T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

P-DEĞERLİ ANALİTİK FONKSİYONLARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR ALTSINIFI İÇİN BAZI PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Ziya MİNGSAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ

TEMMUZ-2022
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Ziya MİNGSAR'ın Prof. Dr. Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "**P-Değerli Analitik Fonksiyonların Genelleştirilmiş Bir Altsınıfı İçin Bazı Problemlerin Çözümü**" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek **oy birliği** ile kabul edilmiştir.

29/07/2022

Adı ve Soyadı	**İmza**
Prof. Dr. Gabil YAGUB	…...………………….
Prof. Dr. Erhan DENİZ	…...………………….
Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR	…...………………….

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun . . . / . . . / 20. . . gün ve . . . . . . /. . . . . . . sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ziya MİNGSAR

Kars-2022

ÖZET

(Yüksek Lisans Tezi)

$P-$Değerli Analitik Fonksiyonların Genelleştirilmiş Bir Altsınıfı İçin Bazı Problemlerin Çözümü

Ziya MİNGSAR

Kafkas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tez çalışmasında, $p-$değerli analitik fonksiyonlar için tanımlanan bir türev operatörü yardımıyla analitik fonksiyonların genelleştirilmiş bir altsınıfı tanıtılmıştır. Bu sınıfa ait fonksiyonlar için komşuluk, kısmi toplamlar ve Hadamard çarpım problemleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyon, $p-$değerli Fonksiyon, Yıldızıl ve Konveks Fonksiyon, Komşuluk, Kısmi Toplam, Subordinasyon, Konvülasyon (Hadamard çarpım)

2022, 62 Sayfa

ABSTRACT

(M. Sc. Thesis)

The Solution Of Some Problems For A Generalized Subclass Of $P-$valent Analytic Functions

Ziya MİNGSAR

Kafkas University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Matehmatics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, in space of $p-$valent analytic functions a generalized subclass of analytic functions with the help of an differential operator defined. For functions in this class the problems such that neighborhood, partial sums and Hadamards product are investigated in deails.

Key Words: Analytic function, $p-$valent function, Starlike and Convex function, Neighborhood, Partial sums, Subordination, Convulation (Hadamard product)

2022, 62 pages

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanan bir yüksek lisans tezidir. Tez çalışmasında $p-$değerli analitik fonksiyonların yeni bir türev operatörü tanımlanarak onun bazı özelliklerinin incelemesi yapılmıştır. Öncelikle beni öğrencisi olarak kabul edip danışmanlığımı üstlenen, bilgi ve deneyimlerini bana aktaran ve bu tezi en iyi şekilde yazabilmem için yönlendirmelerini yapan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Erhan DENİZ'e, Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a, materyal ve sunum konusunda bana yol gösteren Arş. Gör. Sercan KAZIMOĞLU'na, meslektaşım Arda Anıl YILDIZ'a, tezimin her aşamasında psikolojik olarak bana destek olan kıymetli eşim Ayfer MİNGSAR'a, vakitlerinden aldığım halde bana sabır gösteren çocuklarım Enis Eyyüp MİNGSAR'a ve Enes Tayyip MİNGSAR'a sonsuz teşekkür ederim.

Ziya MİNGSAR

Kars-2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

U	$U=\{z:z\in\mathbb{C} ve \|z\|<1\}$ şelindeki açık birim disk
U_r	$U=\{z:z\in\mathbb{C}\ ve\ \|z\|<r<1\}$ şeklindeki açık disk
$\overline{U_r}$	$U=\{z:z\in\mathbb{C}\ ve\ \|z\|\leq r\}$ şeklindeki kapalı disk
A	U birim diskinde analitik olan $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$A(p)$	U birim diskinde analitik ve $p-$değerli olan $f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_nz^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$A(p,n)$	U birim diskinde analitik ve $p-$değerli olan $f(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}a_nz^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
D^n	Salagean türev operatörü
D_p^m	$p-$değerli analitik fonksiyonlar için Salagean türev operetörü
$D_{\lambda,p}^m$	$p-$değerli analitik fonksiyonlar için Deniz-Çekin türev operetörü
$f\prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
f_1*f_2	f ile g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı
C	Konveks fonksiyonların kümesi
$C(\alpha)$	$\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların kümesi
$C(p,n)$	$p-$değerli konveks fonksiyonlar sınıfı
$C(p,n,\alpha)$	$\alpha-$mertebeden $p-$değerli konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{N}_\tau(f)$	f fonksiyonunun $\tau-$komşuluğu
$\mathcal{N}_{n,\tau}(f)$	f fonksiyonunun $(n,\ \tau)-$komşuluğu

P	Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonlar sınıfı
$\operatorname{Re} f(z)$	f fonksiyonunun reel kısmı
S	U birim diskinde ünivalent olan normalize $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
S^*	Yıldızıl fonksiyonların kümesi
$S^*(\alpha)$	$\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların kümesi
$S^*(p,n)$	$p-$değerli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S(p,n,\alpha)$	$\alpha-$mertebeden $p-$değerli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$T(p)$	Negatif katsayılı $f\in A(p)$ fonksiyonlarının kümesi
$T(p,n)$	Negatif katsayılı $f\in A(p,n)$ fonksiyonlarının kümesi

1. GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonları en önemli kılan nedenlerin başında verilen bir fonksiyonun geometrisi ile analitikliği arasındaki bağı kurmasıdır. Buna en güzel örnek hiç şüphesiz Riemann dönüşüm teoremidir. Bu teorem basit bağlantılı bir bölgenin $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskine ünivalent olarak denk olmasıyla ilgilidir. Bu teoremden sonra ünivalent fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar U birim diskinde $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ normalleştirme koşullarını sağlayan analitik ve birebir fonksiyonlarının oluşturduğu S sınıfı üzerine olmuştur. Normalleştirme koşulları altında fonksiyonlar $f(z)=z+a_2z^2+...$ biçiminde olur. U birim diskinin bu sınıfa ait fonksiyonlar altında görüntüsünün alanını bulmak ki bu literatürde Alan teoremleri olarak bilinir bu sınıf üzerine yapılan ilk çalışma özelliğini taşımaktadır.

Daha sonra alan teoremi S sınıfına ait bir fonksiyonun ikinci katsayısının kesin üst sınırını belirlemek için önemli bir araç rolü üstlenmiştir. Bununla ünivalent fonksiyonların katsayıları hakkında bilgi edinmek bir temel problem haline gelmiştir. Problem ile ilgili ilk adım 1916 yılında L. Bieberbach [20] tarafından atılmıştır. Bieberbach, Alan teoremini kullanarak $|a_2|\leq 2$ olduğunu ispatlamış ve $n=2,3,4,...$ değerleri için $|a_n|\leq n$ katsayı tahminini ortaya koymuştur. Bu tahmin üzerine birçok ünlü matematikçi çalışmış ve önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Nihayet bu tahmin 1984 yılında L. De Branges [20] tarafından tüm $n=2,3,4,...$ değerleri için ispatlanmıştır. Tabiiki bir taraftan bu problem üzerine çalışılırken diğer taraftan S sınıfı ve onun altsınıfları (yıldızıl, konveks, konvekse-yakın, v.s) için büyüme ve genişleme teoremleri, gerek ve yeter şart problemleri, yarıçap ve ekstremum özellikleri, komşuluk ve kısmi toplamları, kesirsel mertebeden türev ve integral problemleri, subordinasyon gibi günümüzde de güncel olarak çalışılan problemler üzerine gidilmiştir.

Ünivalent fonksiyonların genel bir versiyonu gibi görünen fonksiyonlara $p-$değerli (Multivalent) fonksiyonlar denir. Bu fonksiyonlar f genişletilmiş kompleks düzlemdeki herhangi bir bölgede kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon olmak üzere bu bölgedeki her değeri en fazla p ve en az bir değeri kesin p defa alıyordur.

$p=1$ olması durumunda f fonksiyonu ünivalenttir. Dolayısıyla $p-$değerli fonksiyonlar ünivalent fonksiyonların doğal bir genellemesidir.

Bir yüzyılı aşkındır ünivalent fonksiyonlar için yukarıda bahsettiğimiz problemler $p-$değerli fonksiyonlar için de çalışılmıştır. $p-$değerli fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanımlamak ve bu sınıfların analitik ve geometrik özelliklerinin incelenmesi üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu alt sınıflardan birini Çekin [20] tez çalışmasında tanımlamış ve bu sınıfa ait fonsiyonlar için katsayı problemini, fonksiyonun ve türevlerinin alt ve üst sınırlarını, yıldızıllık ve konvekslik yarıçaplarını ve kesirsel türev integralin uygulamalarını çalışmıştır. Ayrıca bu problemler üzerine geçmiş yıllarda $p-$değerli fonksiyonların farklı altsınıfları için Goodman [28], Ali ve arkadaşları [10], Ramachandran ve arkadaşları [49], Shanmugam ve arkadaşları [57], Srivastava ve Aouf [62] ve Deniz ve Orhan [21, 22], Acu ve arkadaşları [1], Owa [42, 43, 44], Altıntaş [11, 12], Aouf [5, 6, 7], Liu ve arkadaşları [37] ve özellikle son yıllarda [2, 3, 4, 8, 9,18, 19, 25, 34, 46, 47, 53, 55, 56, 60, 64, 65, 66, 67] önemli sonuçlar bulmuşlardır.

$p-$değerli fonksiyonlar teorisinde pek çok araştırmacı tarafından ele alınan önemli problemlerden bir diğeri de bu fonksiyonlar için yeni komşuluk tanımları verilerek bu komşulukların incelenmesidir. Ünivalent fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 yılında Goodman [29] tarafından yapılmıştır. Ruscheweyh [50], Goodman tarafından verilen komşuluk tanımını daha genel hale getirerek fonksiyonlarının $\delta-$komşuluğu kavramını tanıtmıştır. 1985 yılında Brown [15], Ruscheweyh tarafından elde edilen sonuçları genelleştirmiştir. 1990 yılında Walker [68] pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluklarını ele almış ve Walker tarafından verilen sonuçlar 1993 yılında Owa ve arkadaşları [45] tarafından genişletilmiştir. 1996 yılında, negatif katsayılı fonksiyonlarının $(n,\delta)-$komşuluğu Altıntaş and Owa [13] tarafından verilmiştir. Son yıllarda ise Altıntaş ve arkadaşları [14], Orhan ve Kadıoğlu [39], Orhan ve Kamali [40], Srivastava ve Patel [61], Altıntaş [12], Srivastava ve Orhan [63], Orhan [41], Cataş [17], Deniz ve Orhan [21, 22], Sağsöz ve Kamali [51] ve Aljarah ve arkadaşları [4] analitik fonksiyonların belli alt sınıflarının komşuluğu problemi üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde ilginç olan durumlardan biri şudur; ünivalent bir fonksiyonun kısmi toplamlarının ünivalent olmaması ki buna en güzel örnek Koebe fonksiyonudur. Durum böyle olunca ünivalent dolayısıyla $p-$değerli fonksiyonların kısmi toplamları üzerine çalışmak ayrı bir inceleme gerektirir. Silverman [59] ilk defa $\alpha-$mertebeden yıldızıl ve $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonlar ve bunların kısmi toplamları arasındaki oranın reel kısmı için kesin sınırlar elde etmiştir. Son yıllarda ise $p-$değerli fonksiyonların belli alt sınıflarının kısmi toplamları üzerine Liu [35] ve Deniz ve Orhan [21, 22] önemli çalışmalar yapmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Aynı bölümde $p-$değerli fonksiyon kavramı tanıtılarak bu fonksiyonların katsayı sınırları ve distorsiyon eşitsizlikleri üzerine yapılan önemli bazı çalışmalara değinilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılan bazı önemli tanım ve lemmaların verilmesinin yanı sıra tarihsel gelişim içerisinde $p-$değerli fonksiyonların türev operatörü ve önemli bazı alt sınıfları ile ilgili bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $p-$değerli fonksiyonların $S_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ ve $ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ gibi iki yeni alt sınıfları tanıtılmış ve bu sınıflara ait fonksiyonların katsayı eşitsizlikleri, yeni komşuluk tanımları verilerek bu komşuluklarla ilgili teoremler ve kısmi toplamları ile ilgili problemler çözülmüştür. Son olarak, bu sınıflardaki fonksiyonların Hadamard çarpımı ele alınmıştır.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçların bir özeti verilmiştir.

