

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SONLU ZİNCİR ÜZERİNDEKİ TAM DARALMA DÖNÜŞÜMLERİNİN
BAZI ALT YARIGRUPLARININ CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ**

Özlem GÜNDOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2022**

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

| | |
|---|-----|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| TEŞEKKÜR | iii |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ | iv |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR | 2 |
| 2.1. Yarıgrup, Homomorfizma ve İdeal Kavramları | 2 |
| 2.2. Yarıgrup Rankı ve Monoid Rankı | 3 |
| 2.3. Sonlu Zincir Üzerindeki Tam Daralma Dönüşümlerinin Bazı Alt Yarıgruplarının Rankı... 4 | |
| 2.3.1. OCT_n yarı grubunun rankı | 6 |
| 2.3.2. $ORCT_n$ yarı grubunun rankı | 10 |
| 2.4. Monoton Daralmaların Belirli İdeallerinin Rankları | 16 |
| 2.4.1. $OCT_{n,r}$ idealinin rankı | 20 |
| 2.4.2. $ORCT_{n,r}$ idealinin rankı | 23 |
| 2.4.3. $ODCT_n$ monoidinin rankı | 26 |
| 3. MATERYAL ve YÖNTEM | 29 |
| 3.1. Materyal | 29 |
| 3.2. Yöntem | 29 |
| 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA | 30 |
| 4.1. $ODCT_{n,r}$ İdealinin Rankı | 30 |
| 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER | 32 |
| 5.1. Sonuçlar | 32 |
| 5.2. Öneriler | 32 |
| KAYNAKLAR | 33 |

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SONLU ZİNCİR ÜZERİNDEKİ TAM DARALMA DÖNÜŞÜMLERİNİN BAZI ALT YARIGRUPLARININ CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Özlem GÜNDOĞAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER
Yıl: 2022, Sayfa: 33

Bu tezde, sonlu zincir üzerindeki tam daralma dönüşümlerinin bazı alt yarıgruplarının kombinatorik ve rank özellikleri incelenmiştir. Giriş bölümünde yarıgrup teorisinin kısa tarihçesi ve yarıgruplarda rank bulma probleminin önemi açıklanmıştır. Temel kavramlar olarak yarıgrup ve monoid tanımları, yarıgrup rankı ve monoid rankı, sonlu zincir üzerindeki tam daralma dönüşümleri tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde materyal ve metod açıklanmıştır. Dördüncü bölümde OCT_n , $ORCT_n$, $ODCT_n$ yarıgruplarının bazı cebirsel ve kombinatorik özellikleri incelenmiş olup ayrıca bu yarıgrupların bazı özel alt yarıgruplarının özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde ise konu ile ilgili sonuç ve öneri açıklanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Daralma dönüşümleri, doğuray kümesi, alt yarıgruplar, ideal, rank

ABSTRACT

MSc Thesis

ALGEBRAIC PROPERTIES OF SOME SUBSEMIGROUPS OF FULL CONTRACTION MAPPING ON A FINITE CHAIN

Özlem GÜNDOĞAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Kemal TOKER

Year: 2022, Page: 33

In this thesis, combinatorial and rank properties of some subsemigroups of full contraction transformation semigroups are investigated. In the introduction, a brief history of semigroup theory and the importance of finding rank problem in semigroups are explained. In basic concepts, definition of semigroup, monoid, semigroup rank, monoid rank, contraction transformation on a finite chain are given. In the third chapter, material and method are explained. In the fourth chapter, some algebraic and combinatorial properties of OCT_n , $ORCT_n$ and $ODCT_n$ are given and also the some properties of some special subsemigroups of these semigroups are given. In the last chapter, the results and suggestions are explained.

KEY WORDS: Contraction mappings, generating set, subsemigroups, ideal, rank

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın gerçekleőtirilmesinde, yüksek lisans eğitimim boyunca çalıőtıđım tüm hocalarıma; değerli bilgilerini benimle paylaőan, mesleki tecrübesini ve yardımlarını süreç boyunca esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER'e sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca desteğini, yardımlarımı büyük bir özveriyle bana yaőatan hissettiren, benim bu günlere gelmemde en büyük katkısı, karőtılıksız sevgi ve desteğiyle arkamda olan ve olmaya devam eden en büyük kahramanım canım ablam Halime İŐŐAT' a ve aileme de sonsuz minnet ve őükranlarımı sunarım.

Ve tabiki son olarak da her konuda beni destekleyen, benim fikirlerime değer veren, bana olan güvenini her zaman hissettiğim ve bu süreçte sabırlı davranan kıymetli eőim Abdurrahim GÜNDOĞAN'a sonsuz teőekkürler.



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|------------------------|--|
| \mathbb{Z} | Tamsayılar kümesi |
| \mathbb{Z}^+ | Pozitif tamsayılar kümesi |
| $\langle \mid \rangle$ | Takdim sembolü |
| X_n | 1' den n sayısına kadar olan pozitif tamsayılar kümesi |
| S_n | X_n kümesi üzerindeki simetrik grup |
| T_n | X_n kümesi üzerindeki dönüşümler yarıgrubu |
| Ker | Çekirdek |
| Im | Görüntü |
| $Sing_n$ | Tekil dönüşümlerin alt yarıgrubu |
| $x\alpha$ | x ' in α altındaki görüntüsü |



1. GİRİŞ

Yarıgrupların rankları ve kombinatorik özelliklerini araştırmak son yıllarda oldukça sık çalışılan konulardan birisi olup yarıgrup teorisinde oldukça önemli bir yeri vardır. 2020 yılında tam daralma dönüşümlerde sıra koruyan veya sıra çeviren dönüşümler yarıgrupunun rankları ve bu yarıgrupların bazı özel alt yarıgruplarının rankları araştırılmıştır (Bugay, 2020; Toker, 2020). Benzer şekilde tüm sıra koruyan ve sıra azaltan daralma dönüşümlerinin bazı özel alt yarıgruplarının rankları ve kombinatorik özellikleri henüz araştırılmamış olup bu durum bu tez çalışmasını diğer çalışmalardan farklı kılacaktır.

Bu tezin ikinci bölümünde yarıgruplar ile ilgili temel kavram ve teoremler verilmiştir, ayrıca tam daralma sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu ve sıra koruyan veya tam daralma sıra çeviren dönüşümler yarıgrupunun rankları ve bu yarıgrupların bazı özel alt yarıgruplarının rankları (Toker, 2020) ile ilgili bilgiler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde ise materyal ve yöntem açıklanmıştır. Tezin dördüncü bölümünde tüm sıra koruyan ve sıra azaltan daralma dönüşümlerinin bazı özel alt yarıgruplarının rankları konusu incelenmiştir. Tezin beşinci bölümünde sonuçlar ve öneriler açıklanmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tezde kullanılan temel kavram ve teoremler ile konu ile ilgili olan daha önce yapılan çalışmalar verilmiştir.

2.1. Yarıgrup, Homomorfizma ve İdeal Kavramları

Tanım 2.1.1. $\emptyset \neq A$ bir küme $\theta: A \times A \rightarrow A$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon varsa (A, θ) ikilisine bir grupoid denir. Genellikle “ θ ” yerine “.” yazılabilir. Yani $x, y \in A$ için

$$(x, y)\theta = x.y = xy$$

yazılır (Howie, 1995).

Tanım 2.1.2. (S, \cdot) bir grupoid olsun. $\forall a, b, c \in S$ için

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

oluyorsa (S, \cdot) yapısına bir yarıgrup denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup olsun. Eğer S birim elemana sahip ise yani S birimli bir yarıgrup ise S ye bir monoid denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup ve A da S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S nin A yı içeren S nin en küçük alt yarıgrupuna A tarafından üretilen alt yarıgrup denir. Bu yarıgrup $\langle A \rangle_S$ ile gösterilir. Ayrıca $S = \langle A \rangle_S$ ise A ya S nin bir doğuray kümesi denir. Sonlu bir A kümesi için $S = \langle A \rangle_S$ ise S ye sonlu doğuraylı yarıgrup denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.5. S ve T iki yarıgrup ve $\theta: S \rightarrow T$ bir fonksiyon olsun Eğer $\forall a, b \in S$ için

$$(ab)\theta = (a\theta)(b\theta)$$

ise θ ya bir homomorfizma (yarıgrup homomorfizması) denir. Ayrıca eğer θ birebir ise θ ya monomorfizma, θ örten ise θ ya epimorfizma ve θ hem örten hem de birebir ise θ ya bir izomorfizma denir.

Tanım 2.1.6. S ve T iki yarıgrup olmak üzere S ve T yarıgrupları arasında bir izomorfizma mevcut ise $S \cong T$ yazılır ve bu yarıgruplara izomorfik yarıgruplar denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.7. S ve T iki yarıgrup ve $\theta: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun.

$$Im\theta = \{(a\theta): a \in S\}$$

olarak tanımlanır ve bu kümeye θ nın görüntü kümesi denir.

Ayrıca;

$$Ker\theta = \{(a, b) \in S \times S: a\theta = b\theta\}$$

kümesine θ nın çekirdeği denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup olsun ve I da S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $IS \subseteq I$ ve $SI \subseteq I$ oluyorsa I ya S nin bir ideali denir.

2.2.Yarıgrup Rankı ve Monoid Rankı

Tanım 2.2.1. S bir yarıgrup olsun ve S nin boştan farklı en az bir sonlu altkümesi X için $\langle X \rangle_S = S$ oluyorsa S ye sonlu doğuraylı bir yarıgrup denir. S sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere, $\langle X \rangle_S = S$ özelliğini sağlayan S nin en az eleman sayısına sahip altkümesinin eleman sayısına S nin yarıgrup rankı denir ve bu sayı $rank(S)$ ile gösterilir ve

$$rank(S) = \min\{|X|: \langle X \rangle_S = S\}$$

olarak tanımlıdır.

Tanım 2.2.2. M bir monoid olsun ve A da M nin bir altkümesi olsun. M nin A yı içeren en küçük altmonoidine A tarafından üretilen monoid denir ve $\langle A \rangle_M$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. M bir monoid olsun ve M nin en az sonlu bir altkümesi A için $\langle A \rangle_M = M$ oluyorsa, bu durumda M ye sonlu doğuraylı monoid denir. Ayrıca sonlu doğuraylı bir M monoidinin monoid rankı

$$rank_m(M) = \min\{|A|: \langle A \rangle_M = M\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.4. X boştan farklı bir küme olsun T_X de X üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu olsun. Açıkça ifade etmek gerekirse T_X, X ten X e tüm fonksiyonların kümesi olup bu küme fonksiyonların bileşke işlemi ile bir yarıgruptur. Ayrıca $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu bir küme olsun. Kolaylık olması açısından T_{X_n} yerine T_n ifadesi kullanılır.

Teorem 2.2.1. Her $n \geq 3$ için

$$\text{rank}(T_n) = \text{rank}_M(T_n) = 3$$

olur (Howie, 1995).

