EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

KİTLE ORTALAMASI İÇİN SIRA İSTATİSTİKLERİ İLE PARAMETRE TAHMİNİ

Zeynep CEYLAN

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ

İstatistik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 406.02.01
Sunuş Tarihi : 04.09.2012

Bornova-İZMİR

2012

Zeynep CEYLAN tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan "Kitle Ortalaması İçin Sıra İstatistikleri ile Parametre Tahmini" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 04.09.2012 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği / oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: ……………………….……………**	**…………**
Raportör Üye	**: ……………………….……………**	**…………**
Üye	**: ……………………….……………**	**…………**

ÖZET

KİTLE ORTALAMASI İÇİN SIRA İSTATİSTİKLERİ İLE PARAMETRE TAHMİNİ

CEYLAN, Zeynep

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ
Eylül 2012, 49 sayfa

Bu tezde, kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile parametre tahmini çalışılmıştır. Bunun için, Uniform dağılım modelleri incelenmiştir. Sıra istatistikleri ile parametre tahmini için öncelikle sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları sunulmuştur.

Kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile elde edilen tahmin edicilerin yansız tahmin ediciler olması sağlanmıştır. Sıra istatistikleri ile kurulan bu yansız tahmin edicilerin varyansları hesaplanmıştır.

Kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile oluşturulan bu yansız tahmin edicilerden en küçük varyansa sahip olan tahmin edici bulunmuştur. Dolayısıyla, yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahip olan tahmin edici istatistik teorisi açısından oldukça önemlidir.

Kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile kurulan yansız tahmin edicilerden en küçük varyansa sahip tahmin edici simülasyon çalışmasıyla da desteklenmiştir. Bunun için, bilgisayar programı ile söz konusu dağılımdan rasgele sayılar elde edilmiştir. Bu rasgele sayılar ile, önerilen tahmin edicilerin ortalama ve varyansları hesaplanmıştır. Bu hesaplamaların teorik sonuçları desteklediği görülmüştür.

Anahtar sözcükler: Sıra İstatistikleri, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Uniform Dağılım, Yansız Tahmin Edici, Beklenen Değer, Varyans.

ABSTRACT

PARAMETER ESTIMATION WITH ORDER STATISTICS FOR POPULATION MEAN

CEYLAN, Zeynep

MSc in Statistics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammet BEKÇİ
September 2012, 49 pages

In this thesis, parameter estimation with order statistics for population mean is studied. For this, Uniform distribution models are investigated. For parameter estimation with order statistics, firstly probability density functions of order statistics are presented.

Estimators obtained with order statistics for population mean are provided to be unbiased estimators. Variances of these unbiased estimators constituted with order statistics are calculated.

From these unbiased estimators constituted with order statistics for population mean, estimator that has minimum variance is found. Therefore, estimator that has minimum variance among unbiased estimators is very important in terms of statistics theory.

From unbiased estimators constituted with order statistics for population mean, estimator that has minimum variance is supported with simulation study too. For this, random numbers from distribution said are obtained with computer software. With these random numbers, mean and variances of recommended estimators are calculated. It is seen that these calculations support theorical results.

Keywords: Order Statistics, Probability Density Function, Uniform Distribution, Unbiased Estimator, Expected Value, Variance.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince benden destek ve yardımlarını esirgemeyen, ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı danışmanım Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ'ye ve çalışmam boyunca her zaman yanımda olan değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo Sayfa

1. GİRİŞ

Sıra istatistikleri istatistik teorisinin en önemli kavramlarından biri olup, temel istatistik yöntemlerde ve istatistiksel sonuç çıkarımında kullanılmaktadır. Aynı zamanda, teste tabi tutulan n tane ürünün yaşam zamanlarını gösterdiği için, yaşam analizi (life-time analysis) ve güvenilirlik teorisinde (reliability theory) önemli yer tutmaktadır. Sıra istatistikleri, yeterli istatistikler olduklarından örneklem hakkındaki tüm bilgiyi içerirler. Sıra istatistiklerine son yıllarda artan ilgi, bu alanın hızla gelişimini sağlamıştır. Özellikle, sıra istatistiklerine dayalı birçok istatistik, dağılımdan bağımsız (distribution-free) özelliği taşıdığı için, parametrik olmayan istatistiksel yöntemlerde geniş şekilde kullanılmaktadır.

Her bir rasgele değişken dağılım fonksiyonu ile karakterize edilir. Fakat pratikte dağılım fonksiyonu çoğu zaman belli olmaz. Matematiksel istatistiğin temel problemlerinden birisi rasgele değişkenin deneysel değerlerini kullanarak onun dağılım fonksiyonunu tahmin etmektir. Bazen dağılım fonksiyonunun analitik ifadesi belli olur, ama bu ifade birkaç bilinmeyen parametre içerir. Mesela, Poisson ve üstel dağılımlar tek parametreli, normal ve gamma dağılımları ise iki parametrelidir. Bu parametreler moment denilen sayısal göstergeler ile ifade edilmektedir. Bilinmeyen dağılım fonksiyonu belli koşullar altında momentler yardımıyla tek olarak belirlenebilir. Ayrıca, olasılık ve stokastik süreçler için önem taşıyan bazı eşitsizlikler momentler yardımıyla ifade edilmektedir.

Gelişmeler 1950'li ve 1960'lı yıllarda Scheffe ve Tukey (1945), Lloyd (1952), Downton (1954), Sarhan (1954-1955), Harter (1961), Kulldorff (1963) Siddiqui (1963) ve Chernoff vd. (1967) ile başlamıştır. David'in (1981) sıra istatistikleri kitabı bu konuda önemli bir kaynaktır. Bu konuda önemli kaynaklardan bazıları Balakrishnan ve Cohen (1991), Ahsanullah ve Nevzorov (2005), Ahsanullah (2007) ve Arnold vd. (2008) olarak sıralanır.

Bu çalışmanın amacı, kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile parametre tahmini yapmaktır. Kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile elde edilen tahmin edicilerin yansız tahmin ediciler olması sağlanmış ve bu yansız tahmin edicilerin varyansları hesaplanmıştır. Kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile oluşturulan bu yansız tahmin edicilerden en küçük varyansa sahip olan tahmin edici bulunmuştur. Dolayısıyla, yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahip olan tahmin edici istatistik teorisi açısından oldukça önemlidir.

2. SIRA İSTATİSTİKLERİ

$X_1, X_2,..., X_n$ bağımsız ve aynı $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ dağılımına sahip rasgele değişkenler olsun.

$$X_{1:n} = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2,..., X_n\},\ldots, X_{n:n} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2,..., X_n\}$$

şeklinde tanımlansın.

$X_{1:n}, X_{2:n},..., X_{n:n}$ arasında $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}$ eşitsizliği yazılabilir. Literatürde $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}$'lere $X_1, X_2,..., X_n$ rasgele değişkenlerine dayalı sıra istatistikleri adı verilir.

Dağılım fonksiyonu herhangi bir X rasgele değişkeni için $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ şeklinde tanımlansın. O zaman r'inci sıra istatistiği $X_{r:n}$'in dağılım fonksiyonu için $F_{X_{r:n}}(x) = P\{X_{r:n} \leq x\}$ yazılabilir.

2.1 Minimum ve Maksimum Sıra İstatistiklerinin Dağılım Fonksiyonu

$X_{1:n}$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_{X_{1:n}}(x)$ ile gösterilir. O zaman;

$$F_{X_{1:n}}(x) = P\{X_{1:n} \leq x\} = 1 - [1 - F(x)]^n \tag{2.1}$$

olur.

$X_{n:n}$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_{X_{n:n}}(x)$ ile gösterilir. O zaman;

$$F_{X_{n:n}}(x) = P\{X_{n:n} \leq x\} = [F(x)]^n \tag{2.2}$$

olur.

2.2 r'inci Sıra İstatistiğinin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Dağılım Fonksiyonu

$X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı $F_X(x) = P\{X \le x\}$ dağılımına sahip rasgele değişkenler olsun. $1 \le r \le n$ olmak üzere; r'inci sıra istatistiği $X_{r:n}$ olsun. O zaman $X_{r:n}$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_{r:n}}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r} f(x) \tag{2.3}$$

ve $X_{r:n}$'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_{X_{r:n}}(x) = P\{X_{r:n} \le x\} = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1-F(x)]^{n-i} \tag{2.4}$$

olur.

2.3 İki Sıra İstatistiğinin Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu ve Dağılım Fonksiyonu

$X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız ve aynı $F_X(x) = P\{X \le x\}$ dağılımına sahip rasgele değişkenler olsun. $1 \le r < s \le n$ olmak üzere; r'inci sıra istatistiği $X_{r:n}$ ve s'inci sıra istatistiği $X_{s:n}$ olsun. O zaman bu iki sıra istatistiğinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_{r:n},X_{s:n}}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}[F(x)]^{r-1}[F(y)-F(x)]^{s-r-1}$$

$$\times [1-F(y)]^{n-s} f(x) f(y) \quad ; r < s \text{ ve } x < y \tag{2.5}$$

ve ortak dağılım fonksiyonu,

$$F_{X_{r:n},X_{s:n}}(x,y) = P\{X_{r:n} \le x, X_{s:n} \le y\}$$

$$= \sum_{j=s}^{n} \sum_{i=r}^{j} \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!}[F(x)]^i [F(y)-F(x)]^{j-i} [1-F(y)]^{n-j} \tag{2.6}$$

olur.

