



KONTROLLÜ KÜME CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLARA GÜNDOĞDU

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
TEMMUZ - 2022**

KONTROLLÜ KÜME CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİLARA GÜNDOĞDU
ORCID ID: 0000-0003-4146-8737

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. GÖKHAN ÇUVALCIOĞLU
ORCID ID: 0000-0001-5451-3336

MERSİN
TEMmuz - 2022

ÖZET

KONTROLLÜ KÜME CEBİRLERİ

Fuzzy Küme kavramı ilk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından verilmiştir. Daha sonra Intuitionistic Fuzzy Kümeler 1983 yılında Atanassov tarafından tanımlanmıştır ve bu iki küme teori üzerindeki cebirsel özellikler birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Tanımlanan bu iki küme teori ve üçgensel normlar için gösterim teoremleri verilmiştir.

Bu tezde, 2014 yılında Çuvalcıoğlu tarafından tanımlanan Kontrollü Kümeler çalışılmıştır. Intuitionistic Fuzzy Kümelerin özel bir hali olan Kontrollü Kümelerin seviye altkümeleri tanımlanmıştır ve seviye altkümeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Son olarak, Kontrollü Kümeler için gösterim teoremi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Küme, Intuitionistic Fuzzy Küme, Kontrollü Küme, Gösterim Teoremi.

Danışman: Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.



ABSTRACT

CONTROLLED SET ALGEBRAS

The notion of Fuzzy Set has been introduced by Zadeh in 1965. After that, Intuitionistic Fuzzy Sets have been defined by Atanassov in 1983 and algebraic structures on these two sets have been studied by many researchers. Representation theorems for these two set theories and for triangular norms have been given.

In this thesis, the concept of Controlled Set, which has been defined by Çuvalcıoğlu in 2014, is studied. Level sets of Controlled Sets, which are a special type of Intuitionistic Fuzzy Sets, are defined and the relationship between these crisp sets are studied. Finally, representation theorem for Controlled Sets is given.

Keywords: Fuzzy Set, Intuitionistic Fuzzy Set, Controlled Set, Representation Theorem.

Advisor: Assoc. Prof. Gökhan ÇUVALCIOĞLU, Department of Mathematics, University of Mersin, Mersin.



TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesine olanak sağlayan, bilgi ve birikimiyle bana ışık tutup farklı açılardan bakabilmemi sağlayan, doğru, disiplinli ve verimli çalışmayı öğreten, desteğini her koşulda hissettiğim ve öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli danışman hocam Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve Yüksek lisans eğitim hayatım boyunca bilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, akademik yolda yürüme şevki kazandıran Mersin Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca beni destekleyen, maddi ve manevi her zaman yanımda olan, haklarını asla ödeyemeyeceğim canım aileme ve dostlarıma çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ONAY	ii
ETİK BEYAN	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	4
3.1. Kafesler	4
3.2. Klasik Kümeler	5
3.3. Fuzzy Kümeler	5
3.4. Intuitionistic Fuzzy Kümeler	7
3.5. Üçgensel Normlar	10
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	12
4.1. Kontrollü Kümeler	12
4.2. Gösterim Teoremi	32
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	37

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$\emptyset$	Boş Küme
$\wp$	Kuvvet Kümesi
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit Değildir
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük Eşittir
$\geq$	Büyük Eşittir
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
$\subseteq$	Altküme
$\sqcup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Ayrık Birleşim
A^c	A'nın Tümleneni
$\forall$	Her
$\exists$	Öyleki
μ	Fuzzy Küme
μ^*	Fuzzy Küme
$\vee$	Supremum
$\wedge$	Infimum
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve Ancak
FS	Fuzzy Kümeler Ailesi
IFS	Intuitionistic Fuzzy Kümeler Ailesi

1. GİRİŞ

Fuzzy Küme Teori, 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından ortaya konulmuştur (Zadeh, 1965). Klasik mantıkta bir önermenin doğruluk değeri $\{0,1\}$ kümesinin elemanları ile belirlenirken, Fuzzy mantıkta bu değer $[0,1]$ aralığına genişletilmiştir. Bu sayede klasik mantıkta bir elemanın bir kümeye ait olup olmadığına karar veremediğimiz durumlar için bir çözüme ulaşılmıştır. Fuzzy Küme Teoride bir elemanın bir kümeye ait olma derecesine o elemanın üye olma derecesi denir. Bir elemanın üye olma derecesi ve üye olmama derecesi toplamı 1 dir. Fuzzy Kümeler arasındaki birleşim, kesişim gibi cebirsel işlemler tanımlanmıştır (Zadeh, 1965). Daha sonra birçok araştırmacı tarafından Fuzzy cebirsel özellikler incelenmiştir ve birçok uygulama alanı ortaya çıkmıştır. Fuzzy Kümeler kullanılarak 1971 yılında Rosenfeld tarafından Fuzzy altgrupoid, Fuzzy altgrup ve Fuzzy ideal tanımları verilmiştir (Rosenfeld, 1971). Rosenfeld'in bu çalışmasında verdiği en önemli sonuç bir Fuzzy Kümenin sahip olduğu P özelliğinin seviye altkümeler aracılığıyla klasik küme teoride de P özelliği olarak karşımıza çıkmasıdır. Bunun sonucu olarak Fuzzy Kümelerin klasik kümeler (bir evrensel kümenin altkümeleri) ile karakterize edilebileceği fikrine ulaşılmıştır. Bu problemin çözümü için 1991 yılında Ralescu, Fuzzy Kümeler için Gösterim Teoremini vermiştir (Ralescu, 1992).

Fuzzy Kümelerin bir genişlemesi olan Intuitionistic Fuzzy Kümeler 1983 yılında K. T. Atanassov tarafından tanımlanmıştır (Atanassov, 1983). Intuitionistic Fuzzy Küme Teoride bir elemanın üye olma ve üye olmama derecelerinin toplamı 1 den küçük eşittir. Bu toplamın 1 den çıkarılması sezgi derecesi olarak adlandırılır. Daha sonra Intuitionistic Fuzzy Küme Teori üzerinde cebirsel özellikler birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir ve Fuzzy cebirsel yapılar da klasikteki cebirsel yapıların bir genelleştirilmiş halidir. Mevcut (Intuitionistic) Fuzzy Kümeler arasındaki birleşim, kesişim gibi cebirsel işlemler aslında infimum ve supremum kavramlarıdır. Fakat infimum ve supremum operatör olarak dikkate alındığında sırasıyla t-norm ve t-conormdur. Bu bakış açısıyla farklı t-norm ve t-conorm kullanılarak birleşim, kesişim gibi cebirsel işlemler tanımlanabilir. Genel olarak t-normlar üzerinde tanımlanan Intuitionistic Fuzzy Kümeler için (yani bir t-normla belirlenen Intuitionistic Fuzzy Küme Teori için) gösterim teoremi 2010 yılında V. Janis tarafından verilmiştir (Janis, 2010).

Genel olarak ifade edildiği gibi Fuzzy Kümeler klasik kümelerin bir genelleştirilmiş halidir. Benzer şekilde Intuitionistic Fuzzy Kümeler de Fuzzy Kümelerin genelleştirilmiş hali olarak ifade edilir. Fuzzy Kümelerin seviye altkümeleri klasik küme olarak karşımıza çıkmaktadır. O halde Intuitionistic Fuzzy Kümelerin seviye altkümelerinin Fuzzy Küme olarak karşımıza çıkmasını beklememiz normaldir. Ancak M. Li tarafından yapılan çalışmada Intuitionistic Fuzzy Kümelerin seviye altkümeleri de klasik altküme olarak tanımlanmıştır (Li, 2007). Bu seviye altkümeleri aracılığıyla 2010 yılında R. R. Yager tarafından Intuitionistic Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi verilmiştir (Yager, 2010). Ancak 2019 yılında Çuvalcıoğlu tarafından Intuitionistic Fuzzy Kümelerin seviye altkümeleri Fuzzy Küme olacak şekilde sheet level tanımı verilmiştir (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019). Yine aynı yazar

tarafından Fuzzy Kümeler aracılığı ile Intuitionistic Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi verilmiştir (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019).

Çok değerli kümeler için oluşturulan teoriler aslında güncel yaşamda klasik mantık ile cevap veremediğimiz soruların çözümlerine cevap bulmak için ortaya atılan felsefik düşüncenin sonucudur. Bu tezde kullanılacak olan Kontrollü Kümelerin tanımlanmasına aracılık eden düşünce aslında normal hayatta her kavramın tam karşıt bir kavramla anlam bulmasıdır. Yani iyiliğin ifade edilebilmesi için kötülüğün bilinmesi gerekir. Başarının anlamlı olabilmesi için başarısızlığın olması gerekir. Bu düşünce ile bir kümeyi oluştururken kümenin elemanlarının kümeye ait başka elemanlar tarafından kontrol edilmesi gerekir. Bunun için aşağıdaki örnek yol gösterici olacaktır.

Zadeh tarafından Fuzzy Kümeler tanıtılırken verilen örneklerden biri insanların boy uzunluklarını üyelik dereceleriyle ilişkilendiren örnektir (Zadeh, 1965). Bu örnekte insanların boy uzunluklarının kümeye ait olma dereceleri verilmiştir. Ancak kümenin içerisinde boy uzunluğu 50 cm den kısa insanlar da vardır. 180 cm olan bir A kişinin Zadeh'in örneğine göre üyelik derecesi yaklaşık olarak 0.8 dir. Fakat bu kişiler belli gruplara bölündüğünde boylarının üyelik derecelerinin değişmesi beklenir. Ancak bu A kişisi NBA basketbol takımında düşünülürse bu A kişinin üyelik derecesi neredeyse 0 olmalıdır. Çünkü Zadeh'in örneğinde boyu 100 cm olan bir B kişinin üyelik derecesi neredeyse 0 dır. Zadeh'in örneğindeki bu B nin üyelik derecesinin 0 olması, A nın üyelik derecesinin 0.8 olmasının sebebi açıktır. Çünkü Zadeh'in örneğinde üyelik derecesi 0.2 olan bir C kişisi, üyelik derecesi 1 olan bir D kişisi vardır ve bu kişilerin üyelik dereceleri A nın ve B nin üyelik derecelerini etkilemektedir. NBA basketbol takımı örneğimize dönersek aslında A kişisi Zadeh'in örneğindeki B kişinin rolünü üstlenir. O halde bir elemanın bir kümeye ait olma derecesini belirleyen yani kontrol eden o kümeye ait başka bir elemanın olması gerekir.

