T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU İSTATİSTİKSEL MANİFOLDUN İSTATİSTİKSEL ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞE GÜNER

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müge KARADAĞ

TEMMUZ 2022

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU İSTATİSTİKSEL MANİFOLDUN İSTATİSTİKSEL ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞE GÜNER
(36183614020)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müge KARADAĞ

TEMMUZ 2022

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmam süreci boyunca danışmanlığımı üstlenen, tezin hazırlanmasında yardım ve yönlendirmelerde bulunan bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Müge KARADAĞ'a sonsuz teşekkür ederim. Eğitim öğretim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, sabır ve anlayışlarıyla bana yol gösteren, her daim bana destek olan AİLEME sonsuz teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Kenmotsu İstatistiksel Manifoldun İstatistiksel Altmanifoldları Üzerine Bir Çalışma" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

AYŞE GÜNER

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\mathbf{T}$	:	Torsiyon tensörü
$\mathbf{R}$	:	Eğrilik tensörü
$\mathscr{K}$	:	Kesit eğriliği
$\mathbf{S}_1$	:	Ricci tensörü
$\mathbf{r}$	:	Skaler eğrilik fonksiyonu
$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{c})$	:	Riemann uzay formu
$\widetilde{\mathbf{M}}$	:	Riemann manifold
$\mathbf{H}$	:	Otalama eğrilik vektörü
$\widetilde{S}$	:	İstatistiksel eğrilik tensör alanı
$\widetilde{K}$	:	Fark tensör alanı
(ϕ, ξ, η)	:	Hemen hemen kontakt yapı
$\left(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta\right)$	:	Hemen hemen kontakt manifold
$\widetilde{g}$, $\mathbf{g}$	:	Riemann metriği
$(\phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$	:	Hemen hemen kontakat metrik yapı
$\mathbf{\Phi}$	:	Temel 2-form
$\mathbf{J}$	:	Hemen hemen kompleks yapı
$(\overline{N}, J, \overline{g})$	:	Hemen hemen Hermitian manifold
$\mathbf{N}_F$	:	Nijenhuis torsiyon
$\mathbf{T}_{\mathbf{M}^n}(p)$	:	Tanjant uzay
$\mathbf{A}$	:	Şekil operatörü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KENMOTSU İSTATİSTİKSEL MANİFOLDUN
İSTATİSTİKSEL ALTMANİFOLDLARI
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

AYŞE GÜNER

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

50+vi sayfa

2022

Danışman: Prof. Dr. Müge KARADAĞ

Beş bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin;

Birinci bölümü giriş kısmı olarak hazırlanmıştır. Konunun gelişimi ve tarihçesi hakkında kısaca bilgiler sunulmuştur.

İkinci bölümünde, tezin daha iyi kavranabilmesi açısından gerekli olan tüm temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Bu bölümde ayrıca Riemann manifoldlar ve altmanifoldlardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümünde, istatistiksel manifold kavramı etraflıca ele alınarak çalışılmıştır. İstatistiksel manifoldların altmanifoldları, hiperyüzeyleri ve istatistiksel altmanifoldlarda Chen-Ricci eşitsizliği incelenmiştir.

Dördüncü bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısmı hemen hemen kontakt manifoldlar, Kenmotsu manifoldlar ve hemen hemen kontakt metrik istatistiksel manifoldların tanıtılıp incelenmesine ayrılmıştır. İkinci kısmında ise tezin amacı olan Kenmotsu istatistiksel manifoldun istatistiksel altmanifoldları üzerine çalışılmış olup burada ayrıca Kenmotsu istatistiksel manifoldların istatistiksel altmanifoldlarında Chen- Ricci eşitisizliği incelenmiştir.

Beşinci ve son bölümü sonuç kısmından oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel manifold, Kenmotsu manifold, Chen- Ricci eşitsizliği, Hemen hemen kontakt manifoldlar, Hiperyüzeyler, Kenmotsu istatistiksel manifoldlar

ABSTRACT

Master Thesis

A STUDY ON STATİSTİCAL
SUBMANİFOLDS OF A STATİSTİCAL
KENMOTSU MANİFOLDS

AYŞE GÜNER

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

50+vi pages

2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Müge KARADAĞ

This study, prepared as a master's thesis, consists of five parts.

The first part is prepared as an introductory part. Briefly information about the development and history of the subject is presented.

In the second part, all the basic definitions and concepts necessary for a better understanding of the thesis are given. Riemannian manifolds and alltmanifolds are also mentioned in this section.

In the third chapter, the concept of statistical manifolds is thoroughly discussed and studied. The Chen-Ricci inequality for submanifolds, hypersurfaces, and statistical submanifolds of statistical manifolds has been studied.

The fourth part consists of two parts. The first part is devoted to the introduction and study of almost contact manifolds, Kenmotsu manifolds, and almost all contact metric statistical manifolds. In the second part, the statistical submanifolds of the Kenmotsu statistical manifold, which is the purpose of the thesis, are studied, and the Chen-Ricci inequality in the statistical submanifolds of the Kenmotsu statistical manifold is also examined here.

The fifth and final part consists of the concluding part.

Keywords: Statistical manifold, Kenmotsu manifold, Chen- Ricci inequality, Almost contact manifolds, hypersurfaces, Kenmotsu statistical manifolds

1. GİRİŞ

Fisher veya bilgi geometrisi olarak ifade edilen istatistiksel manifoldların teorisine ilk dikkat çeken Rao (1945) dur [1]. Bilgi geometrisinde temel problemlerden biri istatistiksel manifoldun özelliklerini incelemektir. Fisher bilgisi, olasılık ve istatistikte önemli bir niceliktir. Gözlemlenebilir bir rastgele değişkenin, temel dağılımın bilinmeyen parametreleri hakkında taşıdığı bilgi miktarını ölçer [2].

Günümüzde bilgi geometrisi, bilgi teorisi, stokastik süreçler dinamik sistemler ve zaman serileri, istatistiksel fizik, kuantum sistemleri ve sinir ağlarının matematiksel teorisi gibi önemli bir uygulama alanına sahiptir [3].

1985 yılında Amari tarafından tanıtılan istatistiksel manifoldlar bilgi geometrisi açısından incelenmiştir [4]. Bu tür manifoldların geometrisi, Afin geometrisinde eşlenik bağlantılar olarak adlandırılan dual konneksiyon kavramını içerdiğinden Afin diferansiyel geometrisi ile yakından ilişkilidir. Ayrıca, bir Hessian'ın genellemesi olan istatistiksel bir yapı Hessian geometrisini birbirine bağlar [5].

$\left(\widetilde{M},\widetilde{g}\right)$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. (M,∇,g), bir istatistiksel manifold ise o zaman (M,∇,g), $\left(\widetilde{M},\widetilde{g}\right)$ nın bir istatistiksel altmanifoldudur. Burada ∇, M üzerindeki bir Afin konneksiyondur ve g, $\widetilde{M}$ üzerindeki $\widetilde{g}$ Rieman metriğinden indirgenen M üzerindeki metrik tensördür. $\widetilde{M}$ üzerinde bir Afin konneksiyon $\widetilde{\nabla}$ olsun. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ bir istatistiksel manifold ve $\widetilde{M}$ nın bir altmanifoldu M ise (M,∇,g) aynı zamanda ∇ konneksiyonu ve g metriği ile indirgenen bir istatistiksel manifolddur [5]. Aslında bir istatistiksel manifold Codazzi denklemini sağlayan torsiyonsuz bir Afin konneksiyon ile donatılmış bir Riemann manifolddur [6].

Altmanifoldların geometrisinde Gauss formülü, Weingarten formülü ile Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri temel denklemler olarak bilinir. İstatistiksel altmanifoldlar üzerine karşılık gelen temel denklemler P.W.Vos tarafından elde edilmiştir [5, 7]. İstatistiksel manifoldun eğriliğinin bir tür standart hiperyüzeyin kabul edilmesi için bir koşul Fruhata tarafından verildi [5, 8].

Öte yandan B.Y. Chen, Chen eşitsizlikleri olarak bilinen Reel uzay formlarında altmanifoldlar için temel eşitsizlikler kurmuştur. Özellikle Chen- Ricci eşitsizliği olarak bilinen

Reel bir uzay formunun herhangi bir n- boyutlu Riemann altmanifoldu için Ricci eğriliği ile ortalama eğriliği arasında bir bağıntı kanıtlamıştır [5, 9].

B. Y. Chen tarafından kesit eğriliği sabit ve c ie gösterilen bir Riemann manifoldunun herhangi bir n- boyutlu altmanifoldu için

$$Ric(X) \leq \frac{n-1}{4}c + \frac{n^2}{4}\|H\|^2$$

eşitsizliği kanıtlanmaktadır [10].

K. Kenmotsu [11], Tanno'nun otomorfizm grubu maksimum boyutta olan birbirine bağlı hemen hemen kontakt metrik manifoldların sınıflandırılmasında üçüncü bir sınıfı olan $L \times_s \overline{N}$, katlı çarpım uzayları üzerinde çalıştı. $L \times_s \overline{N}$ nin özelliklerini analiz etti ve tensör denklemleri ile tanımladı. Günümüzde böyle bir manifold Kenmotsu manifoldu olarak bilinmektedir. Son zamanlarda Fruhata ve arkadaşları [6], bir Kenmotsu Manifoldunun istatistiksel karşılığını inceledi ve Kenmotsu istatistiksel manifoldu kavramını ortaya koydu [12]. Bir Kenmotsu manifolduna doğal bir afin konneksiyon koyarak bir Kenmotsu istatistiksel manifoldu tanımlanır ve Kenmotsu istatistiksel manifoldu bir holomorfik istatistiksel manifoldun katlı çarpımı ve bir doğru olarak nasıl inşa edileceğini inceler. Ayrıca bir Kenmotsu istatistiksel manifoldun $\phi-$kesit eğriliği c ise $c = -1$ olduğu gösterilir [6].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.0.1. *M^n n- boyutlu bir diferensiyellenebilir (dif.bilir) manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı $T_{M^n}(p)$ ile gösterilsin. Bu vektör uzayına, M nin p noktasındaki* ***tanjant uzayı*** *denir [13].*

Tanım 2.0.2. *Bir M^n dif.bilir manifoldunun $p \in M^n$ noktasında $T_{M^n}(p)$ de tanjant vektörü karşılık getiren aşağıdaki dönüşüme M^n üzerinde* ***vektör alanı*** *denir.*

$$\eta : M^n \to \bigcup_{p\in M^n} T_{M^n}(p)$$

[13].

Burada vektör alanının dif.bilir olması, $\forall f \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \eta f : M^n &\to \mathbb{R} \\ p &\to \eta f(p) = \eta_p(f). \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun her mertebeden dif.bilir olmasıdır [14].

Tanım 2.0.3. *M^n bir dif.bilir manifold ve $p \in M^n$ olsun. $T_{M^n}(p)$ tanjant uzayının duali olan uzay $T^*_{M^n}(p)$ ile gösterilsin. Böylece*

$$T^*_{M^n}(p) = \{w \mid w : T_{M^n}(p) \to \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanır. M^n nin her p noktasına dual vektör karşılık getiren dönüşüme ***1-form*** *denir [14].*

Tanım 2.0.4. *C^∞ olan M^n manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M^n)$ olsun.*

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilinear formu, $\forall \eta, \zeta \in \chi(M^n)$ için

(a) $g(\eta, \zeta) = g(\zeta, \eta)$

(b) $g(\eta, \eta) \geq 0$ ve $\forall \eta$ için $g(\eta, \eta) = 0 \Longleftrightarrow \eta = 0$

şartları sağlanıyor ise g bilinear formuna **Riemann metriği** (M^n, g) ikilisine de **Riemann manifoldu** denir [14].

Örnek 2.0.1. *$\mathbb{R}^n$ öklid uzayı üzerinde*

$$\langle \eta, \zeta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

iç çarpımını gözönüne alalım. $\langle , \rangle$ iç çarpımı simetrik, bilinear ve pozitif tanımlıdır. Onun için $\langle , \rangle$ bir Riemann metrik ve $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ de bir Riemann manifolddur [14].

Tanım 2.0.5. *M^n bir C^∞ manifold, M^n üzerinde tanımlı bir W açık kümesi ve $\eta, \zeta \in W$ olmak üzere $f \in C^\infty(W, \mathbb{R})$ fonksiyonu için*

$$[,] : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to \chi(M^n)$$
$$[\eta, \zeta](f) = \eta(\zeta f) - \zeta(\eta f)$$

gibi tanımlanan dönüşüme **Lie (parantez) operatörü** denir. $\eta(f)$, f nin η vektör alanına göre türevidir [14].

Tanım 2.0.6. *M^n bir C^∞ manifold ve M^n manifoldu üzerinde W açık kümesi ile $\eta, \ \zeta \in W$ verilsin. $f, \ g \in C^\infty(W, \mathbb{R})$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için Lie parantez operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar [14].*

1. $[\eta, \zeta](f+g) = [\eta, \zeta](f) + [\eta, \zeta](g)$
2. $[\eta, \zeta](\lambda f) = \lambda [\eta, \zeta](f)$
3. $[\eta, \zeta](fg) = [\eta, \zeta](f) g + [\eta, \zeta](g) f$
4. $[\eta, [\zeta, \rho]] + [\zeta, [\rho, \eta]] + [\rho, [\eta, \zeta]] = 0$

Lemma 2.0.1. *M^n bir C^∞ manifold olsun. Bu durumda $\eta, \ \zeta \in \chi(M^n)$ ile $f, \ g \in C^\infty(M^n)$ için*

$$[f\eta, g\zeta] = (fg)[\eta, \zeta] + (f\eta(g))\zeta - (g\zeta(f))\eta$$

dir [14].

Aşağıdaki lemma Lie operatörünün yerel koordinatlardaki ifadesi verilmektedir [14].

Lemma 2.0.2. *η, ζ M^n manifoldunun W açık kümesi üzerindeki vektör alanları olsun. Bu durumda W üzerinde yerel koordinat sistemi $(x_1, x_2, ..., x_n)$,*

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \zeta = \sum_{j=1}^{n} u^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olmak üzere

$$[\eta,\zeta]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(u^j\frac{\partial u^i}{\partial x_j}-u^j\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

dir [14].

Tanım 2.0.7. *M^n bir manifold ve $\Gamma(TM^n)$, M^n üzerindeki vektör alanlarının kümesi olsun. $\eta,\zeta,\rho\in\Gamma(TM^n)$ vektör alanları ve $f\in C^{\infty}(M^n,\mathbb{R})$ fonksiyonu için*

1. $\nabla_{\eta+\zeta}\rho=\nabla_{\eta}\rho+\nabla_{\zeta}\rho$
2. $\nabla_{\eta}(\zeta+\rho)=\nabla_{\eta}\zeta+\nabla_{\eta}\rho$
3. $\nabla_{f\eta}\zeta=f\nabla_{\eta}\zeta$
4. $\nabla_{\eta}(f\zeta)=\eta[f]\zeta+f\nabla_{\eta}\zeta$

şartlarını sağlayan $\nabla:\Gamma(TM^n)\to\Gamma(TM^n)$ dönüsümüne **afin** veya **linear koneksiyon** denir. $\nabla_{\eta}\zeta$, ζ nın η boyunca kovaryant türevidir. Afin koneksiyon tanımından görülmektedir ki, bir afin koneksiyon M^n deki vektör alanını tekrar vektör alanına taşıyan dönüşümdür [14].

