



**WINKLER TABANI İLE ETKİLEŞEN BİR
KATMANDAKİ ELASTİK DALGALARIN
DİSPERSİYON ANALİZİ**

Doktora Tezi

Gökçe KILIÇ

Eskişehir 2022

**WINKLER TABANI İLE ETKİLEŞEN BİR KATMANDAKİ
ELASTİK DALGALARIN DİSPERSİYON ANALİZİ**

Gökçe KILIÇ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Barış ERBAŞ

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Haziran 2022

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gökçe KILIÇ' ın WİNKLER TABANI İLE ETKİLEŞEN BİR KATMAN-DAKİ ELASTİK DALGALARIN DİSPERSİYON ANALİZİ başlıklı tezi 16/06/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvan Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye	: Prof. Dr. Nihal EGE
Üye	: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU
Üye	: Doç. Dr. Fatih KARABACAK
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Neşe ÖZTÜRK KÖRPE
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Hazel YÜCEL

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

DANIŞMAN ONAYI

DaniŐmanlıđını yuruttuğum doktora oğrencisi Gokçe KILIÇ, WINKLER TABANI İLE ETKİLEŐEN BİR KATMANDAKİ ELASTİK DALGALARIN DİSPER-SİYON ANALİZİ baŐlıklı tez çalışmasını tamamlamıŐtır. HazırlamıŐ olduğu tez tara-fımca incelenmiŐ ve oğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik ačıdan uygun gürülmüŐtür.

Tez DaniŐmanı
Prof. Dr. Barış ERBAŞ

ÖZET

WINKLER TABANI İLE ETKİLEŞEN BİR KATMANDAKİ ELASTİK DALGALARIN DİSPERSİYON ANALİZİ

Gökçe KILIÇ

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Haziran, 2022

Danışman: Prof. Dr. Barış ERBAŞ

Bu tezde, tek ve iki taraftan Winkler tabanı ile etkileşen elastik bir katmanda meydana gelen düzlem harmonik dalgaların düzlemsel gerinim koşullarında asimptotik analizi yapılmıştır. Bunun için öncelikle verilen sınır koşulları için hem tek taraflı hem iki taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmanlar için dispersiyon ilişkileri elde edilip, uzun dalga boyu- düşük dalga frekansı varsayımı altında dispersiyon ilişkilerinin kesme frekansı civarındaki polinom yaklaşımları türetilmiştir. Elde edilen yaklaşımlar, elastik bir taban üzerine oturtulmuş Kirchhoff plakasının geleneksel mühendislik formülasyonu ile karşılaştırılmıştır. Tek taraftan Winkler tabanı ile etkileşen yapı için eğilme dalgalarını ve genişleyen dalgaların sapmasını gösteren bir formül elde edilmiştir. Devamında tek taraflı durum için problem üç boyutta ele alınarak düşük frekansta gerçekleşen eğilme dalgaları için kesme frekansı civarındaki hareket denklemleri asimptotik olarak türetilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Winkler tabanı, Kesme frekansı, Düşük frekans, Uzun dalga boyu, Asimptotik türetme.

ABSTRACT

DISPERSION ANALYSIS OF ELASTIC WAVES IN A LAYER INTERACTING WITH A WINKLER FOUNDATION

Gökçe KILIÇ

Departments of Mathematics

Eskisehir Technical University, Institute Of Graduate Programs, June, 2022

Supervisor : Prof. Dr. Barış ERBAŞ

In this thesis, the dispersion of elastic waves in an elastic layer interacting with one and two-sided Winkler foundation is analyzed. For this purpose, dispersion relations are obtained for elastic layers interacting with the Winkler base on both one-sided and two-sided basis in accordance with the given boundary conditions, and polynomial approximations of the dispersion relations near the cut-off frequency are derived using the assumption of long wave-low frequency. The obtained approaches are compared with the conventional engineering formulation of a Kirchhoff plate resting on an elastic foundation. An explicit formula illustrating the veering of bending and extensional waves is presented as a one-sided foundation. Then, for the one-sided case, the equation of motion near the cut-off frequency for low-frequency bending motion is derived asymptotically, which is handled as a 3D-problem.

Keywords: Winkler foundation, Cut-off frequency, Low frequency, Long wave, Asymptotic derivation.

TEŐEKKÖR

Bu çalıőmanın yűrűtűlmesinde bana yol gűsteren ve desteęini esirgemeyen deęerli danıőman hocam Prof. Dr. Barıő ERBAŐ'a, önemli katkılarından dolayı sayın Prof. Julius KAPLUNOV'a, nerileri için sayın Prof. Dr. Nihal EGE' ye ve her daim yanımda olup yardımlarını esirgemeyen arkadaőım sayın Araő. Gör. Yaęmur Ece UÇAR'a, hayatım boyunca her anlamda bana destek olan ve bugűnlere gelmemde bűyűk fedakarlıkları olan aileme ve bu yolda eęitimime katkıları bulunan tűm hocalarım ile tezimi deęerlendiren deęerli jűri űyelerine sonsuz teőekkűrler ederim.

Gökçe KILIÇ

Haziran, 2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığımı ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

.....
Gökçe KILIÇ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
DANIŞMAN ONAYI.....	iii
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
TEŞEKKÜR.....	ix
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	x
İÇİNDEKİLER.....	xii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
TABLolar DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xvi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	5
2.1 Elastisite Kavramı	5
2.2 Gerilme Kavramı(σ)	5
2.3 Kuvvetler ve Gerilmeler için Notasyon.....	6
2.4 Gerinim Kavramı(ϵ)	7
2.5 Hooke Yasası	7
2.6 Malzemelerin Elastik Özellikleri.....	8
2.7 Gradyant ve Vektörel Çarpımın Bazı Özellikleri	10
2.7.1 Özellikler	10
2.8 Hareket Denklemleri.....	11

2.9 Düzlemsel Gerinim Koşulları(Plane Strain).....	12
2.10 Serbest Elastik Bir Katman İçin Dispersiyon İlişkisi	13
2.11 Winkler Tabanı Modeli.....	16
2.12 Asimptotik Yaklaşım	17
3. İKİ TARAFLI VE TEK TARAFLI WINKLER TABANI İLE ETKİLEŞEN ELASTİK KATMAN	20
3.1 Problemin İfadesi	20
3.2 Dispersiyon Denklemleri ve Kesme Frekansı.....	24
3.2.1 İki Taraflı Durum.....	26
3.2.2 Tek Taraflı Durum.....	35
3.3 İki Taraflı Durumda Uzun Dalga-Düşük Frekans Yaklaşımı ..	39
3.4 Tek Taraflı Durumda Uzun Dalga-Düşük Frekans Yaklaşımı .	48
4. TEK TARAFLI WINKLER TABANI İLE DESTEKLENEN ELAS- TİK PLAKA İÇİN HAREKET DENKLEMLERİNİN ASİMP- TOTİK DERİVASYONU	55
4.1 Problemin İfadesi	55
4.2 İki Boyuttaki Geleneksel Plaka Modeli.....	57
4.3 Kesme Frekansı Civarındaki Formülasyonların Türetilmesi ...	64
4.3.1 Başlıc Terimler.....	67
4.3.2 Birinci Mertebeden Terimler	70
5. SONUÇ.....	78
KAYNAKÇA.....	82
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1.	P dış kuvvetlerine maruz kalan dengedeki bir cisim[32] 5
Şekil 2.2.	Gerilme bileşenleri[32] 6
Şekil 2.3.	Bir çekme gerilmesi sonucu meydana gelen eksenel(z) uzama(pozitif gerilme). Düz çizgiler gerilme uygulandıktan sonraki, kesikli çizgiler ise önceki boyuları temsil eder.[3] 9
Şekil 2.4.	Winkler Tabanı Modeli[11] 16
Şekil 3.1.	(a) İki taraflı ve (b) tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katman..... 20
Şekil 3.2.	Simetrik mod için elde edilen (3.34) numaralı dispersiyon denkleminin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için nümerik çözümü..... 29
Şekil 3.3.	Antisimetrik mod için elde edilen (3.48) numaralı dispersiyon denkleminin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için nümerik çözümü 33
Şekil 3.4.	Tek taraflı Winkler Tabanı ile etkileşen elastik katman için elde edilen (3.68) numaralı dispersiyon denkleminin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için sayısal değerleri 38
Şekil 3.5.	Simetrik modda elde edilen (3.34) numaralı dispersiyon ilişkisinin(siyah) (3.77) ile verilen uzun dalga, düşük frekans yaklaşımı(kırmızı), (3.83) ile ifade edilen klasik düzlemsel gerilme modeli(mavi) ve (3.85) ile verilen düzlemsel gerinim modeli(yeşil) ile karşılaştırılması ($G = 1$ ve $\nu = 0.25$) 43
Şekil 3.6.	Antisimetrik modda elde edilen (3.48) numaralı dispersiyon ilişkisinin(mavi) kesme frekansı civarında elde edilen (3.94) numaralı yaklaşım(turuncu) ve (3.95) ile verilen geleneksel Kirchhoff modeli(yeşil) karşılaştırılması($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$) 45
Şekil 3.7.	Antisimetrik modda elde edilen kesme frekansı civarındaki (3.99) numaralı dispersiyon ilişkisinin(siyah) kesme frekansı civarındaki (3.102) ile verilen açılımı(kırmızı), (3.103) ile verilen geleneksel Kirchhoff modelinin(yeşil) karşılaştırılması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$)(Ölçeklendirme: $\delta_* = \delta/G^2$ ve $K_* = K/\sqrt{G}$) 47

- Şekil 3.8.** Tek taraflı Winkler durumunda elde edilen (3.107) numaralı dispersiyon ilişkisinin yaklaşık ifadesi(siyah) ile (3.112)(kırmızı) ve (3.117)(mavi) yaklaşımlarının karşılaştırması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$) 53
- Şekil 3.9.** Tek taraflı Winkler durumunda elde edilen (3.107) dispersiyon ilişkisinin(mavi) (3.118)(siyah) ve (3.112)(kırmızı) -(3.117)(yeşil) yaklaşımlarının karşılaştırması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$)(Ölçeklendirme: $\delta_* = \delta/G^2$ ve $K_* = K/\sqrt{G}$) 54
- Şekil 3.10.** δ_Ω ve δ_K değişkenlerine göre genişleme ve eğilme(extensional ve bending) dalgalarının sapmasını gösteren dispersiyon eğrisi(3.107)(siyah) ile kesme frekansı civarında elde edilen yaklaşım (3.118)(kırmızı) ve δ_Ω ve δ_K ölçeklendirmesine göre elde edilen (3.119)(yeşil) ifadesinin karşılaştırması($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$) 54
- Şekil 4.1.** Tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katman 55
- Şekil 4.2.** Geleneksel teorideki (4.44) numaralı dispersiyon ilişkisi(mavi) ve kesme frekansı civarında elde edilen (4.89) numaralı dispersiyon ilişkisinin (turuncu) karşılaştırılması($\varepsilon = 0.2$ ve $\nu = 0.3$) 75
- Şekil 4.3.** Kesme frekansı civarında elde edilen (4.89) numaralı dispersiyon ilişkisi(mavi) ile aynı ilişki için $K = \sqrt{(1-\nu)/2}$ 'deki (4.92) ile verilen yaklaşımının(turuncu) karşılaştırılması($\varepsilon = 0.2$ ve $\nu = 0.3$) 76

TABLolar DİZİNİ

Sayfa

Tablo 2.1. Elastik malzeme sabitlerinin arasındaki ilişkiler[1]	10
--	----



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

- σ_{ij} : Gerilme bileşenleri
 ε_{ij} : Gerinme bileşenleri
 δ_{ij} : Kronecker delta fonksiyonu
 ∇ : Gradyant vektör alanı
 Δ : Laplace operatörü
 λ, μ : Lamé sabitleri
 E : Elastik modülü
 ν : Poisson oranı
 θ : Winkler tabanı rijitlik sabiti
 c_1 : Boyuna dalga hızı
 c_2 : Enine dalga hızı
 ϕ, ψ : Dalga potansiyelleri
 \mathcal{O} : Büyük O notasyonu

1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze, hem yapı-inşaat hem de ulaştırma ile ilgili konularda ilerlemeler yaşandıkça modern sismolojide, elastik yapılardaki dalgalar ve titreşimler ile ilgili çeşitli problemler ortaya çıkarmıştır. Bu problemlere matematiksel olarak daha kolay ve pratik bir yaklaşımda bulunmayı amaç edinen Lamb[21] tarafından yapılan önemli katkılarla, elastik dalgaların serbest bir katmandaki yayılımı ile ilgili araştırmalara ayrıntılı bir şekilde başlanmıştır.

Zemin-yapı etkileşiminin söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarında, zeminde karmaşık elastik ve plastik deformasyonlar gerçekleşmektedir. Dolayısıyla elastik zemine oturtulan yapıların incelenmesinde zemin etkisinin de bilinmesi gerekmektedir. Bu konuyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır ve zeminin mekanik özelliklerine göre değişik modellemeler geliştirilmiştir. Elastik zemin davranışının incelenmesiyle ilgili ilk çalışma 1877'de Winkler tarafından yapılmıştır[33]. Winkler modeli kısaca elastik zemin üzerine oturtulmuş bir kirişin herhangi bir noktasındaki zemin tepkisinin o noktada gerçekleşen çökme ile orantılı olduğu üzerine kurulmuştur. Winkler, elastik zemini birbirine sonsuz yakın olan ve sıkışarak serbestçe hareket edebilen yaylar sistemi olarak düşünmüştür. Winkler hipotezi; $q(x)$ zemin tepkisi, $V(x)$ düşey doğrultudaki çökme ve k zemin karakterini gösteren parametre olmak üzere

$$q(x) = kV(x)$$

matematiksel ifadesi ile verilmektedir ve zemin-yapı etkileşimi problemlerinde kullanılacak en basit yaklaşım olarak kabul edilmektedir[11]. Bununla birlikte modelin ikinci kabulü ise zemine etkiyen bir kuvvetin sadece etkidiği noktada deformasyona neden olduğudur. Winkler modelinin yanında zeminde gerçekleşen kayma gerilmelelerini de içeren iki parametrelili modeller de geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları Pasternak, Vlasov ve Filonenko-Borodich zemin modelleridir[35]. Pasternak zemin modeli, zeminlerin mekanik davranışlarını tanımlamak için yaygın olarak kullanılmaktadır ve Winkler modeli bu modelin özel durumudur (Bakınız[19]).

Winkler elastik tabanı ile etkileşen elastik yapıların eğilmesi ile ilgili çalışmalar Euler-Bernoulli kirişinin statik analizi ile başlamış ve genellikle yaklaşık hesaplama teorilerinin çerçevesinde yapılmıştır[10]. Güncel çalışmalara örnek verilecek olunursa;

Euler-Bernoulli kiriş teorisinin genişletilmiş hali olan Kirchhoff plaka teorisi çerçevesinde Winkler tabanı ile etkileşen Kirchhoff plakasında kenar eğilme dalgalarının dispersiyon analizinin yapıldığı çalışma, Kaplunov ve ark.[14] tarafından yapılmıştır. Kirchhoff plaka teorisi, mühendislik problemlerinde kirişlerin eğilme karakterini belirleme ve kirişlerin eğilme hesaplarında kullanılan Euler-Bernoulli Kiriş Teorisinin daha kapsamlı halidir. Kirchhoff plaka teorisi ince plakalardaki gerilme ve deformasyonları belirlemek için kullanılmaktadır. Bu teoride yapıların enine kesme deformasyonları, gerilme bileşenlerinin Poisson etkileri ve yapıdaki atalet etkisi formülasyonlara hata terimi olarak eklenmektedir

[17]. Ayrıca Kaplunov ve ark.[15] tarafından yapılmış bir başka çalışmada ise Winkler elastik zemini ile etkileşen elastik ince plakalarda meydana gelen eğilmenin, plakanın kenar yüzeyinde meydana getirdiği dalgaların parabolik-eliptik bir davranış gösterdiğini ifade eden asimptotik bir model geliştirilmiş ve bu modelin dinamik-rezonans tipi problemlerin analizinde faydalı olabileceği öngörülmüştür. İki parametrelili elastik bir taban olan Pasternak elastik tabanı ile etkileşen yarı sonsuz Kirchhoff plakasının kenar eğilme dalgalarının, Pasternak tabanının yarı sonsuz ve sonsuz olması durumları için incelendiği çalışma ise Kaplunov ve Nobili[18] tarafından yapılmıştır. Çalışmada sonsuz Pasternak tabanı için kesme frekansı ve faz hızının taban rijitliği ile ilişkisinin yanı sıra kesme frekansının elastodinamikte oldukça nadir bir durum olan dalga sayısının sıfır olmadığı durumda gözlenmesi dikkat çekmiştir.

Etkileşim dinamiğinin incelendiği mühendislik problemlerinde çalışmalar devamlılığını sürdürmektedir. Yapılan çalışmalarda genellikle formülasyonlara ekstra atalet terimi eklenmekte fakat zemin etkisinden kaynaklanan kesme frekansı civarında eğilme dalgalarının etkisi dikkate alınmamaktadır. Bu dalgaların dispersiyon davranışı ile meydana geldikleri koşulların tanımlandığı ve sınıflandırıldığı çalışma Mace ve Marconi[24] tarafından yapılmıştır. Konuyla ilgili başka bir çalışmada ise ince dairesel silindirik kabuktaki dalgaların en düşük kesme frekansı civarındaki dinamik davranışının asimptotik teorisi geliştirilmiştir ve elde edilen sonuçların popüler bir uygulama alanı olan karbon nanotüpler gibi uzun, silindirik, ince duvarlı yapıların dinamik modellerinin yapılmasında kullanılabileceği öngörülmüştür[16]. İki boyutta düzlemsel gerilme koşullarında Winkler tabanı etkileşen elastik bir kiriş problemi için Erbaş ve ark.[8] yaptığı çalışmada asimptotik türetme yapılmıştır. Bunun yanında

elastik bir taban ile etkileşen katman ve kirişlerle ilgili genel mühendislik çalışmalarına Wang ve ark.[34], Dillard ve ark.[6], Younesian ve ark.[35], Tanahashi[31], Metrikine[25], Dumir[7], Chien ve Chen[5], Zhang ve Lui[36], Auersch[2], Chen ve Chen[4], Froio ve ark.[9] ile Ghannadiasl ve Mofid[13] çalışmaları örnektir.

Yapılan bu çalışma Bölüm 3'te ele alınan iki taraflı ve tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşimde olan elastik katman probleminin asimptotik analizi ve Bölüm 4'te ele alınan tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmanın formülasyonlarının iki boyutta asimptotik türetilmesi olmak üzere iki ana başlıkta sunulmuştur. Alt Bölüm 3.1'de düzlemsel gerinim koşullarında dalga potansiyelleri cinsinden verilen dinamik elastisite denklemleri ve problemi tarif eden sınır koşulları ifade edilmiştir. Alt Bölüm 3.2'te dispersiyon denklemleri elde edilmiştir. Dispersiyon denklemleri iki taraflı durum için simetrik ve antisimetrik modlarda ayrı ayrı bulunmuştur ve kesme frekanslarına karşılık gelen asimptotik açılımlar zayıf Winkler tabanı için hesaplanmıştır. Alt Bölüm 3.2'te elde edilen dispersiyon denklemlerinin uzun dalga boyuna sahip düşük frekanslı dalgalar varsayımı altında polinom ifadeleri iki taraflı durum için Alt Bölüm 3.3'te ve tek taraflı durum için Alt Bölüm 3.4'te türetilmiştir. Alt Bölüm 3.3'te antisimetrik modlar için elde edilen polinom formatındaki yaklaşımın Winkler tabanı ile etkileşen katman için bilinen geleneksel modellerle karşılaştırıldığında ekstra terimler içerdiği görülmüştür. Ayrıca kesme frekansı civarındaki ilişkiler de sunulmuştur. Simetrik modlar için elde edilen dispersiyon ilişkisinin başçıl terim yaklaşımının sadece zayıf Winkler tabanı için geçerliliğinin yanı sıra enine basmaya (compression) maruz kalan bir katmandaki boyuna genişleyen (longitudinal extensional) dalgalara karşılık geldiği görülmüştür. Benzer asimptotik değerlendirme tek taraflı durum için Alt Bölüm 3.4'te de yapılmıştır ancak elde edilen polinom formdaki dispersiyon ilişkileri ve kesme frekansı civarındaki asimptotik açılım genişleyen (extensional) dalgalar ve eğilme (bending) dalgalarının etkileşiminden dolayı daha karmaşık bir biçim almıştır.

Bölüm 4'de tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen katman üç boyutta bir problem olarak düşünülmüştür ve Alt Bölüm 4.1'de lineer elastisite denklemleri ve problemin sınır koşulları sunulmuştur. Karşılaştırma ve sağlama yapabilmek adına öncelikli olarak Alt Bölüm 4.2'de geleneksel 2-boyutlu plaka modeli için başçıl terimler yaklaşımıyla Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmanda eğilme dalgaları için bi-

linen geleneksel Kirchhoff denklemi asimptotik olarak türetilmiştir. Kesme frekansı civarında asimptotik türetme yapılabilmesi için önerilen alternatif ölçeklendirme ve kesme frekansı civarında yapılan başçıl terim ve ikinci mertebeden terim yaklaşımlar Alt Bölüm 4.3 kısmında elde edilmiştir ve devamında kesme frekansı civarındaki bu model daha detaylı olarak tartışılmıştır.



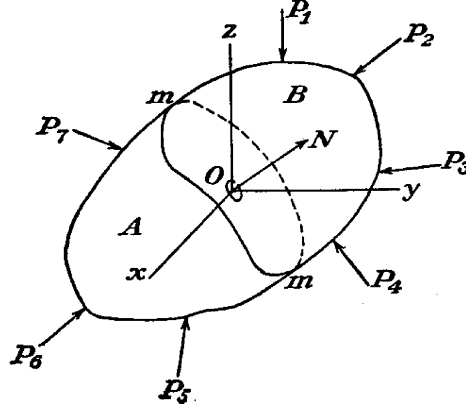
2. ÖN BİLGİLER

2.1. Elastisite Kavramı

Tüm yapı malzemeleri bir dereceye kadar elastisite özelliğine sahiptir. Yani bir yapının deformasyonuna neden olan dış kuvvetler belirli bir sınırı aşmazsa, bu kuvvetlerin kaldırılmasıyla deformasyon ortadan kalkar. Bu çalışma boyunca, dış kuvvetlerin etkisine maruz kalan yapıların tamamen elastik olduğu, yani kuvvetlerin kaldırılmasından sonra ilk şekline tamamen geri döndükleri varsayılacaktır.