2.4 Beklenen Değer ve Varyans

Herhangi bir sürekli X rasgele değişkeninin beklenen değeri, ya da sürekli $Y = g(X)$ rasgele değişkeninin beklenen değeri aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x).dx \tag{2.7}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \tag{2.8}$$

Eğer $g(X) = X^2$ olarak alınırsa X rasgele değişkeninin ikinci momenti aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x).dx \tag{2.9}$$

Beklenen değer bir merkezi eğilim ölçüsüdür. Bunun yanı sıra, yayılım ölçülerinden biri olan varyans kavramı da istatistiksel açıdan oldukça önem taşımaktadır. O halde, X rasgele değişkeninin varyansı aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{2.10}$$

2.5 Yansızlık

Kitle parametresi (θ) için herhangi bir tahmin edici θ^* olsun. Eğer bu tahmin edicinin beklenen değeri kitle parametresine eşit ise, yani,

$$E(\theta^*) = \theta \tag{2.11}$$

eşitliği sağlanıyorsa, θ^*, θ için yansız bir tahmin edicidir.

Aynı kitle parametresi için önerilen yansız tahmin edicilerden en küçük varyanslı olan tahmin edici tercih edilir. Bu tahmin ediciye en küçük varyanslı yansız tahmin edici adı verilir.

3. KİTLE ORTALAMASI İÇİN SIRA İSTATİSTİKLERİ İLE ÖNERİLEN BAZI TAHMİN EDİCİLERİN BEKLENEN DEĞER VE VARYANSI

Bu bölümde, Uniform dağılımın kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile parametre tahminine yönelik tahmin ediciler önerilerek bu tahmin edicilerin beklenen değer ve varyansları bulunup istatistiksel özellikleri bakımından karşılaştırılmıştır.

3.1 $(0,1)$ Aralığında Uniform Dağılım

Uniform $(0,1)$ dağılımına sahip bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere,

$$f(x) = 1 \quad \text{ve} \quad F(x) = x \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

dir. X rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad V(X) = \frac{1}{12}$$

dir.

Her biri aynı Uniform $(0,1)$ dağılımına sahip ve birbirinden bağımsız $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin sıralanmasıyla elde edilen sıra istatistikleri $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ olsun. Uniform $(0,1)$ dağılımına ilişkin, sıra istatistikleri ile kitle ortalaması için önerilen bazı yansız tahmin ediciler aşağıda sunulmuştur.

i) Maksimum sıra istatistiği $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_1^* olsun. O halde θ_1^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_1^* = \frac{n+1}{2n} X_{(n)} \tag{3.1}$$

θ_1^* tahmin edicisinin beklenen değeri için, $X_{(n)}$'in beklenen değerine ihtiyaç vardır.

$$E(\theta_1^*) = \frac{n+1}{2n} E(X_{(n)})$$

Burada $X_{(n)}$'nin beklenen değeri

$$E(X_{(n)}) = \int_0^1 x\, f_{X_{(n)}}(x) dx = \int_0^1 x \frac{n!}{(n-1)!0!} (x)^{n-1} (1-x)^0 1dx$$

$$= n\int_0^1 x^n dx = n \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1$$

$$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1} \tag{3.2}$$

olup θ_1^* tahmin edicisinin beklenen değeri ise

$$E(\theta_1^*) = \frac{n+1}{2n} \frac{n}{n+1}$$

$$E(\theta_1^*) = \frac{1}{2} \tag{3.3}$$

olarak bulunur.

Maksimum sıra istatistiği $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_1^*'ın beklenen değerinden, bu tahmin edicinin yansız olduğu görülür.

θ_1^* tahmin edicisinin varyansı için, θ_1^*'ın karesinin beklenen değeri hesaplanır.

$$E(\theta_1^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{4n^2} E(X_{(n)}^2)$$

Bunun için de maksimum sıra istatistiği olan $X_{(n)}$'in karesinin beklenen değeri elde edilir ve yerine konularak sonuca ulaşılır.

$$E(X_{(n)}^2) = \int_0^1 x^2 f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_0^1 x^2 \frac{n!}{(n-1)!}(x)^{n-1} dx$$

$$= n\int_0^1 x^{n+1}dx = n\left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^1$$

$$E(X_{(n)}^2) = \frac{n}{n+2} \tag{3.4}$$

$$E(\theta_1^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{4n^2}\frac{n}{n+2}$$

$$E(\theta_1^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{4n(n+2)} \tag{3.5}$$

Bu sonuç ile maksimum sıra istatistiği olan $X_{(n)}$'e bağlı olan tahmin edici θ_1^*'ın varyansı aşağıdaki gibi bulunur.

$$V(\theta_1^*) = E(\theta_1^{*2}) - \left[E(\theta_1^*)\right]^2 = \frac{(n+1)^2}{4n(n+2)} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{4n(n+2)}$$

$$V(\theta_1^*) = \frac{1}{4n(n+2)} \tag{3.6}$$

ii) Maksimum ve minimum sıra istatistikleri olan $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_2^* olsun. O halde θ_2^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_2^* = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2} \tag{3.7}$$

θ_2^* tahmin edicisinin beklenen değerini bulmak için aşağıda görüldüğü gibi $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'in beklenen değerine ihtiyaç vardır.

$$E(\theta_2^*) = \frac{1}{2}\left[E(X_{(1)}) + E(X_{(n)})\right]$$

$X_{(1)}$'in beklenen değeri

$$E(X_{(1)}) = \int_0^1 x\, f_{X_{(1)}}(x)dx = \int_0^1 x \frac{n!}{0!(n-1)!}(x)^0(1-x)^{n-1}dx$$

$$E(X_{(1)}) = n\int_0^1 x(1-x)^{n-1}dx \quad \begin{vmatrix} 1-x=u \\ -dx=du \end{vmatrix}$$

$$= n\int_0^1 (1-u)u^{n-1}du = n\left[\int_0^1 u^{n-1}du - \int_0^1 u^n du\right]$$

$$= n\left(\frac{u^n}{n}\Big|_0^1 - \frac{u^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= n\left(\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right)$$

$$E(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1} \tag{3.8}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde ya da (3.2)'de görüldüğü üzere $X_{(n)}$'in beklenen değeri

$$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1} \tag{3.9}$$

olup buradan θ_2^* tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E(\theta_2^*) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right] = \frac{1}{2(n+1)}(n+1)$$

$$E(\theta_2^*) = \frac{1}{2} \tag{3.10}$$

olarak elde edilir.

Maksimum ve minimum sıra istatistikleri olan $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_2^*'ın beklenen değerine bakılırsa, sonuçta bu tahmin edicinin yansız olduğu görülür.

θ_2^*'ın varyans hesabı için θ_2^*'ın karesinin beklenen değerinin hesaplaması gereklidir.

$$E(\theta_2^{*2}) = \frac{1}{4}\left[E(X_{(1)}^2) + 2E(X_{(1)}X_{(n)}) + E(X_{(n)}^2)\right]$$

Bunun için de maksimum ve minimum sıra istatistikleri olan $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'in karelerinin ve bunların çarpımının beklenen değerleri hesaplanır ve yerine konularak yukarıdaki denklem çözülür.

$$E(X_{(1)}^2) = \int_0^1 x^2 \frac{n!}{(n-1)!}(1-x)^{n-1}dx = n\int_0^1 x^2(1-x)^{n-1}dx \qquad \left| \begin{array}{l} 1-x=u \\ -dx=du \end{array} \right.$$

$$= n\int_0^1 (1-u)^2 u^{n-1}du = n\left[\int_0^1 u^{n-1}du - \int_0^1 2u^n du + \int_0^1 u^{n+1}du\right]$$

$$= n\left[\frac{u^n}{n} - 2\frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n+2}}{n+2}\right]\Bigg|_0^1$$

$$= n\left[\frac{1}{\underset{(n+1)(n+2)}{n}} - 2\frac{1}{\underset{n(n+2)}{n+1}} + \frac{1}{\underset{n(n+1)}{n+2}}\right]$$

$$= \frac{n}{n(n+1)(n+2)}\left[\underbrace{(n+1)(n+2) - 2n(n+2) + n(n+1)}_{n^2+2n+n+2-2n^2-4n+n^2+n}\right]$$

$$E(X_{(1)}^2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \tag{3.11}$$

$X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'in çarpımının beklenen değeri için bu iki sıra istatistiğinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu hesaplanır ve çift katlı integral uygulanarak sonuç (3.12)'deki gibi elde edilir.

$$E\left[X_{(1)}X_{(n)}\right] = \int_0^1 \int_0^{x_2} x_1 x_2 f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$0 \le x_1 < x_2 \le 1$ olmak üzere $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1, x_2) = \frac{n!}{(1-1)!(n-1-1)!(n-n)!}\left[F(x_1)\right]^0 \left[F(x_2) - F(x_1)\right]^{n-2} .\left[1 - F(x_2)\right]^0 f(x_1) f(x_2)$$

$$= n(n-1)\left[F(x_2) - F(x_1)\right]^{n-2} f(x_1) f(x_2)$$

olup Uniform (0,1) dağılımı için ise $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_1, x_2) = n(n-1)(x_2 - x_1)^{n-2} \quad , \quad 0 \le x_1 < x_2 \le 1$$