Tanım 2.0.8. *(M^n,g) bir Riemann manifold ve ∇ da M^n üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun.*

(i) $\nabla_{\eta}\zeta-\nabla_{\zeta}\eta=[\eta,\zeta];\quad\forall\eta,\zeta\in\Gamma(TM^n)$

(ii) $\eta g(\zeta,\rho)=g(\nabla_{\eta}\zeta,\rho)+g(\zeta,\nabla_{\eta}\rho);\qquad\forall\eta,\zeta,\rho\in\Gamma(TM^n)$

şıklarını sağlayan ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu **Riemann koneksiyonu** veya **L-C.kon. (yani Levi-Civita koneksiyonu)** denir. [15]

Tanım 2.0.9. *(M^n,g) bir Riemann manifold ve ∇ da M^n de tanımlı L-C.kon. ise $\forall\eta,\zeta,\rho\in\chi(M^n)$ için*

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{\eta}\zeta,\rho)&=\eta g(\zeta,\rho)+\zeta g(\rho,\eta)-\rho g(\eta,\zeta)\\&\quad-g(\eta,[\zeta,\rho])-g(\zeta,[\eta,\rho])+g(\rho,[\eta,\zeta])\end{aligned}$$

tile verilen ifadeye ***Koszul formülü*** *denir [15].*

Tanım 2.0.10. *V bir vektör uzayı ve V^* da V vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda*

$$\Psi : \overbrace{V \times V \times \ldots \times V}^{m \text{ tane}} \times \overbrace{V^* \times V^* \times \ldots V^*}^{n \text{ tane}} \to \mathbb{R}$$

ile verilen ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ ve $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^* \in V^*$

olmak üzere

$$\psi\left(v_1, \ldots, \lambda_1 v_k + \lambda_2 v_k^{'}, \ldots\right) = \lambda_1 \psi\left(v_1, \ldots, v_k, \ldots,\right) + \lambda_2 \phi\left(v_1, \ldots, v_k^{'}, \ldots\right)$$

şartını sağlayan ψ dönüşümüne **m. mertebeden kovaryant(kov.)** ve **n. mertebeden kontravaryant(kont.) tensör** ismi verilir.Burada $v_k, v_k^{'} \in V$ (veya V^*) dır.

Bir tensör her bir değişkenine göre linear olan bir dönüşümdür. r. mertebeden kov. ve s. mertebeden kont. tensörlerin kümesi T_s^r ile gösterilir. Buna göre

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\psi_1, \psi_2 \in T_s^r$ olmak üzere,

$$(\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2)(v_1, v_2, \ldots) = \lambda_1 \psi_1 (v_1, v_2, \ldots) + \lambda_2 \psi_2 (v_1, v_2, \ldots)$$

tanımlanırsa açıkça görülür ki $\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \in T_s^r$ dir. Yukarıda tanımlanan işlemlerle birlikte T_s^r bir vektör uzayı yapısına sahiptir [14].

Tanım 2.0.11. *M^n bir dif.bilir manifold ve ∇ bir linear koneksiyon olsun. Bu durumda*

$$T : \Gamma(TM^n) \times \Gamma(TM^n) \to \Gamma(TM^n)$$
$$(\eta, \zeta) \to T(\eta, \zeta) = \nabla_\eta \zeta - \nabla_\zeta \eta - [\eta, \zeta]$$

*gibi tanımlı T tensör alanına ∇ linear koneksiyonun **torsiyon tensörü** denir. Açıktır ki $T, (1,2)$ mertebeli tensör alanıdır. $T = 0$ olması durumunda ∇ linear koneksiyonu torsiyonsuzdur denir. Yani,*

$$[\eta, \zeta] = \nabla_\eta \zeta - \nabla_\zeta \eta$$

dir [14].

Lemma 2.0.3. *M^n manifoldu üzerindeki koneksiyona ∇ ve ∇ koneksiyonun tensör alanı T ise $\eta,\ \zeta \in \Gamma(TM^n)$ için*

$$T(\eta, \zeta) = -T(\zeta, \eta)$$

ve M^n manifoldunun p noktasındaki torsiyon tensör alanı η_p ve ζ_p değerlerine bağlıdır [14].

Tanım 2.0.12. *M^n dif.bilir manifold ve ∇ bir linear koneksiyon olsun. Böylece*

$$R : \Gamma(TM^n) \times \Gamma(TM^n) \times \Gamma(TM^n) \to \Gamma(TM^n)$$
$$(\eta, \zeta, \rho) \to R(\eta, \zeta)\rho = \nabla_\eta \nabla_\zeta \rho - \nabla_\zeta \nabla_\eta \rho - \nabla_{[\eta,\zeta]}\rho$$

*gibi tanımlı R tensör alanına ∇ linear koneksiyonun **eğrilik tensörü** adı verilir ve R, $(3,1)$ mertebeli tensör alanıdır. Eğer $R = 0$ ise M^n manifoldu düzlemseldir (flattır) denir [14].*

R aşagıdaki özellikeri sağlar: $\forall \eta, \zeta, \rho \in \Gamma(TM^n)$

(i) $R(\eta, \zeta)\rho = -R(\zeta, \eta)\rho$

(ii) $R(\eta, \zeta)\rho + R(\zeta, \rho)\eta + R(\rho, \eta)\zeta = 0$ (1. Bianchi Özdeşliği)

dir [16]. Ayrıca $\forall \eta, \zeta, \rho, \sigma \in \Gamma(TM^n)$ için,

$$R(\eta, \zeta, \rho, \sigma) = g(R(\eta, \zeta)\rho, \sigma)$$

tensörüne M^n nin **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** adı verilir [15].

Aynı zamanda $\forall \eta, \zeta, \rho, \sigma \in \Gamma(TM^n)$ için,

1. $R(\eta, \zeta, \rho, \sigma) = -R(\zeta, \eta, \rho, \sigma)$
2. $R(\eta, \zeta, \rho, \sigma) + R(\zeta, \rho, \eta, \sigma) + R(\rho, \eta, \zeta, \sigma) = 0$
3. $R(\eta, \zeta, \rho, \sigma) = -R(\eta, \zeta, \sigma, \rho)$
4. $R(\eta, \zeta, \rho, \sigma) = R(\sigma, \rho, \eta, \zeta)$

özelliklerini sağlar [16].

Tanım 2.0.13. *(M^n, g) bir Riemann manifold ve M^n nin p noktasındaki tanjant uzayı $T_{M^n}(p)$ ve $T_{M^n}(p)$' nın $2-$boyutlu bir altuzayı P olsun. α, β, $T_{M^n}(p)$ de linear bağımsız vektörleri için $\Pi = Sp\{\alpha, \beta\}$ düzlemi üzerinde*

$$\mathscr{K}(P) = \mathscr{K}(\alpha, \beta) = \frac{g(R(\alpha, \beta)\beta, \alpha)}{g(\alpha, \alpha)g(\beta, \beta) - g(\alpha, \beta)^2}$$

*değerine M^n manifoldunun P düzlemine göre **kesit eğriliği** denir [14].*

Tanım 2.0.14. (M^n, g) *Riemann manifoldu ve* M^n *de yerel ortonormal vektör alanları* $\{e_1, ..., e_n\}$ *olsun.* $\eta,\ \zeta \in \chi(M^n)$ *için*

$$S_1 = \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$
$$(\eta, \zeta) \quad \to \quad S_1(\eta, \zeta) = izR(., \eta)\zeta$$

gibi verilen $(2,0)$*- mertebeli*

$$S_1(\eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, \eta)\zeta, e_i)$$

tensör alanına (M^n, g)*'nin* ***Ricci tensörü*** *ismi verilir.* M^n *nin Ricci operatörü Ric ise*

$$g(Ric\eta, \zeta) = S_1(\eta, \zeta)$$

şeklinde tanımlanır [14].

Ricci tensörü simetriktir, yani

$$S_1(\eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} g(R(\zeta, e_i)e_i, \eta) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, \zeta)\eta, e_i) = S_1(\zeta, \eta)$$

dir [14].

Tanım 2.0.15. *Bir Riemann manifoldu* (M^n, g) *ve* $\{e_1, ...e_n\}$, $\chi(M^n)$ *nin yerel bazı olmak üzere;*

$$r = \sum_{i=1}^{n} S_1(e_i, e_i)$$

fonksiyonuna M^n *nin* ***skaler eğrilik fonksiyonu*** *ismi verilir [15].*

Tanım 2.0.16. *Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı bir* M^n *manifolduna bir uzay form denir ve* $M^n(c)$ *ile gösterilir.*

Eğğer;

$c = 0$ ise $M^n(c) \cong E^n$ Öklid uzayı,

$c = \frac{1}{r^2}$ ise $M^n(c) \cong S^n(r)$ küresi,

$c = -\frac{1}{r^2}$ ise $M^n(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzay

dır [15].

2.0.1 Altmanifoldlar

Tanım 2.0.17. *M^n ve $\tilde{M}^{n+k}$ iki manifold olsun. $\tilde{M}^{n+k}$ üzerinde bir $\widetilde{W}$ ve M de bir W komşuluğu mevcut ve*

$$W = \left\{ m \in \widetilde{W} : \widetilde{\eta}_{n+k}(m) = ... = \widetilde{\eta}_{n+k}(m) = 0 \right\}$$

*ise M^n ye $\tilde{M}^{n+k}$ nin **altmanifoldu** denir. $\left\{ \widetilde{\eta}_1, ..., \widetilde{\eta}_{n+k} \right\}$ koordinat sistemi $\widetilde{W}$ da, $\{\eta_1, \eta_2, ...\eta_n\}$ de W da koordinat sistemleridir [15].*

Tanım 2.0.18. *M^n ve $\tilde{M}^{n+k}$ Riemannian manifoldlar ve M^n, $\tilde{M}^{n+k}$ nin altmanifoldu, ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ de sırasıyla, M^n ile $\tilde{M}^{n+k}$ üzerinde kovaryant türevler olsun. M^n üzerinde η ve ζ vektör alanları için*

$$\begin{aligned} h &: \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to \chi^{\perp}(M^n) \\ \widetilde{\nabla}_{\eta}\zeta &= \nabla_{\eta}\zeta + h(\eta, \zeta) \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

*gibi tanımlı eşitliğe **Gauss formülü** ismi verilir. Burada $\nabla_{\eta}\zeta$ ve $h(\eta, \zeta)$, $\widetilde{\nabla}_{\eta}\zeta$ nin sırası ile, tanjant ve dik bileşenleri olup (2.0.1) ile tanımlanan h ya M^n nin 2.temel formu ismi verilir. $h = 0$ ise M^n ye total geodeziktir denir [15].*

Tanım 2.0.19. *M^n ve $\tilde{M}^{n+k}$ iki Rieman manifoldu iseler M^n, $\tilde{M}^{n+k}$ nın altmanifoldu olsun. N, M^n nin birim normal vektör alanı ve $-A_N X$ ve $\nabla^{\perp}_{\eta}N$ de sırasıile $\widetilde{\nabla}_{\eta}N$ nin teğet ve dik bileşenleri iseler*

$$A : \chi(M^n) \times \chi^{\perp}(M^n) \to \chi(M^n)$$

dönüşümü iyi tanımlı olup

$$\widetilde{\nabla}_{\eta}N = -A_N\eta + \nabla^{\perp}_{\eta}N \tag{2.0.2}$$

biçiminde tanımlı eşitliğe **Weingarten formülü** ismi verilir. Bu ifadede A_N ye şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M^n nin $T^{\perp}M$ dik demetindeki koneksiyonu denilir.

M^n nin A_N şekil operatörü ile h ikinci temel formu arasında;

$$g(A_N\eta, \zeta) = g(h(\eta, \zeta), N)$$

ilişkisi vardır [15].

Tanım 2.0.20. *Riemann manifoldu* $\left(\widetilde{M}^{n+k}, \widetilde{g}\right)$ *nin bir altmanifoldu* M^n *olsun.* $\widetilde{M}^{n+k}$ *nın* ***eğrilik tensörü*** $\widetilde{R}$, $\forall \eta, \zeta, \rho, \sigma \in \chi(M^n)$ *için*

$$\widetilde{R}(\eta,\zeta)\rho = \widetilde{\nabla}_\eta \widetilde{\nabla}_\zeta \rho - \widetilde{\nabla}_\zeta \widetilde{\nabla}_\eta \rho - \widetilde{\nabla}_{[\eta,\zeta]}\rho$$

$$\widetilde{R}(\eta,\zeta,\rho,\sigma) = \widetilde{g}\left(\widetilde{R}(\eta,\zeta)\rho,\sigma\right)$$

gibi tanımlanır.

M^n nin eğrilik tensörü R ve $\widetilde{M}^{n+k}$ nin eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere (2.0.1) ve (2.0.2) denklemleri yardımı ile

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(\eta,\zeta,\rho,\sigma) = R(\eta,\zeta,\rho,\sigma) - \widetilde{g}(h(\zeta,\rho),h(\eta,\rho)) \\ + \widetilde{g}(h(\eta,\rho),h(\zeta,\sigma))\end{aligned} \tag{2.0.3}$$

elde edilir. (2.0.3) eşitliğine **Gauss denklemi** denir [15].

Gauss denkleminin teğet ve dik bileşenleri sıra sıile,

$$\left(\widetilde{R}(\eta,\zeta)\rho\right)^{\top} = R(\eta,\zeta)\rho + A_{h(\eta,\rho)}\zeta - A_{h(\zeta,\rho)}\eta \tag{2.0.4}$$

ve

$$\left(\widetilde{R}(\eta,\zeta)\rho\right)^{\perp} = \left(\bar{\nabla}_\eta h\right)(\zeta,\rho) - \left(\bar{\nabla}_\zeta h\right)(\eta,\rho) \tag{2.0.5}$$

olup (2.0.5) eşitliğine **Codazzi denklemi** ismi verilir.

Burada $\bar{\nabla} h$, M^n altmanifoldunun 2.temel formu h nın kovaryant türevidir ve

$$\left(\bar{\nabla}_\eta h\right)(\zeta,\rho) = \nabla^{\perp}_\eta h(,\rho) - h(\zeta,\nabla_\eta \rho)$$

gibi tanımlanır.

Ayrıca $\delta, \xi \in \chi^{\perp}(M^n)$ ise

$$\widetilde{R}(\eta,\zeta,\xi,\delta) = R^{\perp}(\eta,\zeta,\xi,\delta) - g\left(\left[A_\xi, A_\delta\right]\eta,\zeta\right) \tag{2.0.6}$$

gibi tanımlanan eşitliğe **Ricci denklemi** ismi verilir.

(2.0.6) da $\left[A_\xi, A_\delta\right] = A_\xi A_\delta - A_\delta A_\xi$ ve $R^{\perp}$ ise $\nabla^{\perp}$ dik koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörüdür [15].

Tanım 2.0.21. *(M^n, g), $\left(\tilde{M}^{n+k}, \tilde{g}\right)$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. M^n deki bir $x \in M^n$ için $T_{M^n}(x)$ nin yerel ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazını alalım. M^n üzerinde*

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

*vektörüne M^n nin **ortalama eğrilik vektörü** olarak adlandırılır [15].*

M^n üzerinde

$$H = 0$$

ise M^n ye minimaldir denir [15].

Tanım 2.0.22. *M^n ve $\tilde{M}^{n+k}$ iki manifold olsun.*

$$df_p : T_{M^n}(p) \to T_{f(p)}\tilde{M}^{n+k}$$

dönüşümü $\forall p \in M^n$ noktasında $1:1$ *ise*

$$f : M^n \to \tilde{M}^{n+k}$$

*dif.bilir dönüşümüne **immersion** denir.*

Eğer d_{f_p} immersiyonu için f dönüşümü $1:1$ ise f ye **imbedding**dir denir [17].

Tanım 2.0.23. *E^n, öklid uzayında bir $(n-1)$ yüzey diye E^n deki bir $\varnothing \neq M$ kümesine denir ve bu M kümesi*

$$M = \left\{x \in V \subset E^n \mid f : V \overset{dif.bilir}{\longrightarrow} \mathbb{R}, \quad x \to f(x) = c \ V \ bir \text{ açık alt küme}\right\}, \quad \nabla f\,|_P \neq 0, \forall P \in M,$$

gibi ifade edilir. E^2 de bir $1-$yüzeye eğri, E^3 de bir $2-$yüzeye kısaca yüzey denir. $n > 3$ ise E^n de bir $(n-1)$ yüzey **hiperyüzey** diye isimlendirilir [13].

Tanım 2.0.24. *M ve N dif.bilir manifoldlar ve $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Böylece $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$, türev dönüşümü olmak üzere*

$$F^* : T_{F(p)}N^* \to T_pM^*$$

F_* türev dönüşümü

$$F^*\left(\sigma_{F(p)}\right)\left(X_{(p)}\right) = \sigma_{F(p)}\left(F_*\left(X_p\right)\right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüme ***geri-çağırma*** *(pull-back map) dönüşümü denir. Eğer* ϕ, N *üzerinde 2-form ise* $p \in M$ *noktasında*

$$\left(F^{*}\phi\right)_{p}\left(X_{p},Y_{p}\right)=\phi\left(F_{*}\left(X_{p}\right),F_{*}\left(Y_{p}\right)\right)$$

olarak verilen $F^{*}\phi$ *bilinear formu tanımlar. En genel anlamda* ϕ, N *üzerinde r. mertebeden kovaryant tensör alanı ise* $X_1,...,X_r \in \Gamma(TN)$ *için*

$$\left(F^{*}\phi\right)\left(X_{1},...,X_{r}\right)=\phi\left(F_{*}\left(X_{1}\right),...,F_{*}\left(X_{r}\right)\right)$$

dır [14].