1.1 Kuramsal Temeller

Bu bölümde Ponnusamy ve Silverman'ın [48] kitabından yararlanılarak genel tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1: (Komşuluk) $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r \in \mathbb{R}, r > 0$ olsun. $U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesine merkezi z_0 yarıçapı r olan açık disk veya z_0 noktasının r komşuluğu denir.

$U(z_0, r)$ diskinin kapanışı $\overline{U}(z_0, r)$, sınırı $\partial U(z_0, r)$ ve (0, 0) merkezli r yarıçaplı disk $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir.

Özel olarak orijin merkezli açık birim disk $U = \{z : |z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.1.2: (İç nokta) $H \subset \mathbb{C}$ verilsin. $z_0 \in H$ noktası için $U(z_0, r) \subset H$ koşulunu sağlayan $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına H kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 1.1.3: (Açık küme) $H \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktası aynı zamanda bir iç nokta ise H kümesine açık küme denir.

Tanım 1.1.4: (Kapalı küme) $H \subset \mathbb{C}$ kümesinin tümleyeni açık ise H kümesine kapalı küme denir.

Tanım 1.1.5: (Bağlantılı küme) $H \subset H_1 \cup H_2$, $H \subset H_1 \cup H_2$, $H \cap H_1 \neq \emptyset$, $H \cap H_2 \neq \emptyset$, $H \cap H_1 \cap H_2 = \emptyset$ koşullarını sağlayacak H_1 ve H_2 gibi boş olmayan iki açık ve ayrık küme yoksa $H \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılı küme denir.

Bağlantılı olmayan kümeye bağlantısız küme denir.

Tanım 1.1.6: (Bölge) Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 1.1.7: (Süreklilik) $H \subset \mathbb{C}$, $f : H \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z_0 \in H$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ iken $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı bulunuyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında sürekli fonksiyon denir.

Tanım 1.1.8: (Eğri) $[x,y]\subset\mathbb{R}$ olsun. $\gamma:[x,y]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ 'de bir eğri (yol) denir.

Eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ noktalarıdır.

Tanım 1.1.9: (Kapalı eğri) $\gamma:[x,y]\to\mathbb{C}$ eğrisi için $\gamma(x)=\gamma(y)$ (başlangıç ve bitiş noktaları aynı) ise γ eğrisine kapalı eğri denir.

Tanım 1.1.10: (Basit eğri) Uç noktalarının kesişmesi hariç kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri denir.

Bir eğri hem kapalı hem de basit ise basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi olarak adlandırılır. Bu eğri düzlemi iki bölgeye ayırır: Eğrinin iç bölgesi ve eğrinin dış bölgesi. İç bölgeye Jordan bölgesi denir.

γ eğrisi $[x,y]$ aralığında türevlenebilir, γ' sürekli ve $\gamma'\neq 0$ ise bu eğriye düzgün eğri denir. x 'ten y 'e artan k için $\gamma(x)$ değerlerinin $\gamma(x)$ ten $\gamma(y)$ e doğru olan sıranması verilen eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğride pozitif ve negatif olmak üzere iki yön vardır. Eğri kapalı bir eğri ise yönü başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru bir sıralama ile oluşur.

1.2 Ünivalent ve $p-$Değerli Fonksiyonlar

1.2.1 Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde analitik ve ünivalent fonksiyonlar için oldukça önemli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir (bkz. [48]).

Tanım 1.2.1.1: (Diferensiyellenebilme) $A\subset\mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f:A\to\mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0\in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.1.2: (Analitiklik) Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Örneğin; $p(z) = a_n z^n + \cdots a_1 z + a_0 \ \left(a_n \neq 0\right)$ kompleks polinomu tam fonksiyondur.

Tanım 1.2.1.3: (Singüler nokta) Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 bir singüler noktadır denir.

Teorem 1.2.1.4: (Cauchy Riemann denklemleri) $z = u + iv$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks fonksiyonu analitik ise u ve v 'nin kısmi türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 1.2.1.5: (Cauchy türev formülü) f pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır.

Bu teoremden çıkarılabilecek en önemli sonuç şudur: f fonksiyonu herhangi bir bölgede analitik ise bu bölgede her mertebeden türevinin var olduğunu söyleyebiliriz.

Ayrıca fonksiyonun türevleri de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

<u>Teorem 1.2.1.6</u>: (Laurent Teoremi) f, $r<|z-z_0|<R$ şeklinde verilen H halka bölgesi içinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu H halka bölgesinde

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

<u>Tanım 1.2.1.7:</u> (Kutup noktası) z_0 $f(z)$ fonksiyonun bir singüler noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

<u>Teorem 1.2.1.8:</u> (Maksimum Modül Prensibi) Eğer $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir H bölgesinde analitik ise bu durumda $f(z)$ sabit olmadıkça $|f(z)|$ maksimum değerini H bölgesinde alamaz.

Bu teoremden çıkan en önemli sonuç şudur; $f(z)$ fonksiyonu sınırlı bir H bölgesinde analitik ve bu bölgenin kapanışında sürekli ise $|f(z)|$ maksimum değerini H bölgesinin sınırında alır.

Maksimum modül prensibinin en önemli sonuçlarından bir diğeri Schwarz lemmasıdır.

Lemma 1.2.1.9: (Schwarz lemması) f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır.

Teorem 1.2.1.10: (Minimum Prensibi) $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir H bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in H$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, H bölgesinde minimum değer alamaz.

Bu teoremden çıkan en önemli sonuç şudur; H kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in H$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun H bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini H bölgesinin sınırında alır.

Tanım 1.2.1.11: (Ünivalent fonksiyon) f, $H\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1,z_2\in H$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1\neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna H bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir. Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Eğer f, H bölgesinde analitik ve ünivalent ise bu durumda bu bölgede $f'(z_0)\neq 0$ olduğunu biliyoruz.

Diğer taraftan $f'(z_0)\neq 0 \Leftrightarrow z_0$ komşuluğunda f yerel ünivalenttir.

Eğer f bir B bölgesinde ünivalent ise yerel ünivalenttir. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin, $H=\mathbb{C}/\{0\}$ ve $f(z)=z^2$ $(z\in H)$ olsun. Tüm $z_0\in H$ için $f'(z_0)=2z_0\neq 0$ olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu H kümesinde yerel ünivalenttir. Ancak tüm $z\in H$ için $f(z)=f(-z)$ olduğundan f, H bölgesinde ünivalent değildir.

Tanım 1.2.1.12: (Konform Dönüşüm) Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir fonksiyonu, bir $H \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise f, fonksiyonu H bölgesinde konformdur denir.

Teorem 1.2.1.13: $f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa konformdur.

Örneğin, kompleks değişkenli ve a, b, c, d kompleks sayıları için bir lineer dönüşüm olan (Möbiüs dönüşümü)

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ ad - bc \neq 0$$

bir konform dönüşümdür.

Teorem 1.2.1.14: (Riemann Dönüşüm Teoremi) Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$'yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır [26, 30, 32].

1.2.2 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde fonksiyonlar teorisinin alt konularından olan ünivalent fonksiyonların detaylı anlatımı verilecektir. Analitik olarak düşünüldüğünde ünivalent fonksiyonun türevi sıfıra eşit değilken, geometrik olarak düşünüldüğünde basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Fonksiyon hem analitik hem de ünivalent olduğunda basit bağlantılı olan bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden yararlanılarak keyfi basit bağlantılı bir bölgede tanımlanan ünivalent f, fonksiyonu yerine açık birim diskte tanımlı ünivalent f fonksiyonu kullanılabilir. Seçilen f fonksiyonu için $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ normalize şartları dikkate alınarak seri

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in U)$$

analitik fonksiyonuna dönüşür.

A ile normalize edilmiş analitik fonksiyonların kümesini gösterelim. Böylece

$$A=\left\{ f:\forall z\in U \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \right\}$$

yazılır.

<u>Tanım 1.2.2.1:</u> (S Sınıfı) U birim diskinde ünivalent olan $f\in A$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa S sınıfı denir ve kısaca

$$S=\left\{ f\in A:\forall z\in U \text{ için } f-\text{ünivalent}\right\}$$

şeklinde gösterilir [26, 30, 32].

Aşağıda S sınıfına ait fonksiyonlardan bazı örnekler verilmiştir.

i. $w=f(z)=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathrm{Re}(w)>-1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

ii. $f(z)=z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-\left\{(-\infty,-1/2]\cup(1/2,\infty]\right\}$ bölgesi üzerine resmeder.

iii. $f(z)=z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

S sınıfı bir çok özelliği sağladığı gibi bazı özellikleri de sağlamıyor. Örneğin; S sınıfı toplama işlemine göre kapalı değildir. Bunun için $f_1(z)=\dfrac{z}{1-z}$ ve $f_2(z)=\dfrac{z}{1+iz}$ fonksiyonları S sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu iki fonksiyonun toplamının da S sınıfına ait olup olmadığını kontrol edelim. Bunun için

$f_1'(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ ve $f_2'(z)=\dfrac{z}{(1+iz)^2}$ türevlerinden $f_1'(z)+f_2'(z)=\dfrac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$

yazılır ve $z=\dfrac{1+i}{2}\in U$ alınırsa $f_1'(z)+f_2'(z)=0$ olduğu görülür. Sonuç olarak S sınıfına ait iki fonksiyonun toplamının S sınıfına ait olmadığı görülür.

Aşağıda S sınıfına ait birçok özelliğin korunduğu dönüşümler verilmiştir.