Tanım 2.2.5. X_n üzerindeki sıra azaltan dönüşümler D_n ile gösterilir. D_n, T_n in bir altarıgrubu olup

$$D_n = \{\alpha \in T_n : \forall x \in X_n \text{ için } x\alpha \leq x\}$$

olarak tanımlanır.

2.3. Sonlu Zincir Üzerindeki Tam Daralma Dönüşümlerinin Bazı Alt Yarıgruplarının Rankları

Pozitif tamsayılar kümesini \mathbb{Z}^+ ile gösterelim. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun ve T_n ve S_n , sırasıyla X_n üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu ve simetrik grup olsun. Ayrıca X_n üzerindeki tüm sıra koruyan tam dönüşümlerin yarıgrubu O_n ile gösterilir ve

$$O_n = \{\alpha \in T_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha\}$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir $\alpha \in T_n$ için, eğer tüm $x, y \in X_n$ için $|x\alpha - y\alpha| \leq |x - y|$ oluyor ise α , X_n üzerinde tam daralma dönüşümü olarak adlandırılır. X_n üzerindeki tüm tam daralma dönüşümlerinin kümesi CT_n ile gösterilir ve

$$CT_n = \{\alpha \in T_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } |x\alpha - y\alpha| \leq |x - y|\}$$

olarak tanımlanır. X_n üzerindeki tüm sıra koruyan tam daralma dönüşümlerinin kümesi OCT_n ile gösterilir ve $OCT_n = O_n \cap CT_n$ olarak tanımlanır, bu yarıgruplar açıkça T_n nin alt yarıgruplarıdır. X_n üzerindeki tüm sıra koruyan veya sırayı tersine çeviren dönüşümlerin yarıgrubu OR_n ile gösterilir

$$OR_n = \{ \alpha \in T_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha \} \cup \{ \alpha \in T_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \Rightarrow x\alpha \geq y\alpha \}$$

olarak tanımlanır ve $ORCT_n = OR_n \cap CT_n$ olarak tanımlanır, yine bu yarıgruplarda açıkça T_n nin bir alt yarıgruplarıdır. Adeshola ve Umar 2018 yılında OCT_n ve $ORCT_n$ üzerindeki bazı cebirsel ve kombinatorik özellikleri araştırmışlardır.

Bir yarı grubun çeşitli doğuray kümeleri ve rankları üzerinde birçok çalışmalar vardır. Şimdi bazı çalışmalardan örnekler verelim. Tüm tekil dönüşümlerin alt yarı grubu $Sing_n = T_n \setminus S_n$ olarak tanımlanır ve $rank(Sing_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ olur (Gomes ve Howie, 1987). Her $n \geq 2$ için $rank_m(O_n) = n$ olur (Gomes and Howie, 1992). Herhangi $\emptyset \neq Y \subseteq X_n$ için

$$T_{(X_n, Y)} = \{ \alpha \in T_n : Y\alpha = Y \}$$

olarak tanımlanırsa açıkça $T_{(X_n, Y)}$ yapısı T_n nin bir alt yarı grubu olur. Ayrıca $T_{(n, m)} = \{ \alpha \in T_n : X_m\alpha = X_m \}$ olarak tanımlanırsa $T_{(X_n, Y)} \cong T_{(n, m)}$ olur ve

$$rank(T_{(n, m)}) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } (n, m) = (2, 1) \text{ veya } (3, 2) \\ 3, & \text{eğer } (n, m) = (3, 1) \text{ veya } 4 \leq n \text{ ve } m = n - 1 \\ 4, & \text{eğer } 4 \leq n \text{ ve } 1 \leq m \leq n - 2 \end{cases}$$

olur (Toker ve Ayık, 2018). $\forall \alpha, \beta \in T_n$ için $Ker(\alpha) \subseteq Ker(\alpha\beta)$ ve $Im(\alpha\beta) \subseteq Im(\beta)$ olduğu bilinmektedir (Ganyushkin ve Mazorchuk, 2009). Şimdi OCT_n ve $ORCT_n$ yarı gruplarını inceleyeceğiz.

Tanım 2.3.1. A boştan farklı X_n in bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için $x \leq z \leq y \Rightarrow z \in A$ oluyorsa A kümesine X_n in konveks alt kümesi adı verilir.

Eğer $\alpha \in T_n$ bir daralma dönüşümü ise $Im(\alpha)$ X_n in bir konveks alt kümesidir (Garba ve ark., 2017). Dolayısıyla eğer $\alpha \in OCT_n$ veya $\alpha \in ORCT_n$ ise o zaman $Im(\alpha)$ kümesi X_n nin konveks bir alt kümesi olup $1 \leq k \leq m \leq n$ için $Im(\alpha) = \{k, k + 1, \dots, m\}$ biçimindedir. Eğer $\alpha \in OCT_n$ ise α sıra koruduğundan her bir $Ker(\alpha)$ denklik sınıfı da X_n in konveks bir alt kümesi olduğu açıktır ve eğer $\alpha \in ORCT_n$ ise α sıra koruyan ya da sıra çeviren dönüşüm olup bu durumda her bir $Ker(\alpha)$ denklik sınıfı da yine X_n in bir konveks alt kümesi olduğu kolayca görülür.

Green ve yıldızlı Green denklik bağıntıları ile ilgili tanımlara ilgili kaynaktan bakılabilir (Howie, 1995). $CT_n \setminus S_n$ ve $OCT_n \setminus S_n$ yarıgruplarında aşağıdaki teorem ispatlanmıştır (Garba ve ark., 2017).

Teorem 2.3.1. $S \in \{CT_n \setminus S_n, OCT_n \setminus S_n\}$ ve $\alpha, \beta \in S$ olsun.

- (i) $(\alpha, \beta) \in L^*(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $Im(\alpha) = Im(\beta)$ olmasıdır,
- (ii) $(\alpha, \beta) \in R^*(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $Ker(\alpha) = Ker(\beta)$ olmasıdır,
- (iii) $(\alpha, \beta) \in H^*(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $Im(\alpha) = Im(\beta)$ ve $Ker(\alpha) = Ker(\beta)$ olmasıdır,
- (iv) $(\alpha, \beta) \in D^*(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $|Im(\alpha)| = |Im(\beta)|$ olmasıdır

(Garba ve ark., 2017).

2.3.1. OCT_n yarı grubunun rankı

Bu bölümde, OCT_n nin minimal bir doğuray kümesini bulacağız ve böylece OCT_n yarı grubunun rankını elde edeceğiz. $OCT_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ olup böylece $rank(OCT_1) = 1$ olduğu açıktır, ayrıca

$$OCT_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

olur. Bu durumda $\forall \{\alpha, \beta\} \in OCT_2$ için $\langle \alpha, \beta \rangle = \{\alpha, \beta\}$ olduğuna dikkat edelim ve böylece $rank(OCT_2) = 3$ olur. Bunun için bu bölümde $n \geq 3$ durumları göz önüne alınmıştır. $1 \leq k \leq n$ için

$$D_k^* = \{\alpha \in OCT_n : |Im(\alpha)| = k\}$$

olarak tanımlansın, bu durumda $D_n^* = \left\{ \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \right\}$ olur.

Lemma 2.3.1.1. Her bir $1 \leq r \leq n - 2$ için eğer $\alpha \in D_r^*$ ise $\alpha \in \langle D_{r+1}^* \rangle$ olur (Toker, 2020).

İspat. $1 \leq r \leq n - 2$ için $\alpha \in D_r^*$ olsun. Bu durumda X_n nin bir $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ parçalanışı vardır öyleki $1 \leq k \leq n - r + 1$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_r \\ k & k+1 & \dots & k-1+i & \dots & k-1+r \end{pmatrix}$$

olur, $r \leq n - 2$ olduğundan en az bir $1 \leq i \leq r$ için $|A_i| \geq 2$ olduğu açıktır. Genelliği kaybetmeksizin $m \geq 2$ için $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ve x_i de A_i de ki maksimum eleman olsun. Eğer $k > 1$ ve $k + r - 1 < n$ ise

$i = 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_r \\ k & k+1 & k+2 & \dots & k+r \end{pmatrix},$$

$i = r$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} & A_r \setminus \{x_r\} & \{x_r\} \\ k & k+1 & \dots & k+r-2 & k+r-1 & k+r \end{pmatrix},$$

$2 \leq i \leq r - 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_r \\ k & \dots & k+i-2 & k+i-1 & k+i & k+i+1 & \dots & k+r \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca γ dönüşümü $1 \leq i \leq r$ için

$$j\gamma = \begin{cases} k-1; & 1 \leq j \leq k-1 \\ j; & k \leq j \leq k+i-1 \\ j-1; & k+i \leq j \leq k+r \\ k+r-1; & j > k+r, \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\beta, \gamma \in D_{r+1}^*$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olur.

Eğer $k = 1$ ise

$i = 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r+1 \end{pmatrix},$$

$i = r$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} & A_r \setminus \{x_r\} & \{x_r\} \\ 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 \end{pmatrix}$$

$2 \leq i \leq r - 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_r \\ 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & r+1 \end{pmatrix},$$

olsun. Ayrıca γ dönüşümü $1 \leq i \leq r$ için

$$j\gamma = \begin{cases} j; & j \leq i \\ j-1; & i+1 \leq j \leq r+1 \\ r+1; & r+2 \leq j \leq n, \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Benzer şekilde $\beta, \gamma \in D_{r+1}^*$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olur.

Eğer $k + r - 1 = n$ ise

$i = 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_r \\ k-1 & k & k+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

$i = r$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} & A_r \setminus \{x_r\} & \{x_r\} \\ k-1 & k & \dots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix},$$

$2 \leq i \leq r-1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_r \\ k-1 & \dots & k+i-3 & k+i-2 & k+i-1 & k+i & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca γ dönüşümü $1 \leq i \leq r$ için

$$j\gamma = \begin{cases} k-1; & 1 \leq j \leq k-2 \\ j+1; & k-1 \leq j \leq k+i-2 \\ j; & k+i-1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\beta, \gamma \in D_{r+1}^*$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olur.

Sonuç 2.3.1.1. Herbir $1 \leq i \leq n-1$ için $D_i^* \subseteq \langle D_{n-1}^* \rangle$ olur (Toker, 2020).

$1 \leq r < n$ için $OCT_{(n,r)} = \{\alpha \in OCT_n : |Im(\alpha)| \leq r\}$ olarak tanımlanırsa $OCT_{(n,r)}$ yapısının OCT_n nin bir ideali olduğu açıktır. Böylece

$$\langle D_{n-1}^* \rangle = OCT_{(n,n-1)} = OCT_n \setminus S_n = OCT_n \setminus \{\epsilon\}$$

olur.

