

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ MATRİS DİZİLERİ

Elif TÜYSÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Temmuz, 2022

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ MATRİS DİZİLERİ

Elif TÜYSÜZ tarafından hazırlanan tez çalışması 04.07.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Suat KOÇ, Üye
İstanbul Medeniyet Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ MATRİS DİZİLERİ başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Elif TÜYSÜZ

İmza

Sevdiklerime



TEŐEKKÜR

Tezimin hazırlanma aŐamasında bana bilgi ve birikimleriyle yardımcı olan çok sevdiğim değerli hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT'a teŐekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Eđitim hayatım boyunca maddi ve manevi her konuda destekleriyle yanımda olan aileme teŐekkür ederim.

Tezimi hazırlarken zorlandığım her anda, benden manevi desteklerini esirgemeyen tüm sevdiklerime, özellikle de yaşadığım her çıkmazda çözüm üretebilen Ođulcan DEMİR'e sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

Elif TÜYSÜZ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	x
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	4
1.3 Hipotez	4
2 TEMEL KAVRAMLAR	7
3 Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ DİZİSİ	9
4 Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ DİZİLERİNİN MATRİS FORMU	29
5 SONUÇ VE ÖNERİLER	58
KAYNAKÇA	59
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	60

SİMGE LİSTESİ

F_n	n . Fibonacci Sayısı
Σ	Toplam Sembolü
$[n]$	n 'den Büyük Olmayan Tamsayıların En Büyüğü
q_n	n . Bi-Periyodik Fibonacci Sayısı
\mathbb{N}	Doğal Sayılar Kümesi
\mathbb{R}	Reel Sayılar Kümesi
$F_n(r, s)$	Bi-Periyodik Fibonacci Matris Dizisinin n . terimi
\mathbb{Z}^+	Pozitif Tam Sayılar Kümesi

TABLO LİSTESİ

Tablo 1.1	Ay sonundaki tavşan çifti sayısı	3
Tablo 3.1	Birtakım bi-periyodik Fibonacci sayısı örnekleri	9



Bİ-PERİYODİK FIBONACCİ MATRİS DİZİLERİ

Elif TÜYSÜZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde Fibonacci sayıları hakkında bazı temel bilgiler verilmiştir. Leonardo Fibonacci ve tavşan probleminden bahsedilmiştir. Sonrasında literatür özeti verilmiştir. Son olarak tezin amacı ve hipotez verilmiştir.

İkinci bölümde tez içinde kullanılacak olan Binet formülü, Catalan özdeşliği ve Cassini özdeşliklerinin tanımları yapılmıştır. Ayrıca Q -matrisin tanımına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde bi-periyodik Fibonacci dizilerinin tanımı yapılmıştır. Bi-periyodik Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonu ifade edilmiştir ve bu fonksiyonunun bulunması ispatlanmıştır. Bi-periyodik Fibonacci dizileri için Binet formülü verilmiş ve ispatı yapılmıştır. Catalan özdeşliği verilmiş ve ispatı Binet formülü ile yapılmıştır. Cassini özdeşliği verilmiştir. d'Ocagne özdeşliği verilmiş ve ispatı Binet formülü kullanılarak yapılmıştır. Son olarak Binom katsayılarını içeren toplamlar verilmiş, bu toplamların ispatı Binet formülü kullanılarak yapılmıştır.

Dördüncü bölümde bi-periyodik Fibonacci matris dizisi tanımlanmıştır. Bu dizinin n . genel terimi verilmiş ve bulunuşu tümevarım ile ispatı yapılmıştır. Genel terimin determinant ile verilip ispatı tümevarım kullanılarak yapılmıştır. Bu iki teoreme göre bir sonuç verilmiş ve ispatı yapılmıştır. Bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin üreteç fonksiyonu verilmiş ve ispatı yapılmıştır. Bi-periyodik Fibonacci matris dizisi için Binet formülüne yer verilmiştir. Son olarak bi-periyodik Fibonacci matris dizilerinin genel toplamları verilmiştir. Bu genel toplam bulunurken Binet formülünden yararlanılmıştır.

Beşinci bölüm olan son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bi-periyodik Fibonacci sayıları, Bi-periyodik Fibonacci matris dizileri, Binet formülü, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BI-PERIODIC FIBONACCI MATRIX SEQUENCES

Elif TÜYSÜZ

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

This thesis consists of 5 chapters.

The first chapter, some basic information about Fibonacci numbers is given. Leonardo Fibonacci and the rabbit problem are mentioned. Afterwards, a literature review is given. Finally, the objective of the thesis and the hypothesis are given.

In the second chapter, the definitions of the Binet formula, Catalan identity and Cassini identity, which will be used in the thesis, are given. Also, the definition of Q -matrix is given.

In the third chapter, the definition of bi-periodic Fibonacci sequences is given. The generating function of bi-periodic Fibonacci sequences is expressed and the finding of this function is proved. Binet formula for bi-periodic Fibonacci sequences is given and its proof is done. The Catalan identity is given and its proof is made with the Binet formula. Cassini identity is given. The d'Ocagne identity is given and its proof is made using the Binet formula. Finally, the sums involving the binomial coefficients are given, and the proof of these sums is made using the Binet formula.

In the fourth chapter, bi-periodic Fibonacci matrix sequence is defined. The general term n . of this sequence is given and its discovery is proved by induction. The general term is given with a determinant and its proof is done using induction. According to these two theorems, a result has been given and its proof has been made. The generator function of the bi-periodic Fibonacci matrix sequence is given and its proof is made. Binet's formula is given for the bi-periodic Fibonacci matrix sequence. Finally, the general sum of bi-periodic Fibonacci matrix sequences are given. While calculating this general sum, Binet's formula was used.

In the last chapter of thesis, conclusion and suggestions are included.

Keywords: Bi-periodic Fibonacci numbers, Bi-periodic Fibonacci matrix sequences, Binet's formula, Catalan identity, Cassini identity



**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING**

1.1 Literatür Özeti

Sayılar teorisi matematiğin en eski çağlardan beri çalışılan konularının başında gelmektedir. Bu nedenle insanlar her zaman sayıların özelliklerini araştırmak istemişlerdir. [1]

Bu kısımda Fibonacci sayıları ve onlara ait bazı özellikler ele alınmıştır.

Orta çağın en önemli matematikçilerinden Fibonacci veya gerçek ismiyle Leonardo Pisano (Leonardo Bigollo) 1170-1240 yılları arasında İtalya'da yaşamıştır. [2]

Matematiğe meraklı varlıklı bir tüccar olan Fibonacci, sık sık Mısır'a, Suriye'ye, Yunanistan'a, Fransa'ya ve o zamanki ismi Constantinople olan İstanbul'a seyahat etmekte ve tanıştığı bilim insanlarıyla ettiği sohbetlerde yeni bilgi ve yöntemleri öğrenmiştir. 1200 yılında, 30 yaşındayken İtalya'ya geri dönmüştür. Hala kullanılmakta olan Roman rakamlarının ne kadar kullanışsız olduğunu hatırlamış ve 1202 yılında Arap-Hint rakamlarını ve hesap sistemini batı dünyasına tanıtan "Liber Abaci" adlı eserini yayınlamıştır. 15 bölümlük bu eserde Fibonacci, batı dünyasına başta Harezmi ve Ebu Kamil olmak üzere birçok Arap, Fars ve Türk matematikçisinin sayılar teorisi ve aritmetikle ilgili çok sayıda modern yöntem ve algoritmasını aktarmıştır. O, bu kitabıyla birlikte Orta Çağ'ın büyük İtalyan matematikçileri arasında yer almaktadır. Liber Abaci 2 asır boyunca Avrupa'da temel referans olarak kullanılmıştır. Kitabın orijinali ortada yoktur. Günümüzde elimizde bulunan ikinci basım olan 1228 basımı kitaptır.

Fibonacci Liber Abaci kitabına şu sözlerle başlamıştır:

"Dokuz Hint rakamı 9,8,7,6,5,4,3,2 ve 1 şeklindedir. Bu dokuz rakam ve (0) işaretiyle herhangi bir sayı kolayca yazılabilir." [3]

Kitabın yedi bölümünde sayıların gösterimi ele alınmaktadır. Rakamların buldukları

yerlere göre basamak değeri aldığını ve bu ilişki özellikle açıklanmıştır. Çünkü rakamların buldukları yere göre değer alması Hintlilerde ve Mayalarda vardır. Diğer ülkelerin matematiklerinde bu ilişki yoktur. Bu nedenle matematikleri ilerleyip evrensel boyutlara gelmemiştir. [3]

Fibonacci, aritmetik işlemlerinde Hintlilerin bu rakamlarının nasıl kullanılacağını göstermiş, daha sonra bu teknik yöntemleri kar marjı, para bozma, mal değişimi, alışveriş, ortaklık, faiz hesabı, ağırlıkların ve ölçülerin birbirine çevrilmesi gibi pratik ve uygulamalı ticaret problemlerine uygulamıştır. Eserin büyük bir kısmı sayılara ait özellikleri içeren matematik problemleridir. Bununla birlikte son kısımda biraz geometri ve cebir bulunmaktadır. [3]

Fibonacci'yi bu denli ünlü yapan Liber Abaci kitabında yer alan ve bir arkadaşı tarafından sorulduğu iddia edilen tavşan problemidir. Problem şu şekildedir:

Kabul edilsin ki yeni doğmuş iki tavşanın biri dişi diğeri de erkek olsun. Bunlar belirli bir alana koyulsun. Tavşanlar bir aylık oldukları zaman üreyebilecek hale gelmektedirler. Üretken hale gelen her dişi tavşanın, her ay biri erkek biri dişi olan yeni bir çift tavşan doğurduğu kabul edilsin. Tavşanların yıl boyunca hiç ölmediği ve dişilerin ikinci aydan başlayarak her ay bir dişi bir erkek tavşan doğurduğu kabul edilsin. Bu durumda yıl sonunda kaç çift tavşan olacaktır?

Bu sorunun cevabı aşağıda adım adım verilmiştir.

1. Bir çift tavşan belirli bir odaya koyulsun. Birinci ay bittiğinde tavşanlar çiftleşir ve birinci ayın bitiminde tekrardan elimizde bir çift tavşan bulunmaktadır.
2. İkinci ayın bitiminde dişi tavşan yeni bir çift tavşan doğurur, bu şekilde belli alanda iki çift tavşan bulunur.
3. Üçüncü ay bittiğinde asıl dişi tavşan ikinci bir çift tavşan doğurur. Bu şekilde bulunan alanda üç çift tavşan olur.
4. Dördüncü ay bittiğinde asıl dişi tavşan yeni bir çift tavşan daha doğurur. İki ay önce doğan dişi tavşan kendisinin ilk çift tavşanını doğurur. Bu şekilde alanda beş tavşan bulunur. [4]

Toplam kısmında görülen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... sayılarına **Fibonacci sayıları** denmektedir. Bu sayılara Fibonacci sayıları isminin verilmesi için uzun zaman gerekmiştir. 1876 yılında Fransız matematikçi François Edouard Anatole Lucas (1842-1891) o zamana kadar farklı isimlerle anılan bu sayılara Fibonacci sayıları ismini vermiştir. [1]

Tablo 1.1 Ay sonundaki tavşan çifti sayısı

AYLAR	Yetişkin Çift	Yavru Çift	Toplam
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	31	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Fibonacci sayılarının ilk iki tanesi 1'dir ve sonraki her bir sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamıdır. n . Fibonacci sayısı F_n ile gösterilsin. O halde Fibonacci sayılarının sembolik ifadesi

$$F_1 = F_2 = 1 \quad (1.1)$$

ve $n \geq 3$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (1.2)$$

şeklinde verilebilir.

Bu çalışma bi-periyodik Fibonacci matris dizileri üzerine kurulmuştur.

Aşağıda bu Fibonacci dizileriyle ilgili bazı çalışmalar verilmiştir.

- Edson ve Yayenie [5] çalışmalarında bi-periodik Fibonacci dizilerini tanımlamışlardır. Bununla birlikte bu dizilerin üreteç fonksiyonunu vermişlerdir.
- Coşkun ve Taşkara [6] çalışmalarında bi-periyodik Fibonacci matris dizilerini tanımlamış ve onlara ait bazı özellikleri vermişlerdir.
- Koshy [7] kitabında Fibonacci sayıları ve onların özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca Binet formülü, Catalan ve Cassini özdeşliklerine yer verilmiştir.
- Coşkun, Yılmaz ve Taşkara [8] çalışmalarında genelleştirilmiş Fibonacci matris dizilerinin bazı özelliklerini vermişlerdir.
- Leung [9] çalışmasında genelleştirilmiş bi-periyodik Fibonacci dizilerine dair bazı özellikler vermiştir.
- Bilgici [10] çalışmasında Fibonacci dizilerine ait üretici fonksiyonu elde etmiş ve Binet formülünü vermiştir.

- Yılmaz, Coşkun ve Taşkara [11] çalışmalarında bi-periyodik Fibonacci polinomlarını tanımlamış ve onların bazı özelliklerine yer vermişlerdir.
- Demirtürk [12] çalışmasında matrisler ve Fibonacci sayıları arasında bazı araştırmalara yer vermiştir.
- Gwang-Yeon Lee ve Sang-Gu Lee [13] çalışmalarında Fibonacci sayıları ve bunlarla ilişkili matrisler üzerine çalışma gerçekleştirmişlerdir.
- Keskin ve Demirtürk [14] çalışmalarında özel bir matris üzerinden bu matrisin Fibonacci sayıları ile arasındaki bazı ilişkilere yer vermişlerdir.
- Cangül, [1] kitabında Fibonacci sayılarına ve Fibonacci sayılarına ait bazı özelliklere yer vermiştir.
- Akdeniz, [4] kitabında, tavşan probleminde ve Fibonacci sayılarının kullanım alanlarından bahsetmiştir.
- Yeşilot, [2] kitabında Fibonacci dizilerine ve bu dizilere ait bazı özelliklere yer vermiştir.
- Choo, [15] çalışmasında, bi-periyodik Fibonacci dizilerinin bazı özelliklerine yer vermiştir.
- Başbük ve Yazlık [16] çalışmalarında bi-periyodik Fibonacci sayılarının terslerinden üretilen toplamları ele almışlardır.
- Choo, [17] çalışmasında bi-periyodik Fibonacci ve Lucas dizileri arasındaki ilişkiyi ele almıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışma bi-periyodik Fibonacci dizileri üzerine yayınlanmış makaleleri detaylı bir biçimde irdeleyerek bu dizilerin özelliklerini geniş bir biçimde ortaya koymak üzere hazırlanmıştır. Bunu yaparken mevcut sonuçların ispatları olabildiğince geniş bir şekilde ele alınmış, çalışmalarda görülen eksikliklerde yer verilmeye çalışılmıştır.