<u>Teorem 1.2.2.2:</u> $f\in S$ fonksiyonu için aşağıda verilen ifadeler doğrudur.

i. Eşlenik alma: $g(z)=\overline{f(\bar{z})}=z+\bar{a}_2z^2+...$ ise $g\in S$ olur.

ii. Rotasyon (Döndürme): $\theta\in\mathbb{R}$ olmak koşuluyla

$$h(z)=e^{-i\theta}f\left(e^{i\theta}z\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_ne^{i(n-1)\theta}z^n \quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

iii. Genişleme: $0<r<1$ olma koşuluyla

$$k(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nr^{n-1}z^n \quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

iv. Disk Otomorfizmi (Koebe veya Biebarch Dönüşümü): $z_0\in U$ olmak koşuluyla

$$l(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)-f(z_0)}{\left(1-|z_0|^2\right)f'(z_0)} \quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

v. Değer bölgesi dönüşümü : $\psi(0)=0$ ve $\psi'(0)=1$ şartlarını sağlayan ve $f(U)$ da ünivalent olan bir ψ foksiyonu için $\psi\circ f\in S$ dir.

vi. Çıkarılmış değer dönüşümü: $w\notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$p(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w} \quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

v. n. kök dönüşümü: Eğer $n=2,3,...$ ise, bu durumda

$$\sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ...,$$

fonksiyonu S sınıfına aittir [26, 30, 32].

<u>Tanım 1.2.2.3:</u> (P Sınıfı) U birim diskinde $p(0)=1$ ve $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa P sınıfı denir. Bu sınıftaki fonksiyonlar Caratheodory fonksiyonları olarak adlandırılır [26, 30, 31, 32].

P sınıfına ait bir fonksiyon ünivalent olmak zorunda değildir. Örnek olarak $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait bir fonksiyondur fakat $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

<u>Tanım 1.2.2.4</u>: (W Sınıfı) U birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonların sınıfı denir ve W ile gösterilir [26, 30, 31, 32].

Ayrıca P sınıfı ile W sınıfı arasındaki önemli bağ aşağıda verilmiştir:

$$p(z) \in P \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)} \quad (\phi(z) \in W).$$

<u>Tanım 1.2.2.5:</u> (S^* Sınıfı) $H \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. H kümesindeki y_0 sabit noktasını $\forall y \in H$ noktası ile birleştiren doğru parçasının tümü bu kümede kalıyorsa H kümesine y_0 noktasına göre yıldızıl kümedir denir. y_0 noktası özel olarak orjin seçilirse kümeye kısaca yıldızıl küme de denilir. y_0 noktasına göre U birim diskini yıldızıl bir kümeye dönüştüren f fonksiyonuna y_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak U birim diskini yıldızıl bir kümeye dönüştüren f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $f \in A$ yıldızıl fonksiyonlarının sınıfı S^* ile gösterilir [26, 30, 31, 32].

<u>Teorem 1.2.2.6 :</u> $f \in S$ verilsin. Bu durumda $f \in S^*$ olması için yeter ve gerek şart

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S^* \Rightarrow |a_n| \le n$ dir [26, 30, 31, 32].

Yıldızıl fonksiyonlar kümesi

$$S^* = \left\{ f \in S : \forall z \in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \right\}$$

şeklinde yazılır. Örneğin $f(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu yıldızıldır. Çünkü Teorem 1.2.2.6' da $z = re^{i\theta}$ ve $(0 \le r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi)$ alınırsa

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$
$$= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} \ge \frac{1+r}{1-r} > 0$$

elde edilir.

<u>Tanım 1.2.2.7:</u> (C Sınıfı) $H \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\forall y_1, y_2 \in C$ için y_1 noktasını y_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen H içinde kalıyorsa H'ye konveks küme denir. U birim diskini konveks kümeye dönüştüren f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. $f \in A$ konveks fonksiyonların sınıfı C ile gösterilir [26, 30, 31, 32].

<u>Teorem 1.2.2.8:</u> $f \in S$ verilsin. Bu durumda $f \in C$ olması için yeter ve gerek şart

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olmasıdır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in C \Rightarrow |a_n| \le 1$ dir [26, 30, 31, 32].

Teorem 1.2.2.9: (Alexander Teoremi) $f(z) \in C$ olması için yeter ve gerek şart $zf'(z) \in S^*$ olmasıdır [26, 30, 31, 32].

Tanım 1.2.2.10: (Hadamard Çarpımı) $f, g \in A$ fonksiyonları verilsin.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların Hadamard çarpımı (Konvülasyon) $(*)$

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır [26, 30, 31, 32].

Tanım 1.2.2.11: (Subordinasyon) f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in W$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir [26, 30, 31, 32].

Örneğin; $1+z \prec 1+2z$ dir. Eğer g ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur.

Teorem 1.2.2.12: (Lindelöf prensibi) f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve ünivalent, g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $g(0) = f(0)$ ve $g(U) \subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r < 1$ için $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ ve $g(U_r) \subset f(U_r)$ dir [26, 30, 31, 32].

Subordinasyonun katsayılar üzerinde önemli bir katkısı vardır. Şöyle ki; $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ve $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ fonksiyonlarının birim diskte analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda eğer $g(z) \prec G(z)$ ise $|b_n| \leq |B_n|$ dir (bkz [38]).

Tanım 1.2.2.13: ($S^*(\alpha)$ Sınıfı) $f(z) \in A$ ve $0 \le \alpha < 1$ verilsin. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve bu sınıf $S^*(\alpha)$ ile gösterilir [31, 32].

Tanım 1.2.2.14: ($C(\alpha)$ Sınıfı) $f(z) \in A$ ve $0 \le \alpha < 1$ verilsin. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $C(\alpha)$ ile gösterilir [31, 32].

Subordinasyon özelliği kullanılarak $C(\alpha)$ ve $S^*(\alpha)$ sınıflarını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in A : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0 \le \alpha < 1 \right\}$$

$$C(\alpha) = \left\{ f \in A : 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}, 0 \le \alpha < 1 \right\}.$$

Ayrıca $S^*(0) = S^*$ ve $C(0) = C$ olur. Diğer taraftan $S^*(\alpha) \subset S^*$ ve $C(\alpha) \subset C$ dır.

Tanım 1.2.2.15: ($K(\alpha)$ Sınıfı): $f(z) \in A$ ve $0 \le \alpha < 1$ verilsin. Bu durumda

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > \alpha$$

şartını sağlayan $g \in S^*$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyon, bu fonksiyonların sınıfına da $\alpha-$mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı denir ve $K(\alpha)$ ile gösterilir [31, 32].

Ayrıca konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı $K(0)=K$ ile gösterilir ve bu sınıfa ait olan fonksiyonlar konvekse yakın fonksiyon olarak adlandırılır.

Son olarak bahsi geçen sınıflar arasında aşağıda verilen bağıntı vardır:

$$C \subset S^* \subset K \subset S \subset A.$$

<u>Tanım 1.2.2.16:</u> $\varphi(0)=0, \varphi'(0)>$ ve $\operatorname{Re}\varphi(z)>0$ koşulları altında U birim diskini reel eksene göre simetrik ve 1 e göre yıldızıl bir bölgeye resmeden φ analitik fonksiyonların sınıfına Ω sınıfındandır denilir [38].

<u>Tanım 1.2.2.17:</u> $f \in A$ ve $\varphi \in \Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z \in U$ çin

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U kümesinde Ma-Minda yıldızıl fonksiyon denir [38].

Ma-Minda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*[\varphi]$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$S^*[\varphi]=\left\{ f \in A : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z), \varphi \in \Omega \right\}$$

şeklinde yazılır.

Özel durumda

$$S^*\left[\frac{1+z}{1-z}\right]=S^* \text{ ve } S^*\left[\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right]=S^*(\alpha), (0 \le \alpha < 1)$$

dır.

Tanım 1.2.2.18: $f \in A$ ve $\varphi \in \Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z \in U$ için

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U diskinde Ma-Minda konveks fonksiyon denir [38].

Ma-Minda konveks fonksiyonların sınıfı $C[\varphi]$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$C[\varphi]=\left\{ f \in A : 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z), \varphi \in \Omega \right\}$$

şeklinde yazılır.

Özel durumda

$$C\left[\frac{1+z}{1-z}\right]=C \quad \text{ve} \quad C\left[\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right]=C(\alpha), (0 \le \alpha < 1)$$

dır.

1.2.3 $p-$Değerli Fonksiyonlar

Tanım 1.2.3.1: f fonksiyonu $D \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bölgesinde analitik ve $w \in D$ için $f(z)=w$ denkleminin D bölgesindeki köklerinin sayısı $n(w)$ olsun. Bu durumda p pozitif bir tam sayı olmak üzere her $w \in D$ için $n(w) \le p$ ise f fonksiyonuna D bölgesinde $p-$değerli (veya p. mertebeden multivalent) fonksiyon denir. $p=1$ için f ünivalenttir [33].

U birim diskinde analitik olan ve normalize edilmiş $p-$değerli fonksiyonlar

$$f(z)=z^p+\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (z \in U) \tag{1.1}$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyonların sınıfı

$$A(p)=\left\{ f:\forall z\in U \text{ için } f(z)=z^{p}+\sum_{k=p+1}^{\infty}a_{k}z^{k}\right\}$$

şeklinde gösterilir. Özel durumda $A(1)=A$ olur.

$p-$değerli fonksiyonlar ünivalent fonksiyonlarınkine benzer pek çok özelliğe sahiptir. Bu nedenle katsayı tahmini, distorsiyon teoremleri, kısmi toplamlar, komşuluk, yarıçap gibi ünivalent fonksiyonlar teorisinde klasikleşmiş bazı sonuçlar $p-$değerli fonksiyonlar içinde çalışılmıştır.

Teorem 1.2.3.2: Eğer $f(z)=z^{p}+\sum_{k=p+1}^{\infty}a_{k}z^{k}\in A(p)$ ise bu durumda

$$\left|a_{p+1}\right|\leq 2p$$

olur. Ayrıca, $|z|=r\ (0<r<1)$ için,

$$\frac{r^{p}}{(1+r)^{2p}}\leq\left|f(z)\right|\leq\frac{r^{p}}{(1-r)^{2p}},$$

$$\left|f'(z)\right|\leq\frac{p(1+r)}{r(1-r)}\left|f(z)\right|\leq\frac{pr^{p-1}(1+r)}{(1-r)^{2p+1}}$$

eşitsizlikleri doğrudur [33].

p. dereceden polinomlar düzlemde $p-$değerlidir. Bu nedenle f fonksiyonu U birim diskinde $p-$değerli olduğunda önceki katsayılara bağlı olarak $\left|a_{p}\right|$ için sınır elde etmenin zor bir problem olduğu düşünülebilir. Ancak böyle fonksiyonlar için a_{p}'den sonraki katsayıların a_{p}'den a_{n}'ye kadar olan katsayılara bağlı olarak sınırlandırılabileceği 1935 yılında Cartwright [16] tarafından gösterilmiştir. 1948 yılında ise Goodman [28] tarafından aşağıdaki tahmin verilmiştir.

p pozitif bir tam sayı ve

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonu U birim diskinde $p-$değerli olsun. Buna göre $n>p$ için

$$|b_n| \le \sum_{k=1}^{p} \frac{2k(n+p)!}{(p+k)!(p-k)!(n-p-1)!(n^2-k^2)} |b_k|$$

olur.