Tanımdan dolayı eğer $\alpha \in D_{n-1}^*$ ise bu durumda $Im(\alpha) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ ya da $Im(\alpha) = \{2, 3, \dots, n\}$ olur. Ayrıca α nın çekirdek sınıfları X_n nin konveks alt kümeleri olduğundan $1 \leq i \leq n-1$ için

$$Ker(\alpha) = \bigcup_{j=1}^n \{(j, j)\} \cup \{(i+1, i), (i, i+1)\}$$

biçimindedir. Bu durumda, $\bigcup_{j=1}^n \{(j, j)\} \cup \{(i+1, i), (i, i+1)\}$ gösterimi yerine $Ker(\alpha)$ kümesini kolaylık olması amacıyla $[i, i+1]$ ile gösterelim, tezde bu gösterimi kullanacağız.

Böylece $n \geq 3$ için $|D_{n-1}^*| = 2(n-1)$ ve $\text{rank}(OCT_{(n,n-1)}) \leq 2n-2$ olduğu Sonuç 2.3.1.1 den açıktır. $OCT_{(n,n-2)}$, $n \geq 3$ için $OCT_{(n,n-1)}$ nin bir ideali olduğundan, $\alpha \in D_{n-1}^*$ olmak üzere α elemanı sadece D_{n-1}^* in elemanlarının bir çarpımı olarak yazılabilir. Ayrıca, $n \geq 3$ için D_{n-1}^* de $n-1$ tane R^* sınıfları (kernel/çekirdek sınıfları) vardır böylece $\text{rank}(OCT_{(n,n-1)}) \geq n-1$ olur.

$\alpha_{i,i+1} \in D_{n-1}^*$ ile $\text{Im}(\alpha_{i,i+1}) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ ve $\text{Ker}(\alpha_{i,i+1}) = [i, i+1]$ olan elemanı ifade edelim, böylece $1 \leq i \leq n-2$ için

$$\alpha_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ 1 & \dots & i & i & i+1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$\alpha_{n-1,n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}$$

olur. $\beta_{i,i+1} \in D_{n-1}^*$ ile $\text{Im}(\beta_{i,i+1}) = \{2, 3, \dots, n\}$ ve $\text{Ker}(\beta_{i,i+1}) = [i, i+1]$ olan elemanı ifade edelim, bu durumda

$$\beta_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix},$$

olup, $2 \leq i \leq n-1$ için

$$\beta_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & i+1 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olur.

Teorem 2.3.1.1. $n \geq 3$ için $\text{rank}(OCT_{(n,n-1)}) = n-1$ olur (Toker, 2020).

İspat. $n \geq 3$ ve $W = \{\alpha_{1,2}\} \cup \{\beta_{i,i+1} : 2 \leq i \leq n-1\}$ olsun. $\alpha_{1,2}, \beta_{i,i+1}$ ($2 \leq i \leq n-1$) yukarıda tanımlanan elemanlardır. $|W| = n-1$ olduğu açıktır, $\text{rank}(OCT_{(n,n-1)}) \geq n-1$ olduğundan dolayı $\text{rank}(OCT_{(n,n-1)}) = n-1$ olduğunu ispat için W nin $OCT_{(n,n-1)}$ nin bir doğuray kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. Çarpmayı kullanarak $\alpha_{1,2}\beta_{n-1,n} = \beta_{1,2}$ ve $\beta_{i,i+1}\alpha_{1,2} = \alpha_{i,i+1}$ ($2 \leq i \leq n-1$) olduğu kolayca görülür. Böylece Sonuç 2.3.1.1 den $D_{n-1}^* \subseteq \langle W \rangle$ ve böylece $\langle W \rangle = OCT_{(n,n-1)}$ olur. Bu nedenle $n \geq 3$ için $\text{rank}(OCT_{(n,n-1)}) = n-1$ olur

Teorem 2.3.1.2. $\text{rank}(OCT_n) = \begin{cases} 3, & n = 2 \\ n, & n = 1 \text{ veya } n \geq 3 \end{cases}$

olur (Toker, 2020).

İspat. $rank(OCT_1) = 1$ ve $rank(OCT_2) = 3$ olduğunu hatırlayalım. $n \geq 3$ için, $OCT_n = OCT_{(n,n-1)} \cup \{\epsilon\}$ olduğu açıktır. ϵ , OCT_n üzerindeki birim dönüşümdür. OCT_n bir monoid ve $OCT_{(n,n-1)}$ sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve $\forall \alpha, \beta \in OCT_{(n,n-1)}$ için $\alpha\beta \neq \epsilon$ olup $n \geq 3$ için $rank(OCT_n) = rank(OCT_{(n,n-1)}) + 1 = n$ olur.

2.3.2. $ORCT_n$ yarı grubunun rankı

Bu bölümde $ORCT_n$ için bir doğuray kümesi ve bu yarı grubun rankını bulacağız.

$ORCT_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ve $rank(ORCT_1) = 1$ olduğu açıktır. Aynı zamanda

$$ORCT_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$ORCT_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

olup ayrıca $ORCT_2$ değişmeli bir yarıgrup olmadığından $rank(ORCT_2) = 2$ olur.

Şimdi durumu $n \geq 3$ için göz önüne alalım. $1 \leq k \leq n$ için

$$F_k = \{ \alpha \in ORCT_n : |Im(\alpha)| = k \}$$

olarak tanımlansın.

Lemma 2.3.2.1. $1 \leq r \leq n - 2$ için $\alpha \in F_r$ ise $\alpha \in \langle F_{r+1} \rangle$ olur (Toker, 2020).

İspat. $1 \leq r \leq n - 2$ olsun. Eğer $\alpha \in OCT_n \cap F_r$ ise Sonuç 2.3.1.1 den ispat açıktır. $\alpha \in ORCT_n \setminus OCT_n$ ve $\alpha \in F_r$ olsun. Bu durumda α bir sıra çeviren tam bir daralma dönüşümüdür ve bu nedenle X_n de bir $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ parçalanışı vardır ve öyle $r \leq k \leq n$ vardır ki

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_r \\ k & k-1 & \dots & k-i+1 & \dots & k-r+1 \end{pmatrix}$$

olur. $r \leq n - 2$ olduğundan en az bir $1 \leq i \leq r$ için $|A_i| \geq 2$ olur. Genelliği kaybetmeksizin $m \geq 2$ için $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ve x_i de A_i içindeki maksimum eleman olsun. Eğer $k < n$ ve $k - r \geq 1$ ise

$i = 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_r \\ k & k-1 & k-2 & \dots & k-r \end{pmatrix},$$

$i = r$ için,

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} & A_r \setminus \{x_r\} & \{x_r\} \\ k & k-1 & \dots & k-r+2 & k-r+1 & k-r \end{pmatrix},$$

$2 \leq i \leq r-1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_r \\ k & k-1 & \dots & k-i+2 & k-i+1 & k-i & k-i-1 & \dots & k-r \end{pmatrix},$$

olsun. Ayrıca γ dönüşümü

$$j\gamma = \begin{cases} k-r+1; & 1 \leq j \leq k-r \\ j+1; & k-r+1 \leq j \leq k-i \\ j; & k-i+1 \leq j \leq k \\ k+1; & k+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\beta, \gamma \in F_{r+1}$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olur.

Eğer $k = n$ ise

$i = 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_r \\ n & n-1 & n-2 & \dots & n-r \end{pmatrix},$$

$i = r$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} & A_r \setminus \{x_r\} & \{x_r\} \\ n & n-1 & \dots & n-r+2 & n-r+1 & n-r \end{pmatrix},$$

$2 \leq i \leq r-1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_r \\ n & n-1 & \dots & n-i+2 & n-i+1 & n-i & n-i-1 & \dots & n-r \end{pmatrix}$$

olsun. Ayrıca γ dönüşümü

$$j\gamma = \begin{cases} n-r; & 1 \leq j \leq n-r-1 \\ j+1; & n-r \leq j \leq n-i \\ j; & n-i+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

olarak tanımlansın, bu durumda $\beta, \gamma \in F_{r+1}$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olur.

Eğer $k = r$ ise

$i = 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_r \\ r+1 & r & r-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$i = r$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} & A_r \setminus \{x_r\} & \{x_r\} \\ r+1 & r & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 \leq i \leq r-1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_r \\ r+1 & r & \dots & r-i+3 & r-i+2 & r-i+1 & r-i & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. Ayrıca γ dönüşümü

$$j\gamma = \begin{cases} j; & 1 \leq j \leq r - i + 1 \\ j - 1; & r - i + 2 \leq j \leq r + 1 \\ r + 1; & r + 2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\beta, \gamma \in F_{r+1}$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olur.

Sonuç 2.3.2.1. $n \geq 3$ olmak üzere $1 \leq i \leq n - 1$ için $\alpha \in F_i$ ise $\alpha \in \langle F_{n-1} \rangle$ olur (Toker, 2020).

$1 \leq r < n$ için $ORCT_{(n,r)} = \{\alpha \in ORCT_n : |Im(\alpha)| \leq r\}$ olsun. $ORCT_{(n,r)}$, $ORCT_n$ nin bir ideali olduğu açıktır. Üstelik

$$F_n = \left\{ \epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

olur ve ϵ , $ORCT_n$ nin birim elemanıdır ve $\theta^2 = \epsilon$ olur, ayrıca

$$\langle F_{n-1} \rangle = ORCT_{(n,n-1)} = ORCT_n \setminus S_n = ORCT_n \setminus \{\epsilon, \theta\}$$

olur.

Sonuç 2.3.2.2. $n \geq 3$ için $ORCT_n = \langle F_{n-1} \cup \{\theta\} \rangle$ olur (Toker, 2020).

Eğer $\alpha \in F_{n-1}$ ise $Im(\alpha)$ kümesi X_n nin konveks bir alt kümesi olduğundan $Im(\alpha) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ veya $Im(\alpha) = \{2, 3, \dots, n\}$ olur. Ayrıca F_{n-1} içerisinde $n-1$ farklı çekirdek sınıfı mevcut olup her bir çekirdek sınıfında 4 eleman vardır. Böylece $n \geq 3$ için $|F_{n-1}| = 4(n-1)$ olur.

$\alpha_{i,i+1}$ ve $\beta_{i,i+1}$ her bir $1 \leq i \leq n-1$ için daha önce tanımlanan sıra koruyan daralma dönüşümleri olsun. Ayrıca $\lambda_{i,i+1} \in F_{n-1}$ sıra çeviren tam daralma dönüşümü öyle ki $Im(\lambda_{i,i+1}) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ ve $Ker(\lambda) = [i, i+1]$ olsun, bu durumda $1 \leq i \leq n-2$ için

$$\lambda_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ n-1 & \dots & n-i & n-i & n-i-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\lambda_{n-1,n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Ayrıca, $\mu_{i,i+1} \in F_{n-1}$ sıra çeviren tam daralma dönüşümü $Im(\mu_{i,i+1}) = \{2, 3, \dots, n\}$ ve $Ker(\mu_{i,i+1}) = [i, i+1]$ olsun, bu durumda

$$\mu_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

ve $2 \leq i \leq n-1$ için

$$\mu_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & n-i+1 & n-i+1 & \dots & 2 \end{pmatrix},$$

olur. Ayrıca $F_{n-1} = \{\alpha_{i,i+1}, \beta_{i,i+1}, \lambda_{i,i+1}, \mu_{i,i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ olur.