1.3 Hipotez

Bi-periyodik Fibonacci dizileri için Binet formülü, Catalan Özdeşliği, Cassini Özdeşliği ve d'Ocagne Özdeşliği aşağıdaki gibidir.

Binet Formülü: $\mu = \frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}$, $\nu = \frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}$ ve $\varepsilon(z) = z - 2\lfloor \frac{z}{2} \rfloor$ iken

$$q_z = \left(\frac{r^{1-\varepsilon(z)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor}} \right) \frac{\mu^z - \nu^z}{\mu - \nu} \quad (1.3)$$

yazılabilir[5].

Catalan Özdeşliği: Negatif olmayan herhangi iki n ve p ($n \geq p$) sayıları için

$$r^{\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)} q_{n-p} q_{n+p} - r^{\varepsilon(n)} s^{\varepsilon(n)} q_n^2 = r^{\varepsilon(p)} s^{1-\varepsilon(p)} (-1)^{n+1-p} q_p^2 \quad (1.4)$$

özdeşliği yazılabilir[5].

Cassini Özdeşliği: Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için

$$r^{1-\varepsilon(n)} s^{\varepsilon(n)} q_{n-1} q_{n+1} - r^{\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)} q_n^2 = r(-1)^n \quad (1.5)$$

yazılabilir [5].

d'Ocagne Özdeşliği: Negatif olmayan herhangi z ve t $z \geq t$ tamsayıları için

$$r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_z q_{t+1} - r^{\varepsilon(z+zt)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_{z+1} q_t = (-1)^t r^{\varepsilon(z-t)} q_{z-t} \quad (1.6)$$

eşitliği yazılabilir [5].

Bi-periyodik Fibonacci matris dizisi: $n \in \mathbb{N}$ ve $r, s \in \mathbb{R}$ bi-periyodik Fibonacci matris dizisi $F_n(r, s)$

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} s & \frac{s}{r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

başlangıç koşulları ile birlikte

$$F_n(r, s) = \begin{cases} rF_{n-1}(r, s) + F_{n-2}(r, s), & n \text{ çiftse} \\ sF_{n-1}(r, s) + F_{n-2}(r, s), & n \text{ tekse} \end{cases} \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Bu çalışmada yukarıdaki özdeşlikler kullanılarak bi-periyodik Fibonacci matris dizileri için aşağıdaki özelliklerin var olacağı öngörülmektedir.

Bi-periyodik Fibonacci matris dizisinin n . genel terimi: Herhangi $n \geq 0$ tamsayısı için $\varepsilon(n) = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ iken

$$F_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n+1} & \frac{s}{r} q_n \\ q_n & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

olarak tanımlanır. [6]

Genel terimin determinanı:

$$\det(F_n(r, s)) = \left(\frac{-s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} \quad (1.10)$$

eşitliği tüm pozitif tamsayılar için sağlanır.[6]

Binet formülü: Her n doğal sayısında, bi-periyodik Fibonacci matris dizisi için Binet formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$F_n(r, s) = R_1(n)(\mu^n - \nu^n) + S_1(n)(\mu^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} - \nu^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}) \quad (1.11)$$

Burada

$$R_1(n) = \frac{[F_1(r, s) - sF_0(r, s)]^{\varepsilon(n)} [rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)]^{1-\varepsilon(n)}}{(rs)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\mu - \nu)}, \quad (1.12)$$

$$S_1(n) = \frac{s^{\varepsilon(n)} F_0(r, s)}{(rs)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} (\mu - \nu)} \quad (1.13)$$

$$\mu = \frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}, \nu = \frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}, \varepsilon(n) = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (1.14)$$

şeklindedir.[6]

Tanım 2.1 (Binet Formülü). $\mu, x^2 - x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin pozitif kökü ν de negatif kökü olmak üzere, $n \geq 1$ için

$$F_n = \frac{\mu^n - \nu^n}{\mu - \nu} \quad (2.1)$$

şeklindedir [7].

Tanım 2.2 (Cassini Özdeşliği). $n \geq 1$ iken

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (2.2)$$

şeklindedir [7].

Tanım 2.3 (Catalan Özdeşliği). t pozitif tamsayı olsun. O halde n için

$$F_{n+t}F_{n-t} - F_n^2 = (-1)^{n+t+1}F_t^2 \quad (2.3)$$

şeklindedir [7].

Tanım 2.4 (Q-Matris).

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

matrisini ele alalım. Bu matris Charles H. King'in 1960 yılındaki yüksek lisans çalışmasında Q-Matris olarak isimlendirilmiştir. Burada $|Q| = -1$ olup ek olarak

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Benzer şekilde

$$Q^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

olduğu görülür.

Burada ortaya çıkan model neticesinde aşağıdaki sonuç yazılabilir [7].

Teorem 2.1. $n \geq 1$ olsun. O zaman

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

yazılabilir [7].

İspat. Tümevarım uygulayalım. $n = 1$ için

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q \quad (2.9)$$

eşitlik doğrudur. Herhangi c sayısı için doğru olsun.

$$Q^c = \begin{bmatrix} F_{c+1} & F_c \\ F_c & F_{c-1} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

O halde

$$\begin{aligned} Q^{c+1} = Q^c Q^1 &= \begin{bmatrix} F_{c+1} & F_c \\ F_c & F_{c-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{c+1} + F_c & F_{c+1} \\ F_c + F_{c-1} & F_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{c+2} & F_{c+1} \\ F_{c+1} & F_c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Tanım 3.1. Sıfırdan farklı herhangi iki r ve s reel sayıları için $\{F_n^{(r,s)}\}_{n=0}^{\infty}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$F_0^{(r,s)} = 0, F_1^{(r,s)} = 1, F_n^{(r,s)} = \begin{cases} rF_{n-1}^{(r,s)} + F_{n-2}^{(r,s)} & n \text{ çiftse} \\ sF_{n-1}^{(r,s)} + F_{n-2}^{(r,s)} & n \text{ tekse} \end{cases} \quad (n \geq 2) \quad (3.1)$$

$F_n^{(r,s)}$ ifadesini q_n ile tanımlayalım. O halde

$$q_0 = 0, q_1 = 1, q_n = \begin{cases} rq_{n-1} + q_{n-2} & n \text{ çiftse} \\ sq_{n-1} + q_{n-2} & n \text{ tekse} \end{cases} \quad (n \geq 2) \quad (3.2)$$

yazılabilir [5].

Tablo 3.1 Birtakım bi-periyodik Fibonacci sayısı örnekleri

n	0	1	2	3	4	5	6	...
q_n	0	1	r	$rs + 1$	$r^2s + 2r$	$r^2s^2 + 3rs + 1$	$r^3s^2 + 4r^2s + 3r$...

Teorem 3.1. $\{q_n\}$ tarafından verilen genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x(1 + rx - x^2)}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} \quad (3.3)$$

şeklindedir. [5]

İspat.

$$F(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_t x^t + \dots = \sum_{z=0}^{\infty} q_z x^z \quad (3.4)$$

(3.4) ifadesinin her tarafını sx ile çarpalım.

$$sxF(x) = sq_0x + sq_1x^2 + sq_2x^3 + \dots + sq_t x^{t+1} + \dots = \sum_{z=0}^{\infty} q_z x^{z+1} = \sum_{z=1}^{\infty} sq_{z-1} x^z \quad (3.5)$$

(3.4) ifadesinin her tarafını x^2 ile çarpalım.

$$x^2F(x) = q_0x^2 + q_1x^3 + q_2x^4 + \dots + q_kx^{t+2} + \dots = sx \sum_{z=0}^{\infty} q_z x^{z+2} = \sum_{z=2}^{\infty} q_{z-2} x^z \quad (3.6)$$

$q_{2t+1} = bq_{2t} + q_{2t-1}$ ve $q_0 = q_1 = 1$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} (1 - sx - x^2)F(x) &= \sum_{z=0}^{\infty} q_z x^z - \sum_{z=1}^{\infty} sx^z - \sum_{z=2}^{\infty} q_{z-2} x^z \\ &= 0 + x + \sum_{z=2}^{\infty} q_z x^z - \sum_{z=2}^{\infty} sx^z - \sum_{z=2}^{\infty} q_{z-2} x^z \\ &= x + \sum_{z=2}^{\infty} (q_z - s - q_{z-2}) x^z \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burayı açarsak

$$\begin{aligned} &x + [(q_2 - sq_1 - q_0)x^2 + (q_3 - sq_2 - q_1)x^3 + (q_4 - sq_3 - q_2)x^4 + \dots] \\ &= x + (q_2 - sq_1 - q_0)x^2 + (sq_2 + q_1 - sq_2 - q_1)x^3 + (q_4 - sq_3 - q_2)x^4 + \dots \\ &= x + (q_2 - sq_1 - q_0)x^2 + (q_4 - sq_3 - q_2)x^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde tek dereceden olan terimlerin gittiği görülür.

O halde (3.8) toplamını düzenlersek

$$(1 - sx - x^2)F(x) = x + \sum_{z=1}^{\infty} (q_{2z} - sq_{2z-1} - q_{2z-2}) x^{2z} \quad (3.9)$$

elde edilir.

$q_{2t} = rq_{2t-1} + q_{2t-2}$ olduğunu biliyoruz.

(3.9) ifadesini açalım.

$$\begin{aligned} &x + (rq_1 + q_0 - sq_1 - q_0)x^2 + (rq_3 + q_2 - sq_3 - q_2)x^4 + \dots \\ &= x + (rq_1 - sq_1)x^2 + (rq_3 - sq_3)x^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Buradan

$$\begin{aligned} (1 - sx - x^2)F(x) &= x + (r - s)q_1 x^2 + (r - s)q_3 x^4 + \dots \\ &= x + \sum_{z=1}^{\infty} (r - s)q_{2z-1} x^{2z} \\ &= x + (r - s)x \cdot \sum_{z=1}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur.

$$f(x) = \sum_{z=1}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} \quad (3.12)$$

olsun.

$$\begin{aligned} q_{2t+1} &= sq_{2t} + q_{2t-1} \\ &= s(rq_{2t-1} + q_{2t-2}) + q_{2t-1} \\ &= rsq_{2t-1} + rq_{2t-2} \\ &= (rs + 1)q_{2t-1} + q_{2t-1} - q_{2t-3} \\ &= (rs + 2)q_{2t-1} - q_{2t-3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &(1 - (rs + 2)x^2 + x^4)f(x) \\ &= \sum_{z=1}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} - (rs + 2)x^2 \sum_{z=1}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} + x^4 \sum_{z=1}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} \\ &= q_1 x + q_3 x^3 + \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} - (rs + 2)x^2(q_1 x) - (rs + 2)x^2(q_3 x^3) \\ &\quad - (rs + 2)x^2 \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} + x^4 q_1 x + x^4 q_3 x^3 + x^4 \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} \\ &= x + q_3 x^3 - x(rs + 2)q_1 - x^5(rs + 2)q_3 + \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} \\ &\quad - (rs + 2) \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z+1} + x^5 q_1 + x^7 q_3 + \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z+3} \\ &= x + q_3 x^3 - (rs + 2) \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-3} x^{2z-1} + \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-5} x^{2z-1} \\ &\quad - x^3(rs + 2)q_1 + \sum_{z=3}^{\infty} q_{2z-1} x^{2z-1} \\ &= x + q_3 x^3 - q_1 x^3(rs + 2) + \sum_{z=3}^{\infty} (q_{2z-1} - (rs + 2)q_{2z-3} + q_{2z-5}) x^{2z-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$x + q_3 x^3 - q_1 x^3(rs + 2)$ ifadesini açalım.

$$\begin{aligned} x + q_3 x^3 - q_1 x^3(rs + 2) &= x + ((rs + 2)q_1 - q_{-1})x^3 - q_1 x^3(rs + 2) \\ &= x + rsx^3 + 2x^3 - x^3 - rsx^3 - 2x^3 \\ &= x - x^3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Yani

$$(1 - (rs + 2)x^2 + x^4)f(x) = x - x^3 + \sum_{z=3}^{\infty} (q_{2z-1} - (rs + 2)q_{2z-3} + q_{2z-5})x^{2z-1} \quad (3.16)$$

olur.

Toplam sembollü ifadeyi açalım.

$$\sum_{z=3}^{\infty} ((rs + 2)q_{2z-3} - q_{2z-5} - (rs + 2)q_{2z-3} + q_{2z-5})x^{2z-1} = 0 \quad (3.17)$$

olur.

Buradan

$$(1 - (rs + 2)x^2 + x^4)f(x) = x - x^3$$

$$f(x) = \frac{x - x^3}{(1 - (rs + 2)x^2 + x^4)} \quad (3.18)$$

bulunur.

Bulduğumuz sonucu (3.11) eşitliğinde yerine yazalım.

$$(1 - sx - x^2)F(x) = x + (r - s)x \cdot \frac{x - x^3}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x + \frac{(r-s)x \cdot (x-x^3)}{1-(rs+2)x^2+x^4}}{1-sx-x^2} \\ &= \frac{x - (rs+2)x^3 + x^5 + (r-s)(x^2-x^4)}{(1-(rs+2)x^2+x^4)(1-sx-x^2)} \\ &= \frac{x - rsx^3 - x^3 + x^5 + rx^2 - rx^4 - sx^2 + sx^4}{(1-(rs+2)x^2+x^4)(1-sx-x^2)} \\ &= \frac{x - sx^2 - x^3 + rx^2 - rsx^3 - rx^4 - x^3 + sx^4 + x^5}{(1-(rs+2)x^2+x^4)(1-sx-x^2)} \\ &= \frac{x(1-sx-x^2) + rx^2(1-sx-x^2) - x^3(1-sx-x^2)}{(1-(rs+2)x^2+x^4)(1-sx-x^2)} \\ &= \frac{(x + rx^2 - x^3)(1-sx-x^2)}{(1-(rs+2)x^2+x^4)(1-sx-x^2)} \\ &= \frac{x(1+rx-x^2)}{1-(rs+2)x^2+x^4} \end{aligned} \quad (3.20)$$

bulunur. ■

Teorem 3.2. $\mu = \frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}$, $\nu = \frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}$ ve $\varepsilon(z) = z - 2\lfloor \frac{z}{2} \rfloor$ iken

$$q_z = \left(\frac{r^{1-\varepsilon(z)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor}} \right) \frac{\mu^z - \nu^z}{\mu - \nu} \quad (3.21)$$

yazılabilir[5].

