

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DERECELİ HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ecem ASLANTAŞ

1502010016

Anabilim Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Songül ESİN

HAZİRAN 2022

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DERECELİ HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ecem ASLANTAŞ

1502010016

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Songül ESİN

Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Ayten KOÇ

Dr. Öğr. Üyesi Alper ÜLKER

HAZİRAN 2022

ÖNSÖZ

Başta, bu konuyu uygun görüp çalışmama vesile olduğu, tez dönemi boyunca yoğun çalışma temposuna rağmen ilgiyle ve özenle karşıladığı için değerli danışmanım Prof. Dr. Songül ESİN'e içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisansa başlama sürecimde varlıklarıyla destek olup, güzel enerjileriyle yanımda olan aileme ve yakın dostlarıma teşekkür etmek isterim. Son olarak bugüne kadar yaşadığım her olumsuzlukta biraz daha beni ben yapan, daha iyi bir insan olmamı sağlayan tecrübelere ve zamanın gösterdiklerine de ne kadar şükran duysam az kalacaktır.



Matematığın Evrenine,

İçindekiler

| | |
|---|------|
| SEMBOL LİSTESİ | v |
| ÖZET | vi |
| ABSTRACT | viii |
| 1 Giriş | 1 |
| 1.1 Dereceli Halkalar | 1 |
| 2 Yerelleştirme, Maksimal ve Asal Homojen İdealler | 7 |
| 2.1 Dereceli Olmayan Halkalarda Yerelleştirme | 7 |
| 2.2 Dereceli Halkalarda Yerelleştirme | 8 |
| 3 Dereceli Noetherian ve Artinian Halkalar | 22 |
| 3.1 Noetherian Halkalar | 22 |
| 3.2 Artinian Halkalar | 28 |
| 3.3 Dereceli Noetherian ve Artinian Halkalar | 30 |
| 4 Sonuç | 33 |
| | 34 |
| Kaynakça | 34 |

SEMBOL LİSTESİ

| | |
|------------------------------------|---|
| $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ | : R_i halkalarının dolaysız toplamı |
| $\text{der}(x)$ | : x elemanının derecesi |
| $R[X]$ | : R halkası üzerinde katsayılı polinomlar halkası |
| $R_0[X]$ | : R halkası üzerinde 0.dereceden polinomlar halkası |
| $R[X, X^{-1}]$ | : R halkası üzerinde Laurent polinomlar halkası |
| R/I | : R halkasının I ideali ile üretilen bölüm halkası |
| $\text{Çek}(\phi)$ | : ϕ homomorfizmasının çekirdeği |
| $\text{Gör}(\phi)$ | : ϕ homomorfizmasının görüntü kümesi |
| $\text{Ann}J$ | : J idealinin sıfırlayanı |
| $S^{-1}R$ | : R halkasının S ye göre yerelleştirmesi |
| \mathcal{J}^c | : \mathcal{J} idealinin kısıtlanması |
| \mathcal{I}^e | : I idealinin genişlemesi |
| \sqrt{I} | : I idealinin radikali |
| $J^h(R)$ | : R homojen dereceli halkanın Jacobson radikali |
| $\text{Min}(I)$ | : I idealini içeren en küçük (minimal) asal ideallerinin kümesi |
| I^* | : I idealinin homojen elemanlarıyla üretilen ideal |
| $\mathcal{I}(R)$ | : R halkasının tüm ideallerinin kümesi |
| $\text{Spec}(R)$ | : R halkasının asal ideallerinin kümesi |
| $A(I)$ | : I ayrışabilir idealine ilişkin asal idealler kümesi |
| (a_1, a_2, \dots, a_n) | : a_1, a_2, \dots, a_n ile üretilen ideal |
| $N(R)$ | : R Artinian halkasının nil radikali |

Enstitüsü : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Songül ESİN

Tez Türü ve Tarihi : Yüksek lisans - Haziran 2022

KISA ÖZET

DERECELİ HALKALAR

Ecem Aslantaş

Ele alınan tez çalışmasında R halkası aksi belirtilmediği sürece değişmeli ve birimli kabul edilecektir. Bu tezin amacı değişmeli bir halkanın üzerinde incelenilen homomorfizma, ideal; özel olarak maksimal ve asal idealerin \mathbb{Z} -dereceli halka üzerindeki karşılıklarının incelenmesidir. Bu incelemeyi yapabilmek için de öncelikle temel halka tanımı ve özellikleri gerekli olduğu yerde detayıyla verilmiştir. Değişmeli bir halkada "payda" tanıtmak için yerelleştirme (lokalizasyon) kullanılır. Payda tanımlama yapılırken değişmeli halka tamlık bölgesi alınır ve kesir cismi oluşturulur. Bu adımlar dereceli halkalarda da yapılabilir. Tezin ikinci bölümünde öncelikle dereceli olmayan halkalarda yerelleştirme ve daha sonra dereceli halkalarda yerelleştirme verilmiştir. Özellikle \mathbb{Z} tam sayılar halkasında $\{0\}$ idealinin maksimal ideal olmadığı bilinmektedir. K bir cisim olmak üzere $\{0\}$ idealinin $K[X, X^{-1}]$ dereceli halkasında maksimal homojen bir ideal olduğu gösterilmiştir. Ayrıca herhangi bir idealin radikali kullanılarak asalımsı ayrışım için birinci teklik teoremine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Noetherian ve Artinian halka kavramları verilmiştir. Noetherian ve Artinian halka kavramları değişmeli veya değişmeli olmayan bir halkanın ideal yapısını basitleştirdiğinden halka teorisinde önemlidir. Artan zincir koşulunu sağlayan halkaya Noetherian halka denir ve karakterizasyonu ise her

ideali sonlu üretilmiş halka olmasıdır. Noetherian ve Artinian halkaların incelemesi lisans düzeyinde tam olarak yapılmadığı düşünülerek tezde bu bilgiler detaylı olarak verilmiştir. Tezin son kısmında ise dereceli Noetherian ve Artinian halkadan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler : homojen ideal, radikal, yerelleştirme, asalımsı ideal, nil radikal, homojen asalımsı ayrışım, Noetherian halka, Artinian halka.



University : İstanbul Kültür University

Institute : Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics and Computer Science

Programme : Mathematics and Computer Science

Supervisor : Prof. Dr. Songül ESİN

Degree Awarded and Date : MS - June 2022

ABSTRACT

GRADED RINGS

Ecem Aslantaş

In the thesis study, R ring will be considered commutative and identity unless otherwise stated. The aim of this thesis is to examine the homomorphism, ideal; especially maximal and prime ideals on \mathbb{Z} -graded ring, which is examined on a commutative ring. In order to be able to carry out this examination, first of all, the basic ring definition and properties are given in detail where necessary. Localization is used to introduce denominator in a commutative ring. While defining the denominator, commutative ring is taken integral domain and fraction field is formed. These steps can also be done in graded rings. In the second chapter of the thesis, firstly localization in non-graded rings and then localization in graded rings are given. It is known that the ideal $\{0\}$ is not a maximal ideal, especially in the ring \mathbb{Z} integers. It has been shown that ideal of $\{0\}$, where K is a field, is a maximal homogeneous ideal in the graded ring of $K[X, X^{-1}]$. In addition the first uniqueness theorem for primary decomposition is given using radical of any ideal. In the third chapter, Noetherian and Artinian ring notions are given. The Noetherian and Artinian ring notions are important in ring theory as they simplify ideal structure of a commutative or

non-commutative ring. The ring that assure increasing chain condition is called Noetherian ring, its characterization is that every ideal is a finitely produced ring. Considering that examination of Noetherian and Artinian rings is not fully done at the undergraduate level, this information is given in detail in the thesis. In the last part of the thesis, graded Noetherian and Artinian rings are mentioned.

Keywords : homogeneous ideal, radical, localization, nil radical, primary ideal, homogeneous primary decomposition, Noetherian ring, Artinian ring.



Bölüm 1

Giriş

1.1 Dereceli Halkalar

Tanım 1.1.1. R bir halka olsun. R halkası, $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ eşitliğini sağlayan R_i ($i \in \mathbb{Z}$) alt gruplarına sahip ve her $i, j \in \mathbb{Z}$ için $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ oluyorsa R halkasına \mathbb{Z} -dereceli halka denir.

$R_i R_j$, $k=1, \dots, t$ için $r_{k_i} \in R_i$, $s_{k_j} \in R_j$ olmak üzere

$$r_{1_i} s_{1_j} + r_{2_i} s_{2_j} + \dots + r_{t_i} s_{t_j}$$

biçiminde ifade edilen elemanların kümesidir.

Bir \mathbb{Z} -dereceli R halkası olduğu varsayalım. R nin her r elemanı $r = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i$ şeklinde tek türlü bir temsile sahiptir ve bu toplam sıfırdan farklı terimleriyle sonlu sayıdadır.

R_i nin sıfırdan farklı elemanlarına i dereceli homojen elemanlar denir. Sıfır derecesi keyfi olarak tanımlandığında; $\{0\}$ elemanının tüm dereceleri homojendir (her $i \in \mathbb{Z}$ için $0 \in R_i$ olur) ve r_i elemanı i dereceli r nin homojen bileşenidir.

Sırasıyla i ve j dereceli olan r ve s , homojen elemanlar ise $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ olur. Dahası her $i, j \in \mathbb{Z}$ için rs , $(i+j)$ dereceli homojen bir elemandır.

Herhangi bir R halkası verildiğinde,

$$i \neq 0 \text{ olmak üzere } R_0 = R \text{ ve } R_i = 0 \text{ yerine konularak}$$

R üzerinde \mathbb{Z} -dereceli aşıkâr bir halka elde edilir.

Örnek 1.1.2. R bir halka olsun. R üzerinde, n bilinmeyenli $R[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkası \mathbb{Z} -dereceli bir halkadır.

$R[X_1, \dots, X_n]$ de her f elemanı; $f_j, \{0\}$ veya j dereceli olmak üzere

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_j + \dots$$

olacak şekilde sonlu toplam biçiminde tek türlü halde yazılabilir. Böylelikle homojen polinomlar bir toplamsal gruptur. Buradan

$$\forall i, j \in \mathbb{Z} \text{ için } R_i R_j \subseteq R_{i+j} \text{ ve } i < 0 \text{ ise } R_i = (0) \text{ olmak üzere } R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$$

elde edilir.

Teorem 1.1.3. R , \mathbb{Z} -dereceli bir halka olsun. R nin birim elemanı sıfır dereceli homojen elemandır.

Kanıt. Birim elemanı $1_R = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ olan homojen elemanların bir toplamı olarak yazılsın. Ayrıca b, j dereceli homojen eleman olarak alınsın. Daha sonra $b = ba_0$ olur. Fakat her eleman homojen elemanların bir toplamıdır. Dolayısıyla her $r \in R$ için $r = ra_0$ dir. Özellikle $1_R = 1_R a_0 = a_0$ elde edilir. \square

Sonuç 1.1.4. R_0, R nin bir alt halkasıdır.

Tanım 1.1.5. R , \mathbb{Z} -dereceli bir halka olsun. Eğer S, R nin bir alt halkası ve $S_i = S \cap R_i$ için $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ ise $S \subseteq R$, R nin \mathbb{Z} -dereceli bir alt halkasıdır. Bu koşullarda, $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$, \mathbb{Z} -dereceli bir halka yapısını verir.

Tanım 1.1.6. R ve R' , \mathbb{Z} -dereceli halkalar olarak verilsin. $\phi : R \rightarrow R'$ bir halka homomorfizması, her $i \in \mathbb{Z}$ için $\phi(R_i) \subseteq R'_i$ sağlanıyor ise bu ϕ homomorfizmasına homojen (veya dereceli) homomorfizma denir.

Lemma 1.1.7. R ve R' , \mathbb{Z} -dereceli bir halka olsun. $\phi : R \rightarrow R'$ bir homojen homomorfizma ise $\text{Gör}(\phi), R'$ halkasının \mathbb{Z} -dereceli bir alt halkasıdır.

Kanıt. $R = \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ olduğundan, $\phi(R) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(R_i)$ bulunur. Açıktır ki $\phi(R_i), \phi(R) \cap R'_i$ ye eşit olduğundan $S' = \phi(R), R'$ nin dereceli bir alt halkasıdır. \square

Tanım 1.1.8. Herhangi bir $r \in I$ ise r nin tüm homojen bileşenleri I ya ait olur. R halkasının \mathbb{Z} -dereceli bir ideali R nin homojen bir ideali olarak tanımlanır.

Örnek 1.1.9. (i) R halkası ve $m \in \mathbb{N}$ alınsın. R üzerinde, n bilinmeyenli \mathbb{Z} -dereceli $R[X_1, \dots, X_n]$ halkasının $(X_1, \dots, X_n)^m$ ideali homojen idealdir, çünkü

$$(X_1, \dots, X_n)^m = \{f \in R[X_1, \dots, X_n] : k \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } f_m, f_{m+1}, \dots, f_{m+k} \text{ lardaki}$$

$$f_i \text{ ler derecesi } \{0\} \text{ ya da } i \text{ dereceli olmak üzere } f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_{m+k}\}$$

$(X_1, \dots, X_n)^m$ elemanının her bir homojen bileşeni $(X_1, \dots, X_n)^m$ ye aittir.

(ii) $Q[X_1, X_2]$ de $I = (X_1 - 1, X_2 - 2)$ ideali homojen değildir, çünkü $X_1 - 1 \in I$ fakat $1 \notin I$ dir.

Lemma 1.1.10. (i) R, R' \mathbb{Z} -dereceli halkalar olsun. $\phi : R \rightarrow R'$ bir homojen homomorfizma ise $\text{Çek}(\phi)$, R halkasının bir idealidir.

(ii) I , \mathbb{Z} -dereceli halkanın homojen ideali ve $\varphi : R \rightarrow R/I$ doğal homomorfizma ise $R/I = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi(R_i)$ ayrışımına göre \mathbb{Z} -dereceli halkadır ve $\varphi : R \rightarrow R/I$ homojen idealleri arasında birebir eşleme vardır.

Kanıt. (i) R , \mathbb{Z} -dereceli halka olduğundan, $i \in \mathbb{Z}$ ve $r_i \in R_i$ olacak şekilde $r = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i \in \text{Çek}(\phi)$ seçilebilir. Ayrıca ϕ homojen homomorfizma ve R' , \mathbb{Z} -dereceli halka olduğundan;

$$\phi(r) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(r_i) \text{ ve } \phi(r_i) \in R'_i$$

olur. İlk olarak $r \in \text{Çek}(\phi)$ den $\phi(r) = 0$ dir. Yani her $i \in \mathbb{Z}$ için $\phi(r_i) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $r_i \in \text{Çek}\phi$ elde edilir.

(ii) $f : R \rightarrow S$ bir homomorfizma,

$S = R/I$ ve $S_i = \varphi(R_i)$ olsun. Her $i \in \mathbb{Z}$ için $R_i < R$ ve $\varphi(R_i) < S$ dir.

S_i ler S in alt grubu olmak üzere,

$$S_i \neq \emptyset, a, b, a - b \in S_i, ab^{-1} \in S_i \text{ (çarpma işlemine göre)}$$

dir ve $r, s \in R, a \in S$ olmak üzere $a = \varphi(r), b \in S$ ise $b = \varphi(u)$ elde edilir.

Daha sonra $r = \sum r_i, r_i \in R_i$ ve $u = \sum u_i, u_i \in R_i$ olacak şekilde

$$a = \varphi(r) = \sum \varphi(r_i) \text{ ve } b = \varphi(u) = \sum \varphi(u_i)$$

elde edilir.

$$a - b = \sum \varphi(r_i - u_i), t_i = r_i - u_i \in R_i$$

dir. Buradan $a-b = \sum \varphi(t_i)$ dir. Böylelikle $S = R/I$, $S_i = \varphi(R_i)$ olur. S in \mathbb{Z} -dereceli halka olduğu gösterilmelidir. Daha sonra $R = \sum_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ ise φ halka homomorfizması için $\varphi(R) = S = \sum_{i \in \mathbb{Z}} S_i$, $\varphi(R_i) = S_i$ ve $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ olduğundan $\varphi(R_i R_j) \subseteq \varphi(R_{i+j})$ olur.

Dolayısıyla,

$$\varphi(R_i)\varphi(R_j) \subseteq \varphi(R_{i+j}) \text{ ve } S_i S_j \subseteq S_{i+j}$$

elde edilir. Gösterilecek olan $S = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S_i$ olmasıdır. Hemen hemen her i için $s_i = 0$ ve $\sum s_i = 0$ olacak şekilde $s_i \in S_i$ olsun. Her $i \in \mathbb{Z}$ için $s_i = 0$ olduğu gösterilmelidir ve $r_i \in R_i$, $\varphi(r_i) = s_i$ seçilsin. Devamında $S_i = \varphi(R_i)$ sağlanması mümkündür. $s_i = 0$ iken $r_i = 0$ olsun. Hemen hemen her i için,

$$\begin{aligned} r = \sum r_i \in R &\Rightarrow \varphi(r) = \sum \varphi(r_i) \\ &\varphi(r) = \sum s_i = 0_s \end{aligned}$$

olur. Daha sonra $\varphi(r) = 0_R + I \Rightarrow r \in I$ dir. Buradan $0_{R/I} = x + I \in R/I$ ve $x + I = 0 + I \Rightarrow x \in I$ elde edilir. I homojen ideal, $r_i \in I$ ve $s_i = \varphi(r_i) = 0_s$ yazılır. I_R , R nin tüm ideallerinin kümesi olarak alınsın. Böylece $I_{R/I}$, R/I nin tüm ideallerinin kümesi olarak ifade edilsin. Şu şekilde bir dönüşümün;

$$\phi : J \in I_R : J \supseteq I \rightarrow I_{R/I}$$

$J \rightarrow J/I$ birebir ve örten olduğu bilinmektedir. ϕ ve tersi içerme bağıntılarıyla korunur. Bu $i=1,2$ ve $J_1, J_2 \in I_R$ için $J_i \supseteq I$ elde edilir.

$$J_1/I \subseteq J_2/I \text{ ise } J_1 \subseteq J_2$$

bulunur. Bir önceki ispattan ve yukarıdaki ifadeden ispat tamamlanır. \square

Teorem 1.1.11. \mathbb{Z} -dereceli R halkasının bir I idealinin homojen olması için gerek ve yeter koşul I idealinin homojen elemanlar tarafından üretilmesidir.

Kanıt. (\Rightarrow) I nin homojen ideal olduğu varsayılınsın. Eğer $\{r^{(\alpha)}\}$, I idealini üretir ise $r^{(\alpha)}$ nin tüm $r_i^{(\alpha)}$ homojen bileşenleri I idealine aittir. Açıktır ki bu homojen bileşenler I idealini üretir.

(\Leftarrow) Bir I idealinin $\{s^\lambda\}$ homojen elemanları tarafından üretildiği varsayalım. I idealinde herhangi bir r elemanı ve $\{r_i\}$, r nin tüm homojen elemanlarının kümesi olarak alınsın. Buradan $p^{(\lambda)} \in R$ olmak üzere $r = \sum_\lambda p^{(\lambda)} s^{(\lambda)}$ dir. Toplamdaki terimler sonlu sayıda ve sıfır içermez. Daha sonra $p^{(\lambda)}$ nin homojen bileşenlerinin ayrışımı $p^{(\lambda)} = \sum p_i^{(\lambda)}$ ise $r = \sum_{\lambda,i} p_i^{(\lambda)} s^{(\lambda)}$ ve bu $\sum_{i+d(\lambda)=m} p_i^{(\lambda)} s^{(\lambda)}$ kısmi toplamında, $s^{(\lambda)}$ nin derecesi $d(\lambda)$ olarak gösterilen, m dereceli r nin r_m homojen bileşenidir. Dolayısıyla $r_m \in I$ ve I homojendir. □

Teorem 1.1.12. \mathbb{Z} -dereceli R halkasının bir I idealinin homojen olması için gerek ve yeter koşul $I_n = I \cap R_n$ olmak üzere $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ dir.

Kanıt. (\Rightarrow) Öncelikle $\sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n \subseteq I$ olduğundan, dolaysız toplamdır. Bir $r \in I$ ve $r = \sum_{i=k}^t r_i$ alınsın. I homojen ideal olduğundan her $i = k, \dots, t$ için $r_i \in I$ dir. Dahası her i için $r_i \in I_i$ dir. Buradan $r \in \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ elde edilir. Dolayısıyla $I \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ dir. Böylece $I_n = I \cap R_n$ olacak şekilde $I = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ elde edilmiş olur.

(\Leftarrow) Bir $r \in I$ alınsın. Daha sonra $r_n \in I \cap R_n$ olacak şekilde $r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n$ dir. Dolayısıyla r_n , n dereceli r nin homojen bileşeni ve $r_n \in I$ elde edilir. Buradan Tanım 1.1.6 dan, I homojen bir idealdir. □

Tanım 1.1.13. I , R nin bir ideali olsun.

$$\sqrt{I} = \{r \in R : n \in \mathbb{N}; r^n \in I\}$$

kümesi de R halkasının I yı kapsayan bir idealidir. Bu ideale I idealinin "radikali" denir.

Teorem 1.1.14. (i) \mathbb{Z} -dereceli R halkasının homojen idealleri I, J ve $\{I_k\}_{k \in I}$ alınsın. O halde $\sum_{k \in I} I_k, IJ, \bigcap_{k \in I} I_k$ ve $(I : J)$ R halkasının homojen idealleridir. Özellikle $I = 0$ iken, $(0 : J) = \text{Ann} J$ R nin homojen bir idealidir.

(ii) I homojen bir ideal ise \sqrt{I} homojen bir idealdir.

Kanıt. (i) Her I_k homojen olduğundan, Teorem 1.1.11 den I_k homojen elemanlar tarafından üretilir. Dahası $\sum_{k \in I} I_k$ nin homojen elemanlar tarafından üretildiği açıktır. Dolayısıyla $\sum_{k \in I} I_k$ homojen idealdir. Benzer şekilde IJ homojen idealdir.

Daha sonra, $r \in \bigcap_{k \in I} I_k$ ve $r = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i$ alınsın. Her $k \in I$ için, I_k ve $r \in I_k$ homojen ideal olduğundan, her $k \in I$ için $r_i \in I_k$ elde edilir. Dolayısıyla $r_i \in \bigcap_{k \in I} I_k$ elde edilir. Buradan $\bigcap_{k \in I} I_k$ homojen bulunur. Devamında J yi üreten homojen elemanların bir ailesi olarak $\{s_\lambda\}_\lambda$ ve $r = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i \in (I : J)$ alınsın. Daha sonra $rJ \subseteq I$ elde edilir. Böylece her $\lambda \in I$ için farklı dereceli homojen elemanlar $r_i s_\lambda$ olmak üzere

$$r s_\lambda = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i s_\lambda \in I$$

elde edilir. I homojen ideal olduğundan, her i ve λ için $r_i s_\lambda \in I$ dir. Böylece i sabiti için $r_i J \subseteq I$ elde edilir. Buradan $(I : J)$ ve $r_i \in (I : J)$ homojen idealdir.

(ii) I nin homojen ideal olduğu varsayılınsın. Bir $r \in \sqrt{I}$ alınsın. O halde $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_t$ ve $1 \leq k \leq t$ için i_k dereceli r_{i_k} , homojen bir eleman olmak üzere

$$r = r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_t}$$

elde edilir. Dolayısıyla $r^n \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ mevcuttur. I , r^n homojen bileşenin homojen ideali olduğundan, derecesi I idealine ait olan $n i_1$ olacaktır. Fakat bu bileşen sadece $r_{i_1}^n$ dir. Böylece $r_{i_1} \in \sqrt{I}$ elde edilir. Buradan $r_{i_2} + \dots + r_{i_t} \in \sqrt{I}$ bulunur. Argüman tekrarlanırsa, \sqrt{I} ya ait olan r nin tüm homojen bileşenleri elde edilir. Böylelikle, \sqrt{I} homojen idealdir.

□

Bölüm 2

Yerelleştirme, Maksimal ve Asal Homojen İdealler

2.1 Dereceli Olmayan Halkalarda Yerelleştirme

Bu bölümde değişmeli halkalarda yerelleştirme tanımı yapılabilmesi için bazı ön bilgilere yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. S , R halkasının bir çarpımsal alt kümesi olsun. $R \times S$ de \sim bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \text{bir } u \in S \text{ için } u(as' - a's) = 0$$

Önerme 2.1.2. S çarpımsal kümesine göre, yukarıda tanımlanan \sim bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $(a, s) \in R \times S$ nin bu bağıntıya göre belirttiğı denklik sınıfına "kesir" denir ve $\frac{a}{s}$ ile gösterilir. Tüm kesirler kümesi de $S^{-1}R$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. R bir halka ve S , çarpımsal alt kümesi olsun. $S^{-1}R$ de toplama ve çarpma işlemleri şu şekilde tanımlansın.

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \quad \frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

Önerme 2.1.4. Yukarıda tanımlanan işlemlere göre, $(S^{-1}R, +, \cdot)$ bir halkadır. Bu halkaya R nin S ye göre "yerelleştirmesi" denir. Halkanın sıfırı, $0_{S^{-1}R} = \frac{0_R}{1}$ ve birimi, $1_{S^{-1}R} = \frac{1}{1}$ dir. Ayrıca,

$$\pi : R \rightarrow S^{-1}R, \pi(r) = \frac{r}{1}$$

ile tanımlı π fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır ve π ye "doğal homomorfizma" denir.

3.bölümde kullanılacak olan, fakat burada verilmesi gereken bazı kavramlar aşağıdaki tanımda ifade edilecektir.

Tanım 2.1.5. $\pi : R \rightarrow S^{-1}R$ dereceli halka homomorfizması için

(i) \mathcal{J} , $S^{-1}R$ halkasının homojen ideali ise $f^{-1}(\mathcal{J}) \subseteq R$ homojen idealine \mathcal{J} idealinin kısıtlanması denir ve \mathcal{J}^c ile gösterilir.

(ii) \mathcal{I} , R halkasının homojen ideali ise $f(\mathcal{I})$ nın $S^{-1}R$ halkasında ürettiği homojen idealine \mathcal{I} idealinin genişlemesi denir ve \mathcal{I}^e ile gösterilir.

2.2 Dereceli Halkalarda Yerelleştirme

Tanım 2.2.1. \mathbb{Z} -dereceli halka olan bir $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ alınsın. S , R nin homojen elemanlarını içeren çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. O halde $S^{-1}R$ üzerinde bir R halkası

$$(S^{-1}R)_i = \left\{ \alpha \in S^{-1}R : n \in \mathbb{Z}, r \in R_{n+i} \text{ ve } s \in S \cap R_n \text{ için } \alpha = \frac{r}{s} \right\}$$

tanımlanır.

Teorem 2.2.2. Tanım 2.2.1 deki notasyonla $S^{-1}R$, $(S^{-1}R) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (S^{-1}R)_i$ olacak şekilde \mathbb{Z} -dereceli bir halkadır.

Kanıt. Eğer $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} \in (S^{-1}R)_i$ ise $\frac{r}{s} \pm \frac{r'}{s'} = \frac{rs' \pm r's}{ss'}$ ve $der(r) = n + i$, $der(s) = n$, $der(r') = j + i$, $der(s') = j$ dir. Buradan $rs' \pm r's$, derecesi $(n + j + i)$ olan homojen ve ss' , derecesi $(n + j)$ olan homojendir. Dolayısıyla her $i \in \mathbb{Z}$ için $(S^{-1}R)_i$, $S^{-1}R$ nin toplamsal bir alt grubudur.

$$S^{-1}R = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (S^{-1}R)_i$$

sağlanır. Bir $-m \leq n \leq i$ ve $\sum_{n=-m}^i \alpha_n = 0$ olacak şekilde $\alpha_n \in (S^{-1}R)_n$ alınsın. Bir $i_n \in \mathbb{Z}$, $r_{n+i_n} \in R_{n+i_n}$ ve $s_{i_n} \in S \cap R_{i_n}$ için $\frac{r_{n+i_n}}{s_{i_n}} = \alpha_n$ elde edilir. Bir ortak paydada α_n yerleştirilirse, $s'_h \in S \cap R_h$ olacak şekilde $\frac{t_{n+h}}{s'_h} = \alpha_n$ yazılır.

Böylece $\frac{\sum_{n=-m}^i t_{n+h}}{s'_h} = 0$ elde edilir. Buradan da, $s''_k \left(\sum_{n=-m}^i t_{n+h} \right) = 0$ olacak şekilde $s''_k \in S \cap R_k$ mevcuttur. Fakat $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ olduğu açıktır ve $s''_k t_{n+h} \in R_{k+n+h}$ dir. Devamında $\sum_{n=-m}^i s''_k t_{n+h} = 0$ dır. Dolayısıyla her bir $n = -m, \dots, i$ için $s''_k t_{n+h} = 0$ dır. O yüzden $\alpha_n = 0$ olur.

Şu halde

$$S^{-1}R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (S^{-1}R)_i$$

elde edilir. Ayrıca $(S^{-1}R)_i (S^{-1}R)_p \subseteq (S^{-1}R)_{i+p}$ dir. Böylece $S^{-1}R$, \mathbb{Z} -dereceli bir halkadır.

□

Not 2.2.3. R , \mathbb{Z} -dereceli bir halka ve X bir bilinmeyen olsun. Bir $S = \{X^t : t \in \mathbb{N}_0\}$ alınsın. O zaman S , homojen elemanlardan oluşan $R[X]$ in çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. Buradan $S^{-1}(R[X])$ halkası alınsın. Devamında her $f \in R[X]$ için $\phi(f) = \frac{f}{1}$ olarak tanımlanan, $\phi : R[X] \rightarrow S^{-1}(R[X])$ birebir bir halka homomorfizmasıdır ve $R[X]$ halkası $S^{-1}(R[X])$ in bir alt halkası olarak seçilebilir. Şöyle ki $\frac{1}{X} = X^{-1}$ yazılır. Daha sonra $(R[X])[X^{-1}] = S^{-1}(R[X])$ veya $R[X, X^{-1}] = S^{-1}(R[X])$ elde edilir. Dolayısıyla $R[X, X^{-1}]$ in tipik bir elemanı, $r_i \in R_i$ olmak üzere $\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i X^i$ olur. Bu toplam, sıfırdan farklı sonlu sayıda terime sahiptir.

Tanım 2.2.4. \mathbb{Z} -dereceli bir R halkasının bir M homojen ideali,

(i) $M \subset R$

(ii) $M \subset I \subset R$ olacak şekilde R nin bir I homojen ideali bulunmuyorsa böyle bir M homojen ideali "maksimal homojen ideal" olarak tanımlanır.

Örnek 2.2.5. K bir cisim olmak üzere $\{0\}$, $K[X, X^{-1}]$ de maksimal homojen bir idealdir.

Kanıt. İlk olarak $K[X, X^{-1}]$ in bir homojen ideali I alınsın ve

$$\{0\} \subset I \subseteq K[X, X^{-1}]$$

olarak yazılır. Daha sonra $\{0\}$ idealinin $K[X, X^{-1}]$ de maksimal homojen ideal olduğu gösterilecektir. Bunun için $I = K[X, X^{-1}]$ olduğu gösterilmelidir. I bir elemandan daha fazlasını içerdiğinden, $(f \neq 0) f \in I$ olacak şekilde mevcuttur ve $a_n \in K$ olmak üzere

$$f = a_{-m}X^{-m} + \dots + a_{-1}X^{-1} + a_0 + a_1X + \dots + a_iX^i \text{ dir.}$$

Daha sonra $f \neq 0$ olduğundan en az bir katsayı $a_n \neq 0$ dir; fakat I homojen idealdir. Dolayısıyla her $j = -m, \dots, n$ için $a_jX^j \in I$ elde edilir. Özellikle $a_n \neq 0$, $a_nX^n \in I$ ve $a_n \in K$ dir. Daha sonra a_nX^n , (tersi $\frac{1}{a_n}X^{-n}$) $K[X, X^{-1}]$ in birimsel elemanıdır. Böylelikle, $\frac{1}{a_n}X^{-n}(a_nX^n) = 1 \in I$ elde edilir. Buradan $K[X, X^{-1}] = I$ olur. Şu halde $\{0\}$, $K[X, X^{-1}]$ in maksimal homojen bir idealidir. □

Not 2.2.6. *Bir maksimal homojen idealin maksimal ideal olması gerekmez. $\{0\}$, $K[X, X^{-1}]$ in maksimal homojen idealidir. Fakat $\{0\}$, $K[X, X^{-1}]$ in maksimal bir ideali değildir. Çünkü $K[X, X^{-1}]$ bir cisim değildir.*

Teorem 2.2.7. *\mathbb{Z} -dereceli R halkasının sadece iki homojen ideali (kendisi ve sıfır ideali) var ise R_0 bir cisim ve $R = R_0$ (R cisim) veya $S = \{X^t : t \in \mathbb{N}_0\}$, $R_0[X]$ in çarpımsal kapalı bir alt kümesi olmak üzere $\text{der}X > 0$ için homojen elemanları içeren $R \cong R_0[X, X^{-1}] = S^{-1}(R_0[X])$ halkası bir esas ideal bölgesidir.*

Kanıt. R_0 m sıfırdan farklı her elemanının çarpımsal tersi var olduğundan R_0 bir cisimdir.

R , derecesi sıfırdan farklı homojen elemanlara sahip değil ise $R = R_0$ dir. Derecesi sıfırdan farklı $a \in R$ homojen bir eleman olsun. $a \in aR$ olduğundan $aR \neq 0$ olur. Dolayısıyla hipotezden $aR = R$ elde edilir. Buradan herhangi bir $u \in R$ için $au = 1$ olur. Varsayalım ki $\text{der}(a) = d$ dir. O halde u nun homojen ayrışımı

$u = u_{-n} + \dots + u_{-m}$ olacak şekilde $au_{-d} = 1$ olur. Fakat u_{-d} nin derecesi $(-d)$ ve $au_{-d} = 1$ olan homojen bir elemandır. Ya a pozitif dereceli ya da u_{-d} pozitif derecelidir. a nın pozitif dereceli olduğu kabul edilsin. Sıfırdan farklı homojen bir x elemanı seçilsin ve derecesi en küçük pozitif olacak şekilde d olsun. Derecesi d olan X , bilinmeyen olarak alınsın.

$R_0[X]$ in çarpımsal kapalı alt kümesi S olmak üzere;

$$\varphi : R_0[X] \rightarrow R \text{ ve } S = \{X^t : t \in N_0\}$$

$$X \mapsto x$$

olarak tanımlansın. Not 2.2.3 den $\phi : R_0[X] \rightarrow S^{-1}(R_0[X])$ doğal (kanonik) homomorfizması birebirdir. Buradan $\varphi : R_0[X] \rightarrow R$ fonksiyonu $\hat{\phi} : S^{-1}(R_0[X]) \rightarrow R$ ye genişletilebilir ve $\varphi(X) = x$, R nin birimsel elemanıdır [2, 5.10 Proposition].

Dahası $\varphi(X^h) = x^h$ dir ve her $h \in N_0$ için R nin birimsel elemanıdır. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $R_{nd} = R_0x^n$ olduğu gösterilmelidir. İlk olarak $x \in R_d$ olduğundan $R_0x^n \subseteq R_{nd}$ dir. Bir $v \in R_{nd}$ alınsın. O halde $v = x^n x^{-n} v = x^n (x^{-n} v)$ elde edilir. x^{-1} in derecesi $(-d)$ olduğundan, buradan $x^{-n} = (x^{-1})^n$, $(-d)n = (-nd)$ derecelidir ve böylece $x^{-n}v$, $(-nd + nd) = 0$. derecedendir. Şu halde $v \in R_0x^n$ elde edilir ve $nd < s < (n+1)d$ ve $R_s \neq 0$ olduğu varsayılınsın. Daha sonra $y \neq 0$ olmak üzere $y \in R_s$ alınsın. Böylece,

$$\text{der}(yx^{-n}) = \text{der}y + (-n)\text{der}x = s - nd$$

olur. O halde $0 < (s - nd) < d$ olmak üzere $yx^{-n} \in R_{s-nd}$ elde edilir ve yx^{-n} sıfırdan farklı homojen elemandır. Buradan d en küçük pozitif derece olduğundan çelişkiye ulaşılır. Dolayısıyla,

$$R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_{nd} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_0x^n = R_0[x, x^{-1}]$$

elde edilir. Böylelikle,

$$\hat{\phi} : R_0[X, X^{-1}] \rightarrow R_0[x, x^{-1}] = R$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n X^n \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n x^n$$

elde edilir. Buradan $(r_n \in R_0)$ örtendir. O halde $\hat{\phi}$ nin birebir olduğu gösterilmelidir.

Lemma 1.1.10 dan $\text{Çek}(\hat{\phi})$, $R_0[X, X^{-1}]$ in homojen bir idealidir. Dolayısıyla

$\text{Çek}(\hat{\phi}) = \{0\}$ veya hipotezden $\text{Çek}(\hat{\phi}) = R_0[X, X^{-1}]$ elde edilir.

Eğer $\text{Çek}(\hat{\phi}) = R_0[X, X^{-1}]$ ise, $\hat{\phi}$ örten olduğundan 1. İzomorfizma Teoremi'ne göre

$R = \{0\}$ elde edilir. Kabülle çeliştiğinden, $\text{Çek}(\hat{\phi}) = \{0\}$ ve böylece $\hat{\phi}$ birebirdir.

R_0 bir cisim olmak üzere

$$R \cong R_0[X, X^{-1}]$$

elde edilir. Şu halde $R_0[X, X^{-1}]$ bir esas ideal bölgesinin kesir cismidir ve ispat tamamlanmış olur.

□

Sonuç 2.2.8. *Her maksimal homojen ideal asaldir.*

Kanıt. M, R dereceli halkanın maksimal homojen ideali olarak alınsın. M maksimal ideal ise asaldir. M maksimal ideal olmasın, R/M bölüm halkası oluşturulsun. R/M bölüm halkası sadece R/M ve M/M homojen ideallerine sahip aşikâr olmayan dereceli halkadır. Teorem 2.2.7 den R_0 cisim ve X bilinmeyen olmak üzere $R/M \cong R_0[X, X^{-1}]$ ve tamlık bölgesidir. Yani M asal idealdir. □

Önerme 2.2.9. *R, \mathbb{Z} -dereceli halkanın aşikâr olmayan bir halkası olsun. O halde R en az bir maksimal homojen ideale sahiptir.*

Kanıt. R aşikâr olmayan bir halka olduğundan, $\{0\}$ ideali öz idealdir ve dolayısıyla R nin tüm öz homojen ideallerinin kümesi olan Ω , boş küme değildir. İçerme bağıntısı, \subseteq , Ω üzerinde kısmi sıralıdır ve R nin maksimal homojen bir ideali, sadece (Ω, \subseteq) kısmi sıralı kümesinin maksimal bir elemanıdır. Bu kısmi sıralı kümeye Zorn Lemması uygulanabilir. Δ, Ω kümesinin boştan farklı tam sıralı bir alt kümesi olarak alınsın. Devamında $J = \bigcup_{I \in \Delta} I$ tanımlansın. Ayrıca herhangi bir $a \in J$ ve $r \in R$ olacak şekilde I ideal olduğundan $ra \in J$ dir. Bir $a, b \in J$ alındığında; $I_1, I_2 \in \Delta$ olmak üzere $a \in I_1, b \in I_2$ vardır. Daha sonra $a \in I_1$ tam sıralı bir küme olduğundan $I_1 \subseteq I_2$ ise $a + b \in I_2$ veya $I_2 \subseteq I_1$ sağlanıyor ise $a + b \in I_1$ elde edilir. Sonuç olarak J, R nin bir idealidir.

Diğer yandan $a \in J$ alınsın ve a nın homojen bileşenlerine göre bir toplamı $a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ olur. Buradan $a \in I_1$ olacak şekilde bir $I_1 \in \Delta$ parçalanışı mevcuttur. Yani her $i \in \mathbb{Z}$ için $a_i \in I_1$ ve $a_i \in J$ elde edilir. Böylece J, R nin homojen bir idealidir; dahası her $I \in \Delta$ için $1 \notin I$ olduğundan, J öz homojen idealdir. Daha sonra J, Ω da Δ nın bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemması'na göre (Ω, \subseteq) kısmi sıralı kümesi bir maksimal elemana sahiptir ve $j \in \Delta$ maksimal homojen idealdir. Hipotez doğrulandığından ispat tamamlanmış olur.

□

Lemma 2.2.10. *I, \mathbb{Z} -dereceli R halkasının öz homojen bir ideali olsun. O halde $I \subseteq M$ olacak şekilde R nin bir M maksimal homojen ideali vardır.*

Kanıt. R/I bölüm halkası aşikâr olmayan \mathbb{Z} -dereceli bir halkadır. Önerme 2.2.9 dan R maksimal homojen bir ideale sahiptir. Lemma 1.1.10 dan $M \supseteq I$ olmak üzere R nin tek maksimal homojen ideali M/I biçiminde olacaktır. Dolayısıyla M , R nin maksimal homojen bir idealidir. □

Tanım 2.2.11. \mathbb{Z} -dereceli R halkasının homojen Jacobson radikali, $J^h(R)$, R nin tüm maksimal homojen ideallerinin kesişimidir. R nin bir $J^h(R)$ homojen idealinde R nin aşikâr olması durumunda, \mathbb{Z} -dereceli halkanın homojen ideallerinin boş ailesinin kesişimi $J^h(R) = R$ olur. $J^h(R)$ nin homojen elemanlarının karakterizasyonunu elde etmek için $J(R)$ nin benzerini sağlamak yeterlidir.

Lemma 2.2.12. \mathbb{Z} -dereceli R halkasının n dereceli homojen bir elemanı a ise $a \in J^h(R)$ olması için gerek ve yeter koşul her $b \in R_{-n}$ için $(1 - ba)$ nin birimsel eleman olmasıdır.

Kanıt. (\Rightarrow) Bir $b \in R_{-n}$ alınsın. Öyle ki $(1 - ba)$ nin birimsel eleman olmadığı varsayılınsın. İlk olarak $(1 - ba)$, 0. dereceden homojen elemandır. Lemma 2.2.10 dan bir M maksimal homojen idealinin elemanıdır. Fakat $a \in J^h(R) \subseteq M$ olduğundan, $ba \in M$ dir ve $(1 - ba) + ba = 1 \in M$ olacağından çelişki elde edilir. Dolayısıyla $(1 - ba)$ birimsel elemandır.

(\Leftarrow) Her $b \in R_{-n}$ için $(1 - ba)$ elemanın R nin birimsel elemanı olduğu varsayılınsın. R nin bir M maksimal homojen ideali alınsın. $a \in M$ olduğu gösterilmelidir. Eğer bu gerçekleşmeseydi, $Ra \not\subseteq M$ olurdu. Buradan $M + Ra$ homojen ideali için $M \subset M + Ra \subseteq R$ sağlanırdı. M nin maksimal ideal olmasından $M + Ra = R$ elde edilir. Devamında $u + ba = 1$ olacak şekilde $u \in M$, $b \in R$ vardır. u ve b nin homojen bileşenlerinin dereceleri $\{0\}$, $u_0 \in M$ homojen elemanı ve $(-n)$ dereceli b_{-n} homojen elemanı olmak üzere $u_0 + b_{-n}a = 1$ dir. Dolayısıyla

$$1 - b_{-n}a = u_0 \in M$$

elde edilir. Hipotezden $(1 - b_{-n}a)$ birimsel elemandır. M maksimal homojen ideali birimsel olmayan elemanlardan oluştuğundan çelişkiye ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 2.2.13. I, R halkasının bir ideali olsun. $I \subseteq P$ asal ideali için, $I \subseteq P' \subset P$ olacak şekilde hiçbir P' asal ideali yoksa P ye I nin bir "minimal asal" ideali denir. I nin minimal asal idealleri kümesi $Min(I)$ ile gösterilir. Özel olarak, $I = \{0\}$ idealinin minimal asallarına da R nin minimal asalları denir.

Örnek 2.2.14. Bir tamlık bölgesininin minimal asal idealleri $\{0\}$ dan ibarettir.

Örnek 2.2.15. P asal ideal ise $Min(P) = \{P\}$ dir.

Sonuç 2.2.16. P, I yı kapsayan herhangi bir asal ideal ise $I \subseteq P' \subseteq P$ olacak şekilde bir $P' \in Min(I)$ bulunabilir.

Sonuç 2.2.17. $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P = \bigcap_{P \in Min(I)} P$ dir.

Tanım 2.2.18. Q, R halkasının bir ideali ve $Q \subset R$ olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ olması bir $n > 0$ tam sayısı için $b^n \in Q$ olmasını gerektiriyorsa Q ya, R nin bir "asalımsı ideali" denir.

Tanımdan her asal idealin bir asalımsı ideal olduğu açıktır.

Teorem 2.2.19. Q, R halkasının bir asalımsı ideali ise $P = \sqrt{Q}$ asal idealdir. Bu durumda Q ya, " P -asalımsı ideal" denir. P, Q nun tek minimal asal idealidir.

Kanıt. $1 \notin Q$ olduğundan $1 \notin \sqrt{Q} = P$ dir. Böylece $P \neq R$ dir. Devamında $a, b \in R$ olmak üzere, $ab \in \sqrt{Q}$ fakat $a \notin \sqrt{Q}$ olsun. Şu halde bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(ab)^n = a^n b^n \in Q,$$

fakat a nın hiçbir kuvveti Q da değildir. Dolayısıyla a^n nin de hiçbir kuvveti Q da değildir. Q asalımsı ideal olduğu için $b^n \in Q$ ve böylece $b \in \sqrt{Q}$ bulunur. Yani $P = \sqrt{Q}$ asal idealdir.

Her $P^* \in Spec(R)$ ve $Q \subseteq P^*$ için,

$$P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{P^*} = P^*$$

olur. Böylece P, Q nun tek minimal asal ideali, yani $Min(Q) = P$ elde edilir. \square

Lemma 2.2.20. \mathbb{Z} -dereceli R halkası alınsın. P bir öz homojen ideal ve $rs \in P$ olmak üzere r ve s homojen elemanları için ya $r \in P$ veya $s \in P$ ise P, R halkasının bir

homogen asal idealidir.

Benzer şekilde Q, R halkasının bir öz homogen ideali ve $rs \in Q$ olmak üzere r ve s homogen elemanları için $r \in Q$ veya $s \in \sqrt{Q}$ sağlanıyor ise Q, R dereceli halkasının bir asalımsı idealidir.

Kanıt. R dereceli halkasının iki elemanı $r, s \in R$ olsun. Öyle ki $rs \in P$ ve $r, s \notin P$ dir. Daha sonra i_n ve k_n dereceleri $i_1 < i_2 < \dots < i_t$ ve $k_1 < k_2 < \dots < k_t$ olacak şekilde r ve s elemanları sırasıyla $r_{i_n}, 1 \leq n \leq t$ için s_{k_n} homogen elemanların toplamı olarak yazılır. Yani

$$r = r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_t}$$

$$s = s_{k_1} + s_{k_2} + \dots + s_{k_t}$$

elde edilir. Tüm (r, s) çiftleri arasından yukarıdaki özelliklere sahip, seçilen t tamsayısı minimal eleman seçilsin. O halde $r_{i_1} \notin P$ elde edilir. Aksi takdirde $r, r - r_{i_1}$ ile yeri değiştirilebilirdi ve dolayısıyla t nin minimal eleman olması ile çelişki elde edilirdi. Daha sonra $1 \leq m \leq t$ eşitsizliğini sağlayan m sayısı için $s_{k_m} \notin P$ dir; öyle ki $1 \leq \varphi \leq m - 1$ için $s_{k_\varphi} \in P$ olsun. Buradan $x = s_{k_1} + s_{k_2} + \dots + s_{k_{m-1}}$ yazılsın. Dahası $x \in P$ elde edilir. Böylece $(s - x)r \in P$ dir ve $(s_{k_m} + \dots + s_{k_t})r \in P$ elde edilir. O zaman $(s_{k_m} + \dots + s_{k_t})r$ ifadesinin $(i_1 + k_m)$ dereceli homogen bileşeni sadece $s_{k_m}r_{i_1}$ olup $s_{k_m}r_{i_1} \in P$ dir. Hipotezden $s_{k_m} \in P$ veya $r_{i_1} \in P$ dir. Bu çelişkiyle ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

Q, R dereceli halkanın bir asalımsı ideali olmadığı varsayılınsın. Yani $rs \in Q$ ve $s \notin Q, r \notin \sqrt{Q}$ olmak üzere $r, s \in R$ mevcuttur. Daha sonra r ve s nin sıfırdan farklı homogen bileşenlerinin toplamı olarak; $i_1 < i_2 < \dots < i_l$ ve $k_1 < k_2 < \dots < k_l$ olacak şekilde

$$r = r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_l}$$

$$s = s_{k_1} + s_{k_2} + \dots + s_{k_l}$$

elde edilir. İspatın birinci kısmından l tamsayısı minimal eleman seçilsin. O halde $s_{k_1} \notin Q$ dir. Aksi takdirde $s, s - s_{k_1}$ ile yeri değiştirilebilirdi. Dolayısıyla 1 den daha küçük değerde yeni bir çift elde edilmiş olur. Daha sonra $1 \leq m \leq l$ için $r, m \in \sqrt{Q}$ iken $1 \leq n \leq m - 1$ olmak üzere $r_{i_n} \in \sqrt{Q}$ sağlayan bir m seçilsin. Devamında r nin

parçalanışı $x = r_{i_1} + r_{i_2} + \dots + r_{i_{m-1}}$ olarak ifade edilir. Dahası $x \in \sqrt{Q}$ dir. Böylece $p \in N$ olacak şekilde $x^p \in Q$ elde edilir. Böylelikle

$$(r - x)^p s \in Q \text{ ve } (r_{i_m} + \dots + r_{i_t})^p s \in Q$$

olur. O zaman $(r_{i_m} + \dots + r_{i_t})^p s \in Q$ ifadesinin $(p_{i_m} + k_1)$ dereceli bileşeni sadece $(r_{i_m})^p s_{k_1}$ olup $(r_{i_m})^p s_{k_1} \in Q$ dir. Yapılan seçimden $s_{k_1} \notin Q$ olduğundan, hipotezden $(r_{i_m})^p \in \sqrt{Q}$ elde edilir. Böylece $r_{i_m} \in \sqrt{Q}$ dir. m nin tam sayı seçiminden ötürü çelişkiye ulaşılır. Bu çelişkiyle ispat tamamlanmış olur.

□

Önerme 2.2.21. Q , P -asalımsı homojen bir ideal ise P homojen bir idealdir.

Kanıt. Teorem 1.1.14 (b) ifadesinden ispat açıktır.

□

Notasyon 2.2.22. \mathbb{Z} -dereceli R halkasının herhangi bir I ideali için tüm I homojen elemanları tarafından üretilen ideal I^* olarak tanımlansın. I^* , I yı içeren en büyük homojen idealdir.

Teorem 2.2.23. I asal ideal ise I^* asal idealdir. Eğer I asalımsı ideal ise I^* da asalımsı idealdir.

Kanıt. Öncelikle $I^* \subseteq I \subset R$ olduğundan, I^* öz idealdir. Devamında $rs \in I^*$ ve $r \notin I^*$ olmak üzere r, s homojen elemanları alınsın. Böylece $r \notin I$ dir. Eğer I asal ideal ise $s \in I$ elde edilir ve s homojen eleman, $s \in I^*$ olur. I^* asal idealdir. Lemma 2.2.20 den I asalımsı ideal ise $s \in \sqrt{I}$ ve $s^n \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Fakat s homojen elemandır ve dolayısıyla s^n de homojen eleman olur. Böylelikle $s^n \in I^*$ ve buradan $s \in \sqrt{I^*}$ elde edilir.

□

Lemma 2.2.24. R , \mathbb{Z} -dereceli bir halka ve Q , R halkasının P -asalımsı ideali olsun. O halde Q^* , R nin P^* -asalımsı idealdir. (Q^* ve P^* idealleri Notasyon 2.2.22 de tanımlandığı şekildedir.)

Kanıt. Q , R halkasının P -asalımsı ideali ise Teorem 2.2.23 den P^* asalımsı bir idealdir. Dolayısıyla $\sqrt{Q^*} = P^*$ olduğu gösterilmelidir. Devamında $Q^* \subseteq Q$ olduğundan, $\sqrt{Q^*} \subseteq \sqrt{Q} = P$ dir. Teorem 1.1.14 den, $\sqrt{Q^*}$ homojen bir idealdir; böylece $\sqrt{Q^*} \subseteq P^*$ elde edilir. Daha sonra $r \in P^*$ homojen elemanı alınsın. O halde $r \in P = \sqrt{Q}$ dir. Dolayısıyla $r^t \in Q$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Ayrıca r^t homojen olduğundan, $r^t \in Q^*$ elde edilir. Böylece $r \in \sqrt{Q^*}$ dir. Buradan $P^* \subseteq \sqrt{Q^*}$ ve $\sqrt{Q^*} = P^*$ bulunur. □

Lemma 2.2.25. \mathbb{Z} -dereceli R halkasının homojen ideali I ise I idealinin radikali, I yı içeren tüm asal homojen idealerin kesişimine eşittir.

Özellikle, R halkasının nil radikali (R nin tüm nilpotent elemanlarını içeren ideal), R nin tüm asal homojen ideallerinin kesişimine eşittir.

Kanıt. İlk olarak $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P}} P$ dir. Gösterilmesi gereken ise

$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P, P \text{ hom.}}} P$ olmasıdır. Açıktır ki

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P}} P \subseteq \bigcap_{\substack{P \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P, P \text{ hom.}}} P$$

dir. Tersine, I homojen ideal ve Notasyon 2.2.22 den, I yı içeren her P asal ideali için $P \supseteq P^* \supseteq I$ içermeyi sağlayan bir P^* mevcuttur. Böylece Teorem 2.2.23 den

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P}} P \supseteq \bigcap_{\substack{P^* \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P^*}} P^* \supseteq \bigcap_{\substack{P' \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P', P' \text{ hom.}}} P'$$

olur. Dolayısıyla, $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{P \in \text{Spec}(R) \\ I \subseteq P, P \text{ hom.}}} P$ elde edilir. □

Önerme 2.2.26. \mathbb{Z} -dereceli R halkasının maksimal homojen bir ideali M ve Q , $\sqrt{Q} = M$ eşitliğini sağlayan homojen bir ideal ise Q , M -asalımsı idealdir.

Kanıt. Öncelikle $Q \subseteq M \subset R$ olduğundan, Q öz idealdir. Sonuç 2.2.8 den, M asal idealdir ve $\sqrt{Q} = M$ kabulünden Q yı içeren asal homojen ideal sadece M dir. Buradan $\bar{R} = R/Q$ halkasının tek asal homojen ideali $\bar{M} = M/Q$ olur. Dolayısıyla

$\overline{M}, \overline{R}$ halkasının nil radikalidir. Böylece \overline{R} nin birimsel olmayan her homojen elemanı \overline{M} ye aittir ve \overline{R} halkasında nilpotenttir. Lemma 2.2.20 den Q, \overline{R} de asalımsı idealdir. Buradan Q, M -asalımsı idealdir.

□

Tanım 2.2.27. \mathbb{Z} -dereceli halka olan $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ ve R nin bir I homojen ideali alınsın. I idealinin bir asalımsı ayrışımı; $i = 1, \dots, s$ için her bir Q_i asalımsı ve $\sqrt{Q_i} = P_i$ olacak şekilde $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ olduğu varsaylınsın. Eğer her Q_i (ve böylece her P_i) homojen ideal ise bu ayrışıma "homojen asalımsı ayrışım" denir. I idealine de "ayrışabilir" bir ideal denir. Ayrıca aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa bu ayrışıma "minimal asalımsı ayrışım" denir.

(i) P_1, P_2, \dots, P_s ler R nin farklı asal idealleridir,

(ii) Her $j = 1, 2, \dots, s$ için, $\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s Q_i \not\subseteq Q_j$ dir.

Lemma 2.2.28. \mathbb{Z} -dereceli halka $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ ve R nin bir homojen ideali I alınsın. I nin minimal asalımsı bir ayrışıma sahip olduğu kabul edilsin. O halde I , tüm asalımsı bileşenleri homojen olan asalımsı bir ayrışıma sahiptir. Dahası, I ya ait olan asal idealler homojendir.

Kanıt. İlk olarak $i = 1, \dots, s$ için $\sqrt{Q_i} = P_i$ olan $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ minimal asalımsı bir ayrışım olarak alınsın. Notasyon 2.2.22 den, her $i = 1, \dots, s$ için Q_i^* ve P_i^* idealleri alınsın. Teorem 2.2.23 den P_i^* asal ideal ve Lemma 2.2.20 dan her $i = 1, \dots, s$ için Q_i^* , R nin bir P_i^* -asalımsı idealidir. Ayrıca $1 \leq i \leq s$ için $I \subseteq Q_i^* \subseteq Q_i$ dir. Dolayısıyla

$$I \subseteq Q_1^* \cap Q_2^* \cap \dots \cap Q_s^* \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s = I$$

elde edilir. Böylece $I = Q_1^* \cap Q_2^* \cap \dots \cap Q_s^*$ dir. Bu I nin homojen asalımsı bir ayrışımıdır. Eğer bu homojen asalımsı ayrışım rafine edilirse, Teorem 1.1.14 den bir minimal asalımsı ayrışım elde edilir ve bileşenleri homojendir. I ya ait olan tüm asal idealler P_1^*, \dots, P_s^* içerisinde olduğundan ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 2.2.29. I, R halkasının ayrışabilir bir ideali ve her $i = 1, 2, \dots, s$ için $\sqrt{Q_i} = P_i$ olmak üzere,

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$$

minimal asalımsı ayrışım olsun. $P \in \text{Spec}(R)$ için, aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) Bir $i = 1, 2, \dots, s$ için, $P = P_i$ dir,

(ii) $(I : a)$, P -asalımsı ideal olacak şekilde bir $a \in R$ vardır,

(iii) $\sqrt{(I : a)} = P$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır.

Kanıt. (i) \Rightarrow (ii) Bir $i = 1, 2, \dots, s$ için $P = P_i$ olsun. İlk olarak $I = \bigcap_{j=1}^s Q_j$ ayrışımı minimal olduğu için $a_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s Q_j \setminus Q_i$ vardır. Ayrıca,

$$(I : a_i) = \left(\bigcap_{j=1}^s Q_j : a_i \right) = \left(\bigcap_{j=1}^s Q_j : a_i \right)$$

dir. $1 \leq j \leq s$ olmak üzere $j \neq i$ için $(Q_j : a_i) = R$ ve $(Q_i : a_i)$ bir P_i -asalımsı idealdir. Daha sonra $P = P_i$ olduğundan $(I : a_i)$ bir P -asalımsı idealdir.

(ii) \Rightarrow (iii) Açıktır.

(iii) \Rightarrow (i) $\sqrt{(I : a)} = P$ olacak şekilde $a \in R$ mevcut olsun.

$$(I : a) = \left(\bigcap_{i=1}^s Q_i : a \right) = \bigcap_{i=1}^s (Q_i : a)$$

dir. Devamında $a \in Q_i$ ise $(Q_i : a) = R$, $a \notin Q_i$ ise $(Q_i : a)$ bir P_i -asalımsı idealdir. Bundan dolayı,

$$P = \sqrt{(I : a)} = \bigcap_{\substack{i=1 \\ a \notin Q_i}}^s \sqrt{(Q_i : a)} = \bigcap_{\substack{i=1 \\ a \notin Q_i}}^s P_i$$

dir. P asal ideal olduğundan $a \notin Q_i$ olacak şekilde en az bir i ($1 \leq i \leq s$) tam sayısı için $P = P_i$ elde edilir. \square

Sonuç 2.2.30. (Asalımsı Ayrışım için Birinci Teklik Teoremi) I, R halkasının ayrışabilir bir ideali olsun. I nın iki minimal ayrışımı

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s, \sqrt{Q_i} = P_i (i = 1, 2, \dots, s) \text{ ve}$$

$$I = Q_1^* \cap Q_2^* \cap \dots \cap Q_{s^*}^*, \sqrt{Q_i^*} = P_i^* (i = 1, 2, \dots, s^*)$$

olsun. Şu halde $s = s^*$ ve $\{P_1, P_2, \dots, P_s\} = \{P_1^*, P_2^*, \dots, P_s^*\}$ dir.

Kanıt. Önerme 2.2.29 dan $P \in \text{Spec}(R)$ için P nin P_1, P_2, \dots, P_s den birine eşit olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{(I : a)} = P$ olacak şekilde $a \in R$ olmasıdır. Şu halde, minimal ayrışımında gözükten P_i asal idealleri ayrışımın yazılışından bağımsızdır. □

Tanım 2.2.31. I, R halkasının ayrışabilir bir ideali ve I nin minimal bir asalımsı ayrışımı, $\sqrt{Q_i} = P_i$ ($i = 1, \dots, s$) olmak üzere,

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s$$

olsun. s elemanlı $\{P_1, P_2, \dots, P_s\}$ kümesine, " I ya ilişkin asal idealler" kümesi denir ve

$$A(I) = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$$

ile gösterilir.

Önerme 2.2.32. I, R halkasının ayrışabilir ideali ve $P \in \text{Spec}(R)$ olsun. $P \in \text{Min}(I)$ olması için gerek ve yeter koşul P nin $A(I)$ da minimal eleman olmasıdır.

Kanıt. I nin minimal asalımsı ayrışımı

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_s, \sqrt{Q_i} = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

olsun. Ayrıca $I \subseteq P$ olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{P} = P$ olmasıdır.

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^s \sqrt{Q_i} = \bigcap_{i=1}^s P_i$$

dir. Böylece $I \subseteq P$ olması, bir $1 \leq j \leq s$ için, $P_j \subseteq P$ olmasına denktir. Bu ise bir ilgili asal ideal $P^* \in A(I)$ için, $P^* \subseteq P$ demektir.

(\Rightarrow) P, I nin bir minimal asal ideali olsun. Üstteki açıklamalardan bir $P^* \in A(I)$ için, $P^* \subseteq P$ ve P minimal asal ideal olduğundan, $P^* = P \in A(I)$ bulunur. Fakat $A(I) \subseteq V(I)$ olduğundan, P nin $A(I)$ nin da minimal elemanı olduğu açıktır.

(\Leftarrow) $P, A(I)$ nin bir minimal elemanı olsun. Şu halde $I \subseteq P$ ve Sonuç 2.2.16 den $P' \subseteq P$ olacak şekilde I nin bir minimal asal P' ideali bulunabilir. Üstteki açıklamalardan $P^* \subseteq P'$ olacak şekilde bir $P^* \in A(I)$ vardır. Şu halde

$$P^* \subseteq P' \subseteq P$$

ve $P, A(I)$ nin bir minimal elemanı olduğundan,

$$P^* = P' = P,$$

yani $P = P' \in \text{Min}(I)$ elde edilir. \square

Önerme 2.2.33. R, \mathbb{Z} -dereceli bir halka ve R nin bir I homojen ideali alınsın. Eğer P, I ya ilişkin asal ideallerinden biri ve $r \in R$ için $P = \sqrt{(I : r)}$ ise r homojen seçilebilir.

Kanıt. İlk olarak $i = 1, \dots, s$ için $\sqrt{Q_i} = P_i$ olacak şekilde $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ minimal asalımsı ayrışım olarak alınsın. Ayrıca bu önermenin dereceli olmayan durumdaki ispatına bakılabilir [2, 4.18 Corollary]. Notasyon 2.2.22 den $i = 1, \dots, s$ için Q_i^* ve P_i^* alınsın. Daha sonra Önerme 2.2.32 den $i = 1, \dots, s$ için $\sqrt{Q_i^*} = P_i^*$ olacak şekilde bir $I = Q_1^* \cap \dots \cap Q_s^*$ minimal asalımsı ayrışımına sahiptir. Dolayısıyla

$$r \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s Q_j^* \setminus Q_i^*$$

elde edilir. Devamında r nin homojen bileşenleri r_i 's olmak üzere $r = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i$ olur, böylece $\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i, \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s Q_j^*$ ye aittir. Fakat $r \notin Q_i^*$ olduğundan, $r_k \notin Q_i^* (k \in \mathbb{Z})$ olacak şekilde tek bir bileşen vardır. Dolayısıyla $P = \sqrt{(I : r_k)}$ elde edilir. \square

Bölüm 3

Dereceli Noetherian ve Artinian Halkalar

Dereceli Noetherian ve Artinian halkalardan bahsetmeden önce bir R halkası üzerinde Noetherian ve Artinian halka tanımı verilecek ve temel teoremlerin gerekli görüldüğü yerde ispatlarına da yer verilecektir.

3.1 Noetherian Halkalar

Tanım 3.1.1. R halkasının ideallerinin, her artan

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

zinciri sonlu bir adımda durursa, R ye "Noether halkası" veya "Noetherian halka" denir.

Bu özelliğe kısaca Artan Zincir Koşulu da denir.

Teorem 3.1.2. R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) R Noetherian halkadır,
- (ii) R nin her ideali sonlu üretilmiştir,
- (iii) R nin ideallerinden oluşan, boştan farklı her ailenin bir maksimal elemanı vardır. (**Maksimal Eleman Koşulu**)

Kanıt. (i) \Rightarrow (ii) İlk olarak I, R nin sonlu üretilmemiş bir ideali olsun. Bir $a_1 \in I$ alınsın. $I \neq (a_1)$ olduğundan, bir $a_2 \in I \setminus (a_1)$ olur ve $I \neq (a_1, a_2)$ olduğundan, bir $a_3 \in I \setminus (a_1, a_2)$ bulunur. Bu şekilde devam ederek, bir $a_{k+1} \in I \setminus (a_1, a_2, \dots, a_k)$ elde edilir. Böylece R nin ideallerinin

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \dots \subset (a_1, a_2, \dots, a_k) \subset \dots$$

bir sonsuz zinciri elde edilir. Bu ise çelişki oluşturur. Şu halde I sonlu üretilmiştir.

(ii) \Rightarrow (iii) İlk olarak $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{I}(R)$ olsun. Daha sonra I_0, S nin bir elemanı ve I_0 maksimal değil ise $I_0 \subset I_1$ olacak şekilde, bir $I_1 \in S$ vardır. Devamında I_1 maksimal değil ise $I_1 \subset I_2$ olacak şekilde bir $I_2 \in S$ vardır. Eğer S nin maksimal elemanı yoksa $I_0 \subset I_1 \subset \dots$ olacak şekilde bir sonsuz zincir elde edilir ve daha sonra $I = \bigcup I_i$ olsun. Buradan I, R nin bir idealidir. I ideali sonlu üretilmiş olduğundan, $I = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olacak şekilde $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in I$ vardır. Şu halde (a_1, a_2, \dots, a_n) leri içeren bir I_k bulunur. Dolayısıyla

$$I_k = I \text{ ve } I_k = I_{k+1} = \dots$$

elde edilir. Bu ise zincirin sonsuz oluşu ile çelişir. Şu halde, S nin bir maksimal elemanı vardır.

(iii) \Rightarrow (i) R nin, $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ olacak şekilde herhangi bir artan zinciri alınsın. (iii) den $S = \{I_1, I_2, I_3, \dots\}$ ailesinin bir I_k maksimal elemanı vardır. Şu halde $I_k = I_{k+1} = \dots$ ve böylece R Noetherian halka olur.

□

Örnek 3.1.3. Her esas ideal bölgesi bir Noetherian halkadır. Özel olarak, \mathbb{Z} bir Noetherian halkadır.

Örnek 3.1.4. F cisim olmak üzere, $F[X]$ bir Noetherian halkadır. Fakat, $F[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ bir Noetherian halka değildir. Gerçekten,

$$(X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots \subset (X_1, X_2, \dots, X_n) \subset \dots$$

sonsuz bir zincirdir. $F[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ bir tamlık bölgesidir ve kesir cismi Noetheriandır. Buradan anlaşılıyor ki, Noetherian halkanın her alt halkası Noetherian olmayabilir.

Önerme 3.1.5. R bir Noetherian halkasının, boştan farklı $\{N_i\}_{i \in I}$ nilpotent ideallerinin toplamı da nilpotenttir.

Kanıt. İlk olarak $\Omega = \{N_i : i \in I, N_i \text{ nilpotent ideal}\} \neq \emptyset$ diyelim. R Noetherian halka kabul edildiğinden, bu ailenin en az bir K maksimal elemanı var ve K da nilpotenttir. Devamında $K = \sum N_i$ olduğu gösterilecektir. Daha sonra $K \subseteq \sum N_i$ olduğu açıktır. Tersine içermeyi göstermek için bir $a \in (\sum N_i) \setminus K$ elemanının varlığı kabul edilip bir çelişki elde edilsin ve $a \in N_{i_1} + N_{i_2} + \dots + N_{i_k} = N$ olsun. Sonlu sayıda nilpotent idealin toplamının da nilpotent olmasından, $K \subset K + N$ de nilpotent olur, bu ise $K \in \Omega$ nin maksimal ideal olması ile çelişir.

□

Önerme 3.1.6. R bir Noetherian halka olsun. R nin her homomorf görüntüsü de Noetherian halkadır.

Kanıt. R ve R^* iki Noetherian halka ve $f : R \rightarrow R^*$ bir örten homomorfizma olsun. R^* halkasının ideallerinin herhangi bir artan,

$$I_1^* \subseteq I_2^* \subseteq \dots \subseteq I_n^* \subseteq \dots$$

zinciri alınsın. Devamında $k = 1, 2, \dots$ için, $I_k = f^{-1}(I_k^*)$ ise

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

de R nin ideallerinin artan bir zinciri olur. R Noetherian bir halka olduğundan, her $m \geq n$ için $I_m = I_n$ olacak şekilde bir n tam sayısı vardır. f örten bir dönüşüm olduğundan, $f(I_k) = I_k^*$ dir. Şu halde her $m \geq n$ için $I_m^* = I_n^*$, yani R^* bir Noetherian halkadır.

□

Sonuç 3.1.7. R Noetherian halka ve I , R nin bir ideali olsun. Şu halde R/I da Noetherian halkadır.

Önerme 3.1.8. R bir Noetherian halka ve S de bir çarpımsal kapalı alt kümesi ise $S^{-1}R$ de Noetheriandır.

Kanıt. $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \dots$, $S^{-1}R$ nin ideallerinin bir artan zinciri olsun. İlk olarak $\pi : R \rightarrow S^{-1}R$ doğal homomorfizması altında

$$I_1^c \subseteq I_2^c \subseteq \dots \subseteq I_i^c \subseteq I_{i+1}^c \subseteq \dots$$

de, R Noetherian halkasının ideallerinin bir artan zinciridir. Her $i \in \mathbb{N}$ için, $I_k^c = I_{k+i}^c$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $I_k^{ce} = I_{k+i}^{ce}$ dir. Şu halde $i \in \mathbb{N}$ için $I_k = I_{k+i}$ olduğundan, $S^{-1}R$ de bir Noetherian halkadır. \square

Teorem 3.1.9. (Cohen Teoremi) Her asal ideali, sonlu üretilmiş bir halka Noetheriandır.

Kanıt. R halkasının her asal ideali sonlu üretilmiş olsun. R nin Noetherian olmadığı kabul edilsin. R nin sonlu üretilmemiş ideallerinin kümesi Ω ile gösterilsin. Devamında $\Omega \neq \emptyset$ dir. (Ω, \subseteq) sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi (zincir) olarak, $\{I_i\}$ alınsın. Daha sonra $J = \cup I_i$ de R nin sonlu üretilmemiş bir idealidir. Gerçekten, J sonlu üretilmiş olsaydı, zincirde üreteçlerin hepsini kapsayan bir I_k ideali bulunur ve bu takdirde, $J = I_k$ olduğundan zincirdeki ideallerin sonlu üretilmediği kabülle çelişirdi. Şu halde $J \in \Omega$ bir üst sınır ve Zorn Lemması'na göre, Ω nın en az bir maksimal P elemanı vardır. Devamında bu P maksimal elemanın bir asal ideal olduğu gösterilmelidir. Böylece, asal ideallerin sonlu üretilmediği kabul edildiğinden bir gelişki elde edilir ve $\Omega = \emptyset$, yani her idealin sonlu üretilmiş olduğu ispatlanmış olur. Sonra $R = R_1$ sonlu üretilmiş ve $P \in \Omega$ sonlu üretilmediğinden, $P \subset R$ dir. Daha sonra $a \notin P$ ve $b \notin P$ olacak şekilde $a, b \in R$ alınsın ve $ab \in P$ olduğu kabul edilsin. Buradan $P \subset P + Ra$ olduğundan, $p_1, p_2, \dots, p_m \in P$ ve $r_1, r_2, \dots, r_m \in R$ olmak üzere,

$$P + Ra = (p_1 + r_1a, p_2 + r_2a, \dots, p_m + r_ma)$$

sonlu üretilmiştir.

$$(P : a) = \{r \in R : ra \in P\}$$

olmak üzere, $ab \in P$ olduğundan $b \in (P : a)$ ve böylece $P \subset (P : a)$ olur. Şu halde bir $v_1, v_2, \dots, v_n \in R$ için, $(P : a) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ideali de sonlu üretilmiş ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için, $av_i \in P$ dir.

Buradan,

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n, av_1, av_2, \dots, av_n)$$

sonlu üretilmiş bir idealdir. Gerçekten, her $x \in P$ elemanı, $s_i \in R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m s_i (p_i + r_i a) = \sum_{i=1}^m s_i p_i + \left(\sum_{i=1}^m s_i r_i \right) a \\ &\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^m s_i r_i \right) a = x - \sum_{i=1}^m s_i p_i \in P \\ &\Rightarrow s = \sum_{i=1}^m s_i r_i \in (P : a) \Rightarrow s = \sum_{j=1}^n t_j v_j \end{aligned}$$

$t_j \in R (j = 1, 2, \dots, n)$ olduğundan,

$$x = \sum_{i=1}^m s_i p_i + \sum_{j=1}^n t_j (a v_j)$$

şeklinde yazılır. Bu ise $P \in \Omega$ olması ile çelişir. Şu halde, $ab \notin P$, yani P asal idealdir. \square

Lemma 3.1.10. R bir halka, I ve J , $R[X]$ halkasının idealleri ve $I \subseteq J$ olsun. Her $i \geq 0$ tam sayısı için,

$$L_i(I) = \{a_i \in R : \sum_{j=0}^i a_j X^j \in I \text{ olmak üzere } a_0, a_1, \dots, a_{i-1} \in R \text{ var}\}$$

kümesi tanımlansın.

(i) Her $i \geq 0$ tam sayısı için $L_i(I)$, R nin bir idealidir ve $L_i(I) \subseteq L_i(J)$ dir.

(ii) $L_0(I) \subseteq L_1(I) \subseteq \dots \subseteq L_n(I) \subseteq L_{n+1}(I) \subseteq \dots$ dir.

(iii) Her $n \geq 0$ tam sayısı için $L_n(I) = L_n(J)$ ise $I = J$ dir.

Kanıt. (i) Açıktır.

(ii) İlk olarak $a_i \in L_i(I)$ ise $a_0, a_1, \dots, a_{i-1} \in R$ vardır ki, $f = \sum_{j=0}^i a_j X^j \in I$ olduğundan, $Xf \in I$ dir. Böylece $a_i \in L_{i+1}(I)$ bulunur.

(iii) Öncelikle $I \subseteq J$ ve her $n \geq 0$ tam sayısı için, $L_n(I) = L_n(J)$ kabul edilsin. Daha sonra $I \subset J$ olsaydı, J de olup I da olmayan en az bir polinom var ve bu polinomlar arasında en küçük dereceli olanı da,

$$g = \sum_{j=0}^n b_j X^j \in J, g \notin I, (b_n \neq 0)$$

olsun. Şu halde $b_n \in L_n(J) = L_n(I)$ dir. Böylece

$$h = b_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_0 \in I$$

vardır. Bundan dolayı $g - h \in J \setminus I$ ve $\text{der}(g - h) \leq n - 1$ dir. Bu sonuç n nin seçimiyle çelişir. Şu halde $I = J$ dir. \square

Teorem 3.1.11. (Hilbert Taban Teoremi) R Noetherian halka ise $R[X]$ de Noetherian halkadır.

Kanıt. $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_j \subseteq I_{j+1} \subseteq \dots$, $R[X]$ in ideallerinin artan bir zinciri olsun. Lemma 3.1.10 dan her $i \geq 0$ tam sayısı için,

$$L_i(I_0) \subseteq L_i(I_1) \subseteq \dots \subseteq L_i(I_j) \subseteq L_i(I_{j+1}) \subseteq \dots$$

ve her $j \geq 0$ tam sayısı için,

$$L_0(I_j) \subseteq L_1(I_j) \subseteq \dots \subseteq L_i(I_j) \subseteq L_{i+1}(I_j) \subseteq \dots$$

olur. R Noetherian bir halka olduğu için, R nin boş olmayan

$$\{L_i(I_j) : i, j \geq 0 \text{ tam sayı}\}$$

idealler ailesinin, bir maksimal $L_p(I_q)$, ($p, q \geq 0$) elemanı vardır. Böylece $i \geq p$ olacak şekilde her i tam sayısı için,

$$L_i(I_j) = L_i(I_q) (= L_p(I_q)), (\text{her } j \geq q \text{ için})$$

olur. Aynı zamanda her $i = 0, 1, \dots, p - 1$ için, ilk p zincirin sonlu olduğu kullanılarak,

$$L_i(I_j) = L_i(I_{q^*}), (\text{her } j \geq q^* \text{ için})$$

olacak şekilde bir $q^* \geq 0$ bulunur. Daha sonra $t = \max\{q, q^*\}$ alınır, her $i \geq 0$ tam sayısı için $L_i(I_j) = L_i(I_t)$ ($j \geq t$ için) bulunur. Lemma 3.1.10 (iii) den her $j \geq t$ için $I_j = I_t$ dir. Böylece $R[X]$ de Noetherian halkadır. \square

Sonuç 3.1.12. R Noetherian halka ise $R[X_1, X_2, \dots, X_n]$ de Noetherian halkadır.

3.2 Artinian Halkalar

Tanım 3.2.1. R halkasının idealleri, her azalan

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

zinciri sonlu bir adımda durursa R ye "Artinian halka" veya "Artin halkası" denir.

Teorem 3.2.2. R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R Artinian halkadır,

(ii) R halkasının ideallerinin, boştan farklı her alt kümesinin bir minimal elemanı vardır.

Örnek 3.2.3. Her cisim Artinian halkadır.

Örnek 3.2.4. $n > 1$ olmak üzere, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkası sonlu olduğundan Artinian halkadır.

Teorem 3.2.5. Her Artinian tamlık bölgesi bir cisimdir.

Kanıt. R Artinian bir tamlık bölgesi ve $0 \neq a \in R$ olsun. İlk olarak $(a) \supseteq (a^2) \supseteq \dots$ azalan zinciri göz önüne alınsın. R Artinian bir halka olduğundan bir n tam sayısı için

$$(a^n) = (a^{n+1}) = \dots$$

elde edilir. Şu halde $a^n = ra^{n+1}$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. R bir tamlık bölgesi olduğundan, $1 = ra$ dır. R cisimdir.

□

Sonuç 3.2.6. Artinian halkanın her asal ideali maksimaldir.

Sonuç 3.2.7. R Artinian halkasında nil radikali ve Jacobson radikali aynıdır, yani $N(R) = J^h(R)$ dir.

Teorem 3.2.8. Artinian halkada sonlu tane maksimal ideal vardır.

Kanıt. R bir Artinian halka olsun. Ω ile R nin sonlu tane maksimal idealin kesişimi olarak yazılabilen idealler kümesi gösterilsin. R Artinian bir halka olduğundan Ω nin minimal elemanı vardır. Ω nin minimal elemanı J ile gösterilsin.

$$J = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

olacak şekilde R nin M_1, M_2, \dots, M_n maksimal idealleri vardır. R nin tüm maksimal ideallerinin M_1, M_2, \dots, M_n olduğu ispatlanmalıdır. M, R nin bir maksimal ideali olsun. Şu halde

$$J = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n \supseteq M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n \in \Omega$$

dir. $J \in \Omega$ minimal eleman olduğundan

$$J = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

dir. Bundan dolayı $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n \subseteq M$ ve böylece bir j ($1 \leq j \leq n$) için, $M_j = M$ bulunur. \square

Teorem 3.2.9. *R bir Artinian halka ise nil radikali $N = N(R)$ bir nilpotent idealdir.*

Kanıt. $N \supseteq N^2 \supseteq N^3 \supseteq \dots$ zinciri göz önüne alınsın. R Artinian halka olduğundan bir n tam sayısı için $N^n = N^{n+1} = \dots$ dir. Devamında $I = N^n$ alınırsa $I \subseteq N$ ve $I^2 = I$ olur. $I = 0$ olduğu ispatlanmalıdır. Daha sonra $I \neq 0$ olsun. R halkasının $J \subseteq I$ ve $J \neq 0$ olacak şekilde J ideallerinin kümesi göz önüne alınsın. I ideali bu kümenin elemanı olduğundan, boş küme değildir. Bu kümenin minimal elemanı K olsun. Dolayısıyla $KI \neq 0$ ve bir $a \in K$ için $aI \neq 0$ dir. Böylece,

$$(aI)I = aI^2 = aI \neq 0$$

ve $aI \subseteq K \subseteq I$ olur. Şu halde K nin minimalliğinden $aI = K$ ve bir $b \in I$ için $ab = a$ dir. Fakat $b \in I \subseteq N$ olduğundan, $(1 - b)$ terslenebilir bir elemandır. Buradan $(1 - b)c = 1$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır. Fakat,

$$a = a(1 - b)c = (a - ab)c = 0$$

olması, $aI \neq 0$ ile çelişir. Sonuç olarak, $I = N^n = 0$ elde edilir. \square

3.3 Dereceli Noetherian ve Artinian Halkalar

Notasyon 3.3.1. \mathbb{Z} -dereceli bir R halkası alınsın. $der \geq 0$ olacak şekilde tüm homojen elemanların toplamından oluşan R nin alt halkası R^+ ve $der \leq 0$ olacak şekilde tüm homojen elemanların toplamından oluşan alt halka ise R^- şeklindedir.

Tanım 3.3.2. R nin her homojen ideali sonlu üretilmiş ise \mathbb{Z} -dereceli R halkası \mathbb{Z} -dereceli bir Noetherian halkadır.

Teorem 3.3.3. R , \mathbb{Z} -dereceli halka ise aşağıdaki ifadeler R için denktir.

- (i) R , \mathbb{Z} -dereceli Noetherian halkadır,
- (ii) R_0, R^+, R^- , \mathbb{Z} -dereceli Noetherian halka ve her n için R_n ler sonlu üretilmiş R_0 -modülüdür,
- (iii) R_0 , Noetherian bir halka ve $R^+ = R_0[x_1, \dots, x_n]$ ve $R^- = R_0[y_1, \dots, y_s]$ olacak şekilde pozitif dereceli x_1, \dots, x_n ve negatif dereceli y_1, \dots, y_s homojen elemanları vardır.

Kanıt. (i) \Rightarrow (ii) İlk olarak I, R_0 m bir ideali olsun. O zaman IR, I dan seçilen elemanların sonlu kümesiyle üretilir. Bu elemanlar I yı R_0 m bir ideali olarak üretir. Buradan I sonlu şekilde üretilir. I, R_0 m keyfi bir ideali olarak seçildiğinden, R_0 Noetherian bir halkadır. I, R_n nin elemanlarıyla üretilmiş R nin bir ideali olsun. R Noetherian halka olduğundan, I sonlu şekilde üretilir; üreteçleri a_1, a_2, \dots, a_m seçilsin. Bir a_1, a_2, \dots, a_m içerisinde herhangi biri a ile gösterilsin. Daha sonra $r'_i \in R, t'_i \in R_n$ olmak üzere

$$a = r'_1 t'_1 + \dots + r'_p t'_p$$

olacak şekilde ifade edilir. Bu a_1, a_2, \dots, a_m lerin her biri R_n nin elemanlarının (R de katsayıları olan) sonlu sayıda bir lineer kombinasyonudur. Böylece R_n nin bir $\{t_1, \dots, t_s\}$ sonlu alt kümesi vardır ve her $1 \leq i \leq m$ için $r_{ij} \in R$ olmak üzere

$$a_i = r_{i1} t_1 + r_{i2} t_2 + \dots + r_{is} t_s$$

eşitliği doğrudur. Dolayısıyla $I = Rt_1 + Rt_2 + \dots + Rt_s$ elde edilir.

İddia $R_n = R_0 t_1 + R_0 t_2 + \dots + R_0 t_s$ olmasıdır. Varsayalım ki $u \in R_n$ dir. Buradan $u \in I$ olur ve böylece R ye ait uygun r_1, r_2, \dots, r_s elemanları için

$$u = r_1 t_1 + r_2 t_2 + \dots + r_s t_s \quad (*)$$

olarak yazılır. Devamında r_i elemanı, farklı dereceli homojen elemanların bir toplamı olarak tek türlü ifade edilir; öyle ki $r_i = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} r_{i\lambda}$ dir. Eğer (*) nin iki tarafında n dereceli homojen bileşenler karşılaştırılırsa,

$$u = r_{1_0} t_1 + r_{2_0} t_2 + \dots + r_{s_0} t_s$$

bulunur. Yani $R_n \subseteq R_0 t_1 + R_0 t_2 + \dots + R_0 t_s$ olduğunu gösterir ve içermenin tersi açıktır, dolayısıyla

$$R_n = R_0 t_1 + R_0 t_2 + \dots + R_0 t_s$$

gösterilmiş olur. Böylece R_n , sonlu üretilmiş R_0 -modülüdür. Daha sonra R^+ nin homojen bir ideali I alınsın ve IR sonlu şekilde üretildiğinden IR , I nin homojen elemanlarının sonlu kümesiyle üretilmiştir; bu üreteçler $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j}$ seçilsin ve $i = \max \{i_k : k = 1, \dots, j\}$, $m \geq i$ olmak üzere $b_m \in I_m = I \cap R_m$ alınsın. Devamında $b_m = r_1 a_{i_1} + r_2 a_{i_2} + \dots + r_j a_{i_j}$ olacak şekilde R nin r_1, \dots, r_j homojen elemanları mevcuttur. Her k için $m \geq i_k$ olduğundan $k = 1, \dots, j$ için $r_k \in R^+$ elde edilir. R_n sonlu üretilmiş R_0 -modülü olduğundan, $m < i$ için $I \cap R_m$, sonlu üretilmiş R_0 -modülüdür; üreteçleri $\{r'_1, \dots, r'_s\}$ dir. Daha sonra $m = 0, \dots, i - 1$ için $I \cap R_m$ nin üreteçlerine $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_j}\}$ üreteç kümesi eklensin. Elde edilen küme, R^+ nin bir ideali olarak I nin üreteçlerinin sonlu kümesini verir;

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_j} : i = 0, \dots, m - 1\} \cup \{r'_1, r'_2, \dots, r'_s\}$$

dir. Böylelikle R^+ , \mathbb{Z} -dereceli Noetherian halkadır. Benzer şekilde R^- , \mathbb{Z} -dereceli bir Noetherian halkadır.

(ii) \Rightarrow (iii) Pozitif dereceli R nin homojen elemanlarıyla üretilen R^+ nin bir ideali I^+ alınsın. Bu ideal x_1, \dots, x_n homojen üreteçlerinin sonlu bir kümesidir. Derecesi $d_i > 0$ olacak şekilde x_i alınsın. Devamında r dereceli R^+ nin bir elemanı z olsun. R_0 halkasında, katsayıları x_1, \dots, x_n olan z polinomu r üzerinden tümevarımla ispatlanacaktır. Eğer $r = 0$ ise ispat açıktır. $r > 0$ ise r derecesi $r - d_i < r$ ($r < d_i$ ise $z_i = 0$) olacak şekilde z_i homojen elemanı için

$$z = \sum x_i z_i$$

yazılır ve dolayısıyla z , R_0 halkasında, katsayıları x_1, \dots, x_n olan bir polinom olarak elde edilir. Böylece $z \in R^+$ dan $z \in R_0[x_1, \dots, x_n]$ olur. $R^+ \subseteq R_0[x_1, \dots, x_n]$ ve $R^+ =$

$R_0[x_1, \dots, x_n]$ elde edilir. Ayrıca $R^- = R_0[y_1, \dots, y_s]$ ispatı benzer yolla yapılır.

(iii) \Rightarrow (i) İlk olarak (iii). hipotezde $R = R_0[x_1, \dots, x_n : y_1, \dots, y_s]$ olması kullanılır. Dolayısıyla Teorem 3.1.11 (Hilbert Taban Teoremi) den, R nin tüm idealleri (dereceli olmayan idealler bile) sonlu şekilde üretilir. Böylelikle \mathbb{Z} -dereceli R halkası Noetherian bir halkadır. \square

Sonuç 3.3.4. \mathbb{Z} -dereceli bir R halkası alınsın. Eğer R , \mathbb{Z} -dereceli Noetherian halka ise R Noetherian halkadır.

Not 3.3.5. Benzer şekilde \mathbb{Z} -dereceli bir Artinian halka tanımlansın. Bu durumda \mathbb{Z} -dereceli Artinian bir halkanın Artinian halka olması gerekmez.

$K[X, X^{-1}]$ (K cisim olmak üzere) \mathbb{Z} -dereceli Artinian halkadır fakat Artinian halka değildir.



Bölüm 4

Sonuç

Halka teorisi cebirin temel yapılarından birisidir. Halkalar, cebirin diğer temel yapısı olan grupların üzerine inşa edilir. Ayrıca dereceli halkaların cebirsel geometri ve değişmeli cebirde önemli bir yeri olduğundan, bu tezde değişmeli halka yapısındaki teorilerin \mathbb{Z} -dereceli halka yapısına nasıl taşındığı ve arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Kaynakça

- [1] S. Esin, *Graded Rings and Modules*, Department of Pure Mathematics, University of Sheffield, UK, (1990).
- [2] R.Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, 2nd ed., London Mathematical Society Student Texts, (Cambridge: 51. Cambridge University Press, 2000).
- [3] F. Çallıhalp & Ü. Tekir, *Değişmeli Halkalar ve Modüller*, Birsen Yayınevi, (2009): 97-110.
- [4] A. Smoktunowicz, *A note on Nil and Jacobson radicals in graded rings*, The University of Edinburgh, (Scotland: Journal of algebra and its applications, 2014).
- [5] M.F. Atiyah & İ.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford, (London: Addison-Wesley Publishing, 1969).
- [6] C. Nastasescu & F.V. Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing, (1982).
- [7] R.Y. Sharp, *Proceedings Graded Rings, Queens Papers in Pure & Applied Maths.*