Lemma 2.3.2.2. $n \geq 3$ için ve $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere,

(i) $\alpha_{i,i+1}\theta = \mu_{i,i+1}$

(ii) $\beta_{i,i+1}\theta = \lambda_{i,i+1}$

(iii) $\lambda_{i,i+1}\theta = \beta_{i,i+1}$

(iv) $\mu_{i,i+1}\theta = \alpha_{i,i+1}$

olur (Toker, 2020).

İspat. (i) $(\alpha_{i,i+1}\theta)1 = \alpha_{i,i+1}n = n-1$ ve $(\alpha_{i,i+1}\theta)n = \alpha_{i,i+1}1 = 1$ olur, böylece $Im(\alpha_{i,i+1}\theta) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ ve açıkça $\alpha_{i,i+1}\theta$ sıra koruyan tam daralma dönüşümüdür. Ayrıca

$$(\alpha_{i,i+1}\theta)(i) = \alpha_{i,i+1}(i-1) = \alpha_{i,i+1}i = (\alpha_{i,i+1}\theta)(i+1)$$

olur böylece $Ker(\alpha_{i,i+1}\theta) = [i, i+1]$ olup $\alpha_{i,i+1}\theta = \mu_{i,i+1}$ olduğu görülür.

(ii), (iii) ve (iv) nin ispatları benzer şekilde gösterilebilir.

Dönüşümlerin bileşkesi işlemi yardımıyla hepsi kolayca gösterilebilir.

Lemma 2.3.2.3. $n \geq 3$ için ve $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere,

(i) $\theta\alpha_{i,i+1} = \lambda_{n-i, n-i+1}$

(ii) $\theta\beta_{i,i+1} = \mu_{n-i, n-i+1}$

(iii) $\theta\lambda_{i,i+1} = \alpha_{n-i, n-i+1}$

(iv) $\theta\mu_{i,i+1} = \beta_{n-i, n-i+1}$

olur (Toker, 2020).

İspat. (i) $1(\theta\alpha_{i,i+1}) = n\alpha_{i,i+1} = n - 1$ ve $n(\theta\alpha_{i,i+1}) = 1\alpha_{i,i+1} = 1$ olur, böylece $Im(\theta\alpha_{i,i+1}) = \{1, 2, \dots, n - 1\}$ ve açıkça $\theta\alpha_{i,i+1}$ sıra koruyan tam daralma dönüşümüdür. Ayrıca

$$(n - i)(\theta\alpha_{i,i+1}) = (i + 1)\alpha_{i,i+1} = i\alpha_{i,i+1} = (n - i + 1)(\theta\alpha_{i,i+1})$$

olur böylece $Ker(\theta\alpha_{i,i+1}) = [n - i, n - i + 1]$ olup $\theta\alpha_{i,i+1} = \lambda_{n-i, n-i+1}$ olduğu görülür.

(ii), (iii) and (iv) nin ispatları benzer şekilde gösterilebilir.

Lemma 2.3.2.4 $n \geq 3$ için ve $1 \leq i \leq n - 1$ olmak üzere $\alpha_{i,i+1}\beta_{n-1, n} = \beta_{i,i+1}$ olur (Toker, 2020).

İspat. Dönüşümlerin bileşkesi işlemi yardımıyla kolayca gösterilebilir.

Önerme 2.3.2.1. $n \geq 3$ ve A kümesi $ORCT_n$ için bir doğuray kümesi olsun. n bir tek sayı ise A kümesi F_{n-1} den en az $\frac{n-1}{2}$ eleman içermelidir ve n çift sayı ise A kümesi F_{n-1} den en az $\frac{n}{2}$ eleman içermelidir (Toker, 2020).

İspat. $n \geq 3$ ve A kümesi $ORCT_n$ nin bir doğuray kümesi olsun. Bilindiği üzere $F_n = \{\epsilon, \theta\}$ ve ϵ da $ORCT_n$ nin birim elemanı ve $\theta^2 = \epsilon$ olur. Ayrıca $ORCT_{(n, n-2)}$ kümesi $ORCT_n$ nin bir ideali olup F_{n-1} de $n - 1$ tane farklı çekirdek sınıfı vardır. $\alpha \in F_{n-1}$ ise $Ker(\alpha) = [k, k + 1]$ olacak şekilde $1 \leq k \leq n - 1$ vardır. $m \in \mathbb{Z}^+$ olsun ve varsayalım ki her bir $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in ORCT_n$ olmak üzere $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$ olsun. $ORCT_{(n, n-2)}$ kümesi $ORCT_n$ nin ideali olduğundan $1 \leq i \leq m$ için $\forall \alpha_i \in F_{n-1} \cup F_n$ olur. Eğer $\alpha_1 \in F_{n-1}$ ise $Ker(\alpha_1) = Ker(\alpha)$ olduğu açıktır. Eğer $\alpha_1 \in F_n$ ise ϵ birim eleman olduğundan bu durumda $\alpha_1 = \theta$ olduğunu varsayabiliriz. Ayrıca $\theta^2 = \epsilon$ olduğundan $\alpha_2 \in F_{n-1}$ olduğunu varsayabiliriz, böylece Lemma 2.3.2.3 den $Ker(\alpha_2) = [n - k, n - k + 1]$ olur. Böylece n bir tek sayı ise A kümesi F_{n-1} de en az $\frac{n-1}{2}$ eleman içermelidir ve eğer n bir çift sayı ise A kümesi F_{n-1} de en az $\frac{n}{2}$ eleman içermelidir.

$n \geq 3$ için $F_n = \{\epsilon, \theta\}$ yapısı $\{\theta\}$ veya $\{\theta, \epsilon\}$ tarafından üretilir. Ayrıca $ORCT_n \setminus F_n = ORCT_{(n, n-1)}$ kümesi $ORCT_n$ nin bir idealidir. Bu nedenle $ORCT_n$ nin her

doğuray kümesi θ elemanını içermelidir. Böylece, n bir tek sayı ise $\text{rank}(ORCT_n) \geq \frac{n+1}{2}$ ve n bir çift sayı ise $\text{rank}(ORCT_n) \geq \frac{n+2}{2}$ olur.

Teorem 2.3.2.1. $n \geq 1$ için

$$\text{rank}(ORCT_n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}; & n \text{ tek sayı} \\ \frac{n+2}{2}; & n \text{ çift sayı} \end{cases}$$

olur (Toker, 2020).

İspat. $n = 1$ veya $n = 2$ ise sonuç açıktır. $n \geq 3$ ve n tek sayı olsun. Böylece $\text{rank}(ORCT_n) \geq \frac{n+1}{2}$ olur, ayrıca $W = \{\theta\} \cup \{\alpha_{i,i+1} : 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$ olsun. Bu durumda $|W| = \frac{n+1}{2}$ olduğu açıktır. Bu nedenle W kümesinin $ORCT_n$ nin bir doğuray kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ için $\alpha_{k,k+1} \in W$ olur, ayrıca $\alpha_{1,2}\theta = \mu_{1,2}$ ve $\theta\mu_{1,2} = \beta_{n-1,n}$ olur. Ayrıca bileşke işleminin tanımıyla $\alpha_{k,k+1}\beta_{n-1,n} = \beta_{k,k+1}$, $\beta_{k,k+1}\theta = \lambda_{k,k+1}$ ve $\alpha_{k,k+1}\theta = \mu_{k,k+1}$ eşitlikleri elde edilir. Böylece $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ise

$$\{\alpha_{k,k+1}, \beta_{k,k+1}, \lambda_{k,k+1}, \mu_{k,k+1}\} \subseteq \langle W \rangle$$

olur. Şimdi $\frac{n-1}{2} < k \leq n-1$ ve $i = n-k$ olsun. $\alpha_{i,i+1} \in W$ olduğu açıktır. Ayrıca $\theta\alpha_{i,i+1} = \lambda_{n-i,n-i+1} = \lambda_{k,k+1}$ ve $\lambda_{k,k+1}\theta = \beta_{k,k+1}$ olur. $i \leq \frac{n-1}{2}$ olduğundan $\lambda_{i,i+1} \in \langle W \rangle$ olup $\theta\lambda_{i,i+1} = \alpha_{n-i,n-i+1} = \alpha_{k,k+1}$ ve $\alpha_{k,k+1}\theta = \mu_{k,k+1}$ eşitlikleri elde edilir. Böylelikle

$$\{\alpha_{k,k+1}, \beta_{k,k+1}, \lambda_{k,k+1}, \mu_{k,k+1}\} \subseteq \langle W \rangle$$

olur. Böylece Sonuç 2.3.2.2 den W kümesi $ORCT_n$ nin doğuray kümesidir. Sonuç olarak n tek sayı ise $\text{rank}(ORCT_n) = \frac{n+1}{2}$ olur. n çift sayı ise benzer şekilde gösterilir ki $W = \{\theta\} \cup \{\alpha_{i,i+1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$ kümesi $ORCT_n$ nin bir doğuray kümesidir ve sonuç olarak $\text{rank}(ORCT_n) = \frac{n+2}{2}$ olur.

2.4. Monoton Daralmaların Belirli İdeallerinin Rankları

Bu bölümde, $1 \leq r \leq n - 1$ için $OCT_{n,r} = \{\alpha \in OCT_n : |Im(\alpha)| \leq r\}$ ve $ORCT_{n,r} = \{\alpha \in ORCT_n : |Im(\alpha)| \leq r\}$ olarak tanımlanan yarıgrupların ranklarının hesaplanması ile ilgili bilgi verilmiştir. Bunlar sırasıyla OCT_n ve $ORCT_n$ yarıgruplarının idealleridir.

$\alpha \in T_n$ olmak üzere $\forall x, y \in X_n$ için $x \leq y$ olduğunda $x\alpha \leq y\alpha$ oluyorsa α dönüşümüne bir izoton eleman denir, ayrıca $\forall x, y \in X_n$ için $x \leq y$ olduğunda $x\alpha \geq y\alpha$ oluyorsa α dönüşümüne bir antiton eleman denir. İki tane izoton elemanın çarpımı izoton olur, iki tane antiton elemanın çarpımı izoton olur, ayrıca bir izoton ve bir antiton elemanın çarpımı (sırası önemsiz olmak üzere) antiton olur.

Herhangi bir $\alpha \in T_n$ için α nın görüntü kümesindeki eleman sayısı

$$h(\alpha) = |Im(\alpha)|$$

olup bu sayıya α elemanının yüksekliği denir. Ayrıca $Ker(\alpha)$ nın X_n üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu bilinmektedir ve bundan dolayı

$$X_n / ker(\alpha) = \{y\alpha^{-1} : y \in Im(\alpha)\}$$

kümesi X_n in bir parçalanışı olur ve bu parçalanış $kp(\alpha)$ ile gösterilir. Böylece $\forall \alpha, \beta \in T_n$ için $kp(\alpha) = kp(\beta)$ olması için gerek ve yeter koşul $Ker(\alpha) = Ker(\beta)$ olmasıdır.

$P = \{I_1, \dots, I_p\}$ herhangi bir $1 \leq p \leq n$ için X_n in bir parçalanışı olsun. $1 \leq i, j \leq p$ için eğer $\forall x \in I_i$ ve $\forall y \in I_j$ için $x < y$ oluyorsa $I_i < I_j$ yazılır. Genelliği kaybetmeden, eğer $P = \{I_1 < \dots < I_p\}$ ise o zaman P ye sıralı parçalanış denir. Ayrıca, $\{a_1, \dots, a_p\}$ kümesi X_n nin bir alt kümesi olmak üzere eğer her $1 \leq i \leq p$ için $|\{a_1, \dots, a_p\} \cap I_i| = 1$ ise $\{a_1, \dots, a_p\}$ kümesine P nin bir temsil kümesi denir. $h(\alpha) = p$ ($1 \leq p \leq n$) ve $\alpha \in ORCT_n = OR_n \cap CT_n$ olsun. $\alpha \in OR_n$ olduğundan α nın çekirdek sınıflarının X_n nin konveks sıralı alt kümeleri olduğu iyi bilinmektedir (Garba, 1994), yani $x_1, \dots, x_{p-1} \in X_n$ vardır öyle ki α nın çekirdek sınıfları $1 \leq i \leq p$ için $I_i = \{x_{i-1} + 1, \dots, x_i\}$ olup burada $x_0 = 0$ ve $x_p = n$ ve

dolayısıyla $\alpha \in OR_n$ nin çekirdek parçalanışı $kp(\alpha) = P = \{I_1 < \dots < I_p\}$ olur. Ayrıca, $\alpha \in CT_n$ olduğundan $Im(\alpha)$ nın X_n in konveks bir alt kümesi olduğu da iyi bilinmektedir (Adeshola ve Umar, 2018), yani $Im(\alpha) = \{a, a + 1, \dots, a + p - 1\} = A$ olacak şekilde bir $a \in X_n$ vardır. O zaman α aşağıdaki biçime sahiptir. α izoton ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_p \\ a & a + 1 & \dots & a + p - 1 \end{pmatrix} \text{ ya da kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} P \\ A \end{pmatrix} \text{ ile gösterilir, ayrıca}$$

α antiton ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_p \\ a + p - 1 & a + p - 2 & \dots & a \end{pmatrix} \text{ ya da kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} P \\ A^R \end{pmatrix} \text{ ile gösterilir.}$$

$1 \leq p \leq n$ için p tane alt kümeden oluşan $\binom{n-1}{p-1}$ tane X_n in konveks sıralı parçalanışı vardır, ayrıca X_n in p tane elemandan oluşan $n - p + 1$ tane konveks alt kümesi mevcuttur. Bundan dolayı $|OCT_{n,1} = ORCT_{n,1}| = n$ olur ve böylece $2 \leq r \leq n - 1$ için

$$|OCT_{n,r}| = \sum_{p=1}^r \binom{n-1}{p-1} (n - p + 1) \text{ ve}$$

$$|ORCT_{n,r}| = n + 2 \sum_{p=2}^r \binom{n-1}{p-1} (n - p + 1)$$

olur. Herhangi bir S yarıgrubundaki bir x elemanı için eğer $x^2 = x$ ise idempotent denir ve $\emptyset \neq U \subseteq S$ için U kümesindeki tüm idempotentlerin kümesi $E(U)$ ile gösterilir. Ayrıca, $\alpha \in E(T_n)$ olması için gerek ve yeter koşul $Im(\alpha) = fix(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$ olmasıdır. $\alpha \in E(OCT_n)$ olması için gerek ve yeter koşul $Im(\alpha)$ kümesinin $kp(\alpha)$ nın bir temsil kümesi olmasıdır, ayrıca $\alpha \in OCT_n$ olmak üzere $kp(\alpha)$ nın temsil kümesinin $Im(\alpha) = \{\alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + p - 1\}$ ($1 \leq p \leq n$) olması için gerek ve yeter koşul $kp(\alpha) = \{\{1, \dots, a\}, \{a + 1\}, \dots, \{a + p - 2\}, \{a + p - 1, \dots, n\}\}$ olmasıdır.

Her bir konveks altküme $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ için, X_n nin bir tek konveks sıralı P parçalanışı vardır, öyle ki A, P yi temsil eden bir kümedir ve dolayısıyla OCT_n de $Im(\alpha) = A$ olacak şekilde bir tek idempotent eleman vardır. Kardinalitesi p olan X_n nin $n - p + 1$ tane konveks alt kümesi olduğundan tüm idempotent elemanlar izoton olup

$$|E(OCT_{n,r})| = |E(ORCT_{n,r})| = \sum_{p=1}^r (n - p + 1)$$

dir ve böylece

$$|E(OCT_n)| = |E(ORCT_n)| = \sum_{p=1}^n (n - p + 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

olur (Adeshola ve Umar, 2018).

$OCT_{n,r}$ ve $ORCT_{n,r}$ de bazı kombinatorik sonuçları belirttikten sonra, şimdi bu ideallerin cebirsel yapıları hakkında bazı özellikler verelim. Genel olarak, herhangi bir S yarı grubunun cebirsel yapısıyla ilgili en yaygın konulardan bir tanesi Green denklik bağıntılarını yani $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{J}$ denklik sınıflarını belirlemektir. Regüler olmayan yarıgruplar için ise yıldızlı Green bağıntılarını yani $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*, \mathcal{J}^*, \mathcal{D}^*, \mathcal{H}^*$ bağıntılarını belirlemektir. Herhangi bir S yarıgrubunda, yıldızlı Green'in eşdeğeri $\mathcal{L}^*(\mathcal{R}^*)$, $a, b \in S$ için $a\mathcal{L}^*b(a\mathcal{R}^*b)$ olması için gerek ve yeter koşul S yarıgrubunu içeren en az bir yarıgrup için $a\mathcal{L}b(a\mathcal{R}b)$ olmasıdır. Bu denklik bağıntıları ayrıca aşağıdaki özelliklere sahiptir,

$$a\mathcal{L}^*b \Leftrightarrow ax = ay \Leftrightarrow bx = by; \forall x, y \in S^1$$

$$a\mathcal{R}^*b \Leftrightarrow xa = ya \Leftrightarrow xb = yb; \forall x, y \in S^1.$$

Ayrıca \mathcal{H}^* ve \mathcal{D}^* denklikleri sırasıyla \mathcal{L}^* ve \mathcal{R}^* denkliklerinin kesişimi \mathcal{L}^* ve \mathcal{R}^* bağıntılarını içeren en küçük denklik bağıntısı olarak tanımlanır. Böylece $\mathcal{H}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{R}^*$ ve $\mathcal{D}^* = \mathcal{L}^* \vee \mathcal{R}^*$ olup aynı zamanda $\mathcal{D}^* = \mathcal{L}^* \circ \mathcal{R}^*$ olur. $1 \leq r \leq n - 1$ ve $S \in \{OCT_{n,r}, ORCT_{n,r}\}$ olsun. $\alpha, \beta \in S$ olmak üzere

$$(i) \alpha\mathcal{L}^*\beta \Leftrightarrow Im(\alpha) = Im(\beta),$$

$$(ii) \alpha\mathcal{R}^*\beta \Leftrightarrow Ker(\alpha) = Ker(\beta),$$

$$(iii) \alpha\mathcal{H}^*\beta \Leftrightarrow Ker(\alpha) = Ker(\beta) \text{ ve } Im(\alpha) = Im(\beta) \text{ ve}$$

$$(iv) \alpha\mathcal{D}^*\beta \Leftrightarrow |Im(\alpha)| = |Im(\beta)|$$

olup ayrıca $\mathcal{D}^* = \mathcal{J}^*$ olur (Garba ve ark., 2017).

$1 \leq p \leq r \leq n - 1$ için, S yarıgrubunda yüksekliği p olan tüm elemanların kümesi Green \mathcal{D}^* denklik bağıntısındaki denklik sınıflarından biri olup bu denklik sınıfını \mathcal{D}_p^* ile gösteririz, yani

$$\mathcal{D}_p^* = \{\alpha \in S: |Im(\alpha)| = p\}$$

olur. Tanımlardan görüleceği üzere r tane \mathcal{D}^* sınıfının olduğu açıktır ve S yarıgrubu $\mathcal{D}_1^*, \dots, \mathcal{D}_r^*$ kümelerinin bir ayrık birleşimidir. Ayrıca her $1 \leq p \leq r$ için \mathcal{D}_p^* içinde $n - p + 1$ tane \mathcal{L}^* sınıfı ve $\binom{n-1}{p-1}$ tane \mathcal{R}^* sınıfı vardır. $\alpha \in \mathcal{D}_p^*$ için $\mathcal{D}_p^* \subseteq \langle \mathcal{D}_{p+1}^* \rangle$ olur. $1 \leq p \leq n - 2$ için $\alpha \in \mathcal{D}_p^*$ olmak üzere $\beta, \gamma \in \mathcal{D}_{p+1}^*$ vardır öyle ki $\alpha = \beta\gamma$ olur. Bu nedenle, herhangi bir $\emptyset \neq U \subseteq S$ altkümesi için

$$S = \langle U \rangle \Leftrightarrow \mathcal{D}_r^* \subseteq \langle U \rangle$$

olur. Ayrıca \mathcal{D}_r^* nin sadece kendi elemanları tarafından üretilebileceği açıktır. Bu nedenle S nin minimal üreteç kümesi bulmak için \mathcal{D}_r^* nin boş olmayan alt kümelerini incelemek yeterlidir.

Lemma 2.4.1. $1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $S \in \{OCT_{n,r}, ORCT_{n,r}\}$ olsun, ayrıca $1 \leq p \leq n-1$ ve $2 \leq k$ için S yarıgrubunda $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{D}_p^*$ olsun. Bu durumda, $1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{D}_p^* \Leftrightarrow \alpha_i \alpha_{i+1} \in \mathcal{D}_p^* \Leftrightarrow Im(\alpha_i)$ kümesi $kp(\alpha_{i+1})$ in bir temsil kümesidir (Bugay, 2020).

Yönlendirilmiş grafiklerle ilgili bazı bilgiler verelim. Bir digraf (yönlendirilmiş grafik), $\Pi = (V, E)$ sıralı bir çift ile gösterilir. Burada V , elemanları köşeler olarak adlandırılan bir kümedir ve $E \subseteq V \times V$ elemanları oklar veya yönlendirilmiş kenarlar olarak adlandırılan sıralı ikililerden oluşan bir kümedir. $u_1, \dots, u_k \in V$ ($k \geq 2$) olmak üzere eğer $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{k-1}, u_k) \in E$ ise $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ ifadesine u_1 den u_k ye bir yürüyüş denir. Özellikle olarak farklı köşeler $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ için ($k \geq 1$) $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_1$ ifadesine bir kapalı yürüyüş denir. $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ ($2 \leq k$) bir yürüyüş olmak üzere $u_1.u_2 \dots u_k$ ifadesine ardışık çarpım adı verilir. Daha ayrıntılı bilgiler için “Graphs, An Introductory Approach, A First Course in Discrete Mathematics” isimli kitaba bakılabilir (Wilson ve Watkins, 1990).