Bu tahmin, $n.$ katsayının ilk p tane katsayının belli bir lineer kombinasyonu ile sınırlandırılabileceğini söyler. $p=1$ olması durumunda ünivalent fonksiyonlar için verilen De-Branges Teoremi elde edilir [33].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölüme ilk olarak tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılan fonksiyon sınıflarını tanıtılacak ve akabinde bazı önemli tanım ve lemmalar verilecektir.

U açık birim diskinde analitik ve $p-$değerli olan

$$f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k, \quad \left(n, p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}\right) \tag{2.1}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı da $A(p,n)$ ile gösterilir.

Özel durumda $A(p,1) = A(p)$ ve $A(1,1) = A$ olur.

$A(p,n)$ sınıfında

$$f(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} |a_k| z^k, \quad \left(n, p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}\right) \tag{2.2}$$

biçimindeki negatif katsayılı fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $T(p,n)$ ile gösterilecek. Özel durumda $T(p,1) = T(p)$ ve $T(1,1) = T$ olur.

2.1 Türev Operatörler

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde hiç şüphesiz ilgi çeken konulardan biri türev ve integral operatörlerdir. Bunlardan bazıları birçoğuna öncülük etmektedir. Aşağıda tanımlanan Sălăgean türev operatörü bunlardan biridir.

<u>Teorem 2.1.1</u> (Sălăgean Türev Operatörü): $f \in A$ fonksiyonu için Sălăgean türev operatörü $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $D^m : A \to A$

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z)$$

$$\vdots$$

$$D^m f(z) = D\left(D^{m-1} f(z)\right), \ (z \in U)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca D^m için rekürans formülü

$$D^{m+1} f(z) = z\left(D^m f(z)\right)'$$

biçiminde yazılabilir [52].

Böylece

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

fonksiyonuna Sălăgean türev operatörü uygulanırsa

$$D^m \ f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^m a_k z^k$$

elde edilir. Benzer şekilde $f \in A(p,n)$ fonksiyonu için Sălăgean türev operatörü

$$D_p^m \ f(z) = f(z)$$

$$D_p^1 f(z) = D_p f(z) = \frac{z}{p}\left(D_p^0 f(z)\right)' = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k}{p} a_k z^k$$

$$\vdots$$

$$D_p^m \ f(z) = D_p\left(D_p^{m-1} \ f(z)\right) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\frac{k}{p}\right)^{\mathrm{m}} a_k z^k$$

şeklinde tanımlanır [58].

Ayrıca $T\left(p,n\right)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$D_p^0 f\left(z\right)=f\left(z\right)$$

$$D_p^1 f\left(z\right)=D_p f\left(z\right)=\frac{z}{p}\left(D_p^0 f\left(z\right)\right)'=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k}{p}\left|a_k\right|z^k$$

$$\vdots$$

$$D_p^m\ f\left(z\right)=D_p\left(D_p^{m-1}\ f\left(z\right)\right)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\left(\frac{k}{p}\right)^{\mathrm{m}}\ \left|a_k\right|z^k$$

yazılır.

Sălăgean türev operatöründeki mantık ile yola çıkıldığında Deniz ve Özkan [23], 2014 yılında Sălăgean türev operatörünün bir tür genellemesini yapmıştır.

Tanım 2.1.2 (Deniz-Özkan Türev Operatörü): $f\in A$ fonksiyonu için $\lambda\geq 0$, $z\in U$ ve $m\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere Deniz-Özkan türev operatörü $D_\lambda^m : A\to A$,

$$D_\lambda^0 f(z)=f(z)$$

$$D_\lambda^1 f(z)=D_\lambda f(z)=\lambda z^3 f'''(z)+\left(2\lambda+1\right)z^2 f''(z)+zf'(z)$$

$$D_\lambda^m f(z)=D_\lambda\left(D_\lambda{}^{m-1} f(z)\right)$$

şeklinde tanımlanır [23].

$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ olmak üzere f fonksiyonun D_λ^m türev operatörü

$$D_\lambda^m f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^{2m}\left(\lambda\left(k-1\right)+1\right)^m a_k z^k$$

şeklindedir. Aynı zamanda $D_\lambda^m f(z)\in A$ dır.

$D_\lambda^m f(z)$ operatörünün özel durumu Sălăgean türev operatörüne indirgenir. Bu iki operatör arasında

$$D_0^m f(z) = D^{2m} f(z)$$

ve

$$D_1^m f(z) = D^{3m} f(z)$$

şeklinde ilişkiler vardır.

Bu tez çalışmasında kullanılacak olan ve yukarıda bahsedilen türev operatörlerin geneli Deniz-Çekin türev operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.3 (Deniz-Çekin Türev Operatörü): $f(z) \in A(p,n)$ fonksiyonu için $\lambda \geq 0$, $z \in U$ ve $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere Deniz ve Çekin türev operatörü $D_{\lambda,p}^m : A(p,n) \to A(p,n)$,

$$D_{\lambda,p}^0 f(z) = f(z)$$

$$D_{\lambda,p}^1 f(z) = D_{\lambda,p} f(z) = \frac{1}{p^2}\left\{\lambda z^3 f'''(z) + (2\lambda+1) z^2 f''(z) + (1-\lambda p(p-1)) z f'(z)\right\}$$

$$\vdots$$

$$D_{\lambda,p}^m f(z) = D_{\lambda,p}\left(D_{\lambda,p}^{m-1} f(z)\right)$$

şeklinde tanımlanır [20].

$f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k$ olmak üzere f fonksiyonun $D_{\lambda,p}^m$ türev operatörü

$$D_{\lambda,p}^m f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left[\frac{k\left(\lambda(k-p)(k+p-1)+k\right)}{p^2}\right]^m a_k z^k$$

şeklindedir.

Tezin bundan sonraki kısımlarında kısaltma olarak

$$\Psi(k,m,p,\lambda)=\left[\frac{k\left(\lambda\left(k-p\right)(k+p-1)+k\right)}{p^2}\right]^m$$

kullanılacaktır.

Ayrıca $D^m_{\lambda,p}$ operatörünün D^m_λ ve D^m_p operatörleri ile $D^m_{\lambda,1}=D^m_\lambda$ ve $D^m_{0,p}=D^{2m}_p$ ilişkisi vardır.

$D^m_{\lambda,p}$ operatörü bazı operatörlerin genelleştirilmişidir. $n=1$ için $D^m_{\lambda,p}$ operatörünün özel durumları aşağıdaki gibidir:

1. $D^m_{\lambda,1}=D^m_\lambda,\ (\lambda\geq 0)$ Deniz-Özkan türev operatörü [23, 24]
2. $D^m_{0,1}=D^{2m}_1$ Sălăgean operatörü [48]
3. $D^m_{0,p}=D^{2m}_p$ Shenan, Salim ve Mousa operatörü [58]

2.2 $p-$Değerli Fonksiyonların Bazı Özel Alt Sınıfları

Bu başlık altında $p-$değerli fonksiyonlar konusunda önemli bir yere sahip olan özel alt sınıflar tanıtılarak bu sınıflara ait bazı katsayı eşitsizlikleri verilecektir.

Tanım 2.2.1: $f\in A\left(p,n\right)$ fonksiyonu verilsin. $\forall z\in U$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna U 'da $p-$değerli yıldızıl fonksiyon denir [33].

$p-$değerli yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*\left(p,n\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2: $f \in A(p,n)$ fonksiyonu verilsin. $\forall z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyona $p-$değerli konveks fonksiyon denir [33].

$p-$değerli konveks fonksiyonların sınıfı $C(p,n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3: $f \in A(p,n)$ ve $0 \le \alpha < p$ olmak üzere $\forall z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyona $\alpha-$mertebeden $p-$değerli yıldızıldır denir [14].

α mertebeden $p-$değerli yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*(p,n,\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4: $f \in A(p,n)$ ve $0 \le \alpha < p$ olmak üzere $\forall z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyona α mertebeden $p-$değerli konvekstir denir [14].

α mertebeden $p-$değerli konveks fonksiyonların sınıfı $C(p,n,\alpha)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki sınıflar arasında aşağıdaki durumlar yazılır:

$$S^*(p,n,\alpha)\subset S^*(p,n),\ S^*(p,n,0)=S^*(p,n),\ S^*(1,1,\alpha)=S^*(\alpha),\ S^*(1,1,0)=S^*$$
$$C(p,n,\alpha)\subset C(p,n),\ C(p,n,0)=C(p,n),\ C(1,1,\alpha)=C(\alpha),\ C(1,1,0)=C$$

Negatif katsayılı $\alpha-$mertebeden $p-$değerli yıldızıl ve negatif katsayılı $\alpha-$mertebeden $p-$değerli konveks fonksiyonlar sınıfı $0 \le \alpha < p$ olmak üzere her $z \in U$ için sırasıyla,

$$TS^*(p,n,\alpha)=S^*(p,n,\alpha)\cap T(p,n)=\{f : f\in T(p,n) ve\ f\in S^*(p,n,\alpha)\},$$
$$T\mathcal{C}(p,n,\alpha)=C(p,n,\alpha)\cap T(p,n)=\{f : f\in T(p,n) ve\ f\in C(p,n,\alpha)\}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan

$$TS^*(p,\alpha)=S^*(p,\alpha)\cap T(p),\quad T\mathcal{C}(p,\alpha)=C(p,\alpha)\cap T(p)$$

fonksiyon sınıflarına ait katsayı ile ilgili sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmiştir.

<u>Teorem 2.2.5</u>: $f\in A(p)$ fonksiyonu verilsin. Böylece $f\in TS^*(p,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k+\alpha)|a_{p+k}|\le p-\alpha$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu sonuç kesindir [43].

<u>Teorem 2.2.6</u>: $f\in A(p)$ fonksiyonu verilsin. Böylece $f\in TC(p,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)(p+k-\alpha)|a_{p+k}|\le p(p-\alpha)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu sonuç kesindir [43].

Teorem 2.2.5 ve Teorem 2.2.6’dan sırasıyla kolaylıkla görülebilir ki;

$$|a_{p+1}|\le\frac{p-\alpha}{p+1-\alpha}$$

ve

$$|a_{p+1}|\le\frac{p(p-\alpha)}{(p+1)(p+1-\alpha)}$$

yazılır.

$TS^*(p,\alpha)$ ve $TC(p,\alpha)$ sınıflarının genel versiyonları subordinasyon kullanarak aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.7: $f\in A(p,n)$ ve $\varphi\in\Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z\in U$ için

$$\frac{zf'(z)}{pf(z)}\prec\varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U 'da $p-$değerli Ma-Minda yıldızıl fonksiyon denir [38].

$p-$değerli Ma-Minda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*_{p,n}[\varphi]$ ile gösterilir ve

$$S^*_{p,n}[\varphi]=\left\{f\in A(p,n):\frac{zf'(z)}{pf(z)}\prec\varphi(z),\ \varphi\in\Omega\right\}$$

şeklinde yazılır.

Özel durumda

$$S^*_{p,n}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]=S^*(p,n)\ \text{ ve }\ S^*_{p,n}\left[\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right]=S^*(p,n,\alpha)\quad(0\le\alpha<1)$$

dır.