O halde, $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'in çarpımının beklenen değeri aşağıda olduğu gibi hesaplanacaktır:

$$E\left[X_{(1)}X_{(n)}\right]=\int_0^1\int_0^{x_2} x_1x_2n(n-1)(x_2-x_1)^{n-2}\,dx_1dx_2 \qquad \left|\begin{array}{l} x_1=x_2t \\ dx_1=x_2dt \end{array}\right.$$

$$=n(n-1)\int_0^1\int_0^1 x_2tx_2\,(x_2-x_2t)^{n-2}\,x_2dt\,dx_2$$

$$=n(n-1)\int_0^1 x_2^{n+1}\int_0^1 t(1-t)^{n-2}dt\,dx_2$$

$$=n(n-1)\frac{1}{n(n-1)}\int_0^1 x_2^{n+1}dx_2 \;=\left.\frac{x_2^{n+2}}{n+2}\right|_0^1$$

$$E\left[X_{(1)}X_{(n)}\right]=\frac{1}{n+2} \tag{3.12}$$

olarak bulunur. $X_{(n)}$’nin varyansı için ikinci momenti hesaplanacak olursa,

$$E(X_{(n)}^2)=\int_0^1 x^2\,\frac{n!}{(n-1)!0!}(x)^{n-1}(1-x)^0 1dx$$

$$=n\int_0^1 x^{n+1}dx=n\left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^1$$

$$E(X_{(n)}^2)=\frac{n}{n+2} \tag{3.13}$$

olur.

O halde θ_2^* tahmin edicisi için

$$E(\theta_2^{*2}) = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{(n+1)(n+2)} + 2\frac{1}{n+2} + \frac{n}{n+2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\left(\frac{1+n+1}{(n+1)(n+2)}\right) + \frac{n}{n+2}\right]$$

$$E(\theta_2^{*2}) = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{n+1} + \frac{n}{n+2}\right] \tag{3.14}$$

olup bu sonuç kullanılarak maksimum ve minimum sıra istatistikleri olan $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'e bağlı olan tahmin edici θ_2^*'ın varyansı

$$V(\theta_2^*) = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{n+1} + \frac{n}{n+2}\right] - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2n+4+n^2+n-(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$V(\theta_2^*) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \tag{3.15}$$

olarak elde edilir.

iii) Minimum sıra istatistiği $X_{(1)}$ 'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_3^* olsun. O halde θ_3^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_3^* = \frac{n+1}{2} X_{(1)} \tag{3.16}$$

θ_3^* tahmin edicisinin beklenen değerini bulmak için aşağıda da görülebildiği gibi $X_{(1)}$ 'in beklenen değerine ihtiyaç vardır.

$$E(\theta_3^*) = \frac{n+1}{2} E(X_{(1)})$$

$$E(X_{(1)}) = \int_0^1 x f_{X_{(1)}}(x)dx = n\int_0^1 x(1-x)^{n-1}dx \left| \begin{array}{l} 1-x=u \\ -dx = du \end{array} \right.$$

$$= n\int_0^1 (1-u)u^{n-1}du = n\frac{u^n}{n} - n\frac{u^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1$$

$$E(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1} \tag{3.17}$$

Buradan θ_3^* tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E(\theta_3^*) = \frac{n+1}{2}\frac{1}{n+1}$$

$$E(\theta_3^*) = \frac{1}{2} \tag{3.18}$$

olarak bulunur.

Minimum sıra istatistiği $X_{(1)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_3^*'ın beklenen değeri incelediğinde, oluşturulan bu tahmin edicinin yansız olduğu görülür.

θ_3^*'ün varyansı için bu tahmin edicinin karesinin beklenen değerinin hesaplanması gerekecektir.

$$E(\theta_3^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{4} E(X_{(1)}^2)$$

Bu değeri hesaplayabilmek için de minimum sıra istatisiği olan $X_{(1)}$'in karesinin beklenen değeri bulunur ve yerine konularak sonuç elde edilir.

$$E(X_{(1)}^2) = \int_0^1 x^2 f_{X_{(1)}}(x)dx = n\int_0^1 x^2 (1-x)^{n-1} dx \left| \begin{array}{l} 1-x=u \\ -dx=du \end{array} \right.$$

$$= n\int_0^1 (1-u)^2 u^{n-1} du = n\frac{u^n}{n} - 2n\frac{u^{n+1}}{n+1} + n\frac{u^{n+2}}{n+2}\Bigg|_0^1$$

$$E(X_{(1)}^2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \tag{3.19}$$

$$E(\theta_3^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{4}\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$E(\theta_3^{*2}) = \frac{(n+1)}{2(n+2)} \tag{3.20}$$

Elde edilen bu sonuç ile minimum sıra istatistiği $X_{(1)}$'e bağlı olan tahmin edici θ_3^*'ın varyansı aşağıda olduğu gibi elde edilir.

$$V(\theta_3^*) = E(\theta_3^{*2}) - \left[E(\theta_3^*)\right]^2 = \frac{(n+1)}{2(n+2)} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2n+2-n-2}{4(n+2)}$$

$$V(\theta_3^*) = \frac{n}{4(n+2)} \qquad (3.21)$$

iv) r'inci sıra istatistiği $X_{(r)}$'ye bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_4^* olsun. O halde θ_4^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_4^* = \frac{n+1}{2r} X_{(r)} \qquad (3.22)$$

(3.22)'de görünen θ_4^* tahmin edicisinin beklenen değeri aşağıdaki yoldan bulunur.

$$E(\theta_4^*) = \frac{n+1}{2r} E(X_{(r)})$$

$$E(X_{(r)}) = \int_0^1 x f_{X_{(r)}}(x)dx = \int_0^1 x \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} x^{r-1}(1-x)^{n-r}\, dx$$

Burada $B(r+1, n-r+1) = \dfrac{r!(n-r)!}{(n+1)!}$ şeklindeki beta fonksiyonu kullanılarak sonuç;

$$E(X_{(r)}) = \frac{r}{n+1} \qquad (3.23)$$

olarak bulunur.

$$E(\theta_4^*) = \frac{n+1}{2r}\frac{r}{n+1}$$

$$E(\theta_4^*) = \frac{1}{2} \tag{3.24}$$

Bu sonuçtan da görülüyor ki r 'inci sıra istatistiğine bağlı olarak oluşturulan θ_4^* tahmin edicisi, yansız bir tahmin edicidir.

Bu yansız tahmin edicinin varyansının hesaplanabilmesi için karesinin beklenen değerini bulunacaktır.

$$E(\theta_4^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{4r^2} E(X_{(r)}^2)$$

Bu hesap için de r 'inci sıra istatisiği olan $X_{(r)}$ 'in karesinin beklenen değeri bulunur ve yerine konularak denklem çözülür.

$$E(X_{(r)}^2) = \int_0^1 x^2 f_{X_{(r)}}(x)dx = \int_0^1 x^2 \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} x^{r-1}(1-x)^{n-r} dx$$

Burada $B(r+2, n-r+1) = \dfrac{(r+1)!(n-r)!}{(n+2)!}$ şeklindeki beta fonksiyonu kullanılarak sonuç;

$$E(X_{(r)}^{2}) = \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)} \tag{3.25}$$

ve buradan

$$E(\theta_4^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{4r^2}\frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$E(\theta_4^{*2}) = \frac{(n+1)(r+1)}{4r(n+2)} \tag{3.26}$$

olarak bulunur.

Bu sonuçlardan faydalanarak r'inci sıra istatistiği $X_{(r)}$'ye bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_4^*'ün varyansı elde edilir.

$$V(\theta_4^*) = E(\theta_4^{*2}) - \left[E(\theta_4^*)\right]^2 = \frac{(n+1)(r+1)}{4r(n+2)} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{rn+n+r+1-rn-2r}{4r(n+2)}$$

$$V(\theta_4^*) = \frac{n-r+1}{4r(n+2)} \tag{3.27}$$

(3.27) eşitliğinde $r=1$ alınması durumunda (3.21)'de bulunan $V(\theta_3^*) = \dfrac{n}{4(n+2)}$ sonucu, ayrıca $r=n$ alınması durumunda ise (3.6)'da bulunan $V(\theta_1^*) = \dfrac{1}{4n(n+2)}$ sonucu elde edilir.

v) Medyan sıra istatistiğine bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_5^* olsun. O halde θ_5^* aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\theta_5^* = U = \begin{cases} X_{(m+1)} & , \quad n = 2m+1 \\ \dfrac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2} & , \quad n = 2m \end{cases} \tag{3.28}$$

Örneklem genişliği tek sayı ise, medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verildiği gibi olup, beklenen değeri (3.29) ve varyansı da (3.30)'da gösterildiği gibidir. (Kitapçı 2010)

$n = 2m+1$ için:

$$f_U(x) = \begin{cases} \dfrac{(2m+1)!}{(m!)^2} x^m (1-x)^m & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

$$E(U) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!(m+k+2)} \tag{3.29}$$

$$V(U) = \frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!(m+k+3)} - \left(\frac{(2m+1)!}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!(m+k+2)} \right)^2 \tag{3.30}$$

Örneklem genişliği çift sayı ise, medyan istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verildiği gibi olup, beklenen değeri (3.31) ve varyansı da (3.32)'de gösterildiği gibidir. (Kitapçı 2010)

