

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN
BAZI SONUÇLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Muhsin ENGİN
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cesim TEMEL

VAN-2022

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN
BAZI SONUÇLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Muhsin ENGİN

VAN-2022

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Cesim TEMEL danışmanlığında, Muhsin ENGİN tarafından sunulan “Küme Değerli Operatörler İçin Sabit Nokta Teoremlerinin Bazı Sonuçları” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince/07/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Heybetkulu
MUSTAFAYEV

İmza:

Üye: Prof. Dr. Harun POLAT

İmza:

Üye: Prof. Dr. Cesim TEMEL

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../07/2022 tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Harun AKKUŞ
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Muhsin ENGİN



ÖZET

KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI SONUÇLARI

ENGİN, Muhsin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cesim TEMEL
Temmuz 2022, 73 sayfa

Bu tezde Banach uzayında küme değerli operatörler için sabit nokta teoremlerin bazı sonuçları çalışılmıştır. Tezde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Sonra küme değerli operatörlerin ve sabit nokta çalışmaların temeli olan Hausdorff metriği ve özellikleri anlatılmıştır. Küme değerli operatör kavramı da bu bölümde bazı örneklerle ifade edilmiştir. Daha sonra küme değerli daralma operatörleri için sabit nokta teorisinin temel referansı olan Nadler ve Reich'in sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Çalışmanın esas kısmı Nadler teoremi üzerine yapılmış olan bir genelleme ile başlamaktadır. Akabinde (C_λ) koşulunu sağlayan daralma operatörleri incelenmiş, Keawchaern ve arkadaşlarının vermiş olduğu iki ana sonuç üzerinde durulmuştur. Bu sonuçlara bağlı olarak Opial koşullu operatör kavramından bahsedilmiştir. Sonraki bölümde Popescu'nun vermiş olduğu yeni bir tip daralma operatörü incelenmiş, Kikkawa – Suzuki tipi benzer yeni bir tür küme değerli operatör tanımlanmış ve bunlara bağlı sonuçlar ifade edilmiştir.

Son bölümde ise küme değerli hemen hemen daralma tipleri, süreklilikleri ve sabit noktaları araştırılmıştır. Berinde ve arkadaşlarının başlangıçta tek değerli ve akabinde küme değerli operatörler için elde etmiş oldukları sabit nokta ve süreklilik sonuçları ele alınmıştır.

Anahtar kelimeler: Banach daralma prensibi, Daralma operatörü, Hausdorff metriği, Küme değerli operatör, Nadler teoremi, Opial daralma, Sabit nokta, Sabit nokta genellemeleri.



ABSTRACT

SOME RESULTS OF FIXED-POINT THEOREMS FOR SET-VALUE OPERATORS

ENGİN, Muhsin

M. Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cesim TEMEL

July 2022, 73 pages

In this thesis, some results of fixed-point theorems for set-valued operators in Banach space are studied. Some basic definitions and theorems that will be used in the thesis are given. Then, Hausdorff metric, which is the basis of set-valued operators and fixed-point studies, and its properties are explained. The concept of set-valued operator is also expressed with some examples in this section. Then, the fixed-point theorems of Nadler and Reich, which are the main references of the fixed-point theory for set-valued contraction operators, are examined.

The main part of the study begins with a generalization made on Nadler's theorem. Afterwards, the contraction operators satisfying the (C_λ) condition are examined, and two main results given by Keawchaern et al. are emphasized. Depending on these results, the concept of Opial conditional operator is mentioned. In the next section, a new type of contraction operator given by Popescu is examined, a new type of set-valued operator like Kikkawa-Suzuki type is introduced and the related results are expressed.

In the last section, set-valued almost contraction types, continuities and fixed points are investigated. The fixed point and continuum results obtained by Berinde et al. for single-valued and then set-valued operators were discussed.

Keywords: Banach contraction principle, Contraction operator, Fixed-point, Fixed-point generalizations, Hausdorff metric, Nadler's theorem, Opial contraction set-valued operator.



ÖN SÖZ

Birçok diferansiyel denklem, integral denklemleri veya fonksiyonel denklem, bir Banach uzayı üzerinde bir küme değerli operatörün uygun çözümleri ile modellenilebilir. Küme değerli operatörlerin lineer olmayan fonksiyonel analiz yöntemleri kullanılarak analiz edilebilir. Bu nedenle sabit nokta teorisinin bu yüzyılın başından beri, başlangıçta tek değerli ve daha sonra küme değerli operatörler için yeni ve çok aktif bir araştırma konusu olması şaşırtıcı değildir.

Bu tez çalışmasında küme değerli operatörler için sabit nokta çalışmaları detaylı bir şekilde incelenmiş, çeşitli sonuçlar ele alınmış ve mütalaa edilmiştir.

Çalışmalarım boyunca tecrübe ve özveriyle beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve tezin hazırlanma sürecinde hiçbir yardımını esirgemeyen kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Cesim TEMEL'e ve araştırmalarım müddetince motivasyon kaynağım olan sevgili eşime ve kızlarıma şükranlarımı sunarım.

2022

Muhsin ENGİN



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	11
4.1. Temel Tanım ve Teoremler:	11
4.2. Küme Değerli Operatörler:	16
4.3. İki Küme Arası Uzaklık ve Hausdorff Metriği:	19
4.4. Küme Değerli Operatörler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri:	30
5. NADLER'İN SABİT NOKTA TEOREMİ ÜZERİNE BİR GENELLEME	37
5.1. Bazı Sonuçlar:	39
6. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ GENİŞLEMİYEN KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	41
6.1. Bazı Sonuçlar:	47
7. YENİ BİR TİP KÜME DEĞERLİ DARALMA OPERATÖRÜ	53
8. HEMEN HEMEN DARALMA OPERATÖRLERİNİN SÜREKLİLİĞİ VE SABİT NOKTALARI	59
9. SONUÇ VE TARTIŞMA	67
KAYNAKLAR.....	69
ÖZ GEÇMİŞ.....	73



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$d(x, y)$	İki nokta arasındaki metrik uzaklık
$h^*(x, A)$	x noktasının A kümesine uzaklığı
$h(A, B)$	İki kümenin birbirine olan Hausdorff uzaklığı
2^X	X kümesinin bütün alt kümelerinin ailesi
$P_T(X)$	X in boştan farklı, kapalı bütün alt kümelerinin ailesi
$P_{bT}(X)$	X in boştan farklı, kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi
$P_{Tc}(X)$	X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümelerinin ailesi
$P_k(X)$	X in boştan farklı, kompakt alt kümelerinin ailesi
$P_{bTc}(X)$	X in boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi
$P_{kc}(X)$	X in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi
\xrightarrow{h}	Hausdorff metriğinde yakınsaklık
$Fix(T)$	T operatörünün sabit noktalarının kümesi
$\ T\ $	T operatörünün normu
\mathcal{U}	\mathfrak{N} üzerinde nontrival (açık olmayan) ultra filtre

Simgeler

Açıklama

$\tilde{X} = (X)_u$

X uzayının ultra kuvveti

$I_\infty(X)$

X uzayındaki bütün sınırlı dizilerin kümesi

\mathfrak{K}

\mathfrak{K} kümesinin çekirdeği

$\{x_n\}_u$

$\{x_n\}$ ' nin \mathcal{U} üzerindeki bir denklik sınıfı

\dot{x}

Bir x elemanın \tilde{X} 'deki görüntüsü

$r(E, \{x_n\})$

$\{x_n\}$ ' nin E 'deki asimptotik merkezi

$:=$

Tanım gereği eşittir

X^*

X 'in duali

$B(x_0, r)$

x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar

$D(x_0, r)$

x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar

$S(x_0, r)$

x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi

1. GİRİŞ

Küme değerli operatörler teorisi, matematik için önemli bir yer teşkil etmektedir. Tanımlanan boştan farklı bir kümenin elemanlarını başka bir kümenin kümeler koleksiyonunun elemanlarına eşleyen küme değerli eşleme sistemi, çoğul (çok) değerli bir operatör fikri olarak ortaya atılmasının doğal bir sonucu şeklinde tezahür etmiştir. Çok yakın bir zamana kadar, matematiğin birçok alanında, küme değerli bir operatör aslında tek değerli operatör olarak algılanmış ve sadece tek değerli olarak kullanılmıştır. Fakat bu tek değerli operatör mantığı teorik anlamda oluşan bazı problemlerin analiz edilip incelenmesi konusunda yeterince işlevsel olamamıştır. Yani başka bir ifadeyle; tek değerli operatörlere dayalı klasik matematik çalışmalarının yeni uygulamalarını küme değerli operatörler doldurmuştur. Bu bağlamda Hammerstein denklemleri, diferansiyel kapsamlar, oyun teorisi, aralıklı aritmetik, matematiksel ekonomi ve özellikle sabit nokta teorisi gibi birçok alanda uygulanabiliyor olması küme değerli operatörleri önemli derecede etkili kılmıştır. (Kato, 1966; Naimark, 1968; Gorniewicz, 2006; Zeidler, 1984; Cross, 1998, Hu S. ve ark., 1997).

X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ tanımlı bir operatör olsun. Bu takdirde $T(x) = x$ olacak biçimde X 'e ait bir eleman mevcutsa bu x elemanına T operatörünün bir sabit noktası denilmektedir. Yani T operatörü altında aynı değeri ifade eden ve değişmeyen noktaya T operatörünün sabit noktası denilmektedir.

Bir operatörün kendi karakteristik özellikleri veya tanım kümesinin şartları sabit noktasının varlığını garantilemektedir. Örneğin;

- i. Vektör uzayı olan bir V için $T: V \rightarrow V$,

$$T(x) = x + a(a \in V, a \neq 0)$$

operatörünün her hangi bir sabit noktası mevcut değildir.

- ii. $X = (0,1)$ ve $T: X \rightarrow X$, $T(x) = \frac{x}{3}$ operatörünün sabit noktası yoktur.
- iii. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x^2 - x$ ise 0 ve 2 noktaları T 'nin sabit noktalarıdır.
- iv. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ operatörü için $(x, x) \in \mathbb{R}^2$ biçimindeki bütün noktalar T 'nin sabit noktalarıdır.
- v. $X = [0,1]$ ve $T: X \rightarrow X$ olmak üzere

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

operatörü için $x = 1$ noktası T 'nin tek sabit noktasıdır.

Bir operatörün sabit noktasının varlığı o operatörün tanımı ile ilişkili olabilir veya tanımlı olduğu kümenin yapısıyla ilgili olabilir. Bu teori bir operatörün sabit nokta veya noktaların varlık şartları, var ise tekliği ve tekse nasıl bulunabileceği konularını araştırmaktadır. Genel anlamda operatörlerin sabit noktaları araştırılırken; “Verilen bir T operatörünün en az bir sabit noktasının olması için ne gibi koşullar sağlanmalıdır?”, “ T 'nin sabit noktası hangi koşullar altında tektir?”, “ T operatörünün bir sabit noktasının varlığını garantilemek için T 'nin tanım kümesi üzerine hangi ek koşullar konulmalıdır?”, “ T operatörünün tekrarlanan dizisinin yakınsaklığı hakkında neler söylenebilir?” gibi sorular sorulabilir.

Sabit Nokta Teorisi çalışmaları her ne kadar eski yıllara dayansa da Picard (1890) sabit noktaya öncü olabilecek teorik bir çalışma ortaya koymuştur (Rus, 1993). Bununla birlikte sabit nokta için öncü çalışmalar; 1912’de Brouwer’in sabit nokta teoremi, 1922’de Banach’ın daralma prensibi ve 1930’da Schauder’in, Banach uzayında Brouwer teoremi üzerine bir genellemesi olarak gösterilebilir.

Brouwer teoreminde; “ M, \mathbb{R}^N ’in boş olmayan konveks ve kompakt bir kümesi ve $N \geq 1$ için $T: M \rightarrow M$ operatörü sürekli ise T bir sabit noktaya sahiptir” demektedir. Schauder ise, M, X Banach uzayında boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir küme ve $T: M \rightarrow M$ operatörü kompakt ise aynı zamanda sabit bir noktaya sahip olduğunu ifade etmektedir (Zeidler, E., 1984).

Stephan Banach 1922’de matematiksel analizin en kritik sonuçlarından biri ve metrik sabit nokta teorisinin temelini oluşturan, tam metrik uzaylar için bir prensip ortaya koymuştur. Banach teoreminde; standart metrik ile tam olan bir X uzayında, $T: X \rightarrow X$ ’e her daralma operatörünün bir sabit noktası varlığından ve tekliğinden bahsetmektedir. Banach’ın ortaya koymuş olduğu ve matematik literatüründe Banach’ın daraltma prensibi olarak bilinen teoremi, sabit nokta teorisinin tek değerli operatörler için en önemli teoremlerden biri olarak kabul görmektedir.

Banach bahsettiğimiz teoreminde;

“(X, d) metrik uzay ve $M \subseteq X$ olmak üzere, $T: M \rightarrow M$ bir operatör olsun. Her $x, y \in M$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabiti varsa T ‘ye k – daralma operatörü denir. O halde T ’nin bir sabit noktası vardır ve tektir” (Banach, 1922). Banach’ın ortaya koymuş olduğu bu sonuç sabit noktanın varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar için önemli bir referans olmaktadır. Banach, yaptığı çalışmalarda, Banach uzayında alınan bir daralma operatörünün yalnız bir sabit noktaya sahip olduğunu ispat etmiştir. Bu hususta vardığı önemli sonuçlardan birisi de Picard iterasyonu ile oluşturulan bir dizinin sabit bir noktaya yakınsaması olduğunu söyleyebiliriz.

İlerleyen zamanlarda Banach Daralma Prensiplerinin genelleştirmeleri yapılmıştır. Özellikle Nadler 1969’da Hausdorff metriği ile küme değerli daralma operatörlerini kullanarak bir sabit nokta teorisi oluşturmuştur. Daralma operatörü kuralı matematik literatüründe birçok önemli problemin çözümünün varlığı ve tekliğini ifade etmek açısından önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle Banach’ın daralma prensibi birçok matematikçi tarafından genelleştirilmiştir.

Nadler 1969 yılında Hausdorff metriğini kullanarak küme değerli daralma kavramını ifade etmiş olup, daralma dönüşümü kuralını küme değerli operatörler için kanıtlamıştır. Teoreminde, bir (X, d) metrik uzayında ve $P_{bT}(X)$, X ’in sınırlı, kapalı boş olmayan bütün alt kümelerinin ailesi olmak üzere $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ operatörü için eğer $x \in T(x)$, olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu noktaya T küme değerli operatörünün bir sabit noktası olduğunu söylemiştir. Nadler’in sabit nokta teoremi Banach daralma prensibinin bir genişlemesi olarak da bilinmektedir.

Küme değerli sabit noktalar için bazı örnekler;

- i. $X = \{1,2,3\}$ olsun ve $T_1: X \rightarrow P_{bT}(X)$ verilsin. Öyle ki

$$T_1(x) = \begin{cases} \{2\}; & x = 1 \\ \{1\}; & x = 2 \\ \{3\}; & x = 3 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada $1 \notin T_1(1)$, $2 \notin T_1(2)$ ve $3 \in T_1(3)$ dir. Dolayısıyla $x = 1$ veya $x = 2$ noktaları T için bir sabit nokta değilken $x = 3$ noktası T için bir sabit noktadır.

- ii. $T_2: [0, \infty) \rightarrow 2^{[0, \infty)}$, $T_2(x) = [0, x]$ operatörü her $x \in [0, \infty)$ için bir sabit noktadır.

$$\text{iii. } T_3: [0,1] \rightarrow 2^{[0,1]}, T_1(x) = \begin{cases} \{1\}; & x < \frac{1}{2} \\ \{0,1\}; & x = \frac{1}{2} \\ \{0\}; & x > \frac{1}{2} \end{cases} \text{ operatörünün hiçbir sabit}$$

noktası yoktur.

$$\text{iv. } T_3: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}, T_3(x) = \begin{cases} [-1,1]; & x \neq 0 \\ \{0\}; & x = 0 \end{cases} \text{ operatörü için } x = 0 \text{ ve her bir } x \in [-1,1] \text{ bir sabit noktadır.}$$

Mizoguchi ve Takahashi (1989), Daffer ve Kaneko (1995), Semenov (2002), Ciric (2009) gibi çeşitli araştırmacılar Nadler teoremi genelleştirmesi olarak birçok sabit nokta teoremi ispatladılar.

2008 yılında Suzuki, Banach daralma prensibinin bir genellemesi olan yeni bir tip daralma operatörü tanımladı. Bu sonuç metrik uzaylarda sabit nokta teorisi için önemlidir. Kikkawa (2008), Dhompongsa (2009), Mot ve ark. (2009), Popescu (2009), Singh (2010), Doric ve ark. (2011), Popescu (2011) vs. bu teoremin genelleştirmesini yapmışlardır.

Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde tek değerli daha sonra da küme değerli operatörler için sabit nokta teorisinden bahsedilmiş ve bu konu ile ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiştir. İkinci kısımda literatür araştırması verilmektedir. Üçüncü kısımda bazı metrik ve topolojik kavramlar, küme değerli operatörlerin Hausdorff metriği özellikleri, küme değerli daralma operatörleri için Nadler ve Reich'in sabit nokta teoremleri verilmiştir.

Beşinci bölümde Gordji ve arkadaşlarının 2010'da yapmış oldukları çalışmaları ele alınmıştır. Nadler'in sabit nokta teoremi üzerine olan bir genelleme teoremi olan bu çalışmayı makalesinde vurgulayan Khine (2019)'nin çalışması incelenmiştir.

Altıncı bölümde Kaewcharoen ve Panyanak'ın 2011 yılında yapmış oldukları "Bazı genelleştirilmiş çok değerli genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teoremleri" isimli çalışmaları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca Garcia – Falset ve arkadaşlarının 2011 yılında yapmış oldukları çalışmada ele aldıkları (C_λ) koşulundan bahsedeceğiz. Burada bazı klasik sabit nokta teoremlerinin küme değerli genişlemeyen operatörler için bu koşulu karşılayan operatörlere genişletildiğini göstereceğiz. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçlar Lami Dozo (1973), Lim (1974), Kirk ve Massa (1990), Dhompongsa ve ark. (2009), Akbar ve Eslamian (2010), Garcia- Falset ve ark. (2011) gibi birçok benzeri çalışmaların genelleştirildiğini ayrıca Kaewcharoen ve Panyanak'ın

ifade etmiş olduğu bir Banach uzayının hiperkuvvetini ve bunların sabit noktalarını, Dozo'nun teoreminde kullanmış olduğu Opial koşullara değinilecek ve Opial koşullu operatör tanımlanacaktır.

Yedinci bölümde bazı temel sabit nokta problemleri için Kikiwa – Suzuki tipi küme değerli operatörler tanıtılmış ve buna bağlı olarak sabit nokta ile ilgili bazı temel sonuçlar üzerinde durulmuştur. Elde edilen sonuçların Nadler (1969) ve Ciric (1972) tarafından verilen klasik sonuçların yanı sıra Kikkawa – Suzuki (2008a), Mot ve Petrusel (2009)'in teoremlerini genelleştirip, tamamlayıp ve genişlettiği gösterilmiştir. Popescu'nun 2012 yılında ilgili çalışması incelenmiştir.

Sekizinci bölümde Berinde ve arkadaşlarının (2008) hemen hemen daralma operatörleri ve bu operatörlerin tek değerli ve küme değerli olanları için sabit noktaları, süreklilikleri incelenmiştir. Ayrıca Berinde'in 2003 yılındaki konu ile ilgili bir diğer çalışmasındaki sorusu cevaplanmıştır.

Son ve dokuzuncu bölümde elde edilen sonuçlar ve genelleme teoremleri değerlendirilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar ve genelleme teoremleri üzerinde tartışılmıştır.

Bu çalışmanın amacı küme değerli operatörlerin genel özelliklerini, karakteristiğini ve buna bağlı olarak sabit nokta teorisini incelenmektir. Çalışma için küme değerli operatörlerin temel özellikleri ve sabit noktaları ile ilgili kitap, dergi, makale, tez vb. her türlü akademik çalışmalardan literatür taraması yapılmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bu çalışma konusuna temel teşkil eden teoremler için Brouwer (1912), Banach (1922), Schauder (1930), Nadler (1969) ve Reich (1972,1983) çalışmalarından istifade edilmiştir. Hausdorff metriği ve küme değerli operatörlerin temel tanım, lemma, teorem vs. için Zeidler (1984), Hu ve Papageorgiou (1997), Berinde (2004), Górniewicz (2006), Agarwal, O'Regan ve Sahu (2009) çalışmalarından faydalanılmıştır.