İspat. μ ve ν $x^2 - rsx - rs = 0$ denkleminin kökleridir ve

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 0, z \text{ çiftse} \\ 1, z \text{ tekse} \end{cases}$$

(3.20)'deki eşitliğe basit kesirlere ayırma uygulayalım.

$$\begin{aligned} x^4 - (rs + 2)x^2 + 1 &= x^4 - (\mu + \nu + 1 + 1)x^2 + 1 \\ &= x^4 - ((\mu + 1) + (\nu + 1))x^2 + 1 \\ &= (x^2 - (\mu + 1))(x^2 - (\nu + 1)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Payda kısmını yukarıdaki şekilde çarpanlarına ayırabiliriz.

Buradan

$$\frac{x(1 + rx - x^2)}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} = \frac{Kx + L}{x^2 - (\mu + 1)} + \frac{Mx + N}{x^2 - (\nu + 1)} \quad (3.23)$$

$$(Kx + L)(x^2 - (\nu + 1)) + (Mx + N)(x^2 - (\mu + 1)) = -x^3 + rx^2 + x$$

$$Kx^2 - Kx\nu - Kx + Lx^2 - L\nu - L + Mx^3 - Mx\mu - Mx + Nx^2 - N\mu - N = -x^3 + rx^2 - x$$

$$K + M = -1 \quad (3.24)$$

$$K\nu + M\mu = 0 \quad (3.25)$$

$$L + N = r \quad (3.26)$$

$$\frac{L}{N} = \frac{-(\mu + 1)}{\nu + 1} \quad (3.27)$$

(3.24) ve (3.25)'ten $K\nu = -N\mu$ yazabiliriz.

$$K = \frac{-\mu}{\nu} \cdot M \quad (3.28)$$

(3.28)'i (3.24)'te yerine yazalım.

$$\begin{aligned}\frac{-\mu}{\nu}M + M &= -1 \\ -M\mu + M\nu &= -\nu \\ M(\nu - \mu) &= -\nu \\ M &= \frac{\nu}{\mu - \nu}\end{aligned}\tag{3.29}$$

(3.29) ifadesini (3.24)'de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}K + \frac{\nu}{\mu - \nu} &= -1 \\ \frac{K(\mu - \nu) + \nu}{\mu - \nu} &= -1 \\ K(\mu - \nu) + \nu &= -(\mu - \nu) \\ K(\mu - \nu) &= -\mu \\ K &= \frac{-\mu}{\mu - \nu}\end{aligned}\tag{3.30}$$

(3.26) ve (3.27) ifadelerini ele alalım.

$$\begin{aligned}\frac{L}{N} &= \frac{-(\mu + 1)}{\nu + 1} = \frac{-\frac{\mu^2}{rs}}{\frac{\nu^2}{rs}} = -\frac{\mu^2}{\nu^2} = -\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \\ L &= -N\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\end{aligned}\tag{3.31}$$

Bu ifadeyi (3.26)'da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
-N\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 &= r - N \\
N\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 - N &= -r \\
N\left(\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 - 1\right) &= -r \\
N &= \frac{-r}{\left(\frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu^2}\right)} \\
&= \frac{-r\nu^2}{(\mu - \nu)(\mu + \nu)} \\
&= \frac{-r(\nu + 1).rs}{(\mu - \nu)(\mu + \nu)} \\
&= \frac{-r(\nu + 1)(\mu + \nu)}{(\mu - \nu)(\mu + \nu)} \\
N &= \frac{-r(\nu + 1)}{\mu - \nu} \tag{3.32}
\end{aligned}$$

(3.32) ifadesini (3.26) ifadesinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
L + \left(\frac{-r(\nu + 1)}{\mu - \nu}\right) &= \nu \\
L &= \frac{r(\mu - \nu) + r(\nu + 1)}{\mu - \nu} \\
L &= \frac{r(\mu + 1)}{\mu - \nu} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

(3.29), (3.30), (3.32) ve (3.33) ifadelerini (3.2)'de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\frac{x(1 + rx - x^2)}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} &= \frac{\frac{-x\mu}{\mu - \nu} + \frac{r(\mu + 1)}{\mu - \nu}}{x^2 - (\mu + 1)} + \frac{\frac{-x\nu}{\mu - \nu} - \frac{r(\nu + 1)}{\mu - \nu}}{x^2 - (\nu + 1)} \\
&= \frac{1}{\mu - \nu} \left[\frac{r(\mu + 1) - x\mu}{x^2 - (\mu + 1)} - \frac{r(\nu + 1) - x\nu}{x^2 - (\nu + 1)} \right] \tag{3.34}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\frac{A - Bz}{z^2 - C} = \sum_{n=0}^{\infty} BC^{-n-1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} AC^{-n-1} z^{2n} \tag{3.35}$$

$\frac{A - Bz}{z^2 - C}$ fonksiyonunun açılımı yukarıdaki şekilde verildiğinden $F(x)$ fonksiyonu

aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
& \frac{r(\mu+1)-x\mu}{x^2-(\mu+1)} - \frac{r(\nu+1)-x\nu}{x^2-(\nu+1)} \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} \mu(\mu+1)^{-z-1}x^{2z+1} - \sum_{z=0}^{\infty} r(\mu+1)(\mu+1)^{-z-1}x^{2z} \\
&- \sum_{z=0}^{\infty} \nu(\nu+1)^{-z-1}x^{2z+1} + \sum_{z=0}^{\infty} r(\nu+1)(\nu+1)^{-z-1}x^{2z} \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} \left(\mu(\mu+1)^{-z-1} - \nu(\nu+1)^{-z-1} \right) x^{2z+1} \\
&+ \sum_{z=0}^{\infty} \left(r(\nu+1)(\nu+1)^{-z-1} - r(\mu+1)(\mu+1)^{-z-1} \right) x^{2z} \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{(\mu+1)^{z+1}} - \frac{\nu}{(\nu+1)^{z+1}} \right) x^{2z+1} \\
&+ \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{r(\nu+1)}{(\nu+1)^{z+1}} - \frac{r(\mu+1)}{(\mu+1)^{z+1}} \right) x^{2z} \\
&= \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{\mu(\nu+1)^{z+1} - \nu(\mu+1)^{z+1}}{(\nu+1)^{z+1}(\mu+1)^{z+1}} \right) x^{2z+1} \\
&+ \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{r(\nu+1)(\mu+1)^{z+1} - r(\mu+1)(\nu+1)^{z+1}}{(\nu+1)^{z+1}(\mu+1)^{z+1}} \right) x^{2z} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Son olarak ikinci toplamda r 'yi dışarı alırsak

$$\begin{aligned}
&= \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{\mu(\nu+1)^{z+1} - \nu(\mu+1)^{z+1}}{(\nu+1)^{z+1}(\mu+1)^{z+1}} \right) x^{2z+1} \\
&+ r \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{(\nu+1)(\mu+1)^{z+1} - (\mu+1)(\nu+1)^{z+1}}{(\nu+1)^{z+1}(\mu+1)^{z+1}} \right) x^{2z} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu-\nu} \left[\frac{r(\mu+1)-x\mu}{x^2-(\mu+1)} - \frac{r(\nu+1)-x\nu}{x^2-(\nu+1)} \right] \\
F(x) &= \frac{1}{\mu-\nu} \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu+1)^{z+1} - \nu(\mu+1)^{z+1}}{(\nu+1)^{z+1}(\mu+1)^{z+1}} x^{2z+1} \right] \\
&+ \frac{r}{\mu-\nu} \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)(\mu+1)^{z+1} - (\mu+1)(\nu+1)^{z+1}}{(\nu+1)^{z+1}(\mu+1)^{z+1}} x^{2z} \right] \tag{3.38}
\end{aligned}$$

bulunur. μ ve ν 'ye aşağıdaki özellikleri uygulayalım.

(i)

$$\begin{aligned}
 (\mu + 1)(\nu + 1) &= \left(\frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} + 1 \right) \\
 &= \frac{r^2s^2 - rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} + 2rs + rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} - 4rs + 2\sqrt{r^2s^2 + 4rs} + 2rs - 2\sqrt{r^2s^2 + 4rs} + 4}{4} \\
 &= \frac{4}{4} \\
 (\mu + 1)(\nu + 1) &= 1
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \mu + \nu &= \frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} + \frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} \\
 &= \frac{2rs}{2} \\
 \mu + \nu &= rs
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \mu\nu &= \left(\frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} \right) \cdot \left(\frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} \right) \\
 &= \frac{r^2s^2 - rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} + rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} - (r^2s^2 + 4rs)}{4} \\
 &= \frac{-4rs}{4} \\
 \mu\nu &= -rs
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
 \mu + 1 &= \frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} + 1 \\
 &= \frac{rs + 2 + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Her tarafı $2rs$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
 \frac{2r^2s^2 + 4rs + 2rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{4rs} &= \frac{(rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs})^2}{4rs} \\
 &= \left(\frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{rs} \\
 \mu + 1 &= \frac{\mu^2}{rs}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

(v)

$$\begin{aligned}
 \nu + 1 &= \frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} + 1 \\
 &= \frac{rs + 2 - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Her tarafı $2rs$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned}
 \frac{2r^2s^2 + 4rs - 2rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{4rs} &= \frac{(rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs})^2}{4rs} \\
 &= \left(\frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{rs} \\
 \nu + 1 &= \frac{\nu^2}{rs}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

(vi)

$$\begin{aligned}
 -\nu(\mu + 1) &= -\left(\frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}\right) \cdot \left(\frac{rs + 2 + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}\right) \\
 &= \frac{r^2s^2 + rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} - rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} + 2rs - (r^2s^2 + 4rs) - 2\sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{4} \\
 &= \frac{-2rs - 2\sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{4} \\
 &= \frac{2(rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs})}{4} \\
 &= \frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} \\
 -\nu(\mu + 1) &= \mu
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

(vii)

$$\begin{aligned} -\mu(\nu+1) &= -\left(\frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}\right) \cdot \left(\frac{rs + 2 - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}\right) \\ &= \frac{r^2s^2 - rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} + rs\sqrt{r^2s^2 + 4rs} + 2rs - (r^2s^2 + 4rs) + 2\sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{4} \\ &= \frac{-2rs + 2\sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{4} \\ &= \frac{2(rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs})}{4} \\ &= \frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2} \\ -\mu(\nu+1) &= \nu \end{aligned} \tag{3.47}$$

Verilen eşitlikleri kullanarak (3.38) ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{\mu - \nu} \frac{-\nu(\mu+1)(\mu+1)^z + \mu(\nu+1)(\nu+1)^z}{((\nu+1)(\mu+1))^{z+1}} x^{2z+1} \right] \\ &+ \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{r}{\mu - \nu} \frac{(\nu+1)(\mu+1)(\mu+1)^z - (\mu+1)(\nu+1)(\nu+1)^z}{((\nu+1)(\mu+1))^{z+1}} x^{2z} \right] \\ &= \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{\mu - \nu} \frac{\mu\left(\frac{\mu^2}{rs}\right)^z - \nu\left(\frac{\nu^2}{rs}\right)^z}{1^{z+1}} x^{2z+1} \right] \\ &+ \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{r}{\mu - \nu} \frac{1 \cdot \left(\frac{\mu^2}{rs}\right)^z - 1 \cdot \left(\frac{\nu^2}{rs}\right)^z}{1^{z+1}} x^{2z} \right] \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{\mu - \nu} \frac{\mu^{2z+1} - \nu^{2z+1}}{(rs)^z} x^{2z+1} \right] + \left[\sum_{z=0}^{\infty} \frac{r}{\mu - \nu} \frac{\mu^{2z} - \nu^{2z}}{(rs)^z} x^{2z} \right] \\ &= \left[\sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{1}{rs}\right)^z \frac{\mu^{2z+1} - \nu^{2z+1}}{\mu - \nu} x^{2z+1} \right] + \left[\sum_{z=0}^{\infty} r \left(\frac{1}{rs}\right)^z \frac{\mu^{2z} - \nu^{2z}}{\mu - \nu} x^{2z} \right] \end{aligned} \tag{3.49}$$

Bu iki toplama göre

$$F(x) = \sum_{z=0}^{\infty} r^{1-\varepsilon(z)} \left(\frac{1}{rs}\right)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} \frac{\mu^{\nu - \nu^z} - \nu^{\mu - \mu^z}}{\mu - \nu} x^z \tag{3.50}$$

yazılabilir. Aynı zamanda (3.4) eşitliğini de kullanarak

$$q_z = \frac{r^{1-\varepsilon(z)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^z - \nu^z}{\mu - \nu} \right) \quad (3.51)$$

buluruz.