$n = 2m$ için:

$$f(u)=\begin{cases} 2\dfrac{(2m)!}{(m-1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{(2u-1)^{m-1-k}}{k!(m-1-k)!}\dfrac{(1-u)^{m+k}-(1-2u)^{m+k}}{m+k} & , \quad 0<u<\dfrac{1}{2} \\ 2\dfrac{(2m)!}{(m-1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{(2u-1)^{m-1-k}}{k!(m-1-k)!}\dfrac{(1-u)^{m+k}}{m+k} & , \quad \dfrac{1}{2}\le u<1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)}\left(\sum_{i=0}^{m+k}\frac{(m+k)!(-1)^{m-k+2i+1}}{i!(m+k-i)!2^{m+k+2}}\right. \\ &\times\left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)}\right)-\frac{(-1)^{m+k+1}}{4}\frac{1}{2m(2m+1)} \\ &\left.+\sum_{j=0}^{m+k}\frac{(m+k)!(-1)^{j}}{j!(m+k-j)!\,2^{m+k+2}}\left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} V(U) &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)}\left(\sum_{i=0}^{m+k}\frac{(m+k)!(-1)^{m-k+2i+1}}{i!(m+k-i)!2^{m+k+3}}\right. \\ &\times\left(\frac{1}{m-k+i+2}-\frac{2}{m-k+i+1}+\frac{1}{m-k+i}\right)-\frac{(-1)^{m+k}}{8} \\ &\times\left(\frac{-1}{2m+2}+\frac{2}{2m+1}+\frac{-1}{2m}\right)+\sum_{j=0}^{m+k}\frac{(m+k)!(-1)^{j}}{j!(m+k-j)!\,2^{m+k+3}} \\ &\left.\times\left(\frac{1}{m-k+j+2}+\frac{2}{m-k+j+1}+\frac{1}{m-k+j}\right)\right) \\ &-\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2(2m)!}{k!(m-1)!(m-k-1)!(m+k)}\left(\sum_{i=0}^{m+k}\frac{(m+k)!(-1)^{m-k+2i+1}}{i!(m+k-i)!2^{m+k+2}}\right.\right. \\ &\times\left(\frac{1}{(m-k+i)(m-k+i+1)}\right)-\frac{(-1)^{m+k+1}}{4}\frac{1}{2m(2m+1)} \\ &\left.\left.+\sum_{j=0}^{m+k}\frac{(m+k)!(-1)^{j}}{j!(m+k-j)!\,2^{m+k+2}}\left(\frac{2(m-k+j)+1}{(m-k+j+1)(m-k+j)}\right)\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Uniform$(0,1)$ dağılımının kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile yukarıda önerilen θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*, θ_4^* ve θ_5^* tahmin edicileri yansız tahmin ediciler olduğundan hepsinin beklenen değeri $\frac{1}{2}$ olarak elde edilmiştir.

Uniform$(0,1)$ dağılımının kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile önerilen bu θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*, θ_4^* ve θ_5^* tahmin edicilerinin varyansları çeşitli örnek sayıları için hesaplanarak aşağıdaki tabloda olduğu gibi bulunmuştur.

Tablo 3.1 Uniform$(0,1)$ dağılımı için θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*, θ_4^* ve θ_5^* tahmin edicilerinin bazı n değerlerine ilişkin hesaplanan varyans sonuçları

n	$V(\theta_1^*)$	$V(\theta_2^*)$	$V(\theta_3^*)$	$V(\theta_4^*)$ r=3	$V(\theta_4^*)$ r=6	$V(\theta_5^*)$
1	0.083333	0.083333	0.083333	-	-	0.083333
2	0.03125	0.041667	0.125	-	-	0.04167
3	0.016667	0.025	0.15	0.016667	-	0.05
4	0.010417	0.016667	0.166667	0.027778	-	0.033333
5	0.007143	0.011905	0.178571	0.035714	-	0.03571
7	0.003968	0.006944	0.194444	0.046296	0.009259	0.027778
9	0.002525	0.004545	0.204545	0.053030	0.015152	0.022727

Kitle ortalaması için sıra istatistikleri yardımıyla önerilen yansız tahmin edicilerin bazı örnek sayıları için varyans sonuçları Tablo 3.1'de görülmektedir. Tablo incelendiğinde önerilen bu tahmin edicilerden maksimum sıra istatistiğine dayalı olan θ_1^* ile maksimum ve minimum sıra istatistiklerine dayalı olan θ_2^* tahmin edicilerinin (3.6) ve (3.15) eşitliklerinden kolayca anlaşılacağı üzere varyans değerlerinin örneklem sayısı arttıkça küçüldüğü görülmektedir. Bu iki tahmin edici incelendiğinde; θ_2^* tahmin edicisi iki sıra istatistiği içerdiği halde, θ_1^* tahmin edicisinin daha iyi sonuçlar verdiği göze çarpmaktadır.

Diğer tahmin edicilerde ise bu durumun farklı olduğu görülmektedir. Minimum sıra istatistiğine dayalı olarak oluşturulan θ_3^* tahmin edicisinin daha büyük örneklemlere gidildikçe daha büyük varyans değerine sahip olduğu gözlenmektedir. Buna paralel olarak r. sıra istatistiği ile oluşturulan θ_4^*'ın da büyük örneklemler için varyansı giderek büyümektedir. θ_3^* ve θ_4^* tahmin edicilerinin ikisinin de yüksek varyanslara sahip olması, n değeri arttıkça r. sıra istatistiğinin giderek minimum sıra istatistiğine yaklaşmasıyla açıklanabilir. $r = 3$'e göre $r = 6$ için hesaplanan θ_4^* tahmin edicisinin varyans değeri daha yavaş bir şekilde büyümektedir. Çünkü, daha yüksek bir r değeri için, bu sıra istatistiği minimum sıra istatistiğine daha geç yaklaşmaktadır. Bununla birlikte, bu tahmin edicilerin varyansı belli bir değeri aşamayacaktır.

Medyan sıra istatistiği olan θ_5^* tahmin edicisi incelendiğinde, bu tahmin ediciye ait varyans değeri θ_1^* ve θ_2^*'da olduğu gibi n değeri büyürken küçülmektedir. Ancak θ_1^*, θ_2^* ve θ_5^* tahmin edicileri arasında varyansı en hızlı şekilde küçülen θ_1^*, örneklem ölçümü en büyük değere ulaştığında en küçük varyansa sahip olacaktır. Bütün bunlar ele alındığında hepsi yansız olan bu tahmin ediciler arasında, maksimum sıra istatistiğine dayalı olarak önerilen θ_1^* tahmin edicisi en küçük varyansa sahip olduğundan bu aşamada en iyi tahmin edici olarak belirlenir.

Tablo 3.2 Uniform$(0,1)$ dağılımı için θ_4^* tahmin edicisinin bazı n ve r değerlerine ilişkin hesaplanan varyans sonuçları

n \ r	1	2	3	4	5	7	9
1	0.08333	-	-	-	-	-	-
2	0.125	0.03125	-	-	-	-	-
3	0.15	0.05	0.01667	-	-	-	-
4	0.16667	0.0625	0.02778	0.01042	-	-	-
5	0.17857	0.07143	0.03571	0.01786	0.00714	-	-
7	0.19444	0.08333	0.0463	0.02778	0.01667	0.004	-
9	0.20455	0.09091	0.05303	0.0341	0.02273	0.00974	0.00253

Tablo 3.2'de verilen varyans değerleri incelendiğinde, sonuçların Tablo 3.1'deki varyans değerleri ile uyumlu olduğu görülmektedir. Tablo 3.2 için köşegen değerleri, maksimum sıra istatistiğine dayalı olarak önerilen θ_1^* tahmin edicisinin varyans değerleri ve ilk sütun değerleri ise, minimum sıra istatistiğine dayalı olarak önerilen θ_3^* tahmin edicisinin varyans değerleridir. Ayrıca, Tablo 3.2'deki $n = 2r - 1$ eşitliğini sağlayan değerlerin de, medyan istatistiği olan θ_5^* tahmin edicisi için örneklem sayısının tek sayı olması durumundaki varyans değerleri olduğu görülmektedir.

3.2 (a,b) Aralığında Uniform Dağılım

Uniform (a,b) dağılımına sahip bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{ve} \qquad F(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad ; \qquad a \le x \le b$$

dir. X rasgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{ve} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

dir.