Tanım 2.2.8: $f\in A(p,n)$ ve $\varphi\in\Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z\in U$ için

$$\frac{1}{p}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U 'da $p-$değerli Ma-Minda konveks fonksiyon denir [38].

$p-$değerli Ma-Minda konveks fonksiyonların sınıfı $C_{p,n}[\varphi]$ ile gösterilir ve

$$C_{p,n}[\varphi]=\left\{ f\in A(p,n) : \frac{1}{p}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\prec\varphi(z),\ \varphi\in\Omega \right\}$$

şeklinde yazılır.

Özel durumda

$$C_{p,n}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]=C(p,n) \text{ ve } C_{p,n}\left[\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right]=C(p,n,\alpha),\ (0\le\alpha<1)$$

dır.

3. BULGULAR

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz özgün sonuçlara yer verilmiştir. Öncelikle $D_{\lambda,p}^{m}$ türev operatörünü kullanılarak $A(n,p)$ ve $T(n,p)$ sınıfına ait fonksiyonların $S_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ ve $ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ gibi iki yeni alt sınıfları tanımlanarak bu sınıflara ait katsayı eşitsizlikleri, komşuluk problemi, kısmi toplamları ve Hadamard çarpımı ile ilgili teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır. Tekrar hatırlatmak gerekirse $D_{\lambda,p}^{m}$ türev operatörünün katsayısı

$$\Psi(k,m,p,\lambda)=\left[\frac{k\left(\lambda\left(k-p\right)(k+p-1)+k\right)}{p^{2}}\right]^{m}$$

şeklindedir.

3.1 $S_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ Sınıfı İçin Katsayı Eşitsizlikleri

Bu kısımda ilk olarak $D_{\lambda,p}^{m}$ türev operatörünü kullanarak $p-$değerli fonksiyonların $S_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ altsınıfı Çekin'in [20] tez çalışmasında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. Çekin çalışmasında bu sınıf için katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon sınırları, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı ve kesirsel türev-integralin uygulamaları ile ilgili teoremleri vermiştir. Biz de tez çalışmasında bu sınıfa ait fonksiyonlar için komşuluk problemi, kısmi toplamları ve Hadamard çarpım sonuçlarını ele aldık.

<u>Tanım 3.1.1</u>: $f\in A\left(p,n\right)$ ve $-1\leq A<B\leq 1$ ve $0\leq\sigma<p$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{p-\sigma}\left(\frac{z\left[D_{\lambda,p}^{m}f(z)\right]'}{D_{\lambda,p}^{m}f(z)}-\sigma\right)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\quad(z\in U)\tag{3.1}$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna $S_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfındandır denir [20].

Aslında $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfı literatürde bilinen bir çok sınıfın genelleştirilmişidir.

Mesela, $S_\lambda^0(-1,1-2\alpha;0,p,n)=S^*\left(p,n,\alpha\right)$, $S_\lambda^0(-1,1-2\alpha;0,1,1)=S^*\left(\alpha\right)$ özel sınıfları yazılır.

Ayrıca subordinasyonun tanımı kullanılarak (3.1) koşulunun

$$\left|\frac{\dfrac{z\left(D_{\lambda,p}^m f(z)\right)'}{D_{\lambda,p}^m f(z)}-p}{B\dfrac{z\left(D_{\lambda,p}^m f(z)\right)'}{D_{\lambda,p}^m f(z)}-\left[pB+(A-B)(p-\sigma)\right]}\right|<1 \qquad (3.2)$$

eşitsizliğine denk olduğu kolayca görülebilir.

Diğer taraftan $f\in T\left(p,n\right)$ olmak üzere $ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfı

$$ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)=T\left(p,n\right)\cap S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$$

olarak tanımlanır.

Çekin [20] çalışmasında $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini aşağıdaki teoremde vermiştir.

<u>Teorem 3.1.2</u>: f fonksiyonu (2.2) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(k-p\right)\left(1+B\right)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)\left|a_k\right|\leq\left(B-A\right)(p-\sigma) \qquad (3.3)$$

olmasıdır [20].

Teorem 3.1.2’den görüldüğü gibi $ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfı için (3.3) katsayı eşitsizliği gerek ve yeter şart niteliğindedir. Bunun sebebi fonksiyonların negatif katsayılı olmasından kaynaklanır. Bu durum $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfı için her zaman doğru olmayabilir. $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfı için sadece yeter şart doğrudur. Bununla ilgili teorem aşağıdadır.

Teorem 3.1.3: f fonksiyonu (2.1)'deki gibi verilsin. Bu durumda, eğer f fonksiyonu $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfından ise

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[\left(k-p\right)\left(1+B\right)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)\left|a_k\right|\leq\left(B-A\right)(p-\sigma)$$

eşitsizliği sağlanır [20].

Sonuç 3.1.4: f fonksiyonu (2.1)'deki gibi verilsin. Bu durumda, eğer f fonksiyonu $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfından ise

$$\left|a_k\right|\leq\frac{\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)}{\left[\left(k-p\right)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}\qquad(k,p\in\mathbb{N})\tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak

$$f(z)=z^p-\frac{\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)}{\left[\left(k-p\right)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}z^k\quad(k,p\in\mathbb{N})$$

fonksiyonu için doğrudur [20].

3.2. $ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ Sınıfı İçin Komşuluk Problemi

A sınıfına ait fonksiyonların komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman [29] tarafından yapılmıştır. Goodman tarafından yapılan bu çalışmada yer alan aşağıda verilen teorem komşuluk kavramının geliştirilmesi için temel oluşturmuştur.

Teorem 3.2.1:

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\in A$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi yıldızıl bir bölgeye resmeder. Eğer,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$$

se f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi konveks bir bölgeye resmeder [29].

1981 yılında Ruscheweyh [50], Goodman tarafından verilen komşuluk kavramını genelleştirerek A sınıfına ait f fonksiyonlarının $\tau-$komşuluğunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 3.2.2: $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in A$ ve $\tau \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}_\tau(f) = \left\{ g \in A : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n,\ \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n - b_n| \leq \tau \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun $\tau-$komşuluğu denir [50].

Buna göre, $f(z) = e(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu için,

$$\mathcal{N}_\tau(e(z)) = \{ g \in A : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n,\ \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n| \leq \tau \}$$

olur. Ayrıca $\mathcal{N}_1(e) \subset S^*$ dır.

Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluğu 1990 yılında Walker [68] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.3: $p \in P$ ve $\tau \geq 0$ için p nin $\tau -$komşuluğu $\mathcal{N}_\tau(p)$ ile gösterilir ve bu küme

$$\mathcal{N}_\tau(p) = \left\{ q \in P : q(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n z^n , \sum_{n=2}^{\infty} |p_n - q_n| \leq \tau \right\}$$

şeklinde tanımlanır [68].

1996 yılında Altıntaş ve Owa [13] negatif katsayılı $f \in A(1,n)$ fonksiyonlarının $(n,\tau)-$komşuluğunu aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 3.2.4: $f \in T(1,n)$ ve $\tau \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\tau}(f) = \left\{ g \in T(1,n) : g(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k , \ \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k - b_k| \leq \tau \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğu denir [13].

2004 yılında Altıntaş ve arkadaşları [14] Tanım 3.2.4'te verilen $(n,\tau)-$komşuluk kavramını negatif katsayılı $p-$değerli fonksiyonlar sınıfına genişlettiler.

Tanım 3.2.5: $f \in T(p,n)$ $(p \in \mathbb{N})$ ve $\tau \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\tau}(f;p) = \left\{ g \in T(p,n) : g(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} b_k z^k , \sum_{k=n+p}^{\infty} k |a_k - b_k| \leq \tau \right\}$$

kümesine $f \in T(p,n)$ fonksiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğu denir [14].

Özel olarak $h(z) = z^p$ alınırsa

$$\mathcal{N}_{n,\tau}(h;p) = \left\{ g \in T(p,n) : g(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} b_k z^k , \sum_{k=n+p}^{\infty} k |b_k| \leq \tau \right\}$$

olur [14].

Ayrıca son yıllarda A sınıfına ait fonksiyonların belli altsınıfları için komşuluk problemi Owa ve arkadaşları [45], Orhan ve Kadıoğlu [39], Orhan ve Kamali [40], Cataş [17] ve Deniz ve Orhan [21] çalışmışken, $A(n,p)$ sınıfına ait fonksiyonların belli altsınıfları için de Srivastava and Patel [61], Altıntaş [12], Srivastava and Orhan [63], Orhan [41], Deniz ve Orhan [22] ve Sağsöz ve Kamali [51] tarafından çalışılmıştır.

Bu bölümde öncelikle $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfı için komşuluk kavramını tanımlayıp daha sonra bu sınıfın komşuluğuna ait bir içerme bağıntısı vereceğiz. Daha sonra aynı işlemi $ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfı için yapacağız.

<u>Tanım 3.2.6:</u> $\tau>0$ ve genel terimi

$$s_k=\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}\quad (k\in\mathbb{N})$$

olan $S=\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, negatif olmayan bir dizi olsun. (3.1) şeklinde tanımlanan $f(z)\in A(n,p)$ fonsiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğu

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f):=\left\{g:g(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}a_kz^k\in A(n,p)\ ve\ \sum_{k=n+p}^{\infty}s_k\left|b_k-a_k\right|\le\tau\ (\tau>0)\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.6'da $s_k=k$ alınırsa Ruscheweyh'in $\mathcal{N}_\tau-$komşuluğu elde edilir. Şimdi $\mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f)$ komşuluğu için aşağıdaki teoremi verelim.

<u>Teorem 3.2.7:</u> $f(z)\in S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu için

$$\left(f(z)+\varepsilon z^p\right)(1+\varepsilon)^{-1}\in S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)\ \left(\varepsilon\in\mathbb{C};|\varepsilon|<\tau;\tau>0\right),$$

ise, bu durumda

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f)\subset S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$$

dır.

İspat: $S_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfının tanımından $\varpi \in \mathbb{C}$ ve $|\varpi|=1$ olacak şekilde

$$\frac{\dfrac{z\left(D_{\lambda,p}^m f(z)\right)'}{D_{\lambda,p}^m f(z)}-p}{B\dfrac{z\left(D_{\lambda,p}^m f(z)\right)'}{D_{\lambda,p}^m f(z)}-\left[pB+(A-B)(p-\sigma)\right]} \neq \varpi \quad (z\in U)$$

yazılır. Bu eşitsizlik

$$h(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty} c_k z^k = z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[(k-1)-\left(kB-(B-A)(p-\sigma)\right)\varpi\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{\varpi(B-A)(p-\sigma)}z^k \tag{3.5}$$

olmak üzere

$$(f*h)(z)/z^p \neq 0 \ \ (z\in U), \tag{3.6}$$

eşitsizliğine denktir. (3.5) ifadesinden

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left|\frac{\left[(k-1)-\left(kB-(B-A)(p-\sigma)\right)\varpi\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{\varpi(B-A)(p-\sigma)}\right| \\ &\leq \frac{\left[(k-1)-\left(kB-(B-A)(p-\sigma)\right)\varpi\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)} \qquad (k\in\mathbb{N}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca, teoremin hipotezinden (3.6) ifadesine

$$\frac{\left((f(z)+\varepsilon z^p)(1+\varepsilon)^{-1}\right)*h(z)}{z^p} \neq 0 \quad (z\in U)$$

ve

$$\frac{f(z)*h(z)}{z^p} \neq \varepsilon \quad (z\in U),$$

denk olarak

$$\frac{f(z)*h(z)}{z^p} \geq \tau \quad (z\in U;\ \tau>0) \tag{3.8}$$

yazılır.