$r = s = 1$, $q_r = \frac{\mu^r - \nu^r}{\mu - \nu}$ olduğunda Fibonacci sayıları için orijinal Binet formülü elde edilir. ■

Teorem 3.3 (Catalan Özdeşliği). *Negatif olmayan herhangi iki n ve p ($n \geq p$) sayıları için*

$$r^{\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)} q_{n-p} q_{n+p} - r^{\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)} q_n^2 = r^{\varepsilon(p)} s^{1-\varepsilon(p)} (-1)^{n+1-p} q_p^2 \quad (3.52)$$

özdeşliği yazılabilir. [5]

İspat. Genelleştirilmiş Binet formülünü kullanalım.

$$\begin{aligned} r^{\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)} q_{n-p} q_{n+p} &= r^{\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)} \left(\frac{r^{1-\varepsilon(n-p)}}{(rs)^{\lfloor \frac{n-p}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{r^{1-\varepsilon(n+p)}}{(rs)^{\lfloor \frac{n+p}{2} \rfloor}} \right) \\ &\cdot \left(\frac{\mu^{n-p} - \nu^{n-p}}{\mu - \nu} \right) \left(\frac{\mu^{n+p} - \nu^{n+p}}{\mu - \nu} \right) \\ &= \frac{r^{\varepsilon(n-p)+1-\varepsilon(n-p)+1-\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)}}{(rs)^{\lfloor \frac{n-p}{2} \rfloor} (rs)^{\lfloor \frac{n+p}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{n-p} - \nu^{n-p}}{\mu - \nu} \right) \left(\frac{\mu^{n+p} - \nu^{n+p}}{\mu - \nu} \right) \\ &= \frac{r^{2-\varepsilon(n+p)} s^{1-\varepsilon(n-p)}}{(rs)^{n-\varepsilon(n-p)}} \left[\frac{\mu^{2n} - \mu^{n-p} \nu^{n+p} - \nu^{n-p} \mu^{n+p} + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Burada eğer $n - p$ çiftse $n + p$ de çift, $n - p$ tekse $n + p$ de tek olduğundan $\varepsilon(n + p)$ yerine $\varepsilon(n - p)$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} &= \frac{r^{2-\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)}}{r^{n-\varepsilon(n-p)} s^{n-\varepsilon(n-p)}} \left[\frac{\mu^{2n} - (\mu\nu)^{n-p} (\nu^{2p} + \mu^{2p}) + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right] \\ &= r^{2-\varepsilon(n-p)-n+\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)-n\varepsilon(n-p)} \left[\frac{\mu^{2n} - (\mu\nu)^{n-p} (\nu^{2p} + \mu^{2p}) + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right] \\ &= \frac{r^2 s}{(rs)^n} \left[\frac{\mu^{2n} - (\mu\nu)^{n-p} (\nu^{2p} + \mu^{2p}) + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right] \\ &= \frac{r}{(rs)^{n-1}} \left[\frac{\mu^{2n} - (\mu\nu)^{n-p} (\nu^{2p} + \mu^{2p}) + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

ve

$$\begin{aligned}
r^{\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)} q_n^2 &= r^{\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)} \left[\left(\frac{r^{1-\varepsilon(n)}}{(rs)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\mu^n - \nu^n}{\mu - \nu} \right) \right]^2 \\
&= r^{\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)} \left(\frac{r^{2-2\varepsilon(n)}}{(rs)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\mu^{2n} - 2\mu^n \nu^n + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r^{2-\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)}}{(rs)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{2n} - 2\mu^n \nu^n + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r^2 s}{(rs)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \varepsilon(n)}} \left(\frac{\mu^{2n} - 2\mu^n \nu^n + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \varepsilon(n) - 1}} \left(\frac{\mu^{2n} - 2(\mu \nu)^n + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^{n-1}} \left(\frac{\mu^{2n} - 2(\mu \nu)^n + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right) \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Bu sebeple,

$$\begin{aligned}
r^{\varepsilon(n-p)} s^{1-\varepsilon(n-p)} q_{n-p} q_{n+p} - r^{\varepsilon(n)} s^{\varepsilon(n)} q_n^2 &= \frac{r}{(rs)^{n-1}} \left(\frac{\mu^{2n} - (\mu \nu)^{n-p} (\nu^{2p} + \mu^{2p}) + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&\quad - \frac{r}{(rs)^{n-1}} \left(\frac{\mu^{2n} - 2(\mu \nu)^n + \nu^{2n}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^{n-1}} \left(\frac{2(\mu \nu)^p - (\mu \nu)^{n-p} (\mu^{2p} + \nu^{2p})}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^{n-1}} \left(\frac{(\mu \nu)^{n-p} 2(\mu \nu)^p - (\mu \nu)^{n-p} (\mu^{2p} + \nu^{2p})}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^{n-1}} (\mu \nu)^{n-p} \left(\frac{2(\mu \nu)^p - (\mu^{2p} + \nu^{2p})}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{-r}{(rs)^{n-1}} (\mu \nu)^{n-p} \left(\frac{\mu^{2p} - 2\mu^p \nu^p + \nu^{2p}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{-r}{(rs)^{n-1}} (\mu \nu)^{n-p} \left(\frac{(\mu^p - \nu^p)^2}{(\mu - \nu)^2} \right) \tag{3.56}
\end{aligned}$$

(3.41) numaralı özdeşliği kullanalım.

$$\begin{aligned}
&= \frac{-r}{(rs)^{n-1}} (-rs)^{n-p} \left(\frac{(\mu^p - \nu^p)^2}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= (-1)^{n-p+1} \frac{r}{(rs)^{r-1}} \left(\frac{(\mu^p - \nu^p)^2}{(\mu - \nu)^2} \right) \tag{3.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_r &= \frac{r^{1-\varepsilon(p)}}{(rs)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^p - \nu^p}{\mu - \nu} \right) \\
q_r^2 &= \frac{r^{2-2\varepsilon(p)}}{(rs)^{2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^p - \nu^p}{\mu - \nu} \right)^2 \tag{3.58}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n-p+1} \frac{r}{(rs)^{r-1}} \frac{(rs)^{2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}}{r^{2-2\varepsilon(p)}} q_r^2 \\
&= (-1)^{n-p+1} r^{1-2+2\varepsilon(p)} (rs)^{2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 - r} q_r^2 \\
&= (-1)^{n-p+1} r^{2\varepsilon(p)-1} (rs)^{1-\varepsilon(p)} q_r^2 \\
&= (-1)^{n-p+1} r^{2\varepsilon(p)-1} (r)^{1-\varepsilon(p)} (b)^{1-\varepsilon(p)} q_r^2 \\
&= (-1)^{n-p+1} r^{\varepsilon(p)} (s)^{1-\varepsilon(p)} q_r^2
\end{aligned} \tag{3.59}$$

bulunur ve eşitlik sağlanmış olur. ■

Teorem 3.4 (Cassini Özdeşliği). *Herhangi negatif olmayan n tamsayısı için*

$$r^{1-\varepsilon(n)} s^{\varepsilon(n)} q_{n-1} q_{n+1} - r^{\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)} q_n^2 = r(-1)^n \tag{3.60}$$

yazılabilir. [5]

İspat. Cassini özdeşliği Catalan özdeşliğinin özel bir durumu olduğundan, ispatı için Catalan özdeşliğini vermek yeterli olacaktır. ■

Teorem 3.5 (d'Ocagne Özdeşliği). *Negatif olmayan herhangi z ve t ($z \geq t$) tamsayıları için*

$$r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_z q_{t+1} - r^{\varepsilon(z+zt)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_{z+1} q_t = (-1)^t r^{\varepsilon(z-t)} q_{z-t} \tag{3.61}$$

eşitliği yazılabilir. [5]

İspat. Öncelikle

$$\varepsilon(z+1) + \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t+tz) = \varepsilon(z) + \varepsilon(t+1) - 2\varepsilon(z+zt) = 1 - \varepsilon(z-t) \tag{3.62}$$

ve

$$\varepsilon(z-t) = \varepsilon(tz-t) + \varepsilon(tz+t) \tag{3.63}$$

eşitlikleri sağlanır.

Genişletilmiş Binet formülünü kullanalım.

$$r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_z q_{t+1}$$

$$\begin{aligned}
&= r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} \left(\frac{r^{1-\varepsilon(z)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\mu^{\nu} - \nu^z}{\mu - \nu} \right) \left(\frac{r^{1-\varepsilon(t+1)}}{(rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\mu^{t+1} - \nu^{t+1}}{\mu - \nu} \right) \\
&= \frac{r^{\varepsilon(z+tz)+1-\varepsilon(z)+1-\varepsilon(t+1)} s^{\varepsilon(t+tz)}}{(rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^z \nu^{t+1} - \nu^z \mu^{t+1} - \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r^{\varepsilon(z+tz)+1-\varepsilon(z)+1-\varepsilon(t+1)+\varepsilon(z+tz)-\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r^{-(1-\varepsilon(z-t)+2-\varepsilon(z+tz))} s^{\varepsilon(z-t)-\varepsilon(z+tz)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r \cdot r^{\varepsilon(z-t)-\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(z-t)-\varepsilon(z+tz)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{\varepsilon(z-t)-\varepsilon(z+tz)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z}{2} \rfloor} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{\varepsilon(z-t)-\varepsilon(z+tz)}}{(rs)^{\frac{z-t+1-\varepsilon(z)-\varepsilon(t+1)}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= r(rs)^{\frac{2\varepsilon(z-t)-2\varepsilon(z+tz)-z-t-1+\varepsilon(z)+\varepsilon(t+1)}{2}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= r(rs)^{\frac{\varepsilon(z-t)-z-t}{2}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^t (rs)^{\frac{z-t+\varepsilon(z-t)}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{-t}}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\nu\mu^{z-t} + \mu\nu^{z-t}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \tag{3.64}
\end{aligned}$$

ve

$$r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_{z+1} q_t$$

$$\begin{aligned}
&= r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} \left(\frac{r^{1-\varepsilon(z+1)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z+1}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\mu^{z+1} - \nu^{z+1}}{\mu - \nu} \right) \left(\frac{r^{1-\varepsilon(t)}}{(rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\mu^t - \nu^t}{\mu - \nu} \right) \\
&= \frac{r^{\varepsilon(t+tz)+1-\varepsilon(z+1)+1-\varepsilon(t)} s^{\varepsilon(z+tz)}}{(rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} (rs)^{\lfloor \frac{z+1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r^{\varepsilon(t+tz)+1-\varepsilon(t+1)+1-\varepsilon(s)+\varepsilon(t+tz)-\varepsilon(t+tz)} s^{\varepsilon(z+tz)}}{(rs)^{\frac{z-t+1-\varepsilon(t)-\varepsilon(z+1)}{2}}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r^{2-(1-\varepsilon(z-t)-\varepsilon(t+tz))} s^{\varepsilon(z+tz)}}{(rs)^{\frac{z-t+1-\varepsilon(t)-\varepsilon(z+1)}{2}}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r^{1+\varepsilon(z-t)-\varepsilon(t+tz)} s^{\varepsilon(z-t)-\varepsilon(t+tz)}}{(rs)^{\frac{z-t+1-\varepsilon(t)-\varepsilon(z+1)}{2}}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{\varepsilon(z-t)-\varepsilon(t+tz)}}{(rs)^{\frac{z-t+1-\varepsilon(t)-\varepsilon(z+1)}{2}}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= r(rs)^{\frac{2\varepsilon(z-t)-2\varepsilon(t+tz)-z-t-1+\varepsilon(t)+\varepsilon(z+1)}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= r(rs)^{\frac{2\varepsilon(z-t)+1-\varepsilon(z-t)-z-t-1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= r(rs)^{\frac{\varepsilon(z-t)-z-t}{2}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^t (rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - \mu^{z+1} \nu^t - \nu^{z+1} \mu^t + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{-t}}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \cdot \left(\frac{\mu^{z-t+1} - (\mu\nu)^t (\mu^{z-t+1} + \nu^{z-t+1}) + \nu^{z-t+1}}{(\mu - \nu)^2} \right) \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Böylece,

$$r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_z q_{t+1} - r^{\varepsilon(z+tz)} s^{\varepsilon(t+tz)} q_{z+1} q_t$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r(rs)^{-t}}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \left(\frac{(\mu\nu)^t(\mu^{z-t-1} + \nu^{z-t+1} - \nu\mu^{z-t} - \mu\nu^{z-t})}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{-t}}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \left(\frac{(\mu\nu)^t(\mu^{z-t}(\mu - \nu) + \nu^{z-t}(\nu - \mu))}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{-t}}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \left(\frac{(\mu\nu)^t(\mu^{z-t} - \nu^{z-t}(\mu - \nu))}{(\mu - \nu)^2} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{-t}}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \left(\frac{(\mu\nu)^t(\mu^{z-t} - \nu^{z-t})}{\mu - \nu} \right) \\
&= \frac{r(rs)^{-t}}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \left(\frac{\mu^{z-t} - \nu^{z-t}}{\mu - \nu} \right) \\
&= \frac{r(-1)^t}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \left(\frac{\mu^{z-t} - \nu^{z-t}}{\mu - \nu} \right) \tag{3.66}
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
q_{z-t} &= \frac{r^{1-\varepsilon(z-t)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z-t}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{z-t} - \nu^{z-t}}{\mu - \nu} \right) \\
\frac{\mu^{z-t} - \nu^{z-t}}{\mu - \nu} &= \frac{q_{z-t}}{\frac{r^{1-\varepsilon(z-t)}}{(rs)^{\lfloor \frac{z-t}{2} \rfloor}}} \tag{3.67}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\varepsilon(z-t) &= z-t-2\lfloor \frac{z-t}{2} \rfloor \\
\lfloor \frac{z-t}{2} \rfloor &= \frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2} \tag{3.68}
\end{aligned}$$

(3.67) ve (3.68)'den

$$\begin{aligned}
\frac{r(-1)^t}{(rs)^{\frac{z-t-\varepsilon(z-t)}{2}}} \left(\frac{\mu^{z-t} - \nu^{z-t}}{\mu - \nu} \right) &= \frac{r(-1)^t}{(rs)^{\lfloor \frac{z-t}{2} \rfloor}} \frac{q_{z-t}}{r^{1-\varepsilon(z-t)}} (rs)^{\lfloor \frac{z-t}{2} \rfloor} \\
&= r^{1-1+\varepsilon(z-t)} (-1)^t q_{z-t} \\
&= (-1)^t r^{\varepsilon(z-t)} q_{z-t} \tag{3.69}
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 3.6 (Binom Katsayılarını İçeren Toplamlar). *Negatif olmayan herhangi n tam sayısı için*

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r^{\varepsilon(t)} (rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} q_t = q_{2n} \tag{3.70}$$

ve

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r^{\varepsilon(t+1)} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor} q_{t+1} = r q_{2n+1} \quad (3.71)$$

ifadeleri yazılabilir. [5]

İspat. Öncelikle herhangi negatif olmayan t tamsayısı için aşağıdaki işlemi yapalım.

$$\begin{aligned} q_t &= \frac{r^{1-\varepsilon(t)}}{(rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^t - \nu^t}{\mu - \nu} \right) \\ \left(\frac{\mu^t - \nu^t}{\mu - \nu} \right) &= \frac{q_t (rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}}{r^{1-\varepsilon(t)}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Her tarafı r ile çarpalım.

$$r \left(\frac{\mu^t - \nu^t}{\mu - \nu} \right) = q_t (rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} r^{\varepsilon(t)} \quad (3.73)$$

Böylece

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r^{\varepsilon(t)} (rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} q_t &= \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r \left(\frac{\mu^t - \nu^t}{\mu - \nu} \right) \\ &= \frac{r}{\mu - \nu} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (\mu^t - \nu^t) \\ &= \frac{r}{\mu - \nu} \left[\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \mu^t - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \nu^t \right] \end{aligned} \quad (3.74)$$

(i)

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \mu^t = \binom{n}{0} 1^n \mu^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \mu^1 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 \mu^n = (1 + \mu)^n \quad (3.75)$$

(ii)

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \nu^t = \binom{n}{0} 1^n \nu^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \nu^1 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 \nu^n = (1 + \nu)^n \quad (3.76)$$

yazabiliriz.

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r^{\varepsilon(t)} (rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} q_t = \frac{r}{\mu - \nu} ((1 + \mu)^n - (1 + \nu)^n) \quad (3.77)$$

(3.43) ve (3.45) özelliklerini kullanalım.