İki kapalı küme arasındaki uzaklık kavramı ve Hausdorff metriği için Pompeiu (1905) ve Felix Hausdorff (1914) ile Berinde ve Pacurar (2013)'in Pompeiu – Hausdorff uzaklığı üzerinde çalıştıkları makalelerinden istifade edilmiştir.

Metrik, topolojik tanım ve teoremler Kreyszig (1978)'in fonksiyonel analiz, Yüksel (2006) ve Nizami (2016)'nin genel topoloji kitaplarından istifade edilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde Nadler'in teoremi için elde edilen genelleme sonuçları Gordji ve ark. (2010) ve Khine (2019) çalışmalarından incelenmiştir.

Altıncı bölümde (C_λ) koşulu ve Opial koşul ile ilgili bağlantılı sonuçlar için Opial (1967), Lami Dozo (1973), Lim (1974), Kirk ve Massa (1990), Dhompongsa ve ark.(2009), Akbar ve Eslamian (2010), Garcia - Falset ve ark.(2011) ve Kaewcharoen ve ark. (2011)'nin çalışmalarından yararlanılmıştır.

Yedinci bölümde yeni bir tip daralma ve (s,r)-küme değerli operatörler için Nadler (1969) ve Ciric (1972) tarafından verilen klasik sonuçların yanı sıra Rus ve ark. (2003), Kikkawa – Suzuki (2008), Mot ve Petrusel (2009) ve Popescu (2013)'nun çalışmalarından istifade edilmiştir.

Sekizinci bölümde hemen hemen daralma operatörleri için Zamfirescu (1972), Rohades (1977,1988), Berinde (2004), Babu ve ark. (2008), Berinde (2008) ve Berinde (2013) çalışmalarından yararlanılmıştır.

Bunların dışında literatür incelendiğinde Eldestein (1962), Rakotch (1962), Van der Walt (1963), Bryant (1968), Boyd-Wong (1969), Meir-Keeler (1969), Reich (1971), Hardy ve Rogers (1973), Lami Dozo (1973), Ciric (1974), Lim (1974), Rus (1975), Rhodes (1977), Reich (1983), Rhoades ve ark. (1988), Mizoguchi ve Takahsi (1989), Kirk ve Massa(1990), Aksoy ve Khamsi (1990), Daffer ve Kaneko (1995), Petrusel (2001), Semenov (2002), Berinde (2004), Petrusel ve Rus (2007), Kikkawa (2008),

Suzuki (2008a), Suzuki (2008b), Berinde ve ark. (2008), Babu ve ark. (2008) Ciric (2009), Dhompongsa (2009), Popescu (2009), Mot ve Petrusel (2009), Abkar ve Eslamian (2010), Singh (2010), Gordji ve ark. (2010), Garcia-Falset ve ark. (2011), Doric ve Lazovic (2011), Berinde ve ark. (2013), Khine (2019) gibi araştırmacıların da yaptıkları çalışmalarla sabit nokta teorisine önemli katkılar sağladıkları anlaşılmaktadır.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu çalışmanın materyali ve araştırma aracı olarak tezin kaynakçasında yer alan küme değerli operatörler için genişleme teoremleri ile ilgili makaleler, tez konusu ile ilgili temel bilgiler, küme değerli operatörlerin sabit noktaları için temel tanım, lemma ve teoremleri vb. sonuçları içeren kaynak kitaplardan istifade edilmiştir.

Yöntem olarak temel topolojik eşitsizlik ve işlemler, Hausdorff metriği, Nadler'in Banach daralma prensibi üzerine yapmış olduğu genelleme gibi daralma metotları vb. kullanılmaktadır.



4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamızda geçen bazı temel metrik ve topolojik kavramlar ele alınacaktır.

4.1. Temel Tanım ve Teoremler:

Tanım 4.1.1:

X boş olmayan bir küme, aşağıdaki şartları gerçekleyen $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna bir metrik ve (X, d) 'ye de bir metrik uzay denir (Kreyszig, 1978).

- i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- ii) her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,
- iii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Tanım 4.1.2:

(X, d) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ ve r pozitif bir reel sayı olsun

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) < r\}$$

kümesine merkezi x_0 ve yarıçapı r olan açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine merkezi x_0 ve yarıçapı r olan kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) = r\}$$

Kümesi merkezi x_0 ve yarıçapı r olan kapalı yuvar yüzeyi olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.3:

U , (X, d) metrik uzayında ve X 'in boş kümeden farklı bir alt kümesi ve her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesi açık küme olarak adlandırılır. Şayet $U^c = X \setminus U$ kümesi açık ise o zaman U kümesi kapalı kümedir (Kreyszig, 1978).

Önerme 4.1.1:

(X, d) bir metrik uzay olsun. O halde aşağıdakiler doğrudur (Kreyszig, 1978).

- i) (X, d) metrik uzayındaki her açık yuvar bir açık kümedir.
- ii) (X, d) uzayındaki her kapalı yuvar aynı zamanda kapalı bir kümedir.

Tanım 4.1.4:

Boş kümeden farklı bir X kümesi ve X kümesinin alt kümelerinin bir sınıfı olarak τ alınsın. Şayet τ aşağıda verilen şartları sağlıyorsa o zaman τ sınıfına X kümesi nezdinde bir topoloji denir ve (X, τ) da bir topolojik uzay olarak tanımlanır (Kreyszig, 1978).

- i) $X, \emptyset \in \tau$,
- ii) τ 'daki sonlu sayıda elemanın arakesit kümesi yine τ 'dadır,
- iii) τ 'daki herhangi sayıda elemanın birleşim kümesi yine τ 'dadır.

Tanım 4.1.5:

Topolojik bir uzay (X, τ) ile bir $\{x_n\} \subseteq X$ dizisi ve $x \in X$ alınsın. Şayet $x \in G$ olmak suretiyle bütün G açık kümeleri bağlamında, $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in G$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ 'e yakınsar denilir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.6:

(X, τ) ve (Y, σ) sırasıyla topolojik uzaylar. $T: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x \in X$ olsun. Şayet $T(x) \in V$ şeklindeki bütün $V \in \sigma$ için $x \in U$ ve $T(U) \subseteq V$ şeklinde bir $U \in \tau$ mevcutsa T operatörü $x \in X$ 'de süreklidir diye ifade edilir. Şayet T operatörü X in her bir noktasında süreklirse T operatörüne sürekli operatör adı verilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.7:

(X, τ_1) ve (Y, τ_2) sırasıyla topolojik uzayları ile bir $T: X \rightarrow Y$ 'ye operatörü alınsın. (X, τ_1) ' de x 'e yakınsayan her bir $\{x_n\}$ dizi için (Y, τ_2) 'de $\{T(x_n)\}$ dizisi $T(x)$ noktasına yakınsıyorsa T operatörüne x 'de dizisel süreklidir denilir. T operatörü X 'in her noktasında süreklirse T operatörüne X uzayında dizisel süreklidir denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.8:

(X, d) bir metrik uzay $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere

$$h^*(A, B) = \inf\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$$

A ve B kümeleri arasındaki uzaklığı,

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a): a \in A\}$$

ifadesi x noktasının A kümesine olan uzaklığı

$$d(A) = \sup\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$$

değeri A kümesinin çapı olarak adlandırılır. Eğer $d(A) < \infty$ ise A 'ya sınırlı küme ve $d(A) = \infty$ ise A sınırsız küme olarak adlandırılır (Yüksel, 2006).

Tanım 4.1.9:

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ terimleri X de olan bir dizi olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde mevcutsa $\{x_n\}$ 'e $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile ifade edilir. x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 4.1.1:

Bir metrik uzayda bir noktaya yakınsayan her dizinin limiti tekdir (Yüksel, 2006).

Tanım 4.1.10:

(X, d) bir metrik uzay ve X 'de bir dizi olan $\{x_n\}$ verilsin. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisidir denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 4.1.2:

(X, d) bir metrik uzay ve bu uzaydaki bir $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise bu dizinin alt dizisi olan bir $\{x_{n_k}\}$ dizisi de aynı noktaya yakınsar (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.11:

Metrik (X, d) uzayında alınan her Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsorsa (X, d) uzayı üzerindeki d metriğine tamdır denir. Şayet d metriği (X, d) üzerinde tam ise (X, d) 'ye de tam metrik uzay adı verilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.12:

Metrik bir uzay olan (X, d) ve $x \in X$ ile A, X in bir alt kümesi olarak alınsın. Şayet $\varepsilon > 0$ iken

$$(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

oluyorsa $x \in X$ 'de A nın bir yığılma noktası adı verilir. A kümesinin bütün yığılma noktalarının kümesi ise A' ile ifade edilir. $A \cup A'$ ise A nın kapanışı demektir ve \bar{A} sembolü ile ifade edilir (Yüksel, 2006).

Önerme 4.1.1:

(X, d) uzayda bir $x \in X$ alınsın. A kümesi, X in bir alt kümesi ve x, A kümesinin bir yığılma noktası olarak kabul edilsin. Şu hâlde açık yuvar her $B(x, \varepsilon)$ A kümesinin sonsuz sayıda elemanını barındırır (Yüksel, 2006).

Tanım 4.1.13:

Bir (X, τ) uzayındaki açık kümelerin bir ailesi $\{G_i; i \in I\}$ olarak alınsın. Bir $A \subseteq X$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

sağlanıyor ve $\{G_i : i \in I\}$ kümeler ailesi A 'nın bir açık örtüsü olarak adlandırılır. Şayet bu açık örtü kümeler ailesinin

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$$

sağlanacak şekilde bir $\{G_{i_k} : k = 1, 2, 3, \dots, n\}$ alt aile mevcutsa bu alt kümeler ailesi A 'nın sonlu bir alt örtüsü olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.14:

(X, τ) uzayında bir $A \subseteq X$ alınsın. Şayet A 'nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü mevcutsa A kompakt küme olarak adlandırılır. Şayet X kompaktsa (X, τ) da kompakt uzay olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Teorem 4.1.3:

Kompakt bir (X, τ) uzayının kapalı her alt kümesi de kompakttır (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.15:

Topolojik bir uzay olarak (X, τ) alınsın ve X kümesinin farklı her nokta çiftini içeren ayrık açık kümeleri mevcutsa (X, τ) uzayı Hausdorff uzayı olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Teorem 4.1.4:

Bir Hausdorff uzayında kompakt olan her alt küme aynı zamanda kapalıdır (Kreyszig, 1978).

Tanım 4.1.16:

Bir (X, d) metrik uzayı kompakttır ancak ve ancak bu metrik uzayda her bir dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcuttur (Yüksel, 2006).

Teorem 4.1.5:

A ile B kümeleri (X, d) uzayında, X in boştan farklı iki alt kümesi olsunlar. Şayet A kümesi kompaktsa $D(A, B) = D(p, B)$ sağlanacak formda bir $p \in A$ mevcuttur (Yüksel, 2006).

Sonuç 4.1.1:

Bir (X, d) metrik uzayında bir $x \in X$ alınsın ve A, X kümesinin kompakt bir alt kümesi olarak kabul edilsin.

O halde $d(x, a) = D(x, A)$ sağlanacak formda bir $p \in A$ mevcuttur (Yüksel, 2006).

Tanım 4.1.17:

K cisimi reel sayılar yahut kompleks sayılar cismi olsun ve ayrıca X uzayı K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

Her bir $x, y \in X$ ile her bir $\alpha \in K$ iken

- i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlayan $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+, x \rightarrow \|x\|$ operatörüne X lineer uzayı üzerinde bir norm denir (Nizami, 2016).

Tanım 4.1.18:

$(X, \|\cdot\|)$ uzayı verilsin. $\{x_n\} \subset X$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $x_n \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi X normlu uzayında x_0 'a yakınsıyor denir ve bu $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ olarak belirtilir (Nizami, 2016).

Tanım 4.1.19:

Bir normlu lineer uzayda sırasıyla açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi aşağıdaki biçimde tanımlanır (Nizami, 2016):

$$D_r(x_0) = D(x_0; r) \text{ olmak üzere}$$

$$D(x_0; r) = \{x \in X: \|x - x_0\| < r\}$$

$$\bar{D}_r(x_0) = \bar{D}(x_0; r) = \{x \in X: \|x - x_0\| \leq r\}$$

$$S_r(x_0) = S(x_0; r) = \{x \in X: d(x_0, x) = r\}, r > 0.$$

Tanım 4.1.20:

Eğer, X normlu lineer uzayın $M \subset X$ kümesini kapsayacak şekilde (açık veya kapalı) bir yuvar bulunuyorsa, M kümesi sınırlıdır (Nizami, 2016).

Tanım 4.1.21:

X normlu lineer uzayının $A \subset X$ kümesi için

$$\sup\{\|x - y\|: x, y \in A\} = d(A)$$

sayısına A kümesinin çapı denir.

$$\inf\{\|x - y\|: y \in A\} = d(x, A)$$

sayısına da $x \in X$ noktasından A kümesine uzaklık denir (Nizami, 2016).

Uyarı 4.1:

X normlu lineer uzayının bir $A \subset X$ alt kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeterli koşulun $d(A) < \infty$ olduğu kolayca görülmektedir.

Tanım 4.1.22:

Bir X normlu lineer uzayında $A, B \subset X$ kümeleri arasındaki uzaklık

$$\inf\{\|x - y\|: x \in A, y \in B\} = d(A, B)$$

şeklinde tanımlanır (Kreyszig, 1978).

Uyarı 4.1.2:

Bir normlu lineer uzayda açık, kapalı küme, bir kümenin yığılma noktası, yığılma noktaları kümesi ve bir kümenin kapanışı metrik uzaydakine benzer şekilde tanımlandığına dikkat ediniz.

Tanım 4.1.23:

X bir normlu lineer uzay olsun. $\{x_n\} \subset X, n = 1, 2, \dots$ dizisi “ $\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}$ ve $\forall n > n_\varepsilon$ için $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır” koşulunu sağlıyorsa, $\{x_n\}, n = 1, 2, \dots$ dizisine X normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir (Nizami, 2016).

Tanım 4.1.24:

Bir uzayda her Cauchy dizisi yakınsaksa o uzaya tam uzay adı verilir ve tam normlu lineer uzaya da Banach uzayı denir (Nizami, 2016).

4.2. Küme Değerli Operatörler:**Tanım 4.2.1:**

X ve Y boş kümeden farklı keyfi birer küme olsunlar. X' den Y' ye bir T bağıntısı, X kümesinin boştan farklı ve $2^Y \setminus \emptyset$ (Y kümesinin boş olmayan alt kümeler ailesi)' de değer alan $D(T)$ alt kümesine (tanım kümesi) sahip herhangi bir dönüşümdür. Bu T dönüşümüne küme (çok veya çoğul) değerli operatör denir. Eğer T , tanım kümesindeki noktaları tek değere eşliyorsa T' ye tek değerli operatör denir (Cross, 1998).

$x \in X$ iken $x \notin D(T)$ ise $Tx = \emptyset$ olur. Bu fikirle T' nin tanım kümesi

$$D(T) = \{x \in X: Tx \neq \emptyset\} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir.

X 'den Y 'ye bütün dönüşümlerin sınıfı $R(X, Y)$ ile gösterilir. Eğer $T \in R(X, Y)$ ise T 'nin grafiği $G(T)$, $X \times Y$ 'nin alt kümesidir ve

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in D(T), y \in T(x)\} \quad (2)$$

ile ifade edilir.

$R(X, Y)'$ de bir bağıntı, grafiği ile benzersiz bir şekilde belirlenir, tersine $X \times Y$ 'nin herhangi bir boş olmayan alt kümesi benzersiz bir şekilde bir bağıntıyı belirler (Cross, 1998).

T 'nin $R(T)$ değer kümesi,

$$R(T) = \bigcup_{x \in D(T)} Tx$$

ile tanımlanır. $R(T) = Y$ ise, T 'ye örten denir ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin T operatörü altındaki görüntüsü:

$$T(A) = \bigcup_{x \in A \cap D(T)} Tx$$

kümesi ile tanımlanır (Zeidler, E., 1984).

$T \in R(X, Y)$ verilsin. T^{-1} dönüşümü T 'nin tersi olmak üzere

$$G(T^{-1}) = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in G(T)\}. \quad (3)$$

Bir $M \subset X$ verilsin;

$$T(M) = \bigcup \{T(m) : m \in M \cap D(T)\} \quad (4)$$

M 'nin görüntüsü diye adlandırılır ve $R(T) = T(X)$ ((4)' den dolayı $R(T) = T(D(T))$) ile T 'nin rankı ifade edilir. Eğer $R(T) = Y$ ise T örtendir. Eğer T^{-1} tek-değerli ise T bire birdir (Cross, 1998).

Eğer T bire bir ise o zaman aşağıdaki sonuç geçerlidir:

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (x_1, x_2 \in D(T)) \quad (5)$$

Uyarı 4.2.1:

İlerde tek değerli bir dönüşüm ile küme değerli bir dönüşüm arasında hiçbir ayırım olmasın diye Y 'de $T(\{x\}) = T(x)$ ifadesini Tx ile göstereceğiz.

$\emptyset \neq N \subset Y$ olsun. O halde (3)'ten şunu elde ederiz:

$$T^{-1}(N) = \{x \in D(T) : N \cap Tx \neq \emptyset\} \quad (6)$$

Bilhassa $y \in R(T)$ için;

$$T^{-1}y = \{x \in D(T) : y \in Tx\}. \quad (7)$$

Burada $D(T^{-1}) = R(T)$ ve $R(T^{-1}) = D(T)$ olduğu açıktır.

X 'in boş olmayan E alt kümesi için birim bağıntı I_E veya kısaca I ile gösterilir. Birim bağıntının $R(X, X)$ 'deki grafiği $G(I_E) = \{(e, e) : e \in E\}$ şeklindedir (Cross, 1998). Örneğin; T, X 'de bir denklik bağıntısı olsun. O halde $G(I_x) \subset G(T)$ ve $T = T^{-1}$ olur. Dahası $x_1, x_2 \in X$ için aşağıdaki çıkarımı elde ederiz:

$$T(x_1) \cap T(x_2) \neq \emptyset \Rightarrow T(x_1) = T(x_2).$$

Küme değerli operatörlerin bileşkesi; $R(T) \cap D(S) \neq \emptyset$ olmak üzere $T \in R(X, Y)$ ve $S \in R(Y, Z)$ olmak üzere $R(X, Z)$ 'deki ST aşağıdaki gibi ifade edilir (Cross, 1998).

$$(ST)(x) = S(Tx) \quad (x \in X).$$

ST 'nin tanım kümesini (1)'den hesaplayacak olursak;

$$\begin{aligned} D(ST) &= \{x \in X : S(Tx) \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X : Tx \cap D(S) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

olur. Böylece (6)'dan

$$D(ST) = T^{-1}(D(S))$$

yazılabilir. ST 'nin tanımından kolayca görülebilir ki;

$$G(ST) = \{(x, z) \in X \times Z : (x, y) \in G(T), (y, z) \in G(S); \exists y \in Y\}$$

dir (Cross, 1998).

Tanım 4.2.2:

X ve Y, K cisim üzerinde birer vektör uzayı olsunlar ($K = \mathbb{R}$ veya \mathbb{C}). Her $x, z \in D(T)$ ve sıfırdan farklı bir α skaleri için aşağıdaki şartları sağlayan $R(X, Y)$ 'deki bir T operatörüne küme değerli bir lineer operatör (veya lineer bağıntı) denir (Cross, 1998):

- 1) $Tx + Tz = T(x + z)$
- 2) $\alpha(Tx) = T(\alpha x)$.

Bir küme değerli lineer operatörün tanım kümesinin lineer alt uzay olduğu açıktır.

Örnek 4.2.1:

$X = \{3, 5, 7\}$ olsun ve $T: X \rightarrow 2^X$ operatörü

$$T(x) = \begin{cases} \{3, 5\}; & x = 3 \\ \{7\}; & x = 5, x = 7 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde T bir küme değerli operatördür.

Örnek 4.2.2:

$X = \{1, 2, 3\}$ ve $Y = \{2, 4, 6, 8\}$ ve $T: X \rightarrow Y$ operatörü ve her $x \in X$ için

$$T(x) = 2x$$

olacak şekilde tanımlansın.

T operatörü $T: X \rightarrow 2^Y$ ve $Tx = \{T(x)\}$ ile tanımlarsak öyle ki;

$$T1 = \{T(1)\} = \{2\}$$

$$T2 = \{T(2)\} = \{4\}$$

$$T3 = \{T(3)\} = \{6\}$$

olur. O halde T aynı zamanda bir küme değerli operatördür.