Bu tezde kullanılan Kontrollü Kümelerin tanımı ilk olarak 2014 yılında Çuvalcıoğlu tarafından verilmiştir (Çuvalcıoğlu, 2014). Kontrollü Kümeler, Intuitionistic Fuzzy Kümelerin özel bir halidir.

Bu tezde öncelikle Kontrollü Küme tanımı ve Kontrollü Kümeler için farklı seviye altküme tanımları verilmiştir. Tanımlanan bu seviye altkümeleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir ve bu ilişkiler çeşitli örnekler ile desteklenmiştir. Son bölümde Kontrollü Kümeler için Gösterim Teoremi verilmiştir. Bu teorem aracılığıyla belli koşulları sağlayan bir kümeler ailesini kendine seviye altkümümesi kabul eden bir Kontrollü Kümenin elde edilebileceği gösterilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Fuzzy Küme Teori 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından tanımlanmıştır ve Fuzzy Kümelerin cebirsel özellikleri incelenmiştir (Zadeh, 1965). Yine aynı yazar tarafından Fuzzy Kümelerin klasik kümeler olarak karşımıza çıkan seviye altkümeleri tanımlanmıştır ve seviye altkümeler üzerinde cebirsel işlemler incelenmiştir (Zadeh, 1965). Farklı araştırmacılar tarafından Fuzzy Kümelerin birçok genellemesi ortaya konulmuştur. J. Goguen tarafından L-fuzzy kümeler (Goguen, 1967), L. A. Zadeh tarafından Aralık Değerli Fuzzy Kümeler (Zadeh, 1975), K. T. Atanassov tarafından Intuitionistic Fuzzy Kümeler (Atanassov, 1983) bunlara örnek olarak verilebilir. Daha sonra birçok araştırmacı tarafından Fuzzy Kümeler üzerindeki yapılar incelenmiştir. 1971 yılında A. Rosenfeld tarafından Fuzzy altgrupoid, Fuzzy altgrup ve Fuzzy ideal tanımları verilmiştir (Rosenfeld, 1971). Bu tanımlar ile birlikte Fuzzy cebirsel yapılar üzerinde birçok çalışma ortaya çıkmıştır. 1991 yılında Ralescu, Fuzzy Kümeler için Gösterim Teoremini vermiştir (Ralescu, 1992).

Intuitionistic Fuzzy Küme Teori 1983 yılında K. T. Atanassov tarafından tanıtılmıştır (Atanassov, 1983). Intuitionistic Fuzzy Kümeler üzerinde işlemler yine aynı yazar tarafından çalışılmıştır (Atanassov, 1999). Intuitionistic Fuzzy Küme Teoride önemli bir yer tutan seviye altkümeleri M. Li tarafından çalışılmıştır (Li, 2007) ve Intuitionistic Fuzzy Kümelerin sheet seviye ve block seviye altkümeleri 2019 yılında Çuvalcıoğlu tarafından verilmiştir (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019). P. K. Sharma tarafından Intuitionistic Fuzzy Kümelerin seviye altkümeleri üzerinde çalışmalar ortaya konulmuştur (Sharma, 2011). 1989 yılında R. Biswas tarafından Intuitionistic Fuzzy grup tanımı verilmiştir (Biswas, 1989) ve Intuitionistic Fuzzy grupların bazı genişlemeleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. 2008 yılında L. Yan tarafından Intuitionistic Fuzzy halka tanımı ve özellikleri verilmiştir (Yan, 2008). 2010 yılında R. R. Yager tarafından Intuitionistic Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi verilmiştir (Yager, 2010). 2019 yılında Çuvalcıoğlu tarafından Intuitionistic Fuzzy Kümelerin seviye altkümeleri Fuzzy Küme olacak şekilde Intuitionistic Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi verilmiştir (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019).

Üçgensel normlar 1942 yılında K. Menger tarafından ortaya konulmuştur (Menger, 1942). Daha sonra, üçgensel normlar Fuzzy Küme Teori ve Intuitionistic Fuzzy Küme Teoride geniş bir çalışma alanına yayılmıştır. Intuitionistic Fuzzy Kümelerin üçgensel normlar ile belirli klasik kümeler olarak karşımıza çıkan seviye altkümeleri yılında V. Janis tarafından tanımlanmıştır (Janis, 2010). Sonraki yıllarda, üçgensel normların cebirsel yapıları birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. t-normlar üzerinde tanımlanan Intuitionistic Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi 2010 yılında V. Janis tarafından verilmiştir (Janis, 2010).

Kontrollü Küme Teori 2014 yılında Çuvalcıoğlu tarafından ortaya konulmuştur (Çuvalcıoğlu, 2014). Bunlara ek olarak Kontrollü Kümeler için seviye altküme tanımı verilmiştir (Çuvalcıoğlu, 2014). Bu kümelerin temel özellikleri incelenmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Kafesler

Kafesler matematiğin birçok dalında karşımıza çıkar ve evrensel cebirde önemli bir rol oynar. Çünkü evrensel cebirdeki birçok cebirsel yapı kafesler üzerine kuruludur ve sadece kafesleri incelenerek bu cebirsel yapılar hakkında çok şey bilinebilir. Kafes teori ile ilgili tüm kavramlar tek bir bağıntı ile tanımlanabilir. Bu bağıntı ve kafes teori ile ilgili temel bilgiler aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 3.1.1: (Birkhoff, 1940) L bir küme, $\leq$, L de bir bağıntı olsun.

- i. $\forall a \in L, a \leq a$ (Yansıma)
- ii. $\forall a, b \in L, a \leq b \text{ ve } b \leq a \Rightarrow a = b$ (Ters Simetri)
- iii. $\forall a, b, c \in L, a \leq b \text{ ve } b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (Geçişme)

koşulları sağlanırsa $\leq$ bağıntısına L üzerinde kısmi sıralama bağıntısı denir ve $(L, \leq)$ ikilisine kısmi sıralı küme denir.

Tanım 3.1.2: (Birkhoff, 1940) $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. $\forall a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ koşulu sağlanırsa $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine tam sıralı küme veya kısaca zincir denir.

Tanım 3.1.3: (Birkhoff, 1940) $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. $\forall a, b \in L$ için $\sup\{a, b\}, \inf\{a, b\} \in L$ ise L ye kafes denir.

$$\forall a, b \in L, \sup\{a, b\} := a \vee b \text{ ve } \inf\{a, b\} := a \wedge b$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.1.4: (Birkhoff, 1940) $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun.

- i. $\forall a \in L$ için $x \leq a$ koşulunu sağlayan $x \in L$ elemanına L nin en küçük elemanı denir.
- ii. $\forall a \in L$ için $a \leq y$ koşulunu sağlayan $y \in L$ elemanına L nin en büyük elemanı denir.

Bu elemanlara sırasıyla evrensel alt sınır ve evrensel üst sınır denir. Bu elemanlar varsa taktır.

Tanım 3.1.5: (Birkhoff, 1940) L bir kafes olsun. L nin evrensel üst sınır ve evrensel alt sınırı varsa L ye tam kafes (veya sınırlı kafes) denir. Eğer $\forall a, b, c \in L$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanırsa L ye tam dağılımlı tam kafes denir:

- i. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- ii. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

3.2. Klasik Kümeler

Kümeyi belli özelliklerin oluşturduğu nesneler topluluğu olarak düşünebiliriz. Bir kümenin altkümelerinin ailesi $\wp(X)$ ile gösterilir. Ancak kümelerin altkümelerinin ailesini aşağıdaki tanımda olduğu gibi karakteristik fonksiyonlarla da ifade edebiliriz.

Tanım 3.2.1: (Halmos, 1978) X bir küme, $\wp(X) = \{A | A \subseteq X\}$ olsun.

$$\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}, \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

fonksiyonuna A nın karakteristik fonksiyonu denir.

Kümeler arasındaki cebirsel işlemlerin karakteristik fonksiyonlarla olan ilişkilerini aşağıdaki tanımda da görebiliriz. Aşağıdaki tanımda $\vee$ maksimum, $\wedge$ minimum olarak kullanılmıştır.

Tanım 3.2.2: (Halmos, 1978) X bir küme, $A, B \subseteq X$ olsun.

- i. $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, \chi_A(x) = \chi_B(x)$
- ii. $A \cup B = \{ \langle x, \chi_{A \cup B}(x) \rangle \mid x \in X \}$. Burada $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)$
- iii. $A \cap B = \{ \langle x, \chi_{A \cap B}(x) \rangle \mid x \in X \}$. Burada $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$
- iv. $A^c = \{ \langle x, \chi_{A^c}(x) \rangle \mid x \in X \}$. Burada $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$
- v. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$

3.3. Fuzzy Kümeler

Fuzzy Küme kavramı, klasik küme kavramının eleman olmanın derecelendirilmesine dayanan bir genellemesidir. Fuzzy Kümeler 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından tanımlanmıştır. Bir elemanın bir kümeye üye olma derecesi $[0,1]$ aralığında değer alır.

Tanım 3.3.1: (Zadeh, 1965) X evrensel küme olsun. X de bir A Fuzzy Küme

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ A kümesinin üyelik fonksiyonudur. Bir $x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A daki üyelik derecesi denir. X üzerindeki tüm Fuzzy Kümelerin ailesi $FS(X)$ ile gösterilir.

Fuzzy Kümeler arasındaki cebirsel işlemler aşağıdaki tanım ile verilir.

Tanım 3.3.2: (Zadeh, 1965) X evrensel küme, $A, B \in FS(X)$ olsun.

- i. $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$

- ii. $A \cup B = \{ \langle x, \mu_{A \cup B}(x) \rangle \mid x \in X \}$. Burada $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$
- iii. $A \cap B = \{ \langle x, \mu_{A \cap B}(x) \rangle \mid x \in X \}$. Burada $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
- iv. $A^c = \{ \langle x, \mu_{A^c}(x) \rangle \mid x \in X \}$. Burada $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$
- v. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

Tanım 3.3.3: (Zadeh, 1965) X evrensel küme, $\mu: X \rightarrow [0,1]$ Fuzzy Küme olsun.

$$\exists a \in X \ni \sup_{x \in X} \mu(x) = \mu(a)$$

ise μ sup-özellğine sahiptir denir.

Tanım 3.3.4: (Zadeh, 1965) X evrensel küme, $\mu: X \rightarrow [0,1]$ Fuzzy Küme olsun.

$$\exists b \in X \ni \inf_{x \in X} \mu(x) = \mu(b)$$

ise μ inf-özellğine sahiptir denir.

Tanım 3.3.5: (Rosenfeld, 1971) G bir grup, $\mu \in FS(G)$ olsun. μ Fuzzy altgruptur : $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $\forall a, b \in G, \mu(ab) \geq \mu(a) \wedge \mu(b)$
- ii. $\forall a \in G, \mu(a^{-1}) \geq \mu(a)$

Fuzzy Kümelerin, klasik kümeler olarak karşımıza çıkan seviye altkümeleri ve seviye altkümeler arasındaki cebirsel işlemler aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.3.6: (Zadeh, 1965) X evrensel küme, $A \in FS(X)$ olsun. $\forall \alpha \in [0,1]$ için A kümesinin sırasıyla α -seviye ve güçlü α -seviye altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ ve } A_{<\alpha>} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

Önerme 3.3.7: (Zadeh, 1965) X evrensel küme, $A, B \in FS(X)$ olsun. $\forall \alpha \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

- i. $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
- ii. $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$
- iii. $(A \cup B)_{<\alpha>} = A_{<\alpha>} \cup B_{<\alpha>}$
- iv. $(A \cap B)_{<\alpha>} = A_{<\alpha>} \cap B_{<\alpha>}$

Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi 1991 yılında Ralescu tarafından verilmiştir. Gösterim teoremi aracılığıyla belli koşulları sağlayan bir kümeler ailesini kendine seviye altkümeleri kabul eden bir Fuzzy Kümenin elde edilebileceği gösterilmiştir.

Teorem 3.3.8 (Gösterim Teoremi): (Ralescu, 1992) $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $(A_\alpha)_\alpha$, X in altkümelerinin bir ailesi olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $f_{\varphi(\alpha)} = A_\alpha$ olacak şekilde bir $f \in FS(X)$ Fuzzy Küme vardır $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta) \Rightarrow A_\alpha \supseteq A_\beta$
- ii. $\varphi(\alpha_1) \leq \varphi(\alpha_2) \leq \dots$ ve $\varphi(\alpha_n) \rightarrow \varphi(\alpha) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n} = A_\alpha$

Burada φ fonksiyonu, f in seviye altkümelerinin bir permütasyonu olarak karşımıza çıkar.

3.4. Intuitionistic Fuzzy Kümeler

Intuitionistic Fuzzy Kümeler, Fuzzy Kümelerin bir genellemesi olarak 1983 yılında K. T. Atanassov tarafından tanımlanmıştır. Fuzzy Küme Teoriden farklı olarak Intuitionistic Fuzzy Küme Teoride bir elemanın üye olma ve üye olmama derecelerinin toplamı 1 den küçük eşittir.

Tanım 3.4.1: (Atanassov, 1983) X evrensel küme olsun. X de bir A Intuitionistic Fuzzy Küme

$$A = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_A, \nu_A: X \rightarrow [0,1]$, $\forall x \in X, 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ koşulu sağlanır. $\mu_A(x)$ ve $\nu_A(x)$ değerleri sırasıyla x in A daki üye olma ve üye olmama derecesidir. X üzerindeki tüm Intuitionistic Fuzzy Kümelerin ailesi $IFS(X)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.2: (Atanassov, 1983) X evrensel küme, $A \in IFS(X)$ olsun.

$$\forall x \in X, \pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$$

değerine x in A daki sezgi derecesi denir. $\forall x \in X, 0 \leq \pi_A(x) \leq 1$ olduğu açıktır.

Intuitionistic Fuzzy Kümeler arasındaki cebirsel işlemler aşağıdaki tanım ile verilir.

Tanım 3.4.3: (Atanassov, 1983) X evrensel küme, $A, B \in IFS(X)$ olsun.

- i. $A = B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x), \nu_A(x) = \nu_B(x)$
- ii. $A \cup B = \{ \langle x, \mu_{A \cup B}(x), \nu_{A \cup B}(x) \rangle \mid x \in X \}$

$$\text{Burada } \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x),$$

$$\nu_{A \cup B}(x) = \min\{\nu_A(x), \nu_B(x)\} = \nu_A(x) \wedge \nu_B(x)$$

- iii. $A \cap B = \{ \langle x, \mu_{A \cap B}(x), \nu_{A \cap B}(x) \rangle \mid x \in X \}$

$$\text{Burada } \mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x),$$

$$v_{A \cap B}(x) = \max\{v_A(x), v_B(x)\} = v_A(x) \vee v_B(x)$$

$$\text{iv. } A^c = \{ \langle x, v_A(x), \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$$

$$\text{v. } A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x), v_A(x) \geq v_B(x)$$

Not: X de bir A Fuzzy Küme $A = \{ \langle x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x) \rangle \mid x \in X \}$ şeklinde bir Intuitionistic Fuzzy Küme olarak yazılabilir.

Intuitionistic Fuzzy Kümelerin, klasik kümeler olarak karşımıza çıkan seviye altkümeleri ve seviye altkümeler arasındaki cebirsel işlemler aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.4.4: (Sharma, 2011) X evrensel küme, $A \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$ için A'nın sırasıyla (α, β) -seviye ve güçlü (α, β) -seviye altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A_{\alpha, \beta} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha, v_A(x) \leq \beta\} \text{ ve } A_{<\alpha, \beta>} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha, v_A(x) < \beta\}$$

Eğer $\alpha = \beta$ ise $A_{\alpha, \beta} = A_\alpha$ şeklinde yazılır.

Önerme 3.4.5: (Sharma, 2011) X evrensel küme, $A, B \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i. $A_{\alpha, \beta} \subseteq A_{\delta, \theta} \Leftrightarrow \alpha \geq \delta \text{ ve } \beta \leq \theta$
- ii. $A_{1-\beta, \beta} \subseteq A_{\alpha, \beta} \subseteq A_{\alpha, 1-\alpha}$
- iii. $A \subseteq B \Rightarrow A_{\alpha, \beta} \subseteq B_{\alpha, \beta}$
- iv. $(A \cap B)_{\alpha, \beta} = A_{\alpha, \beta} \cap B_{\alpha, \beta}$
- v. $(A \cup B)_{\alpha, \beta} \supseteq A_{\alpha, \beta} \cup B_{\alpha, \beta}$, $\alpha + \beta = 1$ ise eşitlik sağlanır.
- vi. $(\bigcap A_i)_{\alpha, \beta} = \bigcap (A_i)_{\alpha, \beta}$
- vii. $A_{0,1} = X$

2019 yılında Çuvalcıoğlu tarafından Intuitionistic Fuzzy Kümelerin seviye altkümeleri Fuzzy Küme olacak şekilde sheet seviye tanımı ve Intuitionistic Fuzzy Kümelerin seviye altkümeleri klasik küme olacak şekilde block seviye tanımı verilmiştir. Yine aynı yazar tarafından Fuzzy Kümeler aracılığı ile Intuitionistic Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi verilmiştir.

Tanım 3.4.6: (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019) X evrensel küme, $A \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall t \in [0,1]$ için A'nın sheet t-seviye altkümesi

$$A(t) = \{ \langle x, \mu_A(x), v_A(x) \rangle \mid \mu_A(x) + v_A(x) = t, x \in X \}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.4.7: (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019) X evrensel küme, $A, B \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

- i. $(A \cup B)(t) = A(t) \cup B(t)$
- ii. $(A \cap B)(t) = A(t) \cap B(t)$
- iii. $(A^c(t))^c = A(t)$

Tanım 3.4.8: (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019) X evrensel küme ve $A \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall t \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,t]$ için A nın α -t block seviye altkümesi

$$A(t)_\alpha = \{x | x \in X, A(t)(x) \geq (\alpha, t - \alpha)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.4.9: (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019) X evrensel küme ve $A \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall t \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \in [0,t]$ için

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow A(t)_\beta \subseteq A(t)_\alpha$$

Önerme 3.4.10. (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019) X evrensel küme ve $A, B \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall t \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,t]$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

- i. $A(t)_\alpha \cup B(t)_\alpha = (A(t) \sqcup B(t))_\alpha$
- ii. $A(t)_\alpha \cap B(t)_\alpha = (A(t) \sqcap B(t))_\alpha$
- iii. $A(t)_\alpha^c = t - A(t)_\alpha, (t(x) = t)$

Tanım 3.4.11: (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019) X evrensel küme, $A \in \text{IFS}(X)$ olsun. $\forall t \in [0,1]$ için A nın t -altkümesi

$$A^t = \{ \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \mid \langle x, \mu_A(x), \nu_A(x) \rangle \in A(r), \forall t \leq r \}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.12 (Gösterim Teoremi): (Çuvalcıoğlu, Tarsuslu ve Demirbaş, 2019) X evrensel küme, $\{X_t\}_{t \in I}$ Fuzzy Kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde $A^t = X_t$ olacak şekilde bir $A \in \text{IFS}(X)$ vardır. $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $t \leq s \Rightarrow X_t \supseteq X_s$
- ii. $t_1 \leq t_2 \leq \dots, t_n \rightarrow t \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{t_n} = X_t$

3.5. Üçgensel Normlar

Fuzzy Küme Teori ve Intuitionistic Fuzzy Küme Teoride geniş bir çalışma alanına sahip olan üçgensel normlar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.5.1: (Klement, Mesiar ve Pap, 2000) $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in [0,1]$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa T ye üçgensel norm veya kısaca t-norm denir:

- i. $T(x, y) = T(y, x)$
- ii. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$
- iii. $y \leq z \Rightarrow T(x, y) \leq T(x, z)$
- iv. $T(x, 1) = x$

Eğer T sol sürekli ise T ye sol sürekli üçgensel norm denir.

Bazı norm örnekleri aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.5.2: (Klement, Mesiar ve Pap, 2000) T_M, T_P, T_L temel t-normlar $\forall (x, y) \in [0,1]^2$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

- 1. $T_M(x, y) = \min\{x, y\}$ (Minimum t-norm)
- 2. $T_P(x, y) = xy$ (Çarpım t-norm)
- 3. $T_L(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$ (Lukasiewicz t-norm)

Tanım 3.5.3: (Klement, Mesiar ve Pap, 2000) $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ bir sınırlı kafes, $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ L nin ikişerli ayrık alt aralıklarının bir ailesi, $\{T_i\}_{i \in I}$ bu alt aralıklar üzerindeki t-normların bir ailesi olsun. T ordinal toplam aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$T = \{(a_i, b_i, T_i)\}_{i \in I}: L \times L \rightarrow L$$

$$T(x, y) = \begin{cases} T_i(x, y), & (x, y) \in [a_i, b_i]^2 \\ x \wedge y, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Tanım 3.5.4: (Klement, Mesiar ve Pap, 2000) $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in [0,1]$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa S ye üçgensel conorm veya kısaca t-conorm denir:

- i. $S(x, y) = S(y, x)$
- ii. $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$
- iii. $x \leq y \Rightarrow S(x, z) \leq S(y, z)$
- iv. $S(x, 0) = x$

Not: (Klement, Mesiar ve Pap, 2000) Her üçgensel norma karşılık gelen bir üçgensel conorm vardır. Bu normlar

$$S(x_0, y_0) = 1 - T(1 - x_0, 1 - y_0)$$

eşitliği ile verilir. Buna göre yukarıdaki normlara karşılık gelen conormlar aşağıdaki gibidir:

1. $S_M(x, y) = \max\{x, y\}$ (Maksimum t-conorm)
2. $S_P(x, y) = x + y - xy$ (Çarpım t-conorm)
3. $S_L(x, y) = \min\{x + y, 1\}$ (Lukasiewicz t-conorm)

Üçgensel normlar ile belirli seviye altkümeler aşağıdaki tanım ile verilir.

Tanım 3.5.5: (Janis, 2010) X evrensel küme, $A \in \text{IFS}(X)$, T sol sürekli üçgensel norm olsun. $\forall \alpha \in (0, 1]$ için A nın $\alpha -_T$ seviye altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A_{T, \alpha} = \{x \in X \mid T(\mu_A(x), 1 - \nu_A(x)) \geq \alpha\}$$

Önerme 3.5.6: (Janis, 2010) X evrensel küme, $A \in \text{IFS}(X)$, T sol sürekli üçgensel norm olsun. $\forall \alpha, \beta \in (0, 1]$ için

$$\alpha > \beta \Rightarrow A_{T, \alpha} \subseteq A_{T, \beta}$$

t-normlar ile belirli Intuitionistic Fuzzy Kümeler için gösterim teoremi aşağıdaki şekilde verilir.

Teorem 3.5.7 (Gösterim Teoremi): (Janis, 2010) X evrensel küme, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in [0, 1]}$ X in altkümelerinin bir ailesi,

T sol sürekli üçgensel norm olsun. X in altkümelerini $\alpha -_T$ seviye altkümeleri kabul eden X de bir Intuitionistic Fuzzy Küme vardır $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $\alpha > \beta \Rightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta$
- ii. $A_\alpha \in (0, 1], A_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} A_\beta$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Kontrollü Kümeler

Tanım 4.1.1: (Çuvalcıoğlu, 2014) E evrensel küme, $\mu \in FS(E)$ olsun. Eğer

$$\forall x \in E, \exists y \in E \ni \mu(x) = 1 - \mu(y)$$

ise μ ye E de μ –kontrollü küme denir.

Tanım 4.1.2: (Çuvalcıoğlu, 2014) E evrensel küme, μ, E de μ –kontrollü küme ve $a \in E$ olsun.

$$\bar{a} = \{b \in E | \mu(a) = 1 - \mu(b)\}$$

kümesine a nın kontrol kümesi denir.

μ –kontrollü kümeler Fuzzy Kümelerdir. Ancak bir elemanın üyelik derecesini belirlemenin zor ve karmaşıklığından daha karmaşık olan durum üye olmama derecesinin belirlenmesidir. O halde bir kümedeki elemanların üyelik dereceleri bilindiğinde bu kümenin Fuzzy olması gerekmez. Bu tip kümeleri Kontrollü Küme yapma yöntemi aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 4.1.3: (Çuvalcıoğlu, 2014) E evrensel küme, $\mu \in FS(E)$ olsun. E üzerinde aşağıdaki dönüşüm tanımlanır:

$$\mu^*(x) = \sup_{\mu(x) \leq 1 - \mu(y)} \mu(y), \forall x \in E$$

μ^* ın E den I ya bir dönüşüm olduğu açıktır. Ayrıca $\mu + \mu^* \leq 1$ olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 4.1.4: (Çuvalcıoğlu, 2014) E evrensel küme, $\mu \in FS(E)$ olsun.

$$\{(x, \mu(x), \mu^*(x)) | x \in E\}$$

kümesine E de (μ, μ^*) –kontrollü küme denir.

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında μ –kontrollü kümeler Fuzzy Kümelerin özel hali, (μ, μ^*) –kontrollü kümeler Intuitionistic Fuzzy Kümelerin özel halidir.

Tanım 4.1.5: (Çuvalcıoğlu, 2014) G bir grup, μ, G de (μ, μ^*) –kontrollü küme olsun. μ ye G de (μ, μ^*) –kontrollü grup denir : $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $\mu(e) = 1$
- ii. $\mu(a.b) \geq \mu(a) \wedge \mu(b)$
- iii. $\mu^*(a.b) \leq \mu^*(a) \vee \mu^*(b)$
- iv. $\mu(a) \geq \mu(a^{-1})$ ve $\mu^*(a) \geq \mu^*(a^{-1})$

Teorem 4.1.6: G bir grup, μ, G üzerinde Fuzzy grup olsun. Bu takdirde μ, G de (μ, μ^*) –kontrollü gruptur.

İspat:

- i. $\mu(e) = 1$
- ii. $\forall a, b \in G, \mu(ab) \geq \mu(a) \wedge \mu(b)$
- iii. $a, b \in G$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned} \mu^*(ab) &= \sup_{\mu(ab) \leq 1 - \mu(c)} \mu(c) \leq \sup_{\mu(a) \wedge \mu(b) \leq 1 - \mu(c)} \mu(c) = \sup_{1 - (\mu(a) \wedge \mu(b)) \geq \mu(c)} \mu(c) \\ &= \sup_{(1 - \mu(a)) \vee (1 - \mu(b)) \geq \mu(c)} \mu(c) = \sup_{\mu(c) \leq 1 - \mu(a)} \mu(c) \vee \sup_{\mu(c) \leq 1 - \mu(b)} \mu(c) \\ &= \sup_{\mu(a) \leq 1 - \mu(c)} \mu(c) \vee \sup_{\mu(b) \leq 1 - \mu(c)} \mu(c) = \mu^*(a) \vee \mu^*(b) \end{aligned}$$

- iv. $\forall a \in G, \mu(a) \geq \mu(a^{-1})$ ve $\mu^*(a) = \sup_{\mu(a) \leq 1 - \mu(b)} \mu(b) \leq \sup_{\mu(a^{-1}) \leq 1 - \mu(b)} \mu(b) = \mu^*(a^{-1})$

Tanım 4.1.7: E evrensel küme, μ, E de μ –kontrollü küme ve $t \in [0,1]$ olmak üzere μ kümesinin t –seviye altkümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

- 1. $\mu_t = \{x \in E | \mu(x) \geq t\}$
- 2. ${}_t\mu^* = \{x \in E | \mu^*(x) < t\}$
- 3. ${}_t\mu^* = \{x \in E | \mu^*(x) \geq 1 - t\}$
- 4. $\mu_t^* = \{x \in E | \mu^*(x) \geq t\}$
- 5. $(\mu^*)_t = \{x \in E | \mu(x) \geq t \text{ ve } \mu^*(x) < 1 - t\}$

Tanım 4.1.8: E evrensel küme, μ, E de (μ, μ^*) –kontrollü küme olsun.

$$\mu^\nabla = \{x \in E | \mu(x) + \mu^*(x) < 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.9: E evrensel küme, μ, E de (μ, μ^*) –kontrollü küme olsun. Bu takdirde

$$\forall x \in \mu^\nabla, t \in [0,1], \mu_t = (\mu^*)_t.$$

İspat: $x \in \mu_t$ keyfi verilsin. O halde $\mu(x) \geq t$ dir.

$$\Rightarrow 1 - \mu(x) \leq 1 - t. \mu^\nabla \text{ tanımından,}$$

$$\mu(x) + \mu^*(x) < 1$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - \mu(x) \leq 1 - t$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - t$$

$$\Rightarrow x \in (\mu^*)_t$$

$$\Rightarrow \mu_t \subset (\mu^*)_t \quad (4.1)$$

$y \in (\mu^*)_t$ keyfi verilsin. O halde $\mu(y) \geq t$ ve $\mu^*(y) < 1 - t$ dir.

$$\Rightarrow y \in \mu_t$$

$$\Rightarrow (\mu^*)_t \subset \mu_t \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) den $\mu_t = (\mu^*)_t$ elde edilir.

Örnek 4.1.10: $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ ve

$\mu = \{(a, 0.9), (b, 0.8), (c, 0.7), (d, 0.6), (e, 0.15), (f, 0.25), (g, 0.35), (h, 0.7), (i, 0.9), (j, 0.8), (k, 0)\}$ olsun.

$(\mu, \mu^*) = \{(a, 0.9, 0), (b, 0.8, 0.15), (c, 0.7, 0.25), (d, 0.6, 0.35), (e, 0.15, 0.8), (f, 0.25, 0.7), (g, 0.35, 0.6), (h, 0.7, 0.25), (i, 0.9, 0), (j, 0.8, 0.15), (k, 0, 0.9)\}$.

$$\mu_t = E, t = 0$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, 0 < t < 0.15$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, t = 0.15$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}, 0.15 < t < 0.25$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}, t = 0.25$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, g, h, i, j\}, 0.25 < t < 0.35$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, g, h, i, j\}, t = 0.35$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, h, i, j\}, 0.35 < t < 0.6$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, h, i, j\}, t = 0.6$$

$$\mu_t = \{a, b, c, h, i, j\}, 0.6 < t < 0.7$$

$$\mu_t = \{a, b, c, h, i, j\}, t = 0.7$$

$$\mu_t = \{a, b, i, j\}, 0.7 < t < 0.8$$

$$\mu_t = \{a, b, i, j\}, t = 0.8$$

$$\mu_t = \{a, i\}, 0.8 < t < 0.9$$

$$\mu_t = \{a, i\}, t = 0.9$$

$$\mu_t = \emptyset, 0.9 < t < 1$$

$$\mu_t = \emptyset, t = 1$$

$$(\mu^*)_t = E, t = 0, 1 - t = 1$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, 0 < t < 0.15, 0.85 < 1 - t < 1$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, t = 0.15, 1 - t = 0.85$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}, 0.15 < t < 0.25, 0.75 < 1 - t < 0.85$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}, t = 0.25, 1 - t = 0.75$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, g, h, i, j\}, 0.25 < t < 0.35, 0.65 < 1 - t < 0.75$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, g, h, i, j\}, t = 0.35, 1 - t = 0.65$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, h, i, j\}, 0.35 < t < 0.6, 0.4 < 1 - t < 0.65$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, d, h, i, j\}, t = 0.6, 1 - t = 0.4$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, h, i, j\}, 0.6 < t < 0.7, 0.3 < 1 - t < 0.4$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, c, h, i, j\}, t = 0.7, 1 - t = 0.3$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, i, j\}, 0.7 < t < 0.8, 0.2 < 1 - t < 0.3$$

$$(\mu^*)_t = \{a, b, i, j\}, t = 0.8, 1 - t = 0.2$$

$$(\mu^*)_t = \{a, i\}, 0.8 < t < 0.9, 0.1 < 1 - t < 0.2$$

$$(\mu^*)_t = \{a, i\}, t = 0.9, 1 - t = 0.1$$

$$(\mu^*)_t = \emptyset, 0.9 < t < 1, 0 < 1 - t < 0.1$$

$$(\mu^*)_t = \emptyset, t = 1, 1 - t = 0$$

Açıklama: Bir önceki teoremden $x \in \mu^\nabla$ koşulu kaldırılırsa $\exists t \in [0,1]$ bulunur öyleki

$$\mu_t \neq (\mu^*)_t$$

Örnek 4.1.11: $E = \{a, b, c, d, e\}, \mu = \{(a, 0.2), (b, 0.5), (c, 0.3), (d, 0.7), (e, 0.4)\}$ olsun.

$$(\mu, \mu^*) = \{(a, 0.2, 0.7), (b, 0.5, 0.5), (c, 0.3, 0.7), (d, 0.7, 0.3), (e, 0.4, 0.5)\}$$

$$t = 0.5 \text{ için } \mu(b) = 0.5 \geq t \Rightarrow b \in \mu_t \text{ dir ancak } \mu^*(b) = 0.5 < 0.5 = 1 - t \Rightarrow b \notin (\mu^*)_t$$

Teorem 4.1.12: E evrensel küme, μ, E de (μ, μ^*) –kontrollü küme öyleki μ sup-özellğine sahip olsun.

Bu takdirde $\forall x \in \mu^\nabla, t_k \in \text{im}\mu,$

$$\text{i. } \mu_t = (\mu^*_{1-t})^c$$

$$\text{ii. } \mu_t = (\mu^*_t)^c$$

$$\text{iii. } \mu_t = {}_{1-t}\mu^*$$

İspat:

$$\text{i. } x \in \mu_t \text{ keyfi verilsin. O halde } \mu(x) \geq t \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(x) \leq 1 - t. \mu^\nabla \text{ tanımından,}$$

$$\mu(x) + \mu^*(x) < 1$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - \mu(x) \leq 1 - t$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - t$$

$$\Rightarrow x \notin \mu^*_{1-t}$$

$$\Rightarrow x \in (\mu^*_{1-t})^c$$

$$\Rightarrow \mu_t \subset (\mu^*_{1-t})^c \tag{4.3}$$

$y \in (\mu^*_{1-t})^c$ keyfi verilsin. O halde $y \notin \mu^*_{1-t}$ dir.

$$\Rightarrow \mu^*(y) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \sup_{\mu(y) \leq 1 - \mu(z)} \mu(z) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \sup_{\mu(z) \leq 1 - \mu(y)} \mu(z) < 1 - t$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(y) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \mu(y) > t$$

$$\Rightarrow y \in \mu_t$$

$$\Rightarrow (\mu^*_{1-t})^c \subset \mu_t \quad (4.4)$$

(4.3) ve (4.4) den $\mu_t = (\mu^*_{1-t})^c$ elde edilir.

ii. $x \in \mu_t$ keyfi verilsin. O halde $\mu(x) \geq t$ dir.

$$\Rightarrow 1 - \mu(x) \leq 1 - t. \mu^\nabla \text{ tanımından,}$$

$$\mu(x) + \mu^*(x) < 1$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - \mu(x) \leq 1 - t$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - t$$

$$\Rightarrow x \notin {}^t\mu^*$$

$$\Rightarrow x \in ({}^t\mu^*)^c$$

$$\Rightarrow \mu_t \subset ({}^t\mu^*)^c \quad (4.5)$$

$y \in ({}^t\mu^*)^c$ keyfi verilsin. O halde $y \notin {}^t\mu^*$ dir.

$$\Rightarrow \mu^*(y) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \sup_{\mu(y) \leq 1 - \mu(z)} \mu(z) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \sup_{\mu(z) \leq 1 - \mu(y)} \mu(z) < 1 - t$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(y) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \mu(y) > t$$

$$\Rightarrow y \in \mu_t$$

$$\Rightarrow (\mu^*)^c \subset \mu_t \quad (4.6)$$

(4.5) ve (4.6) dan $\mu_t = (\mu^*)^c$ elde edilir.

iii. $x \in \mu_t$ keyfi verilsin. O halde $\mu(x) \geq t$ dir.

$$\Rightarrow 1 - \mu(x) \leq 1 - t. \mu^\nabla \text{ tanımından,}$$

$$\mu(x) + \mu^*(x) < 1$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - \mu(x) \leq 1 - t$$

$$\Rightarrow \mu^*(x) < 1 - t$$

$$\Rightarrow x \in {}_{1-t}\mu^*$$

$$\Rightarrow \mu_t \subset {}_{1-t}\mu^* \quad (4.7)$$

$y \in {}_{1-t}\mu^*$ keyfi verilsin. O halde $\mu^*(y) < 1 - t$ dir.

$$\Rightarrow \sup_{\mu(y) \leq 1 - \mu(z)} \mu(z) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \sup_{\mu(z) \leq 1 - \mu(y)} \mu(z) < 1 - t$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(y) < 1 - t$$

$$\Rightarrow \mu(y) > t$$

$$\Rightarrow y \in \mu_t$$

$$\Rightarrow {}_{1-t}\mu^* \subset \mu_t \quad (4.8)$$

(4.7) ve (4.8) den $\mu_t = {}_{1-t}\mu^*$ elde edilir.

Örnek 4.1.13: Örnek 4.1.10 u gözönüne alalım.

$$\mu_t = E, t = 0$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, t = 0.15$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}, t = 0.25$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, g, h, i, j\}, t = 0.35$$

$$\mu_t = \{a, b, c, d, h, i, j\}, t = 0.6$$

$$\mu_t = \{a, b, c, h, i, j\}, t = 0.7$$

$$\mu_t = \{a, b, i, j\}, t = 0.8$$

$$\mu_t = \{a, i\}, t = 0.9$$

$$\mu_t = \emptyset, t = 1$$

$${}_t\mu^* = \emptyset, t = 0$$

$${}_t\mu^* = \{a, i\}, t = 0.15$$

$${}_t\mu^* = \{a, b, i, j\}, t = 0.25$$

$${}_t\mu^* = \{a, b, c, h, i, j\}, t = 0.35$$

$${}_t\mu^* = \{a, b, c, d, h, i, j\}, t = 0.6$$

$${}_t\mu^* = \{a, b, c, d, g, h, i, j\}, t = 0.7$$

$${}_t\mu^* = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}, t = 0.8$$

$${}_t\mu^* = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, t = 0.9$$

$${}_t\mu^* = E, t = 1$$

$${}_t\mu^* = \emptyset, t = 0, 1 - t = 1$$

$${}^t\mu^* = \{k\}, t = 0.15, 1 - t = 0.85$$

$${}^t\mu^* = \{e, k\}, t = 0.25, 1 - t = 0.75$$

$${}^t\mu^* = \{e, f, k\}, t = 0.35, 1 - t = 0.65$$

$${}^t\mu^* = \{e, f, g, k\}, t = 0.6, 1 - t = 0.4$$

$${}^t\mu^* = \{d, e, f, g, k\}, t = 0.7, 1 - t = 0.3$$

$${}^t\mu^* = \{c, d, e, f, g, h, k\}, t = 0.8, 1 - t = 0.2$$

$${}^t\mu^* = \{b, c, d, e, f, g, h, j, k\}, t = 0.9, 1 - t = 0.1$$

$${}^t\mu^* = E, t = 1, 1 - t = 0$$

$$\mu_t^* = E, t = 0$$

$$\mu_t^* = \{b, c, d, e, f, g, h, j, k\}, t = 0.15$$

$$\mu_t^* = \{c, d, e, f, g, h, k\}, t = 0.25$$

$$\mu_t^* = \{d, e, f, g, k\}, t = 0.35$$

$$\mu_t^* = \{e, f, g, k\}, t = 0.6$$

$$\mu_t^* = \{e, f, k\}, t = 0.7$$

$$\mu_t^* = \{e, k\}, t = 0.8$$

$$\mu_t^* = \{k\}, t = 0.9$$

$$\mu_t^* = \emptyset, t = 1$$

Açıklama: Bir önceki teoremden $t_k \in \text{im}\mu$ koşulu kaldırılırsa $\exists t \in [0,1] - \text{im}\mu$ bulunur öyleki

$$\mu_t \neq (\mu_{1-t}^*)^c, \mu_t \neq ({}^t\mu^*)^c, \mu_t \neq {}_{1-t}\mu^*.$$

Örnek 4.1.14: Örnek 4.1.10 u gözönüne alalım. $t = 0.05$ için

$$\mu_{0.05} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

$${}_{0.95}\mu^* = E$$

$$(\mu^*_{0.95})^c = E$$

$$({}^{0.05}\mu^*)^c = E$$

Dolayısıyla $t = 0.05$ için $\mu_{0.05} \neq {}_{0.95}\mu^*, \mu_{0.05} \neq (\mu^*_{0.95})^c, \mu_{0.05} \neq ({}^{0.05}\mu^*)^c$.

Örnek 4.1.15: $E = \{a, b, c, d, e, f\}, \mu: E \rightarrow (0,0.5)$,

$\mu = \{(a, 0.1), (b, 0.15), (c, 0.2), (d, 0.3), (e, 0.35), (f, 0.4)\}$ olsun.

$$(\mu, \mu^*) = \{(a, 0.1, 0.4), (b, 0.15, 0.4), (c, 0.2, 0.4), (d, 0.3, 0.4), (e, 0.35, 0.4), (f, 0.4, 0.4)\}$$

$$\mu_t = E, 0 \leq t < 0.1$$

$$\mu_t = E, t = 0.1$$

$$\mu_t = \{b, c, d, e, f\}, 0.1 < t < 0.15$$

$$\mu_t = \{b, c, d, e, f\}, t = 0.15$$

$$\mu_t = \{c, d, e, f\}, 0.15 < t < 0.2$$

$$\mu_t = \{c, d, e, f\}, t = 0.2$$

$$\mu_t = \{d, e, f\}, 0.2 < t < 0.3$$

$$\mu_t = \{d, e, f\}, t = 0.3$$

$$\mu_t = \{e, f\}, 0.3 < t < 0.35$$

$$\mu_t = \{e, f\}, t = 0.35$$

$$\mu_t = \{f\}, 0.35 < t < 0.4$$

$$\mu_t = \{f\}, t = 0.4$$

$$\mu_t = \emptyset, 0.4 < t \leq 1$$

$$(\mu^*)_t = E, 0 \leq t < 0.1, 0.9 < 1 - t \leq 1$$

$$(\mu^*)_t = E, t = 0.1, 1 - t = 0.9$$

$$(\mu^*)_t = \{b, c, d, e, f\}, 0.1 < t < 0.15, 0.85 < 1 - t < 0.9$$

$$(\mu^*)_t = \{b, c, d, e, f\}, t = 0.15, 1 - t = 0.85$$

$$(\mu^*)_t = \{c, d, e, f\}, 0.15 < t < 0.2, 0.8 < 1 - t < 0.85$$

$$(\mu^*)_t = \{c, d, e, f\}, t = 0.2, 1 - t = 0.8$$

$$(\mu^*)_t = \{d, e, f\}, 0.2 < t < 0.3, 0.7 < 1 - t < 0.8$$

$$(\mu^*)_t = \{d, e, f\}, t = 0.3, 1 - t = 0.7$$

$$(\mu^*)_t = \{e, f\}, 0.3 < t < 0.35, 0.65 < 1 - t < 0.7$$

$$(\mu^*)_t = \{e, f\}, t = 0.35, 1 - t = 0.65$$

$$(\mu^*)_t = \{f\}, 0.35 < t < 0.4, 0.6 < 1 - t < 0.65$$

$$(\mu^*)_t = \{f\}, t = 0.4, 1 - t = 0.65$$

$$(\mu^*)_t = \emptyset, 0.4 < t \leq 1, 0 \leq 1 - t < 0.6$$

$${}_t\mu^* = \emptyset, 0 \leq t \leq 0.4$$

$${}_t\mu^* = E, 0.4 < t \leq 1$$

$${}_t\mu^* = \emptyset, 0 \leq t < 0.6$$

$${}_t\mu^* = E, 0.6 \leq t \leq 1$$

$$\mu_t^* = E, 0 \leq t \leq 0.4$$

$$\mu_t^* = \emptyset, 0.4 < t \leq 1$$

Örnek 4.1.16: $E = \{a, b, c, d, e, f\}, \mu: E \rightarrow (0.5, 1),$

$\mu = \{(a, 0.55), (b, 0.6), (c, 0.7), (d, 0.8), (e, 0.85), (f, 0.9)\}$ olsun.

$$(\mu, \mu^*) = \{(a, 0.55, 0), (b, 0.6, 0), (c, 0.7, 0), (d, 0.8, 0), (e, 0.85, 0), (f, 0.9, 0)\}$$

$$\mu_t = E, 0 \leq t < 0.55$$

$$\mu_t = E, t = 0.55$$

$$\mu_t = \{b, c, d, e, f\}, 0.55 < t < 0.6$$

$$\mu_t = \{b, c, d, e, f\}, t = 0.6$$

$$\mu_t = \{c, d, e, f\}, 0.6 < t < 0.7$$

$$\mu_t = \{c, d, e, f\}, t = 0.7$$

$$\mu_t = \{d, e, f\}, 0.7 < t < 0.8$$

$$\mu_t = \{d, e, f\}, t = 0.8$$

$$\mu_t = \{e, f\}, 0.8 < t < 0.85$$

$$\mu_t = \{e, f\}, t = 0.85$$

$$\mu_t = \{f\}, 0.85 < t < 0.9$$

$$\mu_t = \{f\}, t = 0.9$$

$$\mu_t = \emptyset, 0.9 < t \leq 1$$

$$(\mu^*)_t = E, 0 \leq t < 0.55, 0.45 < 1 - t \leq 1$$

$$(\mu^*)_t = E, t = 0.55, 1 - t = 0.45$$

$$(\mu^*)_t = \{b, c, d, e, f\}, 0.55 < t < 0.6, 0.4 < 1 - t < 0.45$$

$$(\mu^*)_t = \{b, c, d, e, f\}, t = 0.6, 1 - t = 0.4$$

$$(\mu^*)_t = \{c, d, e, f\}, 0.6 < t < 0.7, 0.3 < 1 - t < 0.4$$

$$(\mu^*)_t = \{c, d, e, f\}, t = 0.7, 1 - t = 0.3$$

$$(\mu^*)_t = \{d, e, f\}, 0.7 < t < 0.8, 0.2 < 1 - t < 0.3$$

$$(\mu^*)_t = \{d, e, f\}, t = 0.8, 1 - t = 0.2$$

$$(\mu^*)_t = \{e, f\}, 0.8 < t < 0.85, 0.15 < 1 - t < 0.2$$

$$(\mu^*)_t = \{e, f\}, t = 0.85, 1 - t = 0.15$$

$$(\mu^*)_t = \{f\}, 0.85 < t < 0.9, 0.1 < 1 - t < 0.15$$

$$(\mu^*)_t = \{f\}, t = 0.9, 1 - t = 0.1$$

$$(\mu^*)_t = \emptyset, 0.9 < t \leq 1, 0 \leq 1 - t < 0.1$$

$${}_t\mu^* = \emptyset, t = 0$$

$${}_t\mu^* = E, 0 < t \leq 1$$

$${}_t\mu^* = \emptyset, 0 \leq t < 1$$

$${}_t\mu^* = E, t = 1$$

$$\mu^*_t = E, t = 0$$

$$\mu^*_t = \emptyset, 0 < t \leq 1$$

Örnek 4.1.17: $\mu: [0,1] \rightarrow [0,1], \mu(x) = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$0 \leq x < 0.1, \mu(x) = 0, \mu^*(x) = 1$$

$$0.1 \leq x < 0.2, \mu(x) = \frac{1}{10}, \mu^*(x) = \frac{9}{10}$$

$$0.2 \leq x < 0.3, \mu(x) = \frac{2}{10}, \mu^*(x) = \frac{8}{10}$$

$$0.3 \leq x < 0.4, \mu(x) = \frac{3}{10}, \mu^*(x) = \frac{7}{10}$$

$$0.4 \leq x < 0.5, \mu(x) = \frac{4}{10}, \mu^*(x) = \frac{6}{10}$$

$$0.5 \leq x < 0.6, \mu(x) = \frac{5}{10}, \mu^*(x) = \frac{5}{10}$$

$$0.6 \leq x < 0.7, \mu(x) = \frac{6}{10}, \mu^*(x) = \frac{4}{10}$$

$$0.7 \leq x < 0.8, \mu(x) = \frac{7}{10}, \mu^*(x) = \frac{3}{10}$$

$$0.8 \leq x < 0.9, \mu(x) = \frac{8}{10}, \mu^*(x) = \frac{2}{10}$$

$$0.9 \leq x < 1, \mu(x) = \frac{9}{10}, \mu^*(x) = \frac{1}{10}$$

$$x = 1, \mu(x) = 1, \mu^*(x) = 0$$

$$\mu_t = [0,1], t = 0$$

$$\mu_t = [0.1,1], 0 < t < 0.1$$

$$\mu_t = [0.1,1], t = 0.1$$

$$\mu_t = [0.2,1], 0.1 < t < 0.2$$

$$\mu_t = [0.2,1], t = 0.2$$

$$\mu_t = [0.3,1], 0.2 < t < 0.3$$

$$\mu_t = [0.3,1], t = 0.3$$

$$\mu_t = [0.4,1], 0.3 < t < 0.4$$

$$\mu_t = [0.4,1], t = 0.4$$

$$\mu_t = [0.5,1], 0.4 < t < 0.5$$

$$\mu_t = [0.5,1], t = 0.5$$

$$\mu_t = [0.6,1], 0.5 < t < 0.6$$

$$\mu_t = [0.6,1], t = 0.6$$

$$\mu_t = [0.7, 1], 0.6 < t < 0.7$$

$$\mu_t = [0.7, 1], t = 0.7$$

$$\mu_t = [0.8, 1], 0.7 < t < 0.8$$

$$\mu_t = [0.8, 1], t = 0.8$$

$$\mu_t = [0.9, 1], 0.8 < t < 0.9$$

$$\mu_t = [0.9, 1], t = 0.9$$

$$\mu_t = \{1\}, 0.9 < t < 1$$

$$\mu_t = \{1\}, t = 1$$

$${}_t\mu^* = \emptyset, t = 0$$

$${}_t\mu^* = \{1\}, 0 < t < 0.1$$

$${}_t\mu^* = \{1\}, t = 0.1$$

$${}_t\mu^* = [0.9, 1], 0.1 < t < 0.2$$

$${}_t\mu^* = [0.9, 1], t = 0.2$$

$${}_t\mu^* = [0.8, 1], 0.2 < t < 0.3$$

$${}_t\mu^* = [0.8, 1], t = 0.3$$

$${}_t\mu^* = [0.7, 1], 0.3 < t < 0.4$$

$${}_t\mu^* = [0.7, 1], t = 0.4$$

$${}_t\mu^* = [0.6, 1], 0.4 < t < 0.5$$

$${}_t\mu^* = [0.6, 1], t = 0.5$$

$${}_t\mu^* = [0.5, 1], 0.5 < t < 0.6$$

$${}_t\mu^* = [0.5, 1], t = 0.6$$

$${}_t\mu^* = [0.4, 1], 0.6 < t < 0.7$$

$${}_t\mu^* = [0.4, 1], t = 0.7$$

$${}_t\mu^* = [0.3, 1], 0.7 < t < 0.8$$

$${}_t\mu^* = [0.3, 1], t = 0.8$$

$${}_t\mu^* = [0.2, 1], 0.8 < t < 0.9$$

$${}_t\mu^* = [0.2, 1], t = 0.9$$

$${}_t\mu^* = [0.1, 1], 0.9 < t < 1$$

$${}_t\mu^* = [0.1, 1], t = 1$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.1], t = 0, 1 - t = 1$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.1], 0 < t < 0.1, 0.9 < 1 - t < 1$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.2], t = 0.1, 1 - t = 0.9$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.2], 0.1 < t < 0.2, 0.8 < 1 - t < 0.9$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.3], t = 0.2, 1 - t = 0.8$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.3], 0.2 < t < 0.3, 0.7 < 1 - t < 0.8$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.4], t = 0.3, 1 - t = 0.7$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.4], 0.3 < t < 0.4, 0.6 < 1 - t < 0.7$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.5], t = 0.4, 1 - t = 0.6$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.5], 0.4 < t < 0.5, 0.5 < 1 - t < 0.6$$

$${}_t\mu^* = [0, 0.6], t = 0.5, 1 - t = 0.5$$

$${}^t\mu^* = [0,0.6), 0.5 < t < 0.6, 0.4 < 1 - t < 0.5$$

$${}^t\mu^* = [0,0.7), t = 0.6, 1 - t = 0.4$$

$${}^t\mu^* = [0,0.7), 0.6 < t < 0.7, 0.3 < 1 - t < 0.4$$

$${}^t\mu^* = [0,0.8), t = 0.7, 1 - t = 0.3$$

$${}^t\mu^* = [0,0.8), 0.7 < t < 0.8, 0.2 < 1 - t < 0.3$$

$${}^t\mu^* = [0,0.9), t = 0.8, 1 - t = 0.2$$

$${}^t\mu^* = [0,0.9), 0.8 < t < 0.9, 0.1 < 1 - t < 0.2$$

$${}^t\mu^* = [0,1), t = 0.9, 1 - t = 0.1$$

$${}^t\mu^* = [0,1), 0.9 < t < 1, 0 < 1 - t < 0.1$$

$${}^t\mu^* = [0,1], t = 1, 1 - t = 0$$

$$\mu_t^* = [0,1], t = 0$$

$$\mu_t^* = [0,1), 0 < t < 0.1$$

$$\mu_t^* = [0,1), t = 0.1$$

$$\mu_t^* = [0,0.9), 0.1 < t < 0.2$$

$$\mu_t^* = [0,0.9), t = 0.2$$

$$\mu_t^* = [0,0.8), 0.2 < t < 0.3$$

$$\mu_t^* = [0,0.8), t = 0.3$$

$$\mu_t^* = [0,0.7), 0.3 < t < 0.4$$

$$\mu_t^* = [0,0.7), t = 0.4$$

$$\mu_t^* = [0,0.6), 0.4 < t < 0.5$$

$$\mu_t^* = [0,0.6), t = 0.5$$

$$\mu_t^* = [0,0.5), 0.5 < t < 0.6$$

$$\mu_t^* = [0,0.5), t = 0.6$$

$$\mu_t^* = [0,0.4), 0.6 < t < 0.7$$

$$\mu_t^* = [0,0.4), t = 0.7$$

$$\mu_t^* = [0,0.3), 0.7 < t < 0.8$$

$$\mu_t^* = [0,0.3), t = 0.8$$

$$\mu_t^* = [0,0.2), 0.8 < t < 0.9$$

$$\mu_t^* = [0,0.2), t = 0.9$$

$$\mu_t^* = [0,0.1), 0.9 < t < 1$$

$$\mu_t^* = [0,0.1), t = 1$$

$$(\mu^*)_t = [0.1,1], t = 0, 1 - t = 1$$

$$(\mu^*)_t = [0.1,1], 0 < t < 0.1, 0.9 < 1 - t < 1$$

$$(\mu^*)_t = [0.2,1], t = 0.1, 1 - t = 0.9$$

$$(\mu^*)_t = [0.2,1], 0.1 < t < 0.2, 0.8 < 1 - t < 0.9$$

$$(\mu^*)_t = [0.3,1], t = 0.2, 1 - t = 0.8$$

$$(\mu^*)_t = [0.3,1], 0.2 < t < 0.3, 0.7 < 1 - t < 0.8$$

$$(\mu^*)_t = [0.4,1], t = 0.3, 1 - t = 0.7$$

$$(\mu^*)_t = [0.4,1], 0.3 < t < 0.4, 0.6 < 1 - t < 0.7$$

$$(\mu^*)_t = [0.5,1], t = 0.4, 1 - t = 0.6$$

$$(\mu^*)_t = [0.5,1], 0.4 < t < 0.5, 0.5 < 1 - t < 0.6$$

$$(\mu^*)_t = [0.6, 1], t = 0.5, 1 - t = 0.5$$

$$(\mu^*)_t = [0.6, 1], 0.5 < t < 0.6, 0.4 < 1 - t < 0.5$$

$$(\mu^*)_t = [0.7, 1], t = 0.6, 1 - t = 0.4$$

$$(\mu^*)_t = [0.7, 1], 0.6 < t < 0.7, 0.3 < 1 - t < 0.4$$

$$(\mu^*)_t = [0.8, 1], t = 0.7, 1 - t = 0.3$$

$$(\mu^*)_t = [0.8, 1], 0.7 < t < 0.8, 0.2 < 1 - t < 0.3$$

$$(\mu^*)_t = [0.9, 1], t = 0.8, 1 - t = 0.2$$

$$(\mu^*)_t = [0.9, 1], 0.8 < t < 0.9, 0.1 < 1 - t < 0.2$$

$$(\mu^*)_t = \{1\}, t = 0.9, 1 - t = 0.1$$

$$(\mu^*)_t = \{1\}, 0.9 < t < 1, 0 < 1 - t < 0.1$$

$$(\mu^*)_t = \emptyset, t = 1, 1 - t = 0$$

Teorem 4.1.18: E evrensel küme, μ , E de μ –kontrollü küme ve $t = \mu^*(x)$ ise

$$\bar{x} = \mu_t - (\mu^*)_t.$$

İspat: $a \in \mu_t - (\mu^*)_t$ keyfi verilsin. O halde $a \in \mu_t$ ve $a \notin (\mu^*)_t$ dir.

$$\Leftrightarrow \mu(a) \geq t \text{ ve } \mu^*(a) < 1 - t$$

$$\Leftrightarrow \mu(a) \geq \mu^*(x) \text{ ve } \mu^*(a) < 1 - \mu^*(x)$$

$$\Leftrightarrow \mu(a) \geq 1 - \mu(x) \text{ ve } 1 - \mu(a) \geq \mu(x)$$

$$\Leftrightarrow \mu(a) = 1 - \mu(x)$$

$$\Leftrightarrow a \in \bar{x}$$

Teorem 4.1.19: E evrensel küme, μ , E de (μ, μ^*) –kontrollü küme,

$\text{im}(\mu^*)_t = \{t_k \in [0, 1] | k \in \mathbb{N}, t_k < t_{k+1}\}$ ve $t_k \in \text{im}(\mu^*)_t, t_k = \mu^*(x)$ ise

$$\bar{x} = \mu_{t_k} - (\mu^*)_{t_{k+1}}.$$

İspat: $t_k = \mu^*(x)$ ancak $\bar{x} \neq \mu_{t_k} - (\mu^*)_{t_{k+1}}$ olsun. O halde $\exists a \in \bar{x} \ni a \notin \mu_{t_k} - (\mu^*)_{t_{k+1}}$ dir.

$\Rightarrow$ (i) $\mu(x) = 1 - \mu(a)$ ve $a \in \mu_{t_k}$ ve $a \in (\mu^*)_{t_{k+1}}$ olsun.

$$\Rightarrow \mu(x) = 1 - \mu(a), \mu(a) \geq t_k \text{ ve } \mu^*(a) < 1 - t_{k+1}, \mu(a) \geq t_{k+1}$$

$$\Rightarrow a \in \mu_{t_k} \text{ ve } a \in (\mu^*)_{t_k}$$

$$\Rightarrow \mu(a) \geq t_k \text{ ve } \mu^*(a) < 1 - t_k$$

$$\Rightarrow \mu(a) \geq t_k \text{ ve } 1 - \mu^*(a) > t_k$$

$$\Rightarrow 1 - \sup_{\mu(a) \leq 1 - \mu(b)} \mu(b) > t_k$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(a) \geq \inf_{\mu(a) \leq 1 - \mu(b)} (1 - \mu(b)) > t_k$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(a) > t_k$$

$$\Rightarrow \mu(a) < 1 - t_k$$

$$\Rightarrow t_k \leq \mu(a) < 1 - t_k$$

$$\Rightarrow t_k < 1 - t_k$$

$$\Rightarrow t_k < \frac{1}{2} \nexists$$

(ii) $a \notin \mu_{t_k}$ olsun.

$$\Rightarrow \mu(a) < t_k$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(a) > 1 - t_k \quad (4.9)$$

$$\mu^*(a) \geq t_k \Rightarrow \sup_{\mu(a) \leq 1 - \mu(b)} \mu(b) \geq t_k$$

$$\Rightarrow 1 - \mu(a) \geq t_k$$

$$\Rightarrow \mu(x) \geq t_k \quad (4.10)$$

(4.9) ve (4.10) dan $\mu(a) < \frac{1}{2} \nexists$

Uyarı: Bir önceki teoremden eğer μ, μ –kontrollü küme yani $\mu^*(x) = 1 - \mu(x)$ koşulu sağlanırsa $t_{k+1} = t_k$ olur.

4.2. Gösterim Teoremi

Teorem 4.2.1 (Gösterim Teoremi): E bir küme, $\{A_{t_k} | k \in \mathbb{N}\}$, E nin altkümelerinin bir ailesi olsun öyleki $\Lambda = \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq [0,1]$, ve $\forall t, s \in \Lambda, t \neq s, A_t \cap A_s = \emptyset$ olsun.