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{\mu - \nu} \left[\left(\frac{\mu^2}{rs} \right)^n - \left(\frac{\nu^2}{rs} \right)^n \right] \\
&= \frac{r}{\mu - \nu} \left[\left(\frac{\mu^{2n} - \nu^{2n}}{(rs)^n} \right) \right] \\
&= \frac{r}{(rs)^n} \left[\left(\frac{\mu^{2n} - \nu^{2n}}{\mu - \nu} \right) \right] \tag{3.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{2n} &= \frac{r^{1-\varepsilon(2n)}}{(rs)^{\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{2n} - \nu^{2n}}{\mu - \nu} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^n} \left(\frac{\mu^{2n} - \nu^{2n}}{\mu - \nu} \right) \tag{3.79}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r^{\varepsilon(t)} (rs)^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} q_t = q_{2n} \tag{3.80}$$

bulunur.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
q_{t+1} &= \frac{r^{1-\varepsilon(t+1)}}{(rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{t+1} - \nu^{t+1}}{\mu - \nu} \right) \\
\left(\frac{\mu^{t+1} - \nu^{t+1}}{\mu - \nu} \right) &= \frac{q_{t+1} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor}}{r^{1-\varepsilon(t+1)}} \tag{3.81}
\end{aligned}$$

Her tarafı r ile çarpalım.

$$r \left(\frac{\mu^{t+1} - \nu^{t+1}}{\mu - \nu} \right) = q_{t+1} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor} r^{\varepsilon(t+1)} \tag{3.82}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r^{\varepsilon(t+1)} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor} q_{t+1} &= \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \left(\frac{\mu^{t+1} - \nu^{t+1}}{\mu - \nu} \right) \\
&= \frac{r}{\mu - \nu} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} (\mu \mu^t - \nu \nu^t) \\
&= \frac{r}{\mu - \nu} \left[\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \mu \mu^t - \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \nu \nu^t \right] \\
&= \frac{r}{\mu - \nu} \left[\mu \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \mu^t - \nu \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \nu^t \right] \tag{3.83}
\end{aligned}$$

(iv) ve (v) özelliklerini kullanalım.

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{\mu - \nu} [\mu(\mu + 1)^n - \nu(\nu + 1)^n] \\
&= \frac{r}{\mu - \nu} \left[\mu \left(\frac{\mu^2}{rs} \right)^n - \nu \left(\frac{\nu^2}{rs} \right)^n \right] \\
&= \frac{r}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{2n+1} - \nu^{2n+1}}{(rs)^n} \right]
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
q_{2n+1} &= \frac{r^{1-\varepsilon(2n+1)}}{(rs)^{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\mu^{2n+1} - \nu^{2n+1}}{\mu - \nu} \right) \\
&= \frac{r}{(rs)^n} \left(\frac{\mu^{2n+1} - \nu^{2n+1}}{\mu - \nu} \right)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

olduğundan

$$\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} r^{\varepsilon(t+1)} (rs)^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor} q_{t+1} = r q_{2n+1} \tag{3.86}$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Bİ-PERİYODİK FİBONACCİ DİZİLERİNİN MATRİS FORMU

Tanım 4.1. $n \in \mathbb{N}$ ve $r, s \in \mathbb{R}$ için bi-periyodik Fibonacci matris dizisi $F_n(r, s)$

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} s & \frac{s}{r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

başlangıç koşulları ile birlikte

$$F_n(r, s) = \begin{cases} rF_{n-1}(r, s) + F_{n-2}(r, s), & n \text{ çiftse} \\ sF_{n-1}(r, s) + F_{n-2}(r, s), & n \text{ tekse} \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. [6]

Teorem 4.1. Herhangi $n \geq 0$ tamsayısı için $\varepsilon(n) = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ iken

$$F_n = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n+1} & \frac{s}{r} q_n \\ q_n & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

olarak tanımlanır. [6]

İspat. $q_2 = rq_1 + q_0 = r, q_1 = q_{-1} = 1, q_0 = 0$ olduğunu biliyoruz.

O zaman

$$F_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(0)} q_{0+1} & \frac{s}{r} q_0 \\ q_0 & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(0)} q_{0-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(1)} q_{1+1} & \frac{s}{r} q_1 \\ q_1 & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(1)} q_{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{r} q_2 & \frac{s}{r} q_1 \\ q_1 & \frac{s}{r} q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{r} r & \frac{s}{r} \cdot 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & \frac{s}{r} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$n = c \in \mathbb{Z}^+$ için ifade doğru olsun. $n = c + 1$ için ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
F_{c+1}(r, s) &= r^{\varepsilon(c)} s^{1-\varepsilon(c)} F_c(r, s) + F_{c+1}(r, s) \\
&= r^{\varepsilon(c)} s^{1-\varepsilon(c)} \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(c)} q_{c+1} & \frac{s}{r} q_c \\ q_c \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(c)} & q_{c-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(c-1)} q_c & \frac{s}{r} q_{c-1} \\ q_{c-1} & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(c-1)} q_{c-2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

c 'yi çift ve tek olarak ayrı ayrı ele alalım.

Çift ise $\varepsilon(c) = 0, \varepsilon(c-1) = 1$ olur.

$$\begin{aligned}
&= r^0 s^{1-0} \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^0 q_{c+1} & \frac{s}{r} q_c \\ q_c \left(\frac{s}{r}\right)^0 & q_{c-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^1 q_c & \frac{s}{r} q_{c-1} \\ q_{c-1} & \left(\frac{s}{r}\right)^1 q_{c-2} \end{pmatrix} \\
&= s \begin{pmatrix} q_{c+1} & \frac{s}{r} q_c \\ q_c & q_{c-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{s}{r} q_c & \frac{s}{r} q_{c-1} \\ q_{c-1} & \frac{s}{r} q_{c-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s q_{c+1} + \frac{s}{r} q_c & s \frac{s}{r} q_c + \frac{s}{r} q_{c-1} \\ s q_c + q_{c-1} & s q_{c-1} + \frac{s}{r} q_{c-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{s}{r} (r q_{c+1} + q_c) & \frac{s}{r} (s q_c + q_{c-1}) \\ s q_c + q_{c-1} & \frac{s}{r} (r q_{c-1} + q_{c-2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{s}{r} q_{c+2} & \frac{s}{r} q_{c+1} \\ q_{c+1} & \frac{s}{r} q_c \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

c tek olsun. O zaman $\varepsilon(c) = 1, \varepsilon(c-1) = 0$ olur

$$\begin{aligned}
&= r^1 s^{1-1} \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^1 q_{c+1} & \frac{s}{r} q_c \\ q_c \left(\frac{s}{r}\right)^1 & q_{c-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^0 q_c & \frac{s}{r} q_{c-1} \\ q_{c-1} & \left(\frac{s}{r}\right)^0 q_{c-2} \end{pmatrix} \\
&= r \begin{pmatrix} \frac{s}{r} q_{c+1} & \frac{s}{r} q_c \\ q_c & \frac{s}{r} q_{c-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_c & \frac{s}{r} q_{c-1} \\ q_{c-1} & q_{c-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r \frac{s}{r} q_{c+1} + q_c & r \frac{s}{r} q_c + \frac{s}{r} q_{c-1} \\ r q_c + q_{c-1} & r \frac{s}{r} q_{c-1} + q_{c-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_{c+2} & \frac{s}{r} (r q_c + q_{c-1}) \\ q_{c+1} & s q_{c-1} + q_{c-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_{c+2} & \frac{s}{r} q_{c+1} \\ q_{c+1} & q_c \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Buradan

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)q_{c+2} & \frac{s}{r}q_{c+1} \\ q_{c+1} & \frac{s}{r}q_c \end{pmatrix} & c \text{ çift ise} \\ \begin{pmatrix} q_{c+2} & \frac{s}{r}q_{c+1} \\ q_{c+1} & q_c \end{pmatrix} & c \text{ tek ise} \end{cases} \quad (4.9)$$

Bu iki fonksiyon birleştirilirse

$$F_{c+1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(c+1)}q_{c+2} & \frac{s}{r}q_{c+1} \\ q_{c+1} & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(c+1)}q_c \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.2. $F_n(r, s)$ Teorem 4.1'deki gibi olsun.

$$\det(F_n(r, s)) = \left(\frac{-s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} \quad (4.11)$$

eşitliği tüm pozitif tamsayılar için sağlanır.[6]

İspat. Teorem 4.1'e tümevarım uygulayalım.

$$F_1(r, s) = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(1)}q_{1+1} & \frac{s}{r}q_1 \\ q_1 & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(1)}q_{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{r}q_2 & \frac{s}{r}q_1 \\ q_1 & \frac{s}{r}q_0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$\det(F_1(r, s)) = \frac{-s}{r}q_1^2 = \frac{-s}{r} = \left(\frac{-s}{r}\right)^{\varepsilon(1)}$ olup $n = 1$ için denklem sağlanır.
 $n = f$ için ifadeyi doğru kabul edelim.

$$F_f = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(f)}q_{f+1} & \frac{s}{r}q_f \\ q_f & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(f)}q_{f-1} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$\det F_f(r, s) = \left(\left(\frac{r}{s}\right)^{\varepsilon(f)}\right)^2 q_{f+1}q_{f-1} - \frac{s}{r}q_f^2$
 f çift ise $\det F_f(r, s) = q_{f+1}q_{f-1} - \frac{s}{r}q_f^2 = 1$
 f tek ise $\det F_f(r, s) = \frac{s}{r}q_{f+1}q_{f-1} - \frac{s}{r}q_f^2 = \frac{-s}{r}$
şeklindedir.

$n = f + 2$ için bakalım.

f çift ise

$$F_{f+2} = \begin{pmatrix} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(f+2)} q_{f+3} & \frac{s}{r} q_{f+2} \\ q_{f+2} & \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(f+2)} q_{f+1} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \det F_{f+2}(r, s) &= q_{f+3}q_{f+1} - \frac{s}{r}(q_f + 2)^2 \\ &= (sq_{f+2} + q_{f+1})q_{f+1} - \frac{s}{r}(rq_{f+1} + q_f)^2 \\ &= (s(rq_{f+1} + q_f) + q_{f+1})q_{f+1} - \frac{s}{r}(r^2q_{f+1}^2 + 2rq_{f+1}q_f + q_f^2) \\ &= rsq_{f+1}^2 + sq_fq_{f+1} + q_{f+1}^2 - rsq_{f+1}^2 - 2rsq_{f+1}q_f - \frac{s}{r}q_f^2 \\ &= -sq_{f+1}q_f + q_{f+1}^2 - \frac{s}{r}q_f^2 \\ &= q_{f+1}(-sq_f + q_{f+1}) - \frac{s}{r}q_f^2 \\ &= q_{f+1}q_{f-1} - \frac{s}{r}q_f^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

sağlanır.
 $f + 2$ tek ise

$$\begin{aligned} \det F_{f+2}(r, s) &= \left(\frac{s}{r}\right)^2 q_{f+3}q_{f+1} - \frac{s}{r}(q_f + 2)^2 \\ &= \frac{s}{r} \left(\frac{s}{r} q_{f+3}q_{f+1} - (q_{f+2})^2 \right) \\ &= \frac{s}{r} \left(\frac{s}{r} (rq_{f+2} + q_{f+1})q_{f+1} - (q_{f+2})^2 \right) \\ &= \frac{s}{r} \left(\frac{s}{r} (r(sq_{f+1} + q_f) + q_{f+1})q_{f+1} - (sq_{f+1} + q_f)^2 \right) \\ &= \frac{s}{r} \left(s^2(q_{f+1}^2 + sq_fq_{f+1} + q_{f+1}^2 - s^2q_{f+1}^2 - 2sq_{f+1}q_f - q_f^2) \right) \\ &= \frac{s}{r} (-sq_{f+1}q_f + q_{f+1}^2 - q_f^2) \\ &= \frac{s}{r} (q_{f+1}(-sq_f + q_{f+1}) - q_f^2) \\ &= \frac{s}{r} (q_{f+1}q_{f-1} - q_f^2) \\ &= \frac{s}{r} q_{f+1}q_{f-1} - \frac{s}{r} q_f^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitliği de sağlanır.
 Buradan

$$\det F_n(r, s) = \begin{cases} \frac{-s}{r}, n \text{ tek ise} \\ 1, n \text{ çift ise} \end{cases} \quad (4.17)$$

yazılabilir. Yani

$$\det F_n(r, s) = \left(\frac{-s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} \quad (4.18)$$

yazılır.

İspat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.1. 4.1 ve 4.2 teoremleri kullanılarak

$$\left(\frac{s}{r}\right)^{2\varepsilon(n)} q_{n+1}q_{n-1} - \frac{s}{r}q_n^2 = \left(\frac{-s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} \quad (4.19)$$

yazabiliriz.

Böylece

$$r^{1-\varepsilon(n)}s^{\varepsilon(n)}q_{n+1}q_{n-1} - r^{\varepsilon(n)}s^{1-\varepsilon(n)}q_n^2 = r(-1)^n \quad (4.20)$$

yazılabilir. [6]

İspat. İfadeyi $\left(\frac{r}{s}\right)^{\varepsilon(n)}$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} s^{\varepsilon(n)}r^{-2\varepsilon(n)}q_{n+1}q_{n-1} - sr^{-1}q_n^2 &= \left(\frac{-s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} \\ s^{\varepsilon(n)}r^{-\varepsilon(n)}q_{n+1}q_{n-1} - s^{1-\varepsilon(n)}r^{\varepsilon(n)-1}q_n^2 &= \left(\frac{-s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} \left(\frac{s}{r}\right)^{\varepsilon(n)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

r ile çarpalım.

$$\begin{aligned} r^{1-\varepsilon(n)}s^{\varepsilon(n)}q_{n+1}q_{n-1} - s^{1-\varepsilon(n)}r^{\varepsilon(n)}q_n^2 &= (-1)^{\varepsilon(n)}.r \\ r^{1-\varepsilon(n)}s^{\varepsilon(n)}q_{n+1}q_{n-1} - s^{1-\varepsilon(n)}r^{\varepsilon(n)}q_n^2 &= (-1)^n.r \end{aligned} \quad (4.22)$$

İspat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.3. Bi-periyodik Fibonacci matris dizisi için

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k(r, s)x^k = \frac{1}{r - (rs + 2)x^2 + x^4} \begin{pmatrix} 1 + sx - x^2 & \frac{s}{r}x + sx^2 - \frac{s}{r}x^3 \\ x + rx^2 - x^3 & 1 - (rs + 1)x^2 + sx^3 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

eşitliği yazılabilir. [6]

İspat. $G(x)$, $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ile üretilen bir fonksiyon olsun.

