V_5, V_4)\, \eta(V_2)\xi + \eta(V_2)\, \eta(V_4)V_5 + \tilde{Z}(V_2, V_5)V_4$$
$$-g(V_2, V_5)\, \eta(V_4)\xi + g(V_2, V_5)\, \eta(V_4)\xi + \eta(V_5)\, g(V_2, V_4)\xi - \eta(V_5)\eta(V_4)V_2$$
$$-g(V_2, V_4)\, \eta(V_5)\xi + g(V_2, V_4)V_5 + \eta(V_4)\, g(V_5, V_2)\xi - \eta(V_4)\eta(V_2)V_5]$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$= \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right]^2 [\tilde{Z}(V_2, V_5)V_4 + g(V_2, V_4)V_5 - g(V_5, V_4)V_2] = 0 \tag{4.37}$$

bulunur. (4.37) de (3.6) denklemi kullanıldığında,

$$= \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right]^2 \left[R(V_2, V_5)V_4 - \left[1 + \frac{r}{n(n-1)}\right] [g(V_5, V_4)V_2 - g(V_2, V_4)V_5]\right] = 0 \tag{4.38}$$

bulunur. Böylece ya

$\left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right]^2 = 0$ olup $r = n(n-1)$ dir. Ya da

$R(V_2, V_5)V_4 = \left[1 + \frac{r}{n(n-1)}\right] [g(V_5, V_4)V_2 - g(V_2, V_4)V_5]$ olup, M,

$c = \left[1 + \frac{r}{n(n-1)}\right]$ sabit kesit eğrilikli Reel uzay formdur.

Teoremin tersi açıktır.

Teorem 4.5. $n-$ boyutlu bir $M(c)$ sabit kesit eğrilikli normal parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi, V_1)\tilde{C} = 0$ şartının sağlanması için gerek ve yeter şart ya manifoldun $M(\frac{4a-bc(n-6)+b(n-10)}{4a})$ sabit kesit eğrilikli bir reel uzay form olmasıdır ya da M nin skaler eğriliği $r = n(n-1)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki M parakontak metrik manifoldunda $\tilde{Z}(\xi, V_1)\tilde{C} = 0$ olsun. Daha önceki teoremlerdekine benzer olarak

$$\begin{aligned}(\tilde{Z}(V_1, V_2)\tilde{C})\,(V_5, V_4, V_3) &= \tilde{Z}(V_1, V_2)\,\tilde{C}(V_5, V_4)V_3 - \tilde{C}(\tilde{Z}(V_1, V_2)V_5, V_4)V_3 \\ &\quad -\tilde{C}(V_5, \tilde{Z}(V_1, V_2)V_4)V_3 - \tilde{C}(V_5, V_4)\tilde{Z}(V_1, V_2)V_3 \qquad (4.39)\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. (4.39) denkleminde $V_1 = \xi$ seçtiğimizde hipotezden,

$$\begin{aligned}(\tilde{Z}(\xi, V_2)\tilde{C})\,(V_5, V_4, V_3) &= \tilde{Z}(\xi, V_2)\,\tilde{C}(V_5, V_4)V_3 - \tilde{C}(\tilde{Z}(\xi, V_2)V_5, V_4)V_3 \\ &\quad -\tilde{C}(V_5, \tilde{Z}(\xi, V_2)V_4)V_3 - \tilde{C}(V_5, V_4)\,\tilde{Z}(\xi, V_2)V_3 \\ &= 0 \qquad (4.40)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.40) denkleminde (3.13) eşitliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned}(\tilde{Z}(V_1, V_2)\tilde{C})\,(V_5, V_4, V_3) &= \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right][g\,(V_2, \tilde{C}(V_5, V_4)V_3)\xi - \eta(\tilde{C}(V_5, V_4)V_3)V_2 \\ &\quad -g(V_2, V_5)\,\tilde{C}(\xi, V_4)V_3 + \eta(V_5)\,\tilde{C}(V_2, V_4)V_3 \\ &\quad -g(V_2, V_4)\,\tilde{C}(V_5, \xi)V_3 + \eta(V_4)\,\tilde{C}(V_5, V_2)V_3 \\ &\quad -g(V_2, V_3)\,\tilde{C}(V_5, V_4)\xi + \eta(Z)\tilde{C}(V_5, V_4)V_2]\end{aligned}$$

$$=0 \tag{4.41}$$

elde edilir.