Herhangi bir $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{D}_r^*$ için bir \mathcal{D}_U digrafını tanımlayalım. $1 \leq r \leq n-1$ için $S \in \{OCT_{n,r}, ORCT_{n,r}\}$ olmak üzere S de $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{D}_r^*$ olsun. O zaman $\mathcal{D}_U = (U, E)$ digrafı

$$\begin{aligned} E &= \{(\alpha, \beta): \alpha\beta \in \mathcal{D}_r^*\} \\ &= \{(\alpha, \beta): Im(\alpha) \text{ kümesi } kp(\beta)' \text{ nin bir temsil kümesidir}\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir $\alpha \in ORCT_{n,r}$ için $kp(\beta)$ nın temsil kümesinin $Im(\alpha) = \{a, a+1, \dots, a+r-1\}$ kümesi olması için gerek ve yeter koşul $kp(\beta) = \{\{1, \dots, a\}, \{a+1\}, \dots, \{a+r-2\}, \{a+r-1, \dots, n\}\}$ olmasıdır.

2.4.1. $OCT_{n,r}$ idealinin rankı

Teorem 2.4.1.1. $1 \leq r \leq n-1$ ve $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{D}_r^*$ olsun. O halde U kümesinin $OCT_{n,r}$ in bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul, X_n in r tane altkümesinden oluşan her bir konveks sıralı P parçalanışı ve X_n in kardinalitesi r olan her bir konveks A alt kümesi için öyle $\alpha, \beta \in U$ vardır öyle ki

- (i) $kp(\alpha) = P$
- (ii) $Im(\beta) = A$
- (iii) $\alpha = \beta$ ya da \mathfrak{D}_U digrafında α dan β bir yürüyüş mevcuttur

koşullarının sağlanmasıdır (Bugay, 2020).

İspat. (\Rightarrow) $1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere X_n in r tane altkümesinden oluşan bir konveks sıralı parçalanışı P ve X_n in kardinalitesi r olan bir konveks alt kümesi A olsun, çekirdek parçalanışı P olan ve görüntü kümesi A olan sadece bir tane izoton daralma dönüşümü $\gamma \in \mathcal{D}_r^*$ vardır. Eğer $\gamma \in U$ ise sonuç açıktır, $\gamma \in \mathcal{D}_r^* \setminus U$ olsun. $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{D}_r^*$ olmak üzere U kümesi $OCT_{n,r}$ in bir doğuray kümesi olduğundan $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in U$ vardır öyle ki $m \geq 2$ için $\alpha_1 \dots \alpha_m = \gamma$ olur. Bu durumda $ker(\alpha_1) \subseteq Ker(\gamma)$, $Im(\gamma) \subseteq Im(\alpha_m)$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \gamma \in \mathcal{D}_r^*$ olur, böylece $Ker(\alpha_1) = Ker(\gamma) = P$ ve $Im(\gamma) = Im(\alpha_m) = A$ olur. Böylece ilk iki koşul sağlanır. Lemma 2.4.1. den, ayrıca her $1 \leq i \leq m-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in \mathcal{D}_r^*$ olur ve dolayısıyla $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_m$ olacak şekilde \mathfrak{D}_U da α_1 den α_m ye bir yürüyüş vardır.

(\Leftarrow) $\gamma \in \mathcal{D}_r^*$, $kp(\gamma) = P$ ve $Im(\gamma) = A$ olsun. Hipotezden dolayı, $\alpha, \beta \in U$ vardır öyle ki $kp(\alpha) = P = kp(\gamma)$, $Im(\beta) = A = Im(\gamma)$ özelliklerine sahiptir ve $\alpha = \beta$ ya da \mathfrak{D}_U digrafında α dan β ye bir yürüyüş vardır. Eğer $\alpha = \beta$ ise açıkça $\alpha = \beta = \gamma \in U$ olur, diğer durumda ise \mathfrak{D}_U digrafında α dan β ya $\alpha = \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_m = \beta$ ($m \geq 2$) olacak şekilde bir yürüyüş vardır. $\xi = \alpha_1 \dots \alpha_m$ olsun, bu durumda

$Ker(\alpha) \subseteq Ker(\xi)$ ve $Im(\xi) \subseteq Im(\beta)$ olur. Ayrıca, \mathfrak{D}_U digrafının tanımından ve Lemma 2.4.1 den $\xi \in \mathcal{D}_r^*$ olur ve dolayısıyla $kp(\xi) = kp(\alpha) = kp(\gamma)$ ve $Im(\xi) = Im(\beta) = Im(\gamma)$ olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, $\gamma = \xi \in \langle U \rangle$ ve $\mathcal{D}_r^* \subseteq U$ olur.

Bu teoremin bir sonucunu ifade edelim. $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{D}_r^*$ olmak üzere $OCT_{n,r} = \langle U \rangle$ ise her bir $\alpha \in \mathcal{D}_r^*$ için U kümesinde L^* denklik sınıfında α ya bağlı en az bir eleman vardır ve benzer şekilde için U kümesinde R^* denklik sınıfında α ya bağlı en az bir eleman vardır. Bu nedenle, $2 \leq r \leq n-1$ için $rank(OCT_{n,1}) \geq n$ ve $rank(OCT_{n,r}) \geq \binom{n-1}{r-1}$ olur.

Sonuç 2.4.1.1. $OCT_{n,1} = \left\{ \binom{X_n}{\{1\}}, \dots, \binom{X_n}{\{n\}} \right\}$ olup $OCT_{n,1}$ kendisi dışında bir doğuray kümesi yoktur (Bugay, 2020).

Lemma 2.4.1.1. $2 \leq r \leq n-1$ için $m = n - r + 1$ ve I_1, \dots, I_m kümeleri r kardinalitesine sahip olan X_n nin tüm konveks alt kümeleri olsun. O zaman her bir $1 \leq i \leq m$ için X_n nin r tane alt kümesinden oluşan m tane farklı P_1, \dots, P_m konveks sıralı parçalanışı vardır öyle ki I_i kümesi P_i nin bir temsil kümesidir (Bugay, 2020).

İspat. Her $1 \leq i \leq m$ için $I_i = \{i, i+1, \dots, i+r-1\}$ ve $P_i = \{\{1, \dots, i\}, \{i+1, \dots, \{i+r-2\}, \{i+r-1, \dots, n\}\}$ olsun. Bu durumda sonuç açıktır.

Lemma 2.4.1.2. $2 \leq r \leq n-1$ için $m = n - r + 1$ ve I_1, \dots, I_m kümeleri r kardinalitesine sahip olan X_n nin tüm konveks alt kümeleri olsun. O zaman $OCT_{n,r}$ de $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{D}_r^*$ vardır öyle ki

- (i) Eğer $1 \leq i \neq j \leq m$ ise $kp(\alpha_i) \neq kp(\alpha_j)$
- (ii) Her bir $1 \leq i \leq m$ için $kp(\alpha_{i+1})$ in temsil kümesi $Im(\alpha_i) = I_i$
($\alpha_{m+1} = \alpha_1$)

olur (Bugay, 2020).

İspat. $2 \leq r \leq n - 1$ için $m = n - r + 1$ ve I_1, \dots, I_m kümeleri r kardinalitesine sahip olan X_n nin tüm konveks alt kümeleri olsun. O halde Lemma 2.4.1.1 den $1 \leq i \leq m$ için X_n nin r tane alt kümesinden oluşan m tane farklı P_1, \dots, P_m konveks sıralı parçalanışı vardır öyle ki I_i kümesi P_i nin bir temsil kümesidir. Genelliği kaybetmeden, her bir $1 < i \leq m$ için $Im(\alpha_i) = I_i$ ve $P_0 = P_m$ olmak üzere $kp(\alpha_i) = P_{i-1}$ olacak şekilde izoton eleman $\alpha_i \in D_r^*$ olarak seçilirse sonuç açıktır.

$2 \leq r \leq n - 1$ için $m = n - r + 1$ ve I_1, \dots, I_m kümeleri r kardinalitesine sahip olan X_n nin tüm konveks alt kümeleri olsun ve $t = \binom{n-1}{r-1}$ olmak üzere D_r^* sınıfındaki tüm Green R^* sınıfları R_1^*, \dots, R_t^* olsun. Lemma 2.4.1.2 den $OCT_{n,r}$ idealinde öyle $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r^*$ vardır ve

- (i) Eğer $1 \leq i \neq j \leq m$ ise $kp(\alpha_i) \neq kp(\alpha_j)$
- (ii) Her bir $1 \leq i \leq m$ için $kp(\alpha_{i+1})$ in temsil kümesi $Im(\alpha_i) = I_i$
($\alpha_{m+1} = \alpha_1$)

olur. Genelliği kaybetmeden, $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in R_i^*$ olduğunu varsayabiliriz, ayrıca her bir $1 \leq j \leq t - m$ için R_{m+j}^* den rastgele α_{m+j} daralma dönüşümü alalım. $U = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_t\}$ olsun, bu durumda U kümesi Teorem 2.4.1.1 in koşullarını sağlar. Ayrıca, \mathfrak{D}_U digrafında

$$\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_m \rightarrow \alpha_1$$

biçiminde bir kapalı yürüyüş vardır ve her $1 \leq j < t - m$ için $1 \leq i \leq m$ vardır öyle ki \mathfrak{D}_U da $\alpha_{m+j} \rightarrow \alpha_i$ olacak şekilde bir yürüyüş vardır. Bu nedenle, herhangi bir $\gamma \in D_r^* \setminus U$ için $\alpha_k, \alpha_l \in U$ vardır öyle ki $kp(\alpha_k) = kp(\gamma)$, $Im(\alpha_l) = Im(\gamma)$ olup \mathfrak{D}_U da α_k dan α_l ye bir yürüyüş vardır. Aslında $\gamma \in D_r^* \setminus U$ üretmek için, α_k dan α_l ye olan yürüyüşteki elemanların ardışık çarpımını yazabiliriz. O zaman Teorem 2.4.1.1 den U nun bir $OCT_{n,r}$ bir doğuray kümesi olduğu sonucu çıkar ve bu nedenle aşağıdaki teoremi ifade ederiz.

$$\mathbf{Teorem 2.4.1.2.} \quad rank(OCT_{n,r}) = \begin{cases} n & r = 1 \\ \binom{n-1}{r-1} & 2 \leq r \leq n-1 \end{cases}$$

(Bugay, 2020).

2.4.2. $ORCT_{n,r}$ idealinin rankı

Açıkça $r = 1$ için $OCT_{n,1} = ORCT_{n,1}$ olur. Bu nedenle, aksi belirtilmedikçe, bu bölümde $2 \leq r \leq n - 1$ durumunu ele alınmıştır. Ayrıca, herhangi bir $\emptyset \neq U \subseteq ORCT_{n,r}$ olmak üzere U kümesinin $ORCT_{n,r}$ idealinin doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul $D_r^* \subseteq \langle U \rangle$ olmasıdır.

Lemma 2.4.2.1. $R(D_r^*) = \{\alpha \in D_r^* : \alpha \text{ antiton elemandır}\}$ olmak üzere $ORCT_{n,r} = \langle R(D_r^*) \rangle$ olur (Bugay, 2020).

İspat. $\alpha \in D_r^*$ bir izoton daralması dönüşümü olsun, bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a & a+1 & \dots & a+r-1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a+r-1 & a+r-2 & \dots & a \end{pmatrix} \in R(D_r^*)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \{1, \dots, a\} & \{a+1\} & \dots & \{a+r-2\} & \{a+r-1, \dots, n\} \\ a+r-1 & a+r-2 & \dots & a+1 & a \end{pmatrix} \in R(D_r^*)$$

olarak seçilirse o zaman açıkça $\alpha = \beta\gamma$ olur. Böylece, $D_r^* \subseteq \langle R(D_r^*) \rangle$ olup $ORCT_{n,r} = \langle R(D_r^*) \rangle$ olur.

Sonuç olarak, $\emptyset \neq U \subseteq D_r^*$ olmak üzere kümesinin $ORCT_{n,r}$ idealinin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul $R(D_r^*) \subseteq \langle U \rangle$ olmasıdır.

Teorem 2.4.2.1. $2 \leq r \leq n - 1$ ve $\emptyset \neq U \subseteq D_r^*$ olsun. O halde U kümesinin $ORCT_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul X_n in r tane altkümesinden oluşan her bir konveks sıralı P parçalanışı ve X_n in kardinalitesi r olan her bir konveks A alt kümesi için öyle $\alpha, \beta \in U$ vardır öyle ki

(i) $kp(\alpha) = P$

(ii) $Im(\beta) = A$

(iii) $\alpha = \beta \in R(D_r^*)$ veya \mathfrak{D}_U digrafında α dan β ya bir yürüyüş vardır öyle ki yürüyüş üzerindeki antiton elemanların sayısı tek bir sayı olmasıdır (Bugay, 2020).

İspat. (\Rightarrow) $2 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere X_n in r tane altkümesinden oluşan bir konveks sıralı parçalanışı P ve X_n in kardinalitesi r olan bir konveks alt kümesi A olsun, çekirdek parçalanışı P olan ve görüntü kümesi A olan sadece bir tane antiton daralma dönüşümü $\gamma \in R(\mathcal{D}_r^*)$ vardır. Eğer $\gamma \in U$ ise sonuç açıktır, $\gamma \in \mathcal{D}_r^* \setminus U$ olsun. $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{D}_r^*$ olmak üzere U kümesi $ORCT_{n,r}$ in bir doğuray kümesi olduğundan $R(D_r^*) \subseteq \langle U \rangle$ olup $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in U$ vardır öyle ki $m \geq 2$ için $\alpha_1 \dots \alpha_m = \gamma$ olur. Bu durumda, $Ker(\alpha_1) \subseteq Ker(\gamma)$, $Im(\gamma) \subseteq Im(\alpha_m)$ ve $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \gamma \in \mathcal{D}_r^*$ olur, böylece $Ker(\alpha_1) = Ker(\gamma) = P$ ve $Im(\gamma) = Im(\alpha_m) = A$. Böylece ilk iki koşul sağlanır. Lemma 2.4.1.2 den ayrıca her $1 \leq i \leq m - 1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in \mathcal{D}_r^*$ olur ve dolayısıyla $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_m$ olacak şekilde \mathfrak{D}_U da α_1 den α_m ye bir yürüyüş vardır. Ayrıca $\gamma \in R(D_r^*)$ olduğundan yürüyüş üzerindeki antiton olan elemanların sayısı tek bir sayı olması gerektiği kolayca görülür.

(\Leftarrow) $\gamma \in R(D_r^*)$, $kp(\gamma) = P$ ve $Im(\gamma) = A$ olsun. Hipotezden dolayı, $\alpha, \beta \in U$ vardır öyle ki $kp(\alpha) = P = kp(\gamma)$, $Im(\beta) = A = Im(\gamma)$ özelliklerine sahiptir ve $\alpha = \beta \in R(D_r^*)$ ya da \mathfrak{D}_U digrafında α dan β ye bir yürüyüş vardır öyle ki yürüyüş üzerindeki antiton elemanların sayısı tek bir sayıdır. Eğer $\alpha = \beta$ ise açıkça $\alpha = \beta = \gamma \in U$ olur, diğer durumda ise \mathfrak{D}_U digrafında α dan β ya bir yürüyüş vardır. Bu yürüyüşteki elemanların ardışık çarpımı ξ olsun, bu durumda dolayısıyla $kp(\xi) = kp(\alpha) = kp(\gamma)$ ve $Im(\xi) = Im(\beta) = Im(\gamma)$ olur. Ayrıca yürüyüş üzerindeki antiton elemanların sayısı tek sayı olduğu için $\xi \in R(D_r^*)$ olur. Sonuç olarak $\gamma = \xi \in \langle U \rangle$ ve $R(D_r^*) \subseteq \langle U \rangle$ olur.

Lemma 2.4.2.2. $2 \leq r \leq n - 1$ için $m = n - r + 1$ ve I_1, \dots, I_m kümeleri r kardinalitesine sahip olan X_n nin tüm konveks alt kümeleri olsun. O zaman $ORCT_{n,r}$ de $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{D}_r^*$ vardır öyle ki

- (i) Eğer $1 \leq i \neq j \leq m$ ise $kp(\alpha_i) \neq kp(\alpha_j)$
- (ii) Her bir $1 \leq i \leq m$ için $kp(\alpha_{i+1})$ in temsil kümesi $Im(\alpha_i) = I_i$ ($\alpha_{m+1} = \alpha_1$)

olur (Bugay, 2020).

İspat. Lemma 2.4.1.2 deki gibi kanıtlanabilir.

$2 \leq r \leq n - 1$ için $m = n - r + 1$ ve I_1, \dots, I_m kümeleri r kardinalitesine sahip olan X_n nin tüm konveks alt kümeleri olsun ve $t = \binom{n-1}{r-1}$ olmak üzere D_r^* sınıfındaki tüm Green R^* sınıfları R_1^*, \dots, R_t^* olsun. Lemma 2.4.2.2 den $ORCT_{n,r}$ idealinde öyle $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r^*$ vardır ve

- (i) Eğer $1 \leq i \neq j \leq m$ ise $kp(\alpha_i) \neq kp(\alpha_j)$
- (ii) Her bir $1 \leq i \leq m$ için $kp(\alpha_{i+1})$ in temsil kümesi $Im(\alpha_i) = I_i$
($\alpha_{m+1} = \alpha_1$)

olur.

Genelliği kaybetmeden a_1 antiton daralma dönüşümü ve $2 \leq i \leq m$ için α_i elemanını izoton daralma dönüşümü olarak seçebiliriz. Ayrıca $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in R_i^*$ ve her bir $1 \leq j \leq t - m$ için R_{m+j}^* denklik sınıfından rastgele α_{m+j} izoton daralma dönüşümü alalım. $U = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_t\}$ olsun. Bu durumda \mathfrak{D}_U digrafında

$$a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_m \rightarrow a_1$$

olacak şekilde bir devir vardır. Ayrıca her bir $1 \leq j \leq t - m$ için $1 \leq d_j \leq m$ vardır öyle ki $Im(\alpha_{m+j}) = Im(\alpha_{d_j})$ olur. Eğer $1 \leq d_j \leq m - 1$ ise \mathfrak{D}_U digrafında $\alpha_{m+j} \rightarrow \alpha_{d_j+1}$ biçiminde bir yürüyüş vardır ve $d_j = m$ ise \mathfrak{D}_U digrafında $\alpha_{m+j} \rightarrow \alpha_1$ biçiminde bir yürüyüş vardır. Böylece X_n in r tane altkümesinden oluşan her bir konveks sıralı P parçalanışı ve X_n in kardinalitesi r olan her bir konveks A alt kümesi için $kp(\alpha_k) = P$ olacak şekilde sadece bir tane $\alpha_k \in U$ ve $im(\alpha_l) = A$ olacak şekilde $\alpha_l \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ vardır. Böylece Teorem 2.4.2.1 in ilk iki koşulu da sağlanır. Son koşul için 3 farklı durum vardır.

1. durum: $\alpha_k = \alpha_l = \alpha_1$ ise $\alpha_1 \in R(D_r^*)$ olduğundan sonuç açıktır.
2. durum: $\alpha_k = \alpha_l \neq \alpha_1$ ise

$$\alpha_l \rightarrow \alpha_{l+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_m \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_{l-1} \rightarrow \alpha_l$$

olacak şekilde bir yürüyüş vardır ve bu elemanlardan sadece bir tanesi antiton elemandır. Bundan dolayı Teorem 2.4.2.1 in üçüncü koşulu sağlanır.

3. durum: $\alpha_k \neq \alpha_l$ ise $p \geq 0$ olmak üzere bir p sayısı vardır ve $\beta_1, \dots, \beta_p \in U \setminus \{\alpha_k, \alpha_l\}$ vardır ve α_k dan α_l ye en kısa yürüyüş

$$\alpha_k \rightarrow \beta_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \beta_p \rightarrow \alpha_l$$

olur. Eğer $\alpha_1 \in \{\alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha_l\}$ ise bu durumda Teorem 2.4.2.1 in üçüncü koşulu da sağlanır. Eğer $\alpha_1 \notin \{\alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha_l\}$ ise bu durumda

$$\alpha_k \rightarrow \beta_1 \rightarrow \cdots \beta_p \rightarrow \alpha_l \rightarrow \alpha_{l+1} \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_m \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_{l-1} \rightarrow \alpha_l$$

yürüyüşü mevcut olup bundan dolayı Teorem 2.4.2.1 in üçüncü koşulu da sağlanır. Sonuç olarak Teorem 2.4.2.1 den U kümesi $ORCT_{n,r}$ idealinin bir doğuray kümesidir ve böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

$$\text{Teorem 2.4.2.2. } rank(ORCT_{n,r}) = \begin{cases} n & ; \quad r = 1 \\ \binom{n-1}{r-1} & ; \quad 2 \leq r \leq n-1 \end{cases}$$

(Bugay, 2020).

2.4.3. $ODCT_n$ monoidinin rankı

ODC_n yapısı $ODCT_n = OCT_n \cap D_n$ olarak tanımlanır ve $ODCT_n$ yapısı bir monoidi olur. Bu bölümde minimal bir $ODCT_n$ monoidi için doğuray kümesinin bulunması ve $ODCT_n$ nin monoid rankının hesaplanması ile ilgili bilgiler verilmiştir. $ODCT_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ olup bir monoid olarak boş küme tarafından doğurulduğu açıktır ve $ODCT_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ olup bu monoid $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı tarafından monoid olarak üretilir. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n$ için $\mathcal{F}_r = \{\alpha \in ODCT_n : |Im(\alpha)| = r\}$ olsun. Burada $\mathcal{F}_n = \{\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}\}$ olup ve ϵ elemanı $ODCT_n$ monoidinin birim elemanıdır.