O halde,

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r, s)x^k = F_0(r, s) + F_1(r, s)x + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(r, s)x^k \quad (4.24)$$

her tarafı $-sx$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} -sxG(x) &= -sx \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r, s)x^k = -sx F_0(r, s) - sx^2 F_1(r, s) - s \sum_{k=2}^{\infty} F_k(r, s)x^{k+1} \\ &= -sx F_0(r, s) - s \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}(r, s)x^k \end{aligned} \quad (4.25)$$

ve her tarafı $-x^2$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} -x^2 G(x) &= -x^2 \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r, s)x^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} F_k(r, s)x^{k+2} \\ &= -\sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}(r, s)x^k \end{aligned} \quad (4.26)$$

Buradan

$$\begin{aligned} (1 - sx - x^2)G(x) &= G(x) - sxG(x) - x^2G(x) \\ &= F_0(r, s) + xF_1(r, s) + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(r, s)x^k - sx F_0(r, s) \\ &\quad - s \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1}(r, s)x^k - \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2}(r, s)x^k \\ &= F_0(r, s) + x(F_1(r, s) - sF_0(r, s)) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} (F_k(r, s) - sF_{k-1}(r, s) - F_{k-2}(r, s))x^k \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$F_{2k+1}(r, s) = sF_{2k}(r, s) + F_{2k-1}(r, s) \quad (4.28)$$

olduğundan (4.27) eşitliğindeki toplam sembolü ifadeyi açarsak

$$\begin{aligned}
&= F_2(r,s)x^2 - sF_1(r,s)x^2 - F_0(r,s)x^2 + F_3(r,s)x^3 \\
&- sF_2(r,s)x^3 - F_1(r,s)x^3 + \dots \\
&= F_2(r,s)x^2 - sF_1(r,s)x^2 - F_0(r,s)x^2 + sF_2(r,s)x^3 + F_1(r,s)x^3 \\
&- sF_2(r,s)x^3 - F_1(r,s)x^3 + \dots \\
&= F_2(r,s)x^2 - sF_1(r,s)x^2 - F_0(r,s)x^2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.29}$$

şeklinde tek dereceden terimlerin gittiği görülür.

O halde şu şekilde yazalım.

$$\begin{aligned}
(1 - sx - x^2)G(x) &= F_0(r,s) + x(F_1(r,s) - sF_0(r,s)) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(r,s)x^{2k} \\
&- s \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}(r,s)x^{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-2}(r,s)x^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (rF_{2k-1}(r,s))x^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-2}(r,s)x^{2k} \\
&- s \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}(r,s)x^{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-2}(r,s)x^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (rF_{2k-1}(r,s))x^{2k-1} - s \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(r,s)x^{2k} \\
&= x(r-s) \sum_{k=1}^{\infty} (F_{2k-1}(r,s))x^{2k-1}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (F_{2k-1}(r,s))x^{2k-1} \tag{4.31}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
F_{2k+1}(r,s) &= sF_{2k}(r,s) + F_{2k-1}(r,s) \\
&= s(F_{2k-1}(r,s) + F_{2k-2}(r,s)) + F_{2k-1}(r,s) \\
&= (rs + 1)F_{2k-1}(r,s) + sF_{2k-2}(r,s)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ve

$$F_{2k-1}(r,s) = sF_{2k-2}(r,s) + F_{2k-3}(r,s) \tag{4.33}$$

yazabiliriz. sF_{2k-2} yerine $F_{2k-1}(r, s) - F_{2k-3}(r, s)$ yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} F_{2k+1}(r, s) &= (rs + 1)F_{2k-1}(r, s) + F_{2k-1}(r, s) - F_{2k-3}(r, s) \\ &= (rs + 2)F_{2k-1}(r, s) - F_{2k-3}(r, s) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} (1 - (rs + 2)x^2 + x^4)(g(x)) &= g(x) - (rs + 2)x^2g(x) + x^4g(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s))x^{2k-1} \\ &\quad - (rs + 2)x^2 \sum_{k=1}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s))x^{2k-1} \\ &\quad + x^4 \sum_{k=1}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s))x^{2k-1} \\ &= F_1(r, s)x + F_3(r, s)x^3 + \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s))x^{2k-1} \\ &\quad - (rs + 2)x^2F_1(r, s)x \\ &\quad - (rs + 2)x^2F_3(r, s)x^3 \\ &\quad - (rs + 2)x^2 \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s))x^{2k-1} \\ &\quad + x^4F_1(r, s)x + x^4F_3(r, s)x^3 \\ &\quad + x^4 \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s))x^{2k-1} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} &= F_1(r, s)x + F_3(r, s)x^3 - (rs + 2)x^3F_1(r, s) \\ &\quad + \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s))x^{2k-1} - (rs + 2) \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-3}(r, s))x^{2k-1} \\ &\quad + \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-5}(r, s))x^{2k-1} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} &= F_1(r, s)x + F_3(r, s)x^3 - (rs + 2)F_1(r, s)x^3 \\ &\quad + \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s) - (rs + 2)F_{2k-3}(r, s) + F_{2k-5}(r, s))x^{2k-1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

bulunur.

$$F_{2k-1}(r, s) = (rs + 2)F_{2k-3}(r, s) - F_{2k-5}(r, s) \quad (4.38)$$

ifadesini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=3}^{\infty} (F_{2k-1}(r, s) - (rs + 2)F_{2k-3}(r, s) + F_{2k-5}(r, s))x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} ((rs + 2)F_{2k-3}(r, s) - F_{2k-5}(r, s) - (rs + 2)F_{2k-3}(r, s) + F_{2k-5}(r, s))x^{2k-1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.39}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{F_1(r, s)x + F_3(r, s)x^3 - (rs + 2)F_1(r, s)x^3}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} \\
&= \frac{F_1(r, s)x + x^3(F_3(r, s) - (rs + 2)F_1(r, s))}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} \\
&= \frac{F_1(r, s)x + x^3(sF_2(r, s) + F_1(r, s) - rsF_1(r, s) - 2F_1(r, s))}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} \\
&= \frac{F_1(r, s)x + x^3(s(rF_1(r, s) + F_0(r, s)) + F_1(r, s) - rsF_1(r, s) - 2F_1(r, s))}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} \\
&= \frac{F_1(r, s)x + x^3(sF_0(r, s) - F_1(r, s))}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Sonuç olarak

$$G(x) = \frac{F_0(r, s) + xF_1(r, s) + x^2(rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)) + x^3(F_0(r, s) - F_1(r, s))}{1 - (rs + 2)x^2 + x^4} \tag{4.41}$$

bulunur. ■

Teorem 4.4. Her n doğal sayısında, bi-periyodik Fibonacci matris dizisi için Binet formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$F_n(r, s) = R_1(n)(\mu^n - \nu^n) + S_1(n)(\mu^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} - \nu^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}) \tag{4.42}$$

Burada

$$R_1(n) = \frac{[F_1(r, s) - sF_0(r, s)]^{\varepsilon(n)} [rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)]^{1-\varepsilon(n)}}{(rs)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (\mu - \nu)}, \tag{4.43}$$

$$S_1(n) = \frac{s^{\varepsilon(n)} F_0(r, s)}{(rs)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} (\mu - \nu)} \tag{4.44}$$

$$\mu = \frac{rs + \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}, \nu = \frac{rs - \sqrt{r^2s^2 + 4rs}}{2}, \varepsilon(n) = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (4.45)$$

şeklindedir.[6]

Teorem 4.5. $\varepsilon(n) = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ iken $n \geq 1$ için aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) = \frac{r^{\varepsilon(n)}s^{1-\varepsilon(n)}F_n(r, s) + r^{1-\varepsilon(n)}s^{\varepsilon(n)}F_{n-1}(r, s) - rF_1(r, s) + rsF_0(r, s) - sF_0(r, s)}{rs} \quad (4.46)$$

[6]

İspat. n çift olsun.

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) &= F_0(r, s) + F_1(r, s) + \dots + F_n(r, s) \\ &= F_0(r, s) + F_2(r, s) + \dots + F_{n-2}(r, s) \\ &\quad + F_1(r, s) + F_3(r, s) + \dots + F_{n-1}(r, s) \\ &= \sum_{t=0}^{\frac{n-2}{2}} F_{2t}(r, s) + \sum_{t=0}^{\frac{n-2}{2}} F_{2t+1}(r, s) \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.4 teoremini kullanalım. $2t$ çift yani $\varepsilon(2t) = 0$ olduğundan

$$\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) = \sum_{t=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{(rs)^t} \cdot \frac{\mu^{2t} - \nu^{2t}}{\mu - \nu} \quad (4.48)$$

$$+ \sum_{t=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{F_0(r, s)}{(rs)^{t+1}(\mu - \nu)} \cdot \left(\mu^{2\lfloor \frac{2t}{2} \rfloor + 2} - \nu^{2\lfloor \frac{2t}{2} \rfloor + 2} \right) \quad (4.49)$$

$$+ \sum_{t=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{(rs)^t} \cdot \frac{\mu^{2t+1} - \nu^{2t+1}}{\mu - \nu} \quad (4.50)$$

$$+ \sum_{t=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{sF_0(r, s)}{(rs)^{t+1}(\mu - \nu)} \cdot \left(\mu^{2\lfloor \frac{2t+1}{2} \rfloor + 2} - \nu^{2\lfloor \frac{2t+1}{2} \rfloor + 2} \right) \quad (4.51)$$

(4.48)'i düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{(rs)^0} \frac{\mu^0 - \nu^0}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{(rs)^1} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{(rs)^2} \frac{\mu^4 - \nu^4}{\mu - \nu} + \dots \\
&+ \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{(rs)^{\frac{n-2}{2}}} \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{\mu - \nu} \\
&= \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \\
&\cdot \left[\frac{\mu^0 - \nu^0}{(rs)^0} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} + \frac{\mu^4 - \nu^4}{(rs)^4} + \dots + \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-2}{2}}} \right] \tag{4.52}
\end{aligned}$$

(4.52) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^0 - \nu^0)(rs)^{\frac{n}{2}-1} + (\mu^2 - \nu^2)(rs)^{\frac{n}{2}-2} + (\mu^4 - \nu^4)(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + (\mu^{n-2} - \nu^{n-2})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \\
&= \frac{\mu^0(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \mu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \\
&- \frac{\nu^0(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \\
&= \frac{\mu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} - (rs)^{\frac{n}{2}} + \mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^6(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \mu^n - rs\mu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} \\
&- \frac{\nu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} - (rs)^{\frac{n}{2}} + \nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^6(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \nu^n - rs\nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^n - (rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^n - (rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Buradan (4.48) ifadesi

$$= \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \cdot \left[\frac{\mu^n - (rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^n - (rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.54}$$

bulunur.

(4.49)'i düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_0(r,s)}{(rs)^1} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^2} \frac{\mu^4 - \nu^4}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^3} \frac{\mu^6 - \nu^6}{\mu - \nu} + \dots + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^{\frac{n-2}{2}+1}} \frac{\mu^n - \nu^n}{\mu - \nu} \\
&= \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^1} + \frac{\mu^4 - \nu^4}{(rs)^2} + \frac{\mu^6 - \nu^6}{(rs)^3} + \dots + \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \right] \tag{4.55}
\end{aligned}$$

ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^2 - \nu^2)(rs)^{\frac{n}{2}-1} + (\mu^4 - \nu^4)(rs)^{\frac{n}{2}-2} + (\mu^6 - \nu^6)(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + (\mu^n - \nu^n)}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{\mu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \mu^6(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \mu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \\
&\quad - \frac{\nu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \nu^6(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{\mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}} + \mu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^8(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \mu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \mu^{n+2} - rs\mu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} \\
&\quad - \frac{\nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}} + \nu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^8(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \nu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \nu^{n+2} - rs\nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^{n+2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Buradan (4.49) ifadesi

$$= \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.57}$$

bulunur.

(4.50)'yi düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_1(r,s) - rF_0(r,s)}{(rs)^0} \frac{\mu^1 - \nu^1}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{(rs)^1} \frac{\mu^3 - \nu^3}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{(rs)^2} \frac{\mu^5 - \nu^5}{\mu - \nu} + \dots \\
&+ \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{\mu - \nu} \\
&= \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \\
&\cdot \left[\frac{\mu^1 - \nu^1}{(rs)^0} + \frac{\mu^3 - \nu^3}{(rs)^1} + \frac{\mu^5 - \nu^5}{(rs)^2} + \dots + \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \right] \tag{4.58}
\end{aligned}$$

(4.58) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^1 - \nu^1)(rs)^{\frac{n}{2}-1} + (\mu^3 - \nu^3)(rs)^{\frac{n}{2}-2} + (\mu^5 - \nu^5)(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + (\mu^{n-1} - \nu^{n-1})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \\
&= \frac{\mu^1(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^3(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \mu^5(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \mu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \\
&- \frac{\nu^1(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^3(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \nu^5(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} \\
&= \frac{\mu^3(rs)^{\frac{n}{2}-1} - \mu(rs)^{\frac{n}{2}} + \mu^5(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \mu^3(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^7(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \mu^5(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \mu^n - rs\mu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} \\
&- \frac{\nu^3(rs)^{\frac{n}{2}-1} - \nu(rs)^{\frac{n}{2}} + \nu^5(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \nu^3(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^7(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \nu^5(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \nu^n - rs\nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^{n+1} - \mu(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - \nu(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \tag{4.59}
\end{aligned}$$

Buradan (4.50) ifadesi

$$= \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \cdot \left[\frac{\mu^{n+1} - \mu(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - \nu(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.60}$$

bulunur.

(4.51) ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{sF_0(r,s)}{(rs)^1} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^2} \frac{\mu^4 - \nu^4}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^3} \frac{\mu^6 - \nu^6}{\mu - \nu} + \dots + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mu^n - \nu^n}{\mu - \nu} \\
&= \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^1} + \frac{\mu^4 - \nu^4}{(rs)^2} + \frac{\mu^6 - \nu^6}{(rs)^3} + \dots + \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \right] \quad (4.61)
\end{aligned}$$

(4.61) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^2 - \nu^2)(rs)^{\frac{n}{2}-1} + (\mu^4 - \nu^4)(rs)^{\frac{n}{2}-2} + (\mu^6 - \nu^6)(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + (\mu^n - \nu^n)}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{\mu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \mu^6(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \mu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \\
&\quad - \frac{\nu^2(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \nu^6(rs)^{\frac{n}{2}-3} + \dots + \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{\mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}} + \mu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \mu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \mu^8(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \mu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \mu^{n+2} - rs\mu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} \\
&\quad - \frac{\nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}} + \nu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} - \nu^4(rs)^{\frac{n}{2}-1} + \nu^8(rs)^{\frac{n}{2}-3} - \nu^6(rs)^{\frac{n}{2}-2} + \dots + \nu^{n+2} - rs\nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^{n+2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \quad (4.62)
\end{aligned}$$

Buradan (4.51) ifadesi

$$= \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \quad (4.63)$$

bulunur.

Bulduğumuz bu dört toplamı birleştirerek

$$\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) = \frac{sF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{\mu - \nu} \cdot \left[\frac{\mu^n - (rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^n - (rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \right] \quad (4.64)$$

$$= \frac{F_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \quad (4.65)$$

$$= \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{\mu - \nu}$$

$$\cdot \left[\frac{\mu^{n+1} - \mu(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - \nu(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\nu^2 - rs)} \right] \quad (4.66)$$

$$= \frac{sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \quad (4.67)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi daha da düzenleyelim.

(4.64) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$= \frac{\mu^n \nu^2 - rs\mu^n - (rs)^{\frac{n}{2}} \nu^2 + (rs)^{\frac{n}{2}+1} - (\nu^n \mu^2 - rs\nu^n - (rs)^{\frac{n}{2}} \mu^2 + (rs)^{\frac{n}{2}+1})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}$$

$$= \frac{\mu^2 \nu^2(\mu^{n-2} - \nu^{n-2}) - rs(\mu^n - \nu^n) + (rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \quad (4.68)$$

$(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)$ ifadesinde (3.40) ve (3.41)'i yerlerine yerleştirelim.

$$\begin{aligned} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs) &= (\mu^2 + \mu\nu)(\nu^2 + \mu\nu) \\ &= \mu(\mu + \nu)\nu(\mu + \nu) \\ &= \mu\nu(\mu + \nu)^2 \\ &= \mu\nu(\mu\nu)^2 \\ &= (\mu\nu)^3 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Buradan

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-2} - \nu^{n-2}) - rs(\mu^n - \nu^n) + (rs)^{\frac{n}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-2} - \nu^{n-2})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^n - \nu^n)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu \nu)^3} + \frac{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu \nu)} - \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}-2} (\mu \nu)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (-rs)} - \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}-2} (-rs)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (-rs)^3} \\
&= -\frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2}
\end{aligned} \tag{4.70}$$

(4.65) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu^{n+2} \nu^2 - rs\mu^{n+2} - \mu^2 \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}} + \mu^2 (rs)^{\frac{n}{2}+1}}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n) - rs(\mu^{n+2} - \nu^{n+2}) + (rs)^{\frac{n}{2}+1} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

(4.69)'yı yerine yazarsak

$$= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n) - rs(\mu^{n+2} - \nu^{n+2}) + (rs)^{\frac{n}{2}+1} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)^3} \tag{4.72}$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n)}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^{n+2} - \nu^{n+2})}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{(rs)^{\frac{n}{2}+1} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)} - \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu \nu)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}} (-rs)} - \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (-rs)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (-rs)^3} \\
&= -\frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}+2}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

bulunur.

(4.66) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned}
& \mu^{n+1} \nu^2 - rs\mu^{n+1} - \mu \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}} + \mu (rs)^{\frac{n}{2}+1} \\
& - (\nu^{n+1} \mu^2 - rs\nu^{n+1} - \mu^2 \nu (rs)^{\frac{n}{2}} + \nu (rs)^{\frac{n}{2}+1}) \\
= & \frac{\mu^{n+1} \nu^2 - rs\mu^{n+1} - \mu \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}} + \mu (rs)^{\frac{n}{2}+1} - (\nu^{n+1} \mu^2 - rs\nu^{n+1} - \mu^2 \nu (rs)^{\frac{n}{2}} + \nu (rs)^{\frac{n}{2}+1})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \\
= & \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-1} - \nu^{n-1}) - rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1}) + \mu \nu (rs)^{\frac{n}{2}}(\mu - \nu) + (rs)^{\frac{n}{2}+1}(\mu - \nu)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

(4.69)'i yerine yazarsak

$$= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-1} - \nu^{n-1}) - rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1}) + \mu \nu (rs)^{\frac{n}{2}}(\mu - \nu) + (rs)^{\frac{n}{2}+1}(\mu - \nu)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)^3} \tag{4.75}$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}
& = \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-1} - \nu^{n-1})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)^3} + \frac{(\mu - \nu)(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu \nu + rs)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)^3} \\
& = \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-1} - \nu^{n-1})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1})}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)^3} + \frac{(\mu - \nu)(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu \nu - \mu \nu)}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)^3} \\
& = \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(\mu \nu)} - \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-2}(\mu \nu)^3} \\
& = \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}(-rs)} - \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-2}(-rs)^3} \\
& = -\frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

(4.67) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned}
& \mu^{n+2} \nu^2 - rs\mu^{n+2} - \mu^2 \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}} + \mu^2 (rs)^{\frac{n}{2}+1} \\
& - (\nu^{n+2} \mu^2 - rs\nu^{n+2} - \mu^2 \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}} + \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}+1}) \\
= & \frac{\mu^{n+2} \nu^2 - rs\mu^{n+2} - \mu^2 \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}} + \mu^2 (rs)^{\frac{n}{2}+1} - (\nu^{n+2} \mu^2 - rs\nu^{n+2} - \mu^2 \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}} + \nu^2 (rs)^{\frac{n}{2}+1})}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \\
= & \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n) - rs(\mu^{n+2} - \nu^{n+2}) + (rs)^{\frac{n}{2}+1}(\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

(4.69)'yü yerine yazarsak

$$= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n) - rs(\mu^{n+2} - \nu^{n+2}) + (rs)^{\frac{n}{2}+1}(\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu \nu)^3} \tag{4.78}$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n)}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^{n+2} - \nu^{n+2})}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{(rs)^{\frac{n}{2}+1} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}} (\mu \nu)} - \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu \nu)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}} (-rs)} - \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (-rs)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (-rs)^3} \\
&= -\frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}+2}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Bu dört ifadeyi birleştirelim

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) &= \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{\mu - \nu} \\
&\cdot \left[-\frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} \right] \\
&+ \frac{F_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[-\frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}+2}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} \right] \\
&+ \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[-\frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} \right] \\
&+ \frac{sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[-\frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}+2}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Yukarıdaki ifadeyi düzenleyelim.

$$= \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} - \frac{F_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} \tag{4.81}$$

$$+ \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{F_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+2}} \tag{4.82}$$

$$- \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} - \frac{sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} \tag{4.83}$$

$$+ \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} + \frac{sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}+2}} \tag{4.84}$$

$$- \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} \frac{rF_1(r, s) - rsF_0(r, s) + sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \tag{4.85}$$

$n - 2$ için $\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 1$ olacağından ve

$$F_{n-2} = \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{F_0(r, s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \tag{4.86}$$

olduğundan (4.81) ifadesi $\frac{-F_{n-2}}{rs}$ olur.

$$F_n = \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} + \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} \quad (4.87)$$

olduğundan (4.82) ifadesi $\frac{F_n}{rs}$ olur.

$$F_{n-1} = \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2}}} \quad (4.88)$$

olduğundan (4.83) ifadesi $\frac{-F_{n-1}}{rs}$ olur.

$$F_{n+1} = \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} + \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+2} - \nu^{n+2}}{(rs)^{\frac{n}{2}+1}} \quad (4.89)$$

olduğundan (4.84) ifadesi $\frac{F_{n+1}}{rs}$ olur.

(4.85) ifadesi için ise

$$\begin{aligned} & - \frac{(\mu - \nu)(\mu + \nu)}{(rs)^2} \frac{rF_1(r,s) - rsF_0(r,s) + sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \\ & - \frac{(\mu - \nu)(rs)}{(rs)^2} \frac{rF_1(r,s) - rsF_0(r,s) + sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \\ & - \frac{rF_1(r,s) - rsF_0(r,s) + sF_0(r,s)}{rs} \end{aligned} \quad (4.90)$$

yazabiliriz.

O halde

$$\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r,s) = \frac{F_{n+1}(r,s) + F_n(r,s) - F_{n-1}(r,s) - F_{n-2}(r,s) - rF_1(r,s) + rsF_0(r,s) - sF_0(r,s)}{rs} \quad (4.91)$$

n çift olduğundan

$$\begin{aligned} & sF_n(r,s) + F_{n-1}(r,s) + rF_{n-1}(r,s) + F_{n-2}(r,s) \\ & - F_{n-1}(r,s) - F_{n-2}(r,s) - rF_1(r,s) + rsF_0(r,s) - sF_0(r,s) \\ & = \frac{rs}{rs} \\ & = \frac{sF_n(r,s) + rF_{n-1}(r,s) - rF_1(r,s) + rsF_0(r,s) - sF_0(r,s)}{rs} \end{aligned} \quad (4.92)$$

yazabiliriz.

n tek olsun.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) &= F_0(r, s) + F_1(r, s) + \dots + F_{n-1}(r, s) \\
&= F_0(r, s) + F_2(r, s) + \dots + F_{n-1}(r, s) \\
&+ F_1(r, s) + F_3(r, s) + \dots + F_{n-2}(r, s) \\
&= \sum_{t=0}^{\frac{n-1}{2}} F_{2t}(r, s) + \sum_{t=0}^{\frac{n-3}{2}} F_{2t}(r, s)
\end{aligned} \tag{4.93}$$

4.4 teoremini kullanalım.

$$\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) = \sum_{t=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{(rs)^t} \cdot \frac{\mu^{2t} - \nu^{2t}}{\mu - \nu} \tag{4.94}$$

$$+ \sum_{t=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{F_0(r, s)}{(rs)^{t+1}(\mu - \nu)} \cdot (\mu^{2t+2} - \nu^{2t+2}) \tag{4.95}$$

$$+ \sum_{t=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{(rs)^t} \cdot \frac{\mu^{2t+1} - \nu^{2t+1}}{\mu - \nu} \tag{4.96}$$

$$+ \sum_{t=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{sF_0(r, s)}{(rs)^{t+1}(\mu - \nu)} \cdot (\mu^{2\lfloor \frac{2t+2}{2} \rfloor + 2} - \nu^{2\lfloor \frac{2t+2}{2} \rfloor + 2}) \tag{4.97}$$

(4.94) ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{(rs)^0} \frac{\mu^0 - \nu^0}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{(rs)^1} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{(rs)^2} \frac{\mu^4 - \nu^4}{\mu - \nu} + \dots \\
&+ \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{\mu - \nu} \\
&= \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{\mu - \nu} \\
&\cdot \left[\frac{\mu^0 - \nu^0}{(rs)^0} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} + \frac{\mu^4 - \nu^4}{(rs)^4} + \dots + \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \right]
\end{aligned} \tag{4.98}$$

(4.98) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^0 - \nu^0)(rs)^{\frac{n-1}{2}} + (\mu^2 - \nu^2)(rs)^{\frac{n-3}{2}} + (\mu^4 - \nu^4)(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + (\mu^{n-1} - \nu^{n-1})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\mu^0(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \mu^2(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \mu^4(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \mu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&\quad - \frac{\nu^0(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \nu^2(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \nu^4(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\mu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} - (rs)^{\frac{n+1}{2}} + \mu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \mu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} \\
&\quad + \frac{\mu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} - \mu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \dots + \mu^{n+1} - rs\mu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} \\
&\quad - \frac{\nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} - (rs)^{\frac{n+1}{2}} + \nu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \\
&\quad + \frac{\nu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} - \nu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \dots + \nu^{n+1} - rs\nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \tag{4.99}
\end{aligned}$$

Buradan (4.94) ifadesi

$$= \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \cdot \left[\frac{\mu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.100}$$

bulunur.

(4.95) ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_0(r,s)}{(rs)^1} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^2} \frac{\mu^4 - \nu^4}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^3} \frac{\mu^6 - \nu^6}{\mu - \nu} + \dots \\
&\quad + \frac{F_0(r,s)}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{\mu - \nu} \\
&= \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^1} + \frac{\mu^4 - \nu^4}{(rs)^2} + \frac{\mu^6 - \nu^6}{(rs)^3} + \dots + \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}} \right] \tag{4.101}
\end{aligned}$$

(4.101) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^2 - \nu^2)(rs)^{\frac{n-1}{2}} + (\mu^4 - \nu^4)(rs)^{\frac{n-3}{2}} + (\mu^6 - \nu^6)(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + (\mu^{n+1} - \nu^{n+1})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\mu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \mu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \mu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \mu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&- \frac{\nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \nu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \nu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\mu^4(rs)^{\frac{n-1}{2}} - \mu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}} + \mu^6(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \mu^4(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \mu^8(rs)^{\frac{n-5}{2}} - \mu^6(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \dots + \mu^{n+1} - rs\mu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} \\
&- \frac{\nu^4(rs)^{\frac{n-1}{2}} - \nu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}} + \nu^6(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \nu^4(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \nu^8(rs)^{\frac{n-5}{2}} - \nu^6(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \dots + \nu^{n+1} - rs\nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^{n+3} - \mu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+3} - \nu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}(\nu^2 - rs)} \tag{4.102}
\end{aligned}$$

Buradan (4.95) ifadesi

$$= \frac{F_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+3} - \mu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+3} - \nu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.103}$$

bulunur.

(4.96) ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_1(r, s) - rF_0(r, s)}{(rs)^0} \frac{\mu^1 - \nu^1}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{(rs)^1} \frac{\mu^3 - \nu^3}{\mu - \nu} \\
&+ \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{(rs)^2} \frac{\mu^5 - \nu^5}{\mu - \nu} + \dots \\
&+ \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}} \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{\mu - \nu} \\
&= \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \\
&\cdot \left[\frac{\mu^1 - \nu^1}{(rs)^0} + \frac{\mu^3 - \nu^3}{(rs)^1} + \frac{\mu^5 - \nu^5}{(rs)^2} + \dots + \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}} \right] \tag{4.104}
\end{aligned}$$

(4.104) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^1 - \nu^1)(rs)^{\frac{n-3}{2}} + (\mu^3 - \nu^3)(rs)^{\frac{n-5}{2}} + (\mu^5 - \nu^5)(rs)^{\frac{n-7}{2}} + \dots + (\mu^{n-2} - \nu^{n-2})}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}} \\
&= \frac{\mu^1(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \mu^3(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \mu^5(rs)^{\frac{n-7}{2}} + \dots + \mu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}} \\
&\quad - \frac{\nu^1(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \nu^3(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \nu^5(rs)^{\frac{n-7}{2}} + \dots + \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}} \\
&= \frac{\mu^3(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \mu(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \mu^5(rs)^{\frac{n-5}{2}-2} - \mu^3(rs)^{\frac{n-3}{2}-1} + \mu^7(rs)^{\frac{n-7}{2}} - \mu^5(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \mu^n - rs\mu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\mu^2 - rs)} \\
&\quad - \frac{\nu^3(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \nu(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \nu^5(rs)^{\frac{n-5}{2}} - \nu^3(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \nu^7(rs)^{\frac{n-7}{2}} - \nu^5(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \nu^n - rs\nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^n - \mu(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^n - \nu(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\nu^2 - rs)} \tag{4.105}
\end{aligned}$$

Buradan (4.96) ifadesi

$$= \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \cdot \left[\frac{\mu^n - \mu(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^n - \nu(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\nu^2 - rs)} \right]$$

bulunur.