3. İSTATİSTİKSEL MANİFOLDLAR

C^∞ sınıfından $(n+k)$ boyutlu bir Riemann manifold $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir afin koneksiyon olsun. $\Gamma(E)$ ile $E \to \widetilde{M}$ vektör demetlerinin kümesi gösterilsin. Böylece $\widetilde{M}$ üzerinde (p,q) tipindeki tüm tensör alanlarının kümesi $\Gamma\left(TM^{(p,q)}\right)$ olarak gösterilir [5].

Tanım 3.0.1. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *bir **istatistiksel manifolddur** eğer*

i) $\widetilde{\nabla}$ torsiyonsuz ve

ii) $\left(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{g}\right)(Y,Z) = \left(\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{g}\right)(X,Z)\,,\quad X,Y,Z \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$

dir.

$\widetilde{\nabla}^*$, $\widetilde{g}$ ye göre $\widetilde{\nabla}$ nın dual koneksiyonu olarak adlandırılır ve

$$X\widetilde{g}(Y,Z) = \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_XZ\right)\,, \qquad X,Y,Z \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$$

şartını sağlar [18].

$\left(\widetilde{M},\widetilde{g}\right)$ istatistiksel manifoldu, torsiyonsuz $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\nabla}^*$ afin koneksiyonları ile donatılmış, $(n+k)-$ boyutlu bir Riemann manifolddur [5].

Önerme 3.0.1. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *bir istatistiksel manifolddur gerek ve yeter şart* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}^*,\widetilde{g}\right)$ *de bir istatistiksel manifolddur [18].*

İspat: $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ bir istatistiksel manifold olsun. $X,Y,Z \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için

$$X\widetilde{g}(Y,Z) = \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_XZ\right),$$

olup buradan,

$$\left(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{g}\right)(Y,Z) + \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}_XZ\right) = \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_XZ\right) \tag{3.0.1}$$

dır. Burada X ve Z (3.0.1) değiştirilerek

$$\left(\widetilde{\nabla}_Z\widetilde{g}\right)(Y,X) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}_ZX\right) = \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_ZX\right) \tag{3.0.2}$$

elde edilir. (3.0.1) den (3.0.2) çıkarılarak

$$[X,Z] = \widetilde{\nabla}^*_XZ - \widetilde{\nabla}^*_ZX$$

yazılır. Bu $\widetilde{\nabla}^*$ nın torsiyonsuz olduğunu gösterir.

Ayrıca,

$$X\widetilde{g}(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}^*_X\widetilde{g})(Y,Z) + \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_XZ\right),$$

dan

$$\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_XZ\right) = (\widetilde{\nabla}^*_X\widetilde{g})(Y,Z) + \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_XZ\right). \tag{3.0.3}$$

elde edilir. Burada X ve Y (3.0.3) de değiştirilerek

$$\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_YX,Z\right) = (\widetilde{\nabla}^*_Y\widetilde{g})(X,Z) + \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_YX,Z\right) \tag{3.0.4}$$

yazılır. (3.0.3) den (3.0.4) ü çıkarılarak,

$$\widetilde{g}([X,Y],Z) = (\widetilde{\nabla}^*_X\widetilde{g})(Y,Z) - (\widetilde{\nabla}^*_Y\widetilde{g})(X,Z) + \widetilde{g}([X,Y],Z),$$

elde edilir. Böylece

$$(\widetilde{\nabla}^*_X\widetilde{g})(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}^*_Y\widetilde{g})(X,Z).$$

eşitliği bulunur. Bu da $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}^*,\widetilde{g}\right)$ nın bir istatistiksel manifold olduğunun ispatıdır.

Diğer yönde aynı şekilde ispatlanabilir [18].

Önerme 3.0.2. *Herhangi torsiyonsuz* $\widetilde{\nabla}$ *ve* $\widetilde{\nabla}^*$ *afin koneksiyonları için her zaman*

$$\frac{1}{2}\left(\widetilde{\nabla}+\widetilde{\nabla}^*\right) = \widetilde{\nabla}^0$$

eşitliği sağlanır. Burada $\widetilde{\nabla}^0$, $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita koneksiyondur [5].

İspat: Bunu göstermek için Riemann koneksiyonun tekliğini kullanılır. Bu sebeple diğer bir $\overline{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunu göz önüne alalım.

$$\overline{\nabla} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\nabla}+\widetilde{\nabla}^*\right) \tag{3.0.5}$$

diyelim. Hem $\widetilde{\nabla}$ hem de $\widetilde{\nabla}^*$ torsiyonsuz olduğundan $\overline{\nabla}$ torsiyonsuzdur. Fakat

$$\begin{aligned}\widetilde{g}\left(\overline{\nabla}_XY,Z\right) + \widetilde{g}\left(Y,\overline{\nabla}_XZ\right) &= \frac{1}{2}\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_XY,Z\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*_XY,Z\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}\widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}^*_XZ\right) + \frac{1}{2}\widetilde{g}\left(Y,\widetilde{\nabla}_XZ\right)\\ &= X\widetilde{g}(Y,Z)\end{aligned}$$

dir. Bu da gösterir ki $\overline{\nabla}$ Riemannian dır ve böylece $\overline{\nabla} = \widetilde{\nabla}^0$ dir [16].

Eğer $\widetilde{\nabla} = \widetilde{\nabla}^*$ ise bu durumda $\left(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}\right)$ bir aşikar istatistiksel manifold olarak adlandırılır [19].

$\widetilde{M}$ de $\left(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g}\right)$ istatistiksel yapısı için fark tensör alanı $\widetilde{K} \in \Gamma\left(T\widetilde{M}^{(1,2)}\right)$,

$$\widetilde{K}(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}^0_X Y \tag{3.0.6}$$

olarak tanımlanır [8].

(3.0.5) ve (3.0.6) den

$$\widetilde{K} = \widetilde{\nabla}^0 - \widetilde{\nabla}^* = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\nabla} - \widetilde{\nabla}^*\right)$$

bulunur [19].

Böylece $\widetilde{K}$ aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\widetilde{K}_X Y = \widetilde{K}_Y X, \qquad g\left(\widetilde{K}_X Y, Z\right) = g\left(Y, \widetilde{K}_X Z\right), \ X,Y,Z \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right), \tag{3.0.7}$$

dir. $\widetilde{K}$ (3.0.7) yi sağlıyorsa, $\left(\widetilde{\nabla} = \widetilde{\nabla}^0 + \widetilde{K}, \widetilde{g}\right)$ ikilisi de $\widetilde{M}$ de bir istatistiksel yapıdır. Bir $\left(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g}\right)$ istatistiksel yapısı için genellikle $\left(\widetilde{\nabla} = \widetilde{\nabla}^0 + \widetilde{K}, \widetilde{g}\right)$ gibi bir ifade kullanılır ve $\widetilde{K}_X Y = \widetilde{K}(X,Y)$ yazılır [6, 8].

Tanım 3.0.2. $\left(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}\right)$ *istatistiksel manifold sabit* $c \in \mathbb{R}$ *eğrilikli ise*

$$R^{\widetilde{\nabla}}(X,Y)Z = c\left\{\widetilde{g}(Y,Z)X - \widetilde{g}(X,Z)Y\right\}, \qquad X,Y,Z \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right),$$

dir. Burada, $R^{\widetilde{\nabla}}$, $\widetilde{\nabla}$ nın eğrilik tensörüdür.

$\left(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g}\right)$ istatistiksel yapısının eğriliği 0 ise o zaman Hessian yapı olarak adlandırılır [18].

Önerme 3.0.3. $\left(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}\right)$ *istatistiksel manifoldunun sabit eğriliği c dir ancak ve ancak* $\left(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}^*, \widetilde{g}\right)$ *'nin de sabit eğriliği c'dir [18].*

İspat: $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ istatistiksel manifoldunun sabit eğriliği c olsun. $X,Y,Z,W \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}\left(R^{\widetilde{\nabla}^*}(X,Y)Z,W\right) &= \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_X\widetilde{\nabla}^*{}_YZ,W\right)-\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_Y\widetilde{\nabla}^*{}_XZ,W\right)-\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_{[X,Y]}Z,W\right)\\
&= X\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_YZ,W\right)-\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_YZ,\widetilde{\nabla}_XW\right)-Y\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_XZ,W\right)\\
&+\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}^*{}_XZ,\widetilde{\nabla}_YW\right)-[X,Y]\,\widetilde{g}(Z,W)+\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}W\right)\\
&= X\{Y\widetilde{g}(Z,W)-\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_YW\right)\}-Y\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_XW\right)\\
&+\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_XW\right)-Y\left\{X\widetilde{g}(Z,W)-\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_XW\right)\right\}\\
&+X\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_YW\right)-\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_YW\right)-[X,Y]\,\widetilde{g}(Z,W)\\
&+\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}W\right)=-\widetilde{g}\left(Z,R^{\widetilde{\nabla}}(X,Y)W\right)
\end{aligned}
$$

dir. Bu denklemden $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}^*,\widetilde{g}\right)$' nin c sabit eğrilikli olduğu sonucuna varılır [18].

$\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ istatistiksel manifoldu için

$$\widetilde{R}^{\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)}(X,Y,Z,W)=\widetilde{g}\left(\widetilde{R}^{\widetilde{\nabla}}(Z,W)Y,X\right),$$

dir ve $\widetilde{R}^{\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)}$ yi $\widetilde{R}$ ile ve $\widetilde{R}^{\left(\widetilde{\nabla}^*,\widetilde{g}\right)}$ yi de $\widetilde{R}^*$ ile kısaca belirtebiliriz [18].

Lemma 3.0.1. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *istatistiksel manifoldu için aşagıdakiler sağlanır [18].*

$$\widetilde{R}(X,Y,W,Z)=-\widetilde{R}(X,Y,Z,W) \tag{3.0.8}$$

$$\widetilde{R}^*(X,Y,W,Z)=-\widetilde{R}^*(X,Y,Z,W) \tag{3.0.9}$$

$$\widetilde{R}(Y,X,W,Z)=-\widetilde{R}^*(X,Y,Z,W) \tag{3.0.10}$$

$$\widetilde{R}(X,Y,Z,W)+\widetilde{R}(X,Z,W,Y)+\widetilde{R}(X,W,Y,Z)=0 \tag{3.0.11}$$

$$\widetilde{R}^*(X,Y,Z,W)+\widetilde{R}^*(X,Z,W,Y)+\widetilde{R}^*(X,W,Y,Z)=0 \tag{3.0.12}$$

İspat: (3.0.8) ve (3.0.9) formülleri doğrudan eğrilik tensör tanımından gelir.

Tanım 3.0.1(2) ye göre (3.0.10) anlamına gelen

$$\widetilde{g}\left(\widetilde{R}^{\widetilde{\nabla}}(X,Y)Z,W\right)=-\widetilde{g}\left(Z,\widetilde{R}^{\widetilde{\nabla}^{*}}(X,Y)W\right)$$

yazılabilir. 1. Bianchi özdeşliği (3.0.11) ve (3.0.12) formüllerini ifade eder, çünkü $\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^{*}$ torsiyonsuzdur [18].

Tanım 3.0.3. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *istatistiksel manifoldu için istatistiksel eğrilik tensör alanı* $\widetilde{S}=\widetilde{S}^{\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)}$ *için* $X,Y,Z,W\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(X,Y)Z&=\frac{1}{2}\left\{\widetilde{R}(X,Y)Z+\widetilde{R}^{*}(X,Y)Z\right\}\\&=\widetilde{R}^{\widetilde{g}}(X,Y)Z+\left[\widetilde{K}_X,\widetilde{K}_Y\right]Z,\end{aligned}$$

ve

$$\widetilde{S}(X,Y,Z,W)=\widetilde{g}\left(\widetilde{S}(X,Y)Z,W\right),$$

ile tanımlanır. Burada $\widetilde{R}^{\widetilde{g}}$, $\widetilde{\nabla}^{\widetilde{g}}$ ya göre eğrilik tensör alanını gösterir [6,20].

Önerme 3.0.4. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *bir istatistiksel manifold olsun.* $\widetilde{S}\in\Gamma\left(T\widetilde{M}^{(0,4)}\right)$ *tensör alanı için,*

$$\widetilde{S}(X,Y,Z,W)=-\widetilde{S}(Y,X,Z,W),$$

$$\widetilde{S}(X,Y,Z,W)=-\widetilde{S}(X,Y,W,Z),$$

$$\widetilde{S}(X,Y,Z,W)+\widetilde{S}(Y,Z,X,W)+\widetilde{S}(Z,X,Y,W)=0,$$

$$\widetilde{S}(X,Y,Z,W)=\widetilde{S}(Z,W,X,Y).$$

dir [20].

Tanım 3.0.4. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *istatistiksel manifoldun c kesit eğriliği sabittir gerek ve yeter şart* $X,Y,Z,\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ *için*

$$\widetilde{S}(X,Y,)Z=c\left\{\widetilde{g}(Y,Z)X-\widetilde{g}(X,Z)Y\right\},$$

dir.

M, $\widetilde{M}$' nin $n-$boyutlu altmanifoldu olsun. Herhangi $X,Y \in \Gamma(TM)$ için ilgili Gauss formülleri şunlardır:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \tag{3.0.13}$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X Y = \nabla^*_X Y + h^*(X,Y). \tag{3.0.14}$$

Burada h ve h^* simetrik ve bilineerdir, sırasıyla $\widetilde{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}^*$ için $\widetilde{M}$ daki M nin imbedding eğrilik tensör alanı olarak adlandırılır [5].

(∇, g) ve (∇^*, g), M üzerinde iki istatistiksel yapıdır. Burada g, $\widetilde{M}$ üzerindeki Riemannian metriği $\widetilde{g}$ dan $\Gamma(TM)$ üzerinde indirgenen metriktir.

$\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ile M üzerindeki normal demeti gösterelim. h ve h^* bilineer olduklarından, A_U ve A^*_U lineer dönüşümleri ele alındığında

$$g(A_U X, Y) = \widetilde{g}(h^*(X,Y), U), \tag{3.0.15}$$

$$g(A^*_U X, Y) = \widetilde{g}(h(X,Y), U), \tag{3.0.16}$$

elde edilir, burada $U \in \Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ve $X,Y \in \Gamma(TM)$. Ayrıca ilgili Weingarten formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\widetilde{\nabla}_X U = -A^*_U X + \nabla^{\perp}_X U, \tag{3.0.17}$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X U = -A_U X + \overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_X U, \tag{3.0.18}$$

dır. (3.0.17) ve (3.0.18) tarafından verilen $\nabla^{\perp}_X$ ve $\nabla^{*\perp}_X$ koneksiyonları $\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ üzerinde indirgenen metriğe göre Riemann dual koneksiyonlardır [5].

Ayrıca; Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri de aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.0.5. *$\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir dual koneksiyon ve ∇, M den indirgenen koneksiyon ve $\widetilde{R}$ ile R de $\widetilde{\nabla}$ ve ∇' nin sırasıyla Rieman eğrilik tensörleri olsun. O halde ,*

$$\widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X,Y)Z,W\right)=g\left(R(X,Y)Z,W\right)+\widetilde{g}\left(h(X,Z),h^{*}(Y,W)\right)-\widetilde{g}\left(h^{*}(X,W),h(Y,Z)\right), \tag{3.0.19}$$

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp}&=\nabla^{\perp}_{X}h(Y,Z)-h(\nabla_{X}Y,Z)-h(Y,\nabla_{X}Z)\\&-\left\{\nabla^{\perp}_{Y}h(X,Z)-h(\nabla_{Y}X,Z)-h(X,\nabla_{Y}Z)\right\},\end{aligned} \tag{3.0.20}$$

$$\widetilde{g}\left(R^{\perp}(X,Y)U,V\right)=\widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X,Y)U,V\right)+g\left([A^{*}_{U},A_{V}]X,Y\right), \tag{3.0.21}$$

dir. Burada $R^{\perp}$, $\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ üzerinde Riemannian eğrilik tensörü, $U,V\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ve $[A^{*}_{U},A_{V}]=A^{*}_{U}A_{V}-A_{V}A^{*}_{U}$ dır [5].

Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri için $\widetilde{M}$ daki $\widetilde{\nabla}^{*}$ dual koneksiyonu ile ilgili olarak aşağıdaki önerme ele alınır:

Önerme 3.0.6. *$\widetilde{\nabla}^{*}$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir dual koneksiyon ve ∇^{*}, M den indirgenen bir koneksiyon olsun. $\widetilde{R}^{*}$ ve R^{*} de sırasıyla $\widetilde{\nabla}^{*}$ ve ∇^{*}'ın Riemann eğrilik tensörleri olsun. O halde*

$$\widetilde{g}\left(\widetilde{R}^{*}(X,Y)Z,W\right)=g\left(R^{*}(X,Y)Z,W\right)+\widetilde{g}\left(h^{*}(X,Z),h(Y,W)\right)-\widetilde{g}\left(h(X,W),h^{*}(Y,Z)\right), \tag{3.0.22}$$

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{R}^{*}(X,Y)Z\right)^{\perp}&=\nabla^{*\perp}_{X}h^{*}(Y,Z)-h^{*}(\nabla^{*}_{X}Y,Z)-h^{*}(Y,\nabla^{*}_{X}Z)\\&-\left\{\nabla^{*\perp}_{Y}h^{*}(X,Z)-h^{*}(\nabla^{*}_{Y}X,Z)-h^{*}(X,\nabla^{*}_{Y}Z)\right\},\end{aligned} \tag{3.0.23}$$

$$\widetilde{g}\left(R^{*\perp}(X,Y)U,V\right)=\widetilde{g}\left(\widetilde{R^{*}}(X,Y)U,V\right)+g\left([A_{U},A^{*}_{V}]X,Y\right), \tag{3.0.24}$$

burada $R^{*\perp}$, $\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ üzerinde $\nabla^{*\perp}$'ın Riemannian eğrilik tensörü, $U,V\in\Gamma\left(TM^{\perp}\right)$ ve $[A^{*}_{U},A_{V}]=A^{*}_{U}A_{V}-A_{V}A^{*}_{U}$ dır [5].

Ayrıca,

$$2\widetilde{S}=\widetilde{R}+\widetilde{R}^{*}, \tag{3.0.25}$$

ve

$$2S=R+R^{*} \tag{3.0.26}$$

burada $S = S^{(\nabla, g)}$, ∇ ve ∇^* (M, ∇, g) de istatistiksel eğrilik tensör alanını gösterir [12].

Genel olarak standart tanımlarla (metrik olmayan) dual konneksiyonlara göre bir kesit eğriliği tanımlanamaz. Bununla birlikte B. Opozda [21, 22] istatistiksel bir manifold üzerinde kesit eğriliğini aşağıdaki gibi tanımlamıştır: $X,\ Y \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(X \wedge Y) &= g\left(\widetilde{S}(X,Y)Y, X\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g\left(\widetilde{R}(X,Y)Y, X\right) + g\left(\widetilde{R}^*(X,Y)Y, X\right)\right).\end{aligned} \tag{3.0.27}$$

dir [12].

3.0.1 İstatistiksel Hiperyüzeyler

$\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\right)$ bir istatistiksel manifold olsun ve $f : M \to \widetilde{M}$ bir immersion olsun. M de g ve ∇ çifti $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g = f^*\widetilde{g}, \qquad g(\nabla_X Y, Z) = \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_X f_* Y, f_* Z\right) \tag{3.0.28}$$

dir, burada indirgenen $f^*T\widetilde{M} \to M$ demeti üzerinde $\widetilde{\nabla}$ dan f ile indirgenen koneksiyon aynı $\widetilde{\nabla}$ sembolü ile gösterilir. (∇, g) çifti, M üzerinde f tarafından $\left(\widetilde{\nabla}, \widetilde{g}\right)$ den indirgenen bir istatistiksel yapı olarak adlandırılır [5, 8].

Tanım 3.0.5. *(M, g, ∇) ve $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\right)$ iki istatistiksel manifold ve $f : M \to \widetilde{M}$ bir immersion olsun. Bu immersion (∇, g) den indirgenen istatistiksel yapıya denk gelirse yani (3.0.28) sağlanırsa buna bir **istatistiksel immersion** denir.*

Kabul edelim ki $f : (M, g, \nabla) \to \left(\widetilde{M}, \widetilde{g}, \widetilde{\nabla}\right)$ ek boyutu bir olan bir istatistiksel immersion ve $U \in \Gamma\left(f^*T\widetilde{M}\right)$ f üzerinde bir birim normal vektör alanı olsun. Ayrıca $\widetilde{\nabla}^*$, $\widetilde{g}$ ya göre $\widetilde{\nabla}$ nın dual koneksiyonunu belirtmek üzere;

Gauss ve Weingarten formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\widetilde{\nabla}_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + h(X,Y)U, \tag{3.0.29}$$

$$\widetilde{\nabla}_X U = -f_* A^* X + \tau^*(X)U, \tag{3.0.30}$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X f_* Y = f_* \nabla^*_X Y + h^*(X,Y)U, \tag{3.0.31}$$

$$\widetilde{\nabla}^*_X U = -f_* AX + \tau(X)U, \tag{3.0.32}$$

burada $h, h^* \in \Gamma\left(TM^{(0,2)}\right)$, $A, A^* \in \Gamma\left(TM^{(1,1)}\right)$ ve $\tau, \tau^* \in \Gamma(TM^*)$ ve herhangi $X, Y, \in \Gamma(TM)$ için bu verilenlere ek olarak,

$$h(X,Y) = g(AX,Y), \quad h^*(X,Y) = g(A^*X,Y), \tag{3.0.33}$$

$$\tau(X) + \tau^*(X) = 0, \tag{3.0.34}$$

dir [5, 8].

$\widetilde{R}$, $\widetilde{R}^*$, R ve R^* sırasıyla $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\nabla}^*$, ∇ ve ∇^* koneksiyonlarının eğrilik tensör alanlarını göstersin.

O halde, istatistiksel hiperyüzeyler için Gauss denklemini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z - h(Y,Z)A^*X + h(X,Z)A^*Y + (\nabla_X h)(Y,Z)U \\ & - (\nabla_Y h)(X,Z)U + \tau^*(X)h(Y,Z)U - \tau^*(Y)h(X,Z)U \,. \end{aligned} \tag{3.0.35}$$

(3.0.35) den $\widetilde{R}(X,Y)Z$ nin normal bileşeni,

$$\left(\widetilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z)U - (\nabla_Y h)(X,Z)U + \tau^*(X)h(Y,Z)U - \tau^*(Y)h(X,Z)U, \tag{3.0.36}$$

Codazzi denklemi olarak bilinir [5].

Benzer şekilde, istatistiksel hiperyüzeyi için Ricci denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)U = {} & -(\nabla_X A^*)Y + (\nabla_Y A^*)X - \tau^*(Y)A^*X + \tau^*(X)A^*Y \\ & - h(X,A^*Y)U + h(A^*X,Y)U + d\tau^*(X,Y)U. \end{aligned} \tag{3.0.37}$$

Gauss, Codazzi ve Ricci'nin $\widetilde{M}$ üzerindeki $\widetilde{\nabla}^{*}$ dual koneksiyonu ile ilgili denklemleri

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^{*}(X,Y)Z = {} & R^{*}(X,Y)Z - h^{*}(Y,Z)AX + h^{*}(X,Z)AY + (\nabla^{*}_{X}h^{*})(Y,Z)U \\ & - (\nabla^{*}_{Y}h^{*})(X,Z)U + \tau(X)h^{*}(Y,Z)U - \tau(Y)h^{*}(X,Z)U,\end{aligned} \tag{3.0.38}$$

$$\left(\widetilde{R}^{*}(X,Y)Z\right)^{\perp} = (\nabla^{*}_{X}h^{*})(Y,Z)U - (\nabla^{*}_{Y}h^{*})(X,Z)U + \tau(X)h^{*}(Y,Z)U - \tau(Y)h^{*}(X,Z)U, \tag{3.0.39}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^{*}(X,Y)U = {} & -(\nabla^{*}_{X}A)Y + (\nabla^{*}_{Y}A)X - \tau(Y)AX + \tau(X)AY \\ & - h^{*}(X,AY)U + h^{*}(AX,Y)U + d\tau(X,Y)U.\end{aligned} \tag{3.0.40}$$

dir [5].

Ele alınan uzayın eğriliği sabit yani, c ise ; Gauss, Codazzi ve Ricci denklemleri

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + \{h(Y,Z)A^{*}X - h(X,Z)A^{*}Y\}, \tag{3.0.41}$$

$$(\nabla_{X}h)(Y,Z) + \tau^{*}(X)h(Y,Z) = (\nabla_{Y}h)(X,Z) + \tau^{*}(Y)h(X,Z), \tag{3.0.42}$$

$$(\nabla_{X}A^{*})Y - \tau^{*}(X)A^{*}Y = (\nabla_{Y}A^{*})X - \tau^{*}(Y)A^{*}X, \tag{3.0.43}$$

$$h(X,A^{*}Y) - h(A^{*}X,Y) = d\tau^{*}(X,Y). \tag{3.0.44}$$

ve duallerine indirgersek

$$R^{*}(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} + \{h^{*}(Y,Z)AX - h^{*}(X,Z)AY\}, \tag{3.0.45}$$

$$(\nabla^*_X h^*)(Y,Z) + \tau(X) h^*(Y,Z) = (\nabla^*_Y h^*)(X,Z) + \tau(Y) h^*(X,Z), \tag{3.0.46}$$

$$(\nabla^*_X A) Y - \tau(X) AY = (\nabla^*_Y A) X - \tau(Y) AX, \tag{3.0.47}$$

$$h^*(X,AY) - h^*(AX,Y) = d\tau(X,Y). \tag{3.0.48}$$

dir [5].

3.0.2 İstatistiksel Altmanifoldlar İçin Genel İfadeler

$\widetilde{M}$, $\widetilde{M}(c)$ ile gösterilen sabit $c \in \mathbb{R}$ eğrilikli bir $(n+k)-$boyutlu istatistiksel manifoldu ve M, $\widetilde{M}(c)$ nin $n-$ boyutlu istatistiksel altmanifoldu olsun.

Notasyon olarak;

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)W,Z)$$

ve

$$R^*(X,Y,Z,W) = g(R^*(X,Y)W,Z),$$

şeklinde olup, burada R ve R^*, ∇ ve ∇^*ın eğrilik tensör alanlarıdır.

$\{e_1,...e_n\}$ ve $\{e_{n+1},...,e_{n+k}\}$ sırasıyla $\widetilde{M}$ de ortonormal teğet ve normal bazlar olsun.

Böylece, ortalama eğrilik vektör alanları

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i) = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{\alpha}\right) e_{n+\alpha},\ h_{ij}^{\alpha} = \widetilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),e_{n+\alpha}\right), \tag{3.0.49}$$

ve

$$H^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^*(e_i,e_i) = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{*\alpha}\right) e_{n+\alpha},\ h_{ij}^{*\alpha} = \widetilde{g}\left(h^*\left(e_i,e_j\right),e_{n+\alpha}\right). \tag{3.0.50}$$

ile verilir [5].

Ayrıca önerme 3.0.2 den

$$h^0 = h + h^*,$$

$$H^0 = H + H^*,$$

olduğu ispatlanabilir. Burada h^0 ve H^0 $\widetilde{\nabla}^{\widetilde{g}}$ ya göre ikinci temel form ve ortalama eğriliğidir [12].

Öyleyse ortalama eğriliklerin kare normu

$$\|H\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{\alpha}\right)^2,$$

$$\|H^*\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{*\alpha}\right)^2,$$

ile verilir [12].

Önerme 3.0.7. *M, sabit eğriliği $c \in \mathbb{R}$ olan $(n+k)-$boyutlu $\widetilde{M}(c)$ istatistiksel manifoldunun n-boyutlu altmanifoldu olsun. Herhangi $X,Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \quad ve \quad h^*(X,Y) = g(X,Y)H^*,$$

dir. O zaman, $g(H,H^*)$ sabit olduğunda $\widetilde{M}$, sabit $c + g(H,H^*)$ eğrilikli bir istatistiksel manifolddur [5].

Tanım 3.0.6. *$\widetilde{M}$, $(n+k)-$boyutlu bir istatistiksel manifold olsun. O zaman Ricci tensörü $\widetilde{S}_1$ ($(0,2)$ tipinde) aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$\widetilde{S}_1(Y,Z) = iz\left\{X \to \widetilde{R}(X,Y)Z\right\}, \tag{3.0.51}$$

burada $\widetilde{R}$, $\widetilde{M}$, daki $\widetilde{\nabla}$ afin konneksiyonun eğrilik tensör alanıdır [5].

Böylece aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 3.0.1. *$(n+k)$ boyutlu bir istatistiksel $\widetilde{M}(c)$ manifoldunun sabit eğriliği $c \in \mathbb{R}$ ve M, $\widetilde{M}(c)$ nin n- boyutlu istatistiksel altmanifoldu olsun. $\{e_1,...,e_n\}$ ve $\{n_1,...,n_k\}$ M üzerinde sırasıyla ortonormal teğet ve normal yapı olsun. O halde M de Ricci tensörü S_1 ve dual Ricci tensörü S_1^* olup*

$$S_1(X,Y) = c(n-1)g(X,Y) + \sum_{i=1}^{k}\left[g(A_{n_i}X,Y)\,trA_{n_i}^* - g\left(A_{n_i}Y, A_{n_i}^*X\right)\right] \tag{3.0.52}$$

ve

$$S_1^*(X,Y) = c(n-1)g(X,Y) + \sum_{i=1}^{k}\left[g\left(A_{n_i}^*X,Y\right)trA_{n_i} - g\left(A_{n_i}X, A_{n_i}^*Y\right)\right], \tag{3.0.53}$$

dır.

burada A_{n_i} *ve* $A^*_{n_i}$ (3.0.15) ve (3.0.16) tarafından tanımlanan lineer dönüşümlerdir [5].

İspat: M , $\widetilde{M}(c)$ nin n- boyutlu bir altmanifoldu olduğunu varsayalım. M üzerinde ∇ ya göre eğrilik tensörünü R ile gösterelim. Daha sonra

$$S_1(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} g\left(R\left(e_j,X\right)Y,e_j\right)$$

ve (3.0.19) tarafından verilen Gauss denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} S_1(X,Y) &= \sum_{j=1}^{n} c\left\{g(X,Y)g\left(e_j,e_j\right) - g\left(X,e_j\right)g\left(Y,e_j\right)\right\} \\ &\quad + \widetilde{g}\left(h^*\left(e_j,e_j\right),h(X,Y)\right) - \widetilde{g}\left(h\left(e_j,Y\right),h^*\left(X,e_j\right)\right) \\ &= c(n-1)g(X,Y) + \sum_{j=1}^{n}\left[\widetilde{g}\left(h^*\left(e_j,e_j\right),h(X,Y)\right) - \widetilde{g}\left(h\left(e_j,Y\right),h^*\left(X,e_j\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.0.54}$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\widetilde{g}\left(h^*\left(e_j,e_j\right),h(X,Y)\right) = \sum_{i=1}^{k} g\left(A_{n_i}X,Y\right)g\left(A^*_{n_i}e_j,e_j\right) \tag{3.0.55}$$

ve

$$\widetilde{g}\left(h\left(e_j,Y\right),h^*\left(X,e_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} g\left(A^*_{n_i}X,e_j\right)g\left(A_{n_i}Y,e_j\right). \tag{3.0.56}$$

olsun.(3.0.55) ve (3.0.56) yerine (3.0.54) yazarak

$$\begin{aligned} S_1(X,Y) &= c(n-1)g(X,Y) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left[g\left(A_{n_i}X,Y\right)g\left(A^*_{n_i}e_j,e_j\right) - g\left(A_{n_i}X,e_j\right)g\left(A^*_{n_i}Y,e_j\right)\right] \\ &= c(n-1)g(X,Y) + \sum_{i=1}^{k}\left[g\left(A_{n_i}X,Y\right)trA^*_{n_i} - g\left(A_{n_i}X,A^*_{n_i}Y\right)\right], \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.0.52) ü verir. Dual Ricci tensörü S_1^* için benzer hesaplamalar yapılabilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur [5].