Örnek 4.2.3:

$T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ küme değerli operatörü

$$Tx = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2} \\ [0,1], & x = \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Örnek 4.2.4:

$T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ küme değerli operatörü

$$Tx = \begin{cases} \left[0, \frac{1}{2}\right], & x \neq \frac{1}{2} \\ [0,1], & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Örnek 4.2.5:

$T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ küme değerli operatörü

$$Tx = [e^{-x}, 1].$$

4.3. İki Küme Arası Uzaklık ve Hausdorff Metriği:

Bu bölümde, alt küme uzayları üzerinde tanımlanabilen Hausdorff metrik topolojisinden bahsedeceğiz. Bu bahsimiz, ilerde küme değerli operatörler için çeşitli süreklilik kavramlarını analiz etmemizi kolaylaştıracaktır. Zira kümelerin ve bazı operatörlerin varyasyonlu yakınsaması konusundaki mülahazalar, temelde çeşitli hiperuzay topolojilerinin analizine dayandırılmaktadır (Hu ve ark., 1997).

Pompeiu 1905 yılında Poincare'nin rehberliğinde yapmış olduğu çalışmasında iki kapalı küme arasındaki uzaklık kavramını ortaya atmıştır. 1914 yılında Alman matematikçi Felix Hausdorff, Pompeiu'nun uzaklığını kullanarak kümeler arası mesafeyi kendi notasyonu ile ifade etmiş ve literatürde Hausdorff metriği olarak bilinen yeni bir

uzaklık kavramı ortaya atmıştır. Berinde ve Pacurar 2013 yılında yapmış oldukları çalışmada sabit nokta teorisinde Pompeiu-Hausdorff metriğinin rolünü vurgulamışlardır.

Buna göre Pompeiu, $a \in A$ ve bir B kümesi arasındaki uzaklığı

$$d(a, B) = \min\{d(a, b) : b \in B\}$$

olarak ifade etmiştir (Pompeiu, 1905). Buradaki $d(a, b)$, a ve b noktaları arasındaki öklidyen veya metrik uzaklıktır. Daha sonra da Pompeiu iki A ve B kümesi arasındaki asimetrik mesafe kavramını tanımladı.

$$D(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}$$

olarak ifade etmiştir (Pompeiu, 1905).

1914 yılında Alman matematikçi Felix Hausdorff, Pompeiu'nun uzaklığını kullanarak $H(A, B)$ notasyonu ile ifade etmiş olduğu ve literatürde Hausdorff metriği olarak bilinen yeni bir uzaklık kavramı ortaya atmış ve

$$H(A, B) = \max\{D(A, B), D(B, A)\}$$

olarak ifade etmiştir (Pompeiu, 1905). Bu yüzden literatürde bazı kaynaklarda Hausdorff – Pompeiu uzaklığı kavramı olarak da geçmektedir.

Hausdorff mesafesini başka bir deyişle ifade edecek olursak, bir kümedeki bir noktadan diğer kümedeki bir noktaya ölçülen tüm mesafelerin en büyüğü olduğu söylenebilir. Hausdorff metriği metrik uzaylarda tanımlanır ve verilen bir metrik uzayın alt kümeleri arasındaki mesafeyi ölçmek için ana araçtır (Hu ve ark., 1997).

Pompeiu-Hausdorff mesafesini (metrik) kullanan araştırma alanlarının listesi oldukça etkileyicidir. Berinde ve Pacurar 2013 yılında yapmış oldukları çalışmada sabit nokta teorisinde Pompeiu-Hausdorff metriğinin rolünü vurgulamışlardır (Berinde ve ark., 2013).

Uyarı 4.3.1:

Biz çalışmamızda minimum ifadesi yerine infimumu kullanacağız. Ayrıca $D(A, B)$ yerine $h^*(A, B)$ ve $H(A, B)$ yerine de $h(A, B)$ notasyonlarını kullanacağız.

Tanım 4.3.1:

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ verilsin. Bir $a \in X$ noktasının A kümesine olan uzaklığı

$$d(a, A) = \inf_{b \in A} \{d(a, b) : a \in X\}$$

ile tanımlanır (Afif B. A., ve ark., 2016).

Örnek 4.3.1:

(X, d) bir metrik uzay ve $d(a, b) = |a - b|$ olmak üzere,

$X = \mathbb{R}$, $A = [1,4]$ ve $B = [8,9]$ olsun.

O halde $5 \in X$ 'in A 'ya olan uzaklığı,

$$\begin{aligned} d(5, A) &= \inf_{b \in A} \{d(5, b): 5 \in X\} \\ &= \inf \{d(5, b): b \in A\} \\ &= \inf \{d(5,1), d(5,4)\} \\ &= \inf \{4,1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve $5 \in X$ 'in B 'ye olan uzaklığı,

$$\begin{aligned} d(5, B) &= \inf_{c \in B} \{d(5, c): 5 \in X\} \\ &= \inf \{d(5, c): c \in B\} \\ &= \inf \{d(5,8), d(5,9)\} \\ &= \inf \{3,4\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tanım 4.3.2:

$A, B \subset X$ olmak üzere $h^*(A, B) = \sup \{d(a, B), a \in A\}$ değerine A kümesinin B kümesine olan uzaklığı $h(A, B) = \max \{h^*(A, B), h^*(B, A)\}$ değerine de A ve B kümeleri arasındaki uzaklık denir (Afif ve ark., 2016).

Örnek 4.3.2: $X = \mathbb{R}$, $A = \{1,2\}$ ve $B = \{2,3,4\}$ olsun. $d(a, b) = |a - b|$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} h^*(A, B) &= \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \\ &= \sup \{\inf \{d(a, b): b \in B\}: a \in A\} \\ &= \sup \{\inf \{d(a, 2), d(a, 3), d(a, 4)\}: a \in A\} \\ &= \sup \{\inf \{d(1,2), d(1,3), d(1,4)\}, \inf \{d(2,2), d(2,3), d(2,4)\}\} \\ &= \sup \{\inf \{1,2,3\}, \inf \{0,1,2\}\} \\ &= \sup \{1,0\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Şimdi de B 'nin A 'ya olan uzaklığını bulalım;

$$\begin{aligned} h^*(B, A) &= \sup_{b \in B} d(b, A) \\ &= \sup \{\inf \{d(a, b): a \in A\}: b \in B\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup\{\inf\{d(1, b), d(2, b)\}: b \in B\} \\
&= \sup\{\inf\{d(1,2), d(2,2)\}, \inf\{d(1,3), d(2,3)\}, \inf\{d(1,4), d(2,4)\}\} \\
&= \sup\{\inf\{1,0\}, \inf\{2,1\}, \inf\{3,2\}\} \\
&= \sup\{0,1,2\} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(A, B) &= \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\} \\
&= \max\{1,2\} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Örnek 4.3.3:

(X, d) bir metrik uzay ve $d(a, b) = |a - b|$ olmak üzere,

$X = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$ ve $B = [3,7]$ olsun.

$$\begin{aligned}
h^*(A, B) &= \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \\
&= \sup\{\inf\{d(a, b): b \in B\}: a \in A\} \\
&= \sup\{\inf\{d(a, 3), d(a, 7)\}: a \in A\} \\
&= \sup\{\inf\{d(0,3), d(0,7)\}, \inf\{d(1,3), d(1,7)\}\} \\
&= \sup\{\inf\{3,7\}, \inf\{2,6\}\} \\
&= \sup\{3,2\} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Şimdi de B'nin A'ya olan uzaklığını bulalım;

$$\begin{aligned}
h^*(B, A) &= \sup_{b \in B} d(b, A) \\
&= \sup\{\inf\{d(a, b): a \in A\}: b \in B\} \\
&= \sup\{\inf\{d(0, b), d(1, b)\}: b \in B\} \\
&= \sup\{\inf\{d(0,3), d(1,3)\}, \inf\{d(0,7), d(1,7)\}\} \\
&= \sup\{\inf\{3,2\}, \inf\{7,6\}\} \\
&= \sup\{2,6\} \\
&= 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(A, B) &= \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\} \\
&= \max\{3,6\} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Örnek 4.3.2 ve örnek 4.3.3'ten de anlaşılacağı üzere h^* uzaklığı simetrik değildir ve dolayısıyla metrik de olamaz.

Önerme 4.3.1:

(X, d) bir metrik uzay ve $A, B, C \in P_T(X)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) $h^*(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$,
- ii) $B \subset C \Rightarrow h^*(A, C) \leq h^*(A, B)$,
- iii) $h^*(A \cup B, C) = \max\{h^*(A, C), h^*(B, C)\}$,
- iv) $h^*(A, B) \leq h^*(A, C) + h^*(C, B)$

(Agarwal ve ark., 2009).

İspat:

- i) $h^*(A, B) = 0 \Leftrightarrow \sup_{a \in A} d(a, B) = 0$
 $\Leftrightarrow \forall a \in A, d(a, B) = 0$

Ayrıca B, X' in kapalı bir alt kümesi olduğundan

$$d(a, B) = 0 \Leftrightarrow a \in \bar{B} = B$$

olur. Böylece $A \subset B$ olur.

- ii) $B \subset C$ olsun. O halde $\forall x \in X$ için

$$d(x, C) \leq d(x, B)$$

yazılabileceğinden

$$\sup_{x \in A} d(x, C) \leq \sup_{x \in A} d(x, B)$$

olur. Buradan da

$$h^*(A, C) \leq h^*(A, B)$$

elde edilir.

- iii) $\forall x \in X$ için $h^*(A \cup B, C) = \sup_{x \in A \cup B} d(x, C)$
 $= \max\left\{\sup_{x \in A} d(x, C), \sup_{x \in B} d(x, C)\right\}$
 $= \max\{h^*(A, C), h^*(B, C)\}$

- iv) $a \in A, b \in B, c \in C$ için üçgen eşitsizliğini yazacak olursak;

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq d(a, c) + d(c, B) \\ &\leq d(a, c) + h^*(C, B) \end{aligned}$$

bulunur. $c \in C$ keyfi olduğu için

$$d(a, B) \leq d(a, C) + d(C, B)$$

olur. Her bir $a \in A$ üzerinden supremum alındığında

$$h^*(A, B) \leq h^*(A, C) + h^*(C, B)$$

elde edilir. ■

Önerme 4.3.2:

(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda Tanım 4.3.2 ile verilen h uzaklık fonksiyonu $P_{bT}(X)$ üzerinde bir metriktir (Agarwal ve ark., 2009).

İspat:

$A, B, C \in P_{bT}(X)$ olsun

- i) h tanımından $h(A, B) \geq 0$ olduğu açıktır.
- ii) $h(A, B) = 0 \Leftrightarrow \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\} = 0$
 $\Leftrightarrow h^*(A, B) = 0, h^*(B, A) = 0$
 $\Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$
 $\Leftrightarrow A = B$

- iii) h nın tanımından

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\} \\ &= \max\{h^*(B, A), h^*(A, B)\} \\ &= h(B, A) \end{aligned}$$

- iv) Önerme4.2.1 – iv den

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\} \\ &\leq \max\{h^*(A, C) + h^*(C, B), h^*(B, C) + h^*(C, A)\} \\ &\leq \max\{h^*(A, C), h^*(C, A)\} + \max\{h^*(B, C), h^*(C, B)\} \\ &= h(A, C) + h(C, B) \end{aligned}$$

olur. O halde $h, P_{bT}(X)$ üzerinde bir metriktir. ■

Tanım 4.3.3:

(X, d) bir metrik uzay ve $P_{bT}(X)$ X 'in bütün boş olmayan, kapalı ve sınırlı alt kümelerinin koleksiyonu olsun. $A, B \in P_{bT}(X)$ için

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\}$$

tanımlanan h , $P_{bT}(X)$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe, d metriği kaynaklı Hausdorff metriği denir (Agarwal ve ark., 2009).

Tanım 4.3.4:

Eğer bütün $\{x_n\} \in X$ dizileri için $x_n \rightarrow x$ iken $h(Tx_n, Tx) \rightarrow 0$ oluyorsa $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ operatörü süreklidir denir (Hu ve ark., 1997).

Örnek 4.3.4:

$X = \mathbb{R}$ ve $A = [0,3]$ ve $B = [5,7]$ olmak üzere A ve B kümelerinin Hausdorff metriğini kullanarak bu kümeler arasındaki uzaklığı bulalım: O halde;

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in [0,3]} d(x, [5,7]), \sup_{y \in [5,7]} d(y, [0,3]) \right\} \\ &= \max\{5, 4\} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Önerme 4.3.3:

Eğer $\{A_n, A\}_{n \geq 1} \subseteq P_T(X)$ ve $A_n \xrightarrow{h} A$ ise o halde

$$A = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} (A_m)_\varepsilon$$

olur (S. Hu ve ark., 1997).

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğundan $m \geq n_0(\varepsilon)$ için bir $n_0(\varepsilon) \geq 1$ sayısı bulabiliriz

ve dolayısıyla $A \subseteq (A_m)_\varepsilon$ ve $A_m \subseteq A_\varepsilon$ elde ederiz. Buradan

$$A \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} (A_m)_\varepsilon \quad (1)$$

ve

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m} \subseteq A. \quad (2)$$

olur. Son olarak $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} (A_m)_\varepsilon$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $m \geq n_0(\varepsilon)$ olaca şekilde bir $n_0(\varepsilon) \geq 1$ vardır ve buradan $x \in (A_m)_\varepsilon$ olur. $n \geq 1$ olarak verilsin.

$$x \in (A_m)_\varepsilon \subseteq \left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)_\varepsilon$$

olacak şekilde bir $m \geq \max[n, n_0(\varepsilon)]$ vardır. Çünkü $\varepsilon > 0$ keyfi idi. O halde

$x \in \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$ ve $x \in \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$ olur. Dolayısıyla

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} (A_m)_\varepsilon \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}. \quad (3)$$

olarak göstermiş oluruz.

(1), (2) ve (3)' ün kombinasyonu ile istenen eşitliği elde ederiz. ■

Uyarı 4.3.2:

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$$

ifadesi sadece d metriği ile oluşturulan topolojiye bağlıdır. Unutmamalıyız ki Hausdorff metriği topolojik bir yapı değildir. Yukarıdaki önermenin tersinin genel olarak doğru olmadığını görüyoruz.

Yani eğer $\{A_n, A\}_{n \geq 1} \subseteq P_T(X)$ ve $A = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$ ise genel olarak $A_n \xrightarrow{h} A$ sonucuna varamayız.

Teorem 4.3.1:

Eğer (X, d) metrik uzayı tam ise $(P_T(X), h)$ de tamdır (Hu ve ark., 1997).

İspat:

$\{A_n\}_{n \geq 1}$, $(P_T(X), h)$ 'te bir Cauchy dizisi olsun. Yukarıdaki önerme bize $\{A_n\}_{n \geq 1}$ in limiti için mümkün olabilecek tek adayın olduğunu ifade ediyor. Yani

$$A = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$$

olsun. $A \in P_T(X)$ ve $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğunu göstereceğiz. İlk olarak A 'nın kapalı kümelerin kesişimi olduğu, kapalı olduğu ve muhtemelen boş olduğu açıktır.

$\varepsilon > 0$ verilsin. O halde her $k \geq 0$ ve her $n, m \geq N_k$ için

$$h(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

olacak şekilde bir $N_k \geq 1$ bulunabilir. $n_0 \geq N_0$, $x_0 \in A_{n_0}$ alalım. O halde $n_1 \geq \max[n_0, N_1]$ ve $x_1 \in A_{n_1}$ 'i $d(x_0, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ ile seçelim. Bu

$$d(x_0, A_{n_1}) \leq h(A_{n_0}, A_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

den mümkündür. Eğer $\{n_k\}_{k \geq 0}$ ve $n_k \geq N_k$ ile düzenli artan bir dizi ise tümevarımsal olarak $x_k \in A_{n_k}$ ve $d(x_k, x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ olacak şekilde bir $\{x_k\}_{k \geq 0} \subseteq X$ dizisini oluşturabiliriz. O halde $\{x_k\}_{k \geq 0} \subseteq X$ in tam olmasından dolayı X 'de bir Cauchy dizisidir ve $x_k \rightarrow x \in X$ yazabiliriz. Çünkü $\{x_k\}_{k \geq 0}$ düzenli artıyor ve verilen bir $n \geq 1$ için $n_{k_n} \geq n$ olacak şekilde $k_n \geq 1$ bulabiliriz. Buradan $k \geq k_n$ için

$$x_k \in \bigcup_{m \geq n} A_m$$

ve dolayısıyla $n \geq 1$ için $x \in \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}$. Böylelikle $x \in A$ gösterir ki $A \in P_T(X)$ dir. Ek olarak $d(x, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n d(x_k, x_{k-1}) < \varepsilon$ elde ederiz. O halde her $n_0 \geq N_0$ ve her $x_0 \in A_{n_0}$ için $d(x, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in A$ elde ederiz. Bu nedenle $A_{n_0} \subseteq A_\varepsilon$ olur. Şimdi her $n \geq N_0$ için $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz. O halde $x \in A$ olsun. Buradan $x \in \overline{\bigcup_{m \geq N_0} A_m}$ ve $m \geq N_0$ buluruz. Öyle ki $y \in A_m$ ve $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Ayrıca eğer $n \geq N_0$ ise,

$$d(x, A_n) \leq d(x, A_m) + h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde ederiz. O halde o halde $h^*(A, A_n) < \varepsilon$ ve bu $n \geq N_0$ için $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$ 'u ihtiva eder. Böylelikle sonuç olarak $A_n \xrightarrow{h} A$ elde edilir. ■

Önerme 4.3.4:

Eğer (X, d) bir tam metrik uzay ve $P_k(X)$, $(P_T(X), h)$ 'in kapalı bir alt kümesi ise bu durumda $(P_k(X), h)$ bir tam metrik uzaydır (Hu ve ark., 1997).

İspat:

$\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq P_k(X)$ olsun ve $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ için her $n \geq n_0(\varepsilon)$, olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \geq 1$ bulabiliriz ki $h(A_n, A) < \varepsilon$ ve dolayısıyla $A \subseteq (A_n)_\varepsilon$. A_n kompakt olduğundan, tamamen sınırlıdır. Böylelikle sonlu bir $F \subseteq X$ bulabiliriz öyle ki $A_n \subseteq F_\varepsilon$ ve buradan $(A_n)_\varepsilon \subseteq F_{2\varepsilon}$ olur. Böylelikle $A \subseteq F_{2\varepsilon}$, A 'nın tamamen sınırlı ve kapalı olduğunu gösterir. O halde $A \subseteq P_k(X)$ olur. ■

Bir sonraki önerme aşıkardır.

Önerme 4.3.5:

$P_{bT}(X)$, $(P_T(X), h)$ 'in kapalı bir alt kümesi olsun. Buradan eğer (X, d) bir tam metrik uzay ise $(P_{bT}(X), h)$ de tamdır (Hu ve ark., 1997).

Şimdi ise temelde metrik olan uzayı, normlu uzay olarak kabul edelim.

Önerme 4.3.6:

Eğer X bir normlu uzay ise $P_{Tc}(X)$, $(P_T(X), h)$ 'ın kapalı bir alt kümesidir (S. Hu ve ark., 1997).

İspat:

$\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq P_T(x)$ olsun, her $n \geq 1$ için A_n konvektir ve $A_n \xrightarrow{h} A$ olduğunu varsayalım. Önerme 4.3.3'ten $A = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} (A_m)_\varepsilon$ olduğunu biliyoruz. Her $m \geq 1$ için $(A_m)_\varepsilon$ konveks olduğuna dikkat edelim. Buradan $C_n^\varepsilon = \bigcap_{m \geq n} (A_m)_\varepsilon$ konvektir. $\{C_n^\varepsilon\}_{n \geq 1} \subseteq P_{fc}(X)$ dizisi $n \geq 1$ ve her $\varepsilon > 0$ için artandır. Buradan $\bigcup_{n \geq 1} C_n^\varepsilon = C^\varepsilon$ konvektir. Sonuç olarak $A = \bigcap_{\varepsilon > 0} C^\varepsilon$ konvektir. Yani $A \in P_{Tc}(X)$ 'dir. ■

Bu son üç önermeyi birleştirerek durumu normlu uzayda özetleyebiliriz.

Sonuç 4.3.1:

Eğer X bir normlu uzay ise o halde $P_{kc}(X) \subseteq P_{bTc}(X) \subseteq P_{Tc}(X)$ ve $P_k(X) \subseteq P_{bT}(X)$ kümeleri $(P_T(X), h)$ 'ın kapalı alt kümeleridir (Hu ve ark. 1997).

Uyarı 4.3.3:

Eğer X bir Banach uzayı ise, yukarıdaki bütün alt kümeler $(P_T(X), h)$ 'ın metrik uzayının tam alt uzaylarıdır.

Tanım 4.3.4:

X bir normlu uzay, X^* onun topolojik bir çifti (dual) ve $A \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ olsun. A 'nın $\sigma(\cdot, A)$ destek fonksiyonu X^* 'den $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 'e $\sigma(x^*, A) = \sup\{(x^*, a) : a \in A\}$ ile tanımlanır ve (\cdot, \cdot) , (X, X^*) çifti için parantez dualitesi demektir (Hu ve ark., 1997).