(3.17) denkleminde kısaltma yapmak için,

$$A = \left[\frac{4a + b[c(n-6) + 7n - 6]}{4} - \frac{r}{n}\left[\frac{a}{n-1} + 2b\right]\right]$$

olarak alınırsa,

$$\tilde{C}(\xi, V_4)V_3 = A.[g(V_4, V_3)\xi - \eta(V_3)V_4]$$
$$\tilde{C}(V_5, \xi)V_3 = A.[-g(V_5, V_3)\xi + \eta(V_3)V_5]$$
$$\tilde{C}(V_5, V_4)\xi = A.[\eta(V_4)V_5 - \eta(V_5)V_4]$$

olduğundan ve bu eşitlikler (4.41) de kullanıldığında

$$\begin{aligned}\left(\tilde{Z}(\xi, V_2)\tilde{C}\right)(V_5, V_4, V_3) = \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] &[g\left(V_2, \tilde{C}(V_5, V_4)V_3\right)\xi - \eta\left(\tilde{C}(V_5, V_4)V_3\right)V_2 \\ &-A\, g(V_2, V_5)\, g(V_4, V_3)\xi + A\, g(V_2, V_5)\eta(V_3)V_4 + \eta(V_5)\, \tilde{C}(V_2, V_4)V_3 \\ &+A\, g(V_2, V_4)\, g(V_5, V_3)\xi - A\, g(V_2, V_4)\eta(V_3)V_5 + \eta(V_4)\, \tilde{C}(V_5, V_2)V_3 \\ &-A\, g(V_2, V_3)\, \eta(V_4)V_5 + A\, g(V_2, V_3)\eta(V_5)V_4 + \eta(V_3)\, \tilde{C}(V_5, V_4)V_2] \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir.

(4.42) eşitliğinde $V_5 = \xi$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\left(\tilde{Z}(\xi, V_2)\tilde{C}\right)(\xi, V_4)V_3 = \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] &[g\left(V_2, \tilde{C}(\xi, V_4)V_3\right)\xi - \eta\left(\tilde{C}(\xi, V_4)V_3\right)V_2 \\ &-A\, g(V_2, \xi)\, g(V_4, V_3)\xi + A\, g(V_2, \xi)\, \eta(V_3)V_4 + \eta(\xi)\, \tilde{C}(V_2, V_4)V_3 \\ &+A\, g(V_2, V_4)\, g(\xi, V_3)\xi - A\, g(V_2, V_4)\, \eta(V_3)\xi + \eta(V_4)\, \tilde{C}(\xi, V_2)V_3 \\ &-A\, g(V_2, V_3)\, \eta(V_4)\xi + A\, g(V_2, V_3)\, \eta(\xi)V_4 + \eta(V_3)\, \tilde{C}(\xi, V_4)V_2] \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.43}$$

dir. (4.43) eşitliğinde (3.1) ve (3.17) eşitlikleri kullanıldığında,

$$
\begin{aligned}
&= \left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] [A\, g(V_4, V_3)\, \eta(V_2)\xi - A\, \eta(V_3)\, g(V_2, V_4)\xi \\
&-A\, g(V_4, V_3)V_2 + A\, \eta(V_3)\, \eta(V_4)V_2 \\
&-A\, \eta(V_2)\, g(V_4, V_3)\xi + A\, \eta(V_2)\, \eta(V_3)V_4 + \tilde{C}(V_2, V_4)V_3 \\
&+A\, g(V_2, V_4)\, \eta(V_3)\xi - A\, g(V_2, V_4)\, \eta(V_3)\xi + A\, \eta(V_4)\, g(V_2, V_3)\xi \\
&-A\, \eta(V_4)\, \eta(V_3)V_2 - A\, g(V_2, V_3)\, \eta(V_4)\xi + A\, g(V_2, V_3)V_4 \\
&+A\, \eta(V_3)\, g(V_4, V_2)\xi - A\, \eta(V_3)\, \eta(V_2)V_4] \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