2.2. Gerilme Kavramı(σ)

Şekil 2.1 ile gösterilen cisim dengedeki bir cismi ifade etsin. P_1, \dots, P_7 dış kuvvetlerinin etkisi altında, cisimde iç kuvvetler üretilecektir. Herhangi bir O noktasındaki bu kuvvetlerin büyüklüğünü inceleyebilmek için, cismin bu noktadan mm ara kesitiyle A ve B olmak üzere iki parçaya ayrıldığı düşünölsün. Bu parçalardan biri,



Şekil 2.1. P dış kuvvetlerine maruz kalan dengedeki bir cisim[32]

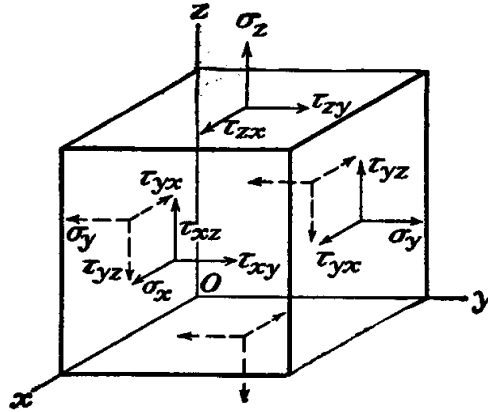
örneğin A göz önüne alındığında, P_1, \dots, P_7 dış kuvvetlerinin etkisi altında dengede olduğu ve mm kesiti boyunca dağıtılan iç kuvvetlerin dengede olduğu ve B parçasının A parçası üzerindeki etkiyi temsil ettiği söylenebilir. Bu kuvvetlerin, etki ettiği yüzey üzerinde hidrostatik basınç veya rüzgar basıncının sürekli olarak dağılmasıyla aynı şekilde mm alanı üzerinde sürekli olarak dağıldığı kabul edilecektir. Bu tür kuvvetlerin büyüklükleri genellikle yoğunlukları ile tanımlanır, yani, üzerine etki ettikleri yüzeyin birim alanı başına düşen kuvvet miktarı ile tanımlanır, buna da *gerilme*(σ) adı verilir. Herhangi bir O noktasında mm kesitinden alınan bir δA alanına etki eden gerilmenin büyüklüğünü elde etmek için A parçasının B parçasına

etkisinden dolayı bu temel A alanı boyunca etki eden kuvvetlerin olduğu varsayılırsa bu kuvvetler δP 'ye indirgenebilir ve δA alanı sürekli olarak daraltılırsa, $\delta P/\delta A$ oranının limit değeri bize O noktasındaki mm kesitine etki eden gerilmenin büyüklüğünü verir. Matematiksel olarak gösterildiğinde ise aşağıdaki şekilde ifade edilir[32]:

$$\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta A}. \quad (2.1)$$

2.3. Kuvvetler ve Gerilmeler için Notasyon

Cisimlere etki eden iki tür dış kuvvet vardır. Bir cismin diğeri üzerindeki basıncı veya hidrostatik basınç gibi cismin yüzeyine dağılan kuvvetlere yüzey kuvvetleri denir. Yerçekimi kuvvetleri, manyetik kuvvetler veya hareket halindeki bir cismin durumunda atalet kuvvetleri gibi bir cismin hacmine dağılan kuvvetlere ise cisim kuvvetleri denir. Birim hacim başına cisim kuvveti üç bileşene ayrılın ve bu bileşenler X, Y ve Z ile gösterilsin. Normal gerilmeler için σ , kayma gerilmeleri için τ notasyonu kullanılsın. Eğer Şekil 2.1 ile verilen cisimde O noktasında koordinat eksenlerine paralel çok küçük kübik bir parça olarak alınırsa, Şekil 2.2 görüldüğü gibi bu parçanın kenarlarına etki eden gerilme bileşenlerinin gösterimleri ve yönler pozitif olarak alınır[32]. Cauchy gerilme kübü olarak bilinen bu kübik parçanın ör-



Şekil 2.2. Gerilme bileşenleri[32]

neğin y -eksenine dik olan kenarları için bu kenarlara etki eden gerilmenin normal bileşenleri σ_y ile gösterilir. σ_y , gerilmenin y -eksenine dik bir düzlemde etki ettiğini gösterir. τ_{yz} ve τ_{yx} ise y eksenine dik olan düzlemdeki kayma gerilmeleridir. Normal

yöndeki gerilme, çekme sonucu meydana geliyorsa pozitif, basma sonucu meydana geliyorsa negatif alınır.

2.4. Gerinim Kavramı(ϵ)

Gerinim, yük altındaki bir malzemenin, yük uygulamadan önceki durumla kıyaslandığında şeklinin ne oranda değiştiği yani ne kadar deforme olduğunu ifade eder. Bir malzemenin herhangi bir yük uygulamadan önceki uzunluğu l_0 ve yük uygulandıktan sonraki uzunluğu l olmak üzere gerinim(ϵ)

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.2)$$

olarak ifade edilir. Bir malzemenin birim şekil değişimi olarak da tanımlanan gerinim, boyutsuz bir ifadedir.

2.5. Hooke Yasası

Bir yapının deforme olma ya da birim şekil değiştirme miktarı uygulanan geriminin büyüklüğüne bağlıdır. Nispeten düşük seviyede gerilmeye maruz bırakılan çoğu malzeme için gerilme ve gerinim arasındaki ilişki Hooke Yasası olarak adlandırılan

$$\sigma = E\epsilon \quad (2.3)$$

lineer ilişkisidir[32]. Burada E elastik modüldür. Hooke Yasası en genel olarak

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\delta_{ij}\epsilon_{kl} \quad (2.4)$$

ile tanımlanır. Burada

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{ijkl} \quad (2.5)$$

81 bileşenli elastik sabitlerdir ve C_{ijkl} elastik sabitleri

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.6)$$

olarak ifade edilir. Burada δ_{ij} Kronecker delta fonksiyonu olup

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bütün bunlarla birlikte Hooke Yasası en bilinen formuyla aşağıdaki şekilde verilir:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.7)$$

Bu ifadede λ ve μ Lamé elastik sabitleridir[1]. Bu ifade ayrıca

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

olarak da yazılabilir. Daha açık yazmak gerekirse σ_{ij} tensör bileşenleri

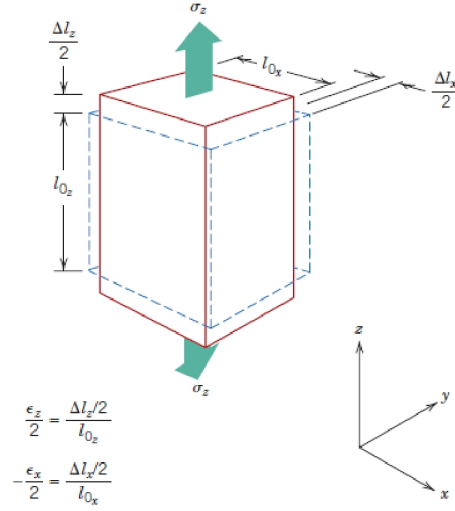
$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), & \sigma_{13} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \sigma_{21} &= \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), & \sigma_{22} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \sigma_{23} &= \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \sigma_{31} &= \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), & \sigma_{32} &= \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), & \sigma_{33} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

şeklindedir.

2.6. Malzemelerin Elastik Özellikleri

Bir malzemeye Şekil 2.3 ile gösterildiği gibi bir çekme gerilmesi uygulandığında, keyfi olarak z -yönünde uygulanan bu gerilme elastik bir uzama ve buna eşlik eden ε_z gerinimi meydana getirir. Bu uzama sonucunda uygulanan kısma dik yanal (x ve y) yönlerinde daralmalar olacaktır. Bu daralmalardan ε_x ve ε_y basma gerinimleri belirlenebilmektedir. Uygulanan gerilme tek eksenliyse (yalnızca z yönünde) ve malzeme izotropikse ($\varepsilon_x = \varepsilon_y$), Poisson oranı olarak adlandırılan bir parametre, yanal ve eksenel gerinimlerin oranı veya

$$\nu = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \quad (2.9)$$



Şekil 2.3. Bir çekme gerilmesi sonucu meydana gelen aksenal(z) uzama (pozitif gerilme). Düz çizgiler gerilme uygulandıktan sonraki, kesikli çizgiler ise önceki boyuları temsil eder.[3]

olarak tanımlanır. Negatif işaret Poisson oranına dahil edilmiştir, böylece ϵ_x ve ϵ_y gerinimleri her zaman pozitif işaretli olacaktır. Teorik olarak izotropik malzemeler için Poisson oranı maksimum 0.50'dir. Birçok metal ve diğer alaşımlar için Poisson oranı 0.25 ile 0.35 arasında değişmektedir[3].

İzotropik malzemeler için kayma(μ) ve elastiklik modülü(E) birbiriyle ilişkilidir ve bu ilişki Poisson oranına bağlı olarak

$$E = 2\mu(1 + \nu) \quad (2.10)$$

şeklinindedir. Bahsedilen bu elastik sabitlerin yanında lineer elastisitede λ Lamé modülü ve K bulk modülü gibi pek çok elastik malzeme sabiti ve bunlar arasındaki ilişkiler de kullanılmaktadır. İzotropik elastik malzemeler için Tablo 2.1'de gösterilen elastik materyal sabitleri ve aralarındaki ilişkiler sıkça kullanılmaktadır.

Tablo 2.1. Elastik malzeme sabitlerinin arasındaki ilişkiler[1]

	\mathbf{E}, ν	\mathbf{E}, μ	λ, μ
λ	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	λ
μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ	μ
E	E	E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$
ν	ν	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

2.7. Gradyant ve Vektörel Çarpımın Bazı Özellikleri

Tanım 1. Üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminde (i, j, k) birim vektör olmak üzere bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunun gradyanı

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2. Üç boyutlu kartezyen koordinatlarda, sürekli ve türevlenebilir bir $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ vektörel fonksiyonun diverjansı

$$\text{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

olarak skaler değerli bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 3. $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ vektörel fonksiyonu için kartezyen koordinatlarda vektörel çarpım

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

ile tanımlanır.

2.7.1. Özellikler

\mathbf{A} ile \mathbf{B} vektör alanlar ve ϕ skaler alan olmak üzere gradyant ve vektörel çarpım ile ilgili bazı özellikler şöyledir:

1. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
2. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
3. $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \phi)$
4. $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A}$
5. $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$
6. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
7. $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$
8. $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla^2 \mathbf{A}$

2.8. Hareket Denklemleri

Homojen izotropik elastik bir cismin hareket denklemi, Hooke Yasası ve gerilme bileşenleri kartezyen tensör notasyonları kullanılarak

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (2.11)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (2.12)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.13)$$

denklemleri ile verilir. Burada σ_{ij} Cauchy gerilme tensörü, u_i yerdeğiştirme vektörü, \mathbf{f} dış kuvvet, ρ yoğunluk, ϵ_{ij} gerinim tensörüdür. Gerilme-gerinim ilişkisi olarak bilinen (2.7) ifadesi ile gerinim için verilen (2.13) ifadesi (2.11) eşitliğinde yerine yazılıp ifade düzenlendiğinde **Navier Denklemi** olarak bilinen aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Bu denklemin vektörel karşılığı ise

$$(\lambda + \mu)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

olarak yazılabilir. Burada yer alan \mathbf{u} yerdeğiştirme vektörü **Helmholtz Ayırışma Teoremi** olarak bilinen aşağıdaki teorem ile Φ skaler ve Ψ vektörel dalga potansiyellerine bağlı olarak ifade edilebilmektedir[1].

Teorem 1. V uzayının bir bölgesinde ve T kapalı zaman aralığında $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ve $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ vektörleri $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(V \times T)$ ve $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(V \times T)$ koşullarını sağlasın ve F skaler potansiyel, \mathbf{G} vektörel potansiyel olmak üzere

$$\mathbf{f} = c_L^2 \nabla F + c_T^2 \nabla \times \mathbf{G} \quad (2.16)$$

olsun. Skaler bir $\Phi(x, t)$ fonksiyonu ve vektör değerli bir $\Psi(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ yerdeğiştirmesi $\nabla \cdot \Psi = 0$ olmak üzere

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \quad (2.17)$$

şeklinde ifade edilebilir[1].

Ayrıca $\Phi(x, t)$ ve $\Psi(x, t)$ fonksiyonları $c_L^2 = \lambda + 2\mu/\rho$ ve $c_T^2 = \mu/\rho$ olmak üzere

$$\nabla^2 \Phi + F = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

$$\nabla^2 \Psi + \mathbf{G} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

homojen olmayan dalga denklemlerini sağlar [1]. Bu denklemlerin elde edilişi Bölüm 3 'de gösterilmiştir.

2.9. Düzlemsel Gerinim Koşulları(Plane Strain)

xyz koordinat düzlemine oturtulan bir cisme uygulanan kuvvetlerin sadece $x - y$ düzleminde deformasyona sebep olduğunun varsayıldığı koşullara düzlemsel gerinim koşulları denir. Birim şekil değiştirmenin z - eksenini boyunca sıfır kabul edildiği bu koşul Hooke Yasası'ndan türetilen (2.13) gerinim bileşenleri ile aşağıdaki şekilde verilir:

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0. \quad (2.20)$$

Bu da yüke maruz kalan malzemenin kalınlığı boyunca gerçekleşen gerilmenin ihmal edildiği anlamına gelmektedir. Ayrıca düzlemsel gerinim koşullarında yerdeğiştirmeler de x yönündeki yerdeğiştirme $u = u(x, y)$, y yönünde yerdeğiştirme $v = v(x, y)$ ve z yönünde yerdeğiştirme $w = 0$ olarak alınır.

2.10. Serbest Elastik Bir Katman İçin Dispersiyon İlişkisi

α_1 , α_2 , ve α_3 kartezyen koordinatlar ve $-\infty \leq \alpha_1 \leq \infty$, $-h \leq \alpha_3 \leq h$ olmak üzere $2h$ kalınlığında serbest bir elastik katman düşünölsün:

Bu elastik katman için hareket denklemleri

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\Delta\mathbf{v} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\text{graddiv}\mathbf{v} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.21)$$

şeklindedir[17] ve burada $\mathbf{v} = (v_1, 0, v_3)$ yerdeğiştirmedir. Gerilmeler ise yerdeğiştirmelere bağılı olarak aşağıdaki şekildedir[17]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{(1+\nu)\chi^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{(1-\nu^2)\chi^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right) \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)\chi^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \right) \\ \sigma_{31} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} \right) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{32} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Burada $\chi = \sqrt{1 - 2\nu/2(1 - \nu)}$. Problemin sınır koşulları:

$$\sigma_{31} = \sigma_{33} = 0, \quad \alpha_3 = \pm h. \quad (2.23)$$

Φ ve Ψ dalga potansiyelleri olmak üzere yerdeğiştirmeler

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_3}, \quad v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} \quad (2.24)$$

şeklindedir[17]. (2.21) ile verilen hareket denkleminde (2.24) numaralı yerdeğiştirmeler yazıldığında aşağıdaki iki dalga denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Delta_1\Phi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta_1\Psi - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Bu denklemlerin elde edilmesine Bölüm 3' de yer verilmiştir. (2.25) denklemlerinde

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}.$$

biçiminde tanımlanır. Problem için boyutsuz değişkenler ξ , ζ , t ve boyutsuz dalga sayısı ve frekansı

$$\xi = x/h, \quad \zeta = y/h, \quad t = \frac{h}{c_2}\tau, \quad K = kh, \quad \Omega = \frac{\omega h}{c_2}\tag{2.26}$$

ve aranan çözümler

$$\Phi = f(\zeta) \exp i(K\xi_i - \Omega\tau)\tag{2.27}$$

$$\Psi = g(\zeta) \exp i(K\xi_i - \Omega\tau)\tag{2.28}$$

şeklindedir[17]. Bu dalga çözümleri (2.25) denklemlerinde yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{d\zeta^2} - \alpha^2 f &= 0, \\ \frac{d^2g}{d\zeta^2} - \beta^2 g &= 0\end{aligned}\tag{2.29}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada

$$\alpha^2 = K^2 - \chi^2\Omega^2, \quad \beta^2 = K^2 - \Omega^2\tag{2.30}$$

biçiminde tanımlıdır.

Simetrik modlar için u_1 yerdeğiştirmesi, σ_{22} gerilmesinin elastik katmanın kalınlık değişkenini ifade eden ζ değişkenine göre çift fonksiyon ve u_2 yerdeğiştirmesi ile σ_{12} gerilmesi ise tek fonksiyondur[17]. Bu durumda (2.29) denklemlerinin çözümü olan

f ve g fonksiyonları

$$f(\zeta) = A \cosh(\alpha\zeta), \quad g(\zeta) = B \sinh(\beta\zeta) \quad (2.31)$$

olarak alınır. İfade edilen (2.22) gerilmeleri, (2.27) ve (2.35), (2.23) ile verilen sınır koşullarında yazıldığında aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} AiK\alpha \sinh \alpha + B\gamma^2 \sinh \beta &= 0 \\ A\gamma^2 \cosh \alpha - BiK\beta \cosh \beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Burada $\gamma^2 = K^2 - \Omega^2/2$ ile tanımlıdır. Bu sistemin aşıkâr çözümden farklı çözümü olması için determinantının sıfır olması gerekir. Dolayısıyla sistemin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle

$$\gamma^4 \cosh \alpha \frac{\sinh \beta}{\beta} - \alpha^2 K^2 \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \cosh \beta = 0 \quad (2.33)$$

denklemi elde edilir ki bu denklem Rayleigh-Lamb dispersiyon denklemidir[29]-[22]. Bu hiperbolik eşitlik $K \sim 1$ ve $\Omega \sim 1$ olmak üzere Taylor serisine açıldığında

$$K^2 = \frac{1 - \nu}{2} \Omega^2 \quad (2.34)$$

dispersiyon ilişkisi elde edilir. Bu denklem klasik düzlem gerinme denklemidir. Antisimetrik moddaki dalgalar için u_1 yerdeğiştirmesi ve σ_{22} gerilmesinin ζ değişkine göre tek fonksiyon, u_2 yerdeğiştirmesi ve σ_{12} gerilmesi ise çift fonksiyondur[17]. Bu durumda (3.22) denklemlerinin çözümü olan (3.24) fonksiyonları

$$f(\zeta) = A \sinh(\alpha\zeta), \quad g(\zeta) = B \cosh(\beta\zeta) \quad (2.35)$$

olarak alınır. Simetrik modlarda uygulanan prosedür aynen izlendiğinde Rayley-Lamb dispersiyon denklemi antisimetrik modlar için

$$\gamma^4 \frac{\sinh \alpha}{\alpha} \cosh \beta - \beta^2 K^2 \cosh \alpha \frac{\sinh \beta}{\beta} = 0 \quad (2.36)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu denklem $K \sim 1$ ve $\Omega \sim 1$ olmak üzere Taylor serisine açıldığında

$$K^4 = \frac{3(1 - \nu)}{2} \Omega^2 \quad (2.37)$$

dispersiyon ilişkisi yaklaşık olarak elde edilir[17]. Bu da eğilen kiriş denkleminin karşılık gelmektedir.

2.11. Winkler Tabanı Modeli

Zemin-yapı etkileşiminin söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarında çalışmanın matematiksel kurgusunu yaratabilmek için bir takım yaklaşımlar ve modeller geliştirilmiştir. Winkler Tabanı yaklaşımı da bu tip problemlerde elastik zemin davranışının incelenebilmesi için Winkler tarafından 1867’de geliştirilmiştir. Hooke Yasasını demiryolu yataklarını modellemek için yeniden yazan Winkler’in bu modeline göre elastik zemin üzerine oturtulmuş bir kirişin herhangi bir noktasındaki zemin tepkisi o noktada gerçekleşen çökme ile orantılıdır. Winkler tabanı modeli matematiksel olarak

$$q(x) = kW(x) \quad (2.38)$$

lineer eşitliği şeklinde ifade edilmektedir[19]. Burada $q(x)$ zemin tepkisidir birimi $[N]/[m^2]$,

dir, $W(x)$ düşey doğrultudaki çökmedir birimi $[m]$ ve k zemin karakterini gösteren parametredir ve birimi $[N]/[m^3]$. Winkler’ in ikinci hipotezine göre Şekil 2.4’de gö-



Şekil 2.4. Winkler Tabanı Modeli[11]

rüldüğü gibi elastik zemin birbirine sonsuz yakın olan ve sıkışarak serbestçe hareket edebilen yaylar sistemidir bu da zemine etkileyen kuvvetin sadece etkilediği noktada deformasyona neden olduğu anlamına gelmektedir. Winkler tabanı yaklaşımı toprak zemini temsil etmek için kullanılan en basit bir modeldir. Ancak elastik desteklerdeki(mesnetlerdeki) kiriş teorisi başka varsayımlara dayanmaktadır[20]:

- Kiriş rijittir, kiriş ve zemin arasında kayma gerçekleşmez.
- Yaylar birbirinden bağımsızdır, yani zemine etki eden sürtünme kuvveti ihmal edilmektedir.
- Elastik taban dışında bunu çevreleyen zemin katıdır.
- Sistem yatay yönde kinematiktir ve bu nedenle yanal bir kısıtlama sağlanmamıştır.

(2.38) eşitliği ile verilen Winkler modeli tek parametrelidir. İsviçreli-Rus inşaat mühendisi P. L. Pasternak(1885-1963) yaylardaki kaymayı da hesaba katarak yeni bir model ifade etmiştir[27]. Pasternak yay sabiti k olan yaylarla kayma modülü olan G_p parametresini birbirine bağlamıştır yani zeminin kayma gerilmelerini de içeren iki parametrelidir ve matematiksel olarak k yay sabiti(zemin parametresi) ve G_p kayma modülü olmak üzere

$$q = kW - G_p \nabla^2 W \quad (2.39)$$

lineer olmayan eşitliği ile ifade edilen Pasternak Modelidir ve bu modelin özel bir durumu Winkler modelidir[20].

2.12. Asimptotik Yaklaşım

Bazı durumlarda problemlerin çözümlerini araştırırken karşılaşılan integral veya diferansiyel denklemlerde analitik çözüm bulabilmek pek mümkün olamamaktadır. Bu durumlarla başa çıkabilmek için yaklaşık çözüm tekniğinin geliştirilmesiyle asimptotik analiz kavramı geliştirilmiştir. Öncelikle 1886 yılında Poincaré asimptotik açılım tanımlamasını yapmış ve böylelikle asimptotik analizin temelleri atılmıştır[26].

Çoğu bilim insanı fiziksel ve matematiksel problemlerde integral ve diferansiyel denklemler için hesaplama yaparken asimptotik analiz metotlarından faydalanmıştır. Bu metotlar başta Watson Lemma, durgun faz metodu ve en dik iniş yöntemi (steepest descent metodu)... olmak üzere kullanılmaktadır[28].

Tanım 4. $f(z)$ ve $g(z)$ bir D bölgesinde tanımlı kompleks değerli iki fonksiyon olsun. $z \rightarrow z_0$ iken

$$|f| \leq K|g|, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

olacak şekilde K ve δ sabitleri varsa $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$ şeklinde gösterilir ve $z \rightarrow z_0$ iken f, g 'nin "büyük O " mertebesindedir denir.

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

Tanım 5. $f(z)$ ve $g(z)$ bir D bölgesinde tanımlı kompleks değerli iki fonksiyon olsun. $z \rightarrow z_0$ iken

$$|f| \leq \varepsilon |g|, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

olacak şekilde her pozitif ε değeri için ε' dan bağımsız bir δ değeri varsa $f(z) = o(g(z))$ şeklinde gösterilir ve $z \rightarrow z_0$ iken f, g 'nin "küçük o " mertebesindedir denir.

Dolayısıyla $z \rightarrow z_0$ iken $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$, $f/g \rightarrow 0$ anlamına gelmektedir. Öte yandan $f(z) = o(g(z))$ ise $z \rightarrow z_0$ iken f/g 'nin sınırlı olması anlamına gelmektedir.

Dahası $\lim_{z \rightarrow z_0} f/g = 1$ oluyorsa, $z \rightarrow z_0$ limiti altında f ve g fonksiyonları birbirinin asimptotik eşitidir denir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1 \Rightarrow f(z) \sim g(z), \quad z \rightarrow z_0.$$

Tanım 6. $z \rightarrow z_0$ iken $\phi_{n+1}(z) = o(\phi_n(z))$ için

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \phi_{n+1}/\phi_n = 0$$

oluyorsa, $\{\phi_n(z)\}_n$, $n = 1, 2$, sonlu ya da sonsuz fonksiyonlar dizisine asimptotik dizi denir (Murray, 1984).