Önerme 3.0.8. *$\widetilde{M}(c)$, eğriliği sabit $c \in \mathbb{R}$ olan $(n+k)-$boyutlu bir istatistiksel manifold ve M, $\widetilde{M}(c)$ nin n - boyutlu bir istatistiksel altmanifoldu olsun. O halde*

$$2r \geq n(n-1)c + n^2\widetilde{g}(H,H^*) - \|h\|\,\|h^*\|, \tag{3.0.57}$$

dir, burada r, (M,∇,g) nin skaler eğriliğidir. Yani $r = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} g\left(R\left(e_i,e_j\right)e_j,e_i\right)$ dır [5].

İspat: (3.0.19) den Gauss denklemi aşağıdaki gibidir.

$$R(X,Y,Z,W) = c\left[g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\right]$$
$$+\widetilde{g}(h^*(X,Z),h(Y,W)) - \widetilde{g}(h(X,W),h^*(Y,Z)),$$

burada $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$. $X = Z = e_i$ *ve* $Y = W = e_j$, $i,j = 1,...,n$ yerine yazılırsa

$$R\left(e_i,e_j,e_i,e_j\right) = c\left[g(e_i,e_i)g\left(e_j,e_j\right) - g\left(e_i,e_j\right)^2\right] \quad (3.0.58)$$
$$+\widetilde{g}\left(h^*(e_i,e_i),h\left(e_j,e_j\right)\right) - \widetilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_j,e_i\right)\right).$$

elde edilir.

$\|h\|^2 = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i,j=1}^{n}\left(h_{ij}^{\alpha}\right)^2$ ve benzer şekilde $\|h^*\|$ da yazılırsa $1 \leq i \leq j \leq n$ için (3.0.58) dan

$$2r = \left(n^2 - n\right)c + n^2 g(H,H^*) - \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k} h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{*\alpha} \geq n(n-1)c + n^2\widetilde{g}(H,H^*) - \|h\|\|h^*\|, \quad (3.0.59)$$

(3.0.49) ve (3.0.50) ile tanımlanan H ve H^* için (3.0.57) u verir [5].

3.0.3 İstatistiksel Hiperyüzeyler İçin Eşitsizlikler

Önerme 3.0.8 ile benzer şekilde, istatistiksel hiperyüzeyler için aşağıdaki gibi bir eşitsizlik verilir:

Önerme 3.0.9. *M, sabit eğriliği $c \in \mathbb{R}$ olan $(n+1)$ boyutlu $\widetilde{M}(c)$ istatistiksel manifoldunun bir istatistiksel hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$2r \geq n(n-1)c + n^2\|H\|\|H^*\| - \|h\|\|h^*\|, \quad (3.0.60)$$

dir. - Burada r, M nin skalar eğriliğidir [5].

İspat: $\{e_1,...,e_n\}$, M de ortonormal baz ve e_{n+1} M de birim normal vektör olsun. (3.0.41) den,

$$R\left(e_i,e_j,e_i,e_j\right) = c\left[g(e_i,e_i)g\left(e_j,e_j\right) - g\left(e_i,e_j\right)^2\right] + \widetilde{g}\left(h^*(e_i,e_i),h\left(e_j,e_j\right)\right) - \widetilde{g}\left(h\left(e_i,e_j\right),h^*\left(e_j,e_i\right)\right) \quad (3.0.61)$$

dir.

H ve H^* ortalama eğrilik vektör alanları

$$H = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}\right) e_{n+1}, \quad h_{ij} = \widetilde{g}\left(h\left(e_i, e_j\right), e_{n+1}\right)$$

ve

$$H^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^*\right) e_{n+1}, \quad h_{ij}^* = \widetilde{g}\left(h^*\left(e_i, e_j\right), e_{n+1}\right).$$

dir. Tüm $i, j = 1, ..., n$ i çin (3.0.61) den

$$2r = n(n-1)c + n^2 \|H\| \|H^*\| - \sum_{i,j}^{n} h_{ij} h_{ij}^*. \tag{3.0.62}$$

elde edilir.

Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliği (3.0.62) e uygulanırsa,

$$2r \geq n(n-1)c + n^2 \|H\| \|H^*\| - \|h\| \|h^*\|.$$

eşitsizliği elde edilir [5].

4. KENMOTSU İSTATİSTİKSEL MANİFOLDUN İSTATİSTİKSEL ALTMANİFOLDLARI

4.1 Hemen Hemen Kontakt Manifoldlar

Tanım 4.1.1. *$\widetilde{M}$, $(2n+1)-$boyutlu bir dif.bilir manifold ve ϕ, ξ, η da sırasıyla (1,1)$-$tipinde bir tensör alanı, vektör alanı ve 1- form olsun. ϕ, ξ, η ve $\forall X \in \Gamma\left(\widetilde{M}\right)$ için*

(1) $\eta(\xi) = 1$

(2) $\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$

koşulları sağlanırsa (ϕ, ξ, η) üçlüsüne $\widetilde{M}$ üzerinde hemen hemen (h. h.) kontakt yapı ve $\left(\widetilde{M}, \phi, \xi, \eta\right)$ dörtlüsü de h. h. kontakt manifoldu olarak adlandırılır [23].

Teorem 4.1.1. *$\widetilde{M}$, (2n+1) boyutlu manifoldu, (ϕ, ξ, η) h.h. kontakt yapısıyla verilsin. O halde,*

$$\phi\xi = 0$$

$$\eta \circ \phi = 0$$

$$rank\phi = 2n$$

ifadeleri sağlanır [24].

Tanım 4.1.2. *$\widetilde{M}$, (ϕ, ξ, η) h. h. kontak yapısına sahip $(2n+1)-$boyutlu bir h.h. kontak manifold olsun. $U, V \in \Gamma\left(\widetilde{M}\right)$ vektör alanları için*

$$\widetilde{g}(\phi U, \phi V) = \widetilde{g}(U, V) - \eta(U)\eta(V) \tag{4.1.1}$$

eşitliğini veren bir $\widetilde{g}$ Rieman metriği varsa $(\phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ dörtlüsüne h.h. kontakt metrik yapı ve $\widetilde{M}$ manifolduna da h.h. kontakt metrik manifold denir. $V = \xi$ için

$$\eta(U) = \widetilde{g}(V, \xi) \tag{4.1.2}$$

olduğu görülür, [24].

Bir h.h kontakt metrik $(\widetilde{g}, \phi, \xi, \eta)$ yapısı için $\Phi(U, V) = \widetilde{g}(U, \phi V)$ olacak şekildeki Φ ye temel 2$-$form denir, burada $d\eta = \Phi$ dir [19].

Bir h.h. kontakt metrik manifold da $\overline{h}$ $(1,1)-$tensör alanı

$$\overline{h} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\xi}\phi$$

ile tanımlanır. Burada, $\mathscr{L}$ Lie türevini gösterir ve $\overline{h}\xi = 0$ dır [19].

Bir kontakt metrik manifold da h, g ye göre simetriktir, yani

$$g\left(\overline{h}U,V\right) = g\left(U,\overline{h}V\right)$$

dir. Aşağıdaki formüller korunur:

$$\nabla^0_U\xi = -\phi U - \phi\overline{h}U,$$

$$\phi\overline{h} + \overline{h}\phi = 0,$$

$$Ric^0(\xi) = 2n - tr\overline{h}^2,$$

Ayrıca, $\nabla^0_{\xi}\phi = 0$ ve $\nabla^0_{\xi}\xi = 0$ bağıntıları sağlanır [19].

Sonuç 4.1.1. *$\widetilde{M}^{2n+1}$, bir h. h. kontakt metrik manifold olsun. O halde $\forall U,V \in \Gamma\left(\widetilde{M}\right)$ için*

$$\widetilde{g}(\phi U,V) = -\widetilde{g}(U,\phi V) \tag{4.1.3}$$

dir. Bu da ϕ' nin $\widetilde{g}$ ye göre anti-simetrik tensör alanı olduğu görülür [23].

Tanım 4.1.3. *$\overline{N}$ bir Reel dif.bilir manifold olsun. $\overline{N}$ üzerindeki bir tensör alanı J, $\overline{N}$ nin her p noktasında $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p\widetilde{M}$ uzayının bir endomorfizmi ise $\overline{N}$ üzerinde ki J tensör alanı h.h. kompleks yapı olarak isimlendirilir. h.h. J kompleks yapısı ile donatılmış $\overline{N}$ manifolduna h.h. kompleks manifold denir [23].*

Tanım 4.1.4. *$\overline{N}$, h.h.kompleks J yapısına sahip h.h. bir kompleks manifold olsun. $\overline{N}$ üzerindeki Hermitian metriği, $\overline{N}$ deki herhangi U,V vektör alanları için*

$$\overline{g}(JU,JV) = \overline{g}(U,V)$$

ile tanımlı $\overline{g}$ metriğine Hermitian metrik, $\overline{g}$ metrikli bir h.h. bir kompleks manifold, h.h. Hermitian manifold olarak isimlendirilir [23].

Tanım 4.1.5. *$\overline{N}$, h.h. J kompleks yapısı ve $\overline{g}$ Hermitian metriği ile donatılmış bir h.h. Hermitian manifold olsun. $\overline{N}$ üzerindeki Φ temel 2- formu, $\forall U,V \in \Gamma\left(\overline{N}\right)$ için*

$$\Phi(U,V) = \overline{g}(U,JV)$$

olarak tanımlanır [23].

Tanım 4.1.6. *$\widetilde{M}$ bir dif.bilir manifold olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde $(1,1)-$ tipinde bir tensör alanı F olsun. Her $X,Y \in \Gamma\left(\widetilde{M}\right)$ için*

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

ile tanımlı N_F tensör alanına Nijenhuis torsiyon tensörü adı verilir.

$F = J$ alınırsa,

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned}$$

eşitilği yazılır [23, 24].

Tanım 4.1.7. *Bir $\left(\overline{N},J,\overline{g}\right)$ h.h. Hermitian manifoldunda Φ temel 2- form olmak üzere $d\Phi = 0$ ise $(J,\overline{g})$ yapısına h.h.Kaehler yapı denir. $\overline{N}$ kompleks manifoldu Kaehlerian metriği ile birlikte bir Kaehler manifoldu olarak adlandırılır. Bir Hermitian manifoldunun bir Kaehler manifold olması için ancak ve ancak $\overline{\nabla}J = 0$ olmasıdır [23, 24].*

Tanım 4.1.8. *B ve D sırasıyla g_B ve g_D Rieman metrikleri ile donatılmış iki Rieman manifoldu ve f , B de pozitif tanımlı fonksiyon olsun. $\pi : B \times D \to B$ ve $\sigma : B \times D \to D$ projeksiyonları ile $\overline{M} = B \times_f D$ warped çarpım manifoldu verilsin. Bu manifold*

$$\overline{g} = g_B + (f \circ \pi)^2 g_D$$

Riemann metriği ile donatılmış manifolddur, burada f fonksiyonuna warping fonksiyonu denir [25].

4.1.1 Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 4.1.9. *$\widetilde{M}$ $(\phi,\xi,\eta,\widetilde{g})$ yapısı ile verilmiş $(2n+1)-$boyutlu bir h.h. kontak manifold olsun. Eğer $\widetilde{M}$, h.h. kontakt metrik manifoldunda*

$$d\eta = 0, \qquad d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$$

şartları sağlanıyor ise $\widetilde{M}$ manifolduna h.h. Kenmotsu manifoldu denir [11].

Tanım 4.1.10. *$\widetilde{M}$, $(\phi,\xi,\eta,\widetilde{g})$ yapısı ile verilmiş $(2n+1)-$boyutlu bir h.h. kontakt metrik manifold olsun. $\widetilde{M}$, h.h. kontakt metrik manifoldun Kenmotsu manifold olması için $\Longleftrightarrow$*

$$\left(\widetilde{\nabla}_U \phi\right) V = \widetilde{g}(\phi U,V)\,\xi - \eta(V)\,\phi U, \quad \forall U,V \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right) \tag{4.1.4}$$

olmasıdır. Bir $\widetilde{M}$ Kenmotsu manifoldunda $\forall\, U \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için

$$\widetilde{\nabla}_U \xi = U - \eta(U)\xi \tag{4.1.5}$$

eşitliği sağlanır [11].

Bir Kenmotsu manifoldunda $\forall\, U,V \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için

$$R(U,V)\xi = \eta(U)V - \eta(V)U, \tag{4.1.6}$$

$$S_1(U,\xi) = -(n-1)\eta(U), \tag{4.1.7}$$

olup, R eğrilik tensörünü ve S_1 Ricci tensörünü gösterir. (4.1.3) den

$$R(U,\xi)V = \widetilde{g}(U,V)\xi - \eta(V)U, \tag{4.1.8}$$

$$R(U,\xi)\xi = \eta(U)\xi - U, \tag{4.1.9}$$

elde edilir [26].

$S_1(U,V) = \widetilde{g}(RicU,V)$ den

$$S_1(\phi U,\phi V) = \widetilde{g}(Ric\phi U,\phi V),$$

dir, burada Ric, Ricci operatörüdür.

$\widetilde{g}(U,\phi V) = -\widetilde{g}(\phi U,V)$, $\quad Ric\phi = \phi Ric$, (4.1.1) ve (4.1.7) özellikeri kullanılarak

$$S_1(\phi U,\phi V) = S_1(U,V) + (n-1)\eta(U)\eta(V) \tag{4.1.10}$$

bulunur [26].

Ayrıca,

$$\left(\widetilde{\nabla}_U \eta\right)(V) = \widetilde{g}(U,V) - \eta(U)\eta(V). \tag{4.1.11}$$

dir [26].

Tanım 4.1.11. *Bir Kenmotsu manifold $\widetilde{M}$ olsun. $p \in \widetilde{M}$ noktasında $T_p\widetilde{M}$ tanjant uzayında ξ vektör alanına dik bir U birim vektör alanı $\{U,\phi U\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{U,\phi U\}$ düzlemine $T_p\widetilde{M}$ nin $\phi-$kesitseli denir.*

Ayrıca,

$$\mathscr{K}(U,\phi U) = g(R(U,\phi U)\phi U,U)$$

şeklinde tanımlı ifadeye $\widetilde{M}$ nin $\phi-$kesitsel eğriliği adı verilir [15].

4.1.2 Hemen Hemen Kontakt Metrik İstatistiksel Manifoldlar

Bu kısımda bir hemen hemen kontakt metrik manifold üzerinde uygun bir istatistiksel manifold tanımlanır.

Lemma 4.1.1. $\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *bir istatistiksel yapı ve* $(\widetilde{g},\phi,\xi,\eta)$, $\widetilde{M}$ *de bir h.h kontakt yapı olsun.*

Bu durumda ;

$$\widetilde{\nabla}_X\phi-\phi\widetilde{\nabla}^*_XY=\left(\nabla^0_X\phi\right)Y+\widetilde{K}_X\phi Y+\phi\widetilde{K}_XY$$

dır [19].

Tanım 4.1.12. $\left(\widetilde{M},\widetilde{g},\phi,\xi,\eta\right)$ *bir h.h. kontakt metrik manifold ve* $\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *,* $\widetilde{M}$ *üzerinde istatistiksel yapı olsun. Böylece* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi,\eta\right)$ *ye h.h. kontakt metrik istatistiksel manifold denir.* $\forall\, X,\, Y\in\chi\left(\widetilde{M}\right)$ *için,*

$$\widetilde{K}_X\phi Y+\phi\widetilde{K}_XY=0$$

eşitliği ve buna denk olarak

$$\widetilde{\nabla}_X\phi-\phi\widetilde{\nabla}^*_XY=\left(\nabla^0_X\phi\right)Y$$

sağlanır [19].

Uyarı 4.1.1. *Eğer* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi,\eta\right)$ *bir h.h. kontakt metrik istatistiksel manifold ise, bu durumda* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}^*,\widetilde{g},\phi,\xi,\eta\right)$ *da bir h.h. kontakt metrik istatistiksel manifolddur [19].*

Lemma 4.1.2. $\left(\widetilde{M}^{2n+1},\widetilde{g},\widetilde{\nabla},\widetilde{\nabla}^*\phi,\xi,\eta\right)$ *bir h.h. kontakt metrik istatistiksel manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki denklem* $\forall\, X,\, Y,\, Z\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ *için*

$$\widetilde{g}\left(\left(\widetilde{\nabla}_X\phi\right)Y,Z\right)=-\widetilde{g}\left(Y,\left(\widetilde{\nabla}^*_X\phi\right)Z\right)$$

geçerlidir [27].