elde edilir. (4.44) eşitliğinden,

$$\left[1 - \frac{r}{n(n-1)}\right] \left[\tilde{C}(V_2, V_4)V_3 - A\, g(V_4, V_3)V_2 + A\, g(V_2, V_3)V_4\right] = 0$$

bulunur. Burada ya $r = n(n-1)$ dir. Ya da

$$\tilde{C}(V_2, V_4)V_3 = A.\, [g(V_4, V_3)V_2 - g(V_2, V_3)V_4] \tag{4.45}$$

dir. (4.45) eşitliğinde $V_2 \rightarrow \emptyset V_2$ ve $V_4 \rightarrow \emptyset V_4$ alındığında ve (3.8) kullanıldığında,

$$R(\emptyset V_2, \emptyset V_4)V_3 = \left[\frac{4a - bc(n-6) + b(n-10)}{4a}\right] [g(\emptyset V_4, V_3)\emptyset V_2 - g(\emptyset V_2, V_3)\emptyset V_4]$$

bulunur. Burada $\emptyset$ tensörü tüm manifoldu taradığından, M sabit kesit eğrilikli bir reel uzay formdur. Böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışma, bir normal parakontak metrik manifoldun concircular eğrilik tensörü üzerine daha detaylı çalışmalar yapılabilmesine katkıda bulunmak için hazırlanmıştır. Birinci ve ikinci bölümde konunun daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümde ise bir normal parakontak metrik manifoldun concircular eğrilik tensörünün, Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre normal parakontak metrik manifoldların belirli şartlar altında indirgendiği durumlar incelenerek yeni sonuçlar verilmiştir.

Sonuç olarak bu tez çalışması bir normal parakontak metrik manifoldun concircular eğrilik tensörü üzerine çalışmalar yapacak olan her matematikçinin yararlanabileceği bir Türkçe kaynak olarak literatüre sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Ahsan, Z. and Siddiqui, S. A. (2009). Concircular Curvature Tensor and Fluid Space-times, *International Journal Theoretical Physics*, 48, 3202-3212.

Akbaar, A. and Sarkar, A. (2013). On the Conhormonic and Concircular Curvature Tensors of almost C(λ)-manifolds, *International Journal of Advanced Mathematical Sciences*, 1(3), 134-138.

Atçeken, M., Dirik, S. and Yıldırım, Ü. (2017). An Inequality for Warped Product Semi-Invariant Submanifolds of a Normal Paracontact Metric Manifold, *Filomat*, 31(19), 6233–6240.

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2015). On almost C(α)-Manifold Satisfying Certain Conditions on Concircular Curvature Tensor, *Pure and Applied Mathematics Journal*, 9, 4(1-2), 31-34.

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2016). On Almost C(α) –Manifolds Satisfying Certain Conditions on Quasi-Conformal Curvature Tensor, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 19(1), 115–124.

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2016). Almost C(α) -Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 26(3), 567–578.

Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2015). On an Almost C(α) -Manifold Satisfying Certain Conditions on the Concircular Curvature Tensor, *Pure and Applied Mathematics Journal*, 4(1–2), 31–34.

Atçeken, M., Yıldırım, Ü. and Dirik, S. (2019). Semiparallel Submanifolds of a Normal Paracontact Metric Manifold, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(2), 501–509.

Atçeken, M., Yıldırım, Ü. and Dirik, S. (2019). A Normal Paracontact Metric Manifold Satisfying Some Conditions on the M-Projective Curvature Tensor, *Konuralp Journal of Mathematics*, 7(1), 217–221.