Uyarı 4.3.4:

Yukarıdaki tanımdan direkt olarak şunu anlıyoruz ki; $\sigma(\cdot, A)$ alt lineer, w^* - düşük yarı sürekli ve uygundur (proper, yani $+\infty$ ile aynı değil). Aslında $P_{Tc}(X)$ 'de bu tür operatörler arasında 1 – 1 eşlemeler $A = \{x \in X : (x^*, x) \leq \sigma(x^*, A), \forall x^* \in X^*\}$ eşitliği ile belirlenir (bu eşitlik, konveks kümeler için ayırma teoreminin basit bir sonucudur). Destek fonksiyonu küme değerli analiz için önemli bir araçtır ve kapalı konveks kümelerin özelliklerini fonksiyonel, analitik tekniklerle çalıştırmamızı sağlar.

Teorem 4.3.2:

X bir normlu uzay ve $A, C \in P_{bTc}(X)$ ise $h(A, C) = \sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)| : \|x^*\| \leq 1\}$ (Hu ve ark., 1997).

İspat:

$A = C$ ise sonuç açıkça doğrudur. O halde $A \neq C$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. Öyle ki $B_\varepsilon = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$ iken $A \subseteq C + B_\varepsilon$ ve $C \subseteq A + B_\varepsilon$ ve buradan $C + B_\varepsilon = C_\varepsilon$ ve $A + B_\varepsilon = A_\varepsilon$. Ardından her $\|x\| \leq 1$ ile her $x^* \in X^*$ için $\sigma(x^*, A) \leq \sigma(x^*, C) + \varepsilon$ ve $\sigma(x^*, C) \leq \sigma(x^*, A) + \varepsilon$ elde ederiz. Buradan $|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)| \leq \varepsilon$ ve dolayısıyla $\sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)| : \|x^*\| \leq 1\} \leq h(A, B)$ olur. Öte yandan eğer $\varepsilon = \sup_{\|x^*\| < 1} |\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)| > 0$ ise $A \subseteq C + \bar{B}_\varepsilon$ ve $C \subseteq A + \bar{B}_\varepsilon$ elde ederiz. O halde

$h(A, B) \leq \varepsilon$ olur. ■

Uyarı 4.3.5:

Aynı zamanda $h^*(A, C) = \sup\{\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C) : \|x^*\| \leq 1\}$ olduğunu kontrol etmek kolaydır. Hausdorff uzaklığı için ikinci formül, keyfi bir metrik uzay için boş olmayan alt kümelerle ilgilidir ve kümelerden uzaklık fonksiyonunu ihtiva eder.

Teorem 4.3.3:

Eğer (X, d) bir metrik uzay ve $A, C \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ ise o halde $h(A, C) = \sup\{|d(x, A) - d(x, C)| : x \in X\}$ (Hu ve ark., 1997).

İspat:

Biliyoruz ki her $c \in C$ için $d(x, A) \leq d(x, c) + d(c, A)$ ve dolayısıyla $d(x, A) \leq d(x, C) + h(C, A)$. Benzer şekilde $d(x, C) \leq d(x, A) + h(C, A)$ elde ederiz. Buradan

$$\sup\{|d(x, A) - d(x, C)| : x \in X\} \leq h(A, C) \quad (4)$$

öte yandan $\sup\{d(c, A) : c \in C\} = \sup\{d(c, A) - d(c, C) : c \in C\} \leq \sup\{|d(x, A) - d(x, C)| : x \in X\}$

ve

$$\sup\{d(a, C) : a \in A\} \leq \sup\{|d(x, A) - d(x, C)| : x \in X\}.$$

Dolayısıyla

$$h(A, C) \leq \sup\{|d(x, A) - d(x, C)| : x \in X\} \quad (5)$$

(4) ve (5)'den sonuçlandırarak olursak $h(A, C) = \sup\{|d(x, A) - d(x, C)| : x \in X\}$ olur. ■

Uyarı 4.3.6:

Yukarıdaki ispattan özellikle şunu görebiliriz ki;

$$h^*(A, C) = \sup[d(x, C) - d(x, A) : x \in X].$$

Önerme 4.3.6:

Eğer X bir normlu uzay ve $A, C, A_1, C_1, A_2, C_2 \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ ise

- a) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $h(\lambda A, \lambda C) = |\lambda| \cdot h(A, C)$
- b) $h(A_1 + A_2, C_1 + C_2) \leq h(A_1, C_1) + h(A_2, C_2)$

dir (S. Hu ve ark., 1997).

Bu önermenin (a) ve (b)' den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.3.2:

Eğer X bir normlu uzay ve $A_1, C_1, A_2, C_2 \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ ise ve $\lambda \in [0, 1]$ ise

$$h(\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2, \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2) \leq \lambda h(A_1, C_1) + (1 - \lambda)h(A_2, C_2)$$

(Hu ve ark., 1997).

Uyarı 4.3.7:

Genel olarak $h(\overline{\text{conv}}A, \overline{\text{conv}}C) \leq h(A, C)$ elde ederiz. Buradan $A \rightarrow \overline{\text{conv}}A$ eşlemesi $P_T(X)$ üzerinde h -genişlemeyendir. Aynı şey ilave fonksiyon $h^*(\cdot, \cdot)$ için de geçerlidir.

4.4. Küme Değerli Operatörler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri:

Bu bölümde küme değerli operatörler için sabit nokta örneklerinden bahsedilecektir. Ayrıca küme değerli daralma operatörleri için temel referans olan Nadler'in sabit nokta teoremi ve ispatı verilecektir. Ayrıca Reich'in küme değerli sabit nokta teoremi de incelenecektir.

Tanım 4.4.1:

X boş olamayan bir küme olsun. Eğer $x_0 \in A$ iken aynı zamanda $x_0 \in Tx_0$ oluyorsa x_0 noktasına, küme değerli $T: X \rightarrow 2^X$ operatörünün bir sabit noktası denir (Hu ve ark., 1997).

Örnekler 4.4.1:

- i) $X = \{1, 2, 3\}$ olsun ve $T_1: X \rightarrow P_{bT}(X)$ verilsin. Öyle ki

$$T_1(x) = \begin{cases} \{2\}; & x = 1 \\ \{1\}; & x = 2 \\ \{3\}; & x = 3 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada $1 \notin T_1(1)$, $2 \notin T_1(2)$ ve $3 \in T_1(3)$ dir. Dolayısıyla $x = 1$ veya $x = 2$ noktaları T için bir sabit nokta değilken $x = 3$ noktası T için bir sabit noktadır.

ii) $T_2: [0, \infty) \rightarrow 2^{[0, \infty)}$, $T_2(x) = [0, x]$ operatörü her $x \in [0, \infty)$ için bir sabit noktadır.

iii) $T_3: [0, 1] \rightarrow 2^{[0, 1]}$, $T_3(x) = \begin{cases} \{1\}; & x < \frac{1}{2} \\ \{0, 1\}; & x = \frac{1}{2} \\ \{0\}; & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ operatörünün hiçbir sabit noktası yoktur.

iv) $T_3: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$, $T_3(x) = \begin{cases} [-1, 1]; & x \neq 0 \\ \{0\}; & x = 0 \end{cases}$ operatörü için $x = 0$ ve her bir $x \in [-1, 1]$ bir sabit noktadır.

Lemma 4.4.1:

(X, d) bir tam metrik uzay ve $A, B \in P_T(X)$ olmak üzere her $x \in A$ ve $r > 0$ için bir $y \in B$ vardır öyle ki $d(x, y) \leq h(A, B) + r$ (Agarwal R. P., 2009).

İspat:

$x \in A$ için $d(x, B) = \inf\{d(x, y): y \in B\}$ infimumun tanımından her $r > 0$ için $d(x, y) \leq d(A, B) + r$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. Öte yandan $d(x, B) \leq \delta(A, B) \leq h(A, B)$ olduğundan her $r > 0$ için $d(x, y) \leq h(A, B) + r$ olacak şekilde bir $y \in B$ vardır. ■

Ayrıca bu lemmayı bir örnekle de izah edebiliriz.

Örnek 4.4.2:

$X = \mathbb{R}$, $A = [a - t, a + t]$ ve $B = [b - s, b + s]$ ve $0 < t \leq s$ olsun.

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $d(a, b) = |a - b|$ olarak verilsin.

$A, B \in P_{bT}(X)$ olduğu görülebilir ve buradan;

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\} \\ &= \max \{d(b - s, a - t), d(b + s, a + t)\} \\ &= \max \{|(b - s) - (a - t)|, |(b + s) - (a + t)|\} \\ &= \max \{|(b - a) - (s - t)|, |(b - a) - (s - t)|\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq |(b - a) - (s - t)| \\ &\geq |b - a| - |s - t| \end{aligned}$$

O halde $d(a, b) \leq h(A, B) + r$ ve burada $r = s - t$ dir (Khine, 2019).

Başlangıçta tek değerli operatörler için daralma tanımını hatırlayacak olursak; X bir metrik uzay olsun. Bir $T: X \rightarrow X$ 'e operatörü ve her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$ sağlayacak biçimde bir $k \in [0, 1)$ reel sayısı bulunuyorsa T operatörüne X uzayı üzerinde bir daralma operatörü denir (Agarwal, 2009).

Tanım 4.4.2:

X bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ küme değerli bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ için $h(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$ şartını sağlayan bir $k > 0$ sayısı varsa T ye Lipschitz operatörü, buradaki k değerine Lipschitz sabiti denir. Şayet $k < 1$ ise, T küme değerli operatörüne daralan, $k = 1$ ise genişleme olmayan küme değerli operatör denir (Agarwal, 2009).

Örnek 4.4.3:

(X, d) bir metrik uzay ve $X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in X$ için $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ operatörü $Tx = \left[0, \frac{x}{3}\right]$ olarak tanımlansın. Şimdi T 'nin bir küme değerli daralma operatörü olduğunu göstereyim. Şu halde herhangi $u, v \in \mathbb{R}$ için $u < v$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} h(Tx, Ty) &= \left(\left[0, \frac{x}{3}\right], \left[0, \frac{y}{3}\right] \right) \\ &= \max \left\{ \sup_{u \in \left[0, \frac{x}{3}\right]} d\left(u, \left[0, \frac{y}{3}\right]\right), \sup_{v \in \left[0, \frac{y}{3}\right]} d\left(v, \left[0, \frac{x}{3}\right]\right) \right\} \\ &= \max \left\{ 0, \left| \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right| \right\} \\ &= \frac{1}{3} |x - y| \\ &< \frac{1}{2} d(x, y). \end{aligned}$$

Buradan $k = \frac{1}{3} \in [0, 1)$ vardır ve T operatörü $h(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$ olacak şekilde bir küme değerli daralma operatörüdür (Khine, 2019).

Teorem 4.4.1 (Nadler):

(X, d) bir tam metrik uzay $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ küme değerli bir daralma operatörü olsun. O zaman $h(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$ sağlayacak biçimde bir $k \in [0, 1)$ mevcutsa T operatörünün X uzayında sabit bir noktası mevcuttur (Nadler, 1969).

İspat:

T operatörünün Lipschitz sabiti $0 \leq k < 1$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in X$ alalım ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Lemma 4.4.1'den $d(x_1, x_2) \leq h(Tx_0, Tx_1) + k$ olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Tekrar $d(x_2, x_3) \leq h(Tx_1, Tx_2) + k^2$ olacak biçimde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır diyebiliriz. Böyle devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq h(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilebilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq h(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\
&\leq k d(x_{n-1}, x_n) + k^n \\
&\leq k[h(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \\
&= kh(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + 2k^n \\
&\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve dolayısıyla $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [k^n d(x_0, x_1) + nk^n] \\
&= d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur. Bu da $\{x_n\}$ 'nin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. X tamdır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ vardır. Şu hâlde $h^*(x_{n+1}, Tx^*) \leq h(Tx_n, Tx^*) \leq kd(x_n, x^*)$ iken $n \rightarrow \infty$ alınırsa $h^*(x^*, Tx^*) = 0$ olur. Yani $x^* \in Tx^*$ 'dir. Şu hâlde x^* , T 'nin bir sabit noktasıdır. ■

Örnek 4.4.4:

$X = [0,1]$ olsun. $t(x): [0,1] \rightarrow [0,1]$ ve

$$t(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -\frac{x}{3} + 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

olmak üzere $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ operatörü her $x \in X$ için $Tx = \{t(x)\} \cup \{0\}$ biçiminde tanımlansın. Şu hâlde T bir küme değerli daralma operatörüdür. Ayrıca $Fix(T) = \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$ dir. Buradan da anlaşılıyor ki küme değerli bir daralma operatörünün sabit noktası tek olmayabilir.

Teorem 4.4.2 (Reich):

(X, d) bir metrik uzay $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ küme değerli bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ için $h(Tx, Ty) \leq a.h^*(x, Tx) + b.h^*(y, Ty) + c.d(x, y)$ olacak biçimde $a + b + c < 1$ olan pozitif a, b ve c reel sayıları mevcut olsun. O halde T 'nin bir sabit noktası vardır (Reich, 1972).

İspat:

Şayet $a + c = 0$ ise her $x, y \in X$ için $h(Tx, Ty) \leq b.h^*(y, Ty)$ eşitsizliği sağlanır. Şu hâlde x bir keyfi nokta olmak üzere $y \in Tx$ için $h^*(y, Ty) \leq h(Tx, Ty) \leq b.h^*(y, Ty)$ olur. Bu da $h^*(y, Ty) = 0$ ile sağlanır. Buradan $y \in Ty$ olur. Bu sefer de $a + c > 0$ ve keyfi bir $x_0 \in X$ alalım. Sonra da bir $x_1 \in Tx_0$ alalım. Şu hâlde lemma 4.4.1'den $d(x_1, x_2) \leq h(Tx_0, Tx_1) + (a + c)$ olacak biçimde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Şu hâlde

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq a.h^*(x_0, Tx_0) + b.h^*(x_1, Tx_1) + c.d(x_0, x_1) + (a + c) \\ &\leq a.d(x_0, x_1) + b.d(x_1, x_2) + c.d(x_0, x_1) + (a + c) \end{aligned}$$

olur ve buradan da $d(x_1, x_2) \leq \frac{a+c}{1-b}d(x_0, x_1) + \frac{a+c}{1-b}$ eşitsizliği elde edilir. Tekrar lemma

4.4.1'den $d(x_2, x_3) \leq h(Tx_1, Tx_2) + \frac{(a+c)^2}{1-b}$ olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Şu hâlde

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq a.h^*(x_1, Tx_1) + b.h^*(x_2, Tx_2) + c.h^*(x_1, x_2) + \frac{(a+c)^2}{1-b} \\ &\leq a.d(x_1, x_2) + b.d(x_2, x_3) + c.d(x_1, x_2) + \frac{(a+c)^2}{1-b} \end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq \frac{a+c}{1-b}d(x_1, x_2) + \left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{a+c}{1-b}\right) \left[\frac{a+c}{1-b}d(x_0, x_1) + \frac{a+c}{1-b}\right] + \left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 d(x_0, x_1) + 2\left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu tarzda devam edecek olursak $\lambda = \frac{a+c}{1-b} < 1$ olarak alacak olursak

$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1) + n\lambda^n$ ile $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekilde X 'de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilebilir. Şu hâlde $\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n + \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda^n$ olur. Burada

$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} n\lambda^n < \infty$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tamdır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ olacak biçimde bir $x^* \in X$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} h^*(x_{n+1}, Tx^*) &\leq h(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq a.h^*(x_n, Tx_n) + b.h^*(x^*, Tx^*) + c.d(x_n, x^*) \\ &\leq a.d(x_n, Tx_n) + b.h^*(x^*, Tx^*) + c.d(x_n, x^*) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $n \rightarrow \infty$ alınırsa $h^*(x^*, Tx^*) \leq b.h^*(x^*, Tx^*)$ elde edilir ki bu da $h^*(x^*, Tx^*) = 0$ anlamına gelmektedir. Şu halde $x^* \in Tx^*$ dir ve T bir sabit noktaya sahiptir. ■





5. NADLER'İN SABİT NOKTA TEOREMİ ÜZERİNE BİR GENELLEME

Bu bölümde Khine'nin 2019'da yapmış olduğu çalışmasında derlediği ve Nadler'in sabit nokta teoremi için genellemeler sunmuş olan Gordji, Baghani, Khodaei ve Ramezani'nin araştırmalarına değinilecektir.

Bildiğimiz gibi Banach daralma prensibi birçok yönde geliştirilmiştir. Özellikle bu tezde ele aldığımız, küme değerli operatörler için sabit noktaların incelenmesi, Hausdorff metriğini kullanan daralmalar 1969'da Nadler tarafından başlatıldı. Nadler, Banach daralma prensibini küme değerli operatörler için genelleştirdi. Akabinde yapılan benzer araştırmalarla Nadler'in küme değerli operatörler için ifade etmiş olduğu teoremi birçok yöne genişletildi. Aşağıdaki teorem Nadler'in teoremi üzerine bir genişlemedir (Khine, 2019).

Teorem 5.2:

(X, d) bir tam metrik uzay $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ iken T 'nin bir sabit noktası vardır ve öyle ki;

$$h(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

elde edilir (Gordji ve ark., 2010).

İspat:

Bir $u_0 \in X$, $u_1 \in Tu_0$ olsun ve $r = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - (\beta + \gamma)}$ verilsin. Eğer $r = 0$ ise ispat aşıkardır.

Şimdi $r > 0$ olduğunu varsayalım. $Tu_0, Tu_1 \in P_{bT}(X)$ olduğundan $u_1 \in Tu_0$ ve lemma 4.4.1'den bir $u_2 \in Tu_1$ vardır. Öyle ki

$$d(u_1, u_2) \leq h(Tu_0, Tu_1) + r$$

olur. Yine $Tu_1, Tu_2 \in P_T(X)$ ve $u_2 \in Tu_1$ ve lemma 4.1.1'den bir $u_3 \in Tu_2$ vardır. Öyle ki

$$d(u_2, u_3) \leq h(Tu_1, Tu_2) + r^2$$

olur. Bu ardışık işleme devam ederek her $n \in N$ için bir $u_{n+1} \in Tu_n$ bulunur ve genel bir ifadeyle

$$d(u_n, u_{n+1}) \leq h(Tu_{n-1}, Tu_n) + r^n$$

yazılabilir. Buradan her $n \in N$ için

$$\begin{aligned}
d(u_n, u_{n+1}) &\leq h(Tu_{n-1}, Tu_n) + r^n \\
&\leq \alpha d(u_n, u_{n+1}) + \beta[d(u_n, Tu_n) + d(u_{n-1}, Tu_{n-1})] + \gamma[d(u_n, Tu_n) + \\
&d(u_{n-1}, Tu_{n-1}) + r^n] \\
&\leq \alpha d(u_n, u_{n+1}) + \beta[d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n-1}, u_n)] + \gamma[d(u_{n-1}, u_n) + \\
&d(u_{n-1}, u_{n+1}) + r^n]
\end{aligned}$$

olur. Ardından

$$\begin{aligned}
d(u_n, u_{n+1}) &\leq r d(u_{n-1}, u_n) + \frac{r^n}{1-(\beta+\gamma)} \\
&\leq r^2 d(u_{n-2}, u_{n-1}) + \frac{2r^n}{1-(\beta+\gamma)} \\
&\leq \dots \\
&\leq r^n d(u_0, u_1) + \frac{nr^n}{1-(\beta+\gamma)}
\end{aligned}$$

ile devam edebiliriz. Buradan da

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) &= d(u_0, u_1) + d(u_1, u_2) + d(u_2, u_3) + \dots \\
&\leq d(u_0, u_1) + \left\{ r d(u_0, u_1) + \frac{r}{1-(\beta+\gamma)} \right\} + \left\{ r^2 d(u_0, u_1) + \frac{2r^2}{1-(\beta+\gamma)} \right\} + \\
\dots &+ \left\{ r^n d(u_0, u_1) + \frac{nr^n}{1-(\beta+\gamma)} \right\} \\
&= d(u_0, u_1)[1 + r + r^2 + r^3 + \dots] + [r + 2r^2 + 3r^3 + \dots] \frac{1}{1-(\beta+\gamma)} \\
&= d(u_0, u_1) \left[\frac{1}{1-r} \right] + [r + 2r^2 + 3r^3 + \dots] \frac{1}{1-(\beta+\gamma)} \\
&= \frac{d(u_0, u_1) + [r + r^2 + r^3 + \dots] + \left[\frac{1}{1-(\beta+\gamma)} \right]}{1-r} \\
&= \frac{d(u_0, u_1)}{1-r} + \frac{r}{(1-r)^2} \left[\frac{1}{1-(\beta+\gamma)} \right] \\
&\leq \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $r < 1$ olur. Buradan $\{u_n\}$ ' nin bir Cauchy dizisi olduğu anlaşılır.

