

AĞUSTOS 2022

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

ECEM NEGİZ

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GOULD-HOPPER POLİNOMLARINI İÇEREN
 q -PARAMETRELİ II. TİP DEJENERE POLY-BERNOULLİ
POLİNOMLARI

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ECEM NEGİZ
AĞUSTOS 2022

**GOULD-HOPPER POLİNOMLARINI İÇEREN
 q -PARAMETRELİ II. TİP DEJENERE POLY-BERNOULLİ
POLİNOMLARI**

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ**

**Ecem NEGİZ
Ağustos 2022**



©2022[Ecem NEGİZ]

**GOULD-HOPPER POLİNOMLARINI İÇEREN
q-PARAMETRELİ II. TİP DEJENERE POLY-BERNOULLİ
POLİNOMLARI**

başlıklı bu çalışma, **Ecem NEGİZ** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü'nde** Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet İshak YÜCE
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Matematik Bölümü Başkanı

.....

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Sınav Tarihi: 9 Ağustos 2022

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Danışman, Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Şükran UYGUN
Matematik
Gaziantep Üniversitesi

.....

Doç. Dr. Serkan ARACI
Temel Bilimler
Hasan Kalyoncu Üniversitesi

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Ecem NEGİZ

ABSTRACT

DEGENERATE TYPE2 POLY-BERNOULLI POLYNOMIALS WITH A q -PARAMETER INCLUDING THE GOULD-HOPPER POLYNOMIALS

NEGİZ, Ecem

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

August 2022

65 pages

This thesis consists of eight chapters. The first chapter is introduction part which includes the motivation of this thesis and some fundamental definitions and formulas. The familiar Bernoulli polynomials in the second chapter, the poly-Bernoulli polynomials in the third chapter, the degenerate Bernoulli polynomials in the forth chapter, the Bernoulli polynomials with a q parameter in the fifth chapter, the Gould-Hopper based Bernoulli polynomials in conjunction with their some extensions in the sixth chapter are examined extensively. The seventh chapter deals with the Gould-Hopper based fully degenerate type2 poly-Bernoulli polynomials with a q parameter associated with the polyexponential function and degenerate exponential function and investigate some of their properties, relations and formulas including addition formulas, difference rule properties, recurrence relations, implicit summation formulas, symmetric formulas.

Key Words: Gould-Hopper Polynomials, Bernoulli Polynomials, Polyexponential Function, Degenerate Exponential Function, Stirling Numbers Of The First Kind.

ÖZET

GOULD-HOPPER POLİNOMLARINI İÇEREN q -PARAMETRELİ II. TİP DEJENERE POLY-BERNOULLİ POLİNOMLARI

NEGİZ, Ecem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Ağustos 2022

65 Sayfa

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, bu tezin motivasyonunu ve bazı temel tanımları ve formülleri içeren giriş kısmıdır. İkinci bölümde klasik Bernoulli polinomları, üçüncü bölümde poly-Bernoulli polinomları, dördüncü bölümde dejenere Bernoulli polinomları, beşinci bölümde q parametrelili Bernoulli polinomları, altıncı bölümde bazı genelleştirmeleriyle birlikte Gould-Hopper polinomlarını içeren Bernoulli polinomları kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Yedinci bölüm, poly üstel fonksiyon ve dejenere üstel fonksiyon ile ilişkili bir q parametresine sahip Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere II. tip poly-Bernoulli polinomlarını ele almakta ve bunların bazı özellikleri, ilişkileri ve toplam formülleri, fark kuralı özellikleri, yineleme bağıntıları, kapalı toplam formülleri, simetrik formülleri incelenmiştir. Son bölümde ise sonuçlar ve öneriler bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gould-Hopper Polinomları, Bernoulli Polinomları, Poly Üstel Fonksiyon, Dejenere Üstel fonksiyon, Birinci Tür Stirling Sayıları.



“Canum aileme”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Bütün çalışmam boyunca her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, tezimde çok emeği olan değerli hocam Doç. Dr. Uğur DURAN'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca tez komitesinde yer alan değerli hocalarım sayın Doç. Dr. Şükran UYGUN ve Doç. Dr. Serkan ARACI'ya katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik annem ile babam Selma NEGİZ ve Mithat NEGİZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ	x
BÖLÜM I: GİRİŞ.....	1
1.1. Ön Bilgiler.....	2
BÖLÜM II: BERNOULLİ SAYILARI VE POLİNOMLARI	5
BÖLÜM III: POLY-BERNOULLİ POLİNOMLARI.....	12
BÖLÜM IV: DEJENERE BERNOULLİ POLİNOMLARI	16
BÖLÜM V: q -PARAMETRELİ POLY-BERNOULLİ POLİNOMLARI	25
5.1. q -parametrelili Poly-Bernoulli Polinomları.....	25
5.2. q -parametrelili Dejenere Poly-Bernoulli Polinomları	32
BÖLÜM VI: GOULD-HOPPER POLİNOMLARINI İÇEREN BERNOULLİ POLİNOMLARI	36
6.1. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren q -parametrelili Poly-Bernoulli Polinomları	36
6.2. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren q -parametrelili Dejenere Bernoulli Polinomları.....	39
6.2.1. q -parametrelili Dejenere Gould-Hopper Polinomları	40
6.2.2. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren q -parametrelili Dejenere Poly-Bernoulli Polinomları	42
BÖLÜM VII: BULGULAR	45
7.1. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren q -parametrelili II.Tip Dejenere Poly-Bernoulli Polinomları	45
BÖLÜM VIII: SONUÇ VE ÖNERİLER.....	60
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ (CV)	64

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
ε	Keyfi pozitif sayı
Δ	Fark operatörü
ζ	Riemann-zeta fonksiyonu
λ	Lambda
B_n	Bernoulli sayıları
$B_n(x)$	Bernoulli polinomları
$B_n^{(k)}(x)$	Poly-Bernoulli polinomları
$\beta_n(x \lambda)$	Dejenere Bernoulli polinomları
$B_{n,q}^{(k)}(x)$	q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları
$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x)$	q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomları
${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y)$	Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları
${}_{GH}B_{n,\lambda;\beta,\gamma}^{(j)}(x, y)$	Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere Bernoulli polinomları
$H_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda)$	q -parametrelili dejenere Gould-Hopper polinomları
${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda)$	Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomları
${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y)$	Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili II.tip dejenere poly-Bernoulli polinomları
$S_1(n, m)$	Birinci türden Stirling sayıları
$S_1(n, m : x)$	Birinci türden Stirling polinomları

$S_{1,\lambda}(n, m : x)$	Dejenere birinci türden Stirling polinomları
$S_{1,\lambda;q}(n, m : x)$	q -parametrelili dejenere birinci türden Stirling polinomları
$S_1^{(j)}(n, m : x, y)$	Gould-Hopper polinomlarını içeren birinci türden Stirling polinomları
$S_2(n, m)$	İkinci türden Stirling sayıları
$S_2(n, m : x)$	İkinci türden Stirling polinomları



BÖLÜM I

GİRİŞ

Sayılar teorisinde çok önemli yeri olan Bernoulli sayıları ve polinomları $1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k$ sonlu toplamının hesaplanmasında ve matematiğin birçok alanında kullanılır. Bu alanlar trigonometrik fonksiyon serileri, sonlu farklar analizi, sayısal türev, integral denklemler, sayılar teorisi, kombinatorik, sayısal analiz, q -analizi gibi alanlardır.

Bu tez çalışmasında Bernoulli sayılarının ve polinomlarının farklı birer genişlemesi olan poly-Bernoulli, dejenere Bernoulli, q -parametrelili Bernoulli ve Gould-Hopper polinomlarını içeren Bernoulli sayı ve polinomları ele alınarak sahip olduğu özdeşlikler ve özellikleri farklı yöntemlerle gösterilmiştir ([1,2,10,12,16]).

q -parametrelili Bernoulli polinomunun başka bir genelleşmesi olan q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları ve q -parametrelili Dejenere poly-Bernoulli polinomları verildi ve bazı teoremleri gösterilmiştir ([3,11,22]).

Gould-Hopper polinomlarını içeren Bernoulli polinomlarının başka bir genelleşmesi olan Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları, Gould-Hopper polinomlarını içeren Dejenere Bernoulli polinomları ve bunların q parametresi altındaki polinomlarına girilerek, bu polinomların sağladığı bazı teoremler gösterildi ([4,5,6,7,8,9,18,19,20]).

Son olarak Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere birinci tür Stirling polinomları ve Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere II.tip poly-Bernoulli polinomları ile ilgilenilmiştir. Ardından, bunların çeşitli ilişkileri ve özellikleri, toplam formülleri, fark kuralı özellikleri, yineleme bağıntıları, kapalı toplam formülleri, simetrik formülleri incelenmiştir ([14,17,22]).

1.1. Ön Bilgiler

Bu kısımda, tezde kullanılan bazı temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1: $M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ ve $N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ iki kuvvet serisi olmak üzere bu serilerin çarpımları,

$$R_n(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \frac{t^k}{k!} b_{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

şeklinde olur ve bu çarpıma Cauchy çarpımı denir.

Tanım 1.2.2: j pozitif tamsayısı için, Gould-Hopper polinomu aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır ([17]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} GH_n^{(j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} = e^{xt + yt^j}.$$

Tanım 1.2.3: Birinci türden Stirling sayıları ve polinomları sırasıyla aşağıdaki üreteç fonksiyonları ile tanımlanır ([17]):

$$\frac{(\log(1+t))^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, m) \frac{t^n}{n!} \quad \text{ve} \quad \frac{(\log(1+t))^m}{m!} (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} S_1(n, m; x) \frac{t^n}{n!}.$$

Tanım 1.2.4: İkinci türden Stirling sayıları ve polinomları sırasıyla aşağıdaki üreteç fonksiyonları ile tanımlanır ([17]):

$$\frac{(e^t - 1)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, m) \frac{t^n}{n!} \quad \text{ve} \quad \frac{(e^t - 1)^m}{m!} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, m; x) \frac{t^n}{n!}.$$

Tanım 1.2.5: İkinci türden λ -Stirling sayıları aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır ([3]):

$$\frac{(\lambda e^t - 1)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2^\lambda(n, m) \frac{t^n}{n!}.$$

$\lambda = 1$ olduğunda, ikinci türden Stirling sayıları olur.

Tanım 1.2.6: $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(x)_n = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1); & n > 0 \\ 1 & ; \quad n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(x)_n$ fonksiyonuna azalan faktoriyel fonksiyonu denir ([5]).

Tanım 1.2.7: $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$(x)^{(n)} = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1); & n > 0 \\ 1 & ; \quad n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(x)^{(n)}$ fonksiyonuna artan faktoriyel fonksiyonu denir ([5]).

Tanım 1.2.8: λ -azalan faktöriyel,

$$(x)_{n,\lambda} = \begin{cases} x(x-\lambda)\dots(x-\lambda(n-1)); & n = 1, 2, \dots \\ 1 & ; \quad n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ([17]).

Tanım 1.2.9: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya f in birinci basamaktan farkı,

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır ([15]).

Tanım 1.2.10: Δ_λ -fark operatörü,

$$\Delta_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda} (f(x+1) - f(x)), \quad \lambda \neq 0$$

şeklinde tanımlanır ([17]).

Tanım 1.2.11: Herhangi bir n reel sayısı için $\lfloor n \rfloor$ notasyonu n den küçük en büyük tamsayıyı gösterir.

Tanım 1.2.12: Aşağıdaki seri formülü,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A(k, n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/j \rfloor} A(k, n - jk)$$

sağlanır ([5]).

Tanım 1.2.13: Aşağıdaki seri formülleri,

$$\sum_{N=0}^{\infty} f(N) \frac{(x+y)^N}{N!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} f(n+m) \frac{x^n}{n!} \frac{y^m}{m!}$$

ve

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} A(l, k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k A(l, k-l)$$

sağlanır ([17]).

Tanım 1.2.14: n mertebeli Bernoulli sayısı aşağıdaki üreteç fonksiyonları ile tanımlanır ([11]):

$$\left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^n = \sum_{l \geq 0} B_l^{(n)} \frac{t^l}{l!}.$$

BÖLÜM II

BERNOULLİ SAYILARI VE POLİNOMLARI

Bu bölümde Bernoulli sayıları ve polinomları tanımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir. Bu bölüm hazırlanırken [16] nolu kaynaktan yararlanılmıştır.

İlk n doğal sayıların toplamı $1+2+3+\dots+n$,

$$S_1(n) := \sum_{m=1}^n m = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

denkleminde hesaplanabilir.

Bu formül şuna dikkat edilerek türetilir:

$$S_1(n) = 1+2+3+\dots+n \text{ ve } S_1(n) = n+(n-1)+\dots+1$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2S_1(n) = (n+1)+(n+1)+\dots+(n+1) = n(n+1)$$

elde edilir.