Her biri aynı Uniform (a,b) dağılımına sahip ve birbirinden bağımsız $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenlerinin sıralanmasıyla elde edilen sıra istatistikleri $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ olsun. Uniform (a,b) dağılımına ilişkin, sıra istatistikleri ile kitle ortalaması için önerilen bazı yansız tahmin ediciler aşağıda sunulmuştur.

i) Maksimum sıra istatistiği $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_1^* olsun. O halde θ_1^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_1^* = \frac{n+1}{nb+a}\frac{b-a}{2}X_{(n)} + a \qquad (3.33)$$

θ_1^* tahmin edicisinin beklenen değeri için, $X_{(n)}$'in beklenen değerine ihtiyaç vardır.

$$E(\theta_1^*) = \frac{n+1}{nb+a}\frac{b-a}{2}E(X_{(n)}) + a$$

Burada $X_{(n)}$'nin beklenen değeri

$$E(X_{(n)}) = \int_a^b x\frac{n!}{(n-1)!0!}\left[F(x)\right]^{n-1}\left[1-F(x)\right]^0 f(x)dx$$

$$= n\int_a^b x\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}\frac{1}{b-a}dx = \frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b x(x-a)^{n-1}dx \left| \begin{array}{l} x = a.t \\ dx = a.dt \end{array} \right.$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n}\int_1^{b/a} at(at-a)^{n-1}a.dt = \frac{na^{n+1}}{(b-a)^n}\int_1^{b/a} t(t-1)^{n-1}dt \left| \begin{array}{l} t-1 = y \\ dt = dy \end{array} \right.$$

$$= \frac{na^{n+1}}{(b-a)^n}\int_0^{(b/a)-1}(y+1)y^{n-1}dy = \frac{na^{n+1}}{(b-a)^n}\left[\frac{y^{n+1}}{n+1} + \frac{y^n}{n}\right]_0^{(b/a)-1}$$

$$= \frac{na^{n+1}}{(b-a)^n} \frac{1}{n+1} \left(\frac{b-a}{a} \right)^{n+1} + \frac{na^{n+1}}{(b-a)^n} \frac{1}{n} \left(\frac{b-a}{a} \right)^n$$

$$E(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}(b-a) + a \qquad (3.34)$$

olup θ_1^* tahmin edicisinin beklenen değeri ise

$$E(\theta_1^*) = \frac{n+1}{nb+a} \frac{b-a}{2} \left(\frac{n}{n+1}(b-a) + a \right) + a$$

$$E(\theta_1^*) = \frac{a+b}{2} \qquad (3.35)$$

olarak bulunur.

Maksimum sıra istatistiği $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_1^*'ın beklenen değerinden, bu tahmin edicinin yansız olduğu görülür.

θ_1^* tahmin edicisinin varyansı için,

$$V(\theta_1^*) = \left(\frac{n+1}{nb+a} \frac{b-a}{2} \right)^2 V(X_{(n)})$$

eşitliğindeki $X_{(n)}$'nin varyansı aşağıdaki gibidir:

$$V(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - \left[E(X_{(n)})\right]^2$$

Bunun için de maksimum sıra istatistiği olan $X_{(n)}$'in karesinin beklenen değeri elde edilir ve yerine konularak sonuca ulaşılır.

$$E(X_{(n)}^2) = \int_a^b x^2 \frac{n!}{(n-1)!0!}\left[F(x)\right]^{n-1}\left[1-F(x)\right]^0 f(x)dx$$

$$= n\int_a^b x^2 \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} \frac{1}{b-a}dx = \frac{n}{(b-a)^n}\int_a^b x^2 (x-a)^{n-1} dx \left|\begin{array}{l} x-a=u \\ dx=du \end{array}\right.$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n}\int_0^{b-a} (u+a)^2 u^{n-1} du = \frac{n}{(b-a)^n}\int_0^{b-a} \left(u^2 + 2au + a^2\right)u^{n-1} du$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n}\left[\frac{u^{n+2}}{n+2} + 2a\frac{u^{n+1}}{n+1} + a^2\frac{u^n}{n}\right]\Bigg|_0^{b-a}$$

$$= \frac{n}{(b-a)^n}\frac{(b-a)^{n+2}}{n+2} + \frac{n}{(b-a)^n}2a\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{(b-a)^n}a^2\frac{(b-a)^n}{n}$$

$$E(X_{(n)}^2) = \frac{n}{n+2}(b-a)^2 + \frac{n}{n+1}2a(b-a) + a^2 \qquad (3.36)$$

(3.34) ve (3.36) eşitlikleri yardımıyla maksimum sıra istatistiği olan $X_{(n)}$ 'nin varyansı aşağıdaki gibi bulunur:

$$V(X_{(n)}) = \frac{n}{n+2}(b-a)^2 + \frac{n}{n+1}2a(b-a) + a^2$$
$$-a^2 - 2a\frac{n}{n+1}(b-a) - \frac{n^2}{(n+1)^2}(b-a)^2$$

$$= (b-a)^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right)$$

$$V(X_{(n)}) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}(b-a)^2 \qquad (3.37)$$

Bu sonuç ile maksimum sıra istatistiği olan $X_{(n)}$ 'e bağlı olan tahmin edici θ_1^* 'ın varyansı aşağıdaki gibi bulunur.

$$V(\theta_1^*) = \left(\frac{n+1}{nb+a}\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}(b-a)^2$$

$$V(\theta_1^*) = \frac{n(b-a)^4}{4(n+2)(nb+a)^2} \qquad (3.38)$$

(3.35) ve (3.38) eşitliklerinde $a = 0, b = 1$ alınması durumunda sırasıyla (3.3) ve (3.6)' da sunulan $E(\theta_1^*) = \frac{1}{2}$ ve $V(\theta_1^*) = \frac{1}{4n(n+2)}$ sonuçları elde edilir.

ii) Maksimum ve minimum sıra istatistikleri olan $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_2^* olsun. O halde θ_2^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_2^* = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2} \tag{3.39}$$

θ_2^* tahmin edicisinin beklenen değerinin hesaplanabilmesi için öncelikle olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunması gerekir. Bunun için şöyle bir dönüşüm kullanılmıştır:

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = X_{(1)} \\ Y_2 = X_{(n)} \\ X_1 = \theta_2^* \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} X_1 = \dfrac{Y_1 + Y_2}{2} \rightarrow Y_1 = 2X_1 - X_2 \\ \underset{(X_1 \le X_2)}{X_2 = Y_2} \rightarrow \underset{(Y_1 \le Y_2)}{Y_2 = X_2} \end{array}\right\} |J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial X_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} a \le Y_1 \le Y_2 \le b \\ a \le 2X_1 - X_2 \le X_2 \le b \end{array}\right\} X_1 \le X_2 \le 2X_1 - a;\ X_1 \le X_2 \le b \tag{3.40}$$

$$\underbrace{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}_{r=1,s=n} = \frac{n!}{0!(n-2)!0!}\left[F(y_1)\right]^0 \left[F(y_2) - F(y_1)\right]^{n-2} \left[1 - F(y_2)\right]^0$$

$$.f(y_1) f(y_2)|J|, \quad y_1 \le y_2$$

$$= n(n-1)\left[F(y_2) - F(y_1)\right]^{n-2} f(y_1) f(y_2)|J| \ , \quad y_1 \le y_2$$

$$= n(n-1)\left[F(x_2) - F(2x_1 - x_2)\right]^{n-2} . \frac{1}{b-a}\frac{1}{b-a}|2| \ , \quad x_1 \le x_2$$

$$= \frac{2n(n-1)}{(b-a)^2}\left[\frac{x_2-a}{b-a} - \frac{2x_1-x_2-a}{b-a}\right]^{n-2}$$

$$= \frac{2n(n-1)}{(b-a)^n}(2x_2-2x_1)^{n-2}$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 2^{n-1}\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(x_2-x_1)^{n-2} \quad , \quad x_1 \le x_2 \tag{3.41}$$

Bu ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak,

$$f_{X_1}(x_1) = 2^{n-1}\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}\int_{x_2}(x_2-x_1)^{n-2}\,dx_2$$

(3.40) ile verilen sınırlar göz önüne alınırsa X_1 ile gösterilen θ_2^* tahmin edicisinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunur.

$$= 2^{n-1}\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}\left\{\int_{x_1}^{2x_1-a}\underbrace{(x_2-x_1)}_{u}^{n-2}\,dx_2\,,\int_{x_1}^{b}\underbrace{(x_2-x_1)}_{u}^{n-2}\,dx_2\right\}$$

$$= 2^{n-1}\frac{n(n-1)}{(b-a)^n}\left\{\int_0^{x_1-a}u^{n-2}du,\int_0^{b-x_1}u^{n-2}du\right\}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\begin{cases}(x_1-a)^{n-1}, & a \le x_1 < \dfrac{a+b}{2}\\[2mm] (b-x_1)^{n-1}, & \dfrac{a+b}{2} \le x_1 \le b\end{cases} \tag{3.42}$$

Bulunan marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu beklenen değer formülünde yerine yazılırsa tahmin edicinin beklenen değeri elde edilir.

$$E(X_1)=\frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left\{\int_a^{(a+b)/2} x_1\underbrace{(x_1-a)}_{u}{}^{n-1}dx_1+\int_{(a+b)/2}^{b} x_1\underbrace{(b-x_1)}_{u}{}^{n-1}dx_1\right\}$$

$$=\frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left\{\int_0^{(b-a)/2}(u+a)u^{n-1}du+\int_0^{(b-a)/2}(b-u)u^{n-1}du\right\}$$

$$=\frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left\{\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}+a\frac{u^n}{n}\right]_0^{(b-a)/2}+\left[b\frac{u^n}{n}-\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^{(b-a)/2}\right\}$$

$$=\frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left[(a+b)\frac{u^n}{n}\right]_0^{(b-a)/2}$$

$$=\frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}(a+b)\frac{1}{n}\frac{(b-a)^n}{2^n}$$

$$E(X_1)=\frac{a+b}{2}$$

θ_2^* tahmin edicisi X_1 ile gösterildiğinden

$$E(\theta_2^*)=\frac{a+b}{2} \qquad (3.43)$$

yazılır.