Eğer

$$g(z) := z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} b_k z^k \in \mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f),$$

alınırsa bu durumda

$$\left|\frac{\left(f(z)-g(z)\right)*h(z)}{z^p}\right| = \left|\sum_{k=n+p}^{\infty}(a_k-b_k)c_k z^{k-p}\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[(k-1)-\left(kB-(B-A)(p-\sigma)\right)\varpi\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{\varpi\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)}|a_k-b_k||z|^{k-p} < \tau$$

elde edilir. Böylece, $|\varpi|=1$ olacak şekilde her kompleks ϖ sayısı için $(g*h)(z)/z^p \neq 0$ yazılır. Bu da $g \in S_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ demektir. Bununla teorem ispatlanmış olur.

Şimdi bir $f(z) \in T(n,p)$ fonksiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğunu tanımlayalım.

<u>Tanım 3.2.8:</u> $\tau > 0$ için, $f(z) \in T(n,p)$ fonksiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğunu

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f) = \left\{ g : g(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} |a_k| z^k \in T(n,p) \right.$$

$$\left. \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[\left(k-p\right)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)}\left||b_k|-|a_k|\right| \leq \tau \ \ (\tau>0) \right\} \qquad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır.

<u>Teorem 3.2.9:</u> $f(z) \in ST_{\lambda}^{m+1}(A,B;\sigma,p,n)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f) \subset ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$$

sağlanır. Burada

$$\tau = 1 - \frac{p^2}{(n+p)[\lambda n(n+2p-1)+n+p]}$$

dır.

<u>İspat:</u> $f(z) \in ST_{\lambda}^{m+1}(A,B;\sigma,p,n)$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.2'den

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}|a_k| \leq \frac{p^2}{(n+p)[\lambda n(n+2p-1)+n+p]} \tag{3.10}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$g(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}|b_k|z^k \in \mathcal{N}^{\tau}_{n,p}(f), \quad \left(\tau = 1-\frac{p^2}{(n+p)[\lambda n(n+2p-1)+n+p]}\right) \tag{3.11}$$

alalım. Böylece (3.9)'dan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}\big||b_k|-|a_k|\big| \leq \tau \ \ (\tau>0) \tag{3.12}$$

bulunur. Ayrıca (3.10), (3.11) ve (3.12) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}|b_k| \\
&\leq \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}|a_k| \\
&+\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}\big||b_k|-|a_k|\big| \\
&\leq \frac{p^2}{(n+p)[\lambda n(n+2p-1)+n+p]}+\tau = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.1.2'den $g(z)\in ST^{m}_{\lambda}(A,B;\sigma,p,n)$ bulunur.

Teorem 3.2.9'da kesinliği göstermek için, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarını sırasıyla $\tau^* > \tau$ olmak üzere

$$f(z)=z^p-\left[\frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(n+p,m,p,\lambda)}\right]z^{n+p} \in ST^{m+1}_{\lambda}(A,B;\sigma,p,n)$$

ve

$$g(z)=z^p-\left[\begin{array}{c}\dfrac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(n+p,m,p,\lambda)}\\+\dfrac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(n+p,m,p,\lambda)}\tau^*\end{array}\right]z^{n+p}$$

olarak alalım. Açık olarak, $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{N}_{n,p}^{\tau^*}(f)$ kümesine aittir. Diğer taraftan, Teorem 3.1.2'den $g(z)\notin ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamdır.

3.3. $ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ Sınıfına Ait Fonksiyonların Kısmi Toplamları

1997 yılında Silverman [59], $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların $0\leq\alpha<1$ olmak üzere

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)\left|a_k\right|\leq(1-\alpha) \quad \text{ya da} \quad \sum_{k=2}^{\infty}k(k-\alpha)\left|a_k\right|\leq(1-\alpha)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonları gözönüne almıştır. Bu katsayı koşulu f fonksiyonunun $\alpha-$mertebeden yıldızıl yada $\alpha-$mertebeden konveks olması için yeterlidir. Eğer f fonksiyonu yukarıdaki eşitsizliklerin her ikisini sağlıyorsa, $f_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n}a_k z^k$ kısmi toplamları da aynı eşitsizlikleri sağlar. Silverman bu çalışmasında, yukarıdaki eşitsizliklerden birini yada ikisini sağlayan f fonksiyonları için $\operatorname{Re}\{f(z)/f_n(z)\}$, $\operatorname{Re}\{f_n(z)/f(z)\}$, $\operatorname{Re}\{f'(z)/f_n'(z)\}$ ve $\operatorname{Re}\{f_n'(z)/f'(z)\}$ değerleri için kesin alt sınırlar elde etti. Son yıllarda ise $p-$değerli fonksiyonların belli altsınıflarının kısmi toplamları üzerine Liu [36] ve Deniz ve Orhan [21, 22] önemli çalışmalar yapmıştır.

$f\in T(n,p)$ fonksiyonun kısmi toplamı

$$\kappa_m(z)=\begin{cases} z^p, & m=1,2,\ldots,n+p-1; \\ z^p-\sum\limits_{k=n+p}^{m}\left|a_k\right|z^k, & m=n+p,n+p+1,\ldots \end{cases} \quad (k\geq n+p;\, n,p\in\mathbb{N}) \qquad (3.13)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu bölümde önce $f \in T(n,p)$ fonksiyonu için $\operatorname{Re}\{f(z)/\kappa_m(z)\}$ ve $\operatorname{Re}\{\kappa_m(z)/f(z)\}$ oranları için kesin alt sınırlar vereceğiz.

<u>Teorem 3.3.1:</u> $f \in T(n,p)$ ve $\kappa_m(z)$ sırasıyla (2.2) ve (3.13) şeklinde verilsin. Ayrıca farzedelim ki

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \lambda_k |a_k| \le 1, \quad \left(\lambda_k = \frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)} \right) \tag{3.14}$$

olsun. Bu durumda $m \ge k+p$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{\kappa_m(z)} \right) > 1 - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \tag{3.15}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\kappa_m(z)}{f(z)} \right) > \frac{\lambda_{m+1}}{1+\lambda_{m+1}} \tag{3.16}$$

dır. Sonuçlar

$$f(z) = z^p - \frac{1}{\lambda_{m+1}} z^{m+1} \tag{3.17}$$

fonksiyonu için kesindir.

<u>İspat:</u> Teoremin hipotezi altında,

$$\lambda_{k+1} > \lambda_k > 1 \quad (k \ge n+p)$$

yazılır. Böylece (3.14) hipotezini kullanarak

$$\sum_{k=n+p}^{m} |a_k| + \lambda_{m+1} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \le \sum_{k=n+p}^{\infty} \lambda_k |a_k| \le 1 \tag{3.18}$$

elde edilir. Şimdi $\omega(z)$ fonksiyonunu

$$\omega(z)=\lambda_{m+1}\left[\frac{f(z)}{\kappa_m(z)}-\left(1-\frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)\right]=1-\frac{\lambda_{m+1}\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}{1-\sum\limits_{k=n+p}^{m}|a_k|z^{k-p}} \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlayalım. (3.15) eşitsizliğini göstermek için $\operatorname{Re}(\omega(z))>0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer taraftan

$$\operatorname{Re}(\omega(z))>0 \Leftrightarrow \left|\frac{\omega(z)-1}{\omega(z)+1}\right|<1$$

olduğundan (3.18) ve (3.19) ifadelerinden

$$\begin{aligned}\left|\frac{\omega(z)-1}{\omega(z)+1}\right| &= \left|\frac{-\lambda_{m+1}\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}{2-2\sum\limits_{k=n+p}^{m}|a_k|z^{k-p}-\lambda_{m+1}\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}\right| \\ &\le \frac{\lambda_{m+1}\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}}{2-2\sum\limits_{k=n+p}^{m}|a_k||z|^{k-p}-\lambda_{m+1}\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}}\le 1\end{aligned} \tag{3.20}$$

bulunur. Bu da $\operatorname{Re}(\omega(z))>0$ olması demektir. Böylece (3.15) ispatlanmış olur.

(3.17) ile verilen f fonsiyonu için sonucun kesin olduğunu göstermek için $z\to 1^-$ alındığında

$$\frac{f(z)}{\kappa_m(z)}=1-\frac{1}{\lambda_{m+1}}z^{m-p+1}\to 1-\frac{1}{\lambda_{m+1}},$$

olur. Buda (3.15) deki sınırın kesin olduğunu gösterir.

Benzer şekilde, eğer

$$\psi(z)=(1+\lambda_{m+1})\left[\frac{\kappa_m(z)}{f(z)}-\frac{\lambda_{m+1}}{1+\lambda_{m+1}}\right]=1+\frac{(1+\lambda_{m+1})\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}{1-\sum\limits_{k=n+p}^{\infty}|a_k|z^{k-p}} \tag{3.21}$$

alınırsa ve tekrar (3.18) kullanılırsa

$$\left|\frac{\psi(z)-1}{\psi(z)+1}\right| = \left|\frac{(1+\lambda_{m+1})\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}{2-2\sum_{k=n+p}^{m}|a_k|z^{k-p}+(\lambda_{m+1}-1)\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}\right|$$

$$\leq \frac{(1+\lambda_{m+1})\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}}{2-2\sum_{k=n+p}^{m}|a_k||z|^{k-p}-(\lambda_{m+1}-1)\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}} \leq 1 \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.17) ile verilen f fonsiyonu için sonuç kesindir. Böylece (3.16) ispatlanmış olur.

Teorem 3.5.2: $f \in T(n,p)$ ve $\kappa_m(z)$ sırasıyla (2.2) ve (3.13) şeklinde verilsin. Ayrıca (3.14) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $k \geq 2$ için,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{\kappa_m{}'(z)}\right) > 1-\frac{m+1}{\lambda_{m+1}} \tag{3.23}$$

ve

$$Re\left(\frac{\kappa_m'(z)}{f'(z)}\right) > \frac{\lambda_{m+1}}{m+1+\lambda_{m+1}} \tag{3.24}$$

eşitsizlikleri doğrudur. Sonuçlar (3.17) fonksiyonu için kesindir.

İspat: Teoremin hipotezinden $\lambda_{k+1} > \lambda_k > 1 \ (k \geq n+p)$ yazılabilir. Yine hipotezden dolayı

$$\frac{1}{p}\sum_{k=n+p}^{m} k|a_k| + \frac{\lambda_{m+1}}{p(m+1)}\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k| \leq \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\lambda_k}{p(m+1)}k|a_k| \leq 1 \tag{3.25}$$

yazılır. Diğer taraftan $w(z)$ 'yi

$$w(z) = \frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\left[\frac{f'(z)}{\kappa_m'(z)}-\left(1-\frac{m+1}{\lambda_{m+1}}\right)\right] = 1-\frac{\frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}k|a_k|z^{k-p}}{p-\sum_{k=n+p}^{m}k|a_k|z^{k-p}} \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlayalım.