Yukarıdaki toplamdan elde edilen iki özdeşlik,

$$(i) \quad (m+1)^2 - m^2 = 2m+1 \text{ ve buradan,}$$

$$2 \sum_{m=1}^n m = \sum_{m=1}^n [(m+1)^2 - m^2] - n$$

$$(ii) \quad \sum_{m=1}^n [(m+1)^2 - m^2] = \\ = [2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \dots + [n^2 - (n-1)^2] + [(n+1)^2 - n^2]$$

$$= (n+1)^2 - 1$$

şeklinde verilebilir.

Böylece,

$$S_1(n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliği bulunur.

Daha genel olarak ilk n doğal sayılarının k -inci kuvvetlerinin toplamı,

$$S_k := 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

şeklindedir.

Herhangi bir sıfırdan farklı a sayısı için $a^0 = 1$ olduğundan, $S_0(n) = n$ elde edilir.

$k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özdeşlikler kullanılarak $S_k(n)$ hesaplanabilir.

$$(i) \quad (m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} m^i$$

ve dolayısıyla,

$$(k+1) \sum_{m=1}^n m^k = \sum_{m=1}^n [(m+1)^{k+1} - m^{k+1}] - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{m=1}^n \binom{k+1}{i} m^i$$

elde edilir.

(ii)

$$(k+1) \sum_{m=1}^n m^k = (n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} \sum_{m=1}^n m^i$$

$$S_k(n) = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} - \frac{(n+1)}{k+1} - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i(n)$$

denklemin sağ tarafından elde edilen formül n in $k+1$ dereceli bir polinomudur.

Yukarıdaki formül kullanılarak,

$$S_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$S_3(n) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$S_4(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$

$$S_5(n) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$$

$$S_6(n) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42},$$

$$S_7(n) = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12},$$

bazı $S_k(n)$ ler bu şekilde hesaplanabilir.

Böylece Jacob Bernoulli ilk n tamsayılarının toplamının k -inci kuvvetinin,

$$S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{1}{12}kn^{k-1} + 0n^{k-2} + \dots$$

şeklinde yazılabilir olduğunu görmüştür ve buradaki katsayılar $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, 0, \dots$ dır.

Jacob Bernoulli yukarıdaki ifadeyi,

$$(k+1)S_k(n) = n^{k+1} - \frac{1}{2}(k+1)n^k + \frac{1}{6} \frac{k(k+1)}{2} n^{k-1} + 0 - \frac{1}{30} \frac{(k-2)(k-1)k(k+1)}{4!} + \dots$$

şeklinde yeniden yazdı ve

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i} \quad (2.1)$$

formülünü elde etti. Burada B_i i -inci Bernoulli sayılarıdır ve bu formüle Bernoulli formülü denir. Yukarıdaki fomülü daha iyi anlamak için $S_k(n)$,

$$S_k(n) = \frac{(n+B)^{k+1} - B_{k+1}}{k+1}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Burada kullanılan B notasyonu, B nin i -inci kuvvetini tanımlamak için kullanılan bir gösterimdir.

$$(n+B)^{k+1} := \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}.$$

Bu gösterim aynı zamanda k dereceli Bernoulli polinomunu tanımlamamıza yardımcı olur.

$$B_k(t) := \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i t^{k-i}.$$

Burada B_i Bernoulli sayılarıdır. Bernoulli polinomları açısından, k -inci Bernoulli sayısı, $B_k = B_k(0)$ dir.

(2.1) den iki sonuç hızlı bir şekilde elde edilebilir.

(i) $S_k(n)$ de sabit terim yoktur çünkü i , $k+1$ e gitmiyor.

(ii) k -inci Bernoulli sayısı B_k n in $S_k(n)$ deki katsayısıdır. Örneğin,

$S_0(n) = n$ de B_0 n in katsayısıdır. Dolayısıyla $B_0 = 1$ dir. Benzer şekilde, bazı Bernoulli sayıları aşağıdaki tablodan,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17
B_n	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$	0

bulunabilir (Tablo 2.1).

Bernoulli sayı dizisinin güzelliği, $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere tüm $0 \leq i \leq k$ için, B_i yi bilmek $S_k(n)$ i hesaplamada kolaylık sağlar.

Bernoulli formülünde (2.1), $n=1$ alınırsa,

$$1 = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} B_i \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada $k > 0$ için k -inci Bernoulli sayısının,

$$B_k = 1 - \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} B_i$$

şeklinde hesaplandığı anlamına gelir. B_3, B_5, B_7 nin 0 olduğu hatırlanırsa aslında her tek $k > 1$ sayısı için $B_k = 0$ olduğu ortaya çıkar.

Bazı Bernoulli sayılarının özellikleri,

- (i) k tek sayıları için $k > 1, B_k = 0$.
- (ii) Diğer k sayıları için $B_k \neq 0$.
- (iii) Tüm $B_k \in \mathbb{Q}$ için $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- (iv) $B_0 = 1$.
- (v) $j \in \mathbb{N}$ için, B_{4j} ler negatif rasyonel, B_{4j-2} ler pozitif rasyonel sayıdır.
- (vi) Tüm $k \in \mathbb{N}$ için $|B_6| = 1/42 < |B_{2k}|$.

Leonard Euler, Jacob Bernoulli sayıları için bir üreteç fonksiyonu buldu. $f^{(k)}(0) = B_k$

olacak şekilde bir $f(x)$ fonksiyonu tanımladı. Burada $f^{(k)}$, f nin k inci türevini gösterir.

f kuralına göre $f^{(0)} = f$ olur.

Böyle bir f varsa o zaman 0 civarında Taylor seri açılımı,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

şeklinde olur. Bu nedenle, böyle bir fonksiyon için,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

olur.

Her $x \in \mathbb{R}$ için e^x fonksiyonunun Taylor seri açılımını hatırlanırsa,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

şeklindedir.

Bu iki sonsuz serinin Cauchy çarpımları,

$$\begin{aligned}
 f(x)e^x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k B_i \frac{x^i}{i!} \frac{x^{k-i}}{(k-i)!} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \frac{B_i}{i!(k-i)!} \right) x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i \right) \frac{x^k}{k!}
 \end{aligned}$$

şeklinde olur. O halde,

$$c_k := \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i + B_k = k + B_k$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$f(x)e^x = \sum_{k=0}^{\infty} (k + B_k) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} + f(x) = xe^x + f(x)$$

olur. Böylece aranan f ,

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitliğe Bernoulli sayılarının üretic fonksiyonu denir.

Burada tüm $x \in \mathbb{R}$ için, $e^x > 0$ olduğundan $f(x)$,

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} \quad (2.3)$$

şeklinde yazabilir.

Karmaşık sayılara genelleştirilirse $\forall z \in \mathbb{C}$ ve $0 \leq \Im(z) < 2\pi$ için,

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}}$$

olur.

Burada (2.2) ve (2.3) özdeşlikleri standarttan farklıdır. Çünkü onlar, $B_1 = \frac{1}{2}$ ile ikinci

Bernoulli sayıları için üretilmiştir. Standart kural, $B_1 = \frac{-1}{2}$ iken yani ilk Bernoulli ile

çalışmaktadır. İlk Bernoulli sayıları, herhangi bir n sayısı için ilk $n-1$ doğal sayının k inci kuvvetleri toplamına yaklaşımı izlenerek elde edilebilir.

$S_k(n)$, hesaplanırken görünen Bernoulli sayıları birçok önemli yerde karşımıza çıkar.

(i) $\tan z$ nin genişlemesinde her $|z| < \frac{\pi}{2}$ için,

$$\tan z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k} (2^{2k} - 1) B_{2k}}{2n!} z^{2k-1}$$

olur.

(ii) Riemann Zeta fonksiyonunun toplamını hesaplarken s pozitif çift tam sayıları için,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

olur. Burada $s = 2$ durumu ünlü Basel problemidir. Euler bunu $\frac{\pi^2}{6}$ olarak hesaplamıştır.

Teorem 2.1: Tüm $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$$

sağlanır. Ayrıca,

$$\zeta(-2k) = -\frac{B_{2k+1}}{2k+1}$$

ilişkisi Riemann Zeta fonksiyonunun basit sıfırlarını verir.

BÖLÜM III

POLY-BERNOULLİ POLİNOMLARI

Bu bölümde polylogaritma ve poly üstel fonksiyonları ile tanımlanacak olan poly-Bernoulli polinomları verilecektir ve bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1: Polylogaritma fonksiyonu,

$$Li_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^k} \quad (3.1)$$

ifadesiyle tanımlanır ([1]). Bu seri $|t| < 1$ için yakınsar. k negatif tamsayı ise $k = -r$ alınır,

$$Li_{-k}(t) = \frac{\sum_{j=0}^r \langle r \rangle_j t^{r-j}}{(1-t)^{r+1}}$$

ifadesi elde edilir. Burada ki $\langle r \rangle_j$ Eulerian sayısı,

$$\langle r \rangle_j = \sum_{l=0}^{j+1} (-1)^l \binom{r+1}{l} (j-l+1)^r$$

eşitliği ile tanımlanır.

$k \leq 0$ tamsayısı için polylogaritma fonksiyonu rasyonel bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned}
Li_0(t) &= \frac{t}{1-t} \\
Li_{-1}(t) &= \frac{t}{(1-t)^2} \\
Li_{-2}(t) &= \frac{t^2+t}{(1-t)^3} \\
Li_{-3}(t) &= \frac{t^3+4t^2+t}{(1-t)^4} \\
Li_{-4}(t) &= \frac{t^4+11t^3+11t^2+t}{(1-t)^5} \\
Li_{-5}(t) &= \frac{t^5+26t^4+66t^3+26t^2+t}{(1-t)^6}
\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.1) denkleminin t değişkenine göre türevi,

$$\frac{d}{dt} Li_k(t) = \begin{cases} c \frac{1}{t} Li_{k-1}(t) & , k > 1 \\ \frac{1}{1-t} & , k = 1 \end{cases}$$

dir. Buradan,

$$Li_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\log(1-t)$$

elde edilir.

Tanım 3.2: Poly-Bernoulli polinomu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{Li_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} e^{xt} \quad (3.2)$$

ifadesiyle tanımlanır ([1]).

$k=1$ için (3.2) denkleminde,

$$(-1)^n B_n^{(1)}(-x) = B_n(x)$$

Bernoulli polinomlarını verir.

$x=0$ için $B_n^{(k)}(0) = B_n^{(k)}$ poly-Bernoulli sayısı olur.

Teorem 3.1: $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n \geq 0$ için,

$$B_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (x-j)^n \quad (3.3)$$

eşitliği vardır ([1]).

Teorem 3.2: $k \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 0$ için,

$$B_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} B_{n-m}^{(k-1)} \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{n-l+1} \binom{m}{l} B_l(x) \quad (3.4)$$

bağıntısı vardır ([1]).

Teorem 3.3: $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ için,

$$B_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n+1} \left\{ B_n^{(k-1)}(x) + x B_0^{(k)}(x) - \sum_{m=1}^{n-1} \left(\binom{n}{m-1} - \binom{n}{m} x \right) B_m^{(k)}(x) \right\} \quad (3.5)$$

$$B_0^{(k)}(x) = 1$$

$$B_1^{(k)}(x) = \frac{1}{2} (B_1^{(k-1)}(x) + x B_0^{(k)}(x))$$

eşitliği vardır ([1]).

Tanım 3.4: Dejenere üstel fonksiyonu $e_\lambda^x(t)$,

$$e_\lambda^x(t) = (1 + \lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

$$e_\lambda^1(t) := e_\lambda(t)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} e_\lambda^x(t) = e^{xt}$ sağlanır.

Dejenere üstel fonksiyonun üreteç fonksiyonu,

$$e_{\lambda}^x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (x)_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!} \quad (3.6)$$

ifadesiyle tanımlanır. Fark kuralı ise, $\Delta_{\lambda,x} e_{\lambda}^x(t) = t e_{\lambda}^x(t)$ ifadesiyle verilir ve $e_{\lambda}^1 := e_{\lambda}(t)$ olur.

Tanım 3.5: Dejenere logaritma fonksiyonu,

$$\log_{\lambda}(1+t) := \frac{(1+t)^{\lambda} - 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{\ell=1}^{\infty} (\lambda)_{\ell} \frac{t^{\ell}}{\ell!} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. Dejenere üstel fonksiyonu ile ilişkisi,

$$\log_{\lambda}(e_{\lambda}(1+t)) = 1+t \text{ ve } e_{\lambda}(\log_{\lambda}(1+t)) = 1+t$$

şeklindedir.

Tanım 3.6: Poly üstel fonksiyonu $|t| < 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için,

$$Ei_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)! n^k} \quad (3.8)$$

ifadesi ile tanımlanır ([17]).

Tanım 3.7: Poly üstel fonksiyonu $Ei_k(x)$ kullanılarak II.tip poly-Bernoulli polinomları,

$$\frac{Ei_k(\log(1+z))}{e^z - 1} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(k)}(x) \frac{z^n}{n!}, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır ([17]).