Lemma 2.4.3.1. $n \geq 3$ olsun. $\alpha \in \mathcal{F}_r$ ise $1 \leq r \leq n-2$ için $\alpha \in \langle \mathcal{F}_{r+1} \rangle$ olur (Toker, 2021).

İspat. $n \geq 3$ olmak üzere $1 \leq r \leq n-2$ için $\alpha \in \mathcal{F}_r$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & \dots & A_r \\ 1 & 2 & \dots & \dots & r \end{pmatrix}$$

biçimindedir ve $1 \leq i \leq r$ için $|A_i| \geq 2$ olacak şekilde en az bir i elemanı vardır. x_i A_i nin maksimum elemanı olsun. β elemanını ise $i > 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_r \\ 1 & \dots & i-1 & i & i+i & i+2 & \dots & r+1 \end{pmatrix}$$

ve $i = 1$ için

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & 2 & 3 & \dots & r+1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\beta \in \mathcal{F}_{r+1}$ olur. γ elemanını ise

$$j\gamma = \begin{cases} j; & 1 \leq j \leq i \\ i; & j = i + 1 \\ j - 1; & i + 2 \leq j \leq r + 1 \\ r + 1; & j > r + 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça $\gamma \in \mathcal{F}_{r+1}$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olur, böylece $\alpha \in \langle \mathcal{F}_{r+1} \rangle$ olur.

Sonuç 2.4.3.1. $1 \leq r \leq n - 2$ için $\mathcal{F}_r \subseteq \langle \mathcal{F}_{r+1} \rangle$ olur (Toker, 2021).

Sonuç 2.4.3.2. \mathcal{F}_n yalnızca $ODCT_n$ nin birim elemanına sahip bir küme olduğundan $n \geq 3$ için $\langle \mathcal{F}_{n-1} \rangle = ODCT_n$ olur (Toker, 2021).

Sonuç 2.4.3.3. $1 \leq r \leq n$ için $|\mathcal{F}_r| = \binom{n-1}{r-1}$ olur (Adeshola ve Umar, 2018).

Sonuç 2.4.3.4. $|\mathcal{F}_{n-1}| = n - 1$ olduğundan $n \in \mathbb{Z}^+$ için $rank_m(ODCT_n) \leq n - 1$ olur (Toker, 2021).

Sonuç 2.4.3.5. $n \geq 1$ için $|ODCT_n| = 2^{n-1}$ olur (Adeshola ve Umar, 2018).

Teorem 2.4.3.1. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $rank_m(ODCT_n) = n - 1$ olur (Toker, 2021).

İspat. $n = 1$ ve $n = 2$ için sonuç açıktır. $n \geq 3$ için Sonuç 2.4.3.5 ten $rank_m(ODCT_n) \leq n - 1$ olur. $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$ODCT_{(n,r)} = \{\alpha \in ODCT_n : |Im(\alpha)| \leq r\}$$

olarak tanımlayalım, $ODCT_{(n,r)}$ yapısının $ODCT_n$ nin ideali olduğu açıktır. Böylece $ODCT_{(n,n-2)}$ yapısı da $ODCT_n$ nin bir idealidir. Ayrıca, \mathcal{F}_{n-1} de $n - 1$ tane farklı çekirdek sınıfı vardır ve $\mathcal{F}_n = \{\epsilon\}$ olduğundan $rank_m(ODCT_n) \geq n - 1$ olur. Böylece $n \in \mathbb{Z}^+$ için $rank_m(ODCT_n) = n - 1$ olur.



3.MATERYAL ve YÖNTEM**3.1. Materyal**

Bu tez hazırlanırken gerekli literatür taraması yapılmış olup ilgili kitap, makale ve tez çalışmaları incelenmiştir. Konu ile alakalı çalışmalar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.2. Yöntem

Bu çalışmada sonlu zincir üzerindeki tam daralma dönüşümlerinin bazı alt yarıgruplarının cebirsel özellikleri incelenmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. $ODCT_{(n,r)}$ İdealinin Rankı

X_n üzerindeki tüm sırayı koruyan ve sıra azaltan daralma dönüşümleri $ODCT_n$ ile gösterilir, bu cebirsel yapı bir monoid ve $ODCT_n = CT_n \cap C_n$ dir. Ayrıca $n \in \mathbb{Z}^+$ için $rank_m(ODCT_n) = n - 1$ olur (Toker, 2021). $1 \leq r \leq n - 1$ için görüntü kümesindeki eleman sayısı r ye eşit veya r den daha az olacak şekilde tüm dönüşümlerin kümesi $ODCT_n$ nin bir idealidir ve bu ideal $ODCT_{(n,r)}$ ile gösterilir. Böylece $ODCT_{(n,r)}$ bir yarıgruptur. Bu çalışmada $1 \leq r \leq n - 1$ için $ODCT_{(n,r)}$ yarıgrubunun rankını araştırdık. Tanımlardan $ODCT_{(n,r)} = \{\alpha \in ODCT_n : |im(\alpha)| \leq r\}$ olur. $1 \leq k \leq r$ için $F_k = \{\alpha \in ODCT_{(n,r)} : |Im(\alpha)| = k\}$ olarak tanımlayalım. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $ODCT_{(n,n)} = ODCT_n$ olur ayrıca $rank_m(ODCT_n) = n - 1$ olduğu bilinmektedir (Toker, 2021). Bundan dolayı bu bölümde $1 \leq r \leq n - 1$ için $ODCT_{(n,r)}$ yapısının yarıgrup rankı araştırılmıştır.

Lemma 4.1.1. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ olsun. $1 \leq k \leq r - 1$ olmak üzere $\alpha \in F_k$ ise $\alpha \in \langle F_{k+1} \rangle$ olur (Gündoğan ve Toker, 2021).

İspat. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ olsun. Ayrıca, $1 \leq k \leq r - 1$ olmak üzere $\alpha \in F_k$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$$

biçiminde olur ve $1 \leq i \leq r$ için $|A_i| \geq 2$ olacak şekilde en az bir i elemanı vardır. $x_i \in A_i$ kümesinin maksimum elemanı olsun. $i > 1$ için β elemanını

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & A_i \setminus \{x_i\} & \{x_i\} & A_{i+1} & \dots & A_k \\ 1 & \dots & i-1 & i & i+i & i+2 & \dots & k+1 \end{pmatrix}$$

$i = 1$ için β elemanını

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{x_1\} & \{x_1\} & A_2 & \dots & A_k \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k+1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\beta \in F_{k+1}$ olur. γ elemanı ise

$$j\gamma = \begin{cases} j; & 1 \leq j \leq i \\ i; & j = i + 1 \\ j - 1; & i + 2 \leq j \leq k + 1 \\ k + 1; & j > k + 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. O halde $\gamma \in F_{k+1}$ ve $\alpha = \beta\gamma$ olup $\alpha \in F_{k+1}$ > dir.

Sonuç 4.1.1. $1 \leq k \leq n - 2$ için $F_k \subseteq F_{k+1}$ olur (Gündoğan ve Toker, 2021).

Sonuç 4.1.2. $1 \leq k \leq n$ için $|F_k| = \binom{n-1}{k-1}$ olur (Adesholea ve Umar, 2018).

Teorem 4.1.2. $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ için $rank(ODCT_{(n,r)}) = \binom{n-1}{r-1}$ olur (Gündoğan ve Toker, 2021).

İspat. $n = 2$ ise $rank(ODCT_{(2,1)}) = 1$ olduğu açıktır. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ olsun. Sonuç 4.1.1 ve Sonuç 4.1.2 den $rank(ODCT_{(n,r)}) \leq \binom{n-1}{r-1}$ olur. Ayrıca, $1 \leq r \leq n - 1$ için $ODCT_{(n,r-1)}$ yapısı $ODCT_{(n,r)}$ nin bir idealidir ve F_r de $\binom{n-1}{r-1}$ tane farklı çekirdek sınıfı vardır. Bundan dolayı $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ için $rank(ODCT_{(n,r)}) = \binom{n-1}{r-1}$ olur. Böylece, $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ için $rank(ODCT_{(n,r)}) = \binom{n-1}{r-1}$ sonucuna ulaşılır.

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında daralma dönüşümlerinin rankları ile ilgili bilgiler verilmiş olup, $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ için $ODCT_{(n,r)}$ idealinin rankı hesaplanmıştır.

5.2. Öneriler

$n \geq 3$ için $ODCT_n$ yapısının monoid takdiminin $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \mid a_i a_{n-1} = a_i (1 \leq i \leq n-1), a_i a_j = a_{j+1} a_i (1 \leq i \leq j \leq n-2) \rangle$ olduğu bilinmektedir (Toker, 2021). Ancak henüz $OCT_n, ORCT_n$ yarıgruplarının takdimleri bulunmamıştır, eğer bu takdimler bulunursa dönüşüm yarıgruplarının daralma dönüşümleri sınıfı ile ilgili çalışmalara katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- ADESHOLA, A.D. and UMAR, A., 2018. Results for certain semigroups of order-preserving full contraction mappings of a finite chain, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 106, 37-49.
- BUGAY, L., 2020. On the ranks of certain ideals of monotone contractions, *Hacettepe Journal of Mathematics & Statistics*, 49, 6, 1988-1996.
- GANYUSHKIN, O. and VOLODYMYR, M., 2009. *Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction*, Springer, London, England, 314p.
- GARBA, G.U., IBRAHIM, M.J. and IMAM, A.T., 2017. On certain semigroups of full contraction maps of a finite chain, *Turkish Journal of Mathematics*, 41, 3, 500-507.
- GARBA, G.U., 1994. On the idempotent ranks of certain semigroups of order-preserving transformations, *Port. Math.* 51, 185-204.
- GOMES, G.M.S. and HOWIE, J.M., 1987. On the ranks of certain finite semigroups of transformations, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 101, 3, 395-403.
- GOMES, G.M.S. and HOWIE, J.M., 1992. On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations, *Semigroup Forum*, 45 (3), 272-282.
- GÜNDOĞAN, Ö. and TOKER, K., The rank of ideals of order-preserving and order-decreasing full contraction mappings. 7. *International Gap Mathematics-Engineering-Science and Health Sciences Congress Proceedings Book*, 4-7.
- HOWIE, J.M., 1995. *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, New York, USA, 351p.
- TOKER, K. and AYIK, H., 2018. On the rank of transformation semigroup $T_{(n,m)}$, *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 4, 1970-1977.
- TOKER, K., 2020. Ranks of some subsemigroups of full contraction mappings on a finite chain, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(2), 403-414.
- TOKER, K., 2021. The monoid rank and monoid presentation of order-preserving and order-decreasing full contraction mappings, *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 9(4), 170-175.
- WILSON, R.J. and WATKINS, J.J., 1990. *Graphs, An Introductory Approach, A First Course in Discrete Mathematics*, Jon Wiley & Sons Inc., Toronto, 340p.