X tam metrik uzay ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ sağlayacak biçimde bir $x^* \in X$ vardır. Şimdi ise x^* noktasının T operatörü için bir sabit nokta olduğunu gösterelim.

Her $n \in N$ için

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*)$$

$$\begin{aligned}
&\leq d(x^*, x_{n+1}) + h(Tx_n, Tx^*) \\
&\leq d(x^*, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, x^*) + \beta [d(x_n, Tx_n) + d(x^*, Tx^*)] + \\
&\gamma [d(x_n, Tx^*) + d(x_{n+1}, x^*)]
\end{aligned}$$

Burada $n \rightarrow \infty$ için

$$d(x^*, Tx^*) \leq (\beta + \gamma) d(x^*, Tx^*)$$

elde edilir. Öte taraftan $(\beta + \gamma) \leq 1$ olduğundan $d(x^*, Tx^*) = 0$ olur. Bu da $x^* \in Tx^*$ olduğunu gösterir. O halde x^* noktası T operatörünün bir sabit noktasıdır. ■

Aşağıdaki sonuçlar teorem 5.2 ile benzer genellemelerdir.

5.1. Bazı Sonuçlar:

Sonuç 5.1.1:

(X, d) bir tam metrik uzay ve T ise X 'den X 'e bir bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ için $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ iken T 'nin bir sabit noktası vardır ve öyle ki;

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \gamma [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \text{ (Hardy ve Rogers, 1973).}$$

Sonuç 5.1.2:

(X, d) bir tam metrik uzay ve T ise (X, d) 'den $(P_{bT}(X), H)$ 'e bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ ve her bir $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ için $a_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^5 a_i < 1$ iken $h(Tx, Ty) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, Tx) + a_3 d(y, Ty) + a_4 d(x, Ty) + a_5 d(y, Tx)$ ise T 'nin bir sabit noktası vardır (Gordji ve ark., 2010).

Sonuç 5.1.3:

(X, d) bir tam metrik uzay ve T ise (X, d) 'den $(P_{bT}(X), H)$ 'e bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ ve $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ için $h(Tx, Ty) \leq \beta [h^*(x, Tx) + h^*(y, Ty)]$ ise T operatörünün sabit bir noktası mevcuttur (Reich, 1972).

Sonuç 5.1.4:

(X, d) bir tam metrik uzay ve T ise (X, d) 'den $(P_{bT}(X), H)$ 'e bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ ve $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ için $h(Tx, Ty) \leq \gamma [h^*(x, Ty) + h^*(y, Tx)]$ ise T 'nin bir sabit noktası vardır (Gordji ve ark., 2010).

Sonuç 5.1.5:

(X,d) bir tam metrik uzay ve T ise (X,d) 'den $(P_{bT}(X), H)$ 'e bir operatör olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha + 2\beta < 1$ için $h(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta[h^*(x, Tx) + h^*(y, Ty)]$ ise T operatörünün sabit bir noktası mevcuttur (Gordji ve ark., 2010).



6. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ GENİŞLEMİYEN KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde küme değerli operatörler için küme değerli Garcia – Falset şartından (C_λ) bahsedeceğiz. Burada bazı klasik sabit nokta teoremlerinin küme değerli genişlemeyen operatörler için bu koşulu karşılayan operatörlere genişletildiğini göstereceğiz. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçlar Lim (1974), Lami Dozo (1973), Kirk ve Massa (1990), Garcia - Falset ve ark. (2011), Dhompongsa ve ark. (2009), Akbar ve Eslamian (2010) ve birçok benzeri çalışmaları da genelleştirmektedir.

Bir X Banach uzayının alt uzayı olan E kümesi için her $x, y \in E$ ve $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$ sağlayacak biçimde bir $k \in [0,1)$ varsa E kümesi üzerinde tanımlı bu T operatörüne daralma operatörü denir (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Bu eşitsizlikte $k = 1$ olması durumunda T operatörüne genişleme olmayan daralma operatörü denir. $Fix(T)$ T 'nin bütün sabit noktalarının kümesi olmak üzere her $x \in E$ ve her $y \in Fix(T)$ için $\|Tx - y\| \leq k\|x - y\|$ eşitsizliğine göre T 'ye yarı genişleyebilen daralma operatörü denir (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Altta yatan metrik uzayların tamlığını karakterize etmek için Suzuki daha zayıf bir daralma kavramı ortaya koydu ve aşağıdaki teoremi kanıtladı

Teorem 6.1:

$[0,1)$ den $(\frac{1}{2}, 1]$ 'e artmayan bir θ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlasın.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq r \leq (\sqrt{5} - 1)/2 \\ (1 - r)r^{-2} & , \quad (\sqrt{5} - 1)/2 \leq r \leq 2^{-1/2} \\ (1 + r)^{-1} & , \quad 2^{-1/2} < r < 1 \end{cases}$$

O halde bir (M, d) metrik uzayına göre aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M tamdır.

ii) Her $x, y \in X$ için $r \in (0,1)$ vardır öyle ki

$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y)$ ile $d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$ eşitsizliklerini sağlayan X üzerindeki her T operatörü sabit bir noktaya sahiptir (Suzuki, 2008a).

Suzuki başka bir çalışmasında $\lim_{r \rightarrow 1^-} \theta(r) = \frac{1}{2}$ olduğunu gözlemliyor ve operatörler için aşağıdaki gibi bir koşul tanımlıyor.

Tanım 6.1:

X bir Banach uzayı ve T bu uzayda bir E altkümesi üzerinde bir operatör olsun. O halde her $x, y \in E$ için T 'nin sağladığı (C) koşulu; $\frac{1}{2}\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$ ile $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ anlamına gelir (Suzuki, 2008b).

Suzuki çalışmasında (C) koşulunun genişlemeyenlikten daha zayıf ve yarı genişlemeden daha güçlü olduğunu kanıtlamıştır ve ayrıca Banach uzaylarında bu tür operatörler için bazı sabit nokta teoremleri ve yakınsama teoremleri sunmuştur.

Garcia-Falset ve ark. (C) koşulunun genelleştirilmesini aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Tanım 6.2:

Her $x, y \in E$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $T: E \rightarrow X$ operatörüne $\lambda\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$ için (C_λ) koşulunu sağlar denir ve $\lambda\|x - Tx\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliği $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ anlamına gelir (Kaewcharoen ve ark., 2011). Burada $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ iken (C_{λ_1}) koşulu (C_{λ_2}) koşulunu sağladığına dikkat edilmelidir. Tersi doğru değildir.

Önceki bölümlerde ifade etmiş olduğumuz Hausdorff uzaklığını Kaewcharoen ve arkadaşları tanımlarken özellikle Banach uzayı vurgusu yapmışlardır. Bu tanımlama metriğin tamlık şartından dolayı önceki tanımla ters düşmemekte bilakis örtüşmektedir. Şimdi Kaewcharoen ve arkadaşlarının çalışmalarının ön bölümünde vermiş oldukları tanım ve teoremlerden bahsedelim.

X , Banach uzay ve E , X uzayının boş olmayan bir altkümesi olsun. E 'nin bütün alt kümelerinin ailesi, yani 2^E 'yi boş olmayan bütün kapalı alt kümeleri $P(E)$ gösterimi ile, boş olmayan kapalı ve sınırlı alt kümeleri $P_{bT}(E)$ ile, boş olmayan kompakt alt kümelerini ailesi $P_k(E)$ ile ve boş olmayan kompakt ve konveks alt kümeleri $P_{kc}(E)$ ile göstereceğiz. Hausdorff mesafesi de $h(.,.)$ ile gösterilmiştir. Yani; $h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$, $A, B \in P_{bT}(X)$ olduğunu ifade etmiştik. Burada $d(a, A) = \inf_{b \in A} \{d(a, b)\}$ ifadesini de bir noktanın bir kümeyle olan uzaklığı olarak tanımlamıştık.

Bir küme değerli $T \rightarrow P_{bT}(X)$ operatörüne her $x, y \in E$ için $h(Tx, Ty) \leq \|x - y\|$ ise genişlemeyen (noneexpansive) daralma operatörü denir. Eğer $x \in E$ ve $y \in \text{Fix}(T)$ için $h(Tx, Ty) \leq \|x - y\|$ oluyorsa T 'ye yarı genişleyen (quasino expansive) daralma operatör denir. Burada $\text{Fix}(T) = \{x \in E : x \in Tx\}$ ile T operatörünün bütün sabit noktalarının kümesi kastedilmektedir (Shiau ve Tan, 1975).

Tanım 6.3:

Her $x, y \in E$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $T \rightarrow P_{bT}(X)$ küme değerli operatörüne $\lambda d(x, Tx) \leq \|x - y\|$ için (C_λ) koşulunu sağlar denir. Burada $\lambda d(x, Tx) \leq \|x - y\|$ eşitsizliği $h(Tx, Ty) \leq \|x - y\|$ anlamına gelmektedir (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Tek değerli operatörler için (C_{λ_1}) koşulunun (C_{λ_2}) koşulunu sağladığı açıktır. Aşağıdaki sonuçlar (C_λ) koşulunun genişlemeyen operatörlerden daha zayıf ve yarıgenişleyen operatörlerden daha güçlü olduğunu göstermektedir.

Önerme 6.1:

X Banach uzayı boştan farklı olsun ve E, X 'in bir alt kümesi olsun. $T: E \rightarrow P_{bT}(X)$ olmak üzere;

- i) Eğer T genişlemeyen operatör ise (C_λ) koşulunu sağlar.
- ii) Eğer T , (C_λ) koşulunu sağlıyor ve $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ oluyorsa o halde yarıgenişleyen bir operatördür (Kaewcharoen ve ark., 2011).

İspat:

- i) Aşıkardır.
- ii) $y \in \text{Fix}(T)$ ve $x \in E$ olsun. $\lambda d(y, Ty) = 0 \leq \|y - x\|$ olduğundan $h(Ty, Tx) \leq \|y - x\|$. ■

Örnek 6.1:

Bir $T[0,3] \rightarrow P_{bT}([0,3])$ operatörü

$Tx = \begin{cases} \{0\}, & x \neq 3 \\ [\frac{1}{2}, 1], & x = 3 \end{cases}$ ile tanımlasın. T 'nin $(C_{\frac{1}{2}})$ koşulunu sağladığını ama genişlemeyen

bir operatör olmadığını gösterelim. Eğer $x < y$ ve $(x, y) \in ([0,3] \times [0,3]) \setminus (2,3) \times \{3\}$ ise o halde $h(Tx, Ty) \leq \|x - y\|$. Eğer $x \in (2,3)$ ve $y = 3$ ise o halde

$\frac{1}{2}d(x, Tx) = \frac{x}{2} > 1 > \|x - y\|$ ve $\frac{1}{2}d(y, Ty) = 1 > \|x - y\|$. Buradan T 'nin $(C_{\frac{1}{2}})$

koşulunu sağladığı görülmektedir. Bununla birlikte $x = 2.9$ ve $y = 3$ için $\|x - y\| = 0.1$

ve $h(Tx, Ty) = 1$ olur. Dolayısıyla T genişlemeyen operatör değildir (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Örnek 6.2:

Bir $T[0,3] \rightarrow P_{bT}([0,3])$ operatörü

$$Tx = \begin{cases} \{0\}, & x \neq 3 \\ \left[\frac{3}{2}, 2\right], & x = 3 \end{cases} \text{ ile tanımlasın. } Fix(T) = \{0\} \text{ ve } T \text{ nin yarıgenişleyen}$$

operatör olduğu açıktır. Bununla birlikte $\lambda \in (0,1)$ için $\lambda d(3, T3) = \lambda < 1 = \|3 - 2\|$ ve $h(T3, T2) = 2 > 1 = \|3 - 2\|$. Buradan T nin (C_λ) koşullu operatör olmadığı anlaşılır (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Lemma 6.1:

$\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ bir X Banach uzayında sınırlı iki dizi olsunlar. Ayrıca $[0,1]$ aralığında bir $\{\lambda_n\}$ dizisi $0 < \liminf_n \lambda_n \leq \limsup_n \lambda_n < 1$ ile verilsin. Varsayalım ki Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = (1 - \lambda_n)x_n + \lambda_n y_n$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$ olsun. O halde $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ olur (Suzuki T., 2005).

Lemma 6.2:

(E, d) bir tam metrik uzay ve $A, B \in P_{bT}(X)$ olmak üzere her $a \in A$ ve $\varepsilon > 0$ için bir $b \in B$ vardır. Öyle ki; $d(a, b) \leq h(A, B) + \varepsilon$ dir (Kaewcharoen ve ark., 2011). (Bkz. Lemma 4.4.1).

Tanım 6.4:

X bir Banach uzayı ve E kümesi X uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $T: E \rightarrow P_{bT}(E)$ ye bir operatör olarak alınsın. $\lambda \in (0,1)$ ve $\gamma_n \in (0, \infty)$ olsun öyle ki; $\lim_n \gamma_n = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in E$ ve $y_0 \in Tx_0$ seçelim.

$$x_1 = (1 - \lambda)x_0 + \lambda y_0$$

olsun. Lemma 6.2'den

$$\|y_1 - y_0\| \leq h(Tx_1, Tx_0) + \gamma_0$$

olacak şekilde bir $y_1 \in Tx_1$ vardır. Benzer şekilde

$$x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1$$

yazalım. Bu şekilde tümevarımsal olarak

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda y_n \quad (1)$$

elde edilir. Öyle ki $y_n \in Tx_n$ olacak şekilde

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq h(Tx_{n+1}, Tx_n) + \gamma_n \quad (2)$$

yazılabilir.

(1)'de ifade edilen $\{x_n\}$ dizisi Mann iterasyonu olarak bilinmektedir (Song, ve ark. 2009).

Lemma 6.3:

E bir X Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $T: E \rightarrow P_{bT}(E)$ ye küme değerli operatörü $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) koşulunu sağlasın. Eğer $\{x_n\}$ (1)'de ifade edilen bir dizi ise $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ (Kaewcharoen ve ark., 2011).

İspat:

$y_n \in Tx_n$ olduğundan her n için $\lambda d(x_n, Tx_n) \leq \lambda \|x_n - y_n\| = \|x_n - x_{n+1}\|$ yazabiliriz. T 'nin tanımından $h(Tx_n, Tx_{n+1}) \leq \|x_n - x_{n+1}\|$ yazabiliriz. (2)'den $\|y_{n+1} - y_n\| \leq h(Tx_n, Tx_{n+1}) + \gamma_n \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \gamma_n$.

Dolayısıyla aşağıdaki ifade sağlanır;

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$$

Lemma 6.1'den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ elde edilir.

O halde $y_n \in Tx_n$ ve $0 \leq \lim_n d(x_n, Tx_n) \leq \lim_n \|x_n - y_n\| = 0$. İspat tamamdır. ■

Sıradaki metot ve sonuçlar asimptotik merkezlerle ilgilidir. E , X uzayının boş olmayan, kapalı ve sınırlı bir alt kümesi ve ayrıca X uzayında bir $\{x_n\}$ sınırlı bir dizisi mevcut olsun. $r(E, \{x_n\})$ ve $A(E, \{x_n\})$ ile $\{x_n\}$ 'nin E 'deki, sırasıyla asimptotik yarıçapını ve asimptotik merkezini ifade edeceğiz. Şöyle ki;

$$r(E, \{x_n\}) = \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| : x \in E \right\}$$

$$A(E, \{x_n\}) = \left\{ x \in E : \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = r(E, \{x_n\}) \right\}.$$

Eğer E kümesi zayıf kompakt ve konveks ise $A(E, \{x_n\})$ 'nin de öyle olduğu bilinmektedir (Goebel, 1975).

$\{x_n\}$ ve E yukarıdaki gibi tanımlanmış olsunlar. Bu durumda $\{x_n\}$ 'e E 'ye bağıl(göreceli) ilgilidir denir. Eğer $A(E, \{x_n\}) = A(E, \{x_{n_i}\})$ olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin bütün $\{x_{n_i}\}$ alt dizileri için $r(E, \{x_n\}) = r(E, \{x_{n_i}\})$ oluyorsa $\{x_n\}$ 'e E 'ye asimptotik olarak değişmeyen ilgilidir denir (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Lemma 6.4:

$\{x_n\}$ ve E yukarıdaki gibi tanımlanmış olsunlar.

- i. $\{x_n\}$ 'nin E 'ye bağıl ilgili olan bir alt dizisi her zaman vardır (Dozo, 1973 ve Goebel, 1975).
- ii. Eğer E ayrılabilir bir küme ise $\{x_n\}$ E 'ye asimptotik olarak değişmeyen ilgili bir alt diziyeye sahiptir (Kirk ve ark., 1986).

Şimdi de Banach uzayının bir ultra kuvvet formülasyonunu hazırlayalım. \mathcal{U} , \mathbb{N} doğal sayılar kümesi üzerinde nontrival (çözümü basit olmayan) ultra filtre olsun. Bir Banach uzayının $(X)_{\mathcal{U}}$ ultra kuvvetinin çekirdeği $I_{\infty}(X) = \left\{ \{x_n\} \in I_{\infty}(X) : \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 0 \right\}$ ile oluşan $I_{\infty}(X) = \left\{ \{x_n\} : x_n \in X \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ ve } \|\{x_n\}\| = \sup_n \|x_n\| < \infty \right\}$ nin bir bölüm uzayı olduğunu hatırlayalım (Sims, 1982; Aksoy ve ark., 1990).

$\tilde{X} = (X)_{\mathcal{U}}$ 'nin bölüm normu $\|\{x_n\}_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|$ ile verilen bir Banach uzayı olduğu kanıtlanabilir, öyle ki buradaki $\{x_n\}_{\mathcal{U}}$, $\{x_n\}$ 'nin denklik sınıfıdır. Aynı zamanda X , \tilde{X} 'in $x = \{x, x, \dots\}_{\mathcal{U}}$ şeklindeki kanonik gömme ile oluşan bir alt uzayına izometrik olduğu da açıktır. E , X uzayının boş olmayan bir alt kümesi iken E ve x 'in sırasıyla \tilde{X} 'deki görüntülerini \dot{E} ve \dot{x} notasyonları ile ifade edeceğiz. Öyle ki;

$$\dot{E} = \{ \dot{x} \in \tilde{X} : \exists \{x_n\}; \dot{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}} \text{ ve her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n \in E \} \text{ dir.}$$

Bu safhada $\dot{x} = \{x, x, \dots\}_{\mathcal{U}}$ ve $\dot{E} = \{ \dot{x} \in \tilde{X} : x \in E \}$ ile ifade edilebilir.

Eğer $T: E \rightarrow P_{bT}(X)$ küme değerli bir operatör ise, biz ona karşılık gelebilecek bir $\tilde{T}: \dot{E} \rightarrow P_{bT}(\tilde{X})$ operatörü tanımlayacağız. Öyle ki;

$$\tilde{T}(\dot{x}) = \{ \dot{u} \in \tilde{X} : \exists \{u_n\} \text{ öyle ki } \dot{u} = \{u_n\}_{\mathcal{U}} \text{ ve her } n \in \mathbb{N} \text{ için } u_n \in Tx_n \} \text{ olur.}$$

Burada $\dot{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}} \in \dot{E}$ 'dir.

\tilde{T} operatörünün iyi tanımlandığını göstermek için T 'nin Hausdorff mesafesine göre düzgün sürekli olduğunu varsayalım. Aslında $\dot{x} = \{x_n\}_{\mathcal{U}}$, $\dot{y} = \{y_n\}_{\mathcal{U}} \in \dot{E}$ öyle ki $\dot{x} = \dot{y}$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $u_n \in Tx_n$ iken herhangi bir $\{u_n\}$ dizisi için, her $n \in \mathbb{N}$ ve $v_n \in Ty_n$ olacak şekilde bir $\{v_n\}$ dizisi vardır ve $\|u_n - v_n\| \leq h(Tx_n, Ty_n) + \frac{1}{n}$ yazılabilir (Kaewcharoen ve ark., 2011).

T 'nin düzgün sürekliliğinden dolayı $\lim_{\mathcal{U}} \|u_n - v_n\| = 0$ olur. Bu da $\tilde{T}\dot{x} \subseteq \tilde{T}\dot{y}$ olduğunu gösterir. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ 'nin değiş tokuşu ile $\tilde{T}\dot{y} \subseteq \tilde{T}\dot{x}$ olduğunu da gösterebiliriz. Böylece \tilde{T} 'nin iyi tanımlı olduğu anlaşılmaktadır (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Önerme 6.2: E kümesi bir X Banach uzayının boş olmayan alt kümesi ve $T: E \rightarrow P_{bT}(X)$ operatörü düzgün sürekli olsun;

- i. Eğer T konveks-değerli ise \tilde{T} de konveks-değerlidir,
- ii. Eğer T kompakt-değerli ise \tilde{T} de kompakt-değerlidir ve her $x \in E$ için $\tilde{T}x = Tx$,
- iii. Eğer T genişleme olmayan ise \tilde{T} de genişleme olmayandır,
- iv. Eğer $\tilde{x} = \{x_n\}_u$ ve $\tilde{y} = \{y_n\}_u \in \tilde{E}$ ise o halde $\tilde{h}(\tilde{T}\tilde{x}, \tilde{T}\tilde{y}) = \lim_u h(Tx_n, Ty_n)$ (Wisnicki ve ark., 2007).

6.1. Bazı Sonuçlar:

Lemma 6.1.1:

E kümesi bir X Banach uzayının boş olmayan alt kümesi ve $T: E \rightarrow P_{bT}(X)$ küme değerli ve düzgün sürekli operatörü bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) koşulunu sağlasın. O halde her $k \in (\lambda, 1)$ için $\tilde{T}: \tilde{E} \rightarrow P_{bT}(\tilde{X})$ operatörü (C_λ) koşulunu sağladığı anlaşılmaktadır (Kaewcharoen ve ark., 2011).

İspat:

Diyelim ki bazı $k \in (\lambda, 1)$ için \tilde{T} operatörü, (C_λ) koşulunu sağlamıyor olsun. O halde \tilde{E} ' de bazı $\tilde{x} = \{x_n\}_u$ ve $\tilde{y} = \{y_n\}_u$ vardır öyle ki $kd(\tilde{x}, T\tilde{x}) \leq |\tilde{x} - \tilde{y}|$ ve $\tilde{h}(\tilde{T}\tilde{x}, \tilde{T}\tilde{y}) \geq |\tilde{x} - \tilde{y}|$.

$\varepsilon = \tilde{h}(\tilde{T}\tilde{x}, \tilde{T}\tilde{y}) - \|\tilde{x} - \tilde{y}\| > 0$ olsun. $\lambda d(\tilde{x}, T\tilde{x}) \leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\|$ olduğundan $\lambda d(\tilde{x}, T\tilde{x}) + \delta \leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\|$ olacak şekilde bir $\delta \in (0, \varepsilon)$ seçebiliriz.

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : |\tilde{h}(\tilde{T}\tilde{x}, \tilde{T}\tilde{y}) - h(Tx_n, Ty_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \|\tilde{x} - \tilde{y}\| - \|x_n - y_n\| \right| < \frac{\delta}{2} \right\}$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \lambda d(\tilde{x}, T\tilde{x}) - \lambda d(x_n, Tx_n) \right| < \frac{\delta}{2} \right\}$$

Buradan $n \in A \cap B \cap C$ için

$$\begin{aligned} \|x_n - y_n\| &> \|\tilde{x} - \tilde{y}\| - \frac{\delta}{2} \\ &> \lambda d(\tilde{x}, T\tilde{x}) + \delta - \frac{\delta}{2} \\ &> \lambda d(x_n, Tx_n) - \frac{\delta}{2} + \delta - \frac{\delta}{2} \\ &= \lambda d(x_n, Tx_n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
h(Tx_n, Ty_n) &> \tilde{h}(\tilde{T}\tilde{x}, \tilde{T}\tilde{y}) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> \|\tilde{x} - \tilde{y}\| + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \\
&> \|x_n - y_n\| + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2} \\
&= \|x_n - y_n\|
\end{aligned}$$

Bu durum T 'nin (C_λ) koşulunu sağlaması ile çelişir. ■

Teorem 6.1.1 (Lim):

X Banach uzayı düzgün konveks ve E , X uzayının kapalı, konveks, sınırlı ve boş olmayan bir alt kümesi olarak alınsın. $T: E \rightarrow P_k(X)$ genişleme olmayan bir operatör olsun. O halde T 'nin bir sabit noktası vardır (Lim, 1974).

Hatırlayalım ki her $\varepsilon \in (0, 2]$, $\delta > 0$ ve her $x, y \in X$ için bir X Banach uzayına düzgün konveks denir öyle ki $\|x\| \leq 1$ ve $\|y\| \leq 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartları $\frac{1}{2}\|x + y\| \geq 1 - \delta$ olduğu anlamına gelir. Her $x \in X$ noktasının E 'de benzersiz bir en yakın noktası varsa, X Banach uzayının bir E alt kümesinin benzersiz şekilde yakın olduğu söylenir. Düzgün konveks bir Banach uzayının boş olmayan her kapalı konveks alt kümesinin benzersiz şekilde yakın olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki teorem Lim'in teoreminin bir genişlemesidir (Kaewcharoen ve ark., 2011).

Teorem 6.1.2:

E , düzgün konveks bir X Banach uzayının boştan farklı sınırlı, kapalı, konveks bir alt kümesi olsun ve $T: E \rightarrow P_k(X)$ düzgün yakınsak ve bazı $\lambda \in (0, 1)$ için (C_λ) koşulunu gerçekleyen küme değerli bir operatör olarak alalım. Şu halde T operatörünün sabit noktası vardır (Kaewcharoen ve ark., 2011).

İspat:

(1)'deki gibi tanımlanmış olan bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Lemma 6.3'ten $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ dir. $k \in (\lambda, 1)$ olsun. Lemma 6.1.1'den \tilde{T} , (C_k) koşulunu sağlar.

$\tilde{x} = \{x_n\}_u$ olsun. O halde $\tilde{x} \in T\tilde{x}$ ve her $\tilde{y} \in \tilde{E}$ için

$$kd(\tilde{x}, T\tilde{x}) = 0 \leq \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \quad (3)$$

X düzgün konveks olduğundan ultra kuvvet \tilde{X} de düzgün konvektir ve $\tilde{x}, \dot{x} \in \tilde{E}$ olacak şekilde benzersiz en yakın bir noktaya sahiptir. Buradan T kompakt değerlidir. $\tilde{T}\dot{x} = \dot{T}x$ ve bir $\dot{u} \in \dot{T}x$ vardır öyle ki

$$\|\tilde{x} - \dot{u}\| = d(\tilde{x}, \tilde{T}\dot{x}) \quad (4)$$

\tilde{T} , (C_k) koşulunu sağladığından (4)'den

$$\tilde{h}(\tilde{T}\tilde{x}, \tilde{T}\dot{x}) \leq \|\tilde{x} - \dot{x}\| \quad (5)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4) ve (5)'ten $\|\tilde{x} - \dot{u}\| \leq \|\tilde{x} - \dot{x}\|$ olur ve burada \dot{x} 'in benzersizliğinden dolayı $\dot{u} = \dot{x}$ olur. Böylece $x = u \in Tx$. ■

Tanım 6.1.2:

Bir $x \in X$ 'e zayıf yakın herhangi bir $\{x_n\}$ dizi ile verilen bir X Banach uzayında her $y \in X$ ve $y \neq x$ için $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$ eşitsizliği sağlanıyorsa X 'e Opial özelliklere sahiptir denir (Dozo, 1973).

Tanım 6.1.3:

X , Opial koşullarını sağlayan bir Banach uzayı olsun. Eğer E , X 'in boş olmayan, zayıf kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: E \rightarrow P_k(E)$ kompakt-değerli genişleme olmayan (nonexpansive)

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliği ile ifade edilen T operatörüne Opial koşullu operatör denir.

Teorem 6.1.3 (Dozo Teoremi):

X , bir Banach uzayı olsun. Eğer E , X 'in boştan farklı, konveks ve zayıf kompakt bir alt kümesi ve $T: E \rightarrow P_k(E)$ Opial koşullu bir operatörse T operatörünün sabit bir noktası mevcuttur (Dozo, 1973).

Aşağıdaki sonuç Dozo teoreminin bir genişlemesidir.

Teorem 6.1.4:

X , Opial özelliklere sahip bir Banach uzayı ve E , X kümesinin boş olmayan zayıf kompakt konveks bir alt kümesi ve $T: E \rightarrow P_k(E)$ düzgün sürekli küme değerli operatörü bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) koşulunu sağlıyor olsun. O halde T 'nin sabit bir noktası vardır (Kaewcharoen ve ark., 2011).

İspat:

Teorem 6.1.2'nin ispatındaki gibi (1) ile tanımlanan bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Gerekirse bir alt dizi baypas edilerek $\{x_n\}$ 'nin E 'ye göre düzenli olduğu ve E 'deki bir x noktasına zayıf bir şekilde yakınsadığı varsayılabilir. E opial özelliklere sahip olduğundan \dot{x} , \dot{E} 'de $\tilde{x} = \{x_n\}_u$ 'ya en yakın olan benzersiz bir noktadır. Bundan sonraki ispatın devamı teorem 6.1.1.'deki gibidir. ■

Şimdi de Kirk ve Masa'nın teoremini (C_λ) koşulunu sağlayan operatörlere genişletelim. Önce bunun için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 6.1.2:

X bir Banach uzayı ve E kümesi X 'in boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: E \rightarrow P_k(E)$ düzgün sürekli küme değerli operatörü bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) koşulunu sağlıyor olsun. Ayrıca bir E 'de $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. O halde her $x \in A := A(E, \{z_n\})$ ve $Tx \cap A \neq \emptyset$ olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin bir $\{z_n\}$ alt dizisi vardır (Kaewcharoen ve ark., 2011).

İspat:

Lemma 5.4'ten $\{x_n\}$ 'nin E 'ye bağıl ilgili bir $\{z_n\}$ alt dizisi vardır. Ayrıca $A := A(E, \{z_n\})$ ve $x \in A$ olsun. $\tilde{z} \in \tilde{T}\tilde{z}$ için $\tilde{z} = \{z_n\}_u$ iken $\lim_n d(z_n, Tz_n) = 0$ olur.

$$\dot{u} \in A \Leftrightarrow \|\tilde{z} - \dot{u}\| = d(\tilde{z}, \dot{E}) \quad (6)$$

olduğuna dikkat edelim. Tx kompakt olduğundan $\tilde{T}\dot{x} = \dot{T}x$ ve bir $\dot{z} \in \tilde{T}\dot{x}$ vardır. Öyle ki

$$\|\tilde{z} - \dot{z}\| = d(\tilde{z}, \tilde{T}\dot{x}). \quad (7)$$

Her $k \in (\lambda, 1)$ için \tilde{T} , (C_k) koşulunu sağladığından $kd(\tilde{z}, \tilde{T}\tilde{z}) = 0 \leq \|\tilde{z} - \dot{x}\|$ ve buradan da

$$\tilde{h}(\tilde{T}\tilde{z}, \tilde{T}\dot{x}) \leq \|\tilde{z} - \dot{x}\|. \quad (8)$$

elde edilir. (6), (7) ve (8)'den

$$\|\tilde{z} - \dot{z}\| \leq \|\tilde{z} - \dot{x}\| = d(\tilde{z}, \dot{E}) \text{ olur. Bu da } \dot{z} \in \dot{A} \text{ anlamına gelir.}$$

Böylece $z \in Tx \cap A$ ve ispat tamamdır. ■

Teorem 6.1.5:

X Banach uzayı E kümesi X 'in boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. E 'deki her dizinin asimptotik merkezinin boştan farklı ve kompakt olduğunu varsayalım. Eğer $T: E \rightarrow P_{kc}(E)$ düzgün sürekli küme değerli operatörü bazı $\lambda \in (0,1)$ için (C_λ) koşulunu gerçekleştiriyorsa T operatörünün sabit bir noktası vardır (Kaewcharoen ve ark., 2011).

İspat:

(1)'deki gibi bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Lemma 6.3'ten $\lim_n d(x_n, Tx_n) = 0$ elde ederiz. Lemma 6.1.2'den $x \in A := A(E, \{z_n\})$ ve $Tx \cap A \neq \emptyset$ olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin bir $\{z_n\}$ alt dizisi vardır. Varsayımımıza göre A boştan farklı ve kompakttır. Şimdi de her $x \in A$ için $Fx := Tx \cap A$ ile bir $F: A \rightarrow P_{kc}(A)$ operatörü tanımlayalım. O halde F üst

yarı süreklidir. Esasında A kompakt olduğundan $v \in A$ ve $\{u_n\} \subset A$ alırsak, öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ ve $v_n \in Fu_n$ öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ olur. T 'nin sürekliliğinden $n \rightarrow \infty$ iken $d(v, Tu) \leq d(v, Tu_n) + h(Tu_n, Tu) \rightarrow 0$ olur. Buradan $v \in Tu$ olur. Böylece $v \in Tu \cap A = Fu$ olur. Bohnenblust-Karlin sabit nokta teoreminden F ve dolayısıyla T , A 'da bir sabit noktaya sahiptir. ■

Son olarak, ana teoremlerimizde T 'nin sürekliliğinin gerekli olduğunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 6.1.1: (Kaewcharoen ve ark., 2011)

$X = \mathbb{R}$ ve $E = [-1/4, 1]$. E 'de bir T operatörü

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ -(1/3)x, & x \in [-1/4, 0) \cup (0, 3/4] \\ 1 - x, & x \in [3/4, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \text{ veya } \frac{3}{4} \min\{\|x - T(x)\|, \|y - T(y)\|\} > \|x - y\|.$$

O halde $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ alırsak $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ veya $(\frac{3}{4} + \varepsilon) \min\{\|x - T(x)\|, \|y - T(y)\|\} > \|x - y\|$ olur. Bu da T 'nin her $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ için $(C_{\frac{3}{4} + \varepsilon})$ şartını sağladığını gösterir. Bununla birlikte T sürekli değildir ve dolayısıyla bir sabit noktaya sahip değildir (Garcia – Falset ve ark., 2011).



7. YENİ BİR TİP KÜME DEĞERLİ DARALMA OPERATÖRÜ

Bu bölümde, Kikkawa – Suzuki tipi benzer yeni bir tür küme değerli operatör tanıtılacak ve buna bağlı olarak sabit nokta ile ilgili bazı temel problemler ifade edilecektir. Elde edilen sonuçların Ciric (1972) veya Nadler (1969) tarafından verilen klasik sonuçların yanı sıra Kikkawa – Suzuki (2008), Mot ve Perusel (2009)'in teoremlerini genelleştirip, tamamlayıp ve genişlettiğini göstereceğiz. Bununla birlikte dinamik programlamada ortaya çıkan belirli fonksiyonel denklemlere uygulamalar da ele alınmıştır.

Tanım 7.1:

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ bir küme değerli operatör olsun. Her $x \in X$, $y \in Tx$ ve $\{x_n\}_{n \geq 0}$ dizi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa T 'ye zayıf küme değerli Picard operatörü (ZPO) denir.

- i. $x_0 = x$, $x_1 = y$,
- ii. $x_{n+1} \in Tx_n$, her $n \geq 0$,
- iii. $\{x_n\}_{n \geq 0}$ dizisi T 'nin bir sabit noktasına yakınsaktır.

Ayrıca bir $\{x_n\}_{n \geq 0}$ dizisi a) ve b) şartlarını sağlıyorsa bu diziyeye T 'nin x_0 noktasından başlayan ardışık yaklaşma dizisi veya Picard iterasyonu adı verilir (Rus ve ark., 2003)

Tanım 7.2 (Kikkawa – Suzuki):

$\eta: [0, 1) \rightarrow (1/2, 1]$ fonksiyonu $\eta(a) = \frac{1}{1+a}$ ile tanımlansın. (X, d) uzayı tam metrik uzay, $Y \subseteq X$ ve $T: Y \rightarrow P_{bT}(X)$ alınsın. Eğer $a \in [0, 1)$ iken $x, y \in Y$ için $\eta(a)h^*(x, Tx) \leq d(x, y)$ ifadesi $h(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$ ifadesini sağlıyorsa T 'ye bir *KS-küme değerli operatör* denir (Kikkawa ve ark., 2008).

Aşağıdaki sonuç Nadler teoreminin bir genellemesidir.

Teorem 7.1:

$\eta: [0, 1) \rightarrow (1/2, 1]$ fonksiyonu $\eta(a) = \frac{1}{1+a}$ ile tanımlansın. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ bir KS- küme değerli operatör olsun. O halde $z \in Tz$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır denir (Kikkawa ve ark., 2008).

Tanım 7.3:

X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ olsun. Eğer $r \in [0, 1)$, $s \geq r$ ve $x, y \in X$ için $h^*(y, Tx) \leq sd(y, x)$ ifadesi $h(Tx, Ty) \leq rM_T(x, y)$ sağlıyorsa T 'ye, (s, r) - küme değerli daralma operatörü denir. Öyle ki;

$$M_T(x, y) = \max \left\{ d(x, y), h^*(x, Tx), h^*(y, Ty), \frac{h^*(x, Ty) + h^*(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir (Popescu, 2013).

Bu bölümde amacımız (s, r) – küme değerli daralma operatörleri için bazı temel problemler sunmaktır. Sonuçlarımız Ciric (1972), Kikkiwa ve ark. (2008a), Kikkiwa ve ark. (2008b), Mot ve ark. (2009), Nadler (1969), Reich (1972), Rus (1975), Rus (2001) ve Patrusel (2001) tarafından kanıtlanan bazı sonuçları genişletir, tamamlar ve geneller.

Aşağıdaki sonuç Nadler (1969) ve Ciric (1972) teoremlerinin bir genellemesidir.

Teorem 7.2:

(X, d) bir tam metrik uzay $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ $s > r$ için bir (s, r) – küme değerli daralma operatörü olsun. O hale T bir küme değerli zayıf Picard (ZPO) operatördür (Popescu, 2013).

İspat:

r_1 öyle bir reel sayısı olsun ki $0 \leq r < r_1 < s$ ve $r_1 < 1$ olsun. $u_1 \in X$ ve $u_2 \in Tu_1$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} h^*(u_2, Tu_2) &\leq h(Tu_1, Tu_2) \\ &\leq r \max \left\{ d(u_1, u_2), h^*(u_1, Tu_1), h^*(u_2, Tu_2), \frac{h^*(u_1, Tu_2) + 0}{2} \right\} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$\leq r \max \left\{ d(u_1, u_2), h^*(u_2, Tu_2), \frac{d(u_1, u_2) + h^*(u_2, Tu_2)}{2} \right\} \quad \text{olur.}$$

Böylece $r < 1$ için $h^*(u_2, Tu_2) \leq r d(u_1, u_2)$ olur. Ardından $d(u_2, u_3) \leq r_1 d(u_1, u_2)$ olacak şekilde bir $u_3 \in Tu_2$ alalım. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ ve $u_{n+1} \in Tu_n$ için $d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq r_1 d(u_n, u_{n+1})$ şeklinde X 'de bir $\{u_n\}$ dizisi oluşturabiliriz. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_1^{n-1} d(u_1, u_2) < \infty$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Böylelikle $\{u_n\}$ Cauchy dizisi elde etmiş oluruz. X in tamlığından, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için

$h^*(z, Tu_{n(k)}) \leq s d(z, u_{n(k)})$ olacak şekilde $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(k)}\}$ alt dizisi olduğunu göstereceğiz.

Tersini iddia ederek her $n \geq N$ için $h^*(z, Tu_n) > s d(z, u_n)$ olacak şekilde bir pozitif N sayısı alalım. Bu da her $n \geq N$ için $d(z, u_{n+1}) > s d(z, u_n)$ anlamına gelir. Tümevarımdan her $n \geq N$ ve $p \geq 1$ için

$$d(z, u_{n+p}) > s^p d(z, u_n) \quad (1)$$

elde ederiz. Buradan her $n \geq N$ ve $p \geq 1$ için

$$d(u_{n+p}, u_n) \leq d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, u_{n+2}) + \dots + d(u_{n+p-1}, u_{n+p})$$

$$\text{olur ve } d(u_{n+p}, u_n) \leq d(u_n, u_{n+1})(1 + r_1 + r_1^2 + \dots + r_1^{p-1}) = \frac{1-r_1^p}{1-r_1} d(u_n, u_{n+1})$$

elde ederiz. Burada her $n \geq 1$ için limit $p \rightarrow \infty$ alarak $d(z, u_n) \leq \frac{1}{1-r_1} d(u_n, u_{n+1})$

yazabiliriz. Ardından her $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$d(z, u_{n+p}) \leq \frac{1}{1-r_1} d(u_{n+p}, u_{n+p+1}) \leq \frac{r_1^p}{1-r_1} d(u_n, u_{n+1}) \quad (2)$$

elde ederiz. Her $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için (1) ve (2) den $d(z, u_n) < \frac{(r_1/s)^p}{1-r_1} d(u_n, u_{n+1})$ elde ederiz. Her $n \geq N$ için limit $p \rightarrow \infty$ alırsak $d(z, u_n) = 0$ elde ederiz. Bu durum (1) ile çelişir. Öyleyse her $k \in \mathbb{N}$ için $h^*(z, Tu_{n(k)}) \leq s d(z, u_{n(k)})$ olacak şekilde $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(k)}\}$ alt dizisi vardır.

hipotez gereği

$$h^*(Tz, Tu_{n(k)})$$

$$\leq r \max \left\{ d(z, u_{n(k)}), h^*(z, Tz), h^*(u_{n(k)}, Tu_{n(k)}) \frac{d(z, Tu_{n(k)}) + h^*(u_{n(k)}, Tz)}{2} \right\}$$

olur. Buradan $h^*(u_{n(k)+1}, Tz)$

$$\leq r \max \left\{ d(z, u_{n(k)}), h^*(z, Tz), d(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}) \frac{d(z, u_{n(k)+1}) + d(u_{n(k)}, Tz)}{2} \right\}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ alırsak $h^*(z, Tz) \leq r \max \left\{ h^*(z, Tz), \frac{h^*(z, Tz)}{2} \right\}$ olur ve $h^*(z, Tz) = 0$ elde ederiz. O halde $Tz \in P_{bT}(X)$ olduğundan $z \in Tz$ olur. ■

Uyarı 7.1:

Eğer $h^*(y, Tx) \leq sd(y, x)$ ise $h^*(x, Tx) - d(y, x) \leq sd(y, x)$ elde ederiz. Buradan $\frac{1}{1+s} h^*(x, Tx) \leq d(x, y)$ olur. Eğer $\frac{1}{1+r} h^*(x, Tx) \leq d(x, y)$ ise buradan $h^*(y, Tx) - d(x, y) \leq (1+r)d(y, x)$ olur. O halde $h^*(y, Tx) \leq (2+r)d(y, x)$ olur.