Lemma 4.1.3. *Bir h.h. kontakt istatistiksel manifold için*

$$\left(\widetilde{\nabla}_X\Phi\right)(Y,Z)=\widetilde{g}\left(\left(\widetilde{\nabla}_X\phi\right)Y,Z\right)-2\widetilde{g}\left(\widetilde{K}_X\phi Y,Z\right),\ \forall X,Y,Z\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$$

ve

$$\left(\widetilde{\nabla}^*_X\Phi\right)(Y,Z)=\widetilde{g}\left(\left(\widetilde{\nabla}^*_X\phi\right)Y,Z\right)+2\widetilde{g}\left(\widetilde{K}_X\phi Y,Z\right),\ \forall X,Y,Z\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$$

dir [27].

4.2 Kenmotsu İstatistiksel Manifoldlar

$\left(\overline{N},\overline{g},J\right)$ bir Kaehler manifold ise $\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\nabla^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ dörtlüsü holomorfik istatistiksel manifold olarak adlandırılır eğer, $\overline{N}$ de $\left(\overline{\nabla},\overline{g}\right)$ istatistiksel yapısı üzerinde

$$\overline{K}(U,JV)+J\overline{K}(U,V)=0,\ \forall U,V\in\Gamma\left(T\overline{N}\right) \tag{4.2.1}$$

eşitliği sağlanırsa, $\overline{N}$ üzerinde $\left(\overline{\nabla},\overline{g},J\right)$ ye bir holomorfik istatistiksel yapı denir [6].

Bir holomorfik istatistiksel $\left(\overline{N},\overline{\nabla},\overline{g},J\right)$ manifoldunun sabit holomorfik kesit eğriliği $\overline{c}\in\mathbb{R}$ ise $\forall U,V,W\in\Gamma\left(T\overline{N}\right)$ için

$$\begin{aligned}\overline{S}(U,V)W=\frac{\overline{c}}{4}\{&\overline{g}(V,W)U-\overline{g}(U,W)V\\&+\overline{g}(JV,W)JU-\overline{g}(JU,W)JV-2\overline{g}(JU,V)JW\}\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

dir [6].

Önerme 4.2.1. $\left(\overline{N},\overline{g},J\right)$ *bir h.h. Hermitian manifold olsun.* $\widetilde{M}=\overline{N}\times\mathbb{R}$, $\widetilde{g}=e^{2t}\overline{g}+(dt)^2$, $\xi=\frac{\partial}{\partial t}\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$, *olmak üzere herhangi bir* $U\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ *ve* $\phi\xi=0$ *için* $\phi U=JU$ *ile* $\phi\in\Gamma\left(T\widetilde{M}^{(1,1)}\right)$ *tanımlansın. Böylece,*

(1) $(\widetilde{g},\phi,\xi)$ üçlüsü $\widetilde{M}$ de h.h. kontakt metrik yapıdır.

(2) $(\overline{g},J)$ ikilisi $\overline{N}$ de bir Kaehler yapıdır gerek ve yeter şart $(\widetilde{g},\phi,\xi)$ üçlüsü $\widetilde{M}$ de bir Kenmotsu yapıdır [6].

Örnek 4.2.1. $H=H^{2n+1}\subset\mathbb{R}^{2n+1}$, $\widetilde{g}\in\Gamma\left(TH^{(0,2)}\right)$, $\xi\in\Gamma(TH)$ *ve* $\phi\in\Gamma\left(TH^{(1,1)}\right)$

$$H^{2n+1}=\left\{\left(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n,z\right)\in\mathbb{R}^{2n+1}\mid z\succ 0\right\},$$

$$\widetilde{g}=z^{-2}\left\{\left(dx^1\right)^2+...+(dx^n)^2+\left(dy^1\right)^2+...+(dy^n)^2+(dz)^2\right\},$$

$$\xi=-z\frac{\partial}{\partial z},\ \phi\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\ \phi\frac{\partial}{\partial y^\alpha}=-\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\ \phi\frac{\partial}{\partial z}=0.$$

olarak tanımlanırsa $\left(H^{2n+1},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *Önerme4.2.1* (1.) *şıkkından dolayı* $\left(\overline{N},\overline{g},J\right)=\mathbb{C}^n$ *kompleks Öklid uzayı ve* $z=e^{+t}\in\mathbb{R}^+$ *kümesi olarak inşa edilen bir Kenmotsu manifoldudur [6].*

Uyarı 4.2.1.

(1) Herhangi bir kenmotsu manifoldu Önerme 4.2.1 de olduğu gibi yerel olarak elde edilir.

(2) Bir $\left(\widetilde{M},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ Kenmotsu manifoldunun sabit ϕ- kesit eğriliği c dir $\Longleftrightarrow$ $\forall X,\ Y,\ Z\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$

$$\begin{aligned}&\widetilde{R^{g}}(X,Y)Z\\&\quad=\frac{c-3}{4}\{\widetilde{g}(Y,Z)X-\widetilde{g}(X,Z)Y\}\\&\qquad+\frac{c+1}{4}\{\widetilde{g}(\phi Y,Z)\phi X-\widetilde{g}(\phi X,Z)\phi Y-2\widetilde{g}(\phi X,Y)\phi Z\\&\qquad-\widetilde{g}(Y,\xi)\widetilde{g}(Z,\xi)X+\widetilde{g}(X,\xi)\widetilde{g}(Z,\xi)Y\\&\qquad+\widetilde{g}(Y,\xi)\widetilde{g}(Z,X)\xi-\widetilde{g}(X,\xi)\widetilde{g}(Z,Y)\xi\}\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

dir.

(3) Önerme 4.2.1 de olduğu gibi bir $\left(\widetilde{M}=\overline{N}\times\mathbb{R},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ Kenmotsu manifoldunun sabit ϕ-kesit eğriliği c ile verilsin. Bu durumda $c=-1$ yani

$$\widetilde{R}\widetilde{g}(X,Y)Z=-\{\widetilde{g}(Y,Z)X-\widetilde{g}(X,Z)Y\},\ \forall X,Y,Z\in\Gamma\left(T\overline{N}\right)$$

dir, $\left(\overline{N},\overline{g},J\right)$ h.h. Hermitian manifoldunun sabit holomorfik eğriliği 0 dır [6].

Tanım 4.2.1. *Bir $\left(\widetilde{M},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ Kenmotsu manifoldu ve $\left(\widetilde{\nabla}=\widetilde{\nabla}^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\widetilde{g}\right)$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir istatistiksel yapı olsun. $\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ dörtlüsü $\widetilde{M}$ de bir Kenmotsu istatistiksel yapı olarak adlandırılır eğer, $\forall X,Y\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için*

$$\widetilde{K}(X,\phi Y)+\phi\widetilde{K}(X,Y)=0\tag{4.2.4}$$

sağlanırsa. Kenmotsu istatistiksel yapısı ile donatılmış bir manifold, Kenmotsu istatistiksel manifold olarak adlandırılır. $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ bir Kenmotsu istatistiksel manifold ise $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}^{*},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ da Kenmotsu istatistiksel manifold olur. [6]

Teorem 4.2.1. *$\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}=\widetilde{\nabla}^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\phi,\xi\right)$ istatistiksel manifold ve $(\widetilde{g},\phi,\xi)$, $\widetilde{M}$ de bir h.h. kontakt metrik yapı olsun. $\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$, $\widetilde{M}$ de bir Kenmotsu istatistiksel metrik yapıdır $\Longleftrightarrow$ $\forall X,Y\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için*

$$\widetilde{\nabla}_X(\phi Y)-\phi\widetilde{\nabla}^{*}_X Y=-\eta(Y)\phi X+\widetilde{g}(\phi X,Y)\xi,\tag{4.2.5}$$

$$\widetilde{\nabla}_X\xi=X-\{\eta(X)-\mu(X)\}\xi\tag{4.2.6}$$

dir, burada $\mu(X)=-\eta\left(\widetilde{\nabla}^{*}_X\xi\right)=\eta\left(\widetilde{\nabla}_X\xi\right)=\eta\left(\widetilde{K}(\xi,\xi)\right)\eta(X)$ dır [6].

İspat: (adım 1) Basit hesaplama ile, $\forall X,Y \in \Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X(\phi Y) - \phi\widetilde{\nabla}^*_X Y = \left(\nabla^{\widetilde{g}}_X \phi\right)Y + \widetilde{K}(X,\phi Y) + \phi\widetilde{K}(X,Y) \tag{4.2.7}$$

dir. Bu denklem (4.2.5) ile eşdeğerdir. Bu eşitlikten

$$-\left(\nabla^{\widetilde{g}}_X \phi\right)Y - \eta(Y)\phi X + \widetilde{g}(\phi X,Y)\xi = \widetilde{K}(X,\phi Y) + \phi\widetilde{K}(X,Y). \tag{4.2.8}$$

olur. Buna göre, eğer $\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$, $\widetilde{M}$ de bir Kenmotsu istatistiksel yapı ise (4.2.5), (4.1.4) ve (4.2.4) sağlanır.

Aynı zamanda $\left(\widetilde{\nabla}^*,\widetilde{g},\phi,\xi\right)$, $\widetilde{M}$ de bir Kenmotsu istatistiksel yapı olduğundan aşağıdaki formül elde edilir,

$$\widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y) - \phi\widetilde{\nabla}_X Y = -\eta(Y)\phi X + \widetilde{g}(\phi X,Y)\xi, \tag{4.2.9}$$

$\left(\widetilde{\nabla}^*\right)^* = \widetilde{\nabla}$ olduğundan (4.2.9) da Y yerine ξ alınırsa,

$$\phi\widetilde{\nabla}_X\xi = \phi X,$$

elde edilir, bu (4.2.6) ve (4.1.2) ile eşdeğerdir.

(adım 2) Tersine, (4.2.5) de Y yerine ϕY alınırsa

$$\phi\left\{\widetilde{\nabla}_X\left(\phi^2 Y\right) - \phi\widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y)\right\} = 0,$$

elde edilir. (4.2.6) de varsayılırsa,

$$\begin{aligned}
0 &= \phi\widetilde{\nabla}_X\left(\phi^2 Y\right) - \phi^2\widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y)\\
&= \phi\widetilde{\nabla}_X\{-Y+\eta(Y)\xi\} + \widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y) - \eta\left(\widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y)\right)\xi\\
&= -\phi\widetilde{\nabla}_X Y + \eta(Y)\phi\widetilde{\nabla}_X\xi + \widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y) + \widetilde{g}\left(\phi Y,\widetilde{\nabla}_X\xi\right)\xi\\
&= -\phi\widetilde{\nabla}_X Y + \eta(Y)\phi X + \widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y) + \widetilde{g}(\phi Y,X)\xi\\
&= -\phi\widetilde{\nabla}_X Y + \eta(Y)\phi X + \widetilde{\nabla}^*_X(\phi Y) - \widetilde{g}(\phi X,Y)\xi,
\end{aligned}$$

(4.2.9) elde edilir.

(adım 3) (4.2.5) ve (4.2.9) denklemlerinin (4.1.4) ve (4.2.4) ile uyumlu olduğu kanıtlanacaktır. Adım 1 de olduğu gibi formül (4.2.9), (4.2.8) ile (4.1.4) ve (4.2.4) den

$$-\left(\nabla^{\widetilde{g}}_X \phi\right)Y - \eta(Y)\phi X + \widetilde{g}(\phi X,Y)\xi = -\widetilde{K}(X,\phi Y) - \phi\widetilde{K}(X,Y),$$

bulunur [6].

Önerme 4.2.2. $\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\nabla^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ *bir holomorfik istatistiksel manifold olsun ve* $\left(\widetilde{M}=\overline{N}\times\mathbb{R},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *Önerme 4.2.1 de olduğu gibi bir Kenmotsu manifold olsun. Herhangi bir* $v\in C^{\infty}\left(\widetilde{M}\right)$ *için* $\overline{K}\in\Gamma\left(T\overline{N}^{(1,2)}\right)$ *tanımlandığında*

$$\widetilde{K}(U,V)=\overline{K}(U,V),\quad \widetilde{K}(U,\xi)=\widetilde{K}(\xi,U)=0,\quad \widetilde{K}(\xi,\xi)=v\xi,\ U,V\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right) \tag{4.2.10}$$

dır. Bu durumda $\left(\widetilde{\nabla}=\nabla^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$, $\widetilde{M}$ *üzerinde bir Kenmotsu istatistiksel yapıdır [6].*

Burada önerme 4.2.1 ve önerme 4.2.2 kullanılarak Kenmotsu istatistiksel manifolduna bir örnek aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Örnek 4.2.2. $\left(\overline{N}^2,\overline{\nabla}=\nabla^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ *gibi bir holomorfik istatistiksel manifold göz önüne alalım. Burada,*

$$\overline{N}^2=\left\{{}^t(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\succ 0\right\},\quad \overline{g}=x\left[(dx)^2+(dy)^2\right],$$

$$J\partial_1=\partial_2,\ J\partial_2=-\partial_1,\ \partial_i=\frac{\partial}{\partial_{x^i}},\ i=1,2\ \text{için},$$

$$\overline{K}(\partial_1,\partial_1)=-\lambda\partial_1,\ \overline{K}(\partial_1,\partial_2)=\overline{K}(\partial_2,\partial_1)=\lambda\partial_2,\ \overline{K}(\partial_2,\partial_2)=\lambda\partial_1,$$

$\overline{N}^2$ deki $\overline{\nabla}$ afin koneksiyonları şu şekilde tanımlanır,

$$\overline{\nabla}_{\partial_1}\partial_1=\left(\frac{1}{2}(x)^{-1}-\lambda\right)\partial_1,$$

$$\overline{\nabla}_{\partial_1}\partial_2=\overline{\nabla}_{\partial_2}\partial_1=\left(\frac{1}{2}(x)^{-1}+\lambda\right)\partial_2,$$

$$\overline{\nabla}_{\partial_2}\partial_2=-\left(\frac{1}{2}(x)^{-1}-\lambda\right)\partial_1.$$

Burada $\widetilde{M}^3=\overline{N}\times\mathbb{R}$, ve $\left(\widetilde{M}^3,\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ önerme 4.2.1 deki gibi bir Kenmotsu manifolddur. Böylece,

$$\phi(x,y,\alpha)=(-y,x,0),\ \xi=\frac{\partial}{\partial_\alpha}=\partial_\alpha$$

$$\phi\partial_1=-\partial_2,\ \phi\partial_2=\partial_1,\ \phi\xi=0,$$

$$\widetilde{g}=e^{2\alpha}\left[(dx)^2+(dy)^2\right]+(d\alpha)^2,$$

dir. Burada, (x,y,α), $\widetilde{M}^3$ ün koordinat fonksiyonlarıdır. $\beta=1$, için $\widetilde{K}\in\Gamma\left(T\widetilde{M}^3\right)$ $(1,2)$- tensör alanı olarak tanımlanırsa,

$$\widetilde{K}(\partial_1,\partial_1)=-\lambda\partial_1,\ \widetilde{K}(\partial_1,\partial_2)=\widetilde{K}(\partial_2,\partial_1)=\lambda\partial_2,\ \widetilde{K}(\partial_\alpha,\partial_\alpha)=\partial_\alpha,$$

$$\widetilde{K}(\partial_2,\partial_2)=\lambda\partial_1,\quad \widetilde{K}(\partial_i,\partial_\alpha)=\widetilde{K}(\partial_\alpha,\partial_i)=0\quad i=1,2$$

olur. Böylece, önerme 4.2.2 den $\left(\widetilde{\nabla}=\nabla^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ nin, $\widetilde{M}^3$ üzerinde bir Kenmotsu istatistiksel yapı olduğu sonucuna varılır [12,28].