$x=0$ alındığında, $\beta_n^{(k)}(0) := \beta_n^{(k)}$ II.tip poly-Bernoulli sayıları elde edilir.

Ayrıca $Ei_1(z) = e^z - 1$ olduğu görülür ve $k=1$ alındığında II.tip poly-Bernoulli polinomları $\beta_n^{(k)}(x)$, klasik $B_n(x)$ Bernoulli polinomlarına indirgenir.

BÖLÜM IV

DEJENERE BERNOULLİ POLİNOMLARI

Bu bölümde dejenere Bernoulli polinomları tanıtılacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir. Bu bölüm hazırlanırken [10] nolu kaynaktan yararlanılmıştır.

Bilindiği gibi Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right) e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (4.1)$$

şeklindedir.

$x=0$ olduğunda,

$$B_n = B_n(0)$$

Bernoulli sayıları elde edilir.

(4.1) den $(n \geq 0, d \in \mathbb{N})$,

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} B_l x^{n-l} \\ &= d^{n-1} \sum_{a=0}^{d-1} B_n\left(\frac{a+x}{d}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir.

Aşağıdaki eşitlik,

$$\frac{t}{e^t - 1} e^t - \frac{t}{e^t - 1} = t \quad (4.3)$$

şeklinde kolayca elde edilebilir.

Böylece (4.1) ve (4.3) ten,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B_n(1) - B_n) \frac{t^n}{n!} = t \quad (4.4)$$

elde edilir.

Her iki taraftaki katsayıları karşılaştırarak,

$$B_0 = 1 \text{ ve } B_n(1) - B_n = \delta_{n,1} \quad (4.5)$$

bulunur. Burada $\delta_{n,k}$, Kronecker'in sembolüdür.

$\lambda \in \mathbb{C}$ için, Leonard Carlitz dejenere Bernoulli polinomlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır ([2]).

$$\frac{t}{(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} (1 + \lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x | \lambda) \frac{t^n}{n!}. \quad (4.6)$$

$x = 0$ olduğunda $\beta_n(\lambda) = \beta_n(0 | \lambda)$ dejenere Bernoulli sayıları olarak adlandırılır.

(4.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta_n(x | \lambda) \frac{t^n}{n!} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{t}{(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} (1 + \lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} \\ &= \frac{t}{e^t - 1} e^{xt} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir.

Böylece, (4.7) eşitliği ile,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta_n(x | \lambda) = B_n(x), \quad (n \geq 0)$$

elde edilir ([10]).

Aşağıdaki eşitlik,

$$\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1} (1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1} = t \quad (4.8)$$

şeklinde kolayca elde edilir. (4.6) ve (4.8) den

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ \beta_n(1|\lambda) - \beta_n(\lambda) \} \frac{t^n}{n!} = t \quad (4.9)$$

olur. (4.9) un her iki tarafındaki katsayıları karşılaştırarak,

$$\beta_n(1|\lambda) - \beta_n(\lambda) = \delta_{1,n} \quad , \quad \beta_0(\lambda) = 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.10)$$

elde edilir.

(4.10) denklemi (4.5) in λ -benzeridir. (4.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} t(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} &= \left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1 \right) \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(x|\lambda) \frac{t^m}{m!} \\ &= \left(\sum_{l=1}^{\infty} (1)_{l,\lambda} \frac{t^l}{l!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(x|\lambda) \frac{t^m}{m!} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

denklemi türetilebilir.

Burada λ -azalan faktöriyel,

$$(x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)\dots(x-\lambda(n-1)) = \lambda^n \left(\frac{x}{\lambda} \right)_n = \lambda^n \sum_{l=0}^n S_1(n,l) \lambda^{-l} x^l$$

şeklindedir. Böylece (4.11) ile,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x)_{n,\lambda} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \frac{(1)_{l+1,\lambda}}{l+1} \binom{n}{l} \beta_{n-l}(x|\lambda) \right) \frac{t^n}{n!} \quad (4.12)$$

elde edilir.

(4.12) ün her iki tarafındaki katsayıları karşılaştırarak,

$$(x)_{n,\lambda} = \sum_{l=0}^n \frac{(1)_{l+1,\lambda}}{l+1} \binom{n}{l} \beta_{n-1}(x|\lambda) , \quad (n \geq 0) \quad (4.13)$$

elde edilir. Ayrıca dikkat edilirse,

$$(x)_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (x)_{n,\lambda} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{B_{n-1}(x)}{l+1}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x|\lambda) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} \right) (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \beta_l(\lambda) \frac{t^l}{l!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} (x)_{m,\lambda} \frac{t^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \beta_l(\lambda) \binom{n}{l} (x)_{n-l,\lambda} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur. (4.14) in her iki tarafındaki katsayıları karşılaştırarak,

$$\beta_n(x|\lambda) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \beta_l(\lambda) (x)_{n-l,\lambda} , \quad (n \geq 0) \quad (4.15)$$

elde edilir. Bu nedenle (4.10), (4.13) ve (4.15) eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 4.1: $n \geq 0$ için,

$$\beta_n(x|\lambda) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \beta_l(\lambda) (x)_{n-l,\lambda}$$

$$(x)_{n,\lambda} = \sum_{l=0}^n \frac{(1)_{l+1,\lambda}}{l+1} \binom{n}{l} \beta_{n-1}(x|\lambda)$$

ve

$$\beta_0(\lambda) = 1, \quad \beta_n(1|\lambda) - \beta_n(\lambda) = \delta_{1,n} \text{ dir ([10]).}$$

(4.6)'den aşağıdaki denklem türetilir:

$$\begin{aligned}
\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} &= \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{d}{\lambda}-1}} \sum_{a=0}^{d-1} (1+\lambda t)^{\frac{a+x}{\lambda}} \\
&= \frac{1}{d} \left(\frac{dt}{\left(1+\frac{\lambda}{d}dt\right)^{\frac{d}{\lambda}}-1} \sum_{a=0}^{d-1} \left(1+\frac{\lambda}{d}dt\right)^{\frac{d}{\lambda}\frac{a+x}{d}} \right) \\
&= \frac{1}{d} \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{n=0}^{\infty} d^n \beta_n \left(\frac{a+x}{d} \middle| \frac{\lambda}{d} \right) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ d^{n-1} \sum_{a=0}^{d-1} \beta_n \left(\frac{a+x}{d} \middle| \frac{\lambda}{d} \right) \right\} \frac{t^n}{n!}, \quad (d \in \mathbb{N}). \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Bu nedenle (4.6) ve (4.16) den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2: $n \geq 0$ için, $d \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\beta_n(x|\lambda) = d^{n-1} \sum_{a=0}^{d-1} \beta_n \left(\frac{a+x}{d} \middle| \frac{\lambda}{d} \right)$$

eşitliği sağlanır ([10]).

Teorem 4.2, (4.2) eşitliğinin λ -benzeridir. Yani,

$$B_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta_n(x|\lambda) = d^{n-1} \sum_{a=0}^{d-1} B_n \left(\frac{a+x}{d} \right), \quad (d \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}}(1+\lambda t)^{\frac{n}{\lambda}} - \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}} \\
&= \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}} \left((1+\lambda t)^{\frac{n}{\lambda}} - 1 \right) \\
&= \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}} \left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1 \right) \left(1 + (1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} + \dots + (1+\lambda t)^{\frac{n-1}{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t \sum_{l=0}^{n-1} (1 + \lambda t)^{\frac{l}{\lambda}} \\
&= t \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n-1} (l)_{m,\lambda} \right) \frac{t^m}{m!}, \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olur.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
&\frac{t}{(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} (1 + \lambda t)^{\frac{n}{\lambda}} - \frac{t}{(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \beta_m(n|\lambda) - \beta_m(\lambda) \right\} \frac{t^m}{m!} \\
&= t \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\beta_{m+1}(n|\lambda) - \beta_{m+1}(\lambda)}{m+1} \right\} \frac{t^m}{m!}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir.

(4.17) ve (4.18) ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n-1} (l)_{m,\lambda} \right) \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_{m+1}(n|\lambda) - \beta_{m+1}(\lambda)}{m+1} \right) \frac{t^m}{m!}, \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.19}$$

Bu nedenle (4.19)' nin her iki tarafındaki katsayılar karşılaştırılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.3: $m \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{l=0}^{n-1} (l)_{m,\lambda} = \frac{1}{m+1} \left\{ \beta_{m+1}(n|\lambda) - \beta_{m+1}(\lambda) \right\}$$

eşitliği sağlanır ([10]).

(4.1)'de ki t 'yi $\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda t)$ ile değiştirerek,

$$\begin{aligned} \frac{\log(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}{(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} (1 + \lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \lambda^{-n} \frac{1}{n!} (\log(1 + \lambda t))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n B_m(x) \lambda^{n-m} S_1(n, m) \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \frac{\log(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}{(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} (1 + \lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} &= \left(\frac{\log(1 + \lambda t)}{\lambda t} \right) \left(\frac{t}{(1 + \lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} (1 + \lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} \right) \\ &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1} \lambda^l t^l \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(x|\lambda) \frac{t^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l \lambda^l}{l+1} \frac{\beta_{n-l}(x|\lambda) n!}{(n-l)!} \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \frac{l!}{l+1} (-1)^l \lambda^l \binom{n}{l} \beta_{n-l}(x|\lambda) \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur.

Bu nedenle (4.20) ve (4.21) ile aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4: $n \geq 0$ için,

$$\sum_{m=0}^n B_m(x) \lambda^{n-m} S_1(n, m) = \sum_{l=0}^n \frac{l!}{l+1} \binom{n}{l} (-1)^l \lambda^l \beta_{n-l}(x|\lambda)$$

eşitliği sağlanır ([10]). Burada $S_1(n, m)$ birinci tür Stirling sayısıdır.

(4.6) eşitliğindeki t yi $\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$ ile değiştirerek,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{e^t - 1} \right) e^{xt} &= \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(x|\lambda) \frac{1}{m!} \lambda^{-m} (e^{\lambda t} - 1)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(x|\lambda) \lambda^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} S_2(n, m) \frac{\lambda^n t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \lambda^{n-m} S_2(n, m) \beta_m(x|\lambda) \right) \frac{t^n}{n!},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

burada $S_2(n, m)$, ikinci türden Stirling sayısıdır.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{e^t - 1} \right) e^{xt} &= \frac{1}{\lambda t} \left(\frac{t}{e^t - 1} \right) (e^{(x+\lambda)t} - e^{xt}) \\
&= \frac{1}{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \{B_n(x+\lambda) - B_n(x)\} \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{B_{n+1}(x+\lambda) - B_{n+1}(x)}{n+1} \right\} \frac{t^n}{n!}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

yazılırsa (4.22) ve (4.23) ten,

$$\frac{B_{n+1}(x+\lambda) - B_{n+1}(x)}{n+1} = \sum_{m=0}^n S_2(n, m) \lambda^{n-m+1} \beta_m(x|\lambda) \tag{4.24}$$

olur.

Bu nedenle (4.24) ten aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5: $n \geq 0$ için,

$$\frac{B_{n+1}(x+\lambda) - B_{n+1}(x)}{n+1} = \sum_{m=0}^n S_2(n, m) \lambda^{n-m+1} \beta_m(x|\lambda)$$

eşitliği sağlanır ([10]).

Teorem (4.3) ten,

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n-1}(l)_m &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{n-1}(l)_{m,\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\beta_{m+1}(n|\lambda) - \beta_{m+1}(\lambda)}{m+1} \\ &= \frac{B_{m+1}(n) - B_{m+1}}{m+1}, \quad (m \geq 0, n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

elde edilir.



BÖLÜM V

q -PARAMETRELİ POLY-BERNOULLİ POLİNOMLARI

Bu bölüm [3] ve [11] çalışmalarında yer alan tanımlardan ve elde edilen sonuçlardan yararlanılarak yazılmıştır. Öncelikle q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları tanıtılacak ve bazı teoremleri isparlanacaktır. Daha sonra q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomlarıyla ilgili tanımlar verilecek teoremleri ispatlanacaktır.

5.1 q -parametrelili Poly-Bernoulli Polinomları

n ve k , $n \geq 0$ ve $k \geq 1$ olan tamsayılar ve $q \neq 0$ olan bir gerçektek sayı olsun. Poly-Bernoulli sayıları q -parametresi ile şu şekilde tanımlanır ([3]):

$$\frac{qLi_k\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)}{1-e^{-qt}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^n}{n!}. \quad (5.1.1)$$

Dolayısıyla $q=1$ ise $B_{n,1}^{(k)} = B_n^{(k)}$ Bernoulli sayılarıdır.

Poly-Bernoulli sayılarının genel bir durumu olarak, q -parametrelili poly-Benoulli sayıları $B_{n,q}^{(k)}$, $S_2(n, m)$ ikinci tip Stirling sayıları cinsinden ifade edilebilir. Buna göre aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 5.1.1: $B_{n,q}^{(k)} = \sum_{m=0}^n S_2(n, m) \frac{(-q)^{n-m} m!}{(m+1)^k}$ eşitliği sağlanır ([3]).