Örnek 7.1:

$X = \{1,2,3\}$ ve d , X üzerinde bir öklidyen metrik olsun. $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ bir operatör öyle ki $T1 = T2 = \{1,2\}$ ve $T3 = \{3\}$ olsun. O halde

- $r = 0,3$ ve $s = 0,4$ için T bir (s,r) – küme değerli operatördür.
- Her $x \in X$ T 'nin bir sabit noktasıdır.
- T bir KS – küme değerli operatör değildir (Popescu, 2013). Gösterelim.

Şöyle ki;

a) $h(T1, T2) = h(T1, T1) = h(T2, T2) = h(T3, T3) = 0$ ve $h^*(3, T1) = 1 > sd(3,1) = 0,8$ ve $h^*(1, T3) = 2 > sd(1,3) = 0,8$ olur. Ayrıca $h^*(2, T3) = 1 > sd(2,3) = 0,4$ olur. (Popescu, 2013).

b) Aşikardır.

c) $\frac{1}{1+r} h^*(1, T1) = 0 \leq d(1,3)$ ve $h^*(T1, T3) = 2 > rd(1,3) = 2r$ buradan T bir KS – küme değerli operatör olmadığı anlaşılmaktadır.

Teorem 7.3:

X bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow P_{bT}(X)$ olsun. $r, s \in [0,1)$ ve $r < s$ olduğunu varsayalım. Öyle ki

$$\frac{1}{1+r} h^*(x, Tx) \leq d(x, y) \leq \frac{1}{1-s} h^*(x, Tx)$$

eşitsizliği $h(Tx, Ty) \leq rM_T(x, y)$ eşitsizliğini sağlar. Burada

$$M_T(x, y) = \max \left\{ d(x, y), h^*(x, Tx), h^*(y, Ty), \frac{h^*(x, Ty) + h^*(y, Tx)}{2} \right\}$$

dir. O halde T bir ZPO'dur (Popescu, 2013).

İspat:

r_1 , $0 \leq r < r_1 < s$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. $u_1 \in X$ ve $u_2 \in Tu_1$ olsun öyle ki $d(u_1, u_2) \leq \frac{1-r_1}{1-s} h^*(u_1, Tu_1)$ dir. Buradan

$$\frac{1}{1+r} h^*(u_1, Tu_1) \leq h^*(u_1, Tu_1) \leq d(u_1, u_2) \leq \frac{1}{1-s} h^*(u_1, Tu_1)$$

ve hipotez gereği:

$$h^*(u_2, Tu_2) \leq h(Tu_1, Tu_2)$$

$$\leq r \max \left\{ d(u_1, u_2), h^*(u_1, Tu_1), h^*(u_2, Tu_2), \frac{h^*(u_1, Tu_2) + 0}{2} \right\}$$

dolayısıyla $h^*(u_2, Tu_2) \leq r \max \left\{ d(u_1, u_2), h^*(u_2, Tu_2), \frac{d(u_1, u_2) + h^*(u_2, Tu_2)}{2} \right\}$

olur. Böylece $r < 1$ olarak $h^*(u_2, Tu_2) \leq rd(u_1, u_2)$ elde ederiz. Sonra bir $u_3 \in Tu_2$ vardır öyle ki $d(u_2, u_3) \leq r_1 d(u_1, u_2)$ ve $d(u_2, u_3) \leq \frac{1-r_1}{1-s} h^*(u_2, Tu_2)$ olur. Böylece X 'e bir $\{u_n\}$ dizisi inşa edebiliriz öyle ki $u_{n+1} \in Tu_n$, $h^*(u_{n+1}, Tu_n) \leq rd(u_n, u_{n+1})$, $d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq r_1 d(u_n, u_{n+1})$ olur ve her $n \in N$ için $d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq \frac{1-r_1}{1-s} h^*(u_{n+1}, Tu_{n+2})$ olur. Öyleyse

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r_1^{n-1} d(u_1, u_2) < \infty$$

elde ederiz. Bu yüzden $\{u_n\}$ i bir Cauchy dizisi olarak elde ederiz. X 'in tamlığından dolayı bir $z \in X$ vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z$ dir.

$$d(u_{n+p}, u_n) \leq d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, u_{n+2}) + \dots + d(u_{n+p-1}, u_{n+p})$$

Olduğundan her $n \geq N$ ve $p \geq 1$ için

$$d(u_{n+p}, u_n) \leq d(u_n, u_{n+1})(1 + r_1 + r_1^2 + \dots + r_1^{p-1}) = \frac{1 - r_1^p}{1 - r_1} d(u_n, u_{n+1})$$

elde ederiz. $p \rightarrow \infty$ alarak her $n \geq 1$ için $d(z, u_n) \leq \frac{1}{1-s} h^*(u_n, Tu_n)$ elde ederiz.

Şimdi de her $n \geq N$ olacak şekilde bir pozitif N doğal sayısı var olduğunu varsayalım öyle ki $d(z, u_n) \leq \frac{1}{1+r} h^*(u_n, Tu_n)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} d(u_n, u_{n+1}) &\leq d(z, u_n) + d(z, u_{n+1}) \leq \frac{1}{1+r} [h^*(u_n, Tu_n) + h^*(u_{n+1}, Tu_{n+1})] \\ &\leq \frac{1}{1+r} [h^*(u_n, Tu_n) + rd(u_n, u_{n+1})] \end{aligned}$$

olur. Bu da $d(u_n, u_{n+1}) \leq h^*(u_n, Tu_n)$ eşitsizliğinin imkânsız olduğunu gösterir.

Böylece $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(k)}\}$ alt dizisi mevcuttur öyle ki her $k \geq N$ için $d(z, u_{n(k)}) \geq \frac{1}{1+r} h^*(u_{n(k)}, Tu_{n(k)})$ sağlanır. Her $n \geq 1$ için $d(z, u_n) \leq \frac{1}{1-s} h^*(u_n, Tu_n)$ olduğundan

hipotez gereği $h^*(Tz, Tu_{n(k)}) \leq rM_T(z, u_{n(k)})$ elde ederiz. Bu da

$$h^*(u_{n(k)+1}, Tz) \leq r \max \left\{ d(z, u_{n(k)}), h^*(z, Tz), h^*(u_{n(k)}, Tu_{n(k)}), \frac{h^*(z, Tu_{n(k)}) + h^*(u_{n(k)}, Tz)}{2} \right\}$$

ifadesini sağlar. Böylece

$$h^*(u_{n(k)+1}, Tz) \leq r \max \left\{ d(z, u_{n(k)}), h^*(z, Tz), d(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}), \frac{d(z, u_{n(k)+1}) + h^*(u_{n(k)}, Tz)}{2} \right\}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ alırsak $h^*(z, Tz) \leq r \max \left\{ h^*(z, Tz), \frac{h^*(z, Tz)}{2} \right\}$ olur. Öyleyse $h^*(z, Tz) = 0$

ve dolayısıyla $z \in Tz$ olur. ■

Sonuç 7.1:

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ olarak verilsin. Bir $r \in [0,1)$ olduğunu varsayalım öyle ki

$$\frac{1}{1+r}d(x, Tx) \leq d(x, y) \leq \frac{1}{1-r}d(x, Tx)$$

eşitsizliği

$$h^*(Tx, Ty) \leq rM_T(x, y)$$

eşitsizliğini sağlar. Öyle ki

$$M_T(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}$$

olur. O halde $z \in X$ dir öyle ki $Tz = z$ dir (Popescu, 2013).

İspat:

Her $u_1 \in X$ için $u_{n+1} = Tu_n$ ile tanımlı bir $\{u_n\}$ dizisinin $d(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq rd(u_n, u_{n+1})$ ilişkisini sağladığı göstermek kolaydır. O halde $\{u_n\}$ bir Cauchy dizisi olsun ve bazı $z \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z$ dir. Her $n \geq 1$ için $\{u_n\}$ nin bir $\{u_{n(k)}\}$ alt dizisi vardır öyle ki $d(z, u_{n(k)}) \geq \frac{1}{1+r}d(u_{n(k)}, u_{n(k)+1})$ her $k \geq N$ için sağlanır. Öyleyse

$$d(u_{n(k)}, Tz) \leq r \max \left\{ d(z, u_{n(k)}), d(z, Tz), d(u_{n(k)}, u_{n(k)+1}), \frac{d(z, u_{n(k)+1}) + d(u_{n(k)}, Tz)}{2} \right\}$$

olur. $k \rightarrow \infty$ alırsak $Tz = z$ elde ederiz. ■

8. HEMEN HEMEN DARALMA OPERATÖRLERİNİN SÜREKLİLİĞİ VE SABİT NOKTALARI

Hemen hemen daralmalar, Kannan eşlemeleri, Zamfirescu eşlemeleri vb. gibi alışılmış birkaç daralma tipini içeren genelleştirilmiş daralmalar sınıfını oluşturur. Herhangi bir olağan daralma operatörü aynı zamanda süreklidir fakat Kannan eşlemeleri sabit noktaları haricinde genellikle sürekli değildirler. Bu bölümdeki temel amacımız hem tek değerli hem de küme değerli hemen hemen daralma operatörleri için sürekliliği araştırmaktır. Bu bölümdeki ana sonucumuz ise hemen hemen daralma operatörlerinin sabit noktalarında sürekli olduklarıdır. Bu sonuç aynı zamanda Berinde'in 2003 yılındaki konu ile ilgili makalesinde dile getirmiş olduğu açık soruyu da cevaplamaktadır.

Klasik Banach daralma prensibi lineer olmayan analizdeki en kullanışlı sonuçlardan biridir. Bir metrik uzayın tam olarak kurgulaması aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 8.1:

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ operatörü

$$\text{her } x, y \in X \text{ ve } 0 < a < 1 \text{ için } d(Tx, Ty) < a \cdot d(x, y) \quad (1)$$

şartını sağlasın. Öyleyse;

(p1) T operatörünün X 'de bir tek p sabit noktası vardır.

$$(p2) \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ Picard iterasyonu } x_{n+1} = Tx_n \quad n = 1, 2, \dots \text{ her } x_0 \in X \text{ için} \quad (2)$$

p 'ye yakınsar.

(p3) Aşağıdakiler a priori (öncel bilgi) ve a posteriori (sonsal bilgi) hata tahminleridir.

$$d(x, x^*) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$d(x, x^*) \leq \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

(p4) Picard iterasyonun yakınsaklığı

$$d(x_n, x^*) \leq a^n d(x_0, x^*) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

ile verilir (Berinde ve ark., 2008).

(p1) ve (p2) koşullarını sağlayan bir operatöre Picard operatörü denir (Rus, 1996).

(1) eşitsizliği tarzındaki operatörlere *kaba* veya *basit daralma operatörü* denir. Bundan dolayı Teorem 8.1 den de anlaşılacağı üzere her basit daralma aynı zamanda bir Picard operatörüdür. Teorem 8.1 nonlinear (doğrusal olmayan) denklemlerin çözümünde önemli uygulamalara sahiptir. Bu teorem yalnızca bir T operatörünün basit sabit noktasının

varlığını ve tekliliğini ifade etmekte kalmıyor, aynı zamanda bir sabit noktanın varlığını (2) deki Picard iterasyonu aracılığıyla yaklaşık olarak hesaplamaktadır. Dahası (3)'deki *a priori* ve (4)'deki *a posteriori* hata tahminleri bu iterasyon için geçerlidir. Ek olarak (5)'deki eşitsizlik Picard iterasyonunun yakınsaklık oranının basit daralmalar sınıfı içerisinde lineer olduğunu göstermektedir. Bu önemli özelliklere rağmen Teorem 8.1'in bir önemli dezavantajı da (1)'deki daralma koşulunun T operatörünü tüm X üzerinde sürekli olmaya zorlamasıdır. O zaman doğal olarak akla gelen ilk soru T 'nin sürekliliğini mecbur kılmayan bir daralma koşulunun olup olmadığıdır. Kannan 1968'de bu soruya olumlu bir cevap vermiştir. Kannan Teorem 8.1 için sürekli olmaya ihtiyacı olmayan bir genişleme teoremi ispat etmiştir. Kannan (1)'deki koşulu $0 < b < 1/2$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < b. [d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad (6)$$

olarak ifade etmiştir. Kannan teoreminin ardından, T üzerinde X 'in sürekliliğini gerektirmeyen çeşitli daralma tipi koşul sınıfları için sabit nokta teoremlerini elde etmeye yönelik birçok makale yayınlanmıştır. Bunlardan bazıları Rus (1979), Rus (1996) ve Taskovic (1986)'in çalışmaları olarak gösterilebilir. Ayrıca bunlardan biri aslında bir tür ikili Kanan sabit nokta teoremi olan Chatterjea'nın 1972'deki çalışması olarak da gösterilebilir. Bu çalışmadaki şartlar (6)'daki ile benzerdir: Chatterjea'nın teoreminde $0 \leq c < 1/2$ ve her $x, y \in X$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) < c. [d(x, Ty) + d(y, Tx)] \quad (7)$$

olarak ifade edilmektedir (Berinde ve ark., 2008).

Daralma şartlarından sırasıyla (1) ve (6)'nın en az (1) ve (7) kadar birbirinden bağımsız oldukları Rhoades'in 1977'deki çalışmasından bilinmektedir.

Zamfirescu 1972'de (1), (6) ve (7)'yi oldukça beklenmedik bir yolla birleştirerek çok ilginç bir sabit nokta teoremi elde etmiştir.

Teorem 8.2: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ operatörü her $x, y \in X$ ve a, b, c reel sayıları için $0 \leq a < 1$ ve $0 < b, c < 1/2$ sağlansın. Bu durumda aşağıdaki koşullar için;

$$(z_1) \quad d(Tx, Ty) \leq a. d(x, y)$$

$$(z_2) \quad d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

$$(z_3) \quad d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

T bir Picard operatörüdür (Zamfirescu, 1972).

Ciric 1974'de en genel daralma şartlarından biri olan ve hala bir Picard operatörünü sağlayan sonucu elde etti. $0 \leq h < 1$ olmak üzere

$$d(Tx, Ty) \leq \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \quad (8)$$

Uyarı 8.1:

(8) eşitsizliğini sağlayan bir eşleme genellikle *yarı daralma* olarak isimlendirilir. Ayrıca (1), (6), (7) ve $(z_1) - (z_3)$ şartlarının (8)'i sağladıkları da açıktır.

Daralmaya dayalı başka birçok sabit nokta teoremi vardır. En genel daralma tiplerinden biri de *zayıf daralmalar* olarak adlandırılmaktadır. Bu daralma tipi yukarıda bahsettiğimiz daralma operatörlerini (yarı daralmalar hariç; kısmen zayıf daralmalar sınıfına dahildir) içermektedir.

Tanım 8.1 (hemen hemen daralmalar):

(X, d) bir metrik uzay olsun. $\delta \in (0, 1)$ ve bazı $L \geq 0$ için $T: X \rightarrow X$ bir hemen hemen daralma operatörü veya (δ, L) – daralma olarak adlandırılır. Öyle ki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \quad (9)$$

(Berinde ve ark., 2008).

Uyarı 8.2:

Metrik uzaklığın simetrisinden dolayı hemen hemen daralma şartı (9) dolaylı olarak aşağıdaki ikiliyi içerir. Her $x, y \in X$ için biçimsel olarak $d(Tx, Ty)$ ve $d(x, y)$ nin sırasıyla $d(Ty, Tx)$ ve $d(y, x)$ ile değiştirilmesi sonucu

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty) \quad (10)$$

(9)'dan elde edilir.

Sonuç olarak, T 'nin hemen hemen daralma oluşunu kontrol edebilmek için (9) ve (10)'u kontrol etmek gereklidir.

Açıkçası herhangi bir basit daralma $\delta = a$ ve $L = 0$ ile (9)'u sağlar. Bu vesileyle T bir hemen hemen daralma operatörüdür ve tek bir sabit noktaya sahiptir (Berinde ve ark., 2008).

Berinde'nin 2004'deki çalışmasının ana sonuçları teorem 8.3 (bir varlık teoremi) ve teorem 8.4 (varlık ve teklik teoremi) aşağıda verilmiştir. Bu teoremlerin ana amacı teorem 8.1 ve teorem 8.2'yi *hemen hemen daralmalarla* ilgili literatürdeki diğer birçok ilişkili sonuçlara genişletmektir. Teorem 8.2'nin özünde bu teoremler *a priori ve a posteriori* hata payını da içeren sabit noktaya yaklaşım önermektedirler.

Teorem 8.3:

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir zayıf daralma olsun.

- 1) $Fix(T) = \{x \in X: Tx = x\} \neq \emptyset$,
- 2) Herhangi bir $x_0 \in X$ için (2) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu bir $x^* \in Fix(T)$ 'ye yakınsar,
- 3) Aşağıdaki tahminler (9)'daki δ sabiti ile sağlanır öyle ki;

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} d(x_0, x_1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta}{1-\delta} d(x_{n-1}, x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Berinde, 2004})$$

Uyarı 8.3:

1) Unutmayalım ki teorem 8.1 ve teorem 8.2 aslında sabit noktanın benzersizliğini zorlarsa da hemen hemen daralmalar tek bir sabit noktaya ihtiyaç duyarlar. Hatırlayacak olursak; $\{T^n x_0\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi her $x_0 \in X$ için yakınsak ve limiti T nin sabit noktalarına eşitse $T: X \rightarrow X$ operatörüne zayıf Picard operatörü (ZPO) denir (Rus, 1996). Bu nedenle teorem 8.1 geniş bir zayıf Picard operatörleri sınıfı sağlar.

2) Yukarıda ifade etmiş olduğumuz (9) koşulunun her $x \in X$ için Banach yörünge durumu olarak adlandırılan $d(Tx, T^2x) \leq ad(x, Tx)$ koşulunu sağladığını görmek kolaydır. Sabit nokta teoremleri bağlamında çeşitli yazarlar tarafından incelenen bu durum için temel referanslar Berinde'nin 2004 yılında yapmış olduğu çalışmada toplanmıştır. Bir hemen hemen daralmanın sabit noktasının benzersizliğini zorlamak mümkündür, bunun için Berinde'nin 2003 ve 2004 yılındaki çalışmaları incelenebilir. Ek bir daralma uygulayarak sonraki teoremde göstereceğimiz koşul (9)'a oldukça benzerdir (Berinde ve ark., 2008).

Teorem 8.4:

(X, d) bir metrik uzay ve $\theta \in (0, 1)$ için $T: X \rightarrow X$ hemen hemen bir daralma operatörü ve bazı $L_1 \geq 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d(x, y) + L_1 \cdot d(x, Tx) \quad (11)$$

dir. Şu takdirde

- 1) T operatörünün bir tek sabit noktası vardır yani $Fix(T) = \{x^*\}$.
- 2) Her $x^* \in X$ için (2) de verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu x^* noktasına yakınsar.
- 3) Bir *a priori* ve *a posteriori* hata tahmini

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} d(x_0, x_1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta}{1-\delta} d(x_{n-1}, x_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

ile verilir.

4) Picard iterasyonun yakınsaklık yarıçapı

$$d(x_n, x^*) \leq \theta \cdot d(x_{n-1}, x^*) \quad n = 1, 2, \dots$$

ile verilir (Berinde ve ark., 2008).