Teorem 4.2.2. *Bir Kaehler manifold* $(\overline{N},\overline{g},J)$ *olsun,* $\left(\widetilde{M}=\overline{N}\times\mathbb{R},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *Önerme 4.2.1 de olduğu gibi bir Kenmotsu manifold ve* $\left(\widetilde{\nabla}=\nabla^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},g\right)$, $\widetilde{M}$ *üzerinde bir istatistiksel yapı olsun.* $\Lambda\in\Gamma\left(T\widetilde{M}^{(0,2)}\otimes T\overline{N}\right)$, $\lambda\in\Gamma\left(T\widetilde{M}^{(0,2)}\right)$ *ve* $\overline{K}\in\Gamma\left(T\overline{N}^{(1,2)}\right)$

$$\widetilde{K}(X,Y)=\Lambda(X,Y)+\lambda(X,Y)\xi,\quad \overline{K}(U,V)=\Lambda(U,V),\ X,Y\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)\ ve\ U,V\in\Gamma\left(T\overline{N}\right) \tag{4.2.11}$$

tanımlandığında, aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

(1) $\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$, $\widetilde{M}$ de bir Kenmotsu istatistiksel yapıdır.

(2) $\left(\overline{\nabla}=\nabla^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ $\overline{N}$ üzerinde bir holomorfik istatistiksel yapıdır ve $\Lambda(X,\xi)=0,\ \lambda(X,V)=0$ formülleri $X\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ ve $V\in\Gamma\left(T\overline{N}\right)$ için sağlar.

Bir önceki önerme 4.2.2 de $\widetilde{K}$ nın herhangi bir $U,\ V\in\Gamma\left(T\overline{N}\right)$ için $\widetilde{K}(U,V)=\overline{K}(U,V)$ yi sağlayan bir holomorfik istatistiksel yapıdan Kenmotsu istatistiksel yapısı oluşturmak için tek seçenek olduğu açıktır [6].

İspat: (4.2.11) den $X,Y\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için,

$$\widetilde{K}(X,\phi Y)+\phi\widetilde{K}(X,Y)=\Lambda(X,\phi Y)+\phi\Lambda(X,Y)+\lambda(X,\phi Y)\xi$$

yazılır. $\widetilde{K}(X,\phi Y)+\phi\widetilde{K}(X,Y)=0 \iff$

$$\Lambda(X,\phi Y)+\phi\Lambda(X,Y)=0,\quad \lambda(X,\phi Y)=0 \tag{4.2.12}$$

ise geçerlidir.Bu da ispatı verir [6].

Önerme 4.2.3. $\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\nabla^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ *bir holomorfik istatistiksel manifold ve* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}=\nabla^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *bir önceki teorem 4.2.2 de olduğu gibi bir Kenmotsu istatistiksel manifold olsun. Böylece herhangi* $U,\ V,\ W\in\Gamma\left(T\overline{N}\right)$ *için aşağıdaki formüller geçerlidir:*

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(U,V)W&=\overline{S}(U,V)W-g(V,W)U+g(U,W)V, \qquad (4.2.13)\\ \widetilde{S}(U,V)\xi&=0,\ \widetilde{S}(U,\xi)\xi=-U,\end{aligned}$$

Burada, $\widetilde{S}$, $\left(\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ *nin ve* $\overline{S}$, $\left(\overline{\nabla},\overline{g}\right)$ *için istatistiksel eğrilik tensör alanını gösterir.*

Ayrıca, $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ Kenmotsu istatistiksel manifoldunun sabit ϕ- kesit eğriliği c ise $U,V,W\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right)$ için

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S}(U,V)W \\
&= \frac{c-3}{4}\{\widetilde{g}(V,W)U-\widetilde{g}(U,W)V\} \\
&\quad+\frac{c+1}{4}\{\widetilde{g}(\phi V,W)\phi U-\widetilde{g}(\phi U,W)\phi V-2\widetilde{g}(\phi U,V)\phi W \\
&\quad-\widetilde{g}(V,\xi)\widetilde{g}(W,\xi)U+\widetilde{g}(U,\xi)\widetilde{g}(W,\xi)V \\
&\quad+\widetilde{g}(V,\xi)\widetilde{g}(W,U)\xi-\widetilde{g}(U,\xi)\widetilde{g}(W,V)\xi\}
\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

dir. Bu durumda $c=-1$, ve $\left(\overline{N},\overline{\nabla},\overline{g},J\right)$ nin sabit holomorfik kesit eğriliği 0 dır [6].

Jakobi operatörün tanımının istatistiksel versiyonunu aşağıdaki şekilde verilir:

Tanım 4.2.2. *$\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{g}\right)$ bir istatistiksel manifold olsun. Herhangi bir E_1 vektör alanı ve $p\in\widetilde{M}$ için Jakobi operatörü $\widetilde{R}_{E_1}$*

$$\left(\widetilde{R}_{E_1}F_1\right)(p)=\left(\widetilde{R}(F_1,E_1)E_1\right)(p),\quad F_1\in\Gamma\left(T\widetilde{M}\right),\tag{4.2.15}$$

olarak tanımlanır [12].

Önerme 4.2.4. *$\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\nabla^{g}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ ve $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}=\nabla^{\widetilde{g}},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ yukarıdaki teorem 4.2.2 de olduğu gibi sırasıyla holomorfik istatistiksel manifold ve Kenmotsu istatistiksel manifold olsun. O halde Jakobi operatörünün yapısı $\widetilde{\nabla}$ ya göre paraleldir.*

Aynı şekilde Jakobi operatörünün yapısı $\widetilde{\nabla}^{*}$a göre de paraleldir [12].

Tanım 4.2.3. *İstatistiksel bir manifoldun Ricci eğriliği sıfır olduğunda, Ricci-flat istatistiksel manifold olarak isimlendirirlir [12].*

Önerme 4.2.5. *$\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\nabla^{g}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ ve $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}=\nabla^{g}+\widetilde{K},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ yukarıdaki teorem 4.2.2 de olduğu gibi sırasıyla holomorfik istatistiksel manifold ve Kenmotsu istatistiksel manifold olsun. Eğer $\overline{N}$ nin sabit $\phi-$kesit eğriliği c ve boy$\left(\overline{N}\right)=2n$ ise, o zaman Ricci tensörü $\overline{S}_1$, herhangi bir $n\in\mathbb{R}$ için*

$$\overline{S}_1=e^{2\alpha}\left(\frac{(c+1)(n+1)}{2}\right)\overline{g}$$

ile verilir. Ayrıca, $c=-1$ ise $\overline{N}$, Ricci-flat istatistiksel manifolddur [12].

İspat: $\{\overline{e}_1,...,\overline{e}_{2n}\}$, $T_p\overline{N}$, ($p \in \overline{N}$), de lokal ortonormal baz olsun.

$$\begin{aligned}
\overline{S}_1 &= \sum_{i=1}^{2n} \overline{g}\left(\overline{R}\left(\overline{e}_i, E_2\right) E_{2,}\overline{e}_i\right) \\
&= e^{2\alpha}\left(\frac{c+1}{4}\right)\sum_{i=1}^{2n}\{\overline{g}\left(E_2,E_2\right)\overline{g}\left(\overline{e}_i,\overline{e}_i\right)-\overline{g}\left(\overline{e}_i,E_2\right)\overline{g}\left(E_2,\overline{e}_i\right) \\
&+\overline{g}\left(JE_2,E_2\right)\overline{g}\left(J\overline{e}_i,\overline{e}_i\right)-3\overline{g}\left(J\overline{e}_i,E_2\right)\overline{g}\left(JE_2,\overline{e}_i\right)\} \\
&= e^{2\alpha}\left(\frac{c+1}{4}\right)\left\{(2n-1)\|E_2\|^2+3\overline{g}\left(JE_2,JE_2\right)\right\} \\
&= e^{2\alpha}\left(\frac{c+1}{4}\right)\left\{(2n+2)\|E_2\|^2\right\} \\
&= e^{2\alpha}\left(\frac{(c+1)(n+1)}{2}\right)\|E_2\|^2,
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $\overline{R}$, $\left(\overline{\nabla},\overline{g}\right)$ nın istatistiksel eğrilik tensör alanını gösterir, $n \in \mathbb{R}$ ve $E_2 \in \Gamma\left(T\overline{N}\right)$. $c = -1$ alınırsa $\overline{S}_1 = 0$, $\overline{N}$ nın Ricci eğriliğinin sıfır olduğunu ve dolayısıyla $\overline{N}$ nin Ricci-flat istatistiksel manifold olduğunu ima eder [12].

Önerme 4.2.6. $\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\nabla^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ *ve* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}=\nabla^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *önerme 4.2.2 de olduğu gibi sırasıyla holomorfik istatistiksel manifold ve Kenmotsu istatistiksel manifold olsun.* $\overline{K}(U_2,V_2)=0$ *ve* $\widetilde{K}(U_1,V_1)=v\widetilde{g}(U_1,\xi)\widetilde{g}(V_1,\xi)\xi$ *ise herhangi* $U_2,V_2 \in \Gamma\left(T\overline{N}\right)$, $v \in C^\infty\left(\widetilde{M}\right)$ *ve* $U_1,V_1 \in \Gamma\left(T\overline{N}\right)$ *için aşağıdaki denklemler sağlanır:*

(1) $\widetilde{R}(U_1,V_1)\xi=\widetilde{g}(V_1,\xi)U_1-\widetilde{g}(U_1,\xi)V_1.$

(2) $\widetilde{R}(\xi,U_1)V_1=\widetilde{g}(U_1,V_1)\xi-\widetilde{g}(\xi,V_1)U_1.$

(3) $\widetilde{R}(\phi U_1,\xi)V_1=\widetilde{g}(\xi,V_1)\phi U_1-\widetilde{g}(\phi U_1,V_1)\xi.$

(4) $\widetilde{R}(U_1,\phi V_1)\xi+\widetilde{R}(\xi,U_1)\phi V_1=-\widetilde{R}(\phi V_1,\xi)U_1.$

(5) ξ yi içeren bir düzlem kesiti için kesit eğriliği $\widetilde{\mathscr{K}}$, $\widetilde{M}$ nin her noktasında

$$\widetilde{\mathscr{K}}(U_1\wedge\xi)=\widetilde{g}\left(\widetilde{R}(U_1,\xi)\xi,U_1\right)=\widetilde{g}(U_1,U_1)-\widetilde{g}(U_1,\xi)^2.$$

dir [12].

Önerme 4.2.7. $\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\nabla^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ *ve* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}=\nabla^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *sırasıyla Önerme 4.2.6 da olduğu gibi sırasıyla bir holomorfik istatistiksel manifold ve Kenmotsu istatistiksel manifold olsun.* $\widetilde{M}$ *nin sabit* ϕ*-kesit eğriliği c ve boy*$\left(\widetilde{M}\right)=2n+1$, *olmak üzere* $\widetilde{M}$ *nin Ricci tensörü* $\widetilde{S}_1$ *aşağıdaki özeliklere sahiptir:*

(1) $\widetilde{S}_1\,(U_1,V_1) = t_1\widetilde{g}(U_1,V_1) + t_2\widetilde{g}(U_1,\xi)\,\widetilde{g}(V_1,\xi)$, burada

$$t_1 = \frac{c\,(n+1) - 3n + 1}{2}, \quad \text{ve} \quad t_2 = \frac{-\,(c+1)\,(n+1)}{2}$$

Dahası, $\widetilde{M}$ bir Ricci-flat istatistiksel manifold değildir.

(2) $\widetilde{S}_1\,(U_1,\xi) = -2n\widetilde{g}(U_1,\xi)$

(3) $\widetilde{S}_1\,(\phi U_1,\phi V_1) = \widetilde{S}_1\,(U_1,V_1) + 2n\widetilde{g}(U_1,\xi)\,\widetilde{g}(V_1,\xi)$

[12].

Önerme 4.2.8. $\left(\widetilde{M}\,(c)\,,\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *Kenmotsu istatistiksel manfoldunun sabit ϕ-kesit eğriliği c ve $(M,\nabla,g)\,,\widetilde{M}\,(c)$ de bir istatistiksel altmanifold olsun, böylece ξ, M ve $\phi\,(TM) \subset TM$ ye teğet olur. Varsayalım ki*

(1) $c = -1$;

(2) $h\,(U_1,V_1) = g\,(U_1,V_1)\,H$ ve $h^*\,(U_1,V_1) = g\,(U_1,V_1)\,H^*$, $U_1,V_1 \in \Gamma\,(TM)$.

dir. O halde M istatistiksel manifoldun sabit eğriliği $g\,(H,H^*) - 1$ olduğunda $g\,(H,H^*)$ sabittir [12].

4.2.1 Kenmotsu İstatistiksel Manifoldun İstatistiksel Altmanifoldları İçin Chen-Ricci Eşitsizliği

Teorem 4.2.3. $\left(\widetilde{M}\,(c)\,,\widetilde{\nabla},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *bir $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu istatistiksel manifoldun sabit ϕ-kesit eğriliği c ve (M,∇,g), $\widetilde{M}\,(c)$ nin $(k+1)$- boyutlu istatistiksel altmanifoldu olsun. O halde*

(1) $\forall E_1 \in T_pM$, $p \in M$ birim vektörü için,

$$\begin{aligned} S_1^{\nabla,\nabla^*} \geq\ & 2S_1^0\,(E_1) - \left\{ \frac{3\,(c+1)}{4}\,\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1 - g^2\,(E_1,\xi)\right) - 4\right] \right\} \\ & - \frac{(k+1)^2}{8}\left[\|H\|^2 + \|H^*\|^2\right], \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

dir, burada S_1^0 L-C. koneksiyonuna göre Ricci eğriliğini gösterir.

(2) Dahası, (4.2.16) eşitsizliğinde eşitlik geçerlidir $\Longleftrightarrow$ tüm $F_1 \in T_pM$ 'e ortogonal E_1 için

$$2h(E_1,E_1) = (k+1)H(p),$$

$$2h^*(E_1,E_1) = (k+1)H^*(p),$$

ve

$$h(E_1,F_1) = 0,$$

$$h^*(E_1,F_1) = 0,$$

dir. Burada herhangi bir $\mathrm{E}_1 \in \Gamma(TM)$ sırasıyla teğet ve normal $\mathscr{P}E_1$ ve CE_1 parçalarına ayrılırsa $\phi E_1 = \mathscr{P}E_1 + CE_1$ dir. $\mathscr{P}$ nin kare normu $\|\mathscr{P}\|^2 = \sum_{i,j=1}^{k+1} g^2\left(\mathscr{P}e_i, e_j\right)$ ile tanımlanır [12].

İspat: $\{e_1,...,e_{k+1}\}$, T_pM nin ortonormal bazı olsun, öyle ki $e_1 = E_1$, $\|E_1\| = 1$ ve $\{e_{k+2},...,e_{2n+1}\}$ de $T_pM^\perp$ deki ortonormal çatı alanı olarak ele alındığında (3.0.19), (3.0.22), (3.0.25), (3.0.26) formüllerinden,

$$\begin{aligned}
2\widetilde{S}(e_1,e_i,e_1,e_i) &= 2S(e_1,e_i,e_1,e_i) - g(h(e_1,e_1),h^*(e_i,e_i)) \\
&\quad - g(h^*(e_1,e_1),h(e_i,e_i)) + 2g(h(e_1,e_i),h^*(e_1,e_i)) \\
&= 2S(e_1,e_i,e_1,e_i) - \left\{4g\left(h^0(e_1,e_1),h^0(e_i,e_i)\right)\right. \\
&\quad - g(h(e_1,e_1),h(e_i,e_i)) - g(h^*(e_1,e_1),h^*(e_i,e_i)) \\
&\quad - 4g\left(h^0(e_1,e_i),h^0(e_1,e_i)\right) + g(h(e_1,e_i),h(e_1,e_i)) \\
&\quad \left. + g(h^*(e_1,e_i),h^*(e_1,e_i))\right\} \\
&= 2S(e_1,e_i,e_1,e_i) - 4\sum_{r=k+1}^{n}\left(h_{11}^{0r}h_{ii}^{0r} - \left(h_{1i}^{0r}\right)^2\right) \\
&\quad + \sum_{r=k+1}^{n}\left(h_{11}^{r}h_{ii}^{r} - (h_{1i}^{r})^2\right) + \sum_{r=k+1}^{n}\left(h_{11}^{*r}h_{ii}^{*r} - (h_{1i}^{*r})^2\right),
\end{aligned}$$

türetilir. Buradan,

$$\widetilde{S}(E_1,F_1,G_1,H_1) = \widetilde{g}\left(\widetilde{S}(E_1,F_1)H_1,G_1\right).$$

$2 \leq i \leq k+1$ ve (4.2.3) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&2\left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1-g^2(E_1,\xi)\right) - 4\right]\right\} \\
&= 2S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) - 4\sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{0r}h_{ii}^{0r} - \left(h_{1i}^{0r}\right)^2\right) \\
&+ \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{r}h_{ii}^{r} - (h_{1i}^{r})^2\right) + \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{*r}h_{ii}^{*r} - (h_{1i}^{*r})^2\right),
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Burada $S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1)$, M nin ∇ ve ∇^* a göre p noktasındaki Ricci eğriliğini gösterir. Ayrıca,

$$2S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) - 2\left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1-g^2(E_1,\xi)\right)-4\right]\right\} \tag{4.2.17}$$
$$= 4\sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{0r}h_{ii}^{0r} - (h_{1i}^{0r})^2\right) - \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{r}h_{ii}^{r} - (h_{1i}^{r})^2\right)$$
$$- \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{*r}h_{ii}^{*r} - (h_{1i}^{*r})^2\right)$$

türetilir. $\widetilde{\nabla}^{\widetilde{g}}$ ya göre Gauss denklemi ile

$$S_1^0(E_1) - \left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1-g^2(E_1,\xi)\right)-4\right]\right\}$$
$$= \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{0r}h_{ii}^{0r} - \left(h_{1i}^{0r}\right)^2\right),$$

elde edilir.