Tanım 7. Eğer $z \rightarrow z_0$ iken $\{\phi_n(z)\}$ bir asimptotik dizi ise a_n sabit olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(z)$$

ifadesine bir **asimptotik açılım** denir yada her N için

$$f(z) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(z) + o(\phi_N(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

*ifadesine $f(z)$ fonksiyonunun **asimptotik yaklaşımı** denir.*

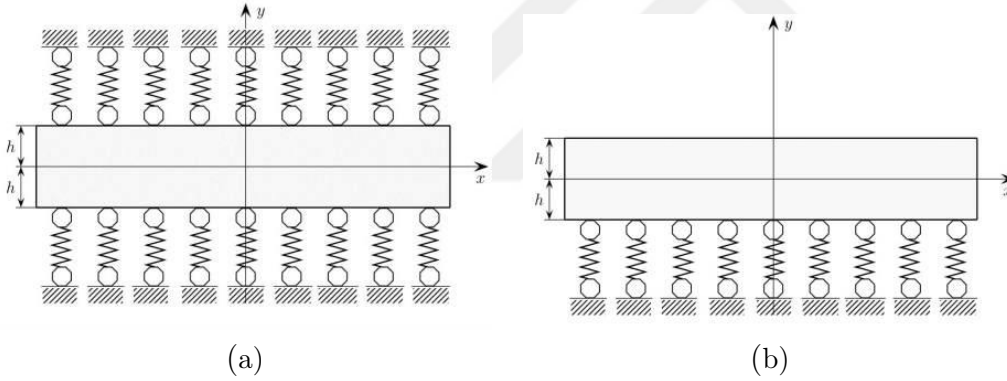


3. İKİ TARAFLI VE TEK TARAFLI WINKLER TABANI İLE ETKİLEŞEN ELASTİK KATMAN

Bu bölümde iki ve tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşimde olan elastik bir katmandaki dalgaların kesme frekansı civarındaki etkisinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bunun için öncelikle dispersiyon denklemleri elde edilecektir. Devamında ise her iki durum için de kesme frekansı hesaplandıktan sonra dispersiyon denklemlerinin kesme frekansı civarında asimptotik analizleri yapılacaktır.

3.1. Problemin İfadesi

Düzlemsel gerinim koşullarında, kalınlığı $2h$ olan izotropik elastik bir katman ele alınsın. Bu elastik katman, rijitliği θ olan Winkler tabanı ile Şekil 3.1(a)' da görüldüğü gibi $y = \pm h$ sınırında iki taraflı ve Şekil 3.1(b)' de verildiği gibi $y = -h$ sınırında tek taraflı olmak üzere x - eksenine paralel olarak desteklensin.



Şekil 3.1. (a) İki taraflı ve (b) tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katman

Problemde x -ekseni boyunca yerdeğiştirme u_1 ve y -ekseni boyunca yerdeğiştirme u_2 olmak üzere iki boyuttaki yer değiştirme vektörü $\mathbf{u}(u_1, u_2, t)$, $u_i(x, y)$ olmak üzere $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ için hareket denklemleri (2.15) denklemlerinden

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

şeklindedir. Ayrıca gerilme bileşenlerinin yer değiştirmeler cinsinden ifadesi (2.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\chi^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3.2)$$

olup $\chi = c_2/c_1 = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$, $E = 2(1+\nu)\mu$ Young modülü ve ν Poisson oranıdır. Sınır koşuları Winkler tabanı özelliğinden (2.38)'den Şekil 3.1(a) ile ifade edilen iki taraflı durum için

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= -\theta u_2, & \sigma_{12} &= 0, & y &= +h, \\ \sigma_{22} &= \theta u_2, & \sigma_{12} &= 0, & y &= -h.\end{aligned}\quad (3.3)$$

olarak, Şekil 3.1(b) ile ifade edilen tek taraflı durum için

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= 0, & \sigma_{12} &= 0, & y &= +h, \\ \sigma_{22} &= \theta u_2, & \sigma_{12} &= 0, & y &= -h\end{aligned}\quad (3.4)$$

şeklinde ele alınır. Şimdi yer değiştirme bileşenleri için Helmholtz ayrışım teoremini uygulayalım(bakınız Alt Bölüm 2.8). ϕ skaler potansiyel, $\boldsymbol{\psi} = (0, -\psi, 0)$ vektörel potansiyel olmak üzere \mathbf{u} yer değiştirmesi için

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}, 0 \right)\quad (3.5)$$

eşitliği yazılır. Dolayısıyla yer değiştirmeler

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x},\quad (3.6)$$

şeklinde dalga potansiyelleri cinsinden ifade edilmiş olur. O halde (3.6) yer değiştirmeleri (3.1) hareket denkleminde yerine yazıldığında

$$\mu\nabla^2[\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}] + (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot [\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}] = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}]$$

olur. Gradyant ve kartezyen çarpımın özelliklerinden $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$ ve $\nabla \cdot \nabla \times \psi = 0$ olduğu için

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[\mu \nabla^2 \psi - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (3.7)$$

vektör eşitliği elde edilir. Bu vektörel eşitliğin sağlanabilmesi için

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mu \nabla^2 \psi - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.9)$$

eşitliklerinin olması gerekir. (3.8)₁ denkleminde her iki taraf $(\lambda + 2\mu)$ ile (3.8)₂ denkleminde her iki taraf μ ile bölüldüğünde $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ve $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ olmak üzere $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ için hareket denklemleri

$$\Delta_2 \phi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.10)$$

$$\Delta_2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

şeklinde potansiyeller cinsinden ayrık iki dalga denklemi olarak yazılır. Burada c_1 boyuna dalga hızını ve c_2 enine dalga hızını ifade etmektedir, λ ve μ Lamé elastik modülü, ρ yoğunluk ve $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ iki boyutta Laplace operatörüdür. (3.2) gerilme bileşenlerinin potansiyeller ile ifadesi ise

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \Delta_2 \phi, \\ \sigma_{12} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

biçiminde yazılır[1]. Ayrıca (3.3)-(3.4) ile verilen sınır koşullarının da potansiyeller ile ifadesi iki taraflı durum için

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)\chi^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= \mp \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad y = \pm h, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0, \quad y = \pm h, \end{aligned} \quad (3.13)$$

tek taraflı durum için

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0, \quad y = h, \\ \frac{E}{2(1+\nu)\chi^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) &= \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad y = -h, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0, \quad y = \pm h, \end{aligned} \quad (3.14)$$

olarak ifade edilir. (3.10) ve (3.11) hareket denklemlerinin çözümleri ϕ ve ψ dalga çözümleri

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= f(y) \exp i(kx - \omega t) \\ \psi(x, y, t) &= g(y) \exp i(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (3.15)$$

biçiminde x -ekseni boyunca ilerleyen, y -ekseni boyunca salınım yapan dalga formunda aranacaktır. Burada k dalga sayısı, ω dalga frekansıdır.

Çalışmada asıl amaç uzun-dalga boyu ve düşük-frekans varsayımı altında Şekil 3.1(b) ile verilen Winkler zemini ile etkileşen ince Kirchoff plakasındaki eğilme dalgaları için iyi bilinen bir mühendislik formülasyonu olan

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2h\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \theta w = 0 \quad (3.16)$$

denklemleri ifade edilen klasik modeli geliştirmektir. Burada w yerdeğiştirmesi $w = \exp i(kx - \omega t) = u_2(x, 0)$ yerdeğiştirmesine karşılık gelmektedir. Şekil 3.1 (a) ile ifade edilen iki taraflı Winkler tabanı ile etkileşen katman problemi ise sahip olduğu simetrik geometriden dolayı tek taraflı durumun dispersiyon analizinin daha kontrollü ve anlaşılabilir yapılabilmesi amacıyla ele alınacaktır.

3.2. Dispersiyon Denklemleri ve Kesme Frekansı

Bu bölümde Şekil 3.1 ile verilen iki taraflı ve tek taraflı Winkler tabanlı etkileşen elastik katmanlar için dalga sayısı ve dalga frekansı arasındaki ilişkiyi veren dispersiyon denklemleri ve bu yapılara ait kesme frekansları elde edilecektir. Öncelikle hesaplamalarda kolaylık sağlaması amacıyla problemdeki girdilerin birimsiz halde ifade edilmesiyle başlanacaktır. Bunun için ise bağımsız değişkenler, dalga sayısı ve frekans aşağıdaki biçimde yeniden ölçeklendirilerek

$$\xi = x/h, \quad \zeta = y/h, \quad t = \frac{h}{c_2}\tau, \quad K = kh, \quad \Omega = \frac{\omega h}{c_2} \quad (3.17)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu ölçeklendirme kullanılarak (3.15) ile verilen dalga potansiyelleri

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \zeta, \tau) &= f(\zeta) \exp i(K\xi - \Omega\tau), \\ \psi(\xi, \zeta, \tau) &= g(\zeta) \exp i(K\xi - \Omega\tau), \end{aligned} \quad (3.18)$$

boyutsuz olarak, (3.10) ve (3.11) ile verilen hareket denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \chi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

şeklinde boyutsuz olarak yazılır. Ayrıca (3.14) sınır koşullarında da (3.17) ölçeği uygulandığında iki taraflı durum için sınır koşulları

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)\chi^2 h^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} \right) &= \mp \frac{\theta}{h} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right), \quad \zeta = \pm 1, \\ \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right) &= 0, \quad \zeta = \pm 1, \end{aligned}$$

tek taraflı durum için sınır koşulları

$$\begin{aligned}\frac{E}{2(1+\nu)\chi^2h^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\zeta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} \right) &= 0, \quad \zeta = 1, \\ \frac{E}{2(1+\nu)\chi^2h^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\zeta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} \right) &= \frac{\theta}{h} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right), \quad \zeta = -1, \\ \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\zeta} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} \right) &= 0, \quad \zeta = \pm 1,\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadelerde sadeleştirme yapıldığında ve $\mu = E/2(1+\nu)$ yerine yazıldığında sınır koşulları iki taraflı durum için

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\zeta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} &= \mp \frac{\theta h \chi^2}{\mu} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right), \quad \zeta = \pm 1, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\zeta} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} &= 0, \quad \zeta = \pm 1,\end{aligned}\tag{3.20}$$

ve tek taraflı durum için

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\zeta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} &= 0, \quad \zeta = 1, \\ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\zeta} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} &= \frac{\theta h \chi^2}{\mu} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} + \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right), \quad \zeta = -1, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi\partial\zeta} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} &= 0, \quad \zeta = \pm 1,\end{aligned}\tag{3.21}$$

olarak boyutsuz formda yazılır.

Öncelikle (3.18) ile verilen dalga potansiyelleri (3.19) denklemlerinde yerine yazılarak

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{d\zeta^2} - \alpha^2 f &= 0, \\ \frac{d^2g}{d\zeta^2} - \beta^2 g &= 0\end{aligned}\tag{3.22}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada

$$\alpha^2 = K^2 - \chi^2\Omega^2, \quad \beta^2 = K^2 - \Omega^2\tag{3.23}$$

ile tanımlıdır. (3.22) diferansiyel denklemlerin çözümleri olan f ve g fonksiyonları e_1 , e_2 , o_1 ve o_2 bilinmeyen sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= e_1 \cosh(\alpha\zeta) + o_1 \sinh(\alpha\zeta), \\ g(\zeta) &= o_2 \cosh(\beta\zeta) + e_2 \sinh(\beta\zeta) \end{aligned} \quad (3.24)$$

olarak hesaplanmıştır.

3.2.1. İki Taraflı Durum

Geometrisi Şekil 3.1.a ile verilen iki taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmanın simetrik bir yapıya sahip olmasının, tek taraflı Winkler tabanı ile desteklenmiş elastik katmanın(Şekil 3.1.b) dispersiyon analizinin anlaşılmasında kolaylık sağlayacağı öngörüldüğünden problemin çözümüne iki taraflı durumun analizinden başlanacaktır. Bu sebeple dispersiyon denklemlerinin eldesinde de bu sıra gözetilmiştir. Bu alt bölümde iki taraflı Winkler zemini ile etkileşen elastik katman için dispersiyon denklemi elde edilmiştir. İki taraflı Winkler tabanı ile etkileşen katman için elastik dalgalar simetrik ve antisimetrik modlarda ele alınmıştır dolayısıyla simetrik ve antisimetrik modlar için dispersiyon denklemleri ayrı ayrı bulunmuştur.

Simetrik Mod

Elastik dalgalar için simetrik modda u_1 yerdeğiştirmesi ve σ_{22} gerilmesinin elastik katmanın kalınlık değişkenini ifade eden ζ değişkenine göre çift fonksiyon olduğu, u_2 yerdeğiştirmesi ile σ_{12} gerilmesinin tek fonksiyon olduğu Kaplunov ve ark.[17] tarafından ifade edilmiştir. Bu durumda (3.22) denklemlerinin çözümü olan (3.24) fonksiyonlarının çift ve tek kısımları dikkate alındığında u_1 yer değiştirmesi ve σ_{22} gerilmesinin çift, u_2 yerdeğiştirmesi ile σ_{12} gerilmesinin tek fonksiyon olması gerektiğinden

$$f(\zeta) = e_1 \cosh(\alpha\zeta), \quad g(\zeta) = e_2 \sinh(\beta\zeta) \quad (3.25)$$

olarak alınmıştır ve varsayılan (3.18) dalga çözümleri simetrik mod için aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\phi(\xi, \zeta, \tau) &= e_1 \cosh(\alpha\zeta) \exp i(K\xi - \Omega\tau), \\ \psi(\xi, \zeta, \tau) &= e_2 \sinh(\beta\zeta) \exp i(K\xi - \Omega\tau).\end{aligned}\tag{3.26}$$

(3.20) ile verilen boyutsuz sınır koşulları enine yer değiştirmenin tek olması gerektiği için u_2 yer değiştirmesinin tek kısmı alındığında

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} &= \mp \frac{\theta h \chi^2}{2\mu} (u_2(\xi, \zeta) + u_2(\xi, -\zeta)), \quad \zeta = \pm 1; \\ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0, \quad \zeta = \pm 1\end{aligned}\tag{3.27}$$

olarak yazılır. Burada (3.6) ve (3.26) eşitliklerinden

$$\frac{1}{2} (u_2(\xi, \zeta) + u_2(\xi, -\zeta)) = e_1 \alpha \sinh(\alpha\zeta) + e_2 i K \sinh(\beta\zeta)$$

olur. (3.26) ile verilen dalga çözümleri (3.27) ile ifade edilen boyutsuzlaştırılmış sınır koşullarında yazıldığında

$$\begin{aligned}e_1 \frac{\nu}{1-\nu} (-K^2) \cosh(\alpha\zeta) + e_1 \alpha^2 \cosh(\alpha\zeta) + e_2 2\chi^2 i K \beta \cosh(\beta\zeta) &= \\ \mp \frac{\theta h \chi^2}{\mu} (e_1 \alpha \sinh(\alpha\zeta) + e_2 i K \sinh(\beta\zeta)), \quad \zeta = \pm 1 \\ e_1 2\alpha i K \sinh(\alpha\zeta) + e_2 (-K^2) \sinh(\beta\zeta) + e_2 (-\beta^2) \sinh(\beta\zeta) &= 0, \quad \zeta = \pm 1\end{aligned}$$

olur. Burada e_1 ve e_2 bilinmeyenlerine göre denklemler gruplandığında

$$\begin{aligned}e_1 \left(\left(-\frac{\nu K^2}{1-\nu} + \alpha^2 \right) \cosh(\alpha\zeta) + \frac{\theta h \chi^2}{\mu} \alpha \sinh(\alpha\zeta) \right) \\ + e_2 \left(2\chi^2 i K \beta \cosh(\beta\zeta) + \frac{\theta h \chi^2}{\mu} i K \sinh(\beta\zeta) \right) &= 0, \quad \zeta = \pm 1 \\ e_1 (2\alpha i K) \sinh(\alpha\zeta) - e_2 (\beta^2 + K^2) \sinh(\beta\zeta) &= 0, \quad \zeta = \pm 1\end{aligned}\tag{3.28}$$

elde edilir. Burada (3.28)₁ denkleminin ilk teriminde $\alpha^2 = K^2 - \Omega^2 \chi^2$ yerine yazılırsa

$$\alpha^2 - \frac{\nu K^2}{1 - \nu} = K^2 \left(\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right) - \chi^2 \Omega^2$$

bulunur ve $(1 - 2\nu)/2(1 - \nu) = \chi^2$ olduğundan bu ifade

$$\alpha^2 - \frac{\nu K^2}{1 - \nu} = 2\chi^2 \left(K^2 - \frac{\Omega^2}{2} \right)$$

olur ve son olarak

$$\gamma^2 = K^2 - \Omega^2/2 \quad (3.29)$$

olmak üzere bu terim

$$\alpha^2 - \frac{\nu K^2}{1 - \nu} = 2\gamma^2 \chi^2 \quad (3.30)$$

şeklinde yazılır. (3.28)₁ denkleminde (3.30) yerine yazıldığında ve denklem $2\chi^2$ ile bölüldüğünde (3.28) denklem sistemi aşağıdaki şekilde tekrar yazılır:

$$\begin{aligned} & e_1 \left(\gamma^2 \cosh(\alpha\zeta) + \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \sinh(\alpha\zeta) \right) \\ & + e_2 \left(iK\beta \cosh(\beta\zeta) + \frac{\theta h}{2\mu} iK \sinh(\beta\zeta) \right) = 0, \quad \zeta = \pm 1 \\ & e_1(2\alpha iK) \sinh(\alpha\zeta) - e_2(\beta^2 + K^2) \sinh(\beta\zeta) = 0, \quad \zeta = \pm 1. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Son olarak (3.31) denklem sistemi $\zeta = \pm 1$ için

$$\begin{aligned} & e_1 \left(\gamma^2 \cosh \alpha + \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \sinh \alpha \right) + e_2 \left(iK\beta \cosh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} iK \sinh \beta \right) = 0, \\ & e_1(\alpha iK) \sinh \alpha - e_2\gamma^2 \sinh \beta = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

olarak elde edilir. (3.32) homojen lineer denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinanı sıfıra eşit olmalıdır. Dolayısıyla (3.32) homojen lineer denklem sisteminin determinanı alınıp sıfıra eşitlenme-

siyle

$$-\gamma^4 \cosh \alpha \sinh \beta - \frac{\theta h \gamma^2}{2\mu} \alpha \sinh \alpha \sinh \beta + K^2 \alpha \beta \sinh \alpha \cosh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} K^2 \alpha \sinh \alpha \sinh \beta = 0$$

bulunur ve bu ifade düzenlendiğinde

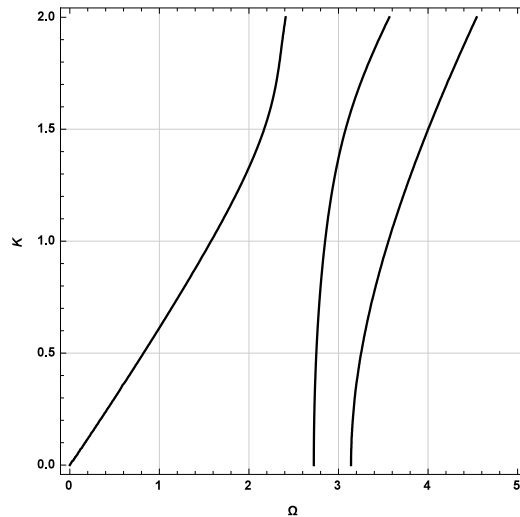
$$-\gamma^4 \cosh \alpha \sinh \beta + K^2 \alpha \beta \sinh \alpha \cosh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} (K^2 - \gamma^2) \alpha \sinh \alpha \sinh \beta = 0 \quad (3.33)$$

eşitliği elde edilir. (3.33) denkleminde γ^2 ifadesi yerine eşiti olan (3.29) yazıldığında ve tüm denklem $\beta \cosh \alpha \cosh \beta$ ile bölüldüğünde

$$-\gamma^4 \frac{\tanh \beta}{\beta} + K^2 \alpha \tanh \alpha + \frac{G \Omega^2}{4} \alpha \tanh \alpha \frac{\tanh \beta}{\beta} = 0 \quad (3.34)$$

elde edilir. Burada $G = \theta h / \mu$ ile tanımlıdır. Elde edilen (3.34) denklemi iki taraftan Winkler tabanıyla etkileşen elastik katmanın simetrik modlardaki dalgalar için elde edilmiş dispersiyon denklemidir. (3.34) denkleminin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için sayısal değerlerine karşılık gelen grafiği Şekil 3.2 ile verilmiştir.

Kesme frekansı denkleminin elde edilebilmesi için (3.34) dispersiyon denkleminde



Şekil 3.2. Simetrik mod için elde edilen (3.34) numaralı dispersiyon denkleminin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için nümerik çözümü

(3.23) ve (3.29) yerlerine yazılarak $K = 0$ alındığında

$$-4 \left(\frac{\Omega^2}{2} \right)^2 + G\Omega^3 \chi i \tanh(i\Omega\chi) = 0$$

elde edilir ve bu denklem düzenlenirse simetrik moddaki dalgalar için kesme frekans denklemi

$$\tan \chi\Omega + \frac{\Omega}{G\chi} = 0 \quad (3.35)$$

olarak bulunur. (3.35) denkleminde $\tan(\chi\Omega)$ Taylor serisi açılımında ilk iki terim alındığında yaklaşık denklem

$$\chi\Omega - \frac{\chi^3\Omega^3}{3} + \frac{\Omega}{G\chi} = 0 \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin köklerinin bulunabilmesi için denklemi Ω parantezinde

$$\Omega \left(-\frac{\chi^3}{3}\Omega^2 + \left(\chi + \frac{1}{G\chi} \right) \right) = 0$$

olarak yazılır. Bu denklemin kökleri

$$\Omega_0 = 0, \quad \Omega_1 = i\sqrt{\frac{3}{\chi^2} + \frac{1}{G\chi^4}}, \quad \Omega_2 = -i\sqrt{\frac{3}{\chi^2} + \frac{1}{G\chi^4}} \quad (3.37)$$

olarak hesaplanır. Fakat burada sadece $\Omega = 0$ kök olarak alınabilir çünkü bu problemde (3.26) dalga çözümleri ilerleyen dalga çözümü formundadır. Yani problemde aranacak dalga çözümleri gelen dalga formunda olmadığı için negatif frekanslar ve kompleks değerli frekanslar kök olarak alınmayacaktır. Dolayısıyla simetrik modlar için en düşük kesme frekansı $\Omega_* = \Omega = 0$ olur.

Antisimetrik Mod

Elastik bir katmandaki dalgaların antisimetrik modlarında u_1 yerdeğiştirmesi ve σ_{22} gerilmesi ζ değişkenine göre tek fonksiyon, u_2 yerdeğiştirmesi ve σ_{12} gerilmesi ise çift fonksiyon olmalıdır [17]. O halde (3.22) denklemlerinin çözümü olan (3.24)

fonksiyonları aşağıdaki şekilde alınmalıdır:

$$f(\zeta) = o_1 \sinh(\alpha\zeta), \quad g(\zeta) = o_2 \cosh(\beta\zeta). \quad (3.38)$$

Böylece, varsayılan (3.18) dalga çözümleri antisimetrik mod için

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \zeta, \tau) &= o_1 \sinh(\alpha\zeta) \exp i(K\xi - \Omega\tau), \\ \psi(\xi, \zeta, \tau) &= o_2 \cosh(\beta\zeta) \exp i(K\xi - \Omega\tau) \end{aligned} \quad (3.39)$$

şeklinde yazılır. Simetrik mod için yapılan işlemlere benzer şekilde (3.20) ile verilen boyutsuz sınır koşulları, u_2 enine yer değiştirmesinin çift fonksiyon olması gerektiğinden u_2 yerdeğıştirmesinin çift kısmı göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} &= \mp \frac{\theta h \chi^2}{2\mu} (u_2(\xi, \zeta) - u_2(\xi, -\zeta)), \quad \zeta = \pm 1; \\ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0, \quad \zeta = \pm 1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

olarak yazılır. Burada

$$\frac{1}{2} (u_2(\xi, \zeta) - u_2(\xi, -\zeta)) = o_1 \alpha \cosh(\alpha\zeta) + o_2 i K \cosh(\beta\zeta).$$

olur. (3.39) numaralı dalga çözümleri (3.40) ile verilen sınır koşullarında yazılarak

$$\begin{aligned} o_1 \left(\left(-\frac{\nu K^2}{1-\nu} + \alpha^2 \right) \sinh(\alpha\zeta) + \frac{\theta h \chi^2}{\mu} \alpha \cosh(\alpha\zeta) \right) + \\ + o_2 \left(2\chi^2 i K \beta \sinh(\beta\zeta) + \frac{\theta h \chi^2}{\mu} i K \cosh(\beta\zeta) \right) &= 0, \\ o_1 (2\alpha i K) \cosh(\alpha\zeta) - o_2 (\beta^2 + K^2) \cosh(\beta\zeta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

denklemleri elde edilir. (3.41)₂ denkleminde $\beta^2 + K^2$ teriminde β^2 teriminin eşiti olan $\beta^2 = K^2 - \Omega^2$ yazıldığında bu ifade

$$\begin{aligned} \beta^2 + K^2 &= 2 \left(K^2 - \frac{\Omega^2}{2} \right) \\ &= 2\gamma^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

(3.41)₁ denkleminde (3.30) ve (3.41)₂ denkleminde (3.42) yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & o_1 \left(2\gamma^2 \chi^2 \sinh(\alpha\zeta) + \frac{\theta h \chi^2}{\mu} \alpha \cosh(\alpha\zeta) \right) \\ & + o_2 \left(2\chi^2 \beta i K \sinh(\beta\zeta) + \frac{\theta h \chi^2}{\mu} i K \cosh(\beta\zeta) \right) = 0, \\ & o_1 (2\alpha i K) \cosh(\alpha\zeta) - o_2 2\gamma^2 \cosh(\beta\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. Son olarak (3.43)₁ denklemini $2\chi^2$ bölündüğünde ve (3.43)₂ denkleminde sadeleştirme yapıldığında:

$$\begin{aligned} & o_1 \left(\gamma^2 \sinh(\alpha\zeta) + \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \cosh(\alpha\zeta) \right) + o_2 \left(\beta i K \sinh(\beta\zeta) + \frac{\theta h}{2\mu} i K \cosh(\beta\zeta) \right) = 0, \\ & o_1 (\alpha i K) \cosh(\alpha\zeta) - o_2 \gamma^2 \cosh(\beta\zeta) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

bulunur ve (3.44) denklemlerinde $\zeta = 1$ yazılarak

$$\begin{aligned} & o_1 \left(\gamma^2 \sinh(\alpha) + \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \cosh \alpha \right) + o_2 \left(\beta i K \sinh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} i K \cosh \beta \right) = 0, \\ & o_1 (\alpha i K) \cosh \alpha - o_2 \gamma^2 \cosh \beta = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

şeklinde bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin aşıkâr olmayan çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek

$$\begin{aligned} & -\gamma^4 \sinh \alpha \cosh \beta - \frac{\theta h \gamma^2}{2\mu} \alpha \cosh \alpha \\ & - (\alpha i K) \cosh \alpha \left(\beta i K \sinh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} i K \cosh \beta \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

elde edilir ve bu denklemde ikinci ve dördüncü terim paranteze alınarak

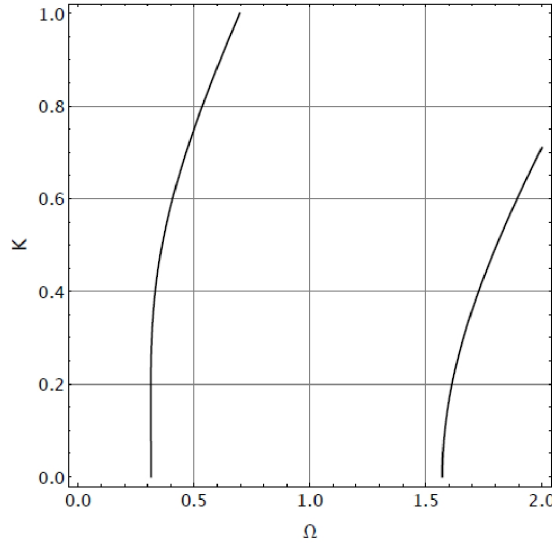
$$\begin{aligned} & -\gamma^4 \sinh \alpha \cosh \beta + K^2 \alpha \beta \cosh \alpha \sinh \beta - \\ & - \frac{\theta h}{2\mu} (\gamma^2 - K^2) \alpha \cosh \alpha \cosh \beta = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

denklemini elde edilmiş olur. (3.47) denklemini $\alpha \cosh \alpha \cosh \beta$ ile bölünür ve γ^2 yerine (3.29) eşiti yazıldığında

$$-4\gamma^4 \frac{\tanh \alpha}{\alpha} + 4K^2 \beta \tanh \beta + G\Omega^2 = 0. \quad (3.48)$$

şeklinde elde edilir. (3.48) denklemini iki tarafını Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmandaki antisimetrik moddaki dalgaların dispersiyon denklemdir. (3.48) dispersiyon ilişkisinin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için sayısal değerlerine karşılık gelen grafiği Şekil 3.3 ile verilmiştir.

Kesme frekansı denkleminin elde edilebilmesi için (3.48) dispersiyon denkleminde



Şekil 3.3. Antisimetrik mod için elde edilen (3.48) numaralı dispersiyon denkleminin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için nümerik çözümü

(3.23) ve (3.29) yerlerine yazılarak $K = 0$ alındığında

$$-4 \left(\frac{\Omega^2}{2} \right)^2 \frac{\tanh(i\chi\Omega)}{i\chi\Omega} + G\Omega^2 = 0$$

elde edilir ve bu denklem Ω^3 ile sadeleştirildiğinde antisimetrik moddaki dalgalar için kesme frekansı denklemini

$$\tan(\chi\Omega) - \frac{G\chi}{\Omega} = 0 \quad (3.49)$$

şeklinde bulunur. Buradan (3.49) denklemi $\Omega \ll 1$ iken Taylor serisine açıldığında yaklaşık denklem aşağı şekilde olur:

$$\Omega\chi + \frac{\chi^3\Omega^3}{3} - \frac{G\chi}{\Omega} = 0. \quad (3.50)$$

Bu denklem Ω ile çarpıldığında ve χ ile sadeleştirildiğinde

$$\Omega^4\frac{\chi^2}{3} + \Omega^2 - G = 0 \quad (3.51)$$

elde edilir ve bu denklemin kökleri

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\chi^2}{3}G}}{\frac{2\chi^2}{3}}} \quad (3.52)$$

olarak bulunur, fakat pozitif reel kökler alınacaktır ve $\sqrt{1 + \frac{4\chi^2}{3}G}$ ifadesi $G \ll 1$ için Taylor serisine açıldığında

$$\Omega = \sqrt{\frac{-1 + \left(1 + \frac{2\chi^2}{3}G - \frac{2\chi^4}{9}G^2 + \dots\right)}{\frac{2\chi^2}{3}}} \quad (3.53)$$

olur ve bu ifadede $2\chi^2/3$ sadeleştirilir ve yazılan seri açılımının ilk iki terimi alınarak Ω için

$$\Omega = \sqrt{G}\sqrt{1 - \frac{\chi^2}{3}G} \quad (3.54)$$

olarak bulunur. Son olarak burada da kareköklü ifade zayıf Winkler tabanına karşılık gelen $G \ll 1$ için Taylor serisine açıldığında $\Omega = \Omega_*$ kesme frekansı yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\Omega_* = \sqrt{G}\left(1 - \frac{G\chi^2}{6} + \dots\right) \quad (3.55)$$

3.2.2. Tek Taraflı Durum

Problemin bu kısmında $2h$ kalınlığındaki elastik katman Winkler tabanı ile tek taraftan desteklenmektedir(Şekil 3.1.b). Çift taraflı durumda olduğu gibi burada da yapının dispersiyon denklemini elde edebilmek için varsayılan (3.18) numaralı dalga çözümlerinde (3.24) ile verilen fonksiyonlar yerlerine yazılmasıyla dalga potansiyelleri

$$\begin{aligned}\phi(\xi, \zeta, \tau) &= [e_1 \cosh(\alpha\zeta) + o_1 \sinh(\alpha\zeta)] \exp i(K\xi - \Omega\tau), \\ \psi(\xi, \zeta, \tau) &= [o_2 \cosh(\beta\zeta) + e_2 \sinh(\beta\zeta)] \exp i(K\xi - \Omega\tau)\end{aligned}\quad (3.56)$$

olarak alınacaktır. Simetrik olmayan bu yapı için verilen (3.4) numaralı sınır koşullarında, (3.12) ile verilen gerilme bileşenleri ve (3.17) ile tanımlanan boyutsuz parametreleri kullanılarak problemin sınır koşulları dalga potansiyelleri cinsinden $\zeta = -1$ ve $\zeta = 1$ için

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} &= \frac{\theta h \chi^2}{\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right), \\ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0, \\ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + 2\chi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0\end{aligned}\quad (3.57)$$

şeklinde ifade edilir. Elde edilen (3.57)₁ ve (3.57)₂ sınır koşullarında (3.56) çözümleri yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}e_1 \left(\gamma^2 \sinh(\alpha\zeta) - \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \cosh(\alpha\zeta) \right) + o_1 \left(\gamma^2 \cosh(\alpha\zeta) - \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \sinh(\alpha\zeta) \right) + \\ + o_2 \left(iK\beta \cosh(\beta\zeta) - \frac{\theta h}{2\mu} iK \sinh(\beta\zeta) \right) + \\ + e_2 \left(iK\beta \sinh(\beta\zeta) - \frac{\theta h}{2\mu} iK \cosh(\beta\zeta) \right) = 0\end{aligned}\quad (3.58)$$

ve

$$\begin{aligned}e_1(\alpha iK \cosh(\alpha\zeta)) + o_1(\alpha iK \sinh(\alpha\zeta)) + \\ o_2(-\gamma^2 \sinh(\beta\zeta)) + e_2(-\gamma^2 \cosh(\beta\zeta)) = 0\end{aligned}\quad (3.59)$$

denklemleri bulunur ve bu denklemler $\zeta = -1$ için sırasıyla

$$\begin{aligned}
e_1 \left(-\gamma^2 \sinh \alpha - \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \cosh \alpha \right) + o_1 \left(\gamma^2 \cosh \alpha + \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \sinh \alpha \right) + \\
+ o_2 \left(iK\beta \cosh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} iK \sinh \beta \right) + \\
- e_2 \left(iK\beta \sinh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} iK \cosh \beta \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

ve

$$e_1(iK\alpha \cosh \alpha) - o_1(iK\alpha \sinh \alpha) + o_2(\gamma^2 \sinh \beta) - e_2(\gamma^2 \cosh \beta) = 0 \tag{3.61}$$

şeklindedir. Benzer şekilde (3.57)₃ ve (3.57)₄ sınır koşullarında da (3.56) ile verilen dalga çözümleri yerlerine yazılarak

$$\begin{aligned}
e_1(\gamma^2 \sinh(\alpha\zeta)) + o_1(\gamma^2 \cosh(\alpha\zeta)) + \\
+ o_2(iK\beta \cosh(\beta\zeta)) + e_2(iK\beta \sinh(\beta\zeta)) = 0,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
e_1(iK\alpha \cosh(\alpha\zeta)) + o_1(iK\alpha \sinh(\alpha\zeta)) + \\
+ o_2(-\gamma^2 \sinh(\beta\zeta)) + e_2(-\gamma^2 \cosh(\beta\zeta)) = 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemler sırasıyla $\zeta = 1$ için

$$e_1(\gamma^2 \sinh \alpha) + o_1(\gamma^2 \cosh \alpha) + o_2(iK\beta \cosh \beta) + e_2(iK\beta \sinh \beta) = 0, \tag{3.64}$$

$$e_1(iK\alpha \cosh \alpha) + o_1(iK\alpha \sinh \alpha) + o_2(-\gamma^2 \sinh \beta) + e_2(-\gamma^2 \cosh \beta) = 0 \tag{3.65}$$

şeklinde olur. Burada (3.60), (3.61), (3.64) ve (3.65) denklemlerinden oluşan sistem, homojen bir lineer denklem sistemidir. Sistemin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması gerekir. Bahsi geçen katsayılar determinanı

$$\begin{vmatrix} -\gamma^2 \sinh \alpha - \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \cosh \alpha & \gamma^2 \cosh \alpha + \frac{\theta h}{2\mu} \alpha \sinh \alpha & iK\beta \cosh \beta + \frac{\theta h}{2\mu} iK \sinh \beta & -iK\beta \sinh \beta - \frac{\theta h}{2\mu} iK \cosh \beta \\ iK\alpha \cosh \alpha & iK\alpha \sinh \alpha & \gamma^2 \sinh \beta & -\gamma^2 \cosh \beta \\ \gamma^2 \sinh \alpha & \gamma^2 \cosh \alpha & iK\beta \cosh \beta & iK\beta \sinh \beta \\ \alpha iK \cosh \alpha & \alpha iK \sinh \alpha & -\gamma^2 \sinh \beta & -\gamma^2 \cosh \beta \end{vmatrix}$$

şeklindedir ve deternmantın değeri sıfıra eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} & -\gamma^4 \alpha \cosh^2 \alpha \sinh \beta \{G(\gamma^2 - K^2) \cosh \beta - 4\beta K^2 \sinh \beta\} + \\ & + \gamma^4 \alpha \cosh \beta \sinh^2 \alpha \{4K^2 \beta \cosh \beta + G(K^2 - \gamma^2) \sinh \beta\} + \\ & + \cosh \alpha \sinh \alpha \{G\alpha^2 \beta K^2 (\gamma^2 - K^2) \cosh 2\beta - 2(\gamma^8 + \alpha^2 \beta^2 K^2) \sinh 2\beta\} = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

dispersiyon denklemi elde edilir. Burada (3.29) eşitliği kullanılır ve $G = \theta h/\mu$ yerine yazılırsa (3.66) denklemi

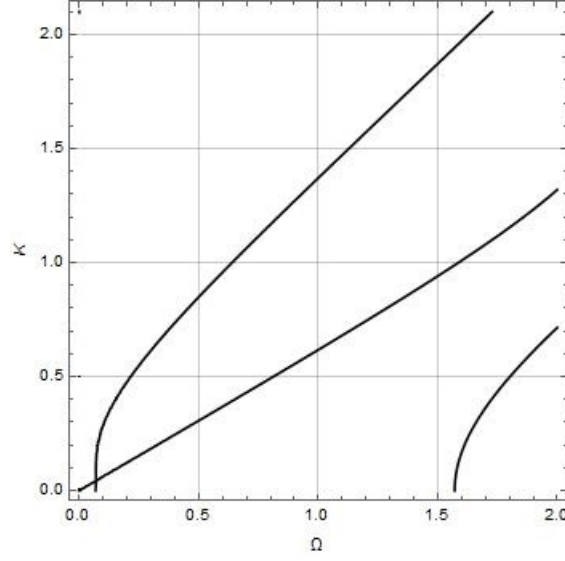
$$\begin{aligned} & \frac{G\Omega^2 \alpha}{4} \left(\gamma^4 \cosh 2\alpha \sinh 2\beta - K^2 \alpha \beta \cosh 2\beta \sinh 2\alpha \right) - \\ & 4\alpha \beta \left[\left(\frac{\gamma^8}{4\alpha\beta} + \frac{\alpha\beta K^4}{4} \right) \sinh 2\alpha \sinh 2\beta + \gamma^4 K^2 (\cosh^2 \alpha \sinh^2 \beta + \cosh^2 \beta \sinh^2 \alpha) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

şeklinde düzenlenebilir. Son olarak (3.67) denkleminde $\cosh^2 \alpha = (\cosh 2\alpha + 1)/2$ ve $\sinh^2 \alpha = (\cosh 2\alpha - 1)/2$ özdeşlikleri yazılırsa (3.67) denklemi

$$\begin{aligned} & \frac{G\Omega^2}{16} \left(\gamma^4 \cosh 2\alpha \frac{\sinh 2\beta}{\beta} - K^2 \alpha^2 \cosh 2\beta \frac{\sinh 2\alpha}{\alpha} \right) - \\ & \left[\left(\frac{\gamma^8}{4\alpha\beta} + \frac{\alpha\beta K^4}{4} \right) \sinh 2\alpha \sinh 2\beta - \frac{\gamma^4 K^2}{2} \cosh 2\alpha \cosh 2\beta + \frac{\gamma^4 K^2}{4} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

biçimini alır. (3.68) denklemi tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmanın dalga frekansı ile dalga sayısı arasındaki ilişkiyi ifade eden dispersiyon denklemidir. (3.68) dispersiyon denklemine $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ değerlerine karşılık gelen grafik Şekil 3.4 ile verilmiştir. Tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katman için kesme frekansını belirlemek için (3.68) denklemine (3.23) ve (3.29) yerlerine yazılır ve $K = 0$ alınarak

$$\frac{G\Omega^6 \cosh(2i\chi\Omega)}{64 i\Omega} = - \left(\frac{\Omega^2}{2} \right)^4 \frac{1}{4\chi\Omega^2} \sinh(2i\chi\Omega)$$



Şekil 3.4. Tek taraflı Winkler Tabanı ile etkileşen elastik katman için elde edilen (3.68) numaralı dispersiyon denkleminin $G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$ için sayısal değerleri

biçiminde denklem elde edilir. Bu son denklemde eşitliğin her iki tarafı $\cosh(2i\chi\Omega)$ ile bölünürse kesme frekans denklemi

$$\tan(2\chi\Omega) - \frac{G\chi}{\Omega} = 0 \quad (3.69)$$

şeklinde elde edilir. (3.69) denklemi düşük frekansta yani $\Omega \ll 1$ iken Taylor serisine açıldığında elde edilen yaklaşık denklem aşağıdaki şekildedir:

$$2\chi\Omega + \frac{8\chi^3\Omega^3}{3} - \frac{G\chi}{\Omega} = 0.$$

Bu denklem sadeleştirildiğinde

$$\frac{4\chi^2}{3}\Omega^4 + \Omega^2 - \frac{G}{2} = 0 \quad (3.70)$$

olur. (3.70) denkleminin kökleri ise

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{8\chi^2}{3}G}}{\frac{8\chi^2}{3}}} \quad (3.71)$$

şeklinde bulunur. Burada pozitif reel Ω köklerinin alınmasıyla ve $\sqrt{1 + \frac{8\chi^2}{3}G}$ ifadesi $G \ll 1$ iken Taylor serisine açılmasıyla

$$\Omega = \sqrt{\frac{-1 \pm \left(1 + \frac{4\chi^2}{3}G - \frac{8\chi^4}{9}G^2 + \dots\right)}{\frac{8\chi^2}{3}}} \quad (3.72)$$

yazılır. (3.72) ifadesi $8\chi^2/3$ ile sadeleştirilerek

$$\Omega = \sqrt{\frac{G}{2} - \frac{\chi^2 G^2}{3}} \quad (3.73)$$

şeklinde tekrar yazılır ve bu ifade de $G \ll 1$ iken Taylor serisinde açıldığında $\Omega = \Omega_*$ kesme frekansı yaklaşık olarak

$$\Omega_* = \sqrt{\frac{G}{2}} \left(1 - \frac{G\chi^2}{3} + \dots\right) \quad (3.74)$$

olarak bulunur.

Problemde dikkat çekilen nokta elastik katman ile Winkler tabanı etkileşiminden kaynaklı dalgaların kesme frekansı civarındaki etkisinin anlaşılmasıdır. Dolayısıyla bu bölümde elde edilen kesme frekansları sonraki bölümlerde kullanılacak varsayımların temelini oluşturacaktır. Ayrıca problem Kaplunov ve ark.[17] uzun dalga, düşük frekans varsayımlarına dayanılarak analiz edilecektir.

3.3. İki Taraflı Durumda Uzun Dalga-Düşük Frekans Yaklaşımı

Bu bölümde iki taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmandaki simetrik ve antisimetrik moddaki dalgaların uzun dalga, düşük frekans altında dispersiyon denklemlerinin detaylı bir analizi yapılacaktır.

Simetrik Mod

Simetrik moddaki dalgalar için elde edilen (3.34) denklemi uzun dalga, düşük frekans durumunda $K \ll 1$ ve $\Omega \ll 1$ iken Taylor serisine açılarak dispersiyon

denklemini yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$(1 + G\chi^2)\Omega^2 + (-4 - G + 4\chi^2)K^2 + \left(\frac{8}{3} + \frac{2G}{3} + \frac{8\chi^2}{3}\right)K^4 - \left(\frac{5}{3} + \frac{G}{3} + G\chi^2 + \frac{4\chi^4}{3}\right)K^2\Omega^2 = 0. \quad (3.75)$$

Bu eşitlikteki başlı terimler olan $\mathcal{O}(K^2)$ ve $\mathcal{O}(\Omega^2)$ terimleri alındığında

$$(1 + G\chi^2)\Omega^2 + (-4 - G + 4\chi^2)K^2 = 0 \quad (3.76)$$

olur ve (3.76) denklemini

$$K^2 = \frac{1 + G\chi^2}{4 - 4\chi^2 + G}\Omega^2 \quad \text{ya da} \quad K^2 = \frac{(2 - 2\nu) + G(1 - 2\nu)}{2(2 + G(1 - \nu))}\Omega^2 \quad (3.77)$$

olarak düzenlenir. Ayrıca (3.77)₁ eşitliği

$$K^2 = \frac{1 + G\chi^2}{4 - 4\chi^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{G}{4 - 4\chi^2}} \right) \Omega^2 \quad (3.78)$$

şeklinde yazılıp buradaki $\frac{1}{1 + \left(\frac{G}{4 - 4\chi^2}\right)}$ ifadesi $G \ll 1$ iken Taylor serisine açıldığında

$$K^2 = \frac{1 + G\chi^2}{4 - 4\chi^2} \left(1 - \frac{G}{4(1 - \chi^2)} + \dots \right) \Omega^2 \quad (3.79)$$

elde edilir veya bu eşitlik $\chi^2 = (1 - 2\nu)/2(1 - \nu)$ yerine yazılırsa K^2

$$K^2 \left(1 + \frac{\nu^2 G}{2(1 - \nu)} + \dots \right) = \frac{1 - \nu}{2} \Omega^2 \quad (3.80)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (3.80) yaklaşık ifadesi (3.17) boyutsuz parametreleri ile boyutlu formuna dönüştürüldüğünde ise

$$k^2 + \frac{\nu^2 \theta h}{2\mu(1 - \nu)} k^2 = \frac{1 - \nu}{2} \frac{\rho}{\mu} \omega^2$$

olur. Burada u_1 yerdeğiştirmesi için $u_1 = e^{i(kx-\omega t)}$ biçiminde alındığında bu denklem diferansiyel denklem formunda

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\frac{\nu^2 \theta h}{2\mu(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

olarak yazılır. Bu denklem $4\mu h/(1-\nu)$ ile çarpılır ve $\mu = E/2(1+\nu)$ yerine yazılırsa

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2\rho h \frac{\partial u_1}{\partial t^2} = -\frac{2\nu h \theta}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu h}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \quad (3.81)$$

elde edilir ve (3.81) denklemini $u_2 = [(\nu h/(1-\nu))/(\partial u_1/\partial x)]$ ve $Q = \theta u_2$ için

$$\frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\frac{2h\nu}{1-\nu} \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.82)$$

şeklinde ifade edilir ve bu denklem de plakalar için tek boyutta enine basma hareketini (plate transverse compression) modelleyen denklemdir [17].

Ayrıca (3.80) ile ifade edilen dispersiyon denkleminde $G = 0$ alındığında elde edilen

$$K^2 = \frac{1-\nu}{2} \Omega^2 \quad (3.83)$$

denklem ise klasik düzlemsel gerilme teorisinde yer alan dispersiyon denklemiyle örtüş-

mektedir[17]. Ayrıca (3.75) ifadesinde $G \gg 1$ için başçıl terimler alındığında

$$G\chi^2 \Omega^2 - GK^2 = 0 \quad (3.84)$$

denklemini elde edilir ve $\chi^2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$ yerine yazılıp sadeleştirme yapıldığında bu eşitlik

$$K^2 = \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \Omega^2 \quad (3.85)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen (3.85) denklemini $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$; $y = \pm h$ sınır koşullarıyla ifade edilen iki boyuttaki bir elastik katman için sabitlenmiş düzlemsel gerinim probleminin dispersiyon ilişkisiyle örtüşmektedir. Bunun daha iyi görülebilmesi için

$G \gg 1$ durumunda sınır koşulları

$$\sigma_{12} = 0, \quad u_2 = 0, \quad y = \pm h \quad (3.86)$$

olarak verilen problemde benzer bir analiz yapılır ve bunun için öncelikle (3.17) boyutsuz parametreleriyle yapılan boyutsuzlaştırma sonucunda sınır koşulları $\zeta = 1$ sınırında aşağıdaki şekilde yazılsın:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned}$$

Yazılan bu sınır koşullarında (3.26) ile verilen dalga çözümleri yerine yazıldığında $\zeta = 1$ için

$$A(\alpha i K) \sinh \alpha - B \gamma^2 \sinh \beta = 0, \quad (3.87)$$

$$A \alpha \sinh \alpha + B i K \sinh \beta = 0 \quad (3.88)$$

homojen denklem sistemi elde edilir ve bu denklemin sıfırdan farklı çözümünün olabilmesi için determanantının sıfır olması gerekir. Bu denklem sisteminin determanantı alındığında

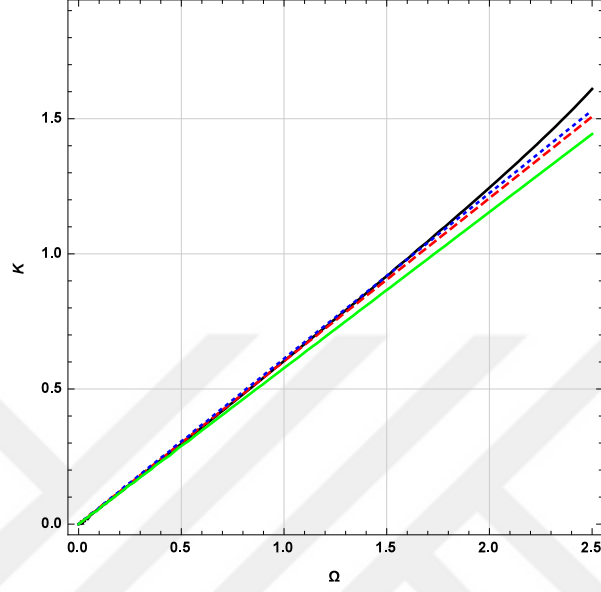
$$(\gamma^2 - K^2) \sinh \alpha \sinh \beta = 0$$

elde edilir ve bu denklemde (3.29) ile verilen γ^2 yerine yazıldığında sabitlenmiş düzlemsel gerinim probleminin dispersiyon denklemi

$$\frac{\Omega^2}{2} \sinh \alpha \sinh \beta = 0 \quad (3.89)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem her Ω için $\alpha = \sqrt{K^2 - \Omega^2} = 0$, $\beta = \sqrt{K^2 - \Omega^2 \chi^2} = 0$ için sağlanır. (3.89) denkleminin $\Omega \ll 1$ ve $K \ll 1$ için Taylor serisi açılarak elde edilen yaklaşık dispersiyon ilişkisi (3.85) eşitliği ile aynıdır. Dolayısıyla $G \gg 1$ durumunda elde edilen (3.85) sonucunun sabitlenmiş düzlemsel gerinim problemine karşılık geldiği görülmüştür.

Simetrik mod için elde edilen (3.34) numaralı dispersiyon ilişkisinin, uzun dalga, düşük frekans yaklaşımıyla elde edilen (3.77) yaklaşık denklem, (3.83) ile verilen klasik düzlemsel gerilme ve (3.85) ile ifade edilen düzlemsel gerinim modelleriyle yapılan karşılaştırma $G = 1$ ve $\nu = 0.25$ için Şekil 3.5 ile verilmiştir.



Şekil 3.5. Simetrik moda elde edilen (3.34) numaralı dispersiyon ilişkisinin (siyah) (3.77) ile verilen uzun dalga, düşük frekans yaklaşımı (kırmızı), (3.83) ile ifade edilen klasik düzlemsel gerilme modeli (mavi) ve (3.85) ile verilen düzlemsel gerinim modeli (yeşil) ile karşılaştırılması ($G = 1$ ve $\nu = 0.25$)

Antisimetrik Mod

Antisimetrik mod için elde edilen (3.48) numaralı dispersiyon denklemi $K \ll 1$ ve $\Omega \ll 1$ iken Taylor serisine açılırsa

$$\left(GK^2 + K^6 \left(\frac{4}{3} - \frac{4\chi^2}{3} \right) \right) \Omega^2 + \left(-K^2 + K^4 \left(-1 + \frac{4\chi^4}{3} \right) \right) \Omega^4 + \frac{\chi^2}{3} K^2 \Omega^6 + \dots = 0 \quad (3.90)$$

bulunur. Bu seri $K^2\Omega^2$ ile bölünürse yaklaşık denklem

$$G + \left(\frac{4}{3} - \frac{4\chi^2}{3} \right) K^4 + \left(-1 + \frac{4\chi^2}{3} \right) K^2\Omega^2 - \Omega^2 - \frac{\chi^2}{3} \Omega^4 = 0 \quad (3.91)$$

olarak elde edilir. $\chi = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)}$ ifadesi burada yerine yazılarak düzenleme yapıldığında (3.91) denklemini aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$K^4 - \frac{(1+\nu)}{2}K^2\Omega^2 - \frac{3(1-\nu)}{2}\Omega^2 - \frac{1-2\nu}{4}\Omega^4 + \frac{3(1-\nu)}{2}G = 0. \quad (3.92)$$

$K \sim G^{1/2}$ olmak üzere, bir önceki alt bölümde yaklaşık olarak hesaplanan (3.55) numaralı kesme frekansının en yakın civarı $\delta = \Omega^2 - G \sim G^2$ olarak düşünülebilir ve böylece (3.92) denkleminde Ω^2 'li ve G 'li terimler solda bırakılarak

$$\frac{3(1-\nu)}{2}(\Omega^2 - G) = K^4 - \frac{1+\nu}{2}K^2\Omega^2 - \frac{1-2\nu}{4}\Omega^4 \quad (3.93)$$

düzenlemesi yapılır ve burada her taraf $3(1-\nu)/2$ ile bölünerek $\Omega^2 - G = \delta$ yazılırsa

$$\delta = \frac{2}{3(1-\nu)}K^4 - \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}K^2\Omega^2 - \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}\Omega^4$$

elde edilir. Son olarak Ω^2 yerine G yazılarak son ifade

$$\delta = -G^2 \frac{(1-2\nu)}{6(1-\nu)} + \frac{2}{3(1-\nu)}K^4 - \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}K^2G \dots \quad (3.94)$$

şeklinde kesme frekansı civarında Taylor serisi olarak yazılabilir[17]. Burada tüm terimler G^2 mertebesinde. Ayrıca burada $\delta \gg G^2$ varsayımı yapılarak ve $K \gg \sqrt{G}$ için (3.94) ifadesinde $\delta = \Omega^2 - G$ ve K^4 ' lü terim başlıc terimdir ve bu terimler alındığında (3.94) ifadesi

$$K^4 - \frac{3(1-\nu)}{2}\Omega^2 + \frac{3(1-\nu)}{2}G = 0 \quad (3.95)$$

denkleminde indirgenir. (3.95) denkleminde (3.17) kullanılarak boyutlu formda aşağıdaki şekilde yazılır:

$$k^4 h - \frac{3(1-\nu)}{2} \frac{\omega^2 \rho h^2}{\mu} + \frac{3(1-\nu)}{2} \frac{\theta h}{\mu} = 0.$$

Bu denklemde h sadeleştirilir, $\frac{2}{3(1-\nu)}\mu$ ile çarpılır ve $\mu = E/2(1+\nu)$ yazılırsa

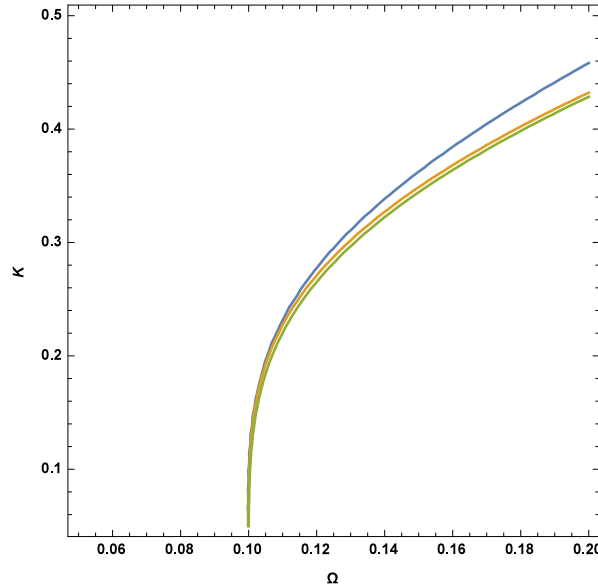
$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}k^4 - 2\rho h\omega^2 + 2\theta = 0 \quad (3.96)$$

elde edilir ve w ilerleyen dalga olmak üzere $w = \exp i(kx - \omega t)$ göz önünde alındığında (3.96) eşitliği

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\theta w = 0 \quad (3.97)$$

olarak yazılır. Bu denklem Winkler zemini ile etkileşen Kirchhoff plakası probleminin geleneksel mühendislik modeline karşılık gelmektedir. (3.92) denklemi (3.95) numaralı denklem ile karşılaştırıldığında (3.92) denkleminin klasik formülasyon olan (3.95) denkleminden farklı olarak ekstra iki terim içerdiği görülmektedir. Bunun sebebi (3.92) ifadesinin kesme frekansı civarında açılım yapılmış olmasıdır.

Sayısal sonuçların görüldüğü Şekil 3.6 ile verilen grafikte antisimetrik modda elde edilen (3.48) numaralı dispersiyon ilişkisi, kesme frekansı civarında elde edilen (3.94) yaklaşımı ve (3.95) ile verilen geleneksel Kirchhoff modelin karşılaştırması yapılmıştır.



Şekil 3.6. Antisimetrik modda elde edilen (3.48) numaralı dispersiyon ilişkisinin (mavi) kesme frekansı civarında elde edilen (3.94) numaralı yaklaşım (turuncu) ve (3.95) ile verilen geleneksel Kirchhoff modeli (yeşil) karşılaştırılması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$)

Şekil 3.6 ile yapılan karşılaştırmada kesme frekansı civarındaki dalgaların etkisinin daha net anlaşılması ve karşılaştırmanın iyi görülebilmesi için

$$\Omega_*^2 = 1 + \delta_* G + \dots \quad \text{ve} \quad \delta = \delta_* G^2 \quad (3.98)$$

olmak üzere

$$K = K_* G^{1/2} \quad \text{ve} \quad \Omega^2 = \Omega_*^2 G \quad (3.99)$$

tanımlanan bir ölçeklendirme önerilmiştir. (3.92) yaklaşık denkleminde (3.99) parametreleri kullanıldığında bu denklem

$$K_*^4 G^2 - \frac{1+\nu}{2} K_*^2 \Omega_*^2 G^2 - \frac{3(1-\nu)}{2} \Omega_*^2 G - \frac{1-2\nu}{4} \Omega_*^4 G^2 + \frac{3(1-\nu)}{2} G = 0$$

olur ve bu denklem $4/G^2$ ile çarpıldığında

$$4K_*^4 - 2(1+\nu)K_*^2 \Omega_*^2 - 6(1-\nu) \frac{\Omega_*^2}{G} - (1-2\nu)\Omega_*^4 + 6(1-\nu) \frac{1}{G} \quad (3.100)$$

elde edilir ve (3.98) olduğundan dolayı (3.100) eşitliğinde üçüncü ve beşinci terimde sadeleştirme yapılabilir. Dolayısıyla (3.92) denkleminin yeni parametrelere göre ifadesi

$$4K_*^4 - 2K_*^2(1+\nu) - 6\delta_*(1-\nu) - (1-2\nu) = 0. \quad (3.101)$$

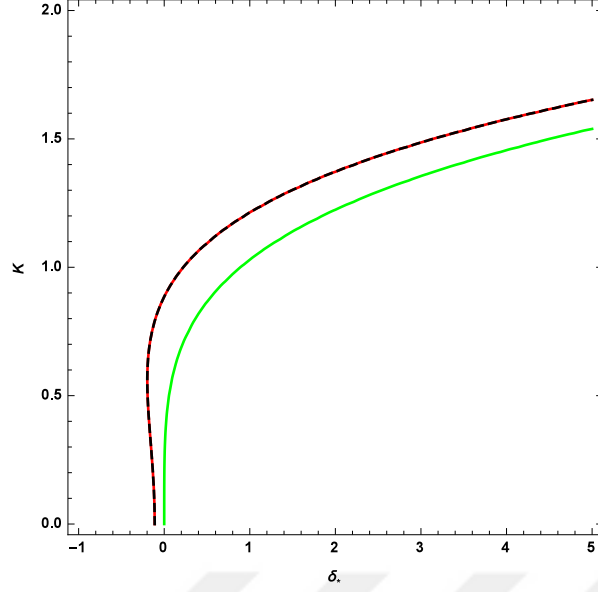
şeklinde yazılır. Benzer şekilde (3.94) açılımı:

$$\delta_* = \frac{(1-2\nu)}{6(1-\nu)} + \frac{2}{3(1-\nu)} K_* - \frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)} K_*^2 \quad (3.102)$$

ve (3.95) denklemini de

$$K_*^4 - \frac{3(1-\nu)}{2} \delta_* = 0 \quad (3.103)$$

olarak yazılabilir. Kesme frekansı civarındaki karşılaştırma için yeni parametrelerde elde edilen (3.101), (3.102) ve (3.103) ifadelerine ait eğriler Şekil 3.7 ile verilmiştir.



Şekil 3.7. Antisimetrik modda elde edilen kesme frekansı civarındaki (3.99) numaralı dispersiyon ilişkisinin (siyah) kesme frekansı civarındaki (3.102) ile verilen açılımı (kırmızı), (3.103) ile verilen geleneksel Kirchhoff modelinin (yeşil) karşılaştırılması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$) (Ölçeklendirme: $\delta_* = \delta/G^2$ ve $K_* = K/\sqrt{G}$)

Uzun dalga, düşük frekans varsayımı altında hassas bir sonuç elde edebilmek için (3.99) ile verilen ölçeklendirme neticesinde elde edilen sonuçların Şekil 3.7 ile verilen grafiğine bakılırsa kesme frekansının en yakın civarında (3.48) dispersiyon ilişkisinin sayısal çözümüne en yakın eğri, çalışmada asimptotik olarak elde edilen (3.94) açılımına ait olan eğridir. Klasik model olan (3.95) eğrisi için düşük frekansta dalga boyu arttıkça grafikler arası fark açılmaktadır. Sonuç olarak klasik plaka modeli ile karşılaştırıldığında çalışmada elde edilen (3.94) yaklaşımının en iyi yaklaşım olduğu görülmektedir (Şekil 3.7).

Ayrıca $K \sim G^{1/4}$ olmak üzere (3.95) denkleminde $\Omega \ll G^{1/2} \sim \Omega_*$ varsayıldığında başlıc terimlerin K^4 ve $3(1-\nu)G/2$ terimleri olduğu görülür. Dolayısıyla (3.95) denkleminde

$$K^4 + \frac{3(1-\nu)}{2}G = 0 \quad (3.104)$$

yazılır. Elde edilen (3.104) sonucu burada bahsi geçen varsayımlar altında yapının quasi-statik davranış sergilediği anlamına gelmektedir.

Öte yandan $K \sim G^{1/4}$ olmak üzere $\Omega \gg G^{1/2}$ varsayıldığında da (3.95) denkleminde başlıc terimlerin K^4 ve $3(1-\nu)\Omega^2/2$ terimleridir. Dolayısıyla buradaki var-

sayım altında (3.95) denkleminde

$$K^4 - \frac{3(1-\nu)}{2}\Omega^2 = 0 \quad (3.105)$$

eşitliği elde edilir ki bu da serbest plakalar için elde edilmiş dispersiyon ilişkisine karşılık gelmektedir[17].

Son olarak kesme frekansı civarında elde edilen (3.94) yaklaşımında (3.17) ile verilen orjinal değişkenlere de dönülerek $w \approx u_2(x, 0)$ ve $w = \exp i(kx - \omega t)$ için hareket denklemi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} & \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\theta(1+\nu)^2}{Eh^3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \theta \left(1 - \frac{\theta(1-2\nu)(1+\nu)}{3Eh(1-\nu)} \right) w = 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

3.4. Tek Taraflı Durumda Uzun Dalga-Düşük Frekans Yaklaşımı

Bu bölümde tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmandaki dalgalar için uzun dalga, düşük frekans varsayımı altında dispersiyon analizi yapılmıştır. Tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katmanın 3.2 bölümünde kesme frekansı (3.74) yaklaşık ifadesi ile hesaplanmıştır. Bu ifadeden yararlanarak yapılan $\delta = \Omega^2 - G/2 \ll G \ll 1$ ($\Omega \sim \sqrt{G}$, $K \sim \sqrt{G}$) varsayımı altında (3.68) numaralı dispersiyon denkleminin Taylor serisi açılımı $\Omega \ll 1$ ve $K \ll 1$ iken

$$\begin{aligned} & \frac{G\Omega^2}{32} - \frac{G}{16(1-\nu)}K^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{1-\nu} + \frac{G(7-12\nu+4\nu^2)}{6(1-\nu)^2} \right) K^2\Omega^2 \\ & - \frac{1}{16} \left(1 + \frac{G(5-8\nu)}{6(1-\nu)} \right) \Omega^4 - \frac{G}{12(1-\nu)}K^4 + \frac{3-2\nu}{12(1-\nu)^2}\Omega^2K^4 \\ & - \frac{(11-16\nu+4\nu^2)}{48(1-\nu)^2}\Omega^4K^2 - \frac{1}{12(1-\nu)^2}K^6 + \frac{3-4\nu}{48(1-\nu)}\Omega^6 = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

şeklinde bir polinom formunda elde edilmiştir. Bu denklemin daha kolay analiz edilebilmesi için sırasıyla genişleyen(extensional) ve eğilme(bending) dalgalar için olmak üzere iki özdeş denklem şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

Birincisi için (3.107) numaralı denklemde Ω^2 , K^2 , $K^2\Omega^2$ ve Ω^4 terimleri eşitliğin solunda bırakılarak denklem düzenlenir ve genişleyen(extensional) dalgalar için

aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8(1-\nu)} \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right) \left(K^2 - \frac{1-\nu}{2} \Omega^2 \right) &= -\frac{G(7-12\nu+4\nu^2)}{48(1-\nu)^2} K^2 \Omega^2 + \\ &\frac{G(5-8\nu)}{96(1-\nu)} \Omega^4 + \frac{G}{12(1-\nu)} K^4 - \frac{3-2\nu}{12(1-\nu)^2} \Omega^2 K^4 + \\ &\frac{(4\nu^2-16\nu+11)}{48(1-\nu)^2} \Omega^4 K^2 - \frac{3-4\nu}{48(1-\nu)} \Omega^6 + \frac{1}{12(1-\nu)^2} K^6. \end{aligned} \quad (3.108)$$

İkinci olarak ise (3.107) denkleminde K^6 , K^2 , $K^2\Omega^2$ terimleri eşitliğin solunda bırakılarak ve denklem yeniden düzenlenerek eğilme(bending) dalgaları için

$$\begin{aligned} \frac{K^2}{12(1-\nu^2)} \left(K^4 - \frac{3(1-\nu)}{2} \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right) \right) &= \\ \frac{G}{32} \Omega^2 - \frac{1}{16} \left(1 + \frac{G(5-8\nu)}{6(1-\nu)} \right) \Omega^4 - \frac{G}{12(1-\nu)} K^4 + \frac{3-2\nu}{12(1-\nu)^2} \Omega^2 K^4 & \quad (3.109) \\ + \frac{3-4\nu}{48(1-\nu)} \Omega^6 - \frac{11-16\nu+4\nu^2}{48(1-\nu)^2} K^2 \Omega^4 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

Sonrasında (3.108) eşitliğinde $\delta = \Omega^2 - G/2$ yazılır ve denklemin sağ tarafında K^2 yerine $(1-\nu)/2$ yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \delta \left(K^2 - \frac{1-\nu}{2} \Omega^2 \right) &= \frac{-G(7-12\nu)+4\nu^2}{12} \Omega^4 + \frac{G(5-8\nu)}{12} \Omega^4 + \\ &\frac{2G(1-2\nu+\nu^2)}{12} \Omega^4 - \frac{(3-2\nu)(1-\nu)}{6} \Omega^6 + \frac{4\nu^2-16\nu+11}{12} \Omega^6 \\ &- \frac{3-4\nu}{6} \Omega^6 + \frac{(1-\nu)}{12} \Omega^6. \end{aligned}$$

Son eşitlikte cebirsel işlemler yapıldığında

$$\delta \left(K^2 - \frac{1-\nu}{2} \Omega^2 \right) = -\frac{G\nu^2}{6} \Omega^4 + \frac{\nu^2}{12} \Omega^6. \quad (3.110)$$

denklemini elde edilir ve burada her iki taraf δ ile bölünür K^2 yalnız bırakılırsa (3.110) denklemini $\Omega \ll 1$ iken

$$K^2 = \frac{1-\nu}{2} \Omega^2 - \frac{G\nu^2}{6\delta} \Omega^4 + \frac{\nu^2}{12\delta} \Omega^6 \dots \quad (3.111)$$

açılımı olarak ifade edilir ve sağ taraf $(1-\nu)/2\Omega^2$ parantezine alındığında ise (3.111) açılımı

$$K^2 = \frac{1-\nu}{2}\Omega^2 \left(1 - \frac{G\nu^2}{3\delta(1-\nu)}\Omega^2 + \frac{\nu^2}{6\delta(1-\nu)}\Omega^4 + \dots \right) \quad (3.112)$$

şeklinde düzenlenir.

Öte yandan (3.109) denkleminde $K^4 \sim G$ ve $\Omega^2 \sim G$ olduğundan $\mathcal{O}(G)$ ve $\mathcal{O}(G^2)$ mertebesinden olan terimler tutularak, $\mathcal{O}(G^3)$ mertebesinden olan terimlerden ihmal edildiğinde (3.109) numaralı eşitlik

$$\frac{1}{12(1-\nu)^2}K^2 \left(K^4 - \frac{3(2-\nu)}{2} \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right) \right) = \frac{G}{32}\Omega^2 - \frac{1}{16}\Omega^4 - \frac{G}{12(1-\nu)}K^4 + \frac{3-2\nu}{12(1-\nu)^2}\Omega^2 K^4 \quad (3.113)$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlikte K^4 yerine $3(1-\nu)\delta/2$ yazılırsa

$$\frac{K^2}{12(1-\nu)^2} \left(K^4 - \frac{3(1-\nu)}{2}\delta \right) = \frac{G}{32}\Omega^2 - \frac{1}{16}\Omega^4 - \frac{G}{12(1-\nu)} \frac{3(1-\nu)\delta}{2} + \frac{(3-2\nu)}{12(1-\nu)^2} \frac{3(1-\nu)}{2}\delta\Omega^2. \quad (3.114)$$

olur ve (3.114) denklemini $K^2/12(1-\nu)^2$ ile bölünürse

$$K^4 - \frac{3(1-\nu)}{2}\delta = -\frac{12G(1-\nu)^2\delta}{8K^2} + \frac{12(1-\nu)^2}{K^2} \left(\frac{G}{32} + \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\delta \right) \Omega^2 - \frac{12(1-\nu)^2}{16K^2}\Omega^4 \quad (3.115)$$

eşitliği elde edilir. (3.115) eşitliğinde ayrıca K^2 yerine $\sqrt{3(1-\nu)\delta/2}$ yazılırsa

$$K^4 = \frac{3(1-\nu)}{2}\delta \times \left(1 - \frac{G\sqrt{2}\sqrt{1-\nu}}{\sqrt{3}\sqrt{\delta}} + \frac{8\sqrt{2}\sqrt{1-\nu}}{\delta\sqrt{3}\sqrt{\delta}} \left(\frac{G}{32} + \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\delta \right) \Omega^2 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\nu}}{2\sqrt{3}\delta\sqrt{\delta}}\Omega^4 \right)$$

olur ve burada cebirsel işlemler yapıldığında son denklem

$$K^4 = \frac{3(1-\nu)}{2}\delta \times \left(1 - \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{3\delta}} \left(G - \frac{8}{\delta} \left(\frac{G}{32} + \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\delta \right) \Omega^2 + \frac{1}{2\delta}\Omega^4 \right) \right) \quad (3.116)$$

şeklinde yeniden düzenlenir ve $\Omega \ll 1$ iken (3.116) yaklaşık denklemi aşağıdaki şekilde bir açılım olarak

$$K^4 = \frac{3(1-\nu)}{2}\delta \times \left(1 - \frac{1}{4\delta} \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{3\delta}} \left(4\delta G - \left(G + \frac{4(3-2\nu)}{1-\nu}\delta \right) \Omega^2 + 2\Omega^4 \right) + \dots \right). \quad (3.117)$$

yazılır. (3.117) ifadesinde $\delta = \Omega^2 - G/2 \ll G \ll 1$ olduğundan başlıc terim $\frac{3(1-\nu)}{2}\delta$ terimidir. Başlıc terimler alındığında elde edilen $K^4 = \frac{3(1-\nu)}{2}\delta$ eşitliği (3.16)-(3.95) numaralı denklemleri ile ifade edilen klasik modelde elastik zemin ile etkileşen plakalar için elde edilen dispersiyon ilişkisine karşılık gelmektedir.

Ayrıca (3.107) ile verilen dispersiyon ilişkisinde $G\Omega^2$, GK^2 , $K^2\Omega^2$ ve Ω^4 terimleri solda bırakılır diğer terimler eşitliğin sağına alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{G\Omega^2}{32} - \frac{G}{32} \left(\frac{2}{1-\nu}K^2 + \frac{2}{G}\Omega^4 \right) + \frac{G}{32} \left(\frac{4}{G(1-\nu)}K^2\Omega^2 \right) = \\ & \frac{5-8\nu}{96(1-\nu)}G\Omega^4 - \frac{3-4\nu}{48(1-\nu)}\Omega^6 - \frac{7-12\nu+4\nu^2}{48(1-\nu)^2}G\Omega^2K^2 + \frac{11-16\nu+4\nu^2}{48(1-\nu)^2}\Omega^4K^2 \\ & + \frac{GK^4}{12(1-\nu)} - \frac{3-2\nu}{12(1-\nu)^2}\Omega^2K^4 + \frac{1}{12(1-\nu)^2}K^6 \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitliğin sağ tarafında $\Omega^2 = G/2$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{G}{32} \left(\Omega^2 + \frac{4K^2}{G(1-\nu)} \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right) - \frac{2}{G}\Omega^4 \right) = \\ & - \frac{G}{32} \left(-\frac{G^2(1-2\nu)}{6(1-\nu)} + \frac{8G}{3(1-\nu)^2} \left(\frac{3-8\nu+4\nu^2}{6(1-\nu)^2}K^2 + \frac{1}{2G}K^4 - \frac{1}{G^2}K^6 \right) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada eşitliğin sol tarafındaki son terime $\Omega^2 G$ ve $G^2/4$ terimleri eklenir ve çıkarılır ve cebirsel işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{G}{32} \left(\Omega^2 + \frac{4}{G(1-\nu)} K^2 \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right) - \frac{2}{G} \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right)^2 - 2\Omega^2 + \frac{G}{2} \right) = \\ & - \frac{G}{32} \left(-\frac{G^2(1-2\nu)}{6(1-\nu)} + \frac{8G}{3(1-\nu)^2} \left(\frac{3-8\nu+4\nu^2}{6(1-\nu)^2} K^2 + \frac{1}{2G} K^4 - \frac{1}{G^2} K^6 \right) \right) \end{aligned}$$

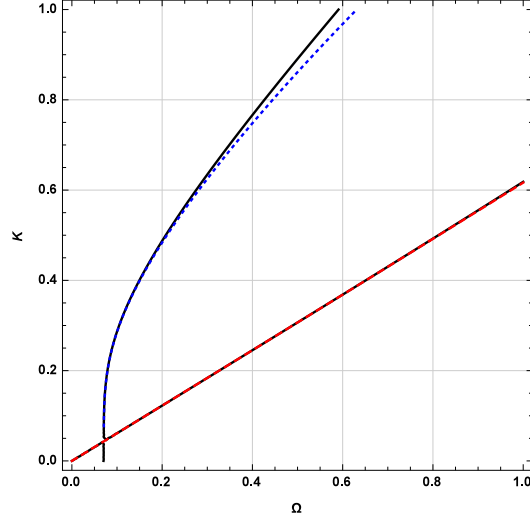
elde edilir. Denklemdaki $G/32$ sadeleştirilir ve sol taraftaki ifade $\Omega^2 - G/2$ parantezinde aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} & \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right) \left(1 - \frac{4}{G(1-\nu)} K^2 + \frac{2}{G} \left(\Omega^2 - \frac{G}{2} \right)^2 \right) = \\ & - \frac{G^2(1-2\nu)}{6(1-\nu)} + \frac{8G}{3(1-\nu)^2} \left(\frac{3-8\nu+4\nu^2}{6(1-\nu)^2} K^2 + \frac{1}{2G} K^4 - \frac{1}{G^2} K^6 \right). \end{aligned}$$

Elde edilen son denklemden de $\delta = \Omega^2 - G/2$ yerine yazıldığında bulunan

$$\begin{aligned} \delta \left(1 - \frac{4}{G(1-\nu)} K^2 + \frac{2\delta}{G} \right) &= -\frac{G^2(1-2\nu)}{6(1-\nu)} \\ &+ \frac{8G}{3(1-\nu)^2} \left(\frac{3-8\nu+4\nu^2}{16} K^2 + \frac{1}{2G} K^4 - \frac{1}{G^2} K^6 \right). \end{aligned} \tag{3.118}$$

denkleminin (3.107) açılımının kesme frekansı civarındaki ifadesidir. Şekil 3.8 ile verilen eğriler (3.112) ve (3.117) yaklaşımlarının eğilme dalgaları için en düşük kesme frekansı dışında geçerli olduğunu göstermektedir. Tek taraflı durumda genişleyen(extensional) ve eğilme(bending) olmak üzere iki tür dalga etkileşiminin varlığı (3.112) ve (3.117) ayrışmalarının yanı sıra Şekil 3.8 grafiğinden de okunabilmektedir. Ayrıca Şekil 3.4 ve Şekil 3.8 grafiklerinde genişleyen(extensional) ve eğilme(bending) dalgalarının etkileşimi sonucu bir sapma(veering) meydana geldiği de görülmektedir. Öte yandan Şekil 3.9 grafiğinde (3.107) ile verilen dispersiyon denkleminin ve bu denklemin kesme frekansı civarındaki yaklaşımına karşılık gelen (3.118) ifadesi arasındaki tutarlılık olduğu görülmüştür. Genişleyen dalgaların ve eğilme dalgalarının etkileşiminden kaynaklı bu sapmayı daha net görebilmek için (3.112) ve (3.118) ifadeleri $\Omega^2 = G/2$ ve



Şekil 3.8. Tek taraflı Winkler durumunda elde edilen (3.107) numaralı dispersiyon ilişkisinin yaklaşık ifadesi (siyah) ile (3.112) (kırmızı) ve (3.117) (mavi) yaklaşımlarının karşılaştırması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$)

$K^2 = G(1 - \nu)/4$ noktaları civarında aşağıdaki indirgenmiş formda yazılabilir:

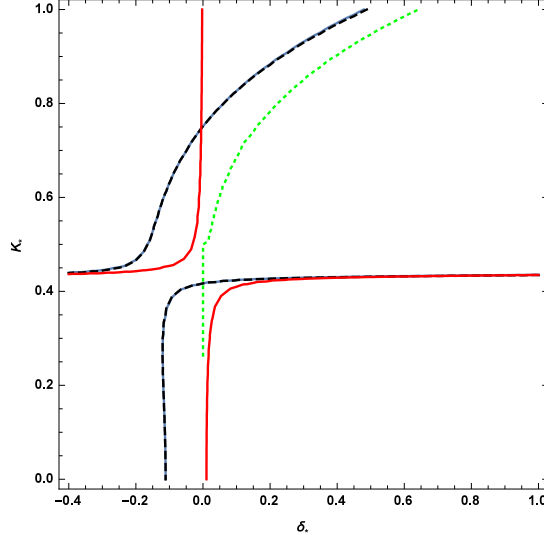
$$\delta_{\Omega} \left(\frac{1 - \nu}{2} \delta_{\Omega} - \delta_K \right) = \frac{\nu^2}{32}. \quad (3.119)$$

Burada

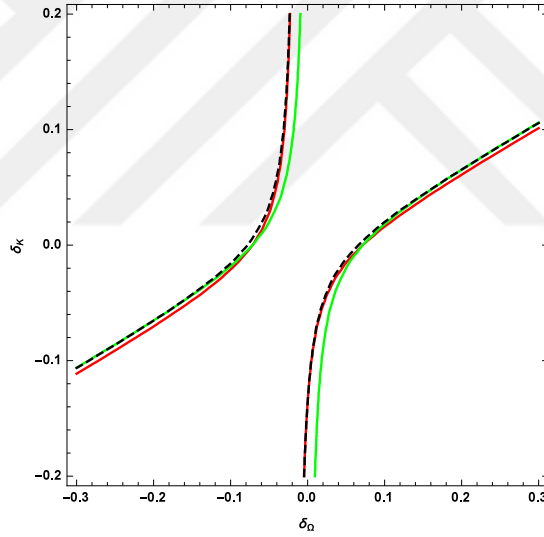
$$\delta_{\Omega} = \frac{\Omega^2 - G/2}{G^{3/2}} \quad \text{ve} \quad \delta_K = \frac{K^2 - (1 - \nu)G/4}{G^{3/2}}. \quad (3.120)$$

Bir hiperbol formunda elde edilen (3.119) eşitliğinde $\delta_{\Omega} = 0$ ve $\delta_{\Omega} = [2/(1 - \nu)]\delta_K$ hiperbolün asimptotlarıdır. Bu asimptotlar da Mace ve Markoni[24] tarafından yapılan çalışmadaki genişleme ve eğilme (extensional ve bending) dalgalarının dispersiyon eğrilerine karşılık gelmektedir. Yapılan mikro ölçeklendirme sayesinde etkileşimden kaynaklı sapma Şekil 3.10'da daha net görülmektedir.

Çalışmanın bu bölümünde iki taraflı ve tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katman için elde edilen dispersiyon denklemlerinin uzun dalga, düşük frekanslı dalgalar varsayımıyla Taylor serileri kullanılarak yaklaşık olarak elde edilen polinom formlarının analizi yapılmıştır. Plakalardaki klasik eğilme teorisi çerçevesindeki geleneksel mühendislik yaklaşımının elastik olarak desteklenen yapıların karakteristik kesme frekansı civarında geçerli olmadığı gösterilmiştir. Kesme frekansı civarında (3.94) ve (3.118) asimptotik yaklaşımları elde edilmiştir. Bununla birlikte



Şekil 3.9. Tek taraflı Winkler durumunda elde edilen (3.107) dispersiyon ilişkisinin (mavi) (3.118) (siyah) ve (3.112) (kırmızı) - (3.117) (yeşil) yaklaşımlarının karşılaştırması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$) (Ölçeklendirme: $\delta_* = \delta/G^2$ ve $K_* = K/\sqrt{G}$)



Şekil 3.10. δ_Ω ve δ_K değişkenlerine göre genişleme ve eğilme (extensional ve bending) dalgalarının sapmasını gösteren dispersiyon eğrisi (3.107) (siyah) ile kesme frekansı civarında elde edilen yaklaşım (3.118) (kırmızı) ve δ_Ω ve δ_K ölçeklendirmesine göre elde edilen (3.119) (yeşil) ifadesinin karşılaştırması ($G = 0.01$ ve $\nu = 0.25$)

tek taraflı durum için elde edilen asimptotik açılımın eğilme (bending) dalgalarının ve genişleyen (extensional) dalgaların etkileşiminden dolayı karmaşık bir formda olduğu ve aynı zamanda bu iki tür dalganın etkileşimi sonucu meydana gelen sapmayı görselleştiren (3.119) ifadesi kesin olarak elde edilmiştir.

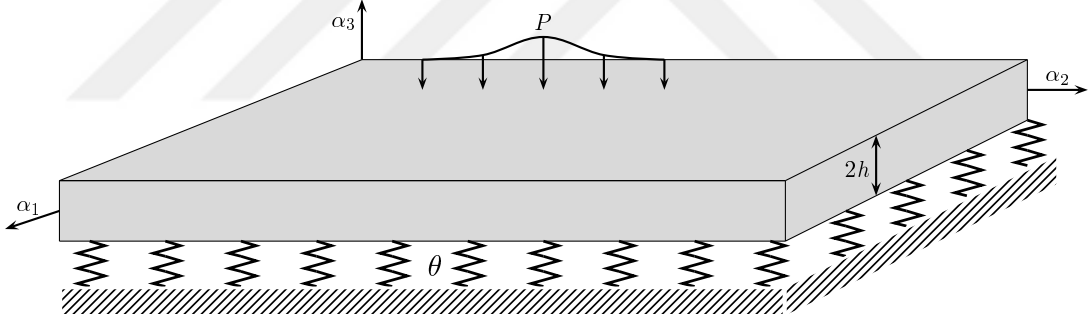
4. TEK TARAFLI WINKLER TABANI İLE DESTEKLENEN ELASTİK PLAKA İÇİN HAREKET DENKLEMLERİNİN ASİMPOTİK DERİVASYONU

Bu bölümde Winkler tabanı ile tek taraflı etkileşimde olan elastik bir plakanın hareket denklemlerinin asimptotik derivasyonu yapılacaktır. Problemden önce klasik Kirchhoff plaka modelinin asimptotik derivasyonu ile başlanacaktır daha sonra kesme frekansı civarındaki formülasyon elde edilerek klasik formülasyon ile karşılaştırılacaktır.

4.1. Problemin İfadesi

Düzlemsel gerinim koşullarında kalınlığı $2h$ olan sonsuz büyüklükte homojen izotropik elastik bir katman düşünölsün. Bu elastik katman, sertliği(rijitliği) θ olan Winkler tabanı ile $\alpha_3 = -h$ alt yüzeyinde tek taraflı olarak desteklenmekte bir P yükü ve üst yüzey boyunca etki etmektedir(Şekil 4.1).

Winkler tabanıyla etkileşen elastik katmanın asimptotik denklemlerinin türetil-



Şekil 4.1. Tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşen elastik katman

mesinde kullanılacak 3-boyuttaki lineer elastisite denklemleri $-\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty$, $-h \leq \alpha_3 \leq h$ olarak verilen 3-boyutlu kartezyen koordinatlarında $i \neq j = 1, 2$ olmak üzere aşağıdaki formda verilmiştir[17]:

$$\frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial \alpha_3} = - \left(\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} \right) + \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \alpha_3} = - \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \alpha_2} \right) + \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}. \quad (4.2)$$

Gerilme bileşenleri ise aşağıdaki gibidir[17]:

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_i} \right), \quad (4.4)$$

$$\sigma_{3i} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_3} \right), \quad (4.5)$$

$$E \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} = \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (4.6)$$

Problemin sınır koşulları

$$\sigma_{3i} \Big|_{\alpha_3=\pm h} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.7)$$

$$\sigma_{33} \Big|_{\alpha_3=h} = P, \quad \sigma_{33} \Big|_{\alpha_3=-h} = \theta v_3, \quad (4.8)$$

olarak verilmektedir ve burada θ Winkler zemin parametresidir. Katmanın rijitliği Winkler zemin parametresinden büyük varsayımı altında

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\theta h}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)\theta h}{E}} \ll 1 \quad (4.9)$$

olacak biçimde ε parametresi tanımlanır. Uzun dalga-düşük frekans eğilme dalgaları için tanımlanan ölçeklendirme L dalga uzunluğu ve T zaman parametresi $(L/h)^2 \sim Tc_2/h$ sağlamak koşuluyla

$$L \sim \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad T \sim \frac{h}{c_2 \varepsilon} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanmışlardır[17]. Elastik katman teorisinde kullanılan (4.10) ölçeklendirmesi 4.2 numaralı alt bölümde Winkler tabanı ile etkileşen Kirchhoff plakasının

iki boyuttaki klasik formülasyonunun türetilmesinde kullanılacaktır.

4.2. İki Boyuttaki Geleneksel Plaka Modeli

Bu bölümde tek boyuttaki Winkler elastik zemini ile etkileşen ince elastik katmandaki eğilme dalgaları için geleneksel hareket denklemi türetilecektir. Bunun için (4.10) ölçekleri göz önüne alınarak

$$\alpha_i = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\xi_i, \quad \alpha_3 = h\zeta, \quad t = \frac{h}{c_2\varepsilon}\tau. \quad (4.11)$$

boyutsuz koordinatları tanımlansın. Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri ile P yükü

$$v_i = \sqrt{\varepsilon}hv_i^*, \quad v_3 = hv_3^*, \quad (4.12)$$

$$\sigma_{ii} = E\varepsilon\sigma_{ii}^*, \quad \sigma_{ij} = E\varepsilon\sigma_{ij}^*, \quad \sigma_{3i} = E\varepsilon^{3/2}\sigma_{3i}^*, \quad \sigma_{33} = E\varepsilon^2\sigma_{33}^*, \quad (4.13)$$

$$P = E\varepsilon^2P^*, \quad (4.14)$$

biçiminde boyutsuzlaştırılsın. Burada yıldız ile verilen tüm fonksiyonlar aynı asimptotik mertebeden varsayılacaktır.

(4.11) ile verilen boyutsuz değişkenler ve (4.12)-(4.14) ölçeklendirmesi kullanılarak (4.1)-(4.2) hareket denklemleri

$$\frac{\partial\sigma_{3i}^*}{\partial\zeta} = - \left(\frac{\partial\sigma_{ii}^*}{\partial\xi_i} + \frac{\partial\sigma_{ij}^*}{\partial\xi_j} \right) + \frac{\varepsilon}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial\tau} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial\sigma_{33}^*}{\partial\zeta} = - \left(\frac{\partial\sigma_{3i}^*}{\partial\xi_i} + \frac{\partial\sigma_{3j}^*}{\partial\xi_j} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^*}{\partial\tau} \quad (4.16)$$

olarak ve (4.3)- (4.6) ile verilen gerilme bileşenleri sırasıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sigma_{ii}^* = \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial\xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^*}{\partial\xi_j} \right) + \varepsilon \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^* \quad (4.17)$$

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^*}{\partial \xi_i} \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial \zeta} = -\frac{\partial v_3^*}{\partial \xi_i} + 2\varepsilon(1+\nu)\sigma_{3i}^* \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta} = \varepsilon^2 \sigma_{33}^* - \nu\varepsilon(\sigma_{ii}^* + \sigma_{jj}^*). \quad (4.20)$$

(4.7) ve (4.8) olarak verilen sınır koşulları da

$$\sigma_{3i}^*|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad (4.21)$$

$$\sigma_{33}^*|_{\zeta=1} = \varepsilon^2 P^*, \quad \sigma_{33}^*|_{\zeta=-1} = \frac{1}{2(1+\nu)} v_3^* \quad (4.22)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki yıldızlı ifadeler

$$\begin{aligned} v_i^* &= v_i^{(0)} + \varepsilon v_i^{(1)} + \dots, & v_3^* &= v_3^{(0)} + \varepsilon v_3^{(1)} + \dots, \\ \sigma_{ii}^* &= \sigma_{ii}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ii}^{(1)} + \dots, & \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \dots, \\ \sigma_{3i}^* &= \sigma_{3i}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{3i}^{(1)} + \dots, & \sigma_{33}^* &= \sigma_{33}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{33}^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

asimptotik seri formunda yazılabilir. (4.23) seri açılımları (4.15)-(4.20) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{3i}^{(1)}}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \sigma_{ii}^{(0)}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \xi_j} \\ &- \varepsilon \left(\frac{\partial \sigma_{ii}^{(1)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial \xi_j} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_i^{(0)}}{\partial \tau^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{33}^{(1)}}{\partial \zeta} &= - \left(\frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{3j}^{(0)}}{\partial \xi_j} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^{(0)}}{\partial \tau^2} \right) + \\ &+ \varepsilon \left(-\frac{\partial \sigma_{3i}^{(1)}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \sigma_{3j}^{(1)}}{\partial \xi_j} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v_3^{(1)}}{\partial \tau^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ii}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ii}^{(1)} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^{(0)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{ij}^{(1)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_i} \right) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial \xi_i} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}\quad (4.27)$$

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \xi_i} + \varepsilon \left(-\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi_i} + 2(1+\nu)\sigma_{3i}^{(0)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\quad (4.28)$$

$$\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \zeta} = -\varepsilon\nu \left(\sigma_{ii}^{(0)} + \sigma_{jj}^{(0)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\quad (4.29)$$

denklemleri elde edilir. (4.21)-(4.22) ile verilen sınır koşulları da benzer şekilde

$$\sigma_{3i}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{3i}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)|_{\zeta=\pm 1} = 0,\quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{33}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)|_{\zeta=1} &= \varepsilon^2 (P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), \\ \sigma_{33}^{(0)} + \varepsilon\sigma_{33}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)|_{\zeta=-1} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(v_3^{(0)} + \varepsilon v_3^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right)\end{aligned}\quad (4.31)$$

biçiminde ifade edilebilir. Asimptotik türetmeye başlarken öncelikle seri açılımı formatında yazılan (4.24)-(4.29) denklemlerinden başlıcıl terimler alınarak başlanacaktır. Öncelikle, (4.29) denkleminde başlıcıl terimlerden oluşan eşitlik

$$\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \zeta} = 0$$

olarak elde edilir ve bunun ζ değişkenine göre integrali alındığında

$$v_3^{(0)} = V_3^{(0)}(\xi_i, \tau) \quad (4.32)$$

bulunur. (4.28) eşitliğinden başçıl terimlerin alınmasıyla elde edilen denklem

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \xi_i} \quad (4.33)$$

şeklindedir. Son denklem ζ kalınlığı boyunca integre edilir ve (4.32) ifadesi yerine yazılırsa

$$v_i^{(0)} = -\zeta \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi_i} + V_i^{(0)} \quad (4.34)$$

bulunur. Gerilme bileşenleri için de (4.26) ve (4.27) ile verilen eşitliklerde başçıl terimler alındığında sırasıyla

$$\sigma_{ii}^{(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right),$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_i} \right)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde (4.34) ile verilen $v_i^{(0)}$ yer değiştirmesi yerine yazıldığında başçıl terimlerden oluşan gerilme bileşenleri sırasıyla

$$\sigma_{ii}^{(0)} = -\frac{\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \nu \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) + \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right), \quad (4.35)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = -\frac{\zeta}{1+\nu} \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_i} \right). \quad (4.36)$$

biçiminde elde edilir. (4.35) ve (4.36) eşitlikleri (4.24) numaralı eşitlikten alınan başlı terimlerden oluşan denklemde yerlerine yazılması ile