Sonuç olarak (3.23) eşitsizliğini göstermek için $\operatorname{Re}(\omega(z))>0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer taraftan $\operatorname{Re}(w(z))>0 \Leftrightarrow \left|\frac{w(z)-1}{w(z)+1}\right|<1$ olduğundan (3.25) ve (3.26) ifadelerinden

$$\left|\frac{w(z)-1}{w(z)+1}\right| = \left|\frac{-\frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k| z^{k-p}}{2p-2\sum_{k=n+p}^{m} k|a_k| z^{k-p} - \frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k| z^{k-p}}\right|$$

$$\leq \frac{\frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k|}{2p-2\sum_{k=n+p}^{m} k|a_k| - \frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k|} \leq 1$$

elde edilir. Buda $\operatorname{Re}(\omega(z))>0$ olması demektir. Böylece (3.23)'ün ispatı tamamlanmış oldu.

(3.17) ile verilen f fonksiyonu için sonucun kesin olduğunu göstermek için $z \to 1^-$ alındığında

$$\frac{f(z)}{\kappa_m(z)} = 1 - \frac{1}{\lambda_{m+1}} z^{m-p+1} \to 1 - \frac{1}{\lambda_{m+1}}$$

olur. Bu ise (3.23) deki sınırın kesin olduğunu gösterir. Benzer şekilde

$$\phi(z) = \left(1+\frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\right)\left[\frac{\kappa_m'(z)}{f'(z)} - 1\right] + 1$$

alındığında

$$\left|\frac{\phi(z)-1}{\phi(z)+1}\right| \leq \frac{\left(1+\frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k|}{2p-2\sum_{k=n+p}^{m} k|a_k| - \left(1-\frac{\lambda_{m+1}}{m+1}\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} k|a_k|} \leq 1$$

elde edilir. Böylece (3.24) de ispatlanmış olur. Dolayısıyla da teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.4. $ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ Sınıfına Ait Fonksiyonların Hadamard Çapımları

Bu bölümde $ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfına ait iki fonksiyonun Hadamard çarpımının yine bu sınıftan olması için gerekli koşular elde edilmiştir. Bu problem üzerine $p-$değerli fonksiyonların bazı alt sınıfları için son yıllarda [22, 27] çalışmaları önem taşımaktadır.

Tanım 3.4.1 (Modifiye-Hadamard Çarpımı): Negatif katsayılı $f_{v}(z)=z^{p}-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_{k,v}|z^{k}$ $(v=1,2)$ fonksiyonları için $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonlarının $(f_1 * f_2)(z)$ Modifiye-Hadamard çarpımı

$$(f_1 * f_2)(z)=z^{p}-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_{k,1}||a_{k,2}|z^{k}=(f_2 * f_1)(z). \tag{3.27}$$

şeklinde tanımlanır.

Modifiye-Hadamard çarpımını kullanarak aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

Teorem 3.4.2: (2.2) ile tanımlanan $f_{v}(z)$ $(v=1,2)$ fonksiyonları $ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$\gamma=p-\frac{(1+B)(B-A)(p-\sigma)^{2}n}{[(1+B)n-(B-A)(p-\sigma)]^{2}\Psi(p+n,m,p,\lambda)-(B-A)^{2}(p-\sigma)^{2}} \tag{3.28}$$

olmak üzere $(f_1 * f_2)(z)\in ST_{\lambda}^{m}(A,B;\gamma,p,n)$ 'dır. Bu sonuç

$$f_{v}(z)=z^{p}-\frac{(B-A)(p-\sigma)}{[(1+B)n-(A-B)(p-\sigma)]\Psi(k,m,p,\lambda)}z^{n+p}\ \left(v=1,2\right) \tag{3.29}$$

fonksiyonu için kesindir.

İspat: Daha önce Schild ve Silverman [54] tarafından kullanılan tekniği uygulayarak,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\gamma)\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\gamma)}|a_{k,1}||a_{k,2}|\leq 1 \tag{3.30}$$

$$(f_v(z) \in ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n);\ v=1,2)$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük γ 'yı bulmamız gerekiyor.

Öncelikle $f_v(z) \in ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n);\ (v=1,2)$ olduğundan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}\left|a_{k,v}\right| \le 1\ \ (v=1,2) \tag{3.31}$$

yazılır. Dolayısıyla Cauchy–Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}\sqrt{\left|a_{k,1}\right|\left|a_{k,2}\right|} \le 1 \tag{3.32}$$

elde edilir. Şimdi (3.30) ve (3.32) eşitsizliklerinden

$$\frac{(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\gamma)\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\gamma)}\sqrt{\left|a_{k,1}\right|\left|a_{k,2}\right|}$$

$$\le \frac{(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)\Psi(k,m,p,\lambda)}{(B-A)(p-\sigma)}\sqrt{\left|a_{k,1}\right|\left|a_{k,2}\right|} \tag{3.33}$$

ya da, denk olan

$$\sqrt{\left|a_{k,1}\right|\left|a_{k,2}\right|} \le \frac{\left[(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)\right](p-\gamma)}{\left[(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\gamma)\right](p-\sigma)} \tag{3.34}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece (3.32) eşitsizliğinden

$$\frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)\right]\Psi(k,m,p,\lambda)}$$

$$\le \frac{\left[(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)\right](p-\gamma)}{\left[(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\gamma)\right](p-\sigma)},\ \ (k \ge n+p) \tag{3.35}$$

ispatlanması yeterli olur.

Dolayısıyla (3.35) eşitsizliğinden

$$\gamma \le p - \frac{(1+B)(B-A)(k-p)(p-\sigma)^2}{[(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)]^2 \Psi(k,m,p,\lambda)-(B-A)^2(p-\sigma)^2}$$

elde edilir. Şimdi, $G(k)$ fonksiyonunu

$$G(k) = p - \frac{(1+B)(B-A)(k-p)(p-\sigma)^2}{[(1+B)(k-p)-(B-A)(p-\sigma)]^2 \Psi(k,m,p,\lambda)-(B-A)^2(p-\sigma)^2}$$

ile tanımlayalım.

Kolayca görebiliriz ki, $G(k)$ $(k \ge p+n)$ artan fonksiyondur. Bu sebeple

$$\gamma = G(p+n) = p - \frac{(1+B)(B-A)(p-\sigma)^2 n}{[(1+B)n-(B-A)(p-\sigma)]^2 \Psi(p+n,m,p,\lambda)-(B-A)^2(p-\sigma)^2}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfındaki parametrelerin özel değerlerinde aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 3.4.3: (2.2) ile tanımlanan $f_v(z)$ $(v=1,2)$ fonksiyonları $ST_{\lambda}^{0}(-1,1;\sigma,p,n)$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$\gamma = p - \frac{(p-\sigma)^2}{2(p-\sigma)+n}$$

olmak üzere $(f_1 * f_2)(z) \in ST_{\lambda}^{0}(-1,1;\gamma,p,n)$ dır. Sonuç kesindir.

Sonuç 3.4.4: (2.2) ile tanımlanan $f_v(z)$ $(v=1,2)$ fonksiyonları $ST_{\lambda}^{0}(-1,1;\sigma,p,1)$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$\gamma = p - \frac{(p-\sigma)^2}{2(p-\sigma)+1}$$

olmak üzere $(f_1 * f_2)(z) \in ST_\lambda^0(-1,1;\gamma,p,1)$ dır. Sonuç kesindir.

Teorem 3.4.5: Kabul edelim ki (2.2) ile tanımlanan $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları sırasıyla $ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ ve $ST_\lambda^m(A,B;\upsilon,p,n)$ sınıfınlarından olsun. Bu durumda

$$\zeta = p - \frac{(1+B)(B-A)(p-\upsilon)n}{[(1+B)n-(B-A)(p-\sigma)][(1+B)n-(B-A)(p-\upsilon)]\Psi(p+n,m,p,\lambda)-(A-B)^2(p-\sigma)(p-\upsilon)}$$

olmak üzere $(f_1 * f_2)(z) \in ST_\lambda^m(A,B;\zeta,p,n)$ dır. Sonuç

$$f_1(z) = z^p - \frac{(B-A)(p-\sigma)]}{[(1+B)n-(A-B)(p-\sigma)]\Psi(p+n,m,p,\lambda)} z^{p+n}$$

ve

$$f_2(z) = z^p - \frac{(B-A)(p-\upsilon)]}{[(1+B)n-(A-B)(p-\upsilon)]\Psi(p+n,m,p,\lambda)} z^{p+n}$$

fonksiyonları için kesindir.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 3.4.2 deki ile aynıdır.

Teorem 3.4.6: (2.2) ile tanımlanan $f_v(z)$ $(v=1,2)$ fonksiyonları $ST_\lambda^m(A,B;\sigma,p,n)$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$h(z) = z^p - \sum_{k=p+n}^{\infty} \left(\left|a_{k,1}\right|^2 + \left|a_{k,2}\right|^2\right) z^k$$

fonksiyonu,

$$\xi = p - \frac{2n(1+B)(B-A)(p-\sigma)^2}{[(1+B)n-(B-A)(p-\sigma)]^2\Psi(p+n,m,p,\lambda)-2(B-A)^2(p-\sigma)^2}$$

olmak üzere $ST_\lambda^m(A,B;\xi,p,n)$ sınıfına aittir. Sonuç, (3.29) ile tanımlanan $f_v(z)$ $(v=1,2)$ fonksiyonları için kesindir.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 3.4.2 deki ile aynıdır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında $p-$değerli analitik fonksiyonların $S_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ ve $ST_{\lambda}^{m}(A,B;\sigma,p,n)$ alt sınıflarına ait fonksiyonlar için komşuluk problemi, kısmi toplamları ve Hadamard çarpım ile ilgili teoremler ve sonuçlar verilmiş ve ispatlanmıştır. Çalışmada bulunan sonuçlar özgün niteliğindedir.

Bu konu üzerine çalışma yapacak araştırmacılar $D_{\lambda,p}^{m}$ operatörü yardımıyla $p-$değerli analitik fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanımlayarak bu sınıflar için tez boyunca bahsi geçen problemleri ele alabilirler.

5. KAYNAKÇA

[1] Acu, M. and Owa S. (2007). Note on a class of starlike functions, RIMS, Kyoto, 1538, 1-10.

[2] Ahmad, M. Z., Ibrahim, Rabha W. and Al-Janaby, Hiba F. (2016). On some interesting properties for a new subclass of multivalent functions, Asian-European Journal of Mathematics, 9(1), 1650027 (16 pages).

[3] Aljarah, A., Aljarrah, M. and Darus, M. (2018). Fractional derivative operator for p-valent functions with negative coefficients, Acta Universitatis Apulensis, 56, 13-26.

[4] Aljarah, A., Aljarrah, M. and Darus, M. (2019). Neighborhoods for subclasses of p-valent analytıc functions defined by a new generalized differential operatör, ROMAI J., 15(1), 1–12.

[5] Aouf, M.K. (1989). On certain subclass of analytic $p-$valent functions II, Math. Japon., 34, 683–691.

[6] Aouf, M.K. (1988). A generalization of multivalent functions with negative coefficients II, Bull. Korean Math. Soc., 25, 221–232.

[7] Aouf, M.K. (1988). Certain classes of $p-$valent functions with negative coefficients. II, Indian J. Pure Appl. Math., 19, 761–767.

[8] Aouf, M.K. and Darwish, H.E. (1994). Basic properties and characterizations of a certain class of analytic functions with negative coefficients II, Utilitas Math., 46, 167–177.

[9] Aouf, M., Hossen, H. and Srivastava, H. M. (2000). Some families of multivalent functions, Computers and Mathematics with Applications, 39 (7-8), 39-48.

[10] Ali, R.M., Ravichandran, V. and Seenivasagan, N. (2007). Coefficient bounds for p valent functions, Applied Mathematics and Computation, 187 (1), 35-46.

[11] Altıntaş, O. (1991). On a subclass of certain starlike functions with negative coefficients, Math. Japon., 36 (3), 489-495.

[12] Altıntaş, O. (2007). Neighborhoods of certain p-valently analytic functions with negative coefficients, Applied Mathematics and Computation, 187 (1), 47-53.

[13] Altıntaş, O. and Owa, S. (1996). Neighborhoods of certain analytic functions with negative coefficients, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 19 (4), 797-800.

[14] Altıntaş, O., Özkan, Ö. and Srivastava, H. M. (2004). Neighborhoods of a certain family of multivalent functions with negative coefficients, Computers and Mathematics with Applications, 47 (10-11), 1667-1672.

[15] Brown, J.E. (1985). Some sharp neighborhoods of univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 287 (2), 475-482.

[16] Cartwright, M. (1935). Some inequalities in the theory of functions, Mathematische Annalen, 111 (1), 98-118.

[17] Cataş, A. (2009). Neighborhoods of a certain class of analytic functions with negative coefficients, Banach J. Math. Anal., 3(1), 111-121.

[18] Chen, M. P., Irmak, H. and Srivastava, H. M. (1997). Some families of multivalently analytic functions with negative coefficients, J. Math. Anal. Appl., 214, 674–690.

[19] Çağlar, M., Deniz, E. and Orhan, H. (2014). New coefficient inequalities for certain subclasses of p-valent analytic functions, Journal of Advances in Applied and Computational Mathematics, 1(2), 40-42.

[20] Çekin, Ö. (2021). P-değerli analitik fonksiyonların yeni bir türev operatörü ve onun uygulamaları, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstütüsü, Yüksek Lisans Tezi, 62 sayfa.

[21] Deniz, E. and Orhan, H. (2010). Some properties of certain subclasses of analytic functions with negative coefficients by using generalized Ruscheweyh derivative operator, Czechoslovak Math. J., 60(3), 699-713.

[22] Deniz, E. and Orhan, H. (2011). Certain subclasses of multivalent defined by new multiplier transformations, Arab. J. Sci. Eng., 36, 1091-1112.

[23] Deniz, E. and Özkan, Y.(2014). Subclasses of analytic functions defined by a new differential operator, Acta Universitatis Apulansis, 40, 85-95.

[24] Deniz, E., Çağlar, M. and Özkan, Y. (2020). Some properties for certain subclasses of analytic functions defined by a general differential operator, Asian-European Journal of Mathematics, 13(1), 2050134 (12 pages).

[25] Deniz, E. Özkan, Y. and Kazımoğlu, S. (2022). Certain sublasses of multivalent functions defined by Deniz-Özkan differential operator, 6th International Conference On Mathematics "An Istanbul Meeting for World Mathematicians" 21-24 June 2022, Istanbul, Turkey.

[26] Duren, P. L. (1983). Univalent functions, 259. Springer, 378 p, New York, USA.

[27] El-Qadeem, A. H. and Mamon, M. A. (2018). Comprehensive subclasses of multivalent functions with negative coefficients defined by using a q-difference operator, Transactions of A. Razmazdze Mathematical Institute, 172, 510-52.

[28] Goodman, A.W. (1948). On some determinants related to p-valent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 63, 175-192.

[29] Goodman, A.W. (1957). Univalent functions and nonanalytic curves, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 598–601.

[30] Goodman, A.W. (1983). Univalent Functions, Mariner Publ. Co., Tampa, Fl, vol.I, 246 p, Florida, USA.

[31] Goodman, A.W. (1983). Univalent Functions, Mariner Publ. Co., Tampa, Fl, vol.II, 311 p, Florida, USA.

[32] Graham, I. R. and Kohr, G. (2003). Geometric function theory in one and higher dimensions, 255. CRC, 530 p, New York, USA.

[33] Hayman, W. K. (1994). Multivalent functions, Cambridge Univ Pr, 263 p, New York, USA.

[34] Kwon, O. S. (2008). Subordination properties of $p-$valent functions defined by generalized Salagean operator, Proc. Int. Symp. On development of geometric function theory and its applications, in Malaysia, pp.180-187.

[35] Liu, J. L. (2007). Further properties of a certain subclass of analytic and multivalent functions, Appl. Math. Comput., 187 (1), 290–294.

[36] Liu, J. L. (2009). Some further properties of certain class of multivalent analytic functions, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 25 (4), 369-376.

[37] Liu, J. L., Srivastava, R. and Xu, Y.H. (2019). Integral transforms and partial sums of certain p-valent starlike functions, RACSAM, 113, 845–859.

[38] Ma, W. C. and Minda, D. (1992). A unified treatment of some special classes of univalent functions, in Proceedings of the Conference on Complex Analysis

(Tianjin, 1992), 157–169, Conf. Proc. Lecture Notes Anal. I Int. Press, Cambridge, MA.

[39] Orhan, H. and Kadıoğlu, E. (2004). Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 20 (2), 135-142.

[40] Orhan, H. and Kamali, M. (2005). Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.(NS), 21 (1), 55-61.

[41] Orhan, H. (2009). Neighborhoods of a certain class of $p-$valent functions with negative coefficients defined by using a differential operator, Math. Ineq. Appl., 12(2), 335-349.

[42] Owa, S. (1978). On the distortion theorems. I, Kyungpook Math. J, 18 (1), 53-59.

[43] Owa, S. (1985). On certain classes of p-valent functions with negative coefficients, Simon Stevin, 59 (4), 385–402.

[44] Owa, S. (1991). Some properties of certain multivalent functions, Applied Mathematics Letters, 4 (5), 79-83.

[45] Owa, S., Saitoh, H. and Nunokawa, M. (1993). Neighborhoods of certain analytic functions, Applied Mathematics Letters, 6 (4), 73-77.

[46] Owa, S. (1983). On certain subclasses of analytic $p-$valent functions, J. Korean Math. Soc., 20 (1), 41-58.

[47] Özkan, Y., Kazımoğlu, S. and Çağlar. M. (2022). Convulation properties of certain sublasses of multivalent functions, 6th Internatıonal Conference On Mathematıcs “An Istanbul Meeting for World Mathematicians” 21-24 June 2022, Istanbul, Turkey.

[48] Ponnusamy, S. and Silverman, H. (2006). Complex variables with applications, Birkhauser, Boston.

[49] Ramachandran, C., Sivasubramanian, S. and Silverman, H. (2007). Certain coefficient bounds for p-valent functions, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 11.

[50] Ruscheweyh, S. (1981). Neighborhoods of univalent functions, Proceedings of the American Mathematical Society, 81 (4), 521-527.

[51] Sağsöz, F. and Kamali, M. (2011). On neighborhoods of two new subclasses of multivalent functions with negative coefficients, Computers and Mathematics with Applications, 62 (4), 1772-1779.

[52] Sălăgean, G. (1983). Subclasses of univalent functions, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 362-372.

[53] Sambo, B. and Meller, G. B. (2019). On certain subclasses of p-valent functions with negative coefficients defined by a generalized differential operator, Open J. Math. Anal.,3(2), 32-41.

[54] Schild, A. and Silverman, H. (1975). Convulation of univalent fonctions with negative coefficients, Ann. Univ. Marriae CuriSklodowska Sect. A, 29, 99-107.

[55] Seoudy, T. M. (2020). Inclusion properties for certain k−uniformly subclasses of p−valent functıons associated with the Liu-Owa operator, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 8(2) 1-9.

[56] Seoudy, T. M. and Shammaky, A. E. (2021). Some properties for certain subclasses of multivalent functions associated with the q−difference linear operator, Afrika Matematika, 32, 773–787.

[57] Shanmugam, T., Owa, S., Ramachandran, C., Sivasubramanian, S. and Nakamura, Y. (2009). On certain coefficient inequalities for multivalent functions, J. Math. Inequal, 3, 31-41.

[58] Shenan, G.M., Salim, T. and Mousa, M.S. (2004). A certain class of multivalent prestarlike functions involving the Srivastava-Saigo-Owa fractional integral operator, Kyungpook Math. J, 44 (3), 353–362.

[59] Silverman, H. (1997). Partial sums of starlike and convex functions, J. Math. Anal. Appl. 209, 221-227.

[60] Sivaprasad Kumar, S., Taneja H. C. and Ravichandran, V. (2006). Classes of multivalent functions defined by Dziok-Srivastava linear operator and multiplier transformations, Kyungpook Math J., 46, 97-109.

[61] Srivastava, H. M. and Patel, J. (2005). Some subclasses of multivalent functions involving a certain linear operator, J. Math. Anal. Appl., 310, 209–228.

[62] Srivastava, H. M. and Aouf, M. K. (1992, 1995). A certain fractional derivative operator and its applications to a new class of analytic and multivalent functions with negative coefficients. I and II, J. Math. Anal. Appl., 171, 1–13; J. Math. Anal. Appl., 192, 673–688.

[63] Srivastava, H. M. and Orhan, H. (2007). Coefficient inequalities and inclusion relations for some families of analytic and multivalent functions, Appl. Math. Lett., 20, 686-691.

[64] Srivastava, H. M. and Owa, S., (Eds.), (1989). Univalent Functions, Fractional Calculus, and their Applications, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York.

[65] Srivastava, H. M., Ahmad, Q. Z., Khan, N., Kıran, S. and Khan, B. (2018). Some applications of higher-order derivatives involving certain subclasses of analytic and multivalent functions, J. Nonlinear Var. Anal. 2(3), 343-353

[66] Uralegaddi, B. A. and Somanatha, C. (1992). Certain classes of univalent functions, Current Topics in Analytic Function Theory, (H. M Srivastava and S. Owa Eds.), pp. 371-374, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

[67] Yan, Z. H., Huo, T., Hai, L. S. and Na, M.L. (2018). Some Basic Properties for Certain Classes of p-valent Analytic Functions Using Differential Operator, Chin. Quart. J. of Math. 33 (2), 132—139.

[68] Walker, J. B. (1990). A note on neighborhoods of analytic functions having positive real part, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 13 (3), 425-429.