Maksimum ve minimum sıra istatistikleri olan $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_2^*'ın beklenen değerine bakılırsa, sonuçta bu tahmin edicinin yansız olduğu görülür.

X_1 ile gösterilen θ_2^*'ın varyans hesabı için X_1'in karesinin beklenen değerinin hesaplaması gereklidir.

$$E(X_1^2) = \frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left\{ \int_a^{(a+b)/2} x_1^2 \underbrace{(x_1-a)}_{u}{}^{n-1} dx_1 + \int_{(a+b)/2}^{b} x_1^2 \underbrace{(b-x_1)}_{u}{}^{n-1} dx_1 \right\}$$

$$= \frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left\{ \int_0^{(b-a)/2} (u+a)^2 u^{n-1} du + \int_0^{(b-a)/2} (b-u)^2 u^{n-1} du \right\}$$

$$= \frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left\{ \int_0^{(b-a)/2} \left(u^2 + 2au + a^2\right) u^{n-1} du + \int_0^{(b-a)/2} \left(b^2 - 2bu + u^2\right) u^{n-1} du \right\}$$

$$= \frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left[\frac{u^{n+2}}{n+2} + 2a\frac{u^{n+1}}{n+1} + a^2\frac{u^n}{n} + b^2\frac{u^n}{n} - 2b\frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{u^{n+2}}{n+2} \right]_0^{(b-a)/2}$$

$$= \frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\left[2\frac{u^{n+2}}{n+2} + 2(a-b)\frac{u^{n+1}}{n+1} + \left(a^2+b^2\right)\frac{u^n}{n} \right]_0^{(b-a)/2}$$

$$= \frac{2^{n-1}n}{(b-a)^n}\frac{1}{2^n}(b-a)^n\left[\frac{2}{n+2}\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{2(a-b)}{n+1}\frac{(b-a)}{2} + \frac{\left(a^2+b^2\right)}{n} \right]$$

$$E(X_1^2)=\frac{n}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{\underset{(n+1)n}{2(n+2)}}+\frac{(a-b)(b-a)}{\underset{2n(n+2)}{n+1}}+\frac{(a^2+b^2)}{\underset{2(n+2)(n+1)}{n}}\right] \tag{3.44}$$

Tahmin edicinin varyans hesabı bu aşamalardan sonra aşağıdaki gibi kolayca elde edilebilir:

$$V(X_1)=E(X_1^2)-\left[E(X_1)\right]^2$$

$$=\frac{n}{2}\left[\frac{(b-a)^2 n(n+1)-(b-a)^2 2n(n+2)+(a^2+b^2)2(n+1)(n+2)}{2n(n+1)(n+2)}\right]$$

$$-\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$=\frac{n}{2}\frac{(b-a)^2\left[n(n+1)-2n(n+2)\right]+(a^2+b^2)2(n+1)(n+2)}{2n(n+1)(n+2)}-\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$=\frac{(b-a)^2\left[n(n+1)-2n(n+2)\right]}{4(n+1)(n+2)}+\frac{(a^2+b^2)2(n+1)(n+2)}{4(n+1)(n+2)}-\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$=\frac{(b-a)^2\left[-n^2-3n\right]}{4(n+1)(n+2)}+\frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} - \frac{(b-a)^2 n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{n^2+3n+2-n^2-3n}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$V(X_1) = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}$$

θ_2^* tahmin edicisi X_1 ile gösterildiğinden

$$V(\theta_2^*) = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)} \tag{3.45}$$

yazılır.

(3.43) ve (3.45) eşitliklerinde $a=0, b=1$ alınması durumunda sırasıyla (3.10) ve (3.15)'te sunulan $E(\theta_2^*) = \frac{1}{2}$ ve $V(\theta_2^*) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ sonuçları elde edilir.

iii) Minimum sıra istatistiği $X_{(1)}$'e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_3^* olsun. O halde θ_3^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_3^* = \frac{n+1}{b+na}\frac{b-a}{2}X_{(1)} + a \tag{3.46}$$

θ_3^* tahmin edicisinin beklenen değerini bulmak için aşağıda da görülebildiği gibi $X_{(1)}$ 'in beklenen değerine ihtiyaç vardır.

$$E(\theta_3^*) = \frac{n+1}{b+na}\frac{b-a}{2}E(X_{(1)}) + a$$

$$E(X_{(1)}) = \int_a^b x\, f_{X_{(1)}}(x)dx = n\int_a^b x\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}\frac{1}{b-a}dx$$

$$= n\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b x(b-x)^{n-1}dx \left| \begin{array}{l} x = bu \\ dx = bdu \end{array} \right.$$

$$= n\frac{1}{(b-a)^n}b^{n+1}\int_{a/b}^{1} u(1-u)^{n-1}du \left| \begin{array}{l} 1-u = t \\ -du = dt \end{array} \right.$$

$$= n\frac{1}{(b-a)^n}b^{n+1}\int_0^{(b-a)/b}(1-t)t^{n-1}dt$$

$$= \frac{nb^{n+1}}{(b-a)^n}\frac{t^n}{n} - \frac{nb^{n+1}}{(b-a)^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^{(b-a)/b}$$

$$E(X_{(1)}) = \frac{b+na}{n+1} \tag{3.47}$$

Buradan θ_3^* tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E(\theta_3^*) = \frac{n+1}{b+na}\frac{b-a}{2}E(X_{(1)}) + a$$

$$= \frac{n+1}{b+na}\frac{(b-a)}{2}\frac{b+na}{n+1} + a$$

$$E(\theta_3^*) = \frac{a+b}{2} \tag{3.48}$$

olarak bulunur.

Minimum sıra istatistiği $X_{(1)}$ ’e bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_3^* ’ın beklenen değeri incelediğinde, oluşturulan bu tahmin edicinin yansız olduğu görülür.

θ_3^* ’ın varyansı için bu tahmin edicinin karesinin beklenen değerinin hesaplanması gerekecektir.

$$E(\theta_3^{*2}) = \left(\frac{n+1}{b+na}\right)^2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 E(X_{(1)}^2) + \frac{n+1}{b+na}(b-a)E(X_{(1)})a + a^2$$

Bu değeri hesaplayabilmek için de minimum sıra istatisiği olan $X_{(1)}$ ’in karesinin beklenen değeri bulunur ve yerine konularak sonuç elde edilir.

$$E(X_{(1)}^2) = \int_a^b x^2 f_{X_{(1)}}(x)dx = n\int_a^b x^2\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}\frac{1}{b-a}dx$$

$$= n\frac{1}{(b-a)^n}\int_a^b x^2(b-x)^{n-1}dx \left| \begin{array}{l} x = bu \\ dx = bdu \end{array} \right.$$

$$= n\frac{1}{(b-a)^n}b^{n+2}\int_{a/b}^{1} u^2(1-u)^{n-1}du \left| \begin{array}{l} 1-u = t \\ -du = dt \end{array} \right.$$

$$= n\frac{1}{(b-a)^n}b^{n+2}\int_0^{(b-a)/b}(1-t)^2 t^{n-1}dt$$

$$= \frac{nb^{n+2}}{(b-a)^n}\frac{t^n}{n} - \frac{nb^{n+2}}{(b-a)^n}2\frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{nb^{n+2}}{(b-a)^n}\frac{t^{n+2}}{n+2}\Bigg|_0^{(b-a)/b}$$

$$E(X_{(1)}^2) = b^2 - 2\frac{n}{n+1}b(b-a) + \frac{n}{n+2}(b-a)^2 \tag{3.49}$$

$$E(\theta_3^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{(b+na)^2}\frac{(b-a)^2}{4}\left(b^2 - 2\frac{n}{n+1}b(b-a) + \frac{n}{n+2}(b-a)^2\right)$$
$$+ \frac{n+1}{b+na}\frac{b+na}{n+1}(b-a)a + a^2$$

$$E(\theta_3^{*2}) = \frac{(n+1)^2}{(b+na)^2}\frac{(b-a)^2}{4}\left(b^2 - 2\frac{n}{n+1}b(b-a) + \frac{n}{n+2}(b-a)^2\right) + ab \tag{3.50}$$

Elde edilen bu sonuç ile minimum sıra istatistiği $X_{(1)}$'e bağlı olan tahmin edici θ_3^*'ın varyansı aşağıda olduğu gibi elde edilir.

$$V(\theta_3^*) = E(\theta_3^{*2}) - \left[E(\theta_3^*)\right]^2$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(b+na)^2}\frac{(b-a)^2}{4}\left(b^2 - 2\frac{n}{n+1}b(b-a) + \frac{n}{n+2}(b-a)^2\right) + ab - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(b+na)^2}\frac{(b-a)^2}{4}\left(b^2 - 2\frac{n}{n+1}b(b-a) + \frac{n}{n+2}(b-a)^2\right) - \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{(n+1)^2}{(b+na)^2}\left(b^2 - 2\frac{n}{n+1}b(b-a) + \frac{n}{n+2}(b-a)^2\right) - 1\right]$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(b+na)^2}\frac{(b-a)^2}{4}\frac{n(a-b)^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$V(\theta_3^*) = \frac{n(b-a)^4}{4(n+2)(b+na)^2} \tag{3.51}$$