Uyarı 8.4:

Unutmayalım ki metrik uzaklığın simetrik olmasından dolayı (11) eşitsizliği her $x, y \in X$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$d(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d(x, y) + L_1 \cdot d(y, Ty) \quad (12)$$

Dolayısıyla, (9) ve (10) ikili koşullarının durumuna benzer şekilde, somut uygulamalarda (11) ve (12) koşullarının her ikisinin de sağlandığı kontrol edilmelidir.

Şimdi ise tek değerli hemen hemen daralmaların sürekliliğine değineceğiz. Aşağıdaki örnek hemen hemen daralmaların (veya yarı daralmaların da) sürekli olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 8.1:

$[0,1]$ doğal normla verilmiş bir birim aralık olsun. $x \in [0,1]$ ve $T1 = 0$ için bir $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ operatörü $Tx = \frac{2}{3}$ ile verilsin. O halde;

- i. $T, h \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ için (5) koşulunu sağlar.
- ii. $T, 1 > \delta > \frac{2}{3}$ ve $L \geq \delta$ için (9) koşulunu sağlar.
- iii. $x^* = \frac{2}{3}$ noktası T nin tek sabit noktasıdır.
- iv. T , (11) koşulunu sağlamaz.
- v. T sürekli değildir.

(Berinde ve ark., 2008).

Rhoades 1988'deki çalışmasında kendi benzersiz sabit noktalarında sürekli olan fakat X uzayının tamamında sürekli olmayan geniş bir daralma operatörü sınıfı ortaya koydu.

Berinde'nin 2004'teki çalışmasında hemen hemen daralmalar için sormuş olduğu soruya benzer bir soru üretmek mümkündür. Öyle ki; $Fix(T)$ sabit noktalar kümesi tek değerli değilse, bir hemen hemen daralma operatörü $Fix(T)$ nin herhangi bir noktasında sürekli midir? Olumlu cevap aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 8.5:

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir hemen hemen daralma operatörü olsun. O halde herhangi bir $p \in \text{Fix}(T)$ için T operatörü p noktasında süreklidir (Berinde ve ark., 2008).

İspat:

T bir hemen hemen daralma operatörü olduğundan bir $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ için (9) koşulunu sağlar. Teorem 8.1 den herhangi bir $x_0 \in X$ ve $n = 0,1,2, \dots$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu $x_{n+1} = Tx_n$ ile tanımlanır ve bir $p \in \text{Fix}(T)$ noktasına yakınsar.

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty} X$ de p noktasına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Ardından hemen hemen daralma koşulu $d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx)$ de $y := y_n$ ve $x := p$ olarak

$$d(Tp, Ty_n) \leq \delta d(p, y_n) + Ld(y_n, Tp) \quad n = 0,1,2, \dots$$

elde ederiz. Burada da $Tp = p$ alınabilir ki aşağıdaki denklik elde edilebilir.

$$d(Ty_n, Tp) \leq (\delta + L) \cdot d(p, y_n) \quad n = 0,1,2, \dots \quad (13)$$

Şimdi de (13) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ alırsak $Ty_n \rightarrow Tp$ elde ederiz. Bu da T nin p de sürekli olduğunu gösterir. p sabit noktası $\text{Fix}(T)$ de keyfi olarak seçilmiş olduğundan ispat tamamlandı. ■

$\delta \in (0,1)$ aralığında bir sabit ve bazı $L \geq 0$ için bir operatör her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + L \cdot \min\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \quad (14)$$

koşulunu sağlıyorsa bu operatöre kaba(katı) hemen hemen daralma denir (Babu ve ark., 2008).

Kaba hemen hemen daralma operatörü Babu ve ark. 2008 yılında yapmış oldukları çalışmada Berinde'nin 2004'teki çalışmasında sormuş olduğu açık soruya cevaben ele alındı ve üzerinde çalışıldı.

(9) ile verilen hemen hemen daralma koşulu ile (11) ile verilen sabit noktanın tekliği koşulunun kombinasyonundan meydana gelen bir koşulu olarak (14) koşulu ile sabit noktanın benzersizliğini sağlayan bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir.

Bir kaba hemen hemen daralma operatörünün bir hemen hemen daralma operatörü olduğu açıktır. Yani o (9) koşulunu ve aynı zamanda sabit noktanın tekliği anlamına gelen (11) koşulunu da sağlar. Ancak bunun tersi genellikle doğru değildir.

Teorem 8.5 ile kaba hemen hemen daralma operatörlerinin sınıfı için aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 8.1:

(X,d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ genelleştirilmiş hemen hemen daralma operatörü olsun. Bu operatör aynı zamanda (14) koşulunu da sağlasın ve $Fix(T) = \{p\}$ olsun. O halde T operatörü p de süreklidir (Berinde ve ark., 2008).

İspat:

T bir kaba hemen hemen daralma operatörü olduğundan $\delta \in (0,1)$ aralığında bir sabit ve bazı $L \geq 0$ için (1) koşulu sağlanır. Babu ve ark. 2008'deki çalışmalarında da ifade etmiş oldukları teorem 2.9'dan dolayı T nin tek (benzersiz) bir sabit noktası vardır o da p olsun.

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ X de p noktasına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Daha sonra (14) de verilen kaba hemen hemen daralma koşulunda $y := y_n$ ve $x := p$ alarak

$$d(Tp, Ty_n) \leq \delta \cdot d(p, y_n)$$

Elde ederiz. $\min\{d(p, Tp), d(y_n, Ty_n), d(x, Ty_n), d(y_n, Tp)\} = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik

$$d(Ty_n, Tp) \leq \delta \cdot d(y_n, p), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

eşitsizliğine denktir. Şimdi (15) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ alırsak $Ty_n \rightarrow Tp$ elde ederiz. Bu da T nin p de sürekli olduğunu gösterir. ■

Şimdi de küme değerli durumlarını inceleyelim.

Bir küme değerli $T: X \rightarrow P_T(X)$ operatörüne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p) = 0 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} h(Tx_n, Tp) = 0$$

olması durumunda bir p noktasında süreklidir denir (Berinde ve ark., 2004).

$T: X \rightarrow P_T(X)$ bir küme değerli operatör olsun. Bir $x \in X$ elamanı için $x \in Tx$ oluyorsa bu eleman T operatörünün bir sabit noktası olarak adlandırılır (Berinde ve ark., 2004). Öyle ki;

$$Fix(T) = \{x \in X, x \in Tx\}.$$

Aşağıdaki teorem herhangi bir genelleştirilmiş kaba hemen hemen daralma operatörünün sabit noktada sürekli olduğunu belirtmektedir.

Teorem 8.5:

(X,d) bir tam metrik uzay, her $x, y \in X$, $\theta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ için $T: X \rightarrow P_T(X)$ bir genelleştirilmiş küme değerli (θ, L) – hemen hemen daralma operatörü,

$$h(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d(x, y) + L \cdot \min\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \quad (16)$$

olmak üzere ve $Fix(T) \neq \emptyset$ ve herhangi bir $p \in Fix(T)$ için T, p noktasında süreklidir (Berinde ve ark., 2008).

İspat:

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ X de p noktasına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. Daha sonra (16) da verilen genelleştirilmiş küme değerli hemen hemen daralma koşulunda $y := y_n$ ve $x := p$ olarak

$$d(Tp, Ty_n) \leq \delta \cdot d(p, y_n) + L \cdot d(y_n, Tp), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak elde ettiğimiz bu eşitsizlik $Tp = p$ alınırsa aşağıdaki eşitsizliğe denk olur. Şöyle ki;

$$d(Ty_n, Tp) \leq (\delta + L) \cdot d(y_n, p), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

elde edilir. Şimdi (17) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ alırsak $Ty_n \rightarrow Tp$ elde ederiz. Bu da T nin p de sürekli olduğunu gösterir. ■

9. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde literatürde mevcut bulunan küme değerli operatörler için Nadler'in sabit nokta teoremi üzerine ifade edilmiş olan bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. Küme değerli operatörlerin sabit noktalarının varlığını araştırmak için bir küme değerli daralma operatörü üzerine konulan çeşitli koşullar üzerinde durulmuştur. Bunun için farklı araştırmacıların benzer metotlarla ortaya koymuş oldukları sonuçlar üzerinde çalışılmıştır. Metot ve araç olarak Banach daralma koşulu, Hausdorff metriği ve Picard iterasyonu kullanılmıştır.

Tek değerli operatörler için daraltma koşulunu sunan Banach daraltma teoreminin küme değerli versiyonu olarak da düşünebileceğimiz Nadler'in teoreminin farklı genişlemelerinin yapılabileceği anlaşılmıştır. Ayrıca bu çalışma ile küme değerli operatörlerin sabit nokta genellemeleri ve lineer olmayan (nonlinear) analiz için farklı yaklaşımların bazı problem durumların çözümünü aydınlatabileceği sonucuna varılmıştır. Bu çalışmamızda bu mevzunun küme değerli operatörler için detayları incelenmiş, çeşitli sonuçlar tetkik edilmiş ve örnek durumlar incelenmiştir. Daralma, yarı daralma, genişleyebilen ve genişleme olmayan daralma, hemen hemen daralma gibi kavramlar küme değerli operatörler için ele alınmış ve yine küme değerli operatörler için sabit noktaları ve süreklilikleri araştırılmıştır.

Bu çalışmada küme değerli operatörler ve küme değerli operatörlerin sabit noktaları için konuyla ilgili birçok farklı kaynak incelenmiştir. Ayrıca küme değerli operatörler ve sabit noktaları için farklı genelleme teoremleri ve sonuçların bir araya getirilmesi amaçlanmıştır. Dolayısıyla bu tezin ileride konu ile ilgili yapılabilecek benzer araştırmalara da yardımcı olabileceği düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Abkar, A., Eslamian, M., 2010. Fixed point theorems for Suzuki generalized nonexpansive multivalued mappings in Banach spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, **Article ID 457935**: 1–10.
- Afif, B. A., O'Regan, D., 2016. *Topological Fixed Point Theory for Singlevalued and Multivalued Mappings and Applications*. Springer, Switzerland. 194.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu D.R., 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Series Topological Fixed Point Theory and Its Applications*. Springer, New York, Vol: 6. 373.
- Aksoy, A.G., Khamsi, M.A., 1990. *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory*. Springer, Verlag. 317.
- Babu, G. V. R., Sandhya, M. L., Kameswari, M. V. R., 2008. A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions, *Carpathian J. Math.*, **24** (1): 8 – 12.
- Banach, S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fund. Math.*, **3**: 133- 181.
- Berinde, V., 2003. Approximating fixed points of weak phi-contractions. *Fixed Point Theory 4* (2): 131-142
- Berinde, V., 2004. Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum 9* (1): 43-53.
- Berinde, V., Pacurar, M., 2008. Fixed points and continuity of almost contractions. *Fixed Point Theory 9* (1): 23- 34.
- Berinde, V., Pacurar, M., 2013. The role of the Pompeiou Hausdorff metric in fixed point theory. *Creative Mathematics and Informatics*, **22** (13): 143–150.
- Boyd, D. W., Wong, J. S., 1969. On nonlinear contractions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20**: 458-469.
- Brouwer, L. E. J., 1912. Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **71**: 97-115.
- Bridson, M., Haefliger, A., 1999. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 669.
- Bryant, V.W., 1968. A remark on a fixed point theorem for iterated mappings. *Amer. Math. Monthly*, **75**: 399-400.
- Chatterjea, S.K., 1972. Fixed-point theorems, *C.R. Acad. Bulgare Sci.*, **25**: 727- 730
- Ciric, Lj. B., 2009. Multi-valued nonlinear contraction mappings. *Nonlinear Anal.* **71**: 2716–2723.
- Ciric, Lj. B., 1972. Fixed points for generalized multi-valued contractions. *Mat. Vesnik 9* (24): 265–272.
- Cross, R., 1998. *Multivalued Linear Operators*. Marcel Dekker, New York. 353.
- Daffer, P.Z., Kaneko, H., 1995. Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **192**: 655–666.
- Dhompongsa, S., Inthakon, W., Kaewkhao, A., 2009. Edelstein's method and fixed point theorems for some generalized nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* **350**: 12-17.
- Dhompongsa, S., Yingtaweesittikul, H., 2009. Fixed points for multivalued mappings and the metric completeness. *Fixed Point Theory Appl.*, **Article ID 972395**: 1- 15.
- Doric, D., Lazovic, R., 2011. Some Suzuki type fixed point theorems for generalized multivalued mappings and applications. *Fixed Point Theory Appl.* **40**. Erişim Adresi: <http://dx.doi.org/10.1186/1687-1812-2011-40>. Erişim tarihi: 28/08/2020.
- Dugundji, J., Granas, A., 2003. *Fixed Point Theory*. Springer-Verlag, Berlin. 690.

- Eldestein, M., 1962. On fixed and periodic points under contractive mappings. *J. London Math.*, **37**: 74-79.
- Garcia-Falset, J., Lorens-Fuster, E., Suzuki, T., 2011. Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **375**: 185–195.
- Goebel, K., 1975. On a fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings, *Annal. Univ. Marie Curie-Sklodowska*, **29**: 69–72.
- Gordji, M. E, Baghani, H., Khodaei, H., Ramezani, M., 2010. A Generalization of Nadler's Fixed Point Theorem. *J. Nonlinear Sci Appl.*, **3** (2): 148- 151.
- Górniewicz, L., 2006. *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*. Spinger, Poland. 539.
- Hardy, G. E., Rogers, T. D., 1973. A generalization of Fixed-point Theorem of Reich, *Canad. Math. Bull.*, **16**: 201-206.
- Hu S., Papageorgiou, N. S., 1997. *Handbook of Multivalued Analysis*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht - Netherlands. 980.
- Kaewcharoen, A., Panyanak, B., 2011. Fixed point theorems for some generalized multivalued nonexpansive mappings. *Nonlinear Analysis* **74**: 5578–5584.
- Kato, T., 1966. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, New York. 623.
- Khine, O.O., 2019. An Extension of Nadler's Fixed Point Theorem, *Yangon Univ. of Edu. Res. Jou. Vol. 9* (1).
- Kikkawa, M., Suzuki T., 2008a. Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces. *Nonlinear Anal.*, **69**: 2942–2949.
- Kikkawa, M., Suzuki T., 2008b. Some similarity between contractions and Kannan mappings. *Fixed Point Theory Appl.*, **Article ID 649749**: 1- 8.
- Kirk, W.A., 1986. Nonexpansive mappings in product spaces, set-valued mappings and k-uniform rotundity. *Amer. Math. Soc. proc. Symp. Pure Math, Nonlinear Analysis* **45**, 251–64.
- Kirk, W.A., S. Massa, 1990. Remarks on asymptotic and Chebyshev centers. *Houston J. Math.*, **16**: 364–375.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Toronto - Canada. 703.
- Lami Dozo, E., 1973. Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition. *Proc. Amer. Math. Soc.* **38**: 286–292.
- Lim, T.C., 1974. A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**: 1123–1126.
- Meir, A., Keeler E., 1969. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **28**: 326–329.
- Mizoguchi, N., Takahashi W., 1989. Fixed point theorems for multi-valued mappings on complete metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **141**: 177–188.
- Mot, G., Petrusel A., 2009. Fixed point theory for a new type of contractive multivalued operators. *Nonlinear Anal.*, **70**: 3371–3377.
- Nadler, S. B. Jr., 1969. Multivalued contraction mappings. *Pacific J. Math.* **30** (2): 475 – 488.
- Naimark, M.A., 1968. *Linear Differential Operators, Part II, Linear Differential Operators in Hilbert Space*. Ungar Publ. Co., New York.
- Nizami, M., 2016. *Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz*. Seçkin Yay., Ankara. 479.
- Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**: 591-597.

- Petrusel, A., 2001. Generalized Multivalued Contractions. *Nonlinear Analysis*, **47**: 649-659.
- Petrusel, A, Rus, I.A., 2007. Well – Posedness of the fixed point problem for multivalued operators. *Applied Analysis and Differential Equations, World Scientific*: 295-306.
- Petrusel, A., Rus, I.A., 2007. J.-C. Yao, Well-posedness in the generalized sense of the fixed point problems for multivalued operators. *Taiwanese J. Math.*, **11**: 903-914.
- Petrusel, A., 2002. *Operatorial Inclusions*, House of the Book of the Science, Cluj-Napoca.
- Pompeiu, D., 1905. Sur la continuite des fonctions de variables complexes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **7**: 264–315.
- Popescu, O., 2013. A new type contractive multivalued operators. *Bull Sci. Math.*, **137**: 30-44.
- Popescu, O., 2009. Two fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric space. *Cent. Eur. J. Math.*, **7** (3): 529–538.
- Popescu, O., 2011. Two generalizations of some fixed point theorems. *Math. Appl.*, **62** (10): 3912-3919.
- Rakotch, E., 1962. A Note on Contractive Mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13**: 459-465.
- Reich, S., 1971. Some remarks on concerning contractive mappings. *Canad. Math. Bull.*, **14**: 121-124.
- Reich, S., 1972. Fixed points of contractive functions. *Boll. Unione Mat. Italy*, **5**: 26-42.
- Reich, S., 1983. Some problems and results in Fixed point theory. *Contemporary Mathematics*, **21**: 179-187.
- Rhoades, B. E., 1977. A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. *Amer. Math. Soc.*, **226**: 257-290.
- Rhoades, B.E., 1988. Contractive definitions and continuity. *Contemporary Mathematics*, **72**: 233-245.
- Rus, I.A., 1975. Fixed point theorems for multivalued mappings in complete metric spaces. *Math. Jpn.*, **20**: 21-24.
- Rus, I.A., 1979. *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*. Editura Dacia, Cluj-Napoca.
- Rus, I. A., 1993. Weakly Picard mappings. *Math. Univ. Carolinae*, **34** (4): 769-773.
- Rus, I.A., 1996. *Picard operator and applications*. Babes-Bolyai Univ.
- Rus, I.A., 2001. *Generalized Contractions and Applications*. Cluj University Press, Cluj-Napoca.
- Rus, I.A., Petrusel, A., 2003. Data dependence of the fixed point set of some multivalued weakly Picard operators. *Nonlinear Anal.*, **52**: 1947–1959.
- Schauder, J., 1930. Der Fixpunktsatz in Functional rÄumen. *Studia Math.*, **2**: 171-180.
- Semenov, P. V., 2002. Fixed points of multi-valued contractions. *Funct. Anal. Appl.*, **36** (2): 159-161.
- Shiau, C., Tan, K. K., Wong, C. S., 1975. Quasi-nonexpansive multi-valued maps and selections. *Fund. Math.*, **87**: 109-119.
- Sims, B., 1982. Ultra-Techniques in Banach Space Theory. *Queen’s Papers in Pure and Appl. Math.*, **60**.
- Singh, S. L., Mishra, S. N., 2010. Coincidence theorems for certain classes of hybrid contractions, *Fixed Point Theory Appl.*, **Article ID 898109**: 1-14.

- Song, Y., Wang H., 2009. Convergence of iterative algorithms for multivalued mappings in Banach spaces. *Nonlinear Anal. TMA*, **70**: 1547-1556.
- Suzuki, T., 2005. Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces. *Fixed Point Theory Appl.*, **Article number: 685918**: 103-123.
- Suzuki, T., 2008a. A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**: 1861-1869.
- Suzuki, T., 2008b. Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **340**:1088-1095.
- Taskovic, M., 1986. Osnove teorije fiksne tacke (Fundamental Elements of Fixed Point Theory). *Matematicka Biblioteka 50*, Beograd.
- Van Der Walt, T., 1963. Fixed and almost fixed points. *Amsterdam Mathematisch Centrum*. Amsterdam, Netherlands.
- Wisnicki, A., Wosko, J., 2007. Banach ultrapowers and multivalued nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **326**: 845-857.
- Yüksel, Ş., 2006. *Genel Topoloji*. Eğitim Kitabevi, Konya. 479.
- Zamfirescu, T., 1972. Fix point theorems in metric spaces. *Arch. Math. (Basel)*, **23**: 292-298
- Zeidler, E., 1984. *Nonlinear Functional Analysis and its Application*. Springer-Verlag. 1007.

ÖZ GEÇMİŞ

İlk ve orta öğreniminin ardından 2003 yılında Van Alpaslan Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun oldu. 2008 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden mezun oldu. 2019 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Millî Eğitim Bakanlığı bünyesindeki bir devlet okulunda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.



VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 26/07/2022

Tez Başlığı / Konusu:

KÜME DEĞERLİ OPERATÖRLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN BAZI SONUÇLARI

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 73 sayfalık kısmına ilişkin, 26/07/2022 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %15 (yüzde onbeş) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Materyal ve yöntem hariç,
- Kaynaklar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: Muhsin ENGİN

Öğrenci No: 19910001228

Anabilim Dalı: Matematik Anabilim Dalı

Programı:

Statüsü: Yüksek Lisans

Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Prof. Dr. Cesim TEMEL

ENSTİTÜ ONAY
UYGUNDUR