(4.97) ifadesini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{sF_0(r, s)}{(rs)^1} \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r, s)}{(rs)^2} \frac{\mu^4 - \nu^4}{\mu - \nu} + \frac{F_0(r, s)}{(rs)^3} \frac{\mu^6 - \nu^6}{\mu - \nu} + \dots \\
&\quad + \frac{F_0(r, s)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{\mu - \nu} \\
&= \frac{sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^1} + \frac{\mu^4 - \nu^4}{(rs)^2} + \frac{\mu^6 - \nu^6}{(rs)^3} + \dots + \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \right] \tag{4.106}
\end{aligned}$$

(4.106) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu^2 - \nu^2)(rs)^{\frac{n-3}{2}} + (\mu^4 - \nu^4)(rs)^{\frac{n-5}{2}} + (\mu^6 - \nu^6)(rs)^{\frac{n-7}{2}} + \dots + (\mu^{n-1} - \nu^{n-1})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\mu^2(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \mu^4(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \mu^6(rs)^{\frac{n-7}{2}} + \dots + \mu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&- \frac{\nu^2(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \nu^4(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \nu^6(rs)^{\frac{n-7}{2}} + \dots + \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \frac{\mu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \mu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \mu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} - \mu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \mu^8(rs)^{\frac{n-7}{2}} - \mu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \mu^{n+1} - rs\mu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} \\
&- \frac{\nu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} - \nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \nu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} - \nu^4(rs)^{\frac{n-3}{2}} + \nu^8(rs)^{\frac{n-7}{2}} - \nu^6(rs)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + \nu^{n+1} - rs\nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^{n+1} - \mu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - \nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \tag{4.107}
\end{aligned}$$

Buradan (4.97) ifadesi

$$= \frac{sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+1} - \mu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - \nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.108}$$

bulunur.

Bulduğumuz bu dört toplamı birleştirerek

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) &= \frac{rF_1(r, s) - F_0(r, s) - rsF_0(r, s)}{\mu - \nu} \\
&\cdot \left[\frac{\mu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.109}
\end{aligned}$$

$$= \frac{F_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+3} - \mu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+3} - \nu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.110}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_1(r, s) - sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \\
&\cdot \left[\frac{\mu^n - \mu(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^n - \nu(rs)^{\frac{n-1}{2}}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.111}
\end{aligned}$$

$$= \frac{sF_0(r, s)}{\mu - \nu} \left[\frac{\mu^{n+2} - \mu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)} - \frac{\nu^{n+2} - \nu^2(rs)^{\frac{n}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\nu^2 - rs)} \right] \tag{4.112}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi daha da düzenleyelim.

(4.109) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned}
& \mu^{n+1} \nu^2 - rs\mu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}} \nu^2 + (rs)^{\frac{n+3}{2}} \\
& - (\nu^{n+1} \mu^2 - rs\nu^{n+1} - (rs)^{\frac{n+1}{2}} \mu^2 + (rs)^{\frac{n+3}{2}}) \\
= & \frac{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \\
= & \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-1} - \nu^{n-2}) - rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1}) + (rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \quad (4.113)
\end{aligned}$$

(4.69) ifadesini yerine yazalım.

Buradan

$$\begin{aligned}
= & \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-1} - \nu^{n-1}) - rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1}) + (rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} \\
= & \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-1} - \nu^{n-1})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} \\
= & \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)} - \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (\mu \nu)^3} \\
= & \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (-rs)} - \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-3}{2}} (-rs)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (-rs)^3} \\
= & \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}}} + \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+3}{2}}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} \quad (4.114)
\end{aligned}$$

(4.110) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned}
& \mu^{n+3} \nu^2 - rs\mu^{n+3} - \mu^2 \nu^2 (rs)^{\frac{n+1}{2}} + \mu^2 (rs)^{\frac{n+3}{2}} \\
& - (\nu^{n+3} \mu^2 - rs\nu^{n+3} - \mu^2 \nu^2 (rs)^{\frac{n+1}{2}} + \nu^2 (rs)^{\frac{n+3}{2}}) \\
= & \frac{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \\
= & \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n+1} - \nu^{n+1}) - rs(\mu^{n+3} - \nu^{n+3}) + (rs)^{\frac{n+3}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \quad (4.115)
\end{aligned}$$

(4.69)'yü yerine yazarsak

$$= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n+1} - \nu^{n+1}) - rs(\mu^{n+3} - \nu^{n+3}) + (rs)^{\frac{n+3}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu \nu)^3} \quad (4.116)$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n+1} - \nu^{n+1})}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^{n+3} - \nu^{n+3})}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{(rs)^{\frac{n+3}{2}} (\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu \nu)} - \frac{\mu^{n+3} - \nu^{n+3}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (-rs)} - \frac{\mu^{n+3} - \nu^{n+3}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}} (-rs)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1} (-rs)^3} \\
&= -\frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+3}{2}}} + \frac{\mu^{n+3} - \nu^{n+3}}{(rs)^{\frac{n+5}{2}}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2}
\end{aligned} \tag{4.117}$$

bulunur.

(4.111) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^n \nu^2 - rs\mu^n - \mu \nu^2 (rs)^{\frac{n-1}{2}} + \mu (rs)^{\frac{n+1}{2}}}{(rs)^{\frac{n}{2}-1} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \\
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n) - rs(\mu^n - \nu^n) + \mu \nu (rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu - \nu) + (rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu - \nu)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}
\end{aligned} \tag{4.118}$$

(4.69)'yü yerine yazarsak

$$= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^n - \nu^n) - rs(\mu^n - \nu^n) + \mu \nu (rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu - \nu) + (rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu - \nu)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} \tag{4.119}$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-2} - \nu^{n-2})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^n - \nu^n)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{(\mu - \nu)(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu + rs)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^2 \nu^2 (\mu^{n-2} - \nu^{n-2})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} - \frac{rs(\mu^n - \nu^n)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} + \frac{(\mu - \nu)(rs)^{\frac{n+1}{2}} (\mu \nu - \mu \nu)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (\mu \nu)} - \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n-3}{2}} (\mu \nu)^3} \\
&= \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}} (-rs)} - \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n-3}{2}} (-rs)^3} \\
&= -\frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.120}$$

bulunur.

(4.112) ifadesinin çarpımdan sonraki kısmını ele alalım.

$$\begin{aligned}
& \mu^{n+1}\nu^2 - rs\mu^{n+1} - \mu^2\nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \mu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}} \\
& - (\nu^{n+1}\mu^2 - rs\nu^{n+1} - \mu^2\nu^2(rs)^{\frac{n-1}{2}} + \nu^2(rs)^{\frac{n+1}{2}}) \\
= & \frac{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \\
= & \frac{\mu^2\nu^2(\mu^n - \nu^n) - rs(\mu^{n+2} - \nu^{n+2}) + (rs)^{\frac{n}{2}+1}(\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n}{2}}(\mu^2 - rs)(\nu^2 - rs)} \quad (4.121)
\end{aligned}$$

(4.69)'yı yerine yazarsak

$$= \frac{\mu^2\nu^2(\mu^{n-1} - \nu^{n-1}) - rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1}) + (rs)^{\frac{n+1}{2}}(\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu\nu)^3} \quad (4.122)$$

olur.

Buradan

$$\begin{aligned}
= & \frac{\mu^2\nu^2(\mu^{n-1} - \nu^{n-1})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu\nu)^3} - \frac{rs(\mu^{n+1} - \nu^{n+1})}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu\nu)^3} + \frac{(rs)^{\frac{n+1}{2}}(\mu^2 - \nu^2)}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu\nu)^3} \\
= & \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu\nu)} - \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(\mu\nu)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1}(\mu\nu)^3} \\
= & \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(-rs)} - \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}(-rs)^3} + \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^{-1}(-rs)^3} \\
= & -\frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+3}{2}+2}} - \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} \quad (4.123)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadeyi düzenleyelim.

$$= -\frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}} - \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+3}{2}}} \quad (4.124)$$

$$+ \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+3}{2}}} + \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+3} - \nu^{n+3}}{(rs)^{\frac{n+5}{2}}} \quad (4.125)$$

$$- \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (4.126)$$

$$+ \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n+3}{2}}} \quad (4.127)$$

$$- \frac{\mu^2 - \nu^2}{(rs)^2} \frac{rF_1(r,s) - rsF_0(r,s) + sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \quad (4.128)$$

$n - 1$ için $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ olacağından ve

$$F_{n-1} = \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}} + \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}} \quad (4.129)$$

olduğundan (4.124) ifadesi $\frac{-F_{n-1}}{rs}$ olur.

$$F_{n+1} = \frac{rF_1(r,s) - F_0(r,s) - rsF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}} + \frac{F_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+3} - \nu^{n+3}}{(rs)^{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}}} \quad (4.130)$$

olduğundan (4.125) ifadesi $\frac{F_{n+1}}{rs}$ olur.

$$F_{n-2} = \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-2} - \nu^{n-2}}{(rs)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}} + \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n-1} - \nu^{n-1}}{(rs)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}} \quad (4.131)$$

olduğundan (4.126) ifadesi $\frac{-F_{n-2}}{rs}$ olur.

$$F_n = \frac{F_1(r,s) - sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^n - \nu^n}{(rs)^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}} + \frac{sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \frac{\mu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(rs)^{\frac{n}{2} + \frac{1}{2}}} \quad (4.132)$$

olduğundan (4.127) ifadesi $\frac{F_n}{rs}$ olur.

(4.128) ifadesi için ise

$$\begin{aligned} & - \frac{(\mu - \nu)(\mu + \nu)}{(rs)^2} \frac{rF_1(r,s) - rsF_0(r,s) + sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \\ & - \frac{(\mu - \nu)(rs)}{(rs)^2} \frac{rF_1(r,s) - rsF_0(r,s) + sF_0(r,s)}{\mu - \nu} \\ & - \frac{rF_1(r,s) - rsF_0(r,s) + sF_0(r,s)}{rs} \end{aligned} \quad (4.133)$$

yazabiliriz.

O halde

$$\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r,s) = \frac{-F_{n-1}(r,s) + F_{n+1}(r,s) + F_n(r,s) - F_{n-2}(r,s) - rF_1(r,s) + rsF_0(r,s) - sF_0(r,s)}{rs} \quad (4.134)$$

n tek olduğundan

$$\begin{aligned} & -F_{n-1}(r,s) + rF_n(r,s) + F_{n-1}(r,s) + sF_{n-1}(r,s) + F_{n-2}(r,s) \\ & = \frac{-F_{n-2}(r,s) - rF_1(r,s) + rsF_0(r,s) - sF_0(r,s)}{rs} \\ & = \frac{rF_n(r,s) + sF_{n-1}(r,s) - rF_1(r,s) + rsF_0(r,s) - sF_0(r,s)}{rs} \end{aligned} \quad (4.135)$$

yazabiliriz.

Sonuç olarak

$$\sum_{t=0}^{n-1} F_t(r, s) = \frac{r^{\varepsilon(n)} s^{1-\varepsilon(n)} F_n(r, s) + r^{1-\varepsilon(n)} s^{\varepsilon(n)} F_{n-1}(r, s) - r F_1(r, s) + r s F_0(r, s) - s F_0(r, s)}{r s} \quad (4.136)$$

yazabiliriz.

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■



5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bi-periyodik Fibonacci matris dizisi için determinant eşitliği, bu dizinin Binet formülü ile yeniden ifadesi gibi birçok denklem ve özdeşliğin sağlandığı görülmüştür.

- [1] İ. N. Cangül, “Sayılar teorisi,” *Dora Yayıncılık*, 2015.
- [2] G. Yeşilot, S. Yeşilot, “Sayılar teorisi çözümlü problemleri,” *Birsen Yayınevi*, 2019.
- [3] A. Dönmez, “Matematiğin öyküsü ve serüveni, Fransız matematikçiler,” *Toplumsal Dönüşüm Yayınları*, 2005.
- [4] F. Akdeniz, “Altın oran ve fibonacci sayıları,” *Nobel Kitabevi*, 2007.
- [5] M. Edson, O. Yayenie, “A new generalization of fibonacci sequence & extended binet’s formula,” 2009.
- [6] A. Coskun, N. Taskara, “The matrix sequence in terms of bi-periodic fibonacci numbers,” *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, c. 68, no. 2, ss. 1939–1949, 2016.
- [7] T. Koshy, “Fibonacci and lucas numbers with applications, one,”
- [8] A. Coskun, N. Taskara, “A note on the bi-periodic fibonacci and lucas matrix sequences,” *Applied Mathematics and Computation*, c. 320, ss. 400–406, 2018.
- [9] H.-H. Leung, “Some binomial-sum identities for the generalized bi-periodic fibonacci sequences,”
- [10] G. Bilgici, “New generalizations of fibonacci and lucas sequences,” *Applied Mathematical Sciences*, c. 8, no. 29, ss. 1429–1437, 2014.
- [11] N. Yılmaz, A. Coskun, N. Taskara, “On properties of bi-periodic fibonacci and lucas polynomials,” in *AIP Conference Proceedings*, c. 1863, no. 1, ss. 310002, AIP Publishing LLC, 2017.
- [12] B. Demirtürk, “Fibonacci and lucas sums by matrix methods,” in *International Mathematical Forum* c. 5, no. 3, ss. 99–107, 2010.
- [13] G.-Y. Lee, S. Lee, “A note on generalized fibonacci numbers,” *Fibonacci Quart*, c. 33, ss. 273–278, 1995.
- [14] R. Keskin, B. Demirtürk, “Some new fibonacci and lucas identities by matrix methods,” *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, c. 41, no. 3, ss. 379–387, 2010.
- [15] Y. Choo, “Some identities on generalized bi-periodic fibonacci sequences,” *International Journal of Mathematical Analysis*, c. 13, no. 6, ss. 259–267, 2019.
- [16] M. Başbük, Y. Yazlık, “On the sum of reciprocal of generalized bi-periodic fibonacci numbers,” *Miskolc Mathematical Notes* c. 17, no. 1, 2016.
- [17] Y. Choo, “Relations between generalized bi-periodic fibonacci and lucas sequences,” *Mathematics* c. 8, no. 9, ss. 1527, 2020.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. G. Yeşilot, E. Tüysüz, "Bi-Periodic Fibonacci Matrix Sequence" 5th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications, ss. 72, 2022.