(3.48) ve (3.51) eşitliklerinde $a = 0, b = 1$ alınması durumunda sırasıyla (3.18) ve (3.21)'de sunulan $E(\theta_3^*) = \frac{1}{2}$ ve $V(\theta_3^*) = \frac{n}{4(n+2)}$ sonuçları elde edilir.

iv) r 'inci sıra istatistiği $X_{(r)}$ 'ye bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_4^* olsun. O halde θ_4^* aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta_4^* = \frac{n+1}{rb + (n+1-r)a}\frac{b-a}{2}X_{(r)} + a \tag{3.52}$$

(3.52)'de görünen θ_4^* tahmin edicisinin beklenen değeri aşağıdaki yoldan bulunur.

$$E(\theta_4^*) = \frac{(b-a)(n+1)}{2[rb+(n+1-r)a]} E(X_{(r)}) + a$$

$$E(X_{(r)}) = \int_a^b x\, f_{X_{(r)}}(x) dx$$

$$= \int_a^b x \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{r-1} \left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-r} \frac{1}{b-a} dx \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{b-a} = u \\ \dfrac{1}{b-a} dx = du \end{array} \right.$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 [u(b-a)+a] u^{r-1} (1-u)^{n-r} du$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[(b-a)\int_0^1 u^r (1-u)^{n-r} du + a\int_0^1 u^{r-1} (1-u)^{n-r} du \right]$$

Burada $B(r+1, n-r+1) = \dfrac{r!(n-r)!}{(n+1)!}$ ve $B(r, n-r+1) = \dfrac{(r-1)!(n-r)!}{n!}$

şeklindeki beta fonksiyonları kullanılarak sonuç;

$$E(X_{(r)}) = \frac{(b-a)r}{n+1} + a \qquad (3.53)$$

$$E(X_{(r)}) = \frac{rb+(n+1-r)a}{n+1} \qquad (3.54)$$

olarak bulunur.

$$E(\theta_4^*) = \frac{(b-a)(n+1)}{2[rb+(n+1-r)a]} E(X_{(r)}) + a$$

$$= \frac{(b-a)(n+1)}{2[rb+(n+1-r)a]} \frac{rb+(n+1-r)a}{(n+1)} + a$$

$$E(\theta_4^*) = \frac{a+b}{2} \qquad (3.55)$$

Bu sonuçtan da görülüyor ki r 'inci sıra istatistiğine bağlı olarak oluşturulan θ_4^* tahmin edicisi, yansız bir tahmin edicidir.

Bu yansız tahmin edicinin varyansının hesaplanabilmesi için karesinin beklenen değerini bulunacaktır.

$$E(\theta_4^{*2}) = \left(\frac{(b-a)(n+1)}{2[rb+(n+1-r)a]} \right)^2 E(X_{(r)}^2) + \frac{(b-a)(n+1)}{[rb+(n+1-r)a]} E(X_{(r)})a + a^2$$

Bu hesap için de r 'inci sıra istatisiği olan $X_{(r)}$ 'in karesinin beklenen değeri bulunur ve yerine konularak denklem çözülür.

$$E(X_{(r)}^2) = \int_a^b x^2 f_{X_{(r)}}(x)dx$$

$$=\int_a^b x^2\,\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{r-1}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-r}\frac{1}{b-a}\,dx\quad\left|\begin{array}{l}\dfrac{x-a}{b-a}=u\\ \dfrac{1}{b-a}dx=du\end{array}\right.$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^1\left[(b-a)u+a\right]^2 u^{r-1}(1-u)^{n-r}\,du$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\Bigg[(b-a)^2\int_0^1 u^{r+1}(1-u)^{n-r}\,du$$
$$+2a(b-a)\int_0^1 u^{r}(1-u)^{n-r}\,du+a^2\int_0^1 u^{r-1}(1-u)^{n-r}\,du\Bigg]$$

Burada $B(r+2,n-r+1)=\dfrac{(r+1)!(n-r)!}{(n+2)!}$, $B(r+1,n-r+1)=\dfrac{r!(n-r)!}{(n+1)!}$ ve $B(r,n-r+1)=\dfrac{(r-1)!(n-r)!}{n!}$ şeklindeki beta fonksiyonları kullanılarak sonuç;

$$E(X_{(r)}^2)=(b-a)^2\frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)}+2a(b-a)\frac{r}{(n+1)}+a^2 \qquad (3.56)$$

ve buradan

$$E(\theta_4^{*2})=\left(\frac{(b-a)(n+1)}{2\left[rb+(n+1-r)a\right]}\right)^2\left[(b-a)^2\frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)}+2a(b-a)\frac{r}{(n+1)}+a^2\right]$$
$$+\frac{(b-a)(n+1)}{\left[rb+(n+1-r)a\right]}\frac{rb+(n+1-r)a}{(n+1)}a+a^2$$

$$=\left(\frac{(b-a)(n+1)}{2\left[rb+(n+1-r)a\right]}\right)^2\left[(b-a)^2\frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)}+2a(b-a)\frac{r}{(n+1)}+a^2\right]$$
$$+(b-a)a+a^2$$

$$E(\theta_4^{*2}) = \left(\frac{(b-a)(n+1)}{2[rb+(n+1-r)a]} \right)^2 \left[(b-a)^2 \frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)} + 2a(b-a)\frac{r}{(n+1)} + a^2 \right] + ab \tag{3.57}$$

olarak bulunur.

Bu sonuçlardan faydalanarak r'inci sıra istatistiği $X_{(r)}$'ye bağlı olarak oluşturulan tahmin edici θ_4^*'ün varyansı elde edilir.

$$V(\theta_4^*) = E(\theta_4^{*2}) - \left[E(\theta_4^*)\right]^2$$

$$= \left(\frac{(b-a)(n+1)}{2[rb+(n+1-r)a]} \right)^2 \left[(b-a)^2 \frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)} + 2a(b-a)\frac{r}{(n+1)} + a^2 \right] + ab$$

$$- \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \left(\frac{(b-a)(n+1)}{2[rb+(n+1-r)a]} \right)^2 \left[(b-a)^2 \frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)} + 2a(b-a)\frac{r}{(n+1)} + a^2 \right] - \left(\frac{b-a}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \left[\frac{(n+1)^2}{[rb+(n+1-r)a]^2} \left((b-a)^2 \frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)} + 2a(b-a)\frac{r}{(n+1)} + a^2 \right) - 1 \right]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4} \frac{(n+1)^2}{[rb+(n+1-r)a]^2}$$

$$\cdot \left[(b-a)^2 \frac{(r+1)r}{(n+2)(n+1)} + 2a(b-a)\frac{r}{(n+1)} + a^2 - \frac{[rb+(n+1-r)a]^2}{(n+1)^2} \right] \tag{3.58}$$

(3.58) eşitliğinde gerekli matematiksel işlemler yapılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$V(\theta_4^*) = \frac{(b-a)^2}{4} \frac{(n+1)^2}{[rb+(n+1-r)a]^2} \frac{r(n+1-r)(b-a)^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$V(\theta_4^*) = \frac{r(n+1-r)(b-a)^4}{4(n+2)[rb+(n+1-r)a]^2} \qquad (3.59)$$

(3.55) ve (3.59) eşitliklerinde $a=0, b=1$ alınması durumunda sırasıyla (3.24) ve (3.27)'de sunulan $E(\theta_4^*) = \frac{1}{2}$ ve $V(\theta_4^*) = \frac{n-r+1}{4r(n+2)}$ sonuçları elde edilir.

Bunun yanı sıra, (3.55) ve (3.59) eşitliklerinde $r=1$ alınması durumunda sırasıyla (3.48) ve (3.51)'de sunulan $E(\theta_3^*) = \frac{a+b}{2}$ ve $V(\theta_3^*) = \frac{n(b-a)^4}{4(n+2)(b+na)^2}$ sonuçları, ayrıca $r=n$ alınması durumunda sırasıyla (3.35) ve (3.38)'de sunulan $E(\theta_1^*) = \frac{a+b}{2}$ ve $V(\theta_1^*) = \frac{n(b-a)^4}{4(n+2)(nb+a)^2}$ sonuçları elde edilir.

4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu simülasyon çalışmasında, önceki bölümde sıra istatistikleri ile oluşturulan, beklenen değer ve varyansları elde edilen tahmin ediciler ile Uniform dağılım için simülasyon çalışması yapılmıştır.

Uniform (0,1) dağılımı için bu tahmin ediciler aşağıda verildiği gibidir:

$$\theta_1^* = \frac{\frac{n+1}{n} X_{(n)}}{2}, \qquad \theta_2^* = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2},$$

$$\theta_3^* = \frac{n+1}{2} X_{(1)}, \qquad \theta_4^* = \frac{n+1}{2r} X_{(r)},$$

$$\theta_5^* = \begin{cases} X_{(m+1)} & , \quad n = 2m+1 \\ \dfrac{X_{(m)} + X_{(m+1)}}{2} & , \quad n = 2m \end{cases}$$

4.1 $(0,1)$ Aralığında Uniform Dağılım İçin Simülasyon Çalışması

Uniform$(0,1)$ dağılımından elde edilen $n = 9$ örneklem ölçümü için 100 deneme yapılmıştır. Minitab programı yardımıyla bu dağılımdan rasgele olarak sayılar türetilmiştir. Bu verilerden minimum, maksimum ve medyan istatistikleri bulunmuştur. Bu istatistikler yardımıyla her bir deneme için bulunan θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*, θ_4^* ve θ_5^* tahmin edicilerinin ortalama ve varyans değerleri hesaplanarak Tablo 4.1'de, ayrıca bazı n ve r değerleri için θ_4^* tahmin edicisinin simülasyon çalışmasına ilişkin varyans sonuçları Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.1 Uniform$(0,1)$ dağılımı için θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*, θ_4^* ve θ_5^* tahmin edicilerinin simülasyon çalışmasına ilişkin ortalama ve varyans sonuçları

	Ortalama	Varyans
θ_1^*	0,512664	0,001527
θ_2^*	0,51261	0,004159
θ_3^*	0,512123	0,238092
θ_4^* , r=3	0,520032	0,057702
θ_4^* , r=6	0,511129	0,014883
θ_5^*	0,516678	0,021546

Tablo 4.2 Uniform$(0,1)$ dağılımı için θ_4^* tahmin edicisinin bazı n ve r değerlerine ait simülasyon çalışmasına ilişkin varyans sonuçları

n \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,09536	-	-	-	-	-	-	-	-
2	0,11788	0,03548	-	-	-	-	-	-	-
3	0,11886	0,05686	0,02154	-	-	-	-	-	-
4	0,15887	0,05982	0,03003	0,00923	-	-	-	-	-
5	0,19803	0,08152	0,03764	0,01893	0,00634	-	-	-	-
6	0,20706	0,08220	0,04196	0,02341	0,01170	0,00416	-	-	-
7	0,27372	0,09477	0,04763	0,02535	0,01609	0,00894	0,00394	-	-
8	0,23236	0,10020	0,04803	0,02943	0,01662	0,01222	0,00575	0,00178	-
9	0,23809	0,09641	0,05770	0,03933	0,02155	0,01488	0,00901	0,00413	0,00153

Tablo 4.1 incelendiğinde, önceki bölümde sıra istatistikleri ile önerilen θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*, θ_4^* ve θ_5^* tahmin edicileri yansız tahmin ediciler olduğundan, hepsinin beklenen değerinin $\frac{1}{2}$'ye yakın çıktığı görülmektedir. Bu tahmin edicilerin varyanslarına bakıldığında ise, maksimum sıra istatistiğine dayalı olan θ_1^* tahmin edicisinin varyansının en küçük olduğu ve önerilen bu tahmin ediciler arasında en iyi tahmin edici olduğu söylenir.

Tablo 4.2 incelendiğinde ise, bu tablodaki sonuçların Tablo 4.1'deki sonuçlar ile benzer olduğu görülmektedir. Tablo 4.2'nin köşegeni üzerindeki değerler maksimum sıra istatistiğine dayalı olan θ_1^* tahmin edicisinin varyans değerleri olup, köşegen üzerindeki son değer ise Tablo 4.1'deki sonuçla aynıdır. Ayrıca, Tablo 4.2'nin ilk sütununda verilen değerler minimum sıra istatistiğine dayalı olan θ_3^* tahmin edicisinin varyans değerleridir. Tablo 4.2'de $n = 2r - 1$ eşitliğini sağlayan varyans değerleri de medyan sıra istatistiği olan θ_5^* tahmin edicisinin varyans sonuçlarıdır.

Her iki tabloda sunulan varyans değerlerinden de görüleceği üzere, sıra istatistikleri ile önerilen θ_1^*, θ_2^*, θ_3^*, θ_4^* ve θ_5^* yansız tahmin edicileri arasında en iyi tahmin edicinin en küçük varyans değerine sahip olan maksimum sıra istatistiğine dayalı olarak önerilen θ_1^* tahmin edicisi olduğu sonucuna varılır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile parametre tahmini amaçlanmıştır. Sıra istatistikleri ile elde edilen bu tahmin edicilerin dağılımı, sıra istatistikleri dağılım teorisi yardımıyla bulunmuştur.

Kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile Uniform dağılıma ilişkin çeşitli tahmin ediciler belirlenmiş olup, elde edilen bu tahmin edicilerin yansız tahmin ediciler olması sağlanmıştır. Sıra istatistikleri ile elde edilip yansızlık özelliği kazandırılan bu tahmin edicilerin tek tek varyansları bulunmuştur. Bu durumda aynı dağılıma sahip farklı tahmin ediciler istatistiksel özellikleri bakımından karşılaştırılmıştır. Uniform (0,1) ve Uniform (a,b) dağılımları kullanılarak kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile parametre tahmini amacıyla önerilen yansız tahmin edicilerin varyanslarının bu iki dağılım için uyumlu olduğu, özel hallerde elde edilen sonuçların birbirine eşit olduğu gösterilmiştir. Her bir dağılım modeli kendi içinde incelendiğinde her iki dağılım modelinde de maksimum sıra istatistiğine dayalı olarak önerilen θ_1^* yansız tahmin edicisinin en küçük varyansa sahip olduğu ve önerilen bu tahmin ediciler arasında en iyi tahmin edicinin θ_1^* tahmin edicisi olduğu sonucuna varılmıştır.

Ayrıca, kitle ortalaması için sıra istatistiklerine dayalı olarak önerilen bu tahmin ediciler için varyans sonuçları simülasyon çalışması ile de bulunmuştur. Bulunan bu varyans değerlerinin teorik olarak hesaplanan değerleri desteklediği görülmüştür.

Sıra istatistikleri ile elde edilen bu tahmin ediciler arasında belirli kriterlere en çok uygunluk gösteren tahmin edici en iyi tahmin edicidir. Uniform dağılımın kitle ortalaması için sıra istatistikleri ile önerilen bu yansız tahmin ediciler arasında hem teorik hem de simülasyon çalışmaları sonucunda en küçük varyanslı tahmin edicinin maksimum sıra istatistiğine dayalı olarak önerilen θ_1^* tahmin edicisi olduğu ortaya konulmuştur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahsanullah, M., 2007, Recent developments in ordered random variables, Nova Publishers, New York, 336p.

Ahsanullah, M. and Nevzorov, V. B., 2005, Order statistics: Examples and exercises, Nova Publishers, New York, 236p.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, N., 2008, First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics), SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, New York, 306p.

Balakrishnan, N. and Cohen, A. C., 1991, Order statistics and inference, Academic Press, 377p.

Chernoff, H., Gastwirth, J. L. and Johns, M. V., 1967, Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation, *The Annals of Mathematical Statistics*, 38 (1) (Feb., 1967), 52-72p.

David, H. A. and Nagaraja, H. N., 2003, Order statistics, John Wiley and Sons, New Jersey, 458p.

Downton, F., 1954, Least squares estimates using ordered observations, *The Annals of Mathematical Statistics,* 25 (2) (Jun., 1954), 303-316p.

Harter, H. L., 1961, Estimating the parameters of negative exponential populations from one or two order statisitcs, *The Annals of Mathematical Statistics,* 32 (4) (Dec., 1961), 1078-1090p.

Kitapçı, B., 2010, Medyan İstatistiğinin Dağılımı ve Karakteristikleri, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 67s.

Kulldorff, G., 1963, Estimation of one or two parameters of the exponantial distribution on the basis of suitably chosen order statistics, *The Annals of Mathematical Statistics,* 34 (4) (Dec., 1963), 1419-1431p.

Lloyd, E. H., 1952, Least squares estimation of location and scale parameters using order statistics, *Biometrika,* 39 (1/2) (Apr., 1952), 88-95p.

Sarhan, A. E., 1954, Estimation of the mean and standart deviation by order statistics, *The Annals of Mathematical Statistics,* 25 (2) (Jun., 1954), 317-328p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Sarhan, A. E., 1954, Estimation of the mean and standart deviation by order statistics, PART II, *The Annals of Mathematical Statistics,* 25 (2) (Jun., 1954), 317-328p.

Sarhan, A. E., 1955, Estimation of the mean and standart deviation by order statistics, PART III, *The Annals of Mathematical Statistics,* 26 (4) (Dec., 1955), 576-592p.

Scheffe, H. and Tukey, J. W., 1945, Nonparametric estimation I. validation of the order statistics, *The Annals of Mathematical Statistics,* 16 (2) (Jun., 1945), 187-192p.

Siddiqui, M. M., 1963, Optimum estimators of the parameters of negative exponential distributions from one or two order statistics, *The Annals of Mathematical Statistics,* 34 (1) (Mar., 1963), 117-121p.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep CEYLAN, 13 Haziran 1988 tarihinde İzmir'de doğdu. Bütün öğrenim hayatını İzmir'de geçirdi. 2005 yılında Vali Erol Çakır Lisesi'nden birincilikle mezun oldu ve aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'ne birincilik kontenjanından yerleşti. Lisans öğreniminden 2010 yılında mezun olup, aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimi boyunca belirli işlerde çalıştı ve bankalar, fabrikalar olmak üzere çeşitli yerlerde staj yaptı. Bunun yanı sıra, İzmir Büyükşehir Belediyesi ve VESTEL A.Ş.'den burs almaya hak kazandı.

Üniversite öğrenimi sırasında, 2008 yılında, Açık Öğretim Fakültesi İşletme Bölümü'ne başladı ve bu yıl (2012) mezun oldu.