Blair, D. E. (2010). *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds* (Second Edition). Boston: Progress in Mathematics, 203, Birkhauser Boston. Inc.

Blair, D. E., Kim, S. K. and Tripathi M. M. (2015). On the Concircular Curvature Tensor of a Contact Metric Manifold, *Journal of the Korean Mathematical Society,* 42(5), 883-892.

Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, London: Academic Press Inc.

De, U. C., Yıldız A. and Yalnız A. F. (2009). Locally ϕ −Symmetric Normal almost Contact Metric Manifolds of Dimension 3. *Apple Mathematical Letter*, 22, 723-727.

De, U. C. and Mondal A. K. (2009). On 3-dimensional Normal almost Contact Metric Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions, *Communications of the Korean Mathematical Society*, 24, 265-275.

Erdem, S. (2002). On almost (Para)contact (Hyperbolic) Metric Manifolds and Harmonicity of (ϕ,ϕ)-Holomorphic Maps between them, *Houston Journal of Math*ematics, 28, 21-45.

Erken, K. (2015). On almost Paracontact Metric Manifolds of dimension 3, *Facta Universitatis (NIS), Series: Mathematics and Informatics,* 30(5), 777-778.

Hacısalihoğlu, H.H. (1980). *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Yayınları

Kaneyuki, S. and Williams, F. L. (1985). Almost Paracontact and Parahodge Structures on Manifolds, *Nagoya Mathematical Journal*, 99, 173-187.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemann Geometry*, Academic Press Inc.

Olszak, Z. (1986). Normal almost Contact Metric Manifolds of dimension three, *Annales Polonici Mathematici,* XLVII, 41-50.

Özgür, C. and Tripathi M. M. (2007). On P-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions on the Concircular Curvature Tensor, *Turkish Journal of Mathematics,* 31, 171-179.

Szabo, Z. I. (1982). Structure Theorems on Riemannian Spaces Satisfying *R(X,Y)R=0* the Local Version, *Differantial Geometry,* 17, 531-582.

Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*. Ankara:Nobel Yayınevi

Tripathi, M. M. and Kim, J. S. (2004). On the Concircular Curvature Tensor of a (K,μ)-Manifold, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 9(2), 104-114.

Welcyzko, J. (2009). On Legendre Curves in 3-dimensional Normal almost Paracontact Metric Manifolds, *Results in Mathematics,* 54, 377-387.

Welcyzko, J. On Basic Curvature Identities for almost (Para)contact Metric Manifolds. *Available in Arxiv: Slant* 1209.4731v1 [math.DG].

Welcyzko, J. (2014). Slant Curves in 3-Dimensional Normal almost Paracontact Metric Manifolds, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 11, 965-978.

Yano, K. and Bochner, S. (1953). Curvature and Betti numbers, Annals of Mathematics Studies 32, *Princeton University Press.*

Yano, K. (1940). Concircular Geometry I, Concircular Transformations*, Proceedings of the Imperial Academy,* Tokyo 16, 195-200.

Yano, K. and Kon, M. (1984). Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. *World Scientific Publishing Co*., Singapore, 72.

Yıldırım, Ü. and Atçeken, M. (2019). Bir Normal Hemen Hemen Parakontakt Metrik Manifoldun Quasi-Konformal Eğrilik Tensörü Üzerine, *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 9(2), 196–206.

Zamkovoy, S. (2009). Canonical Connections on Paracontact Manifolds, *Annals of Global Analysis and Geometry,* 36, 37-60.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı- Soyadı : Uygar YILDIRIM

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar,Bildiriler,Katıldığı Projeler)

1-) Yıldırım, Ü. and Yıldırım, U. (2022). Some Curvature Properties of Normal Paracontact Metric Manifolds, *Journal of Mathematical Sciences & Computational Mathematics,* 3(3), 258-266.