$\mathcal{C}_{t_1} = \{B_{t_k} | B_{t_{k+1}} = B_{t_k} \cup A_{t_{k+1}}, B_{t_1} = A_{t_1}\}$ olsun. $\mu_{\varphi(t_k)} = B_{t_k}$ olacak şekilde $\mathcal{C}_{t_1}$ in elemanlarını seviye altkümesi kabul eden bir μ -kontrollü küme vardır $\Leftrightarrow$ Aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\varphi(t_k) = t_{n-k+1}$ olmak üzere $\varphi(t_k) \leq \varphi(t_{k+1}) \Rightarrow B_{t_k} \supseteq B_{t_{k+1}}, k \geq 1$
- ii. $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2) \leq \dots$ ve $\varphi(t_k) \rightarrow \varphi(t_n) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{t_k} = B_{t_n}$

İspat: " $\Rightarrow$ " μ, μ -kontrollü küme olsun. $\Rightarrow \mu$ fuzzy kümedir. Gösterim teoreminden açıktır.

" $\Leftarrow$ " $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\varphi(t_k) = t_{n-k+1}$ olmak üzere $\varphi(t_k) \leq \varphi(t_{k+1}) \Rightarrow B_{t_k} \supseteq B_{t_{k+1}}, k \geq 0$ ve $\varphi(t_0) \leq \varphi(t_1) \leq \dots$ ve $\varphi(t_k) \rightarrow \varphi(t_n) \Rightarrow \bigcap_{k=0}^{\infty} B_{t_k} = B_{t_n}$ olsun.

$\Rightarrow$ Gösterim teoreminden $\exists \mu \in FS(E) \ni \mu_{\varphi(t_k)} = B_{t_k}$ dır. $a \in E$ keyfi verilsin. $\exists k \in \mathbb{N} \ni \mu(a) = t_k$.

$$a \in \mu_{t_k} \Rightarrow \mu^*(a) = 1 - t_k \Rightarrow \bar{a} = \mu_{1-t_k} - (\mu^*)_{1-t_{k-1}}$$

$\Rightarrow \exists b \in \mu_{1-t_k} - (\mu^*)_{1-t_{k-1}} \ni \mu(b) = 1 - t_k = 1 - \mu(a) \Rightarrow \mu, \mu$ -kontrollü kümedir.

Örnek 4.2.2: $E=[0,1]$, $\Lambda = \{0,0.1,0.2, \dots, 1\}$ olsun.

$$A_0 = \{1\}, A_{0.1} = [0.9,1), A_{0.2} = [0.8,0.9),$$

$$A_{0.3} = [0.7,0.8), A_{0.4} = [0.6,0.7), A_{0.5} = [0.5,0.6),$$

$$A_{0.6} = [0.4,0.5), A_{0.7} = [0.3,0.4), A_{0.8} = [0.2,0.3),$$

$$A_{0.9} = [0.1,0.2), A_1 = [0,0.1)$$

$$C_0 = \{B_{t_k} | B_{t_{k+1}} = B_{t_k} \cup A_{t_{k+1}}, B_0 = A_0\} \text{ olmak üzere}$$

$$B_0 = A_0 = \{1\}, B_{0.1} = B_0 \cup A_{0.1} = [0.9,1], B_{0.2} = B_{0.1} \cup A_{0.2} = [0.8,1],$$

$$B_{0.3} = B_{0.2} \cup A_{0.3} = [0.7,1], B_{0.4} = B_{0.3} \cup A_{0.4} = [0.6,1], B_{0.5} = B_{0.4} \cup A_{0.5} = [0.5,1],$$

$$B_{0.6} = B_{0.5} \cup A_{0.6} = [0.4,1], B_{0.7} = B_{0.6} \cup A_{0.7} = [0.3,1], B_{0.8} = B_{0.7} \cup A_{0.8} = [0.2,1],$$

$$B_{0.9} = B_{0.8} \cup A_{0.9} = [0.1,1], B_1 = [0,1]$$

$\forall t, s \in \Lambda, t \neq s, A_t \cap A_s = \emptyset$ dir.

- i. $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1], \varphi(t_k) = 1 - t_k$ olmak üzere $\varphi(t_k) \leq \varphi(t_{k+1}) \Rightarrow B_{t_k} \supseteq B_{t_{k+1}}$
- ii. $\varphi(t_0) \leq \varphi(t_1) \leq \dots$ ve $\varphi(t_k) \rightarrow \varphi(t_{11}) \Rightarrow \bigcap_{k=0}^{11} B_{t_k} = \{1\} = B_{t_{11}}$

O halde $\{B_{t_k}\}_{t_k \in [0,1]}$ kümelerini seviye altkümesi kabul eden bir μ -kontrollü küme vardır. Bu kümeye karşılık gelen üyelik fonksiyonu

$$\mu: [0,1] \rightarrow [0,1], \mu(x) = \frac{\lfloor 10x \rfloor}{10} \text{ dur.}$$

Örnek 4.2.3: $E = \mathbb{Z}_6$ ve $\Lambda = \{0.1, 0.9, 1\}$ olsun.

$$A_{0.1} = \{0\}, A_{0.9} = \{2, 4\}, A_1 = \{1, 3, 5\}$$

$$B_{0.1} = A_{0.1} = \{0\}, B_{0.9} = B_{0.1} \cup A_{0.9} = \{0, 2, 4\}, B_1 = B_{0.9} \cup A_1 = \mathbb{Z}_6$$

$\forall t, s \in \Lambda, t \neq s, A_t \cap A_s = \emptyset$ dir.

- i. $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1], \varphi(t_k) = t_{n-k+1}$ olmak üzere $\varphi(t_k) \leq \varphi(t_{k+1}) \Rightarrow B_{t_k} \supseteq B_{t_{k+1}}, t_k \in \Lambda$
- ii. $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2) \leq \varphi(t_3)$ ve $\varphi(t_k) \rightarrow \varphi(t_3) \Rightarrow \bigcap_{k=1}^3 B_{t_k} = B_{t_3}$

O halde $\{B_{t_k}\}_{t_k \in \Lambda}$ kümelerini seviye altkümesi kabul eden bir μ -kontrollü grup vardır. Bu gruba karşılık gelen üyelik fonksiyonu

$$\mu: \mathbb{Z}_6 \rightarrow [0,1], \mu(0) = 1, \mu(1) = \mu(3) = \mu(5) = 0.1, \mu(2) = \mu(4) = 0.9 \text{ dur.}$$

Açıklama: Bir önceki örnekte $0.1 \leq t_k \leq 0.5$ olmak üzere

$$\mu(0) = 1, \mu(1) = \mu(3) = \mu(5) = t_k, \mu(2) = \mu(4) = 1 - t_k$$

alınarak $\mathbb{Z}_6$ üzerinde sonsuz sayıda μ -kontrollü grup elde edilebilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle Kontrollü Küme tanımı ve örnekleri verilmiştir. Daha sonra Kontrollü Kümeler için farklı seviye altküme tanımları verilmiştir. Tanımlanan bu seviye altkümeleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Seviye altkümeleri arasındaki ilişkiler çeşitli örnekler ile desteklenmiştir. Son bölümde, daha önce birçok araştırmacı tarafından farklı küme teoriler üzerinde çalışılmış olan gösterim teoremleri Kontrollü Kümeler için verilerek ispatlanmıştır. Bu teorem aracılığıyla belli koşulları sağlayan bir kümeler ailesini kendine seviye altkümeleri kabul eden bir Kontrollü Kümenin elde edilebileceği gösterilmiştir. Son olarak Kontrollü Kümeler için verilen gösterim teoreminin Kontrollü Gruplar üzerinde de sağlandığı gösterilmiştir.



KAYNAKLAR

Atanassov, K. T. (1983). Intuitionistic Fuzzy Sets, VII ITKR.s Session, Sofia: June.

Atanassov, K. T. (1999). Intuitionistic Fuzzy Sets, Physica-Verlag: Heidelberg, New York.

Birkhoff, G. (1940). Lattice Theory, American Mathematical Society, United States of America.

Biswas, R. (1989). "Intuitionistic fuzzy subgroups." Mathematical Forum, X, pp. 37-46.

Çuvalcıoğlu, G. (2014). "Some properties of Controlled Set Theory." Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 20, No. 2, pp. 37-42.

Çuvalcıoğlu, G., Tarsuslu, S. and Demirbaş, E. (2019). "Sheet level sets and the representation theorem for intuitionistic fuzzy sets." Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 25, No. 2, pp. 15-19.

Goguen, J. (1967). "L-fuzzy sets." Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 18, pp. 145-174.

Halmos, P. R. (1978). Measure Theory. Springer, New York.

Janis, V. (2010). "t-Norm based cuts of intuitionistic fuzzy sets." Information Sciences, Vol. 180, No. 7, pp. 1134-1137.

Klement, E. P., Mesiar, N. and Pap, E. (2000). Triangular Norms, Springer Science+Business Media, Dordrecht.

Li. M. (2007). "Cut sets of intuitionistic fuzzy sets (in Chinese)." Journal of Liaoning Normal University, Vol. 30, No. 2, pp. 152-154.

Menger, K. (1942). "Statistical metrics." Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 8, pp. 535-537.

Ralescu, D. A. (1992). "A generalization of the representation theorem." Fuzzy Sets and Systems, Vol. 51, No. 3, pp. 309-311.

Rosenfeld, A. (1971). "Fuzzy Groups." Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 35, pp. 512-517.

Sharma, P. K. (2011). “ (α, β) -Cut of Intuitionistic Fuzzy Groups.” International Mathematical Forum, Vol. 53, No. 6, pp. 2605-2614.

Yager, R. R. (2010). “Level sets and the representation theorem for intuitionistic fuzzy sets.” Soft Computing, Vol. 14, pp. 1-7.

Yan, L. (2008). “Intuitionistic Fuzzy Ring and Its Homomorphism Image.” International Seminar on Future BioMedical Information Engineering, pp. 75-77.

Zadeh, L. A. (1965). “Fuzzy Sets.” Information and Control, Vol. 8, pp. 338-353.

Zadeh, L. A. (1975). “The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning.” Information Sciences, Vol. 8, pp. 133-139.