İspat: (5.1.1) eşitliğini kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^n}{n!} = \frac{qLi_k\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)}{1-e^{-qt}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)^m}{(m+1)^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{-m} m!}{(m+1)^k} \sum_{n=m}^{\infty} S_2(n, m) \frac{(-qt)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n S_2(n, m) \frac{(-q)^{n-m} m!}{(m+1)^k} \right] \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Sonuç, katsayılar karşılaştırılarak elde edilir. Giriş bölümünde verilen $B_n^{(k)}$ için üreteç fonksiyonu ve kombinasyonel ifadenin karşılaştırılmasıyla gösterilir.

Bu formül, $B_{n,q}^{(k)}$ nun polinom yapısını verir. $n \neq 0$ ve $S_2(n, n) = 1$ için $S_2(n, 0) = 0$ olduğundan, $B_{n,q}^{(k)} = B_n^{(k)}$ basit poly-Bernoulli sayıları ve $B_{n,q}^{(k)}$ nun rasyonel katsayıları olan $n-1$ dereceli q nun bir polinomu olur.

$B_{n,q}^{(k)}$ tanımından farklı üst indeksli $B_{n,q}^{(k-1)}$ sayılarını içeren bir yineleme bağıntısı üretilebilir. Bu tür yineleme bağıntıları poly-Bernoulli sayıları için ve poly-Bernoulli polinomları için elde edilebilir.

Teorem 5.1.2: k ve $n \geq 1$ tamsayıları için,

$$B_{n,q}^{(k)} = \frac{1}{n+1} \left\{ B_{n,q}^{(k-1)} - \sum_{m=1}^{n-1} q^{n-m} \binom{n}{m-1} B_{m,q}^{(k)} \right\}$$

eşitliği sağlanır ([3]).

İspat: $Li'_k(t) = \frac{1}{t} Li_{k-1}(t)$ eşitliği bu ilişkiyi verir.

$$Li'_k \left(\frac{1-e^{-qt}}{q} \right) = \frac{qe^{-qt}}{1-e^{-qt}} Li_{k-1} \left(\frac{1-e^{-qt}}{q} \right).$$

Diğer taraftan (5.1.1) eşitliğinden,

$$Li'_k \left(\frac{1-e^{-qt}}{q} \right) = e^{-qt} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^n}{n!} + \frac{1-e^{-qt}}{q} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

olduğu anlaşılır.

$$\frac{qLi_{k-1}\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)}{1-e^{-qt}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k-1)} \frac{t^n}{n!} \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k-1)} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^n}{n!} + \frac{e^{qt}-1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^n}{n!} + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n t^n}{n!} \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,q}^{(k)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)} \frac{t^n}{n!} + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{q^{n-m} B_{m+1,q}^{(k)}}{(n-m)!m!} \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(B_{n,q}^{(k)} + \sum_{m=0}^{n-1} q^{n-m-1} \binom{n}{m} B_{m+1,q}^{(k)} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu nedenle, son denklem $n+1$ e bölünürse,

$$\begin{aligned} B_{n,q}^{(k-1)} &= B_{n,q}^{(k)} + \sum_{m=1}^{n-1} q^{n-m} \binom{n}{m-1} B_{m,q}^{(k)} \\ &= (n+1) B_{n,q}^{(k)} + \sum_{m=1}^{n-1} q^{n-m} \binom{n}{m-1} B_{m,q}^{(k)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.1.3: Negatif olmayan n ve pozitif k tamsayıları için,

$$B_{n,q}^{(-k)} = q \sum_{j=0}^{\min(n,k)} (j!)^2 S_2(n, j, q) S_2^{q^{-1}}(k+1, j+1)$$

eşitliği sağlanır ([3]).

İspat için ikinci türden ağırlıklı Stirling sayılarına ve $\mathcal{A}$ -Stirling sayılarına ilişkin iki bağıntıya ihtiyaç vardır.

Lemma 5.1.4:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} S_2(k, j) = S_2(n, j, q) \quad (5.1.2)$$

ve

$$\frac{1}{q} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} S_2^{q^{-1}}(n, j) = S_2^{q^{-1}}(k+1, j+1) \quad (5.1.3)$$

olur ([3]).

İspat: İkinci denklem için $\mathcal{L}$ -Stirling sayılarının tanımı kullanılarak ve $m, j+1$ ile değiştirildiğinde,

$$\frac{(q^{-1}e^t - 1)^{j+1}}{(j+1)!} = \sum_{n=j+1}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(n, j+1) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=j}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(n+1, j+1) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

elde edilir.

t değişkenine göre türevi,

$$\sum_{n=j}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(n+1, j+1) \frac{t^n}{n!} = \frac{(q^{-1}e^t - 1)^j q^{-1}e^t}{j!}$$

olur.

O halde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=j}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(n+1, j+1) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(n+1, j+1) \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{(q^{-1}e^t - 1)^j q^{-1}e^t}{j!} \\ &= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(k, j) \frac{t^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} S_2^{q^{-1}}(n, j) \right) \frac{t^k}{k!}$$

elde edilir.

Katsayıların karşılaştırılması sonucu verir. (5.1.2) denklemi daha doğrudan,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q^{n-k} \binom{n}{k} S_2(k, j) \right) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{q^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!} \frac{S_2(k, j) t^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qt)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, j) \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t - 1)^j e^{qt}}{j!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, j, q) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir ([3]).

Teorem 5.1.3'ün ispatı: $B_{n,q}^{(-k)}$ nun üreteç fonksiyonunu,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(-k)} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[q^{-1} (1 - e^{-qt}) \right]^m (m+1)^k \frac{u^k}{k!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} q^{-m} (1 - e^{-qt})^m e^{(m+1)u} = \frac{qe^{u+qt}}{q - (e^{qt} - 1)(e^u - q)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^u (q^{-1}e^u - 1)^j e^{qt} (e^{qt} - 1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[j! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(k, j) \frac{u^k}{k!} \right] \left[j! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, j) \frac{q^n t^n}{n!} \right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[j! \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^n S_2(k, j) \right) \frac{t^n}{n!} \right] \times \left[j! \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} S_2^{q^{-1}}(n, j) \right) \frac{u^k}{k!} \right] \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır ([3]). Şimdi, Lemma 5.1.4 ten,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(-k)} \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[j! \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, j, q) \frac{t^n}{n!} \right] \left[j! \sum_{k=0}^{\infty} S_2^{q^{-1}}(k+1, j+1) \frac{u^k}{k!} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\min(n,k)} (j!)^2 q S_2(n, j, q) S_2^{q^{-1}}(k+1, j+1) \right) \frac{t^n}{n!} \frac{u^k}{k!}$$

olur.

Stirling sayıları için ortogonallik ve ters bağıntılar, poly-Bernoulli sayılarının bazı bağıntılarını q parametresi ile tanımlar. Ortogonallik bağıntılarından,

$$\sum_{r=m}^n (-1)^{n-r} S_1(n, r) S_2(r, m) = \sum_{r=m}^n (-1)^{r-m} S_2(n, r) S_1(r, m) = \delta_{mn}$$

olur. Burada δ_{mn} Kronecker sembolüdür. Burada, $m = n$ ve $\delta_{mn} = 0$ için $\delta_{mn} = 1$ olur.

Aksi halde ters bağıntılar,

$$f_n = \sum_{m=0}^n (-1)^{n+m} S_1(n, m) g_m \Leftrightarrow g_n = \sum_{m=0}^n S_2(n, m) f_m$$

olur. Bu ters bağıntılarla, $B_{n,q}^{(k)}$ Stirling sayılarına bağlanır.

Teorem 5.1.5: Poly-Bernoulli sayıları bir q parametresi ile

$$\sum_{m=0}^n S_1(n, m) q^{-m} B_{m,q}^{(k)} = \frac{n!}{q^n (n+1)^k}$$

şeklinde tanımlanır ([3]).

İspat: Denklem $f_m = \frac{(-1)^m q^{-m} m!}{(m+1)^k}$ ve $g_n = (-1)^n q^{-n} B_{n,q}^{(k)}$ için ters bağıntılardan gelir.

Şimdi poly-Bernoulli polinomları bir q parametresi ile tanımlansın:

$$\frac{q Li_k \left(\frac{1-e^{-qt}}{q} \right)}{1-e^{-qt}} e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!}, ([3]).$$

Eğer, $q=1$ ise $B_{n,1}^{(k)}(x) = B_n^{(k)}(x)$ poly-Bernoulli polinomlarıdır. x ve $-x$ ile değiştirilen poly-Bernoulli polinomları için farklı bir tanım vardır. $x=0$ ise $B_{n,q}^{(k)}(0) = B_{n,q}^{(k)}$ poly-Bernoulli sayılarıdır.

Bir q parametresine sahip poly-Bernoulli polinomları, ikinci türden Stirling sayıları ile ifade edilebilir.

Teorem 5.1.6: q parametrelili poly-Bernoulli polinomları için,

$$B_{n,q}^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n S_2\left(n, m, \frac{x}{q}\right) \frac{(-q)^{n-m} m!}{(m+1)^k}$$

eşitliği sağlanır ([3]).

İspat:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} &= \frac{q Li_k\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)}{1-e^{-qt}} e^{-tx} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q)^{-m}}{(m+1)^k} e^{-qt\frac{x}{q}} (e^{-qt} - 1)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q)^{-m} m!}{(m+1)^k} \sum_{n=m}^{\infty} S_2\left(n, m, \frac{x}{q}\right) \frac{(-qt)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n S_2\left(n, m, \frac{x}{q}\right) \frac{(-q)^{n-m} m!}{(m+1)^k} \right] \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Böylece sonuç aşağıdaki gibidir.

$B_{n,q}^{(k)}(x)$ polinomları için, Teorem 5.1.2 nin ispatındaki sayı durumuna benzer bir yineleme formülü elde edilir.

Teorem 5.1.7: k ve $n \geq 1$ pozitif tamsayıları için,

$$B_{n,q}^{(k)}(x) = \frac{1}{n+1} \left(B_{n,q}^{(k-1)}(x) - xq^{n-1} - \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \frac{x}{q} \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \right\} q^{n-m} B_{m,q}^{(k)}(x) \right)$$

eşitliği sağlanır ([3]).

Birinci türden Stirling sayıları,

$$\frac{(1+t)^{-x} [\log(1+t)]^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} S_1(n, m, x) \frac{t^n}{n!}$$

ve

$$S_1(n, m, x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (x)^{(r)} S_1(n-r, m)$$

şeklinde tanımlanmıştı. Burada $(x)^{(r)}$, artan faktöriyeldir. Bu denklem $n < m$ için $S_1(n, m, x) = 0$ olduğunu gösterir.

Teorem 5.1.8: q parametrelili poly-Bernoulli polinomları için,

$$\sum_{m=0}^n S_1\left(n, m, \frac{x}{q}\right) q^{-m} B_{m,q}^{(k)}(x) = \frac{n!}{q^n (n+1)^k}$$

eşitliği sağlanır ([3]).

5.2. q -parametrelili Dejenere Poly-Bernoulli Polinomları

Bu kısımda q -parametrelili tamamen dejenere poly-Bernoulli polinomları $\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x)$ ile 5.1 den q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları ise $B_{n,q}^{(k)}(x)$ ile verilmiştir.

Üreteç fonksiyonu olarak $\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x)$,

$$\frac{q Li_k\left(\frac{1-(1+\lambda t)^{-\frac{q}{\lambda}}}{q}\right)}{1-(1+\lambda t)^{-\frac{q}{\lambda}}} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_{n \geq 0} \beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) \frac{t^n}{n!} \quad (5.2.1)$$

şeklinde tanımlanır ([11]).

$q=1$ alındığında $\beta_n^{(k)}(\lambda, x) = \beta_{n,1}^{(k)}(\lambda, x)$ tamamen dejenere poly-Bernoulli polinomları elde edilir.

Diğer yandan $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) = B_{n,q}^{(k)}(x)$ olur.

$x=0$ alındığında ise $\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, 0)$ q -parametrelili poly-Bernoulli sayıları elde edilir.

(5.2.1) den bir q -parametrelili tamamen dejenere poly-Bernoulli polinomlarının Sheffer dizisi tarafından verildiği gösterilebilir.

$$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) \sim \left(\frac{1-e^{-qt}}{qLi_k\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)}, \frac{e^{\lambda t}-1}{\lambda} \right) \quad (5.2.2)$$

q -parametrelili tamamen dejenere poly-Bernoulli polinomlarının özellikleri incelenirken birinci türden Stirling sayılarına ihtiyaç duyulur. Bu nedenle Stirling sayıları $S_1(n, m)$ in daha önceki bölümlerde de verildiği gibi,

$$(x)_{n,\lambda} = \lambda^n (x/\lambda)_n = \sum_{l=0}^n S_1(n, l) \lambda^{n-l} x^l \sim (1, (e^{\lambda t}-1)/\lambda) \quad (5.2.3)$$

olur.

Burada $(x)_{n,\lambda}$, $n \geq 1$ için,

$$(x)_{n,\lambda} = x(x-\lambda)(x-2\lambda)\dots(x-(n-1)\lambda) \quad (5.2.4)$$

olur ve $(x)_{0,\lambda} = 1$ dir.

Teorem 5.2.1: Tüm $n \geq 0$ sayıları için,

$$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) = - \sum_{r=0}^n \left(\sum_{l=r}^n \sum_{m=0}^{l-r} \frac{m! \binom{l}{r}}{(m+1)^k} S_1(n, l) S_2(l-r, m) \lambda^{n-l} (-q)^{l-r-m+1} \right) x^r$$

eşitliği sağlanır ([11]).

Teorem 5.2.2: Tüm $n \geq 0$ sayıları için,

$$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{l=r}^n \sum_{m=0}^{l-r} \binom{l}{r} \lambda^{n-r-m} S_1(n, l) S_2(l-r, m) \beta_{m,q}^{(k)}(\lambda, 0) \right) x^r$$

eşitliği sağlanır ([11]).

Teorem 5.2.3: Tüm $n \geq 1$ sayıları için,

$$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) = - \sum_{r=0}^n \left(\sum_{l=0}^{n-r} \sum_{m=0}^{n-l-r} \binom{n-1}{l} \binom{n-l}{r} \frac{m! \lambda^l (-q)^{n-l-r-m+1}}{(m+1)^k} B_l^{(n)} S_2(n-l-r, m) \right) x^r$$

Burada $B_l^{(n)}$, n mertebeli Bernoulli sayısıdır.

Teorem 5.2.4: Tüm $n \geq 1$ sayıları için,

$$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) = \sum_{r=0}^n \left(\sum_{l=0}^{n-r} \sum_{m=0}^{n-l-r} \binom{n-1}{l} \binom{n-l}{r} \lambda^{n-r-m} B_l^{(n)} \beta_{m,q}^{(k)}(\lambda, 0) S_2(n-l-r, m) \right) x^r$$

eşitliği sağlanır ([11]).

Teorem 5.2.5: $k \geq 2$ olsun. O halde,

$$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) = \sum_{j_1 + \dots + j_k \leq n} \frac{B_{j_1,q}(-q)}{j_1!(j_1+1)} \frac{B_{j_k}(1)q^{j_k}}{j_k!} \prod_{i=2}^{k-1} \frac{B_{j_i}q^{j_i}}{j_i!(j_1 + \dots + j_i + 1)} \alpha_{j_1 + \dots + j_k}$$

eşitliği sağlanır ([11]).

Burada $\alpha_{j_1 + \dots + j_k} = \frac{(j_1 + \dots + j_k)!}{\lambda^{j_1 + \dots + j_k}} \sum_{l=j_1 + \dots + j_k}^n \binom{n}{l} S_1(l, j_1 + \dots + j_k) \lambda^l (x)_{n-l, \lambda}$ dir.

(5.2.2) eşitliğine ve $(x)_{n, \lambda} \sim \left(1, \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda}\right)$ olduğuna dikkat edilirse Sheffer özdeşliği elde

edilir: $\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x+y) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \beta_{j,q}^{(k)}(\lambda, x) (y)_{n-j, \lambda}$.

Teorem 5.2.6: Tüm $n \geq 1$ sayıları için,

$$\beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x + \lambda) = \beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) + n \lambda \beta_{n-1,q}^{(k)}(\lambda, x)$$

olur ([11]).

Teorem 5.2.7: Tüm $n \geq 0$ sayıları için,

$$\beta_{n+1,q}^{(k)}(\lambda, x) = x \beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x - \lambda)$$

$$- \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{m+1} \frac{\lambda^{n-m} q^l}{m+1} \binom{m+1}{l} S_1(n, m) (B_{m+1-l,q}^{(k)} - B_{m+1-l,q}^{(k-1)}) B_l((x - \lambda)/q)$$

eşitliği sağlanır ([11]).

Teorem 5.2.8: Tüm $n \geq 1$ sayıları için,

$$\frac{d}{dx} \beta_{n,q}^{(k)}(\lambda, x) = n! \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-\lambda)^{n-l-1}}{(n-l)l!} \beta_{l,q}^{(k)}(\lambda, x)$$

eşitliği sağlanır ([11]).

BÖLÜM VI

GOULD-HOPPER POLİNOMLARINI İÇEREN BERNOULLİ POLİNOMLARI

Bu bölümde Gould-Hopper polinomlarını içeren Bernoulli polinomları incelenmiştir. q -parametrelili poly-Bernoulli polinomlarının Gould-Hopper polinomlarını içeren tanımını verilmiştir ve bazı teoremleri ispatlanmıştır.

Daha sonra Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere Bernoulli polinomları tanımlanmıştır. q -parametrelili dejenere Gould-Hopper polinomları verilmiştir.

Son olarak Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomlarının tanımını verilmiştir ve teoremleri ispatlanmıştır.

6.1. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren q -parametrelili Poly-Bernoulli Polinomları

Tanım 6.1.1: $n, k \in \mathbb{Z}$ için $n \geq 0$ ve $k > 0$ alınır ve $q \in \mathbb{R} - \{0\}$ için, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili poly-Bernoulli polinomlarının üstel üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \frac{q Li_k \left(\frac{1-e^{-qt}}{q} \right)}{1-e^{-qt}} e^{xt+yt^j} \quad (6.1.1)$$

şeklinde tanımlanır ([4]).

$x = y = 0$ alınır ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(0,0) =: {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}$ Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili poly-Bernoulli sayıları elde edilir.

${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y)$ nin bazı özel durumları aşağıdaki ardışık açıklamalarla listelenmiştir.

Açıklama 1: $y = 0$ için, ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,0) := {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k)}(x)$, q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları elde edilir.

Açıklama 2: ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y)$ 'de $q=1$ alınır, ${}_{GH}\beta_n^{(k,j)}(x,y)$ Gould-Hopper polinomlarını içeren poly-Bernoulli polinomları elde edilir.

Açıklama 3: $q=1$ ve $y=0$ alınır, $B_n^{(k)}(x)$, poly-Bernoulli polinomu elde edilir.

Açıklama 4: $q=k=1$ ve $y=0$ alınır, $B_n(x)$ klasik Bernoulli polinomu olur.

${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}$ için toplama formülü aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 6.1.1:

$${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} {}_{GH}\beta_{n-m,q}^{(k,j)}(x_1, y_1) H_m^{(j)}(x_2, y_2) \quad (6.1.2)$$

eşitliği sağlanır ([4]).

İspat: (6.1.1) eşitliği yardımıyla ve seri açılımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \frac{t^n}{n!} &= \frac{q Li_k\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)}{1-e^{-qt}} e^{(x_1+x_2)t + (y_1+y_2)t^j} \\ &= \frac{q Li_k\left(\frac{1-e^{-qt}}{q}\right)}{1-e^{-qt}} e^{x_1 t + y_1 t^j} e^{x_2 t + y_2 t^j} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} {}_{GH}\beta_{n-m,q}^{(k,j)}(x_1, y_1) H_m^{(j)}(x_2, y_2) \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 6.1.2: Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} {}_{GH}\beta_{n-m,q}^{(k,j)} H_m^{(j)}(x,y).$$

${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y)$ in türev özellikleri aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 6.1.3: Aşağıdaki formüller sağlanır ([4]).

$$\frac{\partial {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y)}{\partial x} = n {}_{GH}\beta_{n-1,q}^{(k,j)}(x,y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y)}{\partial y} = (n)_j {}_{GH}\beta_{n-j,q}^{(k,j)}(x,y).$$

Burada $(n)_j$ azalan faktöriyel fonksiyonudur.

İspat: İspat (6.1.1) eşitliğinden kolaylıkla yapılabilir.

${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y)$ in integral özellikleri aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 6.1.4: Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\int_{\nu}^{\mu} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y) dx = \frac{{}_{GH}\beta_{n+1,q}^{(k,j)}(\mu,y) - {}_{GH}\beta_{n+1,q}^{(k,j)}(\nu,y)}{n+1}$$

ve

$$\int_{\gamma}^{\zeta} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y) dy = \frac{{}_{GH}\beta_{n+j,q}^{(k,j)}(x,\zeta) - {}_{GH}\beta_{n+j,q}^{(k,j)}(x,\gamma)}{(n+1)^{(j)}}.$$

Burada $(n)^{(j)}$ artan faktöriyel sembolüdür.

İspat: ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y)$ ün türev özelliklerini kullanarak ve Teorem 6.1.3 ten ispat kolaylıkla yapılabilir.

Teorem 6.1.5: Aşağıdaki formül sağlanır ([4]).

$${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y) = \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} {}_{GH}\beta_{n-jm,q}^{(k,j)}(x) \frac{\{n\}_m y^m}{(n-jm)!}.$$

İspat: (6.1.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH} \beta_{n,q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{q Li_k \left(\frac{1-e^{-qt}}{q} \right)}{1-e^{-qt}} e^{xt} e^{yt^j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH} \beta_{n,q}^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{t^{jn}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} {}_{GH} \beta_{n-jm,q}^{(k)}(x) \frac{t^{n-jm}}{(n-jm)!} y^m \frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} {}_{GH} \beta_{n-jm,q}^{(k)}(x) \frac{(n)_m y^m}{(n-jm)!} \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanmış olur.

6.2. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren Dejenere Bernoulli Polinomları

$\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere ${}_{GH} B_{n,\lambda;\beta,\gamma}^{(j)}(x,y)$ Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere Bernoulli polinomunun üreteç fksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH} B_{n,\lambda;\beta,\gamma}^{(j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e_{\lambda}(t)-1} e_{\beta}^x(t) e_{\lambda}^y(t^j)$$

şeklinde tanımlanır ([7]).

λ, β ve γ sıfıra giderken Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere Bernoulli polinomları, klasik Bernoulli polinomlarına dönüşür.

$x = y = 0$ için, ${}_{GH} B_{n,\lambda;\beta,\gamma}^{(j)}(0,0) := B_{n,\lambda}$ dejenere Bernoulli sayıları elde edilir.

${}_{GH} B_{n,\lambda;\beta,\gamma}^{(j)}(x,y)$ in toplam formülü aşağıda verilmiştir.

Teorem 6.2.1: Aşağıdaki formül sağlanır ([7]).

$${}_{GH}B_{n,\lambda;\beta,\gamma}^{(j)}(x+\varsigma, y+\vartheta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} {}_{GH}B_{n-k,\lambda;\beta,\gamma}^{(j)}(\varsigma, \vartheta) H_{k,\beta,\gamma}^{(j)}(x, y).$$

6.2.1. q -parametrelili Dejenere Gould-Hopper Polinomları

$n, j \in \mathbb{Z}$ için $n \geq 0$ ve $q, x, y \in \mathbb{R} / \{0\}$ için $q \neq 0$ olsun. q -parametrelili dejenere Gould-Hopper polinomunun üreteç fonksiyonu,

$$G(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} = (1 + \lambda q t)^{\frac{x}{\lambda}} (1 + \lambda q t^j)^{\frac{y}{\lambda}} \quad (6.2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır ([5]).

q -parametrelili dejenere Gould-Hopper polinomlarının bazı özel durumları aşağıdaki açıklamalarda incelenmiştir.

Açıklama :

1. $\lambda \rightarrow 0$ için $H_{n,q}^{(j)}(x, y)$, q -parametrelili Gould-Hopper polinomları elde edilir.
2. $q \rightarrow 1$ için $H_n^{(j)}(x, y; \lambda)$, dejenere Gould-Hopper polinomları elde edilir.
3. $\lambda \rightarrow 0$ ve $q \rightarrow 1$ için $H_n^{(j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomları elde edilir.
4. $j = 2$ ve $q \rightarrow 1$ için $H_n(x, y; \lambda)$, dejenere Hermite polinomları elde edilir.
5. $\lambda \rightarrow 0$, $j = 2$, $q \rightarrow 1$ için $H_n(x, y)$, klasik Hermite polinomları elde edilir.

Teorem 6.2.1.1: q -parametrelili dejenere Gould-Hopper polinomları aşağıdaki gibi gösterilebilir ([5]).

$$H_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \frac{x^{(n-jk, \lambda)} y^{(k, \lambda)}}{(n-jk)! k!} q^{n-(j-1)k}.$$

İspat: Bir q -parametresi ve ile dejenere Gould-Hopper polinomlarının üreteç fonksiyonundan,

$$\begin{aligned}
(1 + \lambda qt)^{\frac{x}{\lambda}} (1 + \lambda qt^j)^{\frac{y}{\lambda}} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n,\lambda)} \frac{(qt)^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} y^{(k,\lambda)} \frac{q^k t^{kj}}{k!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^{(n,\lambda)} y^{(k,\lambda)} \frac{(qt)^n}{n!} \frac{q^k t^{kj}}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \frac{x^{(n-jk,\lambda)} y^{(k,\lambda)}}{(n-jk)! k!} q^{n-(j-1)k} \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 6.2.1.2: Aşağıdaki fark formülleri geçerlidir ([5]).

$$\Delta_{\lambda} x H_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda) = qn H_{n-1,q}^{(j)}(x, y; \lambda), \quad (6.2.1.2)$$

$$\Delta_{\lambda} y H_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda) = qn^{(j,1)} H_{n-j,q}^{(j)}(x, y; \lambda). \quad (6.2.1.3)$$

İspat: $\Delta_{\lambda} x G(x, y, t) = qt G(x, y, t)$ eşitliğinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\lambda} x H_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} q H_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} qn H_{n-1,q}^{(j)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Dolayısı ile (6.2.1.2) ispatlanır. Aynı şekilde (6.2.1.3) te elde edilebilir.

Teorem 6.2.1.3: Aşağıdaki ters dönüşüm formülü geçerlidir ([5]).

$$x^{(n,\lambda)} = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \frac{q^{(1-j)k} y^{(k,\lambda)}}{(n-jk)! k!} H_{n-jk,q}^{(j)}(x, y; \lambda).$$

İspat: $(1 + \lambda q^t)^{\frac{x}{\lambda}} = (1 + \lambda qt^j)^{-\frac{y}{\lambda}} G(x, y, t)$ denkleminde ispat yapılabilir.

Teorem 6.2.1.4: Aşağıdaki toplam formülü geçerlidir ([5]).

$$H_{n,q}^{(j)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2; \lambda) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_{k,q}^{(j)}(x_1, y_1; \lambda) H_{n-k,q}^{(j)}(x_2, y_2; \lambda) \quad (6.2.1.4)$$

İspat: $G(x_1 + x_2, y_1 + y_2, t) = G(x_1, y_1, t) G(x_2, y_2, t)$ fonksiyonel denkleminde ispat yapılabilir.

Teorem 6.2.1.5: a sıfır olmayan bir karmaşık sayı olsun, o zaman aşağıdaki denklem geçerlidir ([5]).

$$H_{n,q}^{(j)}(ax, ay; \lambda) = a^n H_{n,q}^{(j)}\left(x, y; \frac{\lambda}{a}\right).$$

6.2.2. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren q -parametrelili Dejenere poly-Bernoulli Polinomları

$n, k, j \in \mathbb{Z}$ için $n \geq 0$ ve $q, x, y \in \mathbb{R} / \{0\}$ için $k, j > 0$ ve $q \neq 0$ olsun. Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} = \frac{q Li_k \left(\frac{1 - (1 + \lambda qt)^{-\frac{1}{\lambda}}}{q} \right)}{1 - (1 + \lambda qt)^{-\frac{1}{\lambda}}} (1 + \lambda qt)^{\frac{x}{\lambda}} (1 + \lambda qt^j)^{\frac{y}{\lambda}} \quad (6.2.2.1)$$

şeklinde tanımlanır ([5]).

$x = 0 = y$ alınırsa ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(0, 0; \lambda) := \beta_{n,q}^{(k)}(\lambda)$, q -parametrelili tamamen dejenere poly-Bernoulli sayıları elde edilir.

${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda)$ nin bazı özel durumları aşağıdaki açıklamalarda listelenmiştir.

Açıklama :

1. $\lambda \rightarrow 0$ alınırsa ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları elde edilir.
2. $q \rightarrow 1$ alınırsa ${}_{GH}\beta_n^{(k,j)}(x, y; \lambda)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere poly-Bernoulli polinomları elde edilir.
3. $y = 0$ alınırsa $\beta_{n,q}^{(k)}(x; \lambda)$, q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomları olur.

4. $\lambda \rightarrow 0$ ve $q \rightarrow 1$ alınır ${}_{GH}\beta_n^{(k,j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren poly-Bernoulli polinomları olur.
5. $k=1$ alınır ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere Bernoulli polinomları elde edilir.
6. $\lambda \rightarrow 0$ ve $k=1$ alınır ${}_{GH}\beta_{n,q}^{(j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili Bernoulli polinomları elde edilir.
7. $k=1$ ve $q \rightarrow 1$ alınır ${}_{GH}\beta_n^{(j)}(x, y; \lambda)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere Bernoulli polinomları elde edilir.
8. $k=q \rightarrow 1$ ve $y=0$ alınır $\beta_n(x; \lambda)$, dejenere Bernoulli polinomları elde edilir.
9. $k=q \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow 0$ ve $j=2$ alınır ${}_{GH}\beta_n(x, y)$, Hermite tabanlı Bernoulli polinomları olur.
10. $k=q \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow 0$ ve $y=0$ alınır $B_n(x)$, klasik Bernoulli polinomları elde edilir.

Teorem 6.2.2.1: Aşağıdaki bağlantı formülü geçerlidir ([5]).

$${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \beta_{s,q}^{(k)}(\lambda) H_{n-s,q}^{(j)}(x, y; \lambda).$$

İspat: İspat Cauchy çarpımından yapılabilir.

Teorem 6.2.2.2: Aşağıdaki fark formülleri sağlanır ([5]).

$$\Delta_{\lambda,x} \left[{}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda) \right] = qn {}_{GH}\beta_{n-1,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda)$$

$$\Delta_{\lambda,y} \left[{}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda) \right] = qn^{(j,1)} {}_{GH}\beta_{n-j,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda).$$

Teorem 6.2.2.3: Aşağıdaki eşitlik sağlanır ([5]).

$${}_{GH}\beta_{n,q}^{(k,j)}(x, y; \lambda) = n! \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{(s,1)} \frac{\lambda^s q^s}{s!(n-js)!} {}_{GH}\beta_{n-js,q}^{(k)}(x; \lambda).$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(j)}(x, y; \lambda) \frac{t^n}{n!} &= \frac{qLi_k \left(\frac{1 - (1 + \lambda t)^{-\frac{q}{\lambda}}}{q} \right)}{1 - (1 + \lambda t)^{-\frac{q}{\lambda}}} (1 + \lambda qt)^{\frac{x}{\lambda}} (1 + \lambda qt^j)^{\frac{y}{\lambda}} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,q}^{(k)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{(n,1)} q^n \lambda^n \frac{t^{jn}}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} {}_{GH}\beta_{n-js,q}^{(k)}(x; \lambda) \frac{t^{n-js}}{(n-js)!} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{(s,1)} q^s \lambda^s \frac{t^{js}}{s!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor} {}_{GH}\beta_{n-js,q}^{(k)}(x; \lambda) \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{(s,1)} \frac{q^s \lambda^s n!}{s!(n-js)!} \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM VII

BULGULAR

7.1. Gould-Hopper Polinomlarını İçeren q -parametrelili II.Tip Dejenere Poly-Bernoulli Polinomları

Bu bölümde, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere birinci tür Stirling polinomları ve Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili II.tip dejenere poly-Bernoulli polinomları ile ilgilenilmiştir. Ardından, bunların çeşitli ilişkileri ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 7.1.1: $n, m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $j \in \mathbb{N}$ ve $q \in \mathbb{R} / \{0\}$ alınsın. Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere birinci türden Stirling polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır ([17]).

$$\sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m : x, y) \frac{t^n}{n!} = \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^m}{m!} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j). \quad (7.1.1)$$

Açıklama 1:

1. $\lambda \rightarrow 0$ alınırsa $S_{1;q}^{(j)}(n, m : x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili birinci türden Stirling polinomları elde edilir.
2. $q \rightarrow 1$ alınırsa $S_{1,\lambda}^{(j)}(n, m : x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere birinci türden Stirling polinomları elde edilir.
3. $y = 0$ alınırsa $S_{1,\lambda;q}(n, m : x)$, q -parametrelili dejenere birinci türden Stirling polinomları elde edilir.
4. $\lambda \rightarrow 0$ ve $q \rightarrow 1$ alınırsa $S_1^{(j)}(n, m : x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren birinci türden Stirling polinomları elde edilir.

5. $\lambda \rightarrow y = 0$ alınrsa $S_{1;q}(n, m : x)$, q -parametrelili birinci türden Stirling polinomları elde edilir.
6. $\lambda \rightarrow y = 0$ ve $q \rightarrow 1$ alınrsa $S_1(n, m : x)$, birinci türden Stirling polinomları elde edilir.
7. $x = y = 0$ alınrsa $S_{1,\lambda;q}(n, m)$, q -parametrelili dejenere birinci türden Stirling sayıları elde edilir.
8. $\lambda \rightarrow y = x = 0$ ve $q \rightarrow \alpha = 1$ alınrsa $S_1(n, m)$, bilinen birinci türden Stirling sayıları elde edilir.

Teorem 7.1.1: $j \in \mathbb{N}$ ve $q \in \mathbb{R} / \{0\}$ için toplam formülleri,

$$S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m : x, y) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} S_{1,\lambda;q}(s, m) GH_{n-s,\lambda;q}^{(j)}(x, y)$$

$$S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m : x, y) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \lambda^s q^s \left(\frac{x}{\lambda}\right)_s S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-s, m : 0, y)$$

$$S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m : x, y) = n! \sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \frac{\lambda^s q^s}{s!(n-js)!} \left(\frac{y}{\lambda}\right)_s S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-js, m : x)$$

sağlanır ([17]).

İspat: (7.1.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m : x, y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^m}{m!} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \right) S_{1,\lambda;q}(s, m) GH_{n-s,\lambda;q}^{(j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur ve aynı şekilde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m : x, y) \frac{t^n}{n!} = \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^m}{m!} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m: 0, y) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda} \right)_s q^n \lambda^n \frac{t^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-s, m: 0, y) \lambda^s q^s \left(\frac{x}{\lambda} \right)_s \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur ve son olarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m: x, y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^m}{m!} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m: x) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s q^n \lambda^n \frac{t^{jn}}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-j s, m: x) \frac{t^{n-j s}}{(n-j s)!} \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s q^s \lambda^s \frac{t^{j s}}{s!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-j s, m: x) \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s \frac{\lambda^s q^s n!}{s! (n-j s)!} \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.1.2: Aşağıdaki fark kuralları,

$$\Delta_{\lambda,x} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m: x, y) = q n S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-1, m: x, y)$$

ve

$$\Delta_{\lambda,y} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m: x, y) = q(n)_j S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-j, m: x, y)$$

sağlanır ([17]).

İspat: $\Delta_{\lambda,x} G(x, y, t) = q t G(x, y, t)$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\lambda,x} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m: x, y) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} q S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m: x, y) \frac{t^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q n S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n-1, m: x, y) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur aynı şekilde diğer eşitlikte bulunabilir.

Tanım 7.1.2: $n, k, j \in \mathbb{Z}$ için $n \geq 0$ ve $j > 0$ aynı zamanda $q, x, y \in \mathbb{R} / \{0\}$ için $q \neq 0$ olmak üzere, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili II.tip dejenere poly-Bernoulli polinomlarının üretici fonksiyonu,

$$\frac{qEi_k\left(\frac{\log_\lambda(1+qt)}{q}\right)}{1-e_\lambda^{-1}(qt)}e_\lambda^x(qt)e_\lambda^y(qt^j)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y)\frac{t^n}{n!} \quad (7.1.2)$$

şeklinde tanımlanır ([17]).

$x = 0 = y$ alınırsa ${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(0,0):={}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere II.tip poly-Bernoulli sayıları elde edilir.

${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y)$ in bazı özel durumları aşağıdaki açıklamalarda listelenmiştir.

Açıklama 2:

1. $\lambda \rightarrow 0$ alınırsa ${}_{GH}\beta_{n;q}^{(k,j)}(x,y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili II.tip poly-Bernoulli polinomları elde edilir.
2. $q \rightarrow 1$ alınırsa ${}_{GH}\beta_{n,\lambda}^{(k,j)}(x,y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren II.tip dejenere poly-Bernoulli polinomları elde edilir.
3. $y = 0$ alınırsa $\beta_{n,\lambda;q}^{(k)}(x)$, q -parametrelili II.tip dejenere poly-Bernoulli polinomları elde edilir.

$$\frac{qEi_k\left(\frac{\log_\lambda(1+qt)}{q}\right)}{1-e_\lambda^{-1}(qt)}e_\lambda^x(qt)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda;q}^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}.$$

4. $x = y = 0$ alınırsa $\beta_{n,\lambda;q}^{(k)}$, q -parametrelili II.tip dejenere poly-Bernoulli sayıları elde edilir.

$$\frac{qEi_k\left(\frac{\log_\lambda(1+qt)}{q}\right)}{1-e_\lambda^{-1}(qt)}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{n,\lambda;q}^{(k)}\frac{t^n}{n!}.$$

5. $\lambda \rightarrow 0$ ve $q \rightarrow 1$ alınır ${}_{GH}\beta_n^{(k,j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren II. tip poly-Bernoulli polinomları elde edilir.
6. $k=1$ alınır ${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere Bernoulli polinomları elde edilir.
7. $\lambda \rightarrow 0$ ve $k=1$ alınır ${}_{GH}\beta_{n;q}^{(j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili Bernoulli polinomları elde edilir.
8. $k=1$ ve $q \rightarrow 1$ alınır ${}_{GH}\beta_{n,\lambda}^{(j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere Bernoulli polinomları elde edilir.
9. $k=q \rightarrow 1$ ve $y=0$ alınır $\beta_{n,\lambda}(x)$, dejenere Bernoulli polinomları elde edilir.
10. $k=q \rightarrow 1$ ve $\lambda \rightarrow 0$ alınır ${}_{GH}\beta_n^{(j)}(x, y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren Bernoulli polinomları elde edilir.
11. $k=q \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow 0$ ve $j=2$ alınır ${}_HB_n(x, y)$, Hermite tabanlı Bernoulli polinomları elde edilir.
12. $k=q \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow 0$ ve $y=0$ alınır $B_n(x)$, klasik Bernoulli polinomları elde edilir.

Teorem 7.1.3: (Toplam Formülleri)

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \beta_{s,\lambda;q}^{(k)} {}_{GH}H_{n-s,\lambda;q}^{(j)}(x, y)$$

ve

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) = n! \sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s \frac{\lambda^s q^s}{s!(n-js)!} \beta_{n-js,\lambda;q}^{(k)}(x)$$

eşitlikleri sağlanır ([17]).

İspat: Öncelikle,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{1-e_{\lambda}^{-1}(qt)} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \beta_{s,\lambda;q}^{(k)} {}_{GH}H_{n-s,\lambda;q}^{(j)}(x,y) \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{1-e_{\lambda}^{-1}(qt)} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s q^n \lambda^n \frac{t^{jn}}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \beta_{n-js,\lambda;q}^{(k,j)}(x) \frac{t^{n-js}}{(n-js)!} \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s q^s \lambda^s \frac{t^{js}}{s!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \beta_{n-js,\lambda;q}^{(k,j)}(x) \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s \frac{q^s \lambda^s n!}{s!(n-js)!} \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklinde seri açılımları kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 7.1.4: $({}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y))$ için λ -fark kuralları)

$$\Delta_{\lambda,x} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) = nq {}_{GH}\beta_{n-1,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \quad \text{ve} \quad \Delta_{\lambda,y} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) = q(n)_j {}_{GH}\beta_{n-j,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y)$$

eşitlikleri sağlanır ([17]).

İspat: $\Delta_{\lambda,x} G(x,y,t) = qtG(x,y,t)$ eşitliğinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\lambda,x} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} q {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^{n+1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} qn {}_{GH}\beta_{n-1,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!}$$

şeklinde ispat yapılabilir ve aynı şekilde diğer eşitlikte bulunabilir.

Burada, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili II.tip dejenere poly-Bernoulli polinomları ve Gould-Hopper polinomlarını içeren bir q parametresi olan dejenere birinci türden Stirling polinomlarıyla ilgili aşağıdaki teoremlerle çok çeşitli bağlantı formülleri verilmiştir.

Teorem 7.1.5: Aşağıdaki eşitlik sağlanır ([17]).

$$\begin{aligned} & {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) - \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-1)_{l,\lambda} q^l {}_{GH}\beta_{n-l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \\ &= \sum_{u=0}^n \binom{n}{u} \sum_{m=0}^u \left(\sum_{l=0}^u \binom{u}{l} S_{1,\lambda}(l,m)(\lambda)_{u-l} - S_{1,\lambda}(u,m) \right) \frac{q^{n-m}}{\lambda(m+1)^k} {}_{GH}\beta_{n-u,\lambda;q}^{(j)}(x,y). \end{aligned}$$

İspat: Öncelikle,

$$(1 - e_{\lambda}^{-1}(qt)) \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)} \right) = qEi_k \left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q} \right) e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \quad (7.1.3)$$

verilsin. (7.1.3) eşitliğinin sırasıyla sol tarafı ve sağ tarafı *LHS* ve *RHS* olsun. O halde,

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)_{n,\lambda} \frac{q^n t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-1)_{l,\lambda} q^l {}_{GH}\beta_{n-l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left({}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) - \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-1)_{l,\lambda} q^l {}_{GH}\beta_{n-l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

ve

$$RHS = qEi_k \left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q} \right) e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j)$$

$$\begin{aligned}
&= q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^m \cdot q^{-m}}{(m-1)! \cdot m^k} \cdot e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^{m+1} \cdot q^{-m}}{m! (m+1)^k} \cdot e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda}(n, m) \frac{q^n t^n}{n!} \right) \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \frac{q^n t^n}{n!} - 1 \right) \frac{q^{-m}}{(m+1)^k} \cdot e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} S_{1,\lambda}(l, m) (\lambda)_{n-l} - S_{1,\lambda}(n, m) \right) \frac{q^n t^n}{n!} \frac{q^{-m}}{(m+1)^k} \cdot e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} S_{1,\lambda}(l, m) (\lambda)_{n-l} - S_{1,\lambda}(n, m) \right) \frac{q^{n-m}}{(m+1)^k} \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} GH_{n,\lambda;q}^{(j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u=0}^n \binom{n}{u} \sum_{m=0}^u \left(\sum_{l=0}^u \binom{u}{l} S_{1,\lambda}(l, m) (\lambda)_{u-l} - S_{1,\lambda}(u, m) \right) \\
&\quad \times \frac{q^{n-m}}{\lambda (m+1)^k} GH_{n-u,\lambda;q}^{(j)}(x, y) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanır.

Teorem 7.1.6: $|e_{\lambda}^{-1}(qt)| < 1$ için,

$${}_{GH} \beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) = \sum_{m=1}^n \sum_{u=0}^{\infty} \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m; x-u, y)$$

eşitliği sağlanır ([17]).

İspat: (7.1.2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH} \beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} &= q E i_k \left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q} \right) \sum_{u=0}^{\infty} e_{\lambda}^{-u}(qt) e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^{m-1} q^{-m+1}}{(m-1)! m^k} \sum_{u=0}^{\infty} e_{\lambda}^{x-u}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^m}{m!} \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} \sum_{u=0}^{\infty} e_{\lambda}^{x-u}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda}(n,m) \frac{q^n t^n}{n!} \right) \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} \sum_{u=0}^{\infty} e_{\lambda}^{x-u}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} \left(\sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n,m; x-u, y) q^n \frac{t^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n \sum_{u=0}^{\infty} \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n,m; x-u, y) \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.1.7: Aşağıdaki eşitlik sağlanır ([17]).

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) - \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-1)_{l,\lambda} q^l {}_{GH}\beta_{n-l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{1-m}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n,m; x, y).$$

İspat: (7.1.3) ün sırasıyla sol tarafı ve sağ tarafı *LHS* ve *RHS* olsun. O halde,

$$LHS = \sum_{n=0}^{\infty} \left({}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) - \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (-1)_{l,\lambda} q^l {}_{GH}\beta_{n-l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \right) \frac{t^n}{n!}$$

ve

$$\begin{aligned}
RHS &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{1-m}}{m^{k-1}} \frac{\log_{\lambda}(1+qt)^m}{m!} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{1-m}}{m^{k-1}} \sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n,m; x, y) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^n \frac{q^{1-m}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n,m; x, y) \right] \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.1.8:

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) = \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{n+1} \binom{n+1}{u} \left(\sum_{m=1}^u S_{1,\lambda}(u,m) \frac{q^{u-1-m}}{m^{k-1}} \right) {}_{GH}\beta_{n+1-u,\lambda;q}^{(j)}(x+1,y).$$

Burada ${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(j)}(x,y)$, Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili II.tip dejenere Bernoulli polinomlarıdır. Üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e_{\lambda}(qt)-1} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j)$$

şeklindedir ([17]).

İspat: (7.1.2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^n}{n!} &= q \frac{Ei_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{t} \frac{t}{e_{\lambda}(qt)-1} e_{\lambda}^{x+1}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\ &= \frac{q}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda}(n,m) \frac{q^n t^n}{n!} \right) \frac{q^{-m}}{m^{k-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(j)}(x+1,y) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=1}^n S_{1,\lambda}(n,m) \frac{q^{n+1-m} t^n}{m^{k-1} n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(j)}(x+1,y) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{u=0}^n \binom{n}{u} \left(\sum_{m=1}^u S_{1,\lambda}(u,m) \frac{q^{u-1-m}}{m^{k-1}} \right) {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(j)}(x+1,y) \right] \frac{t^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir.

Teorem 7.1.9: Aşağıdaki eşitlik sağlanır ([17]).

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x+1,y) - {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) = \sum_{m=1}^n \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n,m; x+1,y).$$

İspat: (7.1.2) eşitliğinin her iki tarafı $(e_{\lambda}(qt)-1)$ ile çarpılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left({}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x+1,y) - {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \right) \frac{t^n}{n!} = q Ei_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right) e_{\lambda}^{x+1}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(\log_{\lambda}(1+qt))^m}{m!} \right) \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} e_{\lambda}^{x+1}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} \left(\sum_{n=m}^{\infty} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m; x+1, y) \frac{t^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{q^{-m+1}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda;q}^{(j)}(n, m; x+1, y) \right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.1.10: Aşağıdaki eşitlik sağlanır ([17]).

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) = \frac{1}{n+1} \sum_{u=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \sum_{m=1}^s \frac{q^{s-m+1}}{m^{k-1}} \times S_{1,\lambda}(s, m) {}_{GH}\beta_{n+1-s,\lambda/m;qm}^{(j)}\left(\frac{x+u-1}{m}-1, \frac{y}{m}\right)$$

İspat: (7.1.2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{e_{\lambda}^m(qt) - 1^m}{e_{\lambda}(qt) - 1} \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{e_{\lambda}^m(qt) - 1} e_{\lambda}^{x+1}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{1 - e_{\lambda}^{-m}(qt)} \sum_{u=0}^{m-1} e_{\lambda}^{x+u+1-m}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{u=0}^{m-1} \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{1 - e_{\lambda}^{-m}(qt)} e_{\lambda}^{x+u+1-m}(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\
&= \sum_{u=0}^{m-1} \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{t} \frac{t}{1 - e_{\lambda/m}^{-1}(qmt)} e_{\lambda/m}^{\frac{x+u-1}{m}-1}(qmt) e_{\lambda/m}^{\frac{y}{m}}(qmt^j) \\
&= \left(\sum_{u=0}^{m-1} \frac{1}{t} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{q^{-m+1+n}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda}(n, m) \right) \frac{t^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda/m;qm}^{(j)}\left(\frac{x+u-1}{m}-1, \frac{y}{m}\right) \frac{t^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{u=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \sum_{m=1}^s \frac{q^{s-m+1}}{m^{k-1}} S_{1,\lambda}(s, m) {}_{GH}\beta_{n-s,\lambda/m;qm}^{(j)} \left(\frac{x+u-1}{m} - 1, \frac{y}{m} \right) \right] \frac{t^{n-1}}{n!}$$

ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.1.11: Aşağıdaki eşitlik sağlanır ([17]).

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \sum_{u=0}^n \binom{n}{u} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x_1, y_1) {}_{GH}H_{n-u,\lambda;q}^{(j)}(x_2, y_2).$$

İspat: (7.1.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \frac{t^n}{n!} &= \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{1-e_{\lambda}^{-1}(qt)} e_{\lambda}^{x_1+x_2}(qt) e_{\lambda}^{y_1+y_2}(qt^j) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x_1, y_1) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}H_{n,\lambda;q}^{(j)}(x_2, y_2) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{u=0}^n \binom{n}{u} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x_1, y_1) {}_{GH}H_{n-u,\lambda;q}^{(j)}(x_2, y_2) \right) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7.1.12: Aşağıdaki eşitlik sağlanır ([17]).

$${}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) = \sum_{s=0}^{\lfloor n/j \rfloor} \sum_{m=0}^{n-js} \binom{n-js}{m} \beta_{n-js-m,\lambda;q}^{(k)} \left(\frac{x}{\lambda} \right)_m \left(\frac{y}{\lambda} \right)_s \lambda^{m+s} q^{m+s} \frac{n!}{s!(n-js)!}.$$

İspat: (7.1.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y) \frac{t^n}{n!} &= \frac{qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+qt)}{q}\right)}{1-e_{\lambda}^{-1}(qt)} e_{\lambda}^x(qt) e_{\lambda}^y(qt^j) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,\lambda;q}^{(k)} \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda} \right)_n \lambda^n q^n \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda} \right)_n \lambda^n q^n \frac{t^{jn}}{n!} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} {}_{GH}\beta_{n-m,q}^{(k)}(x, y; \lambda) \left(\frac{x}{\lambda} \right)_m \lambda^m q^m \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda} \right)_n \lambda^n q^n \frac{t^{jn}}{n!} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{j} \rfloor} \sum_{m=0}^{n-js} \binom{n-js}{m} {}_{GH}\beta_{n-js-m,q}^{(k,j)}(x,y;\lambda) \left(\frac{x}{\lambda}\right)_m \left(\frac{y}{\lambda}\right)_s \lambda^{m+s} q^{m+s} \frac{n!}{s!(n-js)!} \right) \frac{t^n}{n!}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 7.1.13: (Kapalı Toplam Formülü)

$${}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(\tau,y) = \sum_{n,m=0}^{s,l} \binom{s}{n} \binom{l}{m} {}_{GH}\beta_{s+l-n-m,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y)(\tau-x)_{n+m,\lambda} \quad (7.1.6)$$

sağlanır ([17]).

İspat: (7.1.2) eşitliğindeki t , $t+u$ ile değiştirilirse,

$$\frac{{}_qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+q(t+u))}{q}\right)}{1-e_{\lambda}^{-1}(q(t+u))} e_{\lambda}^y(q(t+u)^j) = e_{\lambda}^{-x}(q(t+u)) \sum_{s,l=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^s}{s!} \frac{u^l}{l!}$$

ve son denklemde ki x yerine τ yazılıp (7.1.4) eşitliği de kullanılırsa,

$$e_{\lambda}^{-\tau}(q(t+u)) \sum_{s,l=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(\tau,y) \frac{t^s}{s!} \frac{u^l}{l!} = \frac{{}_qEi_k\left(\frac{\log_{\lambda}(1+q(t+u))}{q}\right)}{1-e_{\lambda}^{-1}(q(t+u))} e_{\lambda}^y(q(t+u)^j)$$

elde edilir. Son iki denklemden,

$$\sum_{s,l=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(\tau,y) \frac{t^s}{s!} \frac{u^l}{l!} = e_{\lambda}^{\tau-x}(q(t+u)) \sum_{s,l=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^s}{s!} \frac{u^l}{l!}$$

olur. Buradan,

$$\sum_{s,l=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(\tau,y) \frac{t^s}{s!} \frac{u^l}{l!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (\tau-x)_{n+m,\lambda} \frac{t^n}{n!} \frac{u^m}{m!} e_{\lambda}^{\tau-x}(q(t+u)) \sum_{s,l=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y) \frac{t^s}{s!} \frac{u^l}{l!}$$

elde edilir. $\lambda \in \mathbb{C}$ için λ – azalan faktöriyeli kullanarak,

$$\sum_{s,l=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{s+l,\lambda;q}^{(k,j)}(\tau,y) \frac{t^s}{s!} \frac{u^l}{l!} = \sum_{s,l=0}^{\infty} \sum_{n,m=0}^{s,l} \frac{{}_{GH}\beta_{s+l-n-m,\lambda;q}^{(k,j)}(x,y)(\tau-x)_{n+m,\lambda}}{n!m!(s-l)!(l-m)!} t^s u^l$$

elde edilir ve (7.1.6) eşitliği ispat edilmiş olur.

Sonuç 1: (7.1.6) eşitliğinde $s = 0$ alınırsa aşağıdaki kapalı toplam formülü sağlanır.

$${}_{GH}\beta_{l,\lambda;q}^{(k,j)}(\tau, y) = \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} {}_{GH}\beta_{l-m,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y)(\tau - x)_{m,\lambda}.$$

Sonuç 2: (7.1.6) eşitliğinde $s = 0$ alındığında ve τ yerine $\tau + x$ yazıldığında,

$${}_{GH}\beta_{l,\lambda;q}^{(k,j)}(\tau + x, y) = \sum_{m=0}^l \binom{l}{m} {}_{GH}\beta_{l-m,\lambda;q}^{(k,j)}(x, y)(\tau)_{m,\lambda}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 7.1.14: (Simetrik Özellik)

$\alpha \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 0$ için aşağıdaki simetrik özdeşliği,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^n \sum_{s=0}^m \sum_{u=0}^{n-m} \binom{n}{m} \binom{m}{s} \binom{n-m}{u} (a^j y)_{u, a^j \lambda} (b^j y)_{s, b^j \lambda} {}_{GH}\beta_{n-m-u, a\lambda;q}^{(k,j)}(ax) {}_{GH}\beta_{m-s, b\lambda;q}^{(k,j)}(bx) a^m b^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{s=0}^m \sum_{u=0}^{n-m} \binom{n}{m} \binom{m}{s} \binom{n-m}{u} (b^j y)_{u, b^j \lambda} (a^j y)_{s, a^j \lambda} \\ & \quad \times {}_{GH}\beta_{n-m-u, b\lambda;q}^{(k,j)}(bx) {}_{GH}\beta_{m-s, a\lambda;q}^{(k,j)}(ax) b^m a^{n-m} \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

sağlanır ([17]).

İspat: Aşağıdaki eşitlik verilsin.

$$\Upsilon = \frac{q^2 Ei_k \left(\frac{\log_\lambda(1+qat)}{q} \right)}{(1-e_\lambda^{-1}(qat))(1-e_\lambda^{-1}(qbt))} e_\lambda^{2x}(qabt) e_\lambda^{2y}(q(abt)^j)$$

O halde, Υ ifadesi a ve b de simetriktir ve Υ nin aşağıdaki iki açılımını elde ederiz:

$$\Upsilon = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n, b\lambda;q}^{(k,j)}(bx) \frac{(at)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (b^j y)_{n, b^j \lambda} \frac{(at)^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{n=0}^{\infty} {}_{GH}\beta_{n,a\lambda;q}^{(k,j)}(ax) \frac{(bt)^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (a^j y)_{n,a^j\lambda} \frac{(bt)^n}{n!} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (b^j y)_{s,b^j\lambda} {}_{GH}\beta_{n-s,b\lambda;q}^{(k,j)}(bx) \frac{(at)^n}{n!} \\
& \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (a^j y)_{s,a^j\lambda} {}_{GH}\beta_{n-s,a\lambda;q}^{(k,j)}(ax) \frac{(bt)^n}{n!} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (b^j y)_{s,b^j\lambda} {}_{GH}\beta_{m-s,b\lambda;q}^{(k,j)}(bx) \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{s=0}^{n-m} \binom{n-m}{s} (a^j y)_{s,a^j\lambda} {}_{GH}\beta_{n-m-s,a\lambda;q}^{(k,j)}(ax) \right) a^m b^{n-m} \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
Y & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (a^j y)_{s,a^j\lambda} {}_{GH}\beta_{m-s,a\lambda;q}^{(k,j)}(ax) \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{s=0}^{n-m} \binom{n-m}{s} (b^j y)_{s,b^j\lambda} {}_{GH}\beta_{n-m-s,b\lambda;q}^{(k,j)}(bx) \right) a^{n-m} b^m \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir ve (7.1.7) eşitliğinin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM VIII

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak Bernoulli polinomları ve genelleştirmeleri ile ilgili literatürde yer alan bazı çalışmalar incelenmiştir ([3,4,5,6,7,10,11,12,13]). Klasik Bernoulli polinomlarının tanımı ve özellikleri incelenmiştir. Daha sonra polylogaritma ve poly üstel fonksiyonları ile tanımlanmış olan poly-Bernoulli polinomları verilmiştir ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca dejenere Bernoulli polinomları tanıtılmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ardından, q -parametrelili poly-Bernoulli polinomları tanıtılmış ve bazı teoremleri ispatlanmıştır. Daha sonra q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomlarıyla ilgili tanımlar verilmiş, teoremleri ispatlanmıştır. Bazı genelleştirmeleriyle birlikte Gould-Hopper polinomlarını içeren Bernoulli polinomları incelenmiştir. q -parametrelili poly-Bernoulli polinomlarının Gould-Hopper polinomlarını içeren tanımı verilmiştir ve bazı teoremleri ispatlanmıştır. Daha sonra Gould-Hopper polinomlarını içeren dejenere Bernoulli polinomları tanımlanmıştır. q -parametrelili dejenere Gould-Hopper polinomları verilmiştir. Son olarak Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere poly-Bernoulli polinomlarının tanımı verilmiştir ve teoremleri ispatlanmıştır.

Bulgular kısmında ise aşağıdaki makalede yer alan sonuçlar detaylı bir şekilde incelenmiştir:

- Negiz, E., Acikgoz, M., Duran, U. (2022), On the Gould-Hopper based fully degenerate type2 poly-Bernoulli polynomials with a q -parameter, accepted for publication in Journal of Nonlinear Sciences and Applications.

Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili dejenere birinci tür Stirling polinomları ve Gould-Hopper polinomlarını içeren q -parametrelili II.tip dejenere poly-Bernoulli polinomları ile ilgilenilmiştir. Ardından, bunların çeşitli ilişkileri ve

özellikleri, toplam formülleri, fark kuralı özellikleri, yineleme bağıntıları, kapalı toplam formülleri, simetrik formülleri incelenmiştir.

Bu makalede kullanılan teknik, yöntem ve uygulamalar başka tür polinomlara uygulanabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Bayad, A., Hamahata, Y. (2011). Polylogarithms and poly-Bernoulli polynomials, *Kyushu Journal of Mathematics*. **65**, 15-24.
- [2] Carlitz, L. (1975). Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers, *Utilitas Mathematica* **15**, 51-88.
- [3] Cenkci, M., Komatsu, T. (2015). Poly-Bernoulli numbers and polynomials with a q parameter, *Journal of Number Theory*, **152**, 38-54.
- [4] Duran, U., Acikgoz, M., Araci, S. (2018). S. Hermite based poly-Bernoulli polynomials with a q -parameter, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*. **28(2)**, 285-296.
- [5] Duran, U., Sadjang, P.N. (2019). On Gould-Hopper-based fully degenerate poly-Bernoulli polynomials with a q -parameter, *Mathematics*. **7**, 121.
- [6] Duran, U., Acikgoz, M. (2019). Generalized Gould-Hopper based fully degenerate central Bell polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*. **7(5)**, 124-134.
- [7] Duran, U., Acikgoz, M. (2020). On generalized degenerate Gould-Hopper based fully degenerate Bell polynomials, *Journal of Mathematics and Computer Science*. **21(3)**, 243-257.
- [8] Khan, W., A., Khan, N., U., Zia, S. (2015). A note on Hermite poly-Bernoulli numbers and polynomials of the second kind, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*. **3(5)**, 120-125.
- [9] Khan, W., A. (2016). A note on degenerate Hermite poly-Bernoulli numbers and polynomials, *Journal of Classical Analysis*. **8(1)**, 65-76.
- [10] Kim, T., Kim, D.S. & Kim, T., Rim, S. H., Kim, H.Y., Jang, L.C. (2020). Degenerate Poly-Bernoulli numbers and polynomials, *Informatica*. **31(3)**, 2-8.

- [11] Kim, D., S., Kim, T. (2016). Fully degenerate poly-Bernoulli numbers and polynomials, *Open Mathematics*. **14**, 545-556.
- [12] Kim, T., Yao, Y., Kim, D. S., Jang, G.-W. (2018). Degenerate r -Stirling numbers and r -Bell polynomials, *Russian Journal of Mathematical Physics* **25(1)**, 44-58.
- [13] Mond, D. ve Krammer, D. (2004). MA241 Combinatorics Lecture Notes, *Warwick Mathematics Institute*.
- [14] Muthukumar, T. (2014). Bernoulli Numbers and Polynomials. AOAC Intl.: <http://home.iitk.ac.in/~tmk/reachout/BernoulliNum.pdf>. (02.05.2022)
- [15] Negiz, E., Acikgoz, M., Duran, U. (2022). On the Gould-Hopper based fully degenerate type2 poly-Bernoulli polynomials with a q -parameter, accepted for publication in *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*.
- [16] Ozarslan, M.A. (2013). Hermite-based unified Apostol-Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials, *Advances in Difference Equations*. **116**.
- [17] Pathan, M., A. (2012). A new class of generalized Hermite-Bernoulli polynomials, *Georgian Mathematical Journal*. **19**, 559-573.
- [18] Pathan, M., A., Khan, W., A. (2015). Some implicit summation formulas and symmetric identities for the generalized Hermite-Bernoulli polynomials, *Mediterranean Journal of Mathematics*. **12**, 679-695.
- [19] Pathan, M., A., Khan, W., A. (2015). A new class of generalized polynomials associated with Hermite and Bernoulli polynomials, *Le Matematiche*. LXX, 53-70.
- [20] Srivastava, H., M. (2011). Some generalizations and basic (or q -) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials, *Journal of Applied Mathematics. Sci*. **5**, 390-444.
- [21] Kwon, HI. (2017). Some Identities of Carlitz Degenerate Bernoulli Numbers and Polynomials, *Iranian Journal of Science and Technology Trans Sci* **41**, 749–753.

- [22] Kim, D., S., Kim, T., Mansour, T., Seo, J.-J. (2016). Fully degenerate poly-Bernoulli polynomials with a q parameter, *Filomat*. **30(4)**, 1029-1035.