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \zeta} &= \frac{\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde (4.30) ile verilen sınır koşulu kullanılarak ζ değişkenine göre integral alınmasıyla

$$\begin{aligned} \sigma_{3i}^{(0)} &= \frac{\zeta^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) \\ &\quad - \frac{\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) + S_{3i}^{(0)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $S_{3i}^{(0)}$ integral sabitidir ve (4.30) ile verilen sınır koşulunda $\zeta = 1$ için

$$\begin{aligned} S_{3i}^{(0)} &= -\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) \end{aligned}$$

bulunur. $\sigma_{3i}^{(0)}$ gerilme bileşeninde bu integral sabiti yerine yazıldığında ve (4.30) sınır koşulu $\zeta = -1$ için uygulandığında

$$\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} = 0 \quad (4.37)$$

statik denkleminde ulaşılır. Dolayısıyla (4.30) sınır koşulunun sağlanması

$$\sigma_{3i}^{(0)} = \frac{\zeta^2 - 1}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) \quad (4.38)$$

olmasını gerektirir. (4.25) eşitliğiyle devam edilirse, burada başçıl terimler alındığında

$$\frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} = - \left(\frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{3j}^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \tau^2}$$

denklemini elde edilir. Burada (4.38) eşitliği ile verilen $\sigma_{3i}^{(0)}$ gerilme bileşeni yerine yazılarak gerekli düzenleme yapılırsa son ifade

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} = & - \frac{\zeta^2 - 1}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^4} + \frac{\partial^4 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^2 \partial \xi_j^2} + \frac{\partial^4 V_3^{(0)}}{\partial \xi_j^2 \partial \xi_i^2} + \frac{\partial^4 V_3^{(0)}}{\partial \xi_j^4} \right) \\ & + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \tau^2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

olarak ifade edilir. Burada homojen olmayan (4.31) numaralı sınır koşulu gereği (4.39) eşitliğinde her iki tarafın integrali alındığında

$$\sigma_{33}^{(0)} = - \frac{\zeta^3 - 3\zeta}{6(1-\nu^2)} \Delta^2 V_3^{(0)} + \frac{\zeta}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \tau^2} + S_{33}^{(0)}$$

elde edilir. Burada $\Delta^2 = \partial^4 / \partial \xi_i^4 + 2\partial^2 / \partial \xi_i^2 \partial \xi_j^2 + \partial^4 / \partial \xi_j^4$ ile tanımlıdır. $S_{33}^{(0)}$ integral sabiti olup, (4.31)₁ ile verilen sınır koşulu yardımıyla $\zeta = 1$ sınırında

$$S_{33}^{(0)} = - \frac{2}{6(1-\nu^2)} \Delta^2 V_3^{(0)} - \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \tau^2}$$

bulunur. Dolayısıyla $\sigma_{33}^{(0)}$ gerilme bileşeni

$$\sigma_{33}^{(0)} = - \frac{\zeta^3 - 3\zeta^2}{6(1-\nu^2)} \Delta^2 V_3^{(0)} + \frac{\zeta - 1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \tau^2} \quad (4.40)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (4.40) eşitliğinde (4.31)₂ sınır koşulu uygulandığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{2}{3(1-\nu)} \Delta^2 V_3^{(0)} + \frac{1}{2} V_3^{(0)} + \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \tau^2} = (1+\nu) P^* \quad (4.41)$$

Bu denklemde $hV_3^{(0)} = w$ ve (4.11) ile verilen değişkenler kullanılarak orijinal değişkenlere dönüldüğünde (4.41) denklemi

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_i^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \theta w = P \quad (4.42)$$

şeklinde ifade edilir ve başçıl terimlerle elde edilen bu denklem Winkler zemini ile etkileşimde olan bir elastik katman için mühendislik problemlerinde kullanılan klasik denklemdir(bakınız Alt Bölüm 3.1). Burada

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \quad (4.43)$$

eğilme sertliği(rijitliği) katsayısıdır. (4.42) denklemde $w = We^{i(k\alpha_1 - \omega t)}$ çözümü yerine yazıldığında

$$\Omega^2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3(1-\nu)} \varepsilon^2 K^4. \quad (4.44)$$

dispersiyon denkleminde ulaşılır. Bu dispersiyon denklemi kesme frekansı civarında ifade edilmiştir. Burada

$$K = \frac{kh}{\varepsilon}, \quad \Omega = \frac{\omega h}{c_2 \varepsilon} \quad (4.45)$$

ile verilmektedir. Bu bölümde kullanılan (4.11) ölçeklendirmesi $T \sim h/c_2 \varepsilon$ ve $\Omega \sim \varepsilon K^2$ yaklaşımına dayanmaktadır. Kullanılan bu ölçeklendirmenin sonucu olan (4.12)-(4.13) ölçeklendirmeleri $\Omega = 1/\sqrt{2}$ olan kesme frekansı civarında başarısız olmuştur. Çünkü (4.44) denklemde $\Omega \sim 1$ iken $K \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$. Fakat kesme frekansı civarında, yani $K \sim 1$ iken $|\Omega^2 - 1/2| \sim \varepsilon^2$ olmalıdır. Bu durumda bu bölümde kabul edilen $\Omega \sim 1$ iken $K \sim \varepsilon^{-1/2}$ varsayımı altında yapılan (4.11)-(4.14) ölçeklendirmesine bağlı kalınmaz. Dolayısıyla $|\Omega^2 - 1/2| \sim \varepsilon^2$ ve $K \sim 1$ varsayımı altında bir ölçeklendirme yapılmalıdır.

Kesme frekansı civarında geliştirilecek iki boyuttaki formülasyon için iki-terim asimptotik davranış (4.44) baz alınarak

$$\Omega^2 = 1/2 + \varepsilon^2 P(K) \quad (4.46)$$

olarak formülize edilebilir. Burada $P(K)$ dispersiyon denkleminde yararlanılarak belirlenecek bir fonksiyon olup ve (4.44) geleneksel formülasyonu için

$$P(K) = \frac{2}{3(1-\nu)} K^4 \quad (4.47)$$

olarak bulunur.

4.3. Kesme Frekansı Civarındaki Formülasyonların Türetilmesi

Winkler tabanı ile tek taraftan etkileşen elastik katman problemi için kesme frekansı civarında türetilen formülasyonlarda bir önceki bölümde belirtilen sebeplerden dolayı geleneksel formülasyonların türetilmesinde kullanılan ölçeklendirmeden farklı olarak tanımlanan boyutsuz değişkenler aşağıda verilmiştir:

$$\alpha_i = \frac{h}{\varepsilon} \xi_i, \quad \alpha_3 = h\zeta, \quad t = \frac{h}{c_2\varepsilon} \tau. \quad (4.48)$$

Yerdeğiştirme, gerilme bileşenleri ve kuvvet terimi için önerilen ölçeklendirme parametreleri ise sırasıyla

$$v_i = h\varepsilon v_i^*, \quad v_3 = hv_3^*, \quad (4.49)$$

$$\sigma_{ii} = E\varepsilon^2 \sigma_{ii}^*, \quad \sigma_{ij} = E\varepsilon^2 \sigma_{ij}^*, \quad \sigma_{3i} = E\varepsilon^3 \sigma_{3i}^*, \quad \sigma_{33} = E\varepsilon^2 \sigma_{33}^*, \quad (4.50)$$

ve

$$P = E\varepsilon^4 P^*, \quad (4.51)$$

şeklinde önerilmiştir. Burada yıldızlı ifadeler aynı asimptotik mertebedeki büyüklüklerdir. (4.1)-(4.2) ile verilen hareket denklemlerinde ve (4.3)-(4.6) ile verilen gerilme bileşenlerinde (4.48) boyutsuz değişkenleri (4.49)-(4.50) ölçeklendirme parametreleri uygulandığında (4.1)-(4.6) eşitlikleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_{3i}^*}{\partial \zeta} = - \left(\frac{\partial \sigma_{ii}^*}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2(1+\nu)} e_i^* - \frac{1}{4(1+\nu)} v_i^* \quad (4.52)$$

burada

$$e_i^* = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 v_i^*}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} v_i^* \right)$$

ile tanımlıdır;

$$\frac{\partial \sigma_{33}^*}{\partial \zeta} = -\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \sigma_{3i}^*}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{3j}^*}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2(1+\nu)} e_3^* - \frac{1}{4(1+\nu)} v_3^* \quad (4.53)$$

ve burada

$$e_3^* = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 v_3^*}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} v_3^* \right) \quad (4.54)$$

ile tanımlıdır;

$$\sigma_{ii}^* = \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^*}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^*, \quad (4.55)$$

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^*}{\partial \xi_i} \right) \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial \zeta} = -\frac{\partial v_3^*}{\partial \xi_i} + \varepsilon^2 2(1+\nu) \sigma_{3i}^*, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial v_3^*}{\partial \zeta} = \varepsilon^2 (\sigma_{33}^* - \nu(\sigma_{ii}^* + \sigma_{jj}^*)). \quad (4.58)$$

Sınır koşulları ise

$$\sigma_{3i}^* \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad (4.59)$$

$$\sigma_{33}^* \Big|_{\zeta=1} = \varepsilon^2 P^*, \quad \sigma_{33}^* \Big|_{\zeta=-1} = \frac{1}{2(1+\nu)} v_3^* \quad (4.60)$$

olarak yazılır. Buradaki yıldızlı ifadeler

$$\begin{aligned}
v_i^* &= v_i^{(0)} + \varepsilon^2 v_i^{(1)} + \dots, & v_3^* &= v_3^{(0)} + \varepsilon^2 v_3^{(1)} + \dots, \\
\sigma_{ii}^* &= \sigma_{ii}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{ii}^{(1)} + \dots, & \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(1)} + \dots, \\
\sigma_{3i}^* &= \sigma_{3i}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{3i}^{(1)} + \dots, & \sigma_{33}^* &= \sigma_{33}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{33}^{(1)} + \dots
\end{aligned} \tag{4.61}$$

asimptotik seri formunda yazılabilir. (4.61) seri açılımları (4.52)-(4.60) denklemlerinde yerlerine yazılırsa, sırasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{3i}^{(1)}}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \sigma_{ii}^{(0)}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \xi_j} - \frac{1}{4(1+\nu)} v_i^{(0)} + \\
&+ \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial \sigma_{ii}^{(1)}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial \xi_j} + e_i^{(0)} - \frac{1}{4(1+\nu)} v_i^{(1)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{33}^{(1)}}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{4(1+\nu)} v_3^{(0)} - \\
&- \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{3j}^{(0)}}{\partial \xi_j} - \frac{1}{2(1+\nu)} e_3^{(0)} + \frac{1}{4(1+\nu)} v_3^{(1)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ii}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{ii}^{(1)} &= \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^{(0)} + \\
&+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^{(1)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_i} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial \xi_i} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \tag{4.65}$$

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \xi_i} + \varepsilon^2 \left(-\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi_i} + 2(1+\nu) \sigma_{3i}^{(0)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \tag{4.66}$$

$$\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \zeta} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \zeta} = \varepsilon^2 \left(\sigma_{33}^{(0)} - \nu \left(\sigma_{ii}^{(0)} + \sigma_{jj}^{(0)} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (4.67)$$

denklemleri elde edilir. (4.59)-(4.60) ile verilen sınır koşulları da benzer şekilde

$$\sigma_{3i}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{3i}^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0 \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{33}^{(1)} \mathcal{O}(\varepsilon^4) \Big|_{\zeta=1} &= \varepsilon^2 P^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \\ \sigma_{33}^{(0)} + \varepsilon^2 \sigma_{33}^{(1)} \mathcal{O}(\varepsilon^4) \Big|_{\zeta=-1} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left(v_3^{(0)} + \varepsilon^2 v_3^{(1)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

biçiminde ifade edilebilir.

4.3.1. Başçıl Terimler

Kesme frekansı civarındaki elde edilecek asimptotik denklemlerin türetilmesine öncelikle (4.62)-(4.67) denklemlerinden başçıl terimler alınarak başlanacaktır. Bunun için önce (4.67) denkleminde başçıl terim alındığında

$$\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \zeta} = 0$$

olduğu görülür ve bu ifadenin ζ değişkenine göre integralinin alındığında

$$v_3^{(0)} = V_3^{(0)}(\xi_i, \tau). \quad (4.70)$$

elde edilir. (4.66) eşitliğinden başçıl terimlerin alınmasıyla elde edilen denklem

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial v_3^{(0)}}{\partial \xi_i}$$

şeklindedir. Son denklemde (4.70) ifadesi yerine yazılarak ζ değişkenine göre integral alındığında

$$v_i^{(0)} = -\zeta \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi_i} + V_i^{(0)} \quad (4.71)$$

bulunur. (4.63) eşitliğinden başçıl terimlerin alınarak

$$\frac{\partial \sigma_{33}^{(0)}}{\partial \zeta} = -\frac{1}{4(1+\nu)} v_3^{(0)}$$

denklemini elde edilir ve bu denklemde (4.70) ile verilen $v_3^{(0)}$ yerine yazılarak ζ değişkenine göre integre edildiğinde

$$\sigma_{33}^{(0)} = -\zeta \frac{1}{4(1+\nu)} V_3^{(0)} + S_{33}^{(0)}$$

eşitliği bulunur. Burada $S_{33}^{(0)}$ integral sabitidir ve (4.69) ile verilen sınır koşulu uygulandığında

$$\sigma_{33}^{(0)} = -\frac{\zeta - 1}{4(1+\nu)} V_3^{(0)} \quad (4.72)$$

elde edilir. (4.64) eşitliğinden alınan başçıl terimlerden oluşan $\sigma_{ii}^{(0)}$ gerilmesinin eşiti

$$\sigma_{ii}^{(0)} = \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^{(0)}.$$

şeklinde ve bu denklemde (4.71) ve (4.72) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^{(0)} = & -\frac{\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \nu \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) + \\ & + \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \nu \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) - \frac{(\zeta - 1)\nu}{4(1-\nu^2)} V_3^{(0)} \end{aligned} \quad (4.73)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.65) eşitliğinden $\sigma_{ij}^{(0)}$ gerilme bileşeni için başçıl terimlerden oluşan

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial \xi_i} \right)$$

eşitliği yazılır ve burada (4.71) ifadesi yerine koyularak düzenleme yapıldığına

$$\sigma_{ij}^{(0)} = -\frac{\zeta}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_i} \right) \quad (4.74)$$

bulunur. Son olarak $\sigma_{3i}^{(0)}$ gerilmesi için (4.62) eşitliğinden başlıc terimler alınarak

$$\frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \zeta} = - \left(\frac{\partial \sigma_{ii}^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) - \frac{1}{4(1+\nu)} v_i^{(0)}.$$

eşitliği elde edilir. Burada (4.74), (4.73) ve (4.71) numaralı eşitlikler yerlerine yazılarak cebirsel işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \zeta} = & \frac{\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \nu \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) - \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \nu \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) \\ & + \frac{\zeta - \nu}{4(1-\nu^2)} \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\zeta}{1+\nu} \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} - \\ & - \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) - \frac{1}{4(1+\nu)} V_i^{(0)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve burada ζ değişkenine göre integral alındığında

$$\begin{aligned} \sigma_{3i}^{(0)} = & \frac{\zeta^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) + \frac{\zeta^2 - 2\nu\zeta}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi_i} - \\ & - \frac{\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) - \\ & - \frac{\zeta}{4(1+\nu)} V_i^{(0)} + S_{3i}^{(0)} \end{aligned}$$

bulunur. Verilen (4.68) numaralı sınır koşulu $\zeta = 1$ için uygulandığında $S_{3i}^{(0)}$ olan integral sabiti aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$\begin{aligned} S_{3i}^{(0)} = & - \frac{1}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) - \frac{1-2\nu\zeta}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi_i} + \\ & + \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) + \\ & + \frac{1}{4(1+\nu)} V_i^{(0)}. \end{aligned}$$

Elde edilen $S_{3i}^{(0)}$ integral sabitinin de yerine yazılmasıyla birlikte $\sigma_{3i}^{(0)}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \sigma_{3i}^{(0)} = & \frac{\zeta^2 - 1}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j^2} \right) + \frac{\zeta^2 - 2\nu\zeta - (1 - 2\nu)}{8(1 - \nu^2)} \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi_i} - \\ & - \frac{\zeta - 1}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) - \\ & - \frac{\zeta - 1}{4(1 + \nu)} V_i^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Burada (4.68) sınır koşulunun $\zeta = -1$ ' de sağlanabilmesi için (4.75) denkleminde

$$-\frac{\nu}{4} \frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 V_j^{(0)}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 V_i^{(0)}}{\partial \xi_j^2} + \frac{1 - \nu}{4} V_i^{(0)} \quad (4.76)$$

ilişkisi elde edilir. Aranılan denklemler elde etmek için bir sonraki mertebeye geçilmesi gerekmektedir.

4.3.2. Birinci Mertebeden Terimler

Birinci mertebeden denklemleri elde etmek için (4.62)-(4.67) ile verilen serilerde birinci mertebeden olan terimler alınmalıdır. Bunun için önce (4.67) eşitliğinden alınan birinci mertebeden terimler ile

$$\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \zeta} = \sigma_{33}^{(0)} - \nu \left(\sigma_{ii}^{(0)} + \sigma_{jj}^{(0)} \right)$$

denklemleri yazılır ve burada (4.72) ve (4.73) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \zeta} = & \frac{\nu\zeta}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_i^2} + \frac{\partial^2 V_3^{(0)}}{\partial \xi_j^2} \right) - \frac{(\zeta - 1)(1 - 2\nu)}{4(1 - \nu)} V_3^{(0)} - \\ & - \frac{\nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu denkleminde denkleminde ζ değişkenine göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} v_3^{(1)} = & \frac{\zeta^2 \nu}{2(1 - \nu)} \Delta V_3^{(0)} - \frac{(\zeta^2 - 2\zeta)(1 - 2\nu)}{8(1 - \nu)} V_3^{(0)} \\ & - \frac{\nu\zeta}{1 - \nu} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + V_3^{(1)} \end{aligned} \quad (4.77)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.63) eşitliğinden ikinci mertebeden terimlerin alınmasıyla elde edilen denklem

$$\frac{\partial \sigma_{33}^{(1)}}{\partial \zeta} = - \left(\frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \sigma_{3j}^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} e_3^{(0)} - \frac{1}{4(1+\nu)} v_3^{(1)}$$

olur. Bu denklemde (4.75) ve (4.77) ifadeleri yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{33}^{(1)}}{\partial \zeta} = & - \frac{\zeta^2 - 1}{2(1-\nu^2)} \Delta^2 V_3^{(0)} - \frac{\zeta^2(1+\nu) - 2\nu\zeta - (1-2\nu)}{8(1-\nu^2)} \Delta V_3^{(0)} + \\ & + \frac{\zeta + \nu - 1}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + \frac{1}{2(1+\nu)} e_3^{(0)} + \\ & + \frac{\zeta - 1}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2 \partial \xi_j} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^2 \partial \xi_i} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^3} \right) + \\ & + \frac{(\zeta^2 - 2\zeta)(1-2\nu)}{32(1-\nu^2)} V_3^{(0)} - \frac{1}{4(1+\nu)} V_3^{(1)} \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen son denklemde ζ değişkenine göre integral alınıp (4.69) ile verilen sınır koşulu uygulanırsa $\zeta = 1$ için $\sigma_{33}^{(1)}$ gerilme bileşeni aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)} = & - \frac{\zeta^3 - 3\zeta + 2}{6(1-\nu^2)} \Delta^2 V_3^{(0)} - \frac{\zeta^3(1+\nu) - 3\nu\zeta^2 - 3\zeta(1-2\nu) + 2(1-2\nu)}{24(1-\nu^2)} \Delta V_3^{(0)} + \\ & + \frac{(\zeta^3 - 3\zeta^2 + 2)(1-2\nu)}{96(1-\nu^2)} V_3^{(0)} - \frac{\zeta - 1}{4(1+\nu)} V_3^{(1)} + \frac{\zeta - 1}{2(1+\nu)} e_3^{(0)} + \\ & + \frac{(\zeta - 1)^2}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2 \partial \xi_j} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^2 \partial \xi_i} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^3} \right) + \\ & + \frac{\zeta^2 - 2\zeta(1-\nu) + (1-\nu)}{8(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + P^*. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Ayrıca (4.78) gerilme bileşeni (4.69) ile verilen sınır koşulunda $\zeta = -1$ yüzeyinde de sağlanması gerekmektedir. Dolayısıyla (4.77) ifadesinin de sınır koşulunda yerine

yazılmasıyla $\zeta = -1$ sınırında

$$\begin{aligned}
e_3^{(0)} = & -\frac{2}{3(1-\nu)}\Delta^2 V_3^{(0)} - \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}\Delta V_3^{(0)} + \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}V_3^{(0)} + \\
& + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2 \partial \xi_j} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^2 \partial \xi_i} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^3} \right) + \\
& + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + (1+\nu)P^*
\end{aligned} \tag{4.79}$$

ifadesi elde edilir ve (4.79) ifadesi (4.54) tanımlamasından dolayı ε^2 ile çarpılarak düzenlendiğinde $V_3^{(0)}$ cinsinden aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_3^{(0)}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2}V_3^{(0)} = & \varepsilon^2 \left(-\frac{2}{3(1-\nu)}\Delta^2 V_3^{(0)} - \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}\Delta V_3^{(0)} + \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}V_3^{(0)} + \right. \\
& + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^3} + \frac{\partial^3 V_i^{(0)}}{\partial \xi_i^2 \partial \xi_j} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^2 \partial \xi_i} + \frac{\partial^3 V_j^{(0)}}{\partial \xi_j^3} \right) \\
& \left. + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial V_j^{(0)}}{\partial \xi_j} \right) + (1+\nu)P^* \right).
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Problemdeki yerdeğiştirme bileşenleri olan v_i teğetsel ve v_3 dikey yerdeğiştirme bileşenleridir. 4.3 bölümünde türetilen hareket denklemleriyle ilgili olarak orta-düzlem yerdeğiştirmeleri $u_i = h\varepsilon(V_i^{(0)} + \varepsilon^2 V_i^{(1)})$ ve $w = h(V_3^{(0)} + \varepsilon^2 V_3^{(1)})$ olarak sunulsun. Elde edilen (4.76) ilişkisinde u_i ve w ile (4.48) orjinal değişkenleri kullanılarak

$$-\frac{\nu}{4} \frac{1}{h} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{h\varepsilon} \frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{h\varepsilon} \frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{h\varepsilon} \frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{h\varepsilon} u_1$$

elde edilir. Bu denklem ε^3 ile çarpılırsa

$$-\frac{\nu}{4} \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = h \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1+\nu}{2} h \frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1-\nu}{2} h \frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\varepsilon^2}{h} u_1 \tag{4.81}$$

olur. (4.81) denkleminde ε^2 yerine eşiti olan (4.9) yazılarak denklem h ile bölünürse

$$-\frac{\nu\theta}{4\mu} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1-\nu}{4} \frac{\theta}{\mu h} u_1 \tag{4.82}$$

olarak yazılabilir. Bulunan (4.82) eşitliğinde $\nu/2(\partial^2 u_1/\partial\alpha_1^2)$ eklenip çıkarılırsa

$$-\frac{\nu\theta}{4\mu}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_1^2} - \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_1^2} \\ + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_2^2} + \frac{1-\nu}{4}\frac{\theta}{\mu h}u_1$$

elde edilir ve burada cebirsel işlemler yapıldığında

$$-\frac{\nu\theta}{4\mu}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} = \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha_2^2}\right) + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}\right) + \frac{1-\nu}{4}\frac{\theta}{\mu h}u_1$$

elde edilir ve $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ olmak üzere bu ifade vektör formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-\frac{\nu\theta}{4\mu}\text{grad}w = \frac{1-\nu}{2}\Delta\mathbf{u} + \frac{1+\nu}{2}\text{graddiv}\mathbf{u} + \frac{1-\nu}{4}\frac{\theta}{\mu h}\mathbf{u}. \quad (4.83)$$

Ayrıca (4.80) denklemi de (4.48) ile verilen orijinal değişkenlerine göre yazıldığında

$$\frac{\rho}{\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{2h}w = -\frac{2}{3(1-\nu)}\frac{\mu h^2}{\theta}\Delta^2 w - \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}h\Delta w + \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}\frac{\theta}{\mu}w \\ + \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{\partial^3 u_i^{(0)}}{\partial\alpha_i^3} + \frac{\partial^3 u_i^{(0)}}{\partial\alpha_i^2\partial\alpha_j} + \frac{\partial^3 u_j^{(0)}}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j^2} + \frac{\partial^3 u_j^{(0)}}{\partial\alpha_j^3}\right) \\ + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial\alpha_j}\right) + \frac{(1+\nu)\mu}{E\theta h}P$$

olarak ifade edilir ve son elde edilen bu denklem $2\theta h$ ile çarpılır ve $\mu = E/2(1+\nu)$ değerlerine yazılırsa gerekli düzenleme yapıldığında

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 w + \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)}\theta h^2\Delta w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \theta\left(1 - \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)}\frac{\theta h}{\mu}\right)w \\ - \frac{2Eh^2}{1-\nu^2}\Delta\text{div}\mathbf{u} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\theta h\text{div}\mathbf{u} = P \quad (4.84)$$

şeklinde yeniden yazılır.

Tek boyutlu durumda, yani $u_2 = 0, \partial/\partial\alpha_2 = 0$ için (4.83) eşitliği

$$\frac{\nu\theta}{4\mu}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} = -\left(\frac{1-\nu}{4}\frac{\theta}{\mu h} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}\right)u_1 \quad (4.85)$$

formunda ifade edilir ve (4.84) denklemi de tek boyutta

$$\begin{aligned} \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} \theta h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \theta \left(1 - \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} \frac{\theta h}{\mu} \right) w \\ - \frac{2Eh^2}{1-\nu^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \alpha_1^3} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \theta h \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} = P \end{aligned} \quad (4.86)$$

yazılır. Şimdi (4.86) denklemine $(h^2/\varepsilon^2)\partial^2/\partial\alpha_1^2+(1-\nu)/4$ operatörü uygulandığında

$$\begin{aligned} \left(2\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \theta \right) \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{4} \right) w = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^6 w}{\partial \alpha_1^6} + \frac{1-\nu}{4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} \right) - \\ \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} \theta h^2 \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + \frac{1-\nu}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \right) + \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} \frac{\theta^2 h}{\mu} \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{4} w \right) + \\ \frac{2Eh^2}{1-\nu^2} \frac{\partial^3}{\partial \alpha_1^3} \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{4} \right) u_1 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \theta h \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{4} \right) u_1 + \\ \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{4} \right) P \end{aligned} \quad (4.87)$$

elde edilir. (4.87) denkleminde $(h^2/\varepsilon^2)\partial^2/\partial\alpha_1^2+(1-\nu)/4$ operatörü h^2/ε^2 parantezine alınır, u_1 içeren terimler (4.85) eşitliğinden w cinsinden yazılırsa ve elde edilen (4.87) denklemi

$$\begin{aligned} \left(2\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \theta \right) \left(\frac{h^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{4} \right) w = -\frac{2Eh^5}{3(1-\nu^2)} \frac{\mu}{\theta h} \frac{\partial^6 w}{\partial \alpha_1^6} \\ - \left(\frac{2Eh^3}{12(1+\nu)} + \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} h^3 \mu + \frac{2Eh^2 \nu h}{1-\nu^2} \frac{1}{4} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} \\ - \left(\frac{(1-2\nu)\theta h^2}{12} - \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)} \theta h^2 + \frac{(1-2\nu)\theta h^2 \nu}{1-\nu} \frac{1}{4} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \\ + \frac{1-2\nu}{12} \frac{\theta^2 h}{\mu} w + \frac{1-\nu}{4} \left(1 + \frac{4h\mu}{(1-\nu)\theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) P \end{aligned}$$

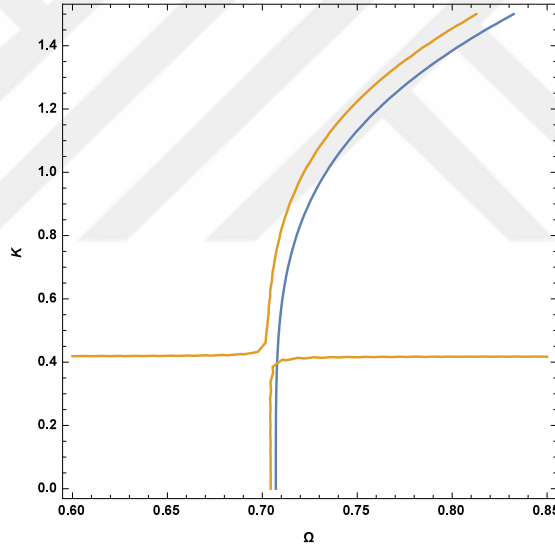
olarak yazılır. Burada ε^2 yerine $\theta h/\mu$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{Eh}{(1+\nu)\theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha_1^4} + \left(\frac{2Eh}{1+\nu} - \frac{(1-2\nu)(3-2\nu)}{3(1-\nu)} \theta h^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \\ (1+\nu)\theta \left(1 - \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)\theta h}{3(1-\nu)E} \right) w + 2\rho h(1-\nu) \left(1 + \frac{2Eh}{(1-\nu^2)\theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ = (1-\nu) \left(1 + \frac{2Eh}{(1-\nu^2)\theta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) P. \end{aligned} \quad (4.88)$$

denklemini elde edilir. Homojen (4.88) denkleminde ($P = 0$) dalga sayısına (k) ve dalga frekansına (w) bağlı dispersiyon denklemini elde edilebilmesi için w yerdeğiştirmesi $w = e^{i(k\alpha_1 - \omega t)}$ formunda (4.88) denkleminde yerine yazılırsa bu denklemin dispersiyon denklemini

$$\begin{aligned} & (-2\rho h\omega^2 + \theta) \left(-\frac{h^2 k^2}{\varepsilon^2} + \frac{1 - \nu}{4} \right) = \\ & \frac{2Eh^4\mu}{3(1 - \nu^2)\theta} k^6 - \frac{2h^3\mu}{3(1 - \nu)} k^4 - \frac{(1 - 2\nu)(3 - 2\nu)}{12(1 - \nu)} h^2 \theta k^2 + \frac{(1 - 2\nu)h\theta^2}{12\mu} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve burada (4.45) ifadeleri ve (4.9) ile tanımlanan parametre de yerlerine yazıldığında ve tüm denklem 2θ ile bölüdüğünde dispersiyon denklemini aşağıdaki şekilde elde edilir:



şekil 4.2. Geleneksel teorideki (4.44) numaralı dispersiyon ilişkisi (mavi) ve kesme frekansını civarında elde edilen (4.89) numaralı dispersiyon ilişkisinin (turuncu) karşılaştırılması ($\varepsilon = 0.2$ ve $\nu = 0.3$)

$$\begin{aligned} & \left(\Omega^2 - \frac{1}{2} \right) \left(K^2 - \frac{1 - \nu}{4} \right) \\ & = \frac{2}{3(1 - \nu)} \varepsilon^2 \left(K^6 - \frac{1}{2} K^4 - \frac{(1 - 2\nu)(3 - 2\nu)}{16} K^2 + \frac{(1 - 2\nu)(1 - \nu)}{16} \right). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Elde edilen (4.89) denklemini kesme frekansını civarında Bölüm 4.2' de bahsedilen kesme frekansını civarındaki davranışını ifade eden (4.46) numaralı formülasyonun formatında

yazılacak olursa, gerekli düzenleme yapıldığında

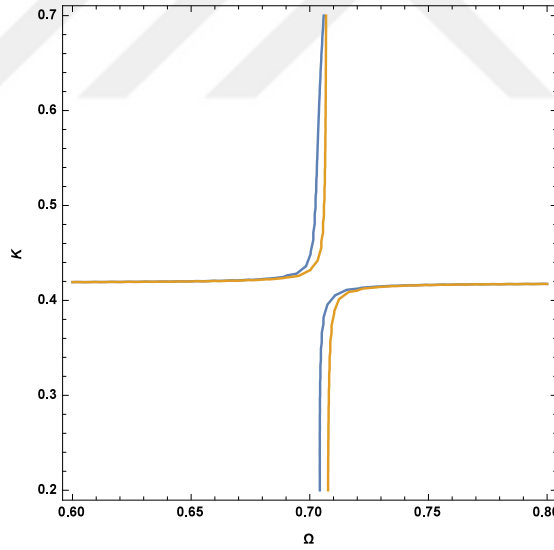
$$P(K) = \frac{1}{24(1-\nu)} \frac{16K^6 - 8K^4 - (1-2\nu)(3-2\nu)K^2 + (1-2\nu)(1-\nu)}{K^2 - (1-\nu)/4} \quad (4.90)$$

bulunur. (4.90) numaralı eşitlikte $K = \sqrt{1-\nu}/2$ noktası paydayı sıfır yapmaktadır. (4.89) dispersiyon denklemi (4.46) ile verilen formülasyon ile ifade edilirse

$$\Omega^2 - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{24(1-\nu)} \frac{16K^6 - 8K^4 - (1-2\nu)(3-2\nu)K^2 + (1-2\nu)(1-\nu)}{K^2 - (1-\nu)/4} \right) \varepsilon^2 \quad (4.91)$$

olur. Burada $K = \sqrt{(1-\nu)/2}\Omega$ hiperbolü için $\Omega = 1/\sqrt{2}$ ve $K = \sqrt{1-\nu}/2$ noktaları asimptottur. Bu da 3.4 bölümünde bahsedildiği gibi eğilme(bending) dalgaları ve genişleyen(extensional) dalgaların dispersiyon eğrilerinde sapma(veering) olduğu anlamına gelmektedir(bakınız Alt Bölüm 3.4)[24].

Bulunan bu sapma(veering) noktalarının civarında (4.89) numaralı dispersiyon



Şekil 4.3. Kesme frekansı civarında elde edilen (4.89) numaralı dispersiyon ilişkisi(mavi) ile aynı ilişki için $K = \sqrt{(1-\nu)}/2$ 'deki (4.92) ile verilen yaklaşımın(turuncu) karşılaştırılması($\varepsilon = 0.2$ ve $\nu = 0.3$)

denklemi $K = \sqrt{(1-\nu)}/2\Omega$ ve $\Omega = 1/\sqrt{2}$ ifadelerinin yerlerine yazılmasıyla

$$\left(\Omega^2 - \frac{1}{2} \right) \left(K^2 - \frac{1-\nu}{4} \right) = -\frac{1}{32} \varepsilon^2 \nu^2 \quad (4.92)$$

şekinde indirgenebilir. (4.89) denkleminde $K \gg 1$ olduğu durumda $\mathcal{O}(K^6)$, $\mathcal{O}(\Omega^2 K^2)$ ve $\mathcal{O}(K^2)$ mertebesinde terimlerin haricindeki terimler ihmal edilir ve bu terimlerle elde edilen denklem

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3(1-\nu)} \varepsilon^2 K^4 \quad (4.93)$$

bulunur ki bu denklem Winkler tabanıyla etkileşen kiriş için bilinen (4.44) numaralı geleneksel dispersiyon denklemiyle örtüşür. Öte yandan $K \ll 1$ olduğu durumda (4.89) denkleminde $\mathcal{O}(\Omega^2)$, $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ve $\mathcal{O}(1)$ terimlerin haricindeki terimler ihmal edilebilir ve bu başlı terimlerden oluşan denklem

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)} \varepsilon^2 \quad (4.94)$$

olarak bulunur. Bu denklem de $\Omega^2 = 1/2$ kesme frekansı değerine (4.44) geleneksel teorisiyle tahmin edilen $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ mertebesindeki hata payını verir.

Bu bölümde Winkler tabanı ile tek taraftan etkileşen elastik katmandaki eğilme için asimptotik bir formülasyon türetilmiştir. Sağlama ve karşılaştırmaların yapılabilmesi için Winkler tabanı ile tek taraflı etkileşen klasik Kirchhoff plaka modeli kullanılmıştır. Kesme frekansı civarında (4.83) ve (4.84) ile verilen bir alternatif yaklaşım türetilmiştir. Bu alternatif yaklaşım Alt Bölüm 3.4'te detaylı olarak görülen ve küçümsenemeyecek bir etkisi olan eğilme dalgalarının ve genişleyen dalgaların etkileşimini sapma ile birlikte içermektedir. Kesme frekansı civarında elde edilen (4.46) ve (4.90) dispersiyon denklemleri Kaplunov ve ark.[17], Rogerson ve ark.[30] ve Lashhab ve ark.[23] tarafından yapılan çalışmalarda bahsedilen klasik serbest plakalar için bilinen polinom tipi dispersiyon ilişkilerinin aksine, kesir formunda bulunmuştur. Bu durumda paydada yer alan $K = \sqrt{1-\nu}/2$ ifadesi düzgün olmayan davranışa sebep olmaktadır.

5. SONUÇ

Bu tezde iki taraflı ve tek taraflı Winkler tabanı ile etkileşimde olan elastik bir katmandaki dalgaların kesme frekansı civarındaki etkisi ortaya çıkarılmıştır. Bu sonuca zemin-yapı etkileşiminin modellendiği ve iyi bilinen klasik bir formülasyon olan Kirchhoff formülasyonu geliştirilerek varılmıştır.

Tek taraflı problemin anlaşılmasında yardımcı olabileceği düşünülerek analiz edilen iki taraflı durumda yapı simetrik olduğundan dolayı problem simetrik ve antisimetrik modlar için olarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Antisimetrik modlar için kesme frekansı civarında elde edilen (3.94) yaklaşımının karşılık geldiği (3.106) hareket denklemi (3.16) ile verilen Klasik Kirchhoff formülasyonu ile karşılaştırıldığında (3.106) denkleminin ekstra terimler içerdiği görülmüştür. Bu ekstra terimler kesme frekansı civarındaki dalgaların etkisine karşılık gelen terimlerdir.

Tek taraflı durumda kesme frekansı civarında yaklaşık elde edilen dalga sayısı ve frekansa bağlı dispersiyon ilişkisinin oldukça karmaşık olduğu görülmüştür. Dolayısıyla etkileşimden kaynaklı dalgaların daha iyi anlaşılabilmesi için bu yaklaşık denklem genişleyen(extensional) dalgalar ve eğilme(bending) dalgalarına karşılık gelen iki kısma ayrıştırılmıştır. Ayrıca Şekil 3.8 ile verilen grafikte yapıdaki zemin-katman etkileşiminden kaynaklı bir sapma olabileceği düşünülerek δ_Ω ve δ_K ölçeklendirmesi yardımıyla Mace ve Markoni çalışması[24] ışığında bu sapma da ortaya çıkarılmıştır(Şekil 3.10). Tek taraflı durumun hareket denklemleri asimptotik türetilmiştir. Üç boyutlu elastisite denklemleriyle ele alınarak üç boyuta genişletilen problem için karşılaştırma yapılabilmesi öncelikle klasik plaka modeli ele alınarak Kirchhoff formülasyonu asimptotik olarak türetilmiştir. Daha sonra kesme frekansı civarındaki formülasyonlar türetilerek karşılaştırma yapıldığında (4.42) ile verilen klasik modelden farklı olarak kesme frekansı civarında türetilen (4.88) formülasyonunda ekstra terimler ortaya çıkmıştır. Bu terimler kesme frekansı civarındaki dalgalardan kaynaklı etkiyi göstermektedir. Ayrıca üç boyutlu durumda da zemin etkisinden kaynaklı sapmanın gerçekleştiği görülmüştür.

KAYNAKÇA

- [1] Achenbach, J. (2012). *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Elsevier, New York, Vol. 16.
- [2] Auersch, L. (2008). *Dynamic interaction of various beams with the underlying soil–finite and infinite, half-space and Winkler models*. European Journal of Mechanics-A/Solids, 27(5), 933-958.
- [3] Callister, W. D. ve Rethwisch, D. G. (2018). *Materials science and engineering: an introduction* (Vol. 9). New York: Wiley.
- [4] Chen, J. S. ve Chen, Y. K. (2011). *Steady state and stability of a beam on a damped tensionless foundation under a moving load*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(1), 180-185.
- [5] Chien, R. D. ve Chen, C. S. (2006). *Nonlinear vibration of laminated plates on an elastic foundation*. Thin-walled structures, 44(8), 852-860.
- [6] Dillard, D. A., Mukherjee, B., Karnal, P., Batra, R. C. ve Frechette, J. (2018). *A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications*. Soft matter, 14(19), 3669-3683.
- [7] Dumir, P. C. (1988). *Nonlinear dynamic response of isotropic thin rectangular plates on elastic foundations*. Acta mechanica, 71(1), 233-244.
- [8] Erbaş, B., Kaplunov, J. ve Elishakoff, I. (2021). *Asymptotic derivation of a refined equation for an elastic beam resting on a Winkler foundation*. Mathematics and Mechanics of Solids, 10812865211023885.
- [9] Froio, D., Rizzi, E., Simões, F. M. ve Da Costa, A. P. (2018). *Universal analytical solution of the steady-state response of an infinite beam on a Pasternak elastic foundation under moving load*. International Journal of Solids and Structures, 132, 245-263.
- [10] Fryba, L. (2013). *Vibration of solids and structures under moving loads*. Springer Science and Business media, New York.

- [11] Gdl, C. (2005). *Değişken kalınlıklı elastik zemine oturan kirişler*. Yüksek Lisans Tezi. İstanbul: İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [12] Graff, K. (1975). *Wave motion in elastic solids*. New York, Oxford University Press.
- [13] Ghannadiasl, A. ve Mofid, M. (2015). *An analytical solution for free vibration of elastically restrained Timoshenko beam on an arbitrary variable Winkler foundation and under axial load*. Latin American Journal of Solids and Structures, 12(13), 2417-2438.
- [14] Kaplunov, J., Prikazchiko, D.,A., Rogerson G., A., M., Lashab (2014) . The edge wave on an elastically supported Kirchhoff plate. *The Journal of Acoustical Society of America*, 136, 1487.
- [15] Kaplunov, J., Prikazchiko, D.,A., Rogerson G., A. (2016b). Edge bending wave on a thin elastic plate resting on a Winkler foundation. *Proceedings of the Royal Society A*, 472(2190), 20160178.
- [16] Kaplunov, J., Manevitch, L., Smirnov, V. (2016a). Vibrations of an elastic cylindrical shell near the lowest cut-off frequency. *Proceedings of the Royal Society*, 472(2189), 20150753.
- [17] Kaplunov, J. D., Kossovitch, L.,Y., Nolde, E. (1998). Dynamics of then Walled Elastic Bodies, Academic, New York.
- [18] Kaplunov J., Nobili, A. (2017a). The edge waves on a Kirchhoff plate bilaterally supported by a two-parameter elastic foundation. *Journal of Vibration and Control*, 23(12), 2014-2022.
- [19] Kerr, D. A. (1964). A study of a new foundation model. *Acta Mechanica*, 1(2), 135-147.
- [20] Kurrer, K. E. (2018). The history of the theory of structures: searching for equilibrium. John Wiley and Sons.
- [21] Lamb, H. (1917). On waves in an elastic plate. *Proc. R. Soc. London Ser. A*,93(648), 114-128.

- [22] Lamb, H. (1889). Proceedings of the London Mathematical Society. the Flexure of an Elastic Plate, 85-90.
- [23] Lashhab, M. I., Rogerson, G. A. ve Prikazchikova, L. A. (2015). *Small amplitude waves in a pre-stressed compressible elastic layer with one fixed and one free face*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 66(5), 2741-2757.
- [24] Mace, B., ve Marconi, E. (2012). Wave motion and dispersion phenomena: Veering, locking and strong coupling effects. *The Journal of Acoustical Society of America* , 131(2), 1015-1028.
- [25] Metrikine, A. V. (2004). *Steady state response of an infinite string on a non-linear visco-elastic foundation to moving point loads*. Journal of Sound and Vibration, 272(3-5), 1033-1046.
- [26] Murray, J. D. (2012). Asymptotic analysis (Vol. 48). Springer Science and Business Media.
- [27] Pasternak, P. L. (1954). On a new method of an elastic foundation by means of two foundation constants. Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstve i Arkhitekture.
- [28] Prikazchikov, D. A. (2010, June). The asymptotic model for surface wave. In Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2010 (pp. 137-141). IEEE.
- [29] Rayleigh, L. (1888). *On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter*. Proceedings of the London Mathematical Society, 1(1), 225-237.
- [30] Rogerson, G. A., Sandiford, K. J. ve Prikazchikova, L. A. (2007). *Abnormal long wave dispersion phenomena in a slightly compressible elastic plate with non-classical boundary conditions*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 42(2), 298-309.
- [31] Tanahashi, H. (2004). *Formulas for an infinitely long Bernoulli-Euler beam on the Pasternak model*. Soils and foundations, 44(5), 109-118.

- [32] Timoshenko, S. ve Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company. Inc. New York.
- [33] Winkler, E. (1867). *Die Lehre von Elastizitat und Festigkeit*. Dominicus, Prague.
- [34] Wang, Y. H., Tham, L. G. ve Cheung, Y. K. (2005). *Beams and plates on elastic foundations: a review*. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 7(4), 174-182.
- [35] Younesian, D., Hosseinkhani, A., Askari, H., Esmailzadeh, E. (2019). Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dynamics*, 1-43.
- [36] Zhang, Y. ve Liu, X. (2019). *Response of an infinite beam resting on the tensionless Winkler foundation subjected to an axial and a transverse concentrated loads*. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 77, 103819.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID NO : 0000-0001-8980-1119
Adı-Soyadı : Gökçe KILIÇ
Yabancı Dil : İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı :
E-Posta :

Eğitim Geçmişi:

- 2009-2014, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
- 2015-2017, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik, Yüksek Lisans.
- 2017-2020, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Metalürji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü
- 2017- , Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora

Yayımları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Erbaş, B., Kaplunov, J., Nobili, A. ve Kılıç, G. (2018). Dispersion of elastic waves in a layer interacting with a Winkler foundation. The Journal of the Acoustical Society of America, 144(5), 2918-2925.
- Öztürk Körpe, N., Karas, M. H., Kılıç, G.(2021) The effect of initial compacting pressure on the production of Ti3Al with low porosity. Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering, doi:10.35414/akufemubid.826949.
- Erbaş, B., Kaplunov ve Kılıç, G. (2022) Asymptotic analysis of 3D dynamic equations in linear elasticity for a thin layer resting on a Winkler foundation. IMA Journal of Applied Mathematics. *Gönderildi.*

- Erbaş, B., Kaplunov, J., Nobili, A. ve Kılıç, G. Dispersion analysis of an orthorhombic elastic layer resting on an elastic foundation, CSC 2018 International Computational Science Congress, Amasya, Turkey, October 2018.
- Kılıç, G. ve Öztürk Körpe, N. Production of Aluminium Composite Foam Using Boron Product and Waste, International Engineering and Architecture Congress, Istanbul, Turkey, 16-17 January 2021.