(4.2.17) eşitliği

$$2S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) - 2\left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1-g^2(E_1,\xi)\right)-4\right]\right\}$$
$$= 4S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) - \left\{3(c+1)\|\mathscr{P}E_1\|^2 + k\left[(c+1)\left(1-g^2(E_1,\xi)\right)-4\right]\right\}$$
$$- \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{r}h_{ii}^{r} - (h_{1i}^{r})^2\right) - \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{*r}h_{ii}^{*r} - (h_{1i}^{*r})^2\right)$$

olur.

Önceki ifade sadeleştirildiğinde,

$$-S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) - \left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1-g^2(E_1,\xi)\right)-4\right]\right\} \tag{4.2.18}$$
$$+ 2S_1^0(E_1)$$
$$= \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{r}h_{ii}^{r} - (h_{1i}^{r})^2\right) + \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}\left(h_{11}^{*r}h_{ii}^{*r} - (h_{1i}^{*r})^2\right)$$
$$\leq \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}h_{11}^{r}h_{ii}^{r} + \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}h_{11}^{*r}h_{ii}^{*r}$$

elde edilir.

Şimdi kuadratik formu şu şekilde tanımlanır: $\theta_r, \theta r^* : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$

$$\theta_r\left(h_{11}^r, h_{22}^r, ..., h_{kk}^r\right) = \sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}h_{11}^{r}h_{ii}^{r},$$

$$\theta_r^*\left(h_{11}^{*r},h_{22}^{*r},...,h_{kk}^{*r}\right)=\sum_{r=k+2}^{2n+1}\sum_{i=2}^{k+1}h_{11}^{*r}h_{ii}^{*r}.$$

Kısıtlı ekstremum problemini $\max\theta_r$ ye tabi tutulursa

$$Q:\sum_{i=1}^{k+1}h_{ii}^r=a^r,$$

dir. Burada a^r bir reel sabittir. θ_r fonksiyonunun gradyan vektör alanı şu şekilde verilir:

$$\operatorname{grad}\theta_r=\left(\sum_{i=2}^{k+1}h_{ii}^r,h_{11}^r,...,h_{11}^r\right).$$

Söz konusu problemin optimal çözümü için $p=\left(h_{11}^r,h_{22}^r,...,h_{kk}^r\right)$ olmak üzere gradθ_r vektörü p noktasında Q ya normaldir. Buradan

$$h_{11}^r=\sum_{i=2}^{k+1}h_{ii}^r=\frac{a^r}{2}.$$

dir. $x\in Q$ için $\pi:T_xQ\times T_xQ\to\mathbb{R}$ bilinear form şeklindedir.

$$\pi\left(E_1,F_1\right)=Hess_{\theta_r}\left(E_1,F_1\right)+\left\langle h'\left(E_1,F_1\right),\left(\operatorname{grad}\theta_r\right)(x)\right\rangle,$$

Burada h', $\mathbb{R}^{k+1}$ deki Q nun ikinci temel formunu belirtir ve $\langle .,.\rangle$ da $\mathbb{R}^{k+1}$ üzerindeki standart iç çarpımı belirtir. θ_r nin Hessian matrisi şu şekilde verilir

$$Hess_{\theta_r}=\begin{pmatrix}0&1&...&1\\1&0&...&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&...&0\end{pmatrix}.$$

$E_2+...+E_{k+1}=-E_1$ bağıntısını karşılayan bir $E_1\in T_xQ$ vektörü ele alındığında $\mathbb{R}^{k+1}$ de $h'=0$ olarak,

$$\begin{aligned}\pi\left(E_1,E_1\right)=Hess_{\theta_r}\left(E_1,E_1\right)&=2E_1\left(E_2+...+E_{k+1}\right)\\&=\left(E_1+E_2+...+E_{k+1}\right)^2\\&\quad-\left(E_1\right)^2-\left(E_2+...+E_{k+1}\right)^2\\&=-2\left(E_1\right)^2\\&\leq0\end{aligned}$$

elde edilir.

Bununla birlikte, p noktası tek optimal çözümdür, yani evrensel maksimum problem noktasıdır. Böylece

$$\theta_r \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=2}^{k+1} h_{ii}^r\right)^2 = \left(\frac{(k+1)^2}{4}\right)(H^r)^2 \tag{4.2.19}$$

elde edilir.

Daha sonra,

$$Q^* : \sum_{i=1}^{k+1} h_{ii}^{*r} = a^{*r},$$

tabi olan kısıtlı ekstremum prolemi max θ_r^* ele alındığında, burada a^{*r} bir reel sabit olmak üzere yukarıdaki gibi benzer argümanlarla

$$\theta_r^* \leq \frac{1}{4}\left(\sum_{i=2}^{k+1} h_{ii}^{*r}\right)^2 = \left(\frac{(k+1)^2}{4}\right)(H^{*r})^2 \tag{4.2.20}$$

bulunur.

(4.2.18), (4.2.19) ve (4.2.20) birleştirildiğinde, istenen (4.2.16) eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, E_1 vektör alanı için eşitlik sağlanır$\Longleftrightarrow$

$$h_{1i}^r = 0, \;\; h_{1i}^{*r} = 0, \;\; i \in \{2, ..., k+1\}$$

ve

$$h_{11}^r = \left(\frac{k+1}{2}\right)H, \;\; h_{11}^{*r} = \left(\frac{k+1}{2}\right)H^*$$

Böylece, ispat tamamlanır [12].

Uyarı 4.2.2. *Bilindiği gibi,* $2H^0 = H + H^*$ *dir. Böylece (4.2.16) eşitsizliği yeniden yazılabilir [12].*

Sonuç 4.2.1. $\left(\widetilde{M}(c), \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}, \phi, \xi\right)$, $(2n+1)-$*boyutlu Kenmotsu istatistiksel manifoldunun sabit* ϕ*-kesit eğriliği* c *ve* (M, ∇, g), $\widetilde{M}(c)$ *de bir* $(k+1)-$ *boyutlu bir istatistiksel altmanifoldu olsun.* $E_1 \in T_pM$ *birim vektörü için,*

$$S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) \geq 2S_1^0(E_1) - \left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1 - g^2(E_1,\xi)\right) - 4\right]\right\}$$
$$- \frac{(k+1)^2}{2}\left\|H^0\right\|^2 + \frac{(k+1)^2}{4} g(H, H^*).$$

dir [12]

Sonuç 4.2.2. $\left(M(c), \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}, \phi, \xi\right)$, $(2n+1)-$*boyutlu Kenmotsu istatistiksel manifoldunun sabit* ϕ*-kesit eğriliği* c *ve* (M, ∇, g) $M(c)$ *de bir* $(k+1)-$*boyutlu bir istatistiksel altmanifoldu olsun.* M *nin* $\widetilde{\nabla^{g}}$ *ya göre minimum olduğunu varsayalım, o zaman her bir vektörü* $E_1 \in T_pM$ *birim vektörü için,*

$$S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) \geq 2S_1^0(E_1) - \left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{k}{4}\left[(c+1)\left(1-g^2(E_1,\xi)\right)-4\right]\right\}$$
$$+\frac{(k+1)^2}{4}g(H,H^*).$$

dir [12].

Sonuç 4.2.3. $\left(\widetilde{M}(c), \widetilde{\nabla}, \widetilde{g}, \phi, \xi\right)$, $(2n+1)-$ *boyutlu Kenmotsu istatistiksel manifoldunun sabit* ϕ*-kesit eğriliği* c *ve* (M, ∇, g), $\widetilde{M}(c)$ *de bir* $(k+1)-$ *boyutlu bir istatistiksel altmanifoldu olsun*

(1) ξ ye ortogonal her bir $E_1 \in T_pM$ birim vektörü için,

$$S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) \geq 2S_1^0(E_1) - \left\{\frac{3(c+1)}{4}\|\mathscr{P}E_1\|^2 + \frac{(c-3)k}{4}\right\}$$
$$-\frac{(k+1)^2}{8}\left[\|H\|^2 + \|H^*\|^2\right]. \tag{4.2.21}$$

(1.1) Eğer M (invariant) ise

$$S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) \geq 2S_1^0(E_1) - \frac{c(k+3)+3(1-k)}{4}$$
$$-\frac{(k+1)^2}{8}\left[\|H\|^2 + \|H^*\|^2\right]. \tag{4.2.22}$$

(1.2) Eğer M anti-invariant ise

$$S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1) \geq 2S_1^0(E_1) - \frac{k(c-3)}{4}$$
$$-\frac{(k+1)^2}{8}\left[\|H\|^2 + \|H^*\|^2\right]. \tag{4.2.23}$$

(2) Üstelik (4.2.21)-(4.2.23) eşitsizlikleri eşittir eğer E_1 e ortogonal $\forall\, F_1 \in T_pM$ için

$$2h(E_1,E_1) = (k+1)H(p),$$

$$2h^*(E_1,E_1) = (k+1)H^*(p)$$

ve

$$h(E_1,F_1) = 0,$$

$$h^*(E_1,F_1) = 0,$$

ise [12].

Sonuç 4.2.4. $\left(\overline{N},\overline{\nabla}=\overline{\nabla}^{\overline{g}}+\overline{K},\overline{g},J\right)$ *ve* $\left(\widetilde{M},\widetilde{\nabla}=\widetilde{\nabla}^{\widetilde{g}}+\widetilde{K},\widetilde{g},\phi,\xi\right)$ *önerme 4.2.3 de olduğu gibi sırasıyla bir holomorfik istatistiksel manifoldun holomorfik kesit eğriliği 0 ve Kenmotsu istatistiksel manifoldun sabit* ϕ*-kesit eğriliği -1 olsun. Eğer* (M,∇,g) $\widetilde{M}$ *de bir istatistiksel altmanifold, boy*$(\widetilde{M})=2n+1$ *ve boy*$(\overline{N})=k+1$ *ise*

(1) *her* $E_1\in T_pM$, $p\in M$, *birim vektörü için*

$$S_1^{\nabla,\nabla^*}(E_1)\geq 2S_1^0(E_1)+4-\frac{(k+1)^2}{8}\left[\|H\|^2+\|H^*\|^2\right]. \tag{4.2.24}$$

(2) Üstelik (4.2.24) eşitsizliğinin eşitliği için aşağıdaki denklemler sağlanır E_1 e ortogonal tüm $F_1\in T_pM$ için

$$2h(E_1,E_1)=(k+1)H(p),$$

$$2h^*(E_1,E_1)=(k+1)H^*(p)$$

ve

$$h(E_1,F_1)=0,$$

$$h^*(E_1,F_1)=0,$$

dir [12].

5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezi olarak yapılan bu çalışmada öncelikle Riemannian istatistiksel manifold yapısının ele alınıp tanıtılması hedeflenmiştir. Daha sonra Kenmotsu manifold kavramı verilerek Kenmotsu istatistiksel manifold yapısı kururlup bunun üzerinde Kenmotsu istatistiksel manifoldun istatistiksel almanifoldu yapısı için Chen- Ricci eşitsizliği verilmiştir.

Bu konuda çalışacak diğer kişiler için orijinal olmayan bir temel kaynak temsil etmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Rao, C.R.**, (1945). Information and accuracy attainable in theestimation of statistical parameters, Bull. Calcutta Math., s.76–90.

[2] **Yuan, M.** (2019). On the geometric structure ofsome statistical manifolds, `1902.06144`.

[3] **Kazan, A. ve Kazan, S.** (2018). Sasakian Statistical Manifolds with Semi-Symmetric MetricConnection, *Universal Journal of Mathematics and Applications 1(4)*.

[4] **Amari, S.** (1985). *Differential-Geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics. 28.

[5] **Aydin, M.E.**, **Mihai, A. ve Mihai, I.** (2015). Some inequalities on submanifolds in statistical manifolds of constant curvature, *Univerzitet u Nišu. Prirodno-Matematički Fakultet. Filomat*, *29*(3), 465–476.

[6] **Furuhata, H.**, **Hasegawa, I.**, **Okuyama, Y. ve Sato, K.** (2017). Kenmotsu statistical manifolds and warped product, *Journal of Geometry*, *108*(3), 1175–1191.

[7] **Vos, P.W.** (1989). Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the Bartlett correction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, *41*((3)).

[8] **Furuhata, H.** (2009). Hypersurfaces in statistical manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, *27*(3), 420–429.

[9] **Chen, B.Y.** (1993). Some pinching and classificition theorems for minimal submanifolds, *Arch. Math.*, *60*, 568–578.

[10] **Deng, S.** (2009). An improved Chen-Ricci inequality, *International Electronic Journal Of Geometry*, *2*(2), 39–45.

[11] **Kenmotsu, K.** (1972). A class of almost contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. Journ 24*, *93–103*.

[12] **Siddiqui, A., N.**, **Suh, Y., J. ve Bahadır, O.** (2019). Extremities for statistical submanifolds in Kenmotsu statistical manifolds.

[13] **Hacısalihğlu, H.H.** (Eylül 200). *Diferansiyel Geometri 2.cilt*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

[14] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.

[15] **Sular, S.** (Aralık 2009). *Kenmotsu manifoldlar ve bunların bazı alt manifoldları* (Doktora Tezi). Balıkesir Üniversitesi.

[16] **Lauritzen, S.L.** Statistical manifolds, Institute for Electronic Systems, Aalborg University Center, Aalborg, Denmark, s.163–216.

[17] **Şener, S.** (2008). *Diferansiyellenebilir Manifoldlar Üzerindeki Kontakt Yapılar* (Yüksek Lisans Tezi). inönü üniversitesi.

[18] **Miliijevic, M.** (June 2015). *CR submanifolds in holomorphic statistical manifolds* (Doktora Tezi). Hokkaiodo University.

[19] **Akbari, H. ve Malek, F.** (2021). On contact metric statistical manifolds, *Differential Geometry and its Applications*, *75*(101735).

[20] **Singh, A.P.** (December 2018). Survey on geometry of statistical submanifolds, *International Journal of Math. Sci.*, *17*(3-4), 171–189.

[21] **Opozda, B.** (2015). Bochner's technique for statistical structures, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, `1504.06307`.

[22] **Opozda, B.** (2019). A sectional curvature for statistical structures, *Linear Algebra Appl.*, *497*, 134—161.

[23] **Yano, K. ve Kon, M.** (1984). *Structures on manifolds, series in Pure Mathematics*, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

[24] **Blair, D.E.** (2002). *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Birkhauser Boston Inc., 203 sürüm.

[25] **Chen, B.Y.** (2013). A survey on geometry of warped product submanifolds, `1307.0236`.

[26] **Jun, J.**, **Uday De, C. ve Pathak, G.** (2005). On Kenmotsu Manifolds, *J. Korean Math. society*, *42*(3), 435–445.

[27] **Yazla, A.**, **İrem Küpeli Erken ve Murathan, C.** (2018). Almost cosymplectic statistical manifolds, `1801.09890`.

[28] **Siddiqui, A., N. ve Shaid, M.E.** (2018). On totally real statistical submanifolds, *Filomat 32(13)*, 11.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad **:** Ayşe GÜNER

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü