

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ANOVA MODELLERİNDE ÇARPIK DAĞILIMLAR KULLANILARAK
DAYANIKLI İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI VE UYGULAMALARI**

Nuri ÇELİK

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2012

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Nuri ÇELİK tarafından hazırlanan “ ANOVA Modellerinde Çarpık Dağılımlar Kullanılarak Dayanıklı İstatistiksel Sonuç Çıkarımı ve Uygulamaları” adlı tez çalışması 17/10/2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Eş Danışman : Prof. Dr. Olcay ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Fahrettin ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Üye: : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Üye : Doç. Dr. Özlem Müge AYDIN
Başkent Üniversitesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri ABD

Üye : Doç. Dr. Mehmet YILMAZ
Ankara Üniversitesi İstatistik ABD

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlhan USTA
Anadolu Üniversitesi İstatistik ABD

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özer KOLSARICI
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

ANOVA MODELLERİNDE ÇARPIK DAĞILIMLAR KULLANILARAK DAYANIKLI İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI VE UYGULAMALARI

Nuri ÇELİK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

Varyans analizi (ANOVA), üç ya da daha fazla grup ortalaması arasında istatistiksel olarak farklılık olup olmadığını test etmek amacıyla kullanılan bir yöntemdir. Ancak ANOVA tekniği kullanılarak yapılan analizler bazı temel varsayımlara dayanır. Bunlardan en önemlisi, ε_{ij} hata terimlerinin, 0 ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılıma sahip olmasıdır. Model parametrelerinin tahmini, hata terimleri normal dağılıma sahip olduğunda en küçük kareler (Least square, LS) yöntemiyle yapılmaktadır. Normallik varsayımı altında, LS tahmin edicileri en etkin tahmin edicilerdir. Ancak normallik varsayımı sağlanamazsa, ANOVA modelindeki parametrelerin LS tahmin edicileri etkinliğini yitirmektedir. Dolayısıyla, LS tahmin edicilerine dayanan F test istatistiği de gücünü kaybedecektir. Uygulamada normal olmayan dağılımlar, normal dağılıma göre daha yaygındır. Bilinen dağılımlara çarpıklık katsayısı eklenerek oluşturulan çarpık (skew) dağılımlar ailesi istatistik literatürüne Azzalini (1985) tarafından dahil edilen ve literatürde çok sık kullanılan bir sürekli dağılımlar ailesidir. Söz konusu dağılımlar ailesinin önemi, bilinen simetrik dağılımların hem kendisini hem de komşuluğundaki dağılımları modelleyerek uygulamacıya veri modellemede esneklik sağlamasıdır. Bu çalışmada, bir-yönlü varyans analizi ve iki-yönlü varyans analizi modellerinde hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılımına sahip olduğu durumlarda parametre tahmini en çok olabilirlik (maximum likelihood, ML) ve onun uyarlanmış versiyonu ile gerçekleştirilip bu tahmin edicilere dayalı test istatistikleri önerilmiştir. Ayrıca, bir yönlü deney tasarımında II. tip sansürlenmiş veriler için hata terimlerinin dağılımının çarpık normal ve çarpık t olması durumunda model parametreleri elde edilmiş ve benzer şekilde bu tahmin edicilere dayanan test istatistikleri geliştirilmiştir.

Ekim 2012, 165 sayfa

Anahtar Kelimeler: ANOVA, Çarpık normal, Çarpık t , Aykırı Değer, Sansürleme

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ROBUST STATISTICAL INFERENCE IN ANOVA MODELS USING SKEW DISTRIBUTIONS AND APPLICATIONS

Nuri ÇELİK

Ankara Univesity
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

Analysis of variance (ANOVA) is an analysis which is used to test if there is any significant difference between three or more group means. We generally assume that the error terms are normally distributed with mean 0 and variance σ^2 . The estimators of the model parameters are obtained by using the least square (LS) estimation method when the error terms have normal distribution. LS estimators of ANOVA parameters are the most efficient under the normality assumption. However, when the normality assumption is not satisfied, LS estimators of the parameters and the test statistics based on them lose their efficiency. In applications nonnormal distributions are more prevalent than the normal distribution. The family of skew distributions originated by Azzalini(1985) are obtained by adding skewness parameter to known distributions. The importance of these distributions is to provide flexibility to statisticians for modeling symmetric distributions and the neighborhood of them. In this work, when the error terms have skew normal and skew t distributions, the estimators of the model parameters and the test statistics based on them are obtained with maximum likelihood (ML) estimation methodology and the modified version of it in one-way and two-way ANOVA models. Also, type II censoring in experimental design is investigated and the the estimators of the model parameters and the test statistics based on them are obtained, when the error terms have skew normal and skew t distributions.

October 2012, 165 pages

Key Words: ANOVA, Skew Normal, Skew t , Skewness, Outlier, Censoring

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmasında hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, akademik kariyerimde emeklediğim dönemlerde elimden tutup bana yürümeyi öğreten, gerek istatistik bilgi birikimi gerekse kişilik özellikleriyle her zaman yoluma ışık tutan değerli hocam Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU'na (Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim dalı), tez çalışmasının fikir aşamasında büyük katkıları olan, daha sonra da eş danışmanlığımı kabul edip bana her türlü desteği veren, değerli hocam Prof. Dr. Olcay ARSLAN'a, (Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim dalı), hiçbir zaman desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Fahrettin ARSLAN'a (Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim dalı), olumlu eleştirileri ve desteklerinden dolayı Doç Dr. Özlem Müge AYDIN (Başkent Üniversitesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı) ve Doç. Dr. Mehmet YILMAZ'a (Ankara Üniversitesi, İstatistik Anabilim dalı), simülasyon çalışmalarımın temellerini atan değerli arkadaşım Araş. Gör. Şükrü ACITAŞ'a, matematiksel çıkarımlarda katkıda bulunan değerli dostum Araş. Gör. Mehmet ÜNVER'e, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kardeşlerim Araş. Gör. İklim GEDİK BALAY ve Araş. Gör. Gül OLGUN KARACAN'a, ve beni bugünlere kadar getiren, hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen, yaşamımın her alanında iyi ki varlar dediğim annem Emine ÇELİK'e, babam Mehmet ÇELİK'e, kardeşlerim Pınar ve Onur ÇELİK'e, ve en önemlisi kıymetlim Kerem ÇELİK'e
Sonsuz teşekkürler.

Nuri ÇELİK

Ankara, Ekim 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Bir Yönlü Varyans Analizi ve Normal Teori.....	1
1.1.1 Parametre tahmini.....	2
1.1.2 Hipotez testi.....	3
1.2 Bir Yönlü Varyans Analizi ve Normal Olmayan Teori.....	5
1.2.1 En çok olabilirlik yöntemi.....	6
1.2.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	6
1.3 Literatür Taraması.....	8
1.4 Çalışmanın Amacı.....	9
1.5 Çarpıklaştırma.....	10
1.5.1 Çarpık normal dağılım.....	10
1.5.2 Çarpık t dağılımı.....	13
1.5.3 II. tip sansürleme.....	17
2. BİR YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ.....	19
2.1 Hata Terimlerinin Dağılımının Çarpık Normal Olması Durumunda Bir Yönlü Varyans Analizi.....	19
2.1.1 Parametre tahmini.....	19
2.1.1.1 En küçük kareler yöntemi.....	19
2.1.1.2 En çok olabilirlik yöntemi.....	20
2.1.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	22
2.1.2 Monte Carlo simülasyon çalışması.....	25
2.1.3 Dayanıklılık.....	28
2.1.3 Hipotez testi.....	32
2.2 Hata Terimlerinin Dağılımının Çarpık t Olması Durumunda Tek Yönlü Varyans Analizi.....	36
2.2.1 Parametre tahmini.....	37
2.2.1.1 En küçük kareler yöntemi.....	37
2.2.1.2 En çok olabilirlik yöntemi.....	38
2.2.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	40
2.2.2 Monte Carlo simülasyon çalışması.....	43
2.2.3 Hipotez testi.....	48
3. İKİ YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ.....	53
3.1 Hata Terimlerinin Dağılımının Çarpık Normal Olması Durumunda İki Yönlü Varyans Analizi.....	54
3.1.1 Parametre tahmini.....	54
3.1.1.1 En küçük kareler yöntemi.....	54

3.1.1.3 En çok olabilirlik yöntemi.....	55
3.1.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	57
3.1.2 Monte Carlo simülasyon çalışması.....	59
3.1.3 Hipotez testi.....	61
3.2 Hata Terimlerinin Dağılımının Çarpık t Olması Durumunda İki Yönlü Varyans Analizi.....	65
3.2.1 Parametre tahmini.....	65
3.2.1.1 En küçük kareler yöntemi.....	65
3.2.1.2 En çok olabilirlik yöntemi.....	65
3.2.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi.....	68
3.2.2 Monte Carlo simülasyon çalışması.....	70
3.2.3 Hipotez testi.....	77
4. II. TİP SANSÜRLEMENMİŞ VERİLER İÇİN BİR YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ.....	84
4.1 Hata Terimlerinin Çarpık Normal Olması Durumunda Sansürlü Verilerde Tek Yönlü Varyans Analizi.....	85
4.2 Hata Terimlerinin Çarpık t Olması Durumunda Sansürlü Verilerde Tek Yönlü Varyans Analizi.....	93
5. UYGULAMA.....	101
5.1 Radyo Frekansı Gücü Verisi.....	101
5.2 ASG Değerleri Verisi.....	105
5.3 FG Değerleri Verisi.....	106
5.4 Hayvanların Yaşam Süreleri Verisi.....	109
5.5 Çimento Kuruma Süreleri Verisi.....	111
5.6 Fındık Miktarları Verisi.....	114
6 SONUÇ.....	118
KAYNAKLAR.....	121
EKLER.....	125
EK 1 NORMAL, t , ÇARPIK NORMAL ve ÇARPIK t DAĞILIMLARI	126
EK 2 t , ÇARPIK NORMAL ve ÇARPIK t DAĞILIMLARI İLE İLGİLİ BAZI ÖNEMLİ TEOREMLER VE İSPATLARI.....	136
EK 3 İKİ YÖNLÜ VE BİR YÖNLÜ SANSÜRLENMİŞ ANOVA İÇİN MATLAB PROGRAM KODLARI.....	144
ÖZGEÇMİŞ.....	164

KISALTMALAR DİZİNİ

ANOVA	Varyans Analizi
df	Serbestlik Derecesi
SST	Genel Kareler Toplamı
SSE	Hata Kareler Toplamı
MSE	Hata Kareler Ortalaması
LS	En Küçük Kareler
ML	En Çok Olabilirlik
MML	Uyarlanmış En Çok Olabilirlik
IRA	İteratif Yeniden Ağırlıklandırılmış Algoritma
RE	Görelî Etkinlik

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Çarpık-normal olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	12
Şekil 1.2 Çarpık-t olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	16
Şekil 5.1 Radyo frekans gücü verisi için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.8$	102
Şekil 5.2 ASG değerleri verisi için Q-Q grafiği; $\nu = 5$, $\lambda = 0.7$	105
Şekil 5.3 FG değerleri verisi için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.7$	107
Şekil 5.4 Hayvanların yaşam süreleri verisi için Q-Q grafiği ; $\nu = 5$, $\lambda = 1$	110
Şekil 5.5 Çimento Kuruma Süreleri verisi 1. deneme için Q-Q grafiği ; $\lambda = 1$	112
Şekil 5.6 Çimento Kuruma Süreleri verisi 2. deneme için Q-Q grafiği ; $\lambda = 1$	112
Şekil 5.7 Çimento Kuruma Süreleri verisi 3. deneme için Q-Q grafiği ; $\lambda = 1$	112
Şekil 5.8 Fındık verisi 1. deneme için Q-Q grafiği ; $\lambda = 0.7$, $\nu = 6$	115
Şekil 5.9 Fındık verisi 2. deneme için Q-Q grafiği ; $\lambda = 0.7$, $\nu = 6$	115
Şekil 5.10 Fındık verisi 3. deneme için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.7$, $\nu = 6$	115

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 Çarpık normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri.....	11
Çizelge 1.2 Çarpık t dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri.....	15
Çizelge 2.1 w_{ij} ağırlıklarının ortalama değerleri.....	25
Çizelge 2.2 Çarpık normal dağılıma sahip X rasgele değişkeni için $P(X > E(X))$ olasılığı.....	26
Çizelge 2.3 μ_i parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	30
Çizelge 2.4 σ parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	31
Çizelge 2.5 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları; $\alpha = 0.05, a = 3$	34
Çizelge 2.6 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ($a=3, n=10$; $\alpha=0.050$).....	35
Çizelge 2.7 Model (2) için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ($a=3$, $n=10; \alpha=0.050$).....	36
Çizelge 2.8 Çarpık t dağılımına sahip X rasgele değişkeni için $P(X > E(X))$ olasılığı.....	43
Çizelge 2.9 μ_i parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri	44
Çizelge 2.10 σ parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri	46
Çizelge 2.11 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları ($a=3$, $n=10; \alpha=0.050$).....	50
Çizelge 2.12 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ($a = 3, n = 10$).....	51
Çizelge 2.13 Bir yönlü varyans analizi için $CPU(\hat{\mu}_i)+CPU(\hat{\sigma})$	52
Çizelge 3.1 μ_{ij} parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	60
Çizelge 3.2 $\alpha\beta_{ij}$ parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	60
Çizelge 3.3 σ parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	61
Çizelge 3.4 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları ($a = 3, b = 3, n = 5, \alpha = 0.050$)	63
Çizelge 3.5 F_{deneme} , F_{blok} ve $F_{etkilesim}$ test istatistiklerinin gücü ($a = 3, b = 3, n = 5$).....	64
Çizelge 3.6 μ_{ij} parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	71

Çizelge 3.7 $\alpha\beta_{ij}$ parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri	73
Çizelge 3.8 σ parametresi için LS , ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	75
Çizelge 3.9 LS , ML ve MML yöntemleriyle elde edilmiş F_{deneme} , F_{blok} ve $F_{etkilesim}$ için I. tip hatalar ($a = 3, b = 3, n = 5, \alpha = 0.050$)	79
Çizelge 3.12 Denemeler için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ($a = 3, b = 3, n = 5$).....	80
Çizelge 3.13 Bloklar için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ($a = 3, b = 3, n = 5$).....	81
Çizelge 3.14 Etkileşim için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ($a = 3, b = 3, n = 5$).....	82
Çizelge 4.1 μ_i parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	91
Çizelge 4.2 σ parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	91
Çizelge 4.3 F_{LS} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları ($a = 3, n = 10, \alpha = 0.050$).....	92
Çizelge 4.4 μ_i parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	98
Çizelge 4.5 σ parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.....	99
Çizelge 4.6 F_{LS} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları ($a = 3, n = 10, \alpha = 0.050$).....	100
Çizelge 5.1 Radyo frekans gücü verisi.....	101
Çizelge 5.2 Radyo frekansı gücü verisi için $F_0(x)$ ve $ F_0(x) - F_n(x) $ değerleri.....	103
Çizelge 5.3 Radyo Frekansı gücü verisi için parametrelerin LS , ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri.....	104
Çizelge 5.4 Parametre tahmin edicilerin ortalama, varyans, MSE değerleri; $\lambda = 0.8$, $n=5$	104
Çizelge 5.5 ASG değerleri verisi.....	105
Çizelge 5.6 ASG değerleri verisi için parametrelerin LS , ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri.....	106
Çizelge 5.7 Parametre tahmin edicilerin ortalama, varyans, MSE değerleri ; $\lambda = 0.7$, $v = 7$ ve $n=7$	106
Çizelge 5.8 FG değerleri verisi.....	107

Çizelge 5.9 FG değerleri verisi için $F_0(x)$ ve $ F_0(x) - F_n(x) $ değerleri.....	108
Çizelge 5.10 FG değerleri verisi için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri.....	108
Çizelge 5.11 Hayvanların yaşam süreleri verisi.....	109
Çizelge 5.12 Hayvanların yaşam süreleri verisi için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri.....	110
Çizelge 5.13 Çimento Kuruma Süreleri verisi.....	111
Çizelge 5.14 Çimento Kuruma Süreleri verisi için $F_0(x)$ ve $ F_0(x) - F_n(x) $ değerleri.....	113
Çizelge 5.15 Çimento Kuruma Süreleri verisi için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri (tam veri)	113
Çizelge 5.16 Çimento Kuruma Süreleri verisi için parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri (sansürlenmiş veri).....	114
Çizelge 5.17 Parametre tahmin edicilerin ortalama, varyans, MSE değerleri $\lambda = 1$ ve $n=5$ $q = 0.2$	114
Çizelge 5.18 Fındık miktarları verisi.....	114
Çizelge 5.19 Fındık miktarları verisi için parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri (sansürlenmiş veri).....	116
Çizelge 5.20 Fındık miktarları verisi için parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri (tam veri).....	116
Çizelge 5.21 Parametre tahmin edicilerin ortalama, varyans, MSE değerleri $\lambda = 0.7$, $v = 6$ ve $n=11$ $q = 1/11$	117

1. GİRİŞ

Bu bölümde konunun akışı içerisinde ihtiyaç duyulacak temel tanımlar, ve ön bilgiler ele alınmıştır. Ayrıca, konu bütünlüğünü bozmayacak şekilde bazı önemli çıkarımlar ve teoremler verilmiştir.

1.1 Bir Yönlü Varyans Analizi ve Normal Teori

Varyans analizi (Analysis of Variance, ANOVA), üç ya da daha fazla grup ortalaması arasında istatistiksel olarak farklılık olup olmadığını test etmek için kullanılan bir yöntemidir. Amaç, deneyi etkileyen faktör veya faktörlerin etkisinin belirlenmesidir. Deneyi etkileyen yalnız bir tane faktör olduğunda bir yönlü varyans analizi kullanılmaktadır. Bir yönlü varyans analizi için kullanılacak matematiksel model,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, a ; j = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

şeklindedir. Burada,

y_{ij} , i . denemedeki j . gözlem değerini,

μ , genel ortalamayı,

α_i , i . denemenin etkisini,

ε_{ij} , rasgele hata terimlerini

göstermektedir.

Bir yönlü varyans analizi bazı temel varsayımlara dayanır. Bu varsayımlar,

- (i) ε_{ij} hata terimleri 0 ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılıma sahiptir,
- (ii) Hata terimlerinin varyansları homojendir,
- (iii) Hata terimleri birbirinden bağımsızdır.

şeklinde sıralanabilir. Bu varsayımlar kısaca,

$$\varepsilon_{ij} \sim NID(0, \sigma^2) \quad (1.2)$$

şeklinde de gösterilmektedir.

Bu çalışmada (1.1) modelinin sabit etkili model olduğu varsayılmıştır. Bir başka deyişle,

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0 \quad (1.3)$$

olarak alınmıştır.

1.1.1 Parametre tahmini

ANOVA modelindeki parametrelerin en küçük kareler (Least Squares-LS) tahmin edicileri, normallik varsayımı altında en etkin tahmin ediciler olduğu için, parametre tahminleri geleneksel olarak LS yöntemiyle yapılır. Bir parametrenin LS tahmin edicisi, modeldeki hata terimlerinin kareleri toplamını ilgili parametreye göre minimum yapan değerdir. (1.1) modeli için hata kareler toplamı,

$$Q = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i)^2 \quad (1.4)$$

dir. Bu durumda model parametrelerinin LS tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \mu} &= (-2) \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} &= (-2) \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

denkleminin çözümüdür.

(1.1) modelinin, sabit etkili bir model olduğu göz önüne alınarak μ ve α_i parametrelerinin LS tahmin edicileri, sırasıyla,

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{..}, \quad \tilde{\alpha}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \quad (1.4)$$

olur. Burada,

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}}{N}, \quad \bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ij}}{n} \text{ ve } N=an \quad (1.5)$$

biçimindedir. Hata varyansı $\tilde{\sigma}^2$ nin LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N} \quad (1.6)$$

olarak elde edilir. (1.6) denkleminde verilen LS tahmin edicisi yanlıdır. Gerekli yan düzeltmesi yapılırsa,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N - a} \quad (1.7)$$

olur.

1.1.2 Hipotez Testi

(1.1) modelinde amaç, denemeler arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını sınamaktır. Bu durum için kullanılan hipotez testi,

$$\begin{aligned}
H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0 \\
H_1 : \text{En az bir } \alpha_i = 0
\end{aligned}
\tag{1.8}$$

biçimindedir. (1.8) hipotezi,

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2
\tag{1.9}$$

toplam değişkenliğin bir ölçüsü olan genel kareler toplamının (Sum of Squares Total, SST) deneme kareler toplamı (Sum of Squares Treatment, SS_{Deneme}) ve hata kareler toplamı (Sum of Squares Error, SS_{Hata}) olarak bileşenlerine ayrılmasıyla elde edilen test istatistiği yardımıyla sınılanır. SST , SS_{Deneme} ve SS_{Hata} 'nın toplamıdır. Bir başka deyişle,

$$\begin{aligned}
SST &= n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \\
&= SS_{Deneme} + SS_{Hata}
\end{aligned}
\tag{1.10}$$

şeklindedir.

(1.1) modelinde (1.8) hipotezini sınamak için,

$$F = \frac{SS_{Deneme} / a - 1}{SS_{Hata} / N - a}
\tag{1.11}$$

test istatistiği kullanılır.

Hata terimlerinin normallik varsayımı altında, SST / σ^2 , $N-1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Benzer şekilde, $n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 / \sigma^2$ veya bir başka ifade ile

(SS_{Deneme} / σ^2) 'nin $a-1$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına, $\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 / \sigma^2$ veya

bir başka ifade ile (SS_{Hata}/σ^2) 'nin de $N-a$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan Cochran teoremi yardımıyla bu iki rasgele değişkeninin bağımsız olduğu ispatlanabilir, Cochran (1934). Ki-kare dağılımına sahip bağımsız iki rasgele değişkenin serbestlik dereceleriyle birbirine oranının F olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, (1.11) test istatistiği $a-1$ ve $N-a$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir.

Buna göre,

$$F_{Hesap} > F_{Tablo}$$

ise (1.8) hipotezi reddedilir. Bir başka deyişle, F test istatistiğinin değeri α anlam seviyesinde $a-1$ ve $N-a$ serbestlik dereceli F tablo değerinden büyükse hipotez reddedilir yani denemeler arasında anlamlı bir farklılık vardır denilir.

1.2 Bir Yönlü Varyans Analizi ve Normal Olmayan Teori

Bir önceki bölümde de bahsedildiği gibi ANOVA tekniği kullanılarak yapılan analizler normal dağılım varsayımı altında yapılmaktadır ve bu varsayım altında LS yöntemiyle elde edilen tahmin ediciler en etkin tahmin edicilerdir. LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiği ise en güçlü test istatistiğidir. Ancak uygulamalarda görülmektedir ki, normal olmayan dağılımlar normal dağılıma göre daha yaygındır, (Pearson 1932, Geary 1947, Elveback 1970, Huber 1981, Tiku ve Tan 1986).

(1.1) modeli için normallik varsayımı sağlanamazsa LS tahmin edicilerinin etkinlikleri hızla düşmektedir. F test istatistiğinin I. tip hatası çok fazla etkilenmemekle beraber gücünün oldukça düştüğü görülmüştür, (Geary 1947, Tiku 1971).

Bu bölümde hata terimlerinin normal dağılmadığı durumlarda bir yönlü varyans analizi için parametre tahmin yöntemlerinden bahsedilecektir.

1.2.1 En çok olabilirlik yöntemi

Bir parametrenin ML tahmin edicisi, olabilirlik fonksiyonunu bu parametreye göre maksimum yapan değerdir. Bu değer, olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametreye göre türevini alıp sıfıra eşitlemekle bulunur. Buna göre, $X_1, X_2, \dots, X_n$ olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \theta)$ olan kitleden bir örneklem olsun. θ nın olabilirlik fonksiyonu $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ olmak üzere,

$$L(\theta | \tilde{X} = \tilde{x}) = f(\tilde{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (1.12)$$

dir. θ nın en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\hat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \tilde{X}) \quad (1.13)$$

şeklinde bulunur. Genellikle, olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonu yerine monoton artanlık özelliği ve işlem kolaylığı sağladığı için fonksiyonun logaritması (log-likelihood) maksimize edilir. Bu yöntemle elde edilen tahmin ediciler, aranan özelliklerden (etkinlik, yansızlık, tutarlılık) birçoğuna sahip olmakla birlikte maksimum yapma probleminin çözümünde ortaya sıkıntılar çıkabilmektedir.

(1.1) modeli için bilinmeyen parametrelerin, $\theta = (\mu, \alpha_i, \sigma)$, ML tahmin edicileri, normallik varsayımı altında LS tahmin edicileriyle aynıdır.

1.2.2 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

Bazı durumlarda, olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan değer, açık olarak bulunamayıp, iteratif yöntemler yardımıyla bulunabilmektedir. Bu durumda, tahmin edicinin kapalı formu yoktur veya olabilirlik denklemlerinin yeniden düzenlenmesi ile elde edilen tahmin ediciler, diğer parametrelerin tahmin edicilerine bağlı bulunmaktadır. Ancak iteratif yöntemlerde,

- (i) Yakınsayamama,
- (ii) Birden fazla çözüme sahip olma,
- (iii) Yanlış değere yakınsama

problemleri ortaya çıkabilecektir, Barnett (1966). Benzer şekilde, Puthenpura ve Sinha (1992) eğer veri setinde uç değer varsa, olabilirlik denklemlerinin yakınsamadıklarını göstermiştir. Bütün bu zorluklardan kurtulmak için ise MML yöntemi tercih edilmiştir, Tiku (1967, 1968), Tiku ve Suresh (1992).

MML tahmin yöntemi, Tiku (1967, 1968) tarafından önerilen ve Tiku ve Suresh (1992) tarafından geliştirilen bir yöntemdir. Yöntem, ML yönteminin çözüm zorluğundan kurtulan aynı zaman da onun güzelliğini de koruyan bir yöntemdir. MML tahmin edicileri, en çok olabilirlikle elde edilen tahmin edicilerin özelliklerine asimptotik olarak sahiptir ve bu yöntemle parametrelerin tahmin edicileri analitik olarak elde edilmektedir.

MML yöntemi genel olarak üç aşamada özetlenebilir:

- (i) En çok olabilirlik denklemleri sıralı istatistikler cinsinden yazılır, sıralı istatistiklerin toplama işlemine göre değişmezlik özelliğinden dolayı olabilirlik denklemlerinde herhangi bir değişiklik olmayacaktır.
- (ii) Olabilirlik fonksiyonlarında yer alan doğrusal olmayan ifadeler, ML tahmin edicilerinin açık olarak bulunamamasına sebep olur. Bu nedenle doğrusal olmayan fonksiyonlar Taylor serisinin ilk iki terimi yardımıyla doğrusal fonksiyonlarına yaklaştırılır.
- (iii) Elde edilen doğrusal ifadeler olabilirlik denklemlerinde yerine konduktan sonra denklem sistemi çözülür.

Bu çözümlerden elde edilen tahmin edicilere MML tahmin edicileri denir. MML tahmin edicileri gözlemlerin fonksiyonlarıdır ve kolaylıkla hesaplanabilir. Bu tahmin ediciler LS tahmin edicilerinden (özellikle örneklem büyük olduğunda) çok daha etkin,

asimptotik olarak tam etkinliğe (yansız ve en küçük varyanslı) sahip ve dayanıklıdır, (Smith v.d. 1973, Tan 1985 ve Vaughan 1992).

1.3 Literatür Taraması

Literatürde MML yöntemini kullanılarak yapılan birçok çalışma mevcuttur. Ancak deney tasarımında yapılan çalışmalar şu şekildedir: Şenoğlu ve Tiku (2001), bir yönlü ve iki yönlü etkileşimli deney tasarımında, hata terimlerinin dağılımının Weibull ve Genelleştirilmiş Lojistik olarak almıştır. Model parametrelerinin MML tahmin edicilerini elde etmiştir. Daha sonra ilgili hipotez testleri için MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistikleri tanımlanmıştır. Monte-Carlo simülasyonu yardımıyla önerilen tahmin edicilerin, geleneksel LS tahmin edicilerinden ve LS tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinden daha etkin olduğunu göstermiştir. Ayrıca, elde edilen MML tahmin edicilerinin ve bu tahmin edicilerine dayanan testlerin daha dayanıklı olduğunu göstermiştir. Şenoğlu ve Tiku (2002), deney tasarımında tek yönlü varyans analizi için heterojen varyans yapısı altında, hata terimlerinin Genelleştirilmiş Lojistik dağılması durumunda doğrusal karşılaştırmaları incelemiştir. Daha sonra Şenoğlu ve Tiku (2004), tek yönlü varyans analizi modelinde I. tip ve II. Tip sansürlenmiş verileri kullanarak hata terimlerinin normal dağılıma sahip olmaması durumunda MML tahmin edicilerini elde etmiştir. Yine aynı çalışmada hata terimlerinin budanmış dağılıma sahip olması durumunda tahmin edicileri elde etmiştir. Ayrıca bu tahmin edicilerin daha etkin olduklarını göstermiştir. Şenoğlu (2005), 2^k faktöriyel tasarımlarda hata terimlerinin Weibull dağılıma sahip olması durumunda MML yöntemini kullanarak dayanıklı tahmin ediciler elde etmiştir. Ayrıca bu tahmin edicilere dayalı test istatistikleri geliştirmiş ve bu test istatistiklerinin daha güçlü olduklarını göstermiştir. Şenoğlu (2007) hata terimlerinin dağılımını kısa kuyruklu simetrik dağılıma sahip olması durumunda tek yönlü kovaryans analizinde MML tahmin edicilerini elde etmiş ve söz konusu tahmin edicilerin LS tahmin edicilerinden daha etkin olduklarını göstermiştir.

Şenoğlu ve Avcıoğlu (2009) bir yönlü kovaryans analizi modelinde hata terimlerinin dağılımının Genelleştirilmiş Lojistik dağılımlar ailesinden biri olduğunu varsaymış ve bu durumda MML yöntemine dayalı olarak parametre tahminleri yapmıştır. Denemeler

arasındaki farkı test etmek için bir test istatistiği geliştirmiştir. Elde edilen sonuçlar, önerilen test istatistiğinin normal teoride kullanılan test istatistiğinden istatistiksel olarak daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Bunun yanı sıra Şenoğlu (2007), kovaryans analizi modellerinde bağımsız değişkenin stokastik olması durumunu incelemiştir. Çalışmasında hem hata terimlerinin hem de bağımsız değişkenlerin Genelleştirilmiş Lojistik dağılımlar ailesinden bir dağılıma sahip olduğunu varsaymış, parametre tahminleri yapmış ve test istatistikleri geliştirmiştir. Sonuçlar, geliştirilen test istatistiklerinin ve parametre tahmin edicilerinin normal teori sonuçlarından istatistiksel olarak daha iyi olduğunu göstermiştir.

1.4 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada, bir önceki bölümde anlatılanlardan farklı olarak bir yönlü ve iki yönlü ANOVA modelinde hata terimlerinin çarpık normal dağılıma ve çarpık t dağılımına sahip olması durumu ele alınmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, bir yönlü varyans analizinde hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılımı durumunda parametre tahminleri ML ve MML yöntemleriyle elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen tahmin edicilere dayalı test istatistikleri geliştirilmiştir. Monte Carlo simülasyon yöntemiyle ML ve MML tahmin edicilerin, LS tahmin edicilerinden daha etkin olduğu gösterilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, iki yönlü varyans analizinde, hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılımı durumunda bir önceki bölümde anlatıldığı gibi, parametre tahminleri ML ve MML yöntemleriyle ele edilmiştir. Bu tahmin edicilere dayalı test istatistikleri önerilmiştir ve normal teori ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, II. tip sansürlenmiş verilerde, bir yönlü varyans analizi için hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılımı durumu incelenmiştir. Parametre tahminleri MML tahmin yöntemiyle elde edilmiştir. Bu tahmin edicilere dayalı test istatistikleri önerilmiştir.

Uygulama kısmında ise, gerçek veri setleri ile bir önceki bölümde bulunan sonuçlar desteklenmiştir.

1.5 Çarpıklaştırma (Skewness Procedure)

Literatürde birçok çarpıklaştırma işlemi mevcuttur. Bu çalışmada, Azzalini(1985) tarafından önerilen çarpıklaştırma işlemi göz önüne alınmıştır.

Lemma 1.1: f , 0 etrafında simetrik olasılık yoğunluk fonksiyonu ve G , mutlak sürekli dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$h(x) = 2G(\lambda x) f(x), x \in R \quad (1.14)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon da $\lambda \in R$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliklerini taşır (Azzalini, 1985).

Tez çalışmasında, çarpık normal dağılım ve çarpık t dağılımı ele alınmıştır.

1.5.1 Çarpık Normal Dağılım

Çarpık normal dağılımdan, ilk olarak O'Hagan ve Leonhard (1976) tarafından yayınlanan makalede söz edilmiştir. Daha sonra Azzalini (1985), yayınladığı makalede çarpık normal dağılımın teorisini genişletmiştir. Çarpık normal dağılım, matematiksel işlem kolaylığı ve normal dağılımı da içermesinden dolayı literatürde oldukça yer almaktadır. Azzalini (1985, 1986), Chiogna (1998) ve Henze (1986), çarpık normal dağılımın matematiksel çıkarımlarını ve karakteristik özelliklerini araştırmışlardır. Azzalini ve Dalle Valle (1996) ve Azzalini ve Capitanio (2003) dağılımı teoriksel olarak genişletmiş ve çok değişkenli çarpık normal dağılım üzerine çıkarımlar yapmışlardır. Loperfido (2001), Genton (2001) ve Gupta ve Hung (2002), çarpık normal dağılıma sahip bir rasgele değişkenin karesel formları üzerinde durmuştur. Azzalini ve Capitanio (1999), Pewsey (2000) ve Gupta ve Cohen (2001), çarpık normal dağılımın dağılım fonksiyonu ve uyum iyiliği testleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Lemma 1.1'den hareketle (1.14) deki fonksiyonda f yerine $\phi(x)$, G yerine de $\Phi(x)$ yazılırsa elde edilen yeni dağılıma çarpık normal dağılım denir ve $X \sim SN(\lambda)$ olarak gösterilir. Buna göre, çarpık normal dağılım,

$$h(x) = 2\Phi(\lambda x)\phi(x), x \in R \quad (1.15)$$

şeklinde gösterilir. Burada,

$\phi(x) \rightarrow$ standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu,

$\Phi(x) \rightarrow$ standart normal dağılım fonksiyonunu

ifade etmektedir (1.14) fonksiyonunda, λ çarpıklık parametresini göstermekte olup, λ arttıkça dağılımın çarpıklığı da artmaktadır. Pratikte, $Y = \mu + \sigma X$ dönüşümü uygulanarak, çarpık normal dağılım için daha kolay çıkarımlar yapılması sağlanmıştır. Burada, μ , konum parametresi iken σ , ölçek parametresidir. Söz konusu konum ve ölçek parametreleri ile elde edilen çarpık normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h(y; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y - \mu}{\sigma}\right) \quad (1.16)$$

şeklinde ifade edilmektedir ve $Y \sim SN(\mu, \sigma, \lambda)$ şeklinde gösterilmektedir.

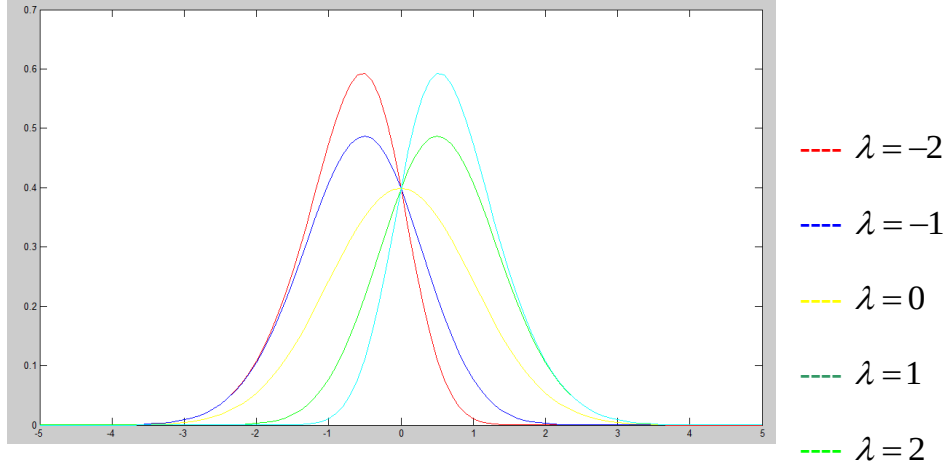
Çizelge 1.1, çarpık normal dağılımın çeşitli çarpıklık parametreleri için elde edilen çarpıklık (γ_1) ve basıklık (γ_2) değerlerini göstermektedir.

Çizelge 1.1 Çarpık normal dağılımın çarpıklık ve basıklık değerleri.

λ	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	10	20	∞
γ_1	0.00	0.14	0.45	0.67	0.78	0.85	0.96	0.99	0.995
γ_2	3.00	3.06	3.31	3.51	3.63	3.71	3.82	3.86	3.869

Çizelge 1.1'de görüldüğü gibi dağılımın çarpıklık değeri, λ arttıkça artış göstermekle beraber, maksimum 0.995 değerini alırken, basıklık en fazla 3.869 değerine ulaşmıştır.

Çarpık normal dağılım, çarpıklık parametresi sıfır iken bilinen standart normal dağılıma, sonsuz iken yarı normal (half-normal) dağılıma dönüşmektedir. Şekil 1.1 değişik çarpık parametreleri için, çarpık normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir.



Şekil 1.1 Çarpık-normal olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Şekil 1.1’de de görüldüğü gibi, çarpık normal dağılım, çarpıklık parametresine göre değişmektedir. Çarpıklık katsayısı negatif olduğunda, sola çarpık pozitif olduğunda ise sağa çarpık bir hale gelmiştir. Bununla beraber, çarpıklık katsayısı sıfır olduğunda, dağılım, standart normal dağılıma dönüşmektedir.

Çarpık normal dağılımın beklenen değeri ve varyansı sırasıyla,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\lambda / \sqrt{1 + \lambda^2} \right) \\ V(X) &= 1 - \frac{2}{\pi} \left(\lambda / \sqrt{1 + \lambda^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

dir. Çarpıklık ve basıklık sırasıyla,

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(4 - \pi) \text{sign}(\lambda) \left(\frac{\lambda^2}{\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\lambda^2} \right)^{3/2} \quad (1.18)$$

$$\gamma_2 = 2(\pi - 3) \left(\frac{\lambda^2}{\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\lambda^2} \right)^2 \quad (1.19)$$

şeklindedir.

Bu çalışmada çarpık normal dağılım kullanılmasının sebebi, çarpık normal dağılımın, normal dağılımı ve normale yakın dağılımları da modelleyerek uygulamacıya esneklik katmasıdır.

1.5.2 Çarpık t dağılımı

Çarpık t dağılımı, Azzalini (1985) tarafından önerilen bir dağılımdır. Literatürde birçok çarpık t dağılımı mevcuttur. Çarpık t dağılımı için çarpıklaştırma prosedürü Gupta (2003), Nadarajah ve Kotz (2003, 2007) tarafından genişletilmiştir. Azzalini ve Capitanio (2003) çarpık t dağılımı için daha genişletilmiş bir tanım vermiştir. Wang(2004) ve Ferreira ve Steel (2006) değişik çarpıklaştırma fonksiyonları tanımlamıştır. Son olarak Arslan (2011) literatürde kullanılan çarpık t dağılımları için genel bir değerlendirme makalesi yayınlamıştır.

Bu çalışmada kullanılan çarpık t dağılımı, normal dağılımın yayılım karmasından (scale mixture) gelmektedir, (Gupta 2002, Branco ve Dey 2001, Azzalini ve Capitanio 2003 ve Azzalini 2005).

Buna göre, Y , standart çarpık normal dağılıma ve V , v serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olsun. Y ve V birbirinden bağımsız olmak üzere $X = \frac{Y}{\sqrt{V/v}}$ rasgele

değişkeni çarpık t dağılımına sahiptir ve $X \sim St_v(\lambda)$ olarak gösterilmektedir. Buna göre, X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{st}(x; \lambda) = 2t_v(x)T_{v+1}\left(\lambda x \sqrt{\frac{v+1}{v+x^2}}\right) \quad (1.20)$$

olarak tanımlanır. Burada, t_v , v serbestlik dereceli Student's t olasılık yoğunluk fonksiyonunu, T_{v+1} , $v+1$ serbestlik dereceli Student's t dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Çarpık normal dağılımda olduğu gibi, λ çarpıklık parametresini göstermekte olup, λ arttıkça dağılımın çarpıklığı da artmaktadır. Pratikte, $U = \mu + \sigma X$ dönüşümü uygulanarak, çarpık t dağılımı için daha kolay çıkarımlar yapılması sağlanmıştır. Burada, μ , konum parametresi iken σ , ölçek parametresidir. Söz konusu konum ve ölçek parametreleri ile elde edilen çarpık t dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{st}(u; \lambda) = \frac{2}{\sigma} t_v\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right) T_{v+1}\left(\lambda \frac{u-\mu}{\sigma} \sqrt{\frac{v+1}{v+\frac{u-\mu}{\sigma}}}\right) \quad (1.21)$$

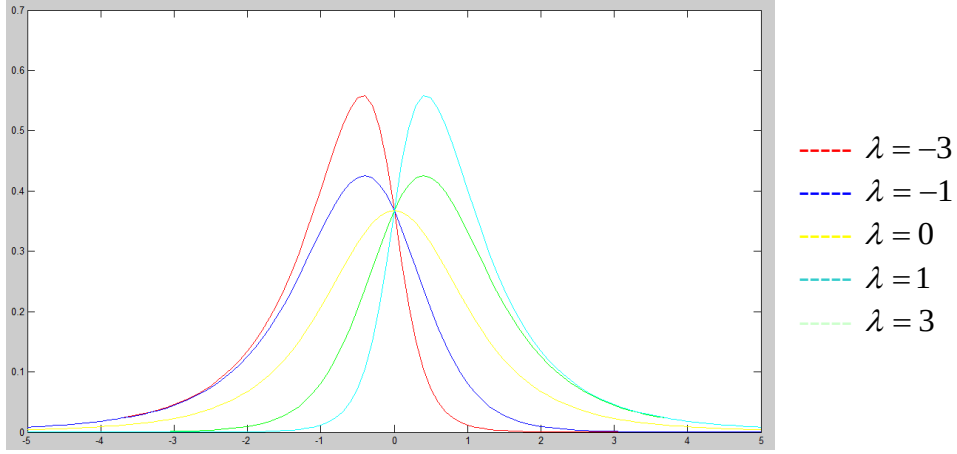
şeklinde ifade edilmektedir ve $U \sim St_v(\mu, \sigma, \lambda)$ şeklinde gösterilmektedir. Çizelge 1.2'de çarpık t dağılımının çeşitli şekil parametreleri ile elde edilen çarpıklık ve basıklık değerleri verilmiştir. Çizelge 1.2'de serbestlik derecesinin 4'ten başlatılmasının sebebi, $v < 4$ için basıklığın ve çarpıklığın tanımlı olmamasıdır.

Çizelge 1.2 Çarpık t dağılımının çarpıklık ve basıklık değerleri.

λ	0		1		2		5		10		20	
v	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
4	0.0	-	1.93	-	2.99	-	3.77	-	3.94	-	3.98	-
5	0.0	9.00	1.07	11.92	1.79	16.52	2.37	21.45	2.50	22.66	2.53	22.99
6	0.0	6.00	0.78	7.16	1.37	9.29	1.89	11.79	2.00	12.43	2.04	12.61
8	0.0	4.50	0.54	4.97	1.02	6.03	1.49	7.43	1.60	7.79	1.63	7.91
10	0.0	4.00	0.42	4.29	0.86	5.04	1.31	6.08	1.42	6.37	1.45	6.45
∞	0.0	3.00	0.15	3.13	0.48	3.40	0.88	3.83	0.99	3.96	0.98	3.87

Çizelge 1.2’den de görüldüğü gibi dağılımın basıklığı ve çarpıklığı serbestlik derecesine ve çarpıklık parametresine bağlıdır. Çarpıklık parametresi sıfır iken dağılım bilinen Students’ t dağılımı olur ve çarpıklığı sıfır değerini alır, basıklığı ise serbestlik derecesi arttıkça düşmektedir. Ancak çarpıklık parametresi arttıkça, dağılımın çarpıklığı ve basıklığı artmaktadır. Çarpıklık parametresi artarken, her çarpıklık parametresi için de serbestlik derecelerine bağlı olarak basıklık ve çarpıklık incelendiğinde, serbestlik derecesi arttıkça dağılımın basıklığı ve çarpıklığı düşmektedir. Çarpıklık parametresi λ , sonsuz olduğunda ise dağılım yarı t (half- t) olmaktadır. Çizelgeden de görüldüğü gibi serbestlik derecesi ve çarpıklık parametresi arttığında dağılım çarpık normale yakınsamakta ve dağılımın basıklık ve çarpıklık değerleri çarpık normal dağılımın basıklık ve çarpıklık değerine ulaşmaktadır.

Şekil 1.2 değişik çarpık parametreleri için, çarpık t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir. Çarpık t dağılımı, çarpık normal dağılımda olduğu gibi, çarpıklık parametresi pozitif iken sağa çarpık, negatif iken sola çarpık olmaktadır. Çarpıklık parametresi sıfır iken dağılım, bilinen Students’ t dağılımı olur.



Şekil 1.2 Çarpık-t olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Çarpık-t dağılımının beklenen değeri ve varyansı,

$$E(X) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 + 1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad \nu > 1 \quad (1.22)$$

$$V(X) = \frac{\nu}{\nu-2} - \frac{\nu}{\pi} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2, \quad \nu > 2 \quad (1.23)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Ayrıca,

$$\mu = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 + 1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (1.24)$$

olmak üzere, dağılımın çarpıklığı ve basıklığı sırasıyla,

$$\gamma_1 = \mu \left[\frac{\nu(3-\delta^2)}{\nu-3} - \frac{3\nu}{\nu-2} + 2\mu^2 \right] \left[\frac{\nu}{\nu-2} - \mu^2 \right]^{-3/2}, \quad \nu > 3 \quad (1.25)$$

$$\gamma_2 = \left[\frac{3\nu^2}{(\nu-2)(\nu-4)} - \frac{4\mu^2\nu(3-\delta^2)}{\nu-3} + \frac{6\mu^2\nu}{\nu-2} - 3\mu^4 \right] \left[\frac{\nu}{\nu-2} - \mu^2 \right]^{-2} - 3 \quad \nu > 4 \quad (1.26)$$

olarak hesaplanmaktadır (Gupta 2002).

Bu çalışmada, çarpık t dağılımının kullanılmasının sebebi, çarpık t dağılımının, normal dağılım, çarpık normal dağılım ve Students' t dağılımını da içine alan bir dağılım olması ve normal dağılıma iyi bir alternatif olmasıdır. Çarpık t dağılımı hem çarpıklığı hem de kalın kuyruklu olması sebebiyle dağılımda bulunan aykırı değerleri de modellemektedir.

1.6.3 II. Tip Sansürleme

Bir sistemin güvenilirliği için sonuç çıkarımı yaparken sistemi oluşturan tüm bileşenlerin bozulma zamanlarını gözlemlemek her zaman mümkün olmayabilir. Örneğin; bir klinikte tedavi gören hastalara ilişkin veriler, eksiksiz gözlenemeyebilir veya pahalı bir elektronik parçanın yaşam zamanı hakkında bilgi edinmek için yapılan yaşam testinde, parçaların hepsinin bozulmalarının gözlenmesi maliyeti ve test zamanını artıracığından istenmeyebilir. Tıp, biyoloji, sigortacılık, mühendislik, kalite kontrol ve birçok alanda sansürlenmiş verilerle karşılaşmaktadır.

Sansürleme, zaman ve maliyet gibi birtakım sınırlamalar nedeniyle, kesin olarak bilinmeyen, herhangi bir sebeple gözlenemeyen verilerin göz ardı edilmesidir. Literatürde birçok sansürleme türüyle karşılaşmaktadır. I. tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, t gibi önceden belirlenmiş bir zamandan önce, sistemdeki bozulan birimlerin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur. II. tip sansürleme olarak adlandırılan sansürleme modeli, n birimden oluşan bir sistemin bozulan $k \leq n$ biriminin bozulma zamanının gözlenmesi durumudur.

Bu alışmada, II. tip sansürlenmiş veriler için hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılması durumunda bir yönlü varyans analizi ele alınmıştır.

2. BİR YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

Bu bölümde bir yönlü varyans analizi için hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılması durumunda parametre tahmin edicileri bulunmuştur. Ayrıca, bulunan tahmin edicilere dayalı test istatistikleri önerilmiştir. Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak tahmin edicilerin etkinlikleri karşılaştırılmıştır.

2.1 Hata Terimlerinin Çarpık Normal Dağılması Durumunda Bir Yönlü Varyans Analizi

(1.1) modelinde, hata terimlerinin dağılımı çarpık normal dağılım olarak alınırsa, bir başka ifade ile

$$\varepsilon_{ij} \sim SN(0, \sigma, \lambda) \quad (2.1)$$

olduğu varsayılırsa,

$$Y_{ij} \sim SN(\mu + \alpha_i, \sigma, \lambda) \quad (2.2)$$

şeklinde olacaktır.

2.1.1 Parametre tahmini

Bu bölümde (1.1) modeli için parametre tahminleri, hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda LS, ML ve MML yöntemleriyle elde edilmiştir.

2.1.1.1 En küçük kareler yöntemi

Hata terimlerinin normal dağılıma sahip olması durumunda μ ve σ parametrelerinin LS tahmin edicileri (1.4) ve (1.6) eşitliklerinde verildiği gibidir. Ancak hata terimlerinin

dağılımının çarpık normal olması durumunda LS tahmin edicileri için yan düzeltmesine gerek vardır. Buna göre,

$$E(Y) = \mu + \sigma E(\varepsilon) \quad (2.3)$$

olduğundan μ ve σ parametrelerinin LS tahmin edicileri,

$$\tilde{\mu}_{LS} = \bar{Y}_{..} - \sqrt{\frac{2\lambda^2}{\pi(1+\lambda^2)}} \tilde{\sigma} \quad (2.4)$$

ve

$$\tilde{\sigma}_{LS} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\left(1 - \frac{2\lambda^2}{\pi(1+\lambda^2)}\right)}} \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir. α_i parametresinin tahmin edicisi için herhangi bir yan düzeltmesine gerek yoktur.

2.1.1.2 En çok olabilirlik yöntemi

Bir yönlü ANOVA modeli için hata terimlerinin çarpık normal dağılıma sahip olması durumunda olabilirlik fonksiyonu,

$$L(y_{ij}; \mu, \alpha_i, \sigma, \lambda) = 2^N \sigma^{-N} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^n \phi\left(\frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma}\right) \quad (2.6)$$

biçimindedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak elde edilen log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} \ln L = N \ln 2 - N \ln \sigma - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \left(\frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma} \right)^2 \\ + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \ln \left(\Phi \left(\lambda \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklindedir. Model parametrelerinin ML tahmin edicileri, log-olabilirlik fonksiyonunun μ, α_i ve σ 'ya göre türevlerinin alınıp, sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen olabilirlik denklemlerinin çözümüdür. Buna göre, olabilirlik denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ij})}{\Phi(\lambda z_{ij})} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^n z_{ij} - \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ij})}{\Phi(\lambda z_{ij})} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{ij} \frac{\phi(\lambda z_{ij})}{\Phi(\lambda z_{ij})} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$z_{ij} = \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma} \quad (2.9)$$

biçiminde tanımlanır.

(2.8) deki eşitliklerin yeniden düzenlenmesiyle bulunan ML tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{y}_{..} - \lambda \bar{w}_{..} \hat{\sigma} , \\ \hat{\alpha}_i &= \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} - \lambda (\bar{w}_{i.} - \bar{w}_{..}) \hat{\sigma} , \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{N(1 - \lambda^2 t)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

şeklinde elde edilir. σ^2 için yan düzeltmesi yapılırsa,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2}{(N-a)(1-\lambda^2 t)} \quad (2.11)$$

olur. Burada,

$$w_{ij} = \frac{\phi(\lambda z_{ij})}{\Phi(\lambda z_{ij})}, \quad \bar{w}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij}}{n}, \quad \bar{w}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij}}{N}, \quad t = \frac{\sum_{i=1}^a \bar{w}_{i.}^2}{a} \quad (2.12)$$

biçiminde tanımlanır.

2.1.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

(1.1) modeli için parametrelerin ML tahmin edicileri (2.10) daki gibi bulunur. Ancak, görüldüğü üzere tahmin ediciler, diğer tahmin edicilere bağlı olup, iteratif yöntemlerle çözüme ulaşılabilecektir. MML yöntemi, ML tahmin edicilerinin açık çözümü olmadığı zaman kullanılan ve ML yönteminin özelliklerini koruyan bir yöntemdir. Daha önceki bölümde anlatıldığı gibi MML yöntemi sıralı istatistiklere dayanır. Buna göre,

$$y_{i(1)} \leq y_{i(2)} \leq \dots \leq y_{i(n)}, \quad 1 \leq i \leq a \quad (2.13)$$

sıra istatistikleri olmak üzere, sıralı istatistiklerin toplama işlemine göre değişmezlik özelliğinden, bir başka deyişle,

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{i(j)} \quad (2.14)$$

olmasından dolayı, olabilirlik denklemleri,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{i(j)} - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w(z_{i(j)}) = 0 \\
\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^n z_{i(j)} - \lambda \sum_{j=1}^n w(z_{i(j)}) = 0 \\
\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{i(j)}^2 - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{i(j)} w(z_{i(j)}) = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada, $z_{i(j)} = \frac{y_{i(j)} - \mu - \alpha_i}{\sigma}$ şeklinde tanımlanır. ML tahmin edicilerinin açık olarak çözülememesine sebep olan terim olabilirlik denklerimde yer alan,

$$w(z) = \frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} \tag{2.16}$$

dir. $w(z_{i(j)})$ fonksiyonu, doğrusal olmayan bir fonksiyondur ve Taylor serisinin ilk iki terimini kullanarak $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ etrafında açılmasıyla doğrusallaştırılabilmektedir. Buna göre,

$$w(z_{i(j)}) \cong w(t_{(j)}) + [z_{i(j)} - t_{(j)}] \left\{ \frac{d}{dz} w(z) \right\}_{z=t_{(j)}} \tag{2.17}$$

olmak üzere,

$$w(z_{i(j)}) \cong \alpha_j - \gamma_j z_{i(j)} \tag{2.18}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\gamma_j = \frac{\phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \left(\frac{\lambda^2 t_{(j)} \Phi(\lambda t_{(j)}) + \lambda \phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \right) \tag{2.19}$$

$$\alpha_{(j)} = \frac{\phi(\lambda z_{i(j)})}{\Phi(\lambda z_{i(j)})} + t_{(j)} \gamma_{(j)} \quad (2.20)$$

şeklindedir. $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ değerleri j . sıra istatistiğinin beklenen değeridir ve büyük örneklem genişliği için

$$\int_{-\infty}^{t_{(j)}} f(z) dz = \frac{i}{n+1} \quad (2.21)$$

integralinin çözümüdür.

Çarpık normal dağılım için integralin çözümü oldukça zor olduğundan çalışmada $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ değerleri (2.21) integralinde $f(z)$ yerine çarpık normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu yazılarak simülasyon yoluyla hesaplanmıştır.

Buna göre, $w(z_{i(j)})$ fonksiyonu, uyarlanmış olabilirlik denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{i(j)} - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\alpha_{(j)} - \gamma_{(j)} z_{i(j)}) \\ \frac{\partial \ln L^*}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^n z_{i(j)} - \lambda \sum_{j=1}^n (\alpha_{(j)} - \gamma_{(j)} z_{i(j)}) \\ \frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{i(j)}^2 - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n z_{i(j)} (\alpha_{(j)} - \gamma_{(j)} z_{i(j)}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

denklemleri elde edilir. Denklem sistemlerinin çözümüyle bulunan MML tahmin edicileri,

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{..} - \left(\frac{\lambda \Delta}{m} \right) \hat{\sigma}, \quad \hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_{i.} - \hat{\mu}_{..}, \quad \hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4NC}}{2\sqrt{N(N-a)}} \quad (2.23)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\Delta = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{(j)}; \beta_{(j)} = 1 + \lambda \gamma_{(j)}; m = \sum_{j=1}^n \beta_{(j)}$$

$$A = N, B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \alpha_{(j)} (y_{i(j)} - \hat{\mu}_{i.}); C = -\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \beta_{(j)} (y_{i(j)} - \hat{\mu}_{i.})^2;$$

$$\hat{\mu}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_{(j)} y_{i(j)}}{m}, \hat{\mu}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \hat{\mu}_{i.}}{a}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.2 Monte Carlo simülasyon çalışması

(2.10)'da elde edilen ML tahmin edicilerinin açık çözümü yoktur. Dolayısıyla, ML tahmin edicilerinin tahmin değerlerini bulmak için bir iterasyon yöntemi gerekmektedir. Çizelge 2.1'de, tahmin edicilerde yer alan ve iteratif olarak hesaplanan w_{ij} ağırlıklarının değişik λ değerleri için ortalama değerleri yer almaktadır.

Çizelge 2.1 w_{ij} ağırlıklarının ortalama değerleri.

λ	w_{ij}
0.1	0.3156
0.3	0.2154
0.5	0.1235
0.7	0.0785
0.9	0.0545
1.0	0.0234
1.2	0.0106
1.5	0.0072
2.0	0.0001
5.0	0.0000

Çizelge 2.1'de görüldüğü gibi, çarpıklık parametresi arttıkça, w_{ij} ağırlıkları, hızla sıfıra yakınsamaktadır. Bunun sebebi, çarpıklık parametresi arttıkça çarpık normal dağılım,

yarı-normal dağılıma yakınsamakta, dolayısıyla LS tahmin edicileri ile ML tahmin edicileri birbirine denk olmaktadır.

Deney tasarımında, $P(X > E(X))$ olasılığının 0.4 ile 0.6 arasında olduğu durumlar ile ilgilenilmektedir. Farklı λ parametreleri için, çarpık normal dağılımdan elde edilen $P(X > E(X))$ olasılıkları çizelge 2.2’de verilmiştir.

Çizelge 2.2 Çarpık normal dağılıma sahip X rasgele değişkeni için $P(X > E(X))$ olasılığı.

λ	$P(X > E(X))$
-1.0	0.6114
-0.7	0.5771
-0.6	0.5690
-0.5	0.5609
-0.4	0.5567
-0.2	0.5307
-0.1	0.5120
0.0	0.5016
0.1	0.4960
0.2	0.4898
0.4	0.4828
0.5	0.4717
0.6	0.4629
0.7	0.4528
1.0	0.4171

Çizelge 2.2’den de görüldüğü gibi deney tasarımında, çarpık normal dağılım için çarpıklık parametresinin -1 ile 1 arasında incelenmesi uygun olacaktır. Bu sebeple, bu çalışmada, $-1 < \lambda < 1$ olduğu durumlar üzerinde durulacaktır.

ML tahmin edicileri, diğer parametrelerin tahmin edicilerine bağlı oldukları için, tahmin ediciler iteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma (Iteratively Reweighting Algorithm, IRA) kullanılarak elde edilmiştir. IRA yöntemi, M tahmin edicilerini bulmak için kullanılan bir yöntemdir. Çalışmada IRA kullanılmasının sebebi, kolay hesaplanmasıdır. Ayrıca, eğer amaç fonksiyonu, normal dağılımının yayılım karmasından (scale mixture) geliyorsa (çarpık t dağılımı gibi) IRA bilinen EM algoritması olur. EM algoritması, son yıllarda birçok farklı alanda kullanılan bir algoritmadır. Algoritma,

parametre tahminlerini hesaplamak için en çok olabilirlik tahminlerini içeren yinelemeli bir yöntemdir (Dempster, Laird ve Rubin 1977, Arslan 1995).

Çalışmada kullanılan IRA için geliştirilen algoritma ise şu şekildedir:

(i) μ, α_i ve σ için başlangıç değerleri belirlenir, $\mu^{(0)}, \alpha_i^{(0)}$ ($i=1,2,\dots,a$), ve $\sigma^{(0)}$

(ii) Başlangıç değerleri kullanılarak $w_{ij}^{(m)} = \frac{\phi(\lambda z_{ij}^{(m)})}{\Phi(\lambda z_{ij}^{(m)})}$, ($i=1,2,\dots,a; j=1,2,\dots,n$),

ve $t^{(m)} = \frac{\sum_{i=1}^a (\bar{w}_i^{(m)})^2}{a}$ ($m=0,1,2,\dots$). değerleri hesaplanır. Burada,

$z_{ij}^{(m)} = \frac{y_{ij} - \mu^{(m)} - \alpha_i^{(m)}}{\sigma^{(m)}}$ olarak tanımlanır.

(iii) $\bar{w}_i^{(m)}$ ve $t^{(m)}$ terimleri yardımıyla,

$\mu^{(m+1)} = \bar{y}_{..} - \lambda \bar{w}_{..}^{(m)} \sigma^{(m)}$, $\alpha_i^{(m+1)} = (\bar{y}_i - \bar{y}_{..}) - \lambda (\bar{w}_i^{(m)} - \bar{w}_{..}^{(m)}) \sigma^{(m)}$ ve

$(\sigma^2)^{(m+1)} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N(1 - \lambda^2(t^{(m)}))}$ değerleri hesaplanır.

(iv) $\left\| \begin{matrix} \mu_i^{(m+1)} - \mu_i^{(m)} \\ \sigma^{(m+1)} - \sigma^{(m)} \end{matrix} \right\|$, koşulu sağlandığında iterasyona son verilir. Burada m ,

iterasyon sayısını, s önceden belirlenmiş bir sabiti ve $\| \|$ vektörün normunu gösterir.

Bu simülasyon çalışmasında, konum parametresi $\mu_i = 0$ ($i=1,2,\dots,a$) ve ölçek parametresi $\sigma=1$ olan çarpık normal dağılımdan sayı üretilerek $100,000/n$ simülasyon yapılmıştır. Çalışma boyunca λ parametresi biliniyor varsayılmıştır. Çarpıklık parametresinin biliniyor varsayılmasının sebebi, küçük örneklem büyüklükleri için (deney tasarımı modelleri gibi) şekil parametresini tahmin etmenin etkin sonuçlar

vermemesidir. Simulasyon sonuçları için Matlab (The Language of Technical Computing) programlama dilinin 7.1 sürümü kullanılmıştır.

2.1.3 Dayanıklılık (Robustness)

Önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi, tek yönlü varyans analizi bazı temel varsayımlara dayanır. Bu varsayımlardan en önemlisi hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımdır. Hata terimlerinin normal dağılmadığı durumunda, Box- Cox normalleştirme dönüşümü, parametrik olmayan yöntemler veya dayanıklı (robust) yöntemler kullanmak etkin sonuçlar vermektedir.

Dayanıklılık, genel olarak; bir istatistiğin istatistiksel varsayımlardan sapmalara karşı duyarsız kalabilmesidir. İstatistik modellerin çoğu, rasgelelik, bağımsızlık, normal dağılıma, aynı dağılımlı olma gibi belli varsayımlar altında oluşturulur. Ancak uygulamalarda, bu varsayımların çoğu nadiren yerine gelmektedir.

Dayanıklılık kavramı kendi içinde dağılımsal dayanıklılık ve aykırı değere dayanıklılık (outlier resistant) olmak üzere ikiye ayrılır. Genel olarak dağılımsal dayanıklılıkla incelenen dağılımın şeklinin, varsayılan modelden genelde çok az biçimde sapması ile ilgilenilmektedir. Aykırı değere dayanıklılıkta ise, veri setinde bulunan uç değerlerden etkilenmeyen parametre tahminleri yapmak akla gelmektedir. Ancak, Dağılımsal dayanıklılık ve aykırı değere dayanıklılık kavramsal olarak farklı olmasına rağmen hemen hemen eş anlamlı kavramlardır (Huber 1981).

Bu çalışmada, söz konusu tahmin edicilerin dayanıklı olup olmadıklarını tespit etmek için dört adet alternatif model tanımlanmıştır. Bu modeller,

Model (1) : Dixon aykırı değer modeli

Bu modelde $(n-1)$ gözlem $SN(0,1,1)$ dağılımından, geriye kalan 1 gözlem (hangi gözlem olduğu bilinmeyen) ise $SN(0,2,1)$ dağılımından gelmektedir,

Model (2) : Dixon aykırı değer modeli

Bu modelde $(n-1)$ gözlem $SN(0,1,1)$ dağılımından, geriye kalan 1 gözlem (hangi gözlem olduğu bilinmeyen) ise $SN(0,4,1)$ dağılımından gelmektedir,

Model (3) : Karma model (Mixture model), $((0.90) SN(1)+(0.10) SN(0.4))$

Burada, gözlemlerin % 90'ı çarpıklık parametresi 1 olan standart çarpık normal dağılımdan, geriye kalan %10'unun çarpıklık parametresi 0.4 olan standart çarpık normal dağılımdan gelmektedir,

Model (4) :Bulaşık model (Contaminated model), $((0.90) SN(1)+(0.10) N(0,1))$

Bu modelde, gözlemlerin % 90'ı çarpıklık parametresi 1 olan standart çarpık normal dağılımdan, geriye kalan %10'unun standart normal dağılımdan gelmektedir.

şeklinde seçilmiştir.

Çizelge 2.3-2.4'te LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama değerleri, varyansları, hata kareler ortalamaları (Mean Square Error, MSE) ve ML ve MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerine göre etkinlikleri (relative efficiency-RE) verilmiştir. RE değerleri,

$$RE_{ML} = \frac{MSE_{ML}}{MSE_{LS}} \times 100 \quad (2.24)$$

ve

$$RE_{MML} = \frac{MSE_{MML}}{MSE_{LS}} \times 100 \quad (2.25)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Çizelge 2.3 μ_i parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

n	Ortalama			Varyans			MSE			RE	
	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\lambda = 0$											
5	-0.002	-0.002	-0.002	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	100	100
10	-0.005	-0.005	-0.005	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	0.097	100	100
15	-0.003	-0.003	-0.003	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	100	100
20	-0.001	-0.001	-0.001	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	100	100
$\lambda = 0.4$											
5	0.021	0.008	0.009	0.186	0.186	0.186	0.186	0.186	0.186	100	100
10	0.017	0.005	0.006	0.091	0.089	0.090	0.091	0.089	0.090	98	99
15	0.011	-0.001	0.001	0.063	0.060	0.061	0.063	0.060	0.061	96	97
20	0.015	0.002	0.002	0.048	0.046	0.046	0.048	0.046	0.046	96	96
$\lambda = 0.7$											
5	0.055	0.012	0.013	0.165	0.166	0.166	0.168	0.166	0.166	99	99
10	0.053	0.006	0.008	0.082	0.082	0.082	0.085	0.082	0.082	97	97
15	0.051	0.003	0.004	0.053	0.054	0.054	0.056	0.054	0.054	96	96
20	0.055	0.006	0.008	0.041	0.042	0.042	0.044	0.042	0.042	96	96
$\lambda = 1$											
5	0.104	0.023	0.024	0.139	0.139	0.139	0.149	0.142	0.142	95	95
10	0.107	0.015	0.018	0.072	0.072	0.072	0.083	0.073	0.073	88	88
15	0.104	0.011	0.012	0.045	0.045	0.045	0.056	0.046	0.046	82	82
20	0.102	0.006	0.009	0.038	0.038	0.038	0.048	0.038	0.038	80	80
<i>Model 1 : Dixon Modeli; $(n-1)SN(0,1,1)+1SN(0,2,1)$</i>											
5	0.096	-0.011	0.004	0.206	0.203	0.203	0.216	0.203	0.230	94	94
10	0.101	-0.011	0.007	0.092	0.092	0.092	0.102	0.092	0.092	90	90
15	0.081	-0.022	-0.016	0.059	0.059	0.059	0.066	0.059	0.059	90	90
20	0.089	-0.010	-0.006	0.040	0.040	0.040	0.049	0.041	0.041	84	84
<i>Model 2 : Dixon Modeli; $(n-1)SN(0,1,1)+1SN(0,4,1)$</i>											
5	0.280	0.102	0.199	0.507	0.540	0.489	0.585	0.550	0.528	94	91
10	0.167	0.023	0.119	0.160	0.166	0.154	0.187	0.167	0.169	89	89
15	0.143	0.017	0.112	0.092	0.095	0.090	0.112	0.095	0.097	84	89
20	0.110	0.010	0.084	0.057	0.057	0.056	0.070	0.058	0.060	82	89
<i>Model 3 :Karma Model ; $0.90SN(1)+0.10SN(0,4)$</i>											
5	0.057	-0.024	-0.024	0.160	0.163	0.163	0.164	0.164	0.164	100	100
10	0.064	-0.029	-0.026	0.079	0.081	0.081	0.084	0.082	0.082	97	97
15	0.065	-0.029	-0.029	0.048	0.049	0.049	0.052	0.050	0.050	96	96
20	0.068	-0.026	-0.026	0.038	0.038	0.038	0.043	0.039	0.039	91	91
<i>Model 4 : Bulaşık Model: $0.90SN(1)+0.10N(0,1)$</i>											
5	0.052	-0.034	-0.033	0.148	0.147	0.148	0.147	0.147	0.147	99	99
10	0.055	-0.036	-0.036	0.081	0.080	0.080	0.082	0.080	0.080	98	98
15	0.059	-0.037	-0.037	0.056	0.055	0.055	0.059	0.057	0.057	97	97
20	0.051	-0.031	-0.032	0.039	0.039	0.039	0.041	0.039	0.039	95	95

Çizelge 2.4 σ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

n	Ortalama			Varyans			MSE			RE	
	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\lambda = 0$											
5	0.981	0.981	0.981	0.040	0.040	0.040	1.003	1.003	1.003	100	100
10	0.992	0.992	0.992	0.019	0.019	0.019	1.002	1.002	1.002	100	100
15	0.994	0.994	0.994	0.012	0.012	0.012	1.000	1.000	1.000	100	100
20	0.996	0.996	0.996	0.009	0.009	0.009	1.002	1.002	1.002	100	100
$\lambda = 0.4$											
5	0.987	0.982	0.982	0.041	0.040	0.040	1.014	1.004	1.004	99	99
10	0.999	0.994	0.994	0.019	0.019	0.019	1.018	1.008	1.008	99	99
15	0.997	0.992	0.992	0.012	0.012	0.012	1.006	0.996	0.995	99	99
20	0.999	0.994	0.994	0.009	0.009	0.009	1.007	0.997	0.996	99	99
$\lambda = 0.7$											
5	0.990	0.975	0.978	0.042	0.041	0.041	1.023	0.992	0.997	97	97
10	1.003	0.988	0.990	0.019	0.019	0.018	1.026	0.995	0.998	97	97
15	1.004	0.989	0.989	0.012	0.012	0.012	1.019	0.990	0.990	97	97
20	1.007	0.993	0.992	0.009	0.009	0.009	1.023	0.995	0.994	97	97
$\lambda = 1$											
5	1.006	0.979	0.985	0.045	0.043	0.043	1.057	1.001	1.014	95	96
10	1.016	0.989	0.993	0.019	0.018	0.018	1.051	0.996	1.005	95	96
15	1.015	0.989	0.992	0.013	0.012	0.012	1.042	0.990	0.996	95	96
20	1.024	0.999	1.001	0.009	0.009	0.009	1.058	1.006	1.010	95	96
<i>Model 1 : Dixon Modeli; $(n-1)SN(0,1,1)+1SN(0,2,1)$</i>											
5	1.313	1.242	1.243	0.107	0.096	0.095	1.830	1.639	1.639	90	90
10	1.201	1.138	1.136	0.043	0.038	0.038	1.485	1.334	1.331	90	90
15	1.153	1.094	1.092	0.023	0.021	0.021	1.352	1.219	1.217	90	90
20	1.129	1.072	1.071	0.016	0.015	0.015	1.292	1.164	1.163	90	90
<i>Model 2 : Dixon Modeli; $(n-1)SN(0,1,1)+1SN(0,4,1)$</i>											
5	2.178	2.051	2.020	0.547	0.435	0.426	5.292	4.702	4.521	88	86
10	1.738	1.622	1.599	0.228	0.212	0.238	3.251	2.843	2.721	87	84
15	1.565	1.467	1.441	0.145	0.114	0.134	2.595	2.266	2.179	87	84
20	1.455	1.348	1.340	0.096	0.079	0.087	2.214	1.897	1.861	85	84
<i>Model 3 : Karma Model ; $0.90SN(1)+0.10SN(0,4)$</i>											
5	1.046	0.994	1.001	0.045	0.041	0.042	1.141	1.030	1.043	90	91
10	1.063	1.009	1.016	0.023	0.020	0.020	1.154	1.040	1.053	90	91
15	1.071	1.016	1.021	0.015	0.013	0.013	1.161	1.046	1.057	90	91
20	1.067	1.013	1.018	0.011	0.009	0.009	1.149	1.037	1.046	90	91
<i>Model 4 : Bulaşık Model: $0.90SN(1)+0.10N(0,1)$</i>											
5	1.074	1.015	1.030	0.056	0.050	0.052	1.212	1.085	1.113	90	92
10	1.081	1.025	1.034	0.027	0.024	0.025	1.196	1.077	1.095	90	92
15	1.088	1.034	1.040	0.016	0.015	0.015	1.201	1.084	1.097	90	91
20	1.087	1.032	1.039	0.012	0.010	0.011	1.194	1.077	1.091	90	91

Çizelge 2.3'ten de görüldüğü gibi beklenildiği üzere, çarpıklık parametresi arttıkça ML ve MML yöntemiyle bulunan $\mu_i(\mu + \alpha_i)$ parametresinin etkinliği LS yöntemiyle bulunan tahmin edicilerin etkinliklerine göre artış göstermektedir. Ayrıca, denemelerdeki deney birimi sayıları arttıkça da parametrenin etkinliği artmaktadır, Islam, Tiku ve Yıldırım (1999). Alternatif modellere bakıldığında ise, yine ML ve MML tahminlerinin LS tahminlerine göre daha etkin olduğu kolayca görülebilmektedir. Çizelge 2.4'de ise σ parametresi için sonuçlar incelendiğinde, benzer çıkarımlar yapılmakta yani, yine beklenildiği çarpıklık parametresi arttıkça ML ve MML tahmin yöntemleriyle elde edilen σ 'nın etkinliği artmaktadır. Ayrıca alternatif modeller için de benzer sonuçlar elde edilmektedir.

2.1.3 Hipotez testi

Bir önceki bölümde de anlatıldığı gibi (1.8) hipotezini test etmek için normallik varsayımı altında kullanılan

$$F_{LS} = \frac{n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 / a - 1}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 / N - a} \quad (2.26)$$

testi $a-1$ ve $N-a$ serbestlik dereceli F dağılımına sahip olacaktır. (2.26) testi denk olarak LS tahmin edicileri yardımıyla,

$$F_{LS} = \frac{n \sum_{i=1}^a \tilde{\alpha}_{i,LS}^2}{(a-1) \tilde{\sigma}_{LS}^2} \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu çalışmada, hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda, ML ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistikleri önerilmiştir.

Çarpık normal dağılıma sahip bir rasgele değişkenin karesi bir serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir (Azzalini 1985). Bir başka deyişle,

$$X \sim SN(0,1,\lambda) \Rightarrow X^2 \sim \chi_{(1)}^2 \quad (2.28)$$

dir. Bu özellikten yola çıkarak, ML tahmin edicilerine dayalı test istatistiği,

$$F_{ML} = \frac{n \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i,ML}^2}{(a-1)(1-\lambda^2 t) \hat{\sigma}_{ML}^2} \quad (2.29)$$

şeklinde önerilmiştir.

MML tahmin edicileri ise asimptotik olarak normal dağılmaktadır (Tiku 1967, 1968).

Bu teoremden yola çıkarak MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiği ise,

$$F_{MML} = \frac{m \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i,MML}^2}{(a-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (2.30)$$

şeklinde önerilmiştir.

Büyük örneklem değerleri için (2.29) ve (2.30) test istatistikleri asimptotik olarak $a-1$ ve $N-a$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Küçük örneklem büyüklükleri için ise ML ve MML tahmin edicileri ile simülasyon sonucunda bulunan F istatistiklerinin 1. tip hataları çizelge 2.5’de verilmiştir. I. tip hatalar bulunurken gerçek değer 0.050 olarak alınmıştır. 1. tip hatalar,

$$P\{F_{ML} \geq F_{\alpha}(a-1, N-a) | H_0\} \text{ ve } P\{F_{MML} \geq F_{\alpha}(a-1, N-a) | H_0\} \quad (2.31)$$

olasılıkları yardımıyla hesaplanmıştır. Burada örneklem büyüklükleri, 5, 10, 15 ve 20 olarak, deneme sayısı ise 3 olarak belirlenmiştir.

Çizelge 2.6 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin 1. tip hataları ; $\alpha = 0.05$, $a = 3$.

λ	$n=$	5	10	15	20
0.0	F_{LS}	0.050	0.049	0.048	0.050
	F_{ML}	0.054	0.050	0.053	0.052
	F_{MML}	0.053	0.051	0.056	0.054
0.4	F_{LS}	0.046	0.055	0.055	0.045
	F_{ML}	0.049	0.054	0.056	0.049
	F_{MML}	0.048	0.055	0.054	0.047
0.7	F_{LS}	0.049	0.054	0.049	0.053
	F_{ML}	0.050	0.052	0.049	0.049
	F_{MML}	0.051	0.054	0.047	0.048
1.0	F_{LS}	0.054	0.048	0.051	0.049
	F_{ML}	0.055	0.049	0.052	0.054
	F_{MML}	0.055	0.049	0.053	0.053

Çizelge 2.6’da görüldüğü gibi, her bir denemedeki deney birimi sayısı 5, 10,15 ve 20 olduğunda I. tip hatalar, 0.050’ye çok yakın değerler almaktadır. Bu durum, önerilen F test istatistiğinin küçük n değerleri için de iyi bir test istatistiği olduğunun göstergesidir.

Son olarak, hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda (1.8) hipotezini test etmek için önerilen F_{ML} ve F_{MML} ile normal teori altında kullanılan F_{LS} test istatistiklerinin güçleri hesaplanmıştır. F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} testlerinin güçleri hesaplanırken

$$P\{F_{ML} \geq F_{\alpha}(a-1, N-a) | H_1\} \text{ ve } P\{F_{MML} \geq F_{\alpha}(a-1, N-a) | H_1\} \quad (2.32)$$

olasılıkları kullanılmıştır.

Çizelge 2.6, değişik λ değerleri ve önceki bölümde önerilen alternatif modeller için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} güç değerlerini göstermektedir. Güçler bulunurken, öncelikle gözlemler standartlaştırılmıştır. Standartlaştırılmasının sebebi, güç değerlerinin aynı yerde 1’e yakınsamasıdır. Böylelikle, tabloda görsel olarak bir uyum sağlanmıştır. Burada, deneme sayısı 3 ve her bir denemedeki deney birimi sayısı 10 olarak alınmıştır.

Güç hesaplamaları için, 1. ve 3. denemede gözlemlere $d(d>0)$ değeri eklenirken, 2. denemede gözlemlerden $2d$ değeri çıkarılmıştır. Böylelikle, H_0 hipotezinin doğruluğu bozulmuştur.

Çizelge 2.6 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} istatistiklerinin gücü ($a=3$, $n=10$; $\alpha=0.050$).

d	$\lambda = 0$			$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.050	0.050	0.050	0.049	0.049	0.049	0.055	0.056	0.054	0.051	0.052	0.053
0.1	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09	0.08	0.08	0.09	0.09
0.2	0.24	0.24	0.24	0.22	0.22	0.22	0.20	0.21	0.20	0.17	0.19	0.19
0.3	0.48	0.48	0.48	0.46	0.46	0.46	0.40	0.41	0.40	0.35	0.38	0.37
0.4	0.72	0.72	0.72	0.71	0.71	0.71	0.65	0.66	0.66	0.58	0.61	0.59
0.5	0.90	0.90	0.90	0.89	0.89	0.89	0.84	0.85	0.84	0.78	0.80	0.79
0.6	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.95	0.96	0.96	0.91	0.92	0.92
0.7	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.97	0.98	0.97

d	Model(1)			Model(2)			Model(3)			Model(4)		
	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.050	0.053	0.054	0.031	0.055	0.053	0.050	0.052	0.051	0.048	0.054	0.053
0.1	0.06	0.08	0.08	0.06	0.09	0.08	0.08	0.09	0.10	0.09	0.10	0.10
0.2	0.15	0.19	0.19	0.18	0.26	0.27	0.18	0.21	0.22	0.18	0.21	0.21
0.3	0.28	0.33	0.33	0.35	0.44	0.45	0.35	0.38	0.39	0.35	0.38	0.38
0.4	0.47	0.52	0.52	0.44	0.54	0.55	0.57	0.61	0.61	0.57	0.62	0.63
0.5	0.65	0.70	0.69	0.57	0.67	0.68	0.75	0.78	0.79	0.78	0.81	0.82
0.6	0.81	0.85	0.84	0.70	0.79	0.80	0.90	0.92	0.93	0.91	0.94	0.94
0.7	0.92	0.94	0.95	0.89	0.96	0.96	0.98	0.99	0.99	0.96	0.98	0.98

Çizelge 2.6’da da görüldüğü gibi ML tahmin edicileri ile bulunan F_{ML} ve MML tahmin edicileri ile bulunan F_{MML} test istatistiklerinin gücü tüm λ değerleri için F_{LS} test istatistiğinin gücünden az da olsa daha yüksektir. F_{LS} ile F_{ML} ve F_{MML} testlerinin güçleri arasındaki fark $\lambda=1$ değeri için en büyüktür.

Alternatif modellere bakıldığında ise, 3. model için F_{LS} ile F_{ML} ve F_{MML} testlerinin güçleri arasındaki farkın oldukça büyüdüğü görülmektedir. Yine 1. ve 4. alternatif modeller için F_{ML} ve F_{MML} testlerinin gücü F_{LS} testinin gücünden yüksek çıkmıştır. 2. alternatif modele bakıldığında ise F_{LS} test istatistiğinin I. tip hatası 0.0311 bulunduğu için, F_{LS} I. tip hata bakımından dayanıklı değildir.

2. alternatif model için, F_{LS} test istatistiğinin I. tip hatası 0.050 olacak şekilde tekrar simülasyon yapılmıştır. Buna göre sadece 2. alternatif model için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} güç değerleri çizelge 2.7’de verilmiştir.

Çizelge 2.7 Model (2) için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} istatistiklerinin gücü ;a=3, n=10; α =0.050.

Model(2)			
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.054	0.055	0.053
0.1	0.08	0.09	0.08
0.2	0.24	0.26	0.27
0.3	0.42	0.44	0.45
0.4	0.51	0.54	0.55
0.5	0.62	0.67	0.68
0.6	0.75	0.79	0.80
0.7	0.93	0.96	0.96

Çizelge 2.7’ye göre 2. alternatif model için F_{LS} test istatistiğinin I. tip hatası 0.050 olsa bile F_{ML} ve F_{MML} testlerinin gücü F_{LS} testinin gücünden yüksek çıkmıştır.

2.2 Hata Terimlerinin Dağılımının Çarpık t Olması Durumunda Tek Yönlü Varyans Analizi

Hata terimlerinin çarpık t dağılması durumunda, (1.1) modelinde,

$$\varepsilon_{ij} \sim St_v(0, \sigma, \lambda) \quad (2.33)$$

olmak üzere,

$$Y_{ij} \sim St_v(\mu + \alpha_i, \sigma, \lambda) \quad (2.34)$$

olacaktır. Burada $\mu + \alpha_i$, dağılımın konum parametresini, σ ise ölçek parametresini göstermektedir.

2.2.1 Parametre tahmini

Bu bölümde, hata terimlerinin çarpık t olması durumunda (1.1) modeli için parametre tahminleri LS, ML ve MML yöntemleri ile elde edilmiştir.

2.2.1.1 En küçük kareler yöntemi

(1.1) modeli için parametrelerin LS tahmin edicileri (1.4) ve (1.6) eşitliklerinde verilmiştir. Ancak, tahmin ediciler normallik varsayımı altında bulunmuştur, çarpık t dağılımı için yan düzeltmesi gerekmektedir. Buna göre,

$$E(Y) = \mu + \sigma E(\varepsilon) \quad (2.35)$$

olmak üzere

$$\tilde{\mu}_{LS} = \bar{Y}_{..} - \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{(\lambda^2+1)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \tilde{\sigma} \quad (2.36)$$

ve

$$\tilde{\sigma}_{LS} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\frac{\nu}{\nu-2} - \frac{\nu}{\pi} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2}} \quad (2.37)$$

şeklindedir. Çarpık normal dağılımda olduğu gibi, α_i parametresinin tahmin edicisi için herhangi bir yan düzeltmesine gerek yoktur.

2.2.1.2 En çok olabilirlik yöntemi

Model parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik yöntemi kullanıldığında hata terimlerinin çarpık t dağılıma sahip olması durumunda bir yönlü varyans analizi için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\mu, \alpha_i, \sigma) = 2^n \sigma^{-n} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^n t_{\nu} \left(\frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma} \right) T_{\nu+1} \left(\lambda \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma} \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + \left(\frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma} \right)^2}} \right) \quad (2.38)$$

şeklindedir. Log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\ln L = N \ln 2 - N \ln \sigma + N \ln \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \nu^{\nu/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right) - \frac{\nu+1}{2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\nu + z_{ij}^2) + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \ln \left(T_{\nu+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + z_{ij}^2}} \right) \right) \quad (2.39)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre, log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} z_{ij} - \lambda \frac{\nu}{\nu+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \frac{t_{\nu+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{w_{ij}} \right)}{T_{\nu+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{w_{ij}} \right)} w_{ij}^{3/2} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^n w_{ij} z_{ij} - \lambda \frac{\nu}{\nu+1} \sum_{j=1}^n \frac{t_{\nu+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{w_{ij}} \right)}{T_{\nu+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{w_{ij}} \right)} w_{ij}^{3/2} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} z_{ij}^2 - \lambda \frac{\nu}{\nu+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \frac{t_{\nu+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{w_{ij}} \right)}{T_{\nu+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{w_{ij}} \right)} z_{ij} w_{ij}^{3/2} = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

olabilirlik denklemleri elde edilir. Burada,

$$z_{ij} = \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma} \quad \text{ve} \quad w_{ij} = \frac{v+1}{v + z_{ij}^2} \quad (2.41)$$

biçiminde tanımlanır. Bu çalışmada, (1.1) modeli için hata terimlerinin çarpık t dağılımı durumunda $\sum_{i=1}^a w_{ij} \alpha_i = 0$ olduğu varsayılmıştır.

(2.40) denklemlerinin yeniden düzenlenmesiyle ML tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \hat{\mu}_{..} - \lambda \frac{v}{v+1} \bar{g}_{..} \hat{\sigma}, & \hat{\alpha}_i &= \hat{\mu}_{i.} - \hat{\mu}_{..} - \left\{ \lambda \frac{v}{v+1} (\bar{g}_{i.} - \bar{g}_{..}) \right\} \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu}_{i.})^2}{N - \lambda^2 \left(\frac{v}{v+1} \right)^2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} \bar{g}_{i.}^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

şeklinde elde edilir. $\hat{\sigma}^2$ için yan düzeltmesi yapılırsa,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu}_{i.})^2}{(N - a) - \lambda^2 \left(\frac{v}{v+1} \right)^2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} \bar{g}_{i.}^2} \quad (2.43)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{..} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} y_{ij}}{m}, & \hat{\mu}_{i.} &= \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij} y_{ij}}{m_i}, & \bar{g}_{..} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n t_{ij} w_{ij}^{3/2}}{m}, & \bar{g}_{i.} &= \frac{\sum_{j=1}^n t_{ij} w_{ij}^{3/2}}{m_i} \\ \text{ve} \quad t_{ij} &= \frac{t_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)}{T_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)} & m &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij}, & m_i &= \sum_{j=1}^n w_{ij} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

2.2.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

(1.1) modelindeki bilinmeyen parametre tahmini için uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi kullanıldığında ise, (2.21)'deki sıralı istatistikler elde edildikten sonra, olabilirlik denklemlerinde yer alan lineer olmayan terimler belirlenmiştir. Buna göre,

$$g_1(z) = \frac{v+1}{v+z^2} z \quad \text{ve} \quad g_2(z) = \frac{t_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)}{T_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)} \left(\frac{v+1}{v+z^2} \right)^{3/2} \quad (2.44)$$

olmak üzere $g_1(z)$ ve $g_2(z)$ fonksiyonları, Taylor serisinin $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ etrafında açılmasıyla doğrusallaştırılabilmektedir.

$$\begin{aligned} g_1(z_{i(j)}) &= g_1(t_{(j)}) + [z_{i(j)} - t_{(j)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_1(z) \right\}_{z=t_{(j)}} \\ g_2(z_{i(j)}) &= g_2(t_{(j)}) + [z_{i(j)} - t_{(j)}] \left\{ \frac{d}{dz} g_2(z) \right\}_{z=t_{(j)}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

olmak üzere,

$$g_1(z_{i(j)}) \cong \alpha_{1j} + \beta_{1j} z_{i(j)} \quad (2.46)$$

ve

$$g_2(z_{i(j)}) \cong \alpha_{2j} - \beta_{2j} z_{i(j)} \quad (2.47)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\beta_{1(j)} = \frac{(v+1)(v-t^2)}{(v+t^2)^2}, \quad \alpha_{1(j)} = \frac{(v+1)t}{(v+t^2)} - t\beta_{1(j)} \quad (2.48)$$

ve

$$c = \lambda t \sqrt{\frac{v+1}{v+t^2}} \quad (2.49)$$

olmak üzere,

$$\beta_{2(j)} = \left[\frac{\frac{t_{v+1}(c)T_{v+1}(c)\lambda^2 t(v+2)v}{(v+(1+\lambda)t^2)(v+t^2)} + \frac{v\sqrt{v+1}(t_{v+1}(c))^2}{(v+t^2)^{3/2}}}{(T_{v+1}(c))^2} \right] \left(\frac{v+1}{v+t^2} \right)^{3/2} + 3 \frac{t_{v+1}(c)}{T_{v+1}(c)} \frac{(v+1)^{3/2}t}{(v+t^2)^{5/2}} \quad (2.50)$$

ve

$$\alpha_{2(j)} = \frac{t_{v+1}(c)}{T_{v+1}(c)} \left(\frac{v+1}{v+t^2} \right)^{3/2} + t\beta_{2(j)} \quad (2.51)$$

şeklindedir.

$t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ değerleri,

$$\int_{-\infty}^{t_{(j)}} f(z) dz = \frac{i}{n+1} \quad (2.52)$$

integralinin çözümüdür. $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ çarpık t dağılımı için sıralı istatistiklerinin beklenen değeridir. (2.52) integralinin çözümü oldukça zor olduğundan çalışmada $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ değerleri simülasyon yoluyla hesaplanmıştır. Bu durumda, çarpık normal dağılımdan farklı olarak integral simülasyon yoluyla çözülmemiş, çarpık t dağılımına sahip veri üretildikten sonra, sıra istatistiklerinin ortalamaları alınmıştır.

Buna göre, $g_i(.)$ fonksiyonları olabilirlik eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d \ln L^*}{d \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\alpha_{1(j)} + \beta_{1(j)} z_{ij}) - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\alpha_{2(j)} - \beta_{2(j)} z_{ij}) = 0 \\
\frac{d \ln L^*}{d \alpha_i} &= \sum_{j=1}^n (\alpha_{1(j)} + \beta_{1(j)} z_{ij}) - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{j=1}^n (\alpha_{2(j)} - \beta_{2(j)} z_{ij}) = 0 \\
\frac{d \ln L^*}{d \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\alpha_{1(j)} + \beta_{1(j)} z_{ij}) z_{ij} - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\alpha_{2(j)} - \beta_{2(j)} z_{ij}) z_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{2.53}$$

uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. Denklem sistemlerinin çözülmesiyle bulunan MML tahmin edicileri,

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{..} - \frac{\Delta}{m} \hat{\sigma} ; \quad \hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_{i.} - \hat{\mu}_{..} , \quad \hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4NC}}{2\sqrt{N(N-a)}} \tag{2.54}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned}
\alpha_{(j)} &= \lambda \frac{v}{v+1} \alpha_{2(j)} - \alpha_{1(j)} ; \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \alpha_{(j)} , \quad \beta_{(j)} = \beta_{1(j)} + \lambda \frac{v}{v+1} \beta_{2(j)} , \quad m = \sum_{j=1}^n \beta_{(j)} ; \\
A &= N ; \quad B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \alpha_{(j)} (y_{i(j)} - \hat{\mu}_{i.}) ; \quad C = - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n \beta_{(j)} (y_{i(j)} - \hat{\mu}_{i.})^2 \\
\hat{\mu}_{i.} &= \frac{\sum_{j=1}^n \beta_{(j)} y_{i(j)}}{m} , \quad \hat{\mu}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \hat{\mu}_{i.}}{a}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

2.2.2 Monte Carlo simülasyon çalışması

Hata terimlerinin çarpık t dağılması durumunda, model parametrelerinin ML tahmin edicilerinin açık çözümü yoktur. Dolayısıyla, bir önceki bölümde olduğu gibi tahmin değerlerine ulaşmak için IRA önerilmiştir. Çarpık t dağılımı için IRA bilinen EM algortimasına dönüşür ve bu durum parametre tahminlerinin yakınsamasını garanti eder. Simülasyon çalışmasında konum parametresi $\mu_i = 0 (i = 1, 2, \dots, a)$ ve ölçek parametresi $\sigma = 1$ olan çarpık t dağılımından sayı üretilmiştir. Bir önceki bölümde olduğu gibi $100,000/n$ simülasyon yapılmıştır. Bu bölümde çarpıklık parametresi λ , ve serbestlik derecesi ν biliniyor varsayılmıştır. λ 'nın biliniyor varsayılmasının sebebi, küçük örneklem büyüklükleri için, şekil parametresini tahmin etmenin etkin bir yöntem olmamasıdır. Benzer şekilde, serbestlik derecesinin biliniyor varsayılmasının sebebi ise, dayanıklılığı kaybetmemektir.

Deney tasarımı modelleri için $0.4 \leq P(X > E(X)) \leq 0.6$ koşulu, çarpık t dağılımı için incelendiğinde çarpık normal dağılımda olduğu gibi çarpıklık parametresinin -1 ile 1 arasında tutulması daha doğru olacağı görülmektedir. Çizelge 2.8 çarpık t dağılımı için söz konusu olasılıkları vermektedir.

Çizelge 2.8 Çarpık t dağılımına sahip X rasgele değişkeni için $P(X > E(X))$ olasılığı

λ	-1.0	-0.6	-0.5	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.5	0.6	1.0
$P(X > E(X))$	0.59	0.57	0.56	0.54	0.52	0.50	0.48	0.47	0.46	0.43	0.41

Buna göre, Çizelge 2.9'da serbestlik derecesi 3, 5, 7 ve 10 olan çarpık t dağılımı için değişik λ değerleri ve değişik deney birimi büyüklüklerinde μ_i parametresinin simülasyon sonucunda elde edilen tahmin değerleri verilmiştir. Çizelge 2.9'da önce LS tahmin edicileri daha sonra ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama değerleri, varyansları, hata kareler ortalamaları ve ML ve MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerine göre etkinlikleri verilmiştir. RE değerleri, (2.24) ve (2.25) eşitliklerinde olduğu gibi hesaplanmıştır. Çizelge 2.10 ise aynı serbestlik dereceleri için σ parametresinin ortalama, varyans, MSE ve RE değerlerini göstermektedir.

Çizelge 2.9 μ_i parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\nu = 3$											
$\lambda = 0$											
5	-0.003	0.010	0.014	0.203	0.110	0.120	0.203	0.111	0.120	54	59
10	-0.007	-0.006	-0.006	0.103	0.052	0.055	0.103	0.052	0.055	51	53
15	0.000	0.001	0.003	0.066	0.035	0.034	0.066	0.034	0.034	50	51
$\lambda = 0.4$											
5	-0.199	-0.001	-0.011	0.191	0.107	0.118	0.230	0.107	0.118	46	51
10	-0.227	0.004	-0.006	0.127	0.050	0.053	0.178	0.050	0.053	28	30
15	-0.231	0.006	-0.013	0.068	0.031	0.034	0.121	0.031	0.035	26	28
$\lambda = 0.7$											
5	-0.270	0.018	-0.008	0.200	0.096	0.113	0.273	0.096	0.113	35	41
10	-0.297	0.019	-0.005	0.131	0.043	0.052	0.219	0.043	0.052	20	24
15	-0.294	0.029	0.001	0.089	0.030	0.030	0.176	0.031	0.030	17	17
$\lambda = 1$											
5	-0.256	0.055	0.008	0.197	0.081	0.101	0.262	0.084	0.101	32	38
10	-0.330	0.037	-0.001	0.133	0.037	0.044	0.242	0.038	0.044	16	18
15	-0.343	0.033	0.004	0.142	0.026	0.032	0.259	0.027	0.032	10	12
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\nu = 5$											
$\lambda = 0$											
5	0.006	0.007	0.005	0.107	0.085	0.090	0.107	0.085	0.090	80	84
10	0.003	0.000	0.002	0.052	0.041	0.043	0.052	0.041	0.043	79	83
15	0.001	0.002	0.002	0.037	0.029	0.029	0.037	0.029	0.029	79	80
$\lambda = 0.4$											
5	-0.066	0.001	0.001	0.109	0.091	0.095	0.113	0.091	0.095	81	84
10	-0.068	0.014	0.009	0.051	0.042	0.044	0.056	0.042	0.044	76	78
15	-0.072	0.009	0.003	0.036	0.031	0.031	0.041	0.031	0.031	74	75
$\lambda = 0.7$											
5	-0.082	0.014	0.009	0.105	0.081	0.089	0.112	0.081	0.089	72	79
10	-0.086	0.019	0.009	0.048	0.037	0.039	0.056	0.037	0.039	67	70
15	-0.077	0.029	0.020	0.034	0.026	0.027	0.040	0.026	0.027	66	67
$\lambda = 1$											
5	-0.035	0.056	0.050	0.098	0.068	0.073	0.098	0.071	0.076	72	78
10	-0.053	0.044	0.030	0.046	0.034	0.036	0.051	0.035	0.037	68	71
15	-0.055	0.051	0.036	0.034	0.022	0.023	0.039	0.025	0.024	64	64

Çizelge 2.9-devam μ_i parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\nu = 7$											
$\lambda = 0$											
5	-0.016	-0.014	-0.016	0.095	0.092	0.093	0.095	0.092	0.093	97	98
10	0.010	0.009	0.010	0.047	0.043	0.044	0.047	0.043	0.044	93	94
15	0.001	0.000	-0.001	0.029	0.026	0.026	0.029	0.026	0.026	90	92
$\lambda = 0.4$											
5	-0.035	0.004	0.006	0.091	0.085	0.088	0.092	0.085	0.088	92	95
10	-0.036	0.011	0.007	0.045	0.040	0.041	0.046	0.040	0.041	88	89
15	-0.037	0.012	0.009	0.030	0.027	0.027	0.032	0.027	0.027	85	86
$\lambda = 0.7$											
5	-0.031	0.019	0.022	0.078	0.071	0.072	0.079	0.071	0.072	90	92
10	-0.034	0.021	0.014	0.042	0.038	0.039	0.043	0.038	0.039	90	92
15	-0.027	0.026	0.022	0.026	0.023	0.024	0.027	0.024	0.024	90	91
$\lambda = 1$											
5	0.062	0.057	0.062	0.071	0.067	0.067	0.075	0.067	0.068	90	91
10	0.064	0.055	0.048	0.034	0.031	0.032	0.039	0.034	0.034	88	88
15	0.062	0.054	0.047	0.022	0.020	0.020	0.026	0.023	0.022	88	86
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\nu = 10$											
$\lambda = 0$											
5	0.003	0.003	0.003	0.078	0.075	0.076	0.078	0.074	0.076	98	98
10	0.013	0.011	0.012	0.042	0.040	0.040	0.042	0.040	0.040	95	96
15	-0.009	-0.009	-0.010	0.027	0.026	0.026	0.027	0.026	0.026	96	96
$\lambda = 0.4$											
5	-0.013	0.009	0.013	0.080	0.077	0.079	0.081	0.077	0.079	96	98
10	-0.018	0.007	0.007	0.038	0.036	0.036	0.038	0.036	0.036	94	95
15	-0.021	0.006	0.005	0.026	0.024	0.025	0.026	0.024	0.025	92	93
$\lambda = 0.7$											
5	0.037	0.019	0.016	0.071	0.069	0.069	0.072	0.069	0.069	95	96
10	0.036	0.013	0.013	0.034	0.032	0.033	0.035	0.032	0.033	92	93
15	0.040	0.011	0.011	0.023	0.022	0.022	0.024	0.022	0.022	91	90
$\lambda = 1$											
5	0.054	0.020	0.013	0.061	0.058	0.059	0.064	0.059	0.059	92	93
10	0.044	0.012	0.015	0.030	0.029	0.029	0.032	0.029	0.029	93	93
15	0.049	0.019	0.020	0.021	0.020	0.020	0.022	0.020	0.020	90	88

Çizelge 2.10 σ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\nu = 3$											
$\lambda = 0$											
5	0.895	1.097	1.161	0.203	0.101	0.148	1.005	1.304	1.496	130	149
10	0.931	1.051	1.084	0.127	0.042	0.112	0.994	1.146	1.286	115	129
15	0.949	1.029	1.039	0.143	0.025	0.046	1.044	1.084	1.125	104	108
$\lambda = 0.4$											
5	0.893	1.083	1.107	0.266	0.094	0.257	1.064	1.266	1.483	119	139
10	0.935	1.015	1.062	0.217	0.036	0.123	1.091	1.066	1.251	98	115
15	0.995	1.009	1.037	0.077	0.026	0.082	1.066	1.045	1.157	98	108
$\lambda = 0.7$											
5	0.903	1.036	1.108	0.265	0.093	0.226	1.080	1.165	1.454	108	135
10	0.914	0.959	1.026	0.137	0.034	0.096	0.972	0.954	1.149	98	118
15	0.937	0.954	0.997	0.084	0.022	0.051	0.962	0.931	1.044	97	109
$\lambda = 1$											
5	0.911	0.970	1.000	0.205	0.081	0.178	1.035	1.021	1.179	99	114
10	0.936	0.915	0.981	0.125	0.030	0.096	1.001	0.866	1.059	87	106
15	0.959	0.894	0.971	0.142	0.019	0.077	1.062	0.818	1.021	77	96
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\nu = 5$											
$\lambda = 0$											
5	0.967	1.063	1.122	0.084	0.074	0.099	1.019	1.205	1.358	118	133
10	0.980	1.033	1.067	0.038	0.030	0.033	0.999	1.096	1.171	110	117
15	0.990	1.031	1.055	0.028	0.020	0.021	1.008	1.082	1.134	107	112
$\lambda = 0.4$											
5	0.959	1.034	1.081	0.084	0.076	0.094	1.003	1.144	1.262	114	126
10	0.978	1.000	1.037	0.045	0.030	0.036	1.001	1.030	1.112	103	111
15	0.975	0.982	1.013	0.030	0.019	0.022	0.980	0.984	1.048	100	107
$\lambda = 0.7$											
5	0.957	0.975	1.028	0.101	0.068	0.095	1.018	1.019	1.152	100	113
10	0.975	0.945	0.983	0.052	0.024	0.030	1.002	0.916	0.997	91	100
15	0.980	0.936	0.968	0.035	0.017	0.020	0.995	0.893	0.958	90	96
$\lambda = 1$											
5	0.958	0.924	0.977	0.092	0.056	0.073	1.010	0.910	1.027	90	102
10	0.963	0.884	0.930	0.049	0.024	0.031	0.977	0.806	0.895	82	92
15	0.989	0.887	0.928	0.035	0.015	0.018	1.012	0.802	0.879	79	87

Çizelge 2.10-devam σ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\nu = 7$											
$\lambda = 0$											
5	0.969	1.038	1.070	0.063	0.065	0.074	1.002	1.143	1.219	114	122
10	0.973	1.012	1.039	0.028	0.026	0.028	0.976	1.050	1.108	108	114
15	0.993	1.015	1.038	0.022	0.017	0.020	1.009	1.048	1.096	104	109
$\lambda = 0.4$											
5	0.970	1.007	1.037	0.066	0.061	0.070	1.007	1.075	1.146	107	114
10	0.978	0.980	1.009	0.034	0.026	0.031	0.990	0.986	1.049	100	106
15	0.995	0.986	1.008	0.022	0.016	0.018	1.013	0.987	1.034	97	102
$\lambda = 0.7$											
5	0.977	0.967	0.991	0.062	0.049	0.060	1.017	0.985	1.042	97	103
10	0.973	0.932	0.958	0.030	0.022	0.026	0.976	0.891	0.945	91	97
15	0.988	0.934	0.955	0.022	0.016	0.017	0.998	0.888	0.929	89	93
$\lambda = 1$											
5	0.954	0.900	0.920	0.068	0.052	0.057	0.978	0.862	0.905	88	93
10	0.987	0.889	0.918	0.034	0.021	0.023	1.008	0.811	0.866	80	86
5	0.969	1.038	1.070	0.063	0.065	0.074	1.002	1.143	1.219	114	122
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\nu = 10$											
$\lambda = 0$											
5	0.972	1.019	1.042	0.056	0.057	0.063	1.001	1.096	1.149	109	115
10	0.987	1.010	1.030	0.026	0.024	0.026	0.999	1.045	1.088	105	109
15	0.994	1.010	1.027	0.015	0.015	0.015	1.003	1.034	1.070	103	107
$\lambda = 0.4$											
5	0.980	0.998	1.012	0.054	0.051	0.055	1.014	1.046	1.080	103	107
10	0.995	0.989	1.003	0.025	0.023	0.024	1.015	1.000	1.030	99	102
15	0.989	0.976	0.989	0.016	0.014	0.015	0.994	0.966	0.993	97	100
$\lambda = 0.7$											
5	0.972	0.947	0.951	0.048	0.043	0.045	0.994	0.940	0.950	95	96
10	0.985	0.929	0.940	0.027	0.021	0.022	0.997	0.883	0.907	89	91
15	0.991	0.929	0.938	0.017	0.013	0.014	1.000	0.876	0.893	88	89
$\lambda = 1$											
5	0.983	0.906	0.906	0.058	0.045	0.046	1.025	0.865	0.867	84	85
10	0.988	0.886	0.893	0.027	0.020	0.021	1.003	0.806	0.818	80	82
15	0.985	0.873	0.880	0.018	0.012	0.013	0.989	0.774	0.787	78	80

Çizelgele 2.9-2.10'a göre, μ_i parametresi için serbestlik derecesi arttıkça dağılım çarpık normal dağılıma yakınsadığından, parametrenin etkinlikleri de çarpık normal dağılımda bulunan etkinliklere yaklaşmaktadır. Serbestlik derecesi 3 iken μ_i parametresi için, ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri, LS tahmin edicisinin etkinliğine göre oldukça yüksektir. Serbestlik derecesi arttıkça, dağılım çarpık normale yakınsadığından etkinlikler arası fark azalmakla beraber, yine oldukça yüksek etkinlikler bulunmuştur. Her bir deneme içindeki deney birimi yönünden incelendiğinde ise, her bir serbestlik derecesi ve her bir çarpıklık parametresi için, deney birimi arttıkça, ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri artmaktadır. σ parametresi için ise, çizelgelere bakıldığında, serbestlik derecesine göre yapılan değerlendirmede, küçük serbestlik derecelerinde ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri düşüktür. Ancak, serbestlik derecesi arttıkça, etkinlikler artmakta ve çarpık normal dağılıma yakınsamaktadır. Çarpıklık parametresi yönünden incelendiğinde, özellikle çarpıklık parametresi 0 iken, ML ve MML tahmin edicileri, LS tahmin edicilerine göre daha az etkin bulunmuştur. Ancak çarpıklık parametresi arttıkça, LS tahmin edicilerinin etkinlikleri düşmekte, ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri yükselmektedir. Özellikle, çarpıklık parametresi 1 iken, ML ve MML tahmin edicileri LS'e göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Deney birimi yönünden incelendiğinde, her bir denemedeki deney birimi sayısı büyüdükçe ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri artmaktadır. Bazı serbestlik dereceleri ve çarpıklık parametre değerlerinde σ parametresi daha az etkin bulunsun da, μ_i parametresiyle beraber incelendiğinde ML ve MML tahmin edicilerinin, LS tahmin edicilerine göre daha iyi sonuç verdiği gözlenmektedir.

2.2.3 Hipotez testi

Daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi varyans analizi, toplam varyansın bileşenlerine parçalanması ile yapılmaktadır. LS tahmin edicilerine dayanan F test istatistiği,

$$F_{LS} = \frac{n \sum_{i=1}^a \tilde{\alpha}_{i,LS}^2}{(a-1) \tilde{\sigma}_{LS}^2} \quad (2.55)$$

şeklindedir. Çarpık t dağılımına sahip bir rasgele değişkenin karesel formu ki-kare dağılımına sahiptir, (Gupta 2003, Genton ve Loperfido 2005). Dolayısıyla ML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiği,

$$k = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij}}{(N-a) - \lambda^2 \left(\frac{v}{v+1} \right)^2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n w_{ij} \bar{g}_{i.}^2} \quad (2.56)$$

olmak üzere,

$$F_{ML} = \frac{n \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i,ML}^2}{(a-1)k \hat{\sigma}_{ML}^2} \quad (2.57)$$

asimptotik olarak $a-1$ ve $N-a$ serbestlik dereceli F dağılımına sahip olacaktır.

MML tahmin edicilerinin asimptotik olarak normal dağılması özelliğinden MML tahmin edicileri için kullanılan F istatistiği,

$$F_{MML} = \frac{m \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i,MML}^2}{(a-1)\hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (2.58)$$

yine asimptotik olarak $a-1$ ve $N-a$ serbestlik dereceli F dağılımına sahip olacaktır.

Küçük örneklem büyüklükleri için test istatistiklerinin değişik λ değerleri, değişik deney birimi büyüklükleri ve değişik serbestlik dereceleri için I. tip hataları (2.31) eşitliğindeki olasılıklar yardımıyla hesaplanmıştır. Çizelge 2.11 bu test istatistiklerinin I. tip hatalarını göstermektedir.

Çizelge 2.11 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları; $a=3$, $n=10$, $\alpha=0.050$.

ν	$\lambda=0$			$\lambda=0.4$			$\lambda=0.7$			$\lambda=1$		
	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
3	0.050	0.051	0.053	0.049	0.049	0.047	0.051	0.049	0.050	0.053	0.050	0.051
5	0.051	0.053	0.052	0.049	0.051	0.050	0.050	0.052	0.049	0.048	0.051	0.052
7	0.049	0.045	0.048	0.044	0.045	0.046	0.049	0.051	0.048	0.054	0.055	0.052
10	0.046	0.049	0.047	0.049	0.049	0.047	0.055	0.056	0.054	0.051	0.052	0.053

Çizelge 2.11’den de görüldüğü gibi 1. tip hatalar 0.050 etrafındadır. Son olarak her üç tahmin ediciyle hesaplanan F test istatistiklerinin güçleri (2.40) eşitliğinde verilen olasılıklar yardımıyla hesaplanmış ve çizelge 2.12’de verilmiştir. Burada, her bir denemedeki deney birimi 10 ve deneme sayısı 3 olarak alınmıştır. Çizelge 2.12’ye göre, ML ve MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiklerinin gücü LS tahmin edicileri ile elde edilen F test istatistiklerinin gücünden yüksektir. Güçler arasındaki fark en fazla serbestlik derecesi 3 iken gerçekleşmektedir. Serbestlik derecesi arttıkça bu fark azalmakta ve çarpık normal dağılımında elde edilen güç farklarına yaklaşmaktadır. Serbestlik derecesinden bağımsız olarak, çarpıklık parametresi arttıkça güç farkı artmaktadır.

Çizelge 2.12 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ($a=3$, $n=10$).

$\lambda = 0$				$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
v=3												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.050	0.051	0.053	0.049	0.049	0.047	0.051	0.049	0.050	0.053	0.050	0.051
0.1	0.11	0.15	0.13	0.10	0.14	0.12	0.10	0.13	0.12	0.09	0.12	0.12
0.2	0.33	0.42	0.39	0.31	0.40	0.38	0.32	0.40	0.39	0.26	0.33	0.32
0.3	0.59	0.70	0.68	0.57	0.68	0.67	0.55	0.64	0.62	0.52	0.62	0.59
0.4	0.83	0.90	0.89	0.82	0.89	0.87	0.77	0.86	0.84	0.75	0.84	0.81
0.5	0.91	0.97	0.95	0.90	0.96	0.94	0.89	0.98	0.94	0.87	0.97	0.91
0.6	0.98	0.99	0.98	0.96	0.99	0.96	0.95	0.99	0.97	0.95	0.99	0.96
v=5												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.051	0.053	0.052	0.049	0.051	0.050	0.050	0.052	0.049	0.048	0.051	0.052
0.1	0.10	0.12	0.10	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07
0.2	0.26	0.30	0.28	0.24	0.27	0.25	0.20	0.23	0.21	0.17	0.19	0.17
0.3	0.49	0.53	0.51	0.48	0.52	0.49	0.40	0.47	0.41	0.33	0.38	0.35
0.4	0.72	0.78	0.75	0.71	0.77	0.73	0.61	0.70	0.65	0.52	0.59	0.56
0.5	0.90	0.95	0.92	0.89	0.93	0.91	0.79	0.87	0.87	0.68	0.78	0.76
0.6	0.96	0.98	0.97	0.95	0.95	0.96	0.91	0.96	0.93	0.84	0.91	0.89
v=7												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.049	0.045	0.048	0.044	0.045	0.046	0.049	0.051	0.048	0.054	0.055	0.052
0.1	0.10	0.11	0.10	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09
0.2	0.23	0.24	0.24	0.22	0.23	0.23	0.20	0.22	0.21	0.20	0.27	0.22
0.3	0.46	0.48	0.48	0.44	0.46	0.46	0.33	0.37	0.37	0.33	0.39	0.37
0.4	0.68	0.72	0.70	0.66	0.69	0.67	0.52	0.60	0.59	0.59	0.67	0.64
0.5	0.86	0.90	0.90	0.85	0.88	0.89	0.72	0.80	0.78	0.75	0.86	0.78
0.6	0.96	0.99	0.99	0.95	0.97	0.96	0.90	0.93	0.91	0.89	0.91	0.91
v=10												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.046	0.049	0.047	0.049	0.049	0.047	0.055	0.056	0.054	0.051	0.052	0.053
0.1	0.10	0.10	0.10	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09	0.08	0.08	0.09	0.09
0.2	0.22	0.25	0.24	0.22	0.25	0.24	0.20	0.24	0.23	0.18	0.22	0.21
0.3	0.48	0.50	0.50	0.46	0.48	0.49	0.40	0.45	0.43	0.35	0.41	0.38
0.4	0.73	0.75	0.75	0.71	0.74	0.73	0.65	0.69	0.67	0.58	0.65	0.63
0.5	0.90	0.93	0.93	0.88	0.91	0.90	0.89	0.86	0.85	0.78	0.83	0.81
0.6	0.99	0.99	0.99	0.97	0.97	0.97	0.95	0.96	0.96	0.91	0.94	0.93

Sonuç olarak, hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılımı durumunda bir yönlü varyans analizi için, parametre tahminleri LS, ML ve MML yöntemleriyle elde edilmiştir. Parametrelerin LS tahminleri, normallik varsayımı bozulduğu için beklenildiği gibi etkinliklerini yitirmektedir. Her iki dağılım için ML ve MML

yöntemleriyle elde edilen parametrelerin etkinlikleri, LS yöntemiyle elde edilen parametrelerin etkinliklerinden yüksek çıkmıştır. Ayrıca, ML ve MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiklerinin gücü de LS tahmin edicilerine dayanan F test istatistiğinin gücünden yüksek çıkmıştır. ML ve MML tahmin edicilerini kıyaslayacak olursak, ML tahmin edicileri MML tahmin edicilerine göre az da olsa beklenildiği üzere daha etkin olduğu görülmüştür. Ayrıca ML tahmin edicilerine dayanan test istatistikleri de MML tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinden az da olsa daha güçlü olduğu tespit edilmiştir. Ancak ML tahmin edicileri direk yöntemlerle bulunamamakta dolayısıyla iteratif yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Diğer taraftan MML tahmin edicileri iterasyona gerek kalmadan direk olarak bulunmakla beraber, ML tahmin edicilerinin de özelliklerini taşımaktadır. İki tahmin ediciyi kıyaslamak için simülasyon programında tahmin edicileri bulmak için harcanan süre (CPU) Çizelge 2.13'te verilmiştir. Harcanan süreler, tek yönlü varyans analizi için ve deney birimi büyüklüğü 10 olarak alınarak hesaplanmıştır.

Çizelge 2.13 Tek yönlü varyans analizi için $CPU(\hat{\mu}_i) + CPU(\hat{\sigma})$.

	ML	MML
Çarpık Normal Dağılım	0.891	0.768
Çarpık t Dağılımı	10.072	0.768

Buna göre, hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda harcanan süreler açısından bir fark yokken, hata terimlerinin çarpık t dağılması durumunda, MML tahmin edicilerini elde etmek için harcanan süre değişmezken, ML tahmin edicileri için harcanan süre yaklaşık 15 katıdır.

3. İKİ YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

İki yönlü varyans analizinde, tek yönlü varyans analizinde olduğu gibi etkisi araştırmak istenen bir faktör vardır. Ancak deney birimleri arasında sistematik farklılıklar söz konusudur. Bu farklılıklar sebebiyle, deney birimlerinin kendi içinde homojen, kendi aralarında heterojen bloklara ayrılması deneysel hatanın azaltılmasına olanak sağlayacaktır (Şenoğlu ve Acıtaş, 2011). İki-yönlü ANOVA için matematiksel model,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1, 2, \dots, a; j = 1, 2, \dots, b; k = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

şeklindedir. Burada,

y_{ijk} , i . deneme, j . bloktaki k . gözlem değerini,

μ , genel ortalamayı,

α_i , i . denemenin etkisini,

β_j , j . bloğun etkisini,

$\alpha\beta_{ij}$, i . deneme ile j . blok arasındaki etkileşim etkisini,

ε_{ijk} , rasgele hata terimlerini

göstermektedir. (3.1) modeli, sabit etkili bir modeldir. Bir başka deyişle,

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^b \beta_j = 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^a \alpha\beta_{ij} = 0, \sum_{j=1}^b \alpha\beta_{ij} = 0$$

olduğu varsayılmaktadır.

Burada amaç, denemeler ve bloklar arasında anlamlı bir farklılığın olup olmadığının ve etkileşim etkisinin anlamlı olup olmadığının saptanmasıdır. Bunun için tek yönlü varyans analizinde olduğu gibi ANOVA tablosu kullanılır. Tek yönlü varyans analizinde olduğu gibi temel varsayım, hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımdır.

3.1 Hata Terimlerinin Çarpık Normal Olması Durumunda İki Yönlü Varyans Analizi

Bu bölümde iki-yönlü varyans analizinde hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumu incelenmiştir. Bölüm 2.1.1’de olduğu gibi hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda, bir başka deyişle

$$\varepsilon_{ijk} \sim SN(0, \sigma, \lambda) \quad (3.2)$$

olmak üzere,

$$Y_{ijk} \sim SN(\mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}, \sigma, \lambda) \quad (3.3)$$

dir. Burada, $\mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$ konum parametresi iken, σ ölçek parametresidir.

3.1.1 Parametre tahmini

Bu bölümde, iki yönlü varyans analizinde, hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda bilinmeyen parametre tahminleri LS, ML ve MML yöntemleriyle elde edilmiştir.

3.1.1.1 En küçük kareler yöntemi

(3.1) modeli için LS tahmin edicileri,

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \alpha\beta_{ij})^2 \quad (3.3)$$

hata kareler toplamını minimum yapan değerlerdir. Buna göre (3.1) modelinin, sabit etkili bir model olduğu göz önüne alınarak μ, α_i, β_j ve $\alpha\beta_{ij}$ parametrelerinin LS tahmin edicileri, sırasıyla,

$$\tilde{\mu} = \bar{y}_{...}, \quad \tilde{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, \quad \tilde{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} \quad (3.4)$$

ve

$$\tilde{\alpha\beta}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...} \quad (3.5)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{N}, \quad \bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{bn}, \quad \bar{y}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{an}, \quad \bar{y}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n} \text{ ve } N=abn$$

biçimindedir. Hata varyansı $\tilde{\sigma}^2$ nin LS tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2}{N - ab} \quad (3.6)$$

Bir yönlü varyans analizinde olduğu gibi, $\tilde{\sigma}^2$ nin paydası N olarak bulunmuş ancak $N-ab$ ile yan düzeltmesi yapılmıştır. Ancak LS tahmin edicileri için yan düzeltmesi yapmak gerekmektedir. Yan düzeltmesi sadece μ ve σ parametresi için gereklidir. Diğer tahmin ediciler için herhangi bir yan düzeltmesine gerek yoktur.

3.1.1.2 En çok olabilirlik yöntemi

(3.1) modelinde parametrelerin ML tahmin edicilerini bulmak için öncelikle olabilirlik fonksiyonunu elde etmek gerekmektedir. Buna göre hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda iki yönlü varyans analizi için olabilirlik fonksiyonu,

$$L(y_{ijk}; \vartheta) = 2^n \sigma^{-n} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^n \phi\left(\frac{y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \alpha\beta_{ij}}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \alpha\beta_{ij}}{\sigma}\right) \quad (3.7)$$

şeklindedir. Log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} \ln L = N \ln 2 - N \ln \sigma - \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \left(\frac{y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \alpha\beta_{ij}}{\sigma} \right)^2 \\ + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \ln \left(\Phi \left(\lambda \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \alpha\beta_{ij}}{\sigma} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

biçiminde elde edilir. Log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevinin alınmasıyla olabilirlik denklemleri, Buna göre,

$$z_{ijk} = \frac{Y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j - \alpha\beta_{ij}}{\sigma} \quad (3.9)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijk})}{\Phi(\lambda z_{ijk})} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijk})}{\Phi(\lambda z_{ijk})} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, a) \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijk})}{\Phi(\lambda z_{ijk})} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, b) \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha\beta_{ij}} &= \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\phi(\lambda z_{ijk})}{\Phi(\lambda z_{ijk})} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk}^2 - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk} \frac{\phi(\lambda z_{ijk})}{\Phi(\lambda z_{ijk})} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir.

(3.10)'daki eşitliklerin yeniden düzenlenmesiyle parametrelerin ML tahmin edicileri,

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{y}_{...} - \lambda \bar{w}_{...} \hat{\sigma}, \quad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...} - \lambda (\bar{w}_{i..} - \bar{w}_{...}) \hat{\sigma}, \quad \hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...} - \lambda (\bar{w}_{.j.} - \bar{w}_{...}) \hat{\sigma} \\ \hat{\alpha\beta}_{ij} &= (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) - \lambda (\bar{w}_{ij.} - \bar{w}_{i..} - \bar{w}_{.j.} + \bar{w}_{...}) \hat{\sigma}, \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2}{(N - ab)(1 - \lambda^2 t)}\end{aligned}\quad (3.11)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}w_{ijk} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \phi(\lambda z_{ijk})}{\Phi(\lambda z_{ijk})}, & \bar{w}_{i..} &= \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk}}{bn}, & \bar{w}_{.j.} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n w_{ijk}}{an}, \\ \bar{w}_{ij.} &= \frac{\sum_{k=1}^n w_{ijk}}{n} & \bar{w}_{..} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk}}{N} & t &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \bar{w}_{ij.}^2}{ab}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

3.1.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

MML tahmin edicileri bulmak için önceki bölümlerde anlatıldığı gibi ilk adım verilerin sırlanmasıdır. Daha sonra, olabilirlik fonksiyonlarında yer alan doğrusal olmayan ifade

$$w(z) = \frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)} \quad (3.12)$$

şeklinde belirlenir. $w(z_{i(j)})$ fonksiyonu, $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ etrafında Taylor serisine açılıp gerekli düzeltmeler yapıldığında,

$$w(z_{i(j)}) \cong \alpha_j - \gamma_j z_{i(j)} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\gamma_j = \frac{\phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \left(\frac{\lambda^2 t_{(j)} \Phi(\lambda t_{(j)}) + \lambda \phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \right) \quad (3.14)$$

$$\alpha_{(j)} = \frac{\phi(\lambda z_{i(j)})}{\Phi(\lambda z_{i(j)})} + t_{(j)} \gamma_{(j)} \quad (3.15)$$

şeklindedir. $w(z_{i(j)})$ fonksiyonu, (3.10) daki olabilirlik denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{(j)} - \gamma_{(j)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{(j)} - \gamma_{(j)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n (\alpha_{(j)} - \gamma_{(j)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha \beta_{ij}} &= \sum_{k=1}^n z_{ijk} - \lambda \sum_{k=1}^n (\alpha_{(j)} - \gamma_{(j)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk}^2 - \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n z_{ijk} (\alpha_{(k)} - \gamma_{(k)} z_{ij(k)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. Denklem sistemlerinin çözülmesiyle bulunan MML tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \hat{\mu}_{...} - \left(\frac{\lambda \Delta}{m} \right) \hat{\sigma}, \quad \hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{...}, \quad \beta_j = \hat{\mu}_{.j.} - \hat{\mu}_{...} \\ \hat{\alpha} \hat{\beta}_{ij} &= \hat{\mu}_{ij.} - \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{.j.} + \hat{\mu}_{...}, \quad \hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4NC}}{2\sqrt{N(N-ab)}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\Delta = \lambda \sum_{k=1}^n \alpha_{(k)}, \quad \beta_{(k)} = 1 + \gamma_{(k)}, \quad m = \sum_{k=1}^n \beta_{(k)}$$

$$A = N; \quad B = \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \alpha_{(k)} (y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.}); \quad C = - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} (y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.})^2$$

$$\hat{\mu}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} y_{ij(k)}}{bm}, \quad \hat{\mu}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} y_{ij(k)}}{am}, \quad \hat{\mu}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n \beta_{(k)} y_{ij(k)}}{m}, \quad \hat{\mu}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\mu}_{ij.}}{ab}$$

biçiminde tanımlanır.

3.1.2 Monte Carlo simülasyon çalışması

İki-yönlü ANOVA modelinde tahmin edicilerin etkinliklerinin karşılaştırılması için Bölüm 2.1.2’de anlatıldığı gibi konum parametresi 0, ölçek parametresi 1 olan çarpık normal dağılımdan sayı üretilmiştir. ML tahmin edicileri için yine Bölüm 2.1.2’de önerilen IRA kullanılmıştır. IRA için başlangıç değerleri parametrelerin LS tahmin edicileri olarak alınmıştır. Buna göre, çizelge 3.1-3.3’de tahmin edicilerin değişik deney birimleri ve değişik çarpıklık parametreleri için ortalamaları, varyansları, MSE değerleri ve LS tahmin edicilerinin ML ve MML tahmin edicilerine göre etkinlikleri verilmiştir. RE değerleri bulunurken (2.24) ve (2.25) eşitliklerinden faydalanılmıştır.

Çizelge 3.1’e göre $\mu_{ij} (\mu + \alpha_i + \beta_j)$ parametresi için çarpıklık parametresi arttıkça, etkinlik artmaktadır. $\lambda=0$ değeri için dağılım standart normal dağılım olacağından önceki bölümde anlatıldığı gibi etkinlikler eşit bulunmuştur. Ayrıca, beklenildiği gibi n arttıkça ML ve MML tahmin edicilerin etkinliklerinin LS tahmin edicisine göre daha iyi olduğu görülmektedir.

İki yönlü varyans analizinde, önemli olan bir diğer tahmin edici ise etkileşim etkisinin tahminidir. Çizelge 3.2’ye göre çarpıklık parametresi arttıkça ML ve MML yöntemiyle bulunan etkileşim etkisinin etkinliği LS yöntemiyle bulunan tahmin edicilere göre az da olsa daha yüksek bulunmuştur.

σ parametresi için çizelge 3.3 incelendiğinde, yine çarpıklık parametresi ve örneklem büyüklüğü arttıkça ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri LS’e göre artmaktadır.

Çizelge 3.1 μ_{ij} parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\tilde{\mu}_{ij,LS}$	$\hat{\mu}_{ij,ML}$	$\hat{\mu}_{ij,MML}$	$\tilde{\mu}_{ij,LS}$	$\hat{\mu}_{ij,ML}$	$\hat{\mu}_{ij,MML}$	$\tilde{\mu}_{ij,LS}$	$\hat{\mu}_{ij,ML}$	$\hat{\mu}_{ij,MML}$	$\hat{\mu}_{ij,ML}$	$\hat{\mu}_{ij,MML}$
$\lambda = 0$											
3	-0.012	-0.012	-0.012	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	0.181	100	100
4	0.022	0.022	0.022	0.136	0.136	0.136	0.137	0.137	0.137	100	100
5	0.017	0.017	0.017	0.115	0.115	0.115	0.115	0.115	0.115	100	100
$\lambda = 0.4$											
3	0.004	-0.007	-0.006	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	100	100
4	0.025	0.013	0.014	0.130	0.130	0.130	0.131	0.130	0.131	99	100
5	0.023	0.011	0.012	0.103	0.103	0.103	0.104	0.103	0.103	99	99
$\lambda = 0.7$											
3	0.049	0.009	0.012	0.145	0.146	0.146	0.147	0.146	0.146	99	99
4	0.046	0.002	0.005	0.120	0.120	0.120	0.122	0.120	0.120	98	98
5	0.061	0.016	0.019	0.090	0.091	0.091	0.094	0.091	0.091	97	97
$\lambda = 1$											
3	0.111	0.037	0.039	0.127	0.129	0.129	0.140	0.130	0.130	93	93
4	0.093	0.012	0.016	0.099	0.099	0.100	0.107	0.100	0.100	93	93
5	0.105	0.021	0.024	0.077	0.077	0.077	0.088	0.078	0.078	89	89

Çizelge 3.2 $\alpha\beta_{ij}$ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$
$\lambda = 0$											
3	-0.003	-0.003	-0.003	0.150	0.150	0.150	0.150	0.150	0.150	100	100
4	0.010	0.010	0.010	0.102	0.102	0.102	0.102	0.102	0.102	100	100
5	-0.009	-0.009	-0.009	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	0.094	100	100
$\lambda = 0.4$											
3	0.008	0.007	0.008	0.134	0.132	0.132	0.134	0.132	0.132	98	98
4	0.019	0.019	0.019	0.105	0.103	0.103	0.105	0.103	0.103	98	98
5	0.006	0.006	0.006	0.086	0.084	0.084	0.086	0.084	0.084	98	98
$\lambda = 0.7$											
3	-0.001	-0.001	-0.001	0.120	0.118	0.118	0.120	0.118	0.118	98	98
4	0.001	0.001	0.001	0.096	0.095	0.094	0.096	0.095	0.094	98	98
5	-0.007	-0.007	-0.007	0.073	0.071	0.071	0.073	0.071	0.071	97	97
$\lambda = 1$											
3	0.016	0.017	0.016	0.107	0.106	0.105	0.108	0.106	0.105	98	98
4	0.003	0.003	0.003	0.082	0.079	0.079	0.082	0.078	0.079	96	96
5	-0.015	-0.014	-0.015	0.059	0.057	0.058	0.060	0.058	0.057	96	96

Çizelge 3.3 σ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

n	Ortalama			Varyans			MSE			RE	
	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.993	0.993	0.993	0.027	0.027	0.027	1.013	1.013	1.013	100	100
4	0.991	0.991	0.991	0.018	0.018	0.018	1.001	1.001	1.001	100	100
5	0.991	0.991	0.991	0.013	0.013	0.013	0.995	0.995	0.995	100	100
$\lambda = 0.4$											
3	1.007	0.992	0.992	0.027	0.026	0.026	1.041	1.010	1.010	97	97
4	1.012	0.997	0.997	0.020	0.019	0.019	1.045	1.014	1.014	97	97
5	1.001	0.988	0.989	0.014	0.014	0.014	1.015	0.991	0.992	97	97
$\lambda = 0.7$											
3	1.025	0.990	0.994	0.032	0.028	0.028	1.083	1.008	1.018	93	94
4	1.022	0.987	0.989	0.018	0.017	0.017	1.064	0.990	0.995	93	94
5	1.022	0.988	0.992	0.016	0.015	0.015	1.062	0.992	1.001	93	94
$\lambda = 1$											
3	1.072	0.981	0.984	0.034	0.028	0.029	1.101	0.991	0.998	90	92
4	1.037	0.985	0.995	0.021	0.019	0.019	1.098	0.989	1.011	90	92
5	1.033	0.987	0.991	0.014	0.013	0.013	1.081	0.976	0.996	90	92

3.1.3 Hipotez testi

(3.1) modeli için genel kareler toplamı,

$$SS_{Toplam} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 \quad (3.18)$$

dir. SS_{Toplam} ifadesi, SS_{Deneme} , SS_{Blok} , $SS_{Etkilesim}$ ve SS_{Hata} şeklinde parçalanabilir. Böylece, iki-yönlü ANOVA'da tek-yönlü ANOVA'dan farklı olarak test edilecek üç hipotez elde edilecektir. Bunlar;

denemeler için,

$$H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0 \quad (3.19)$$

bloklar için,

$$H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0 \quad (3.20)$$

ve etkileşim için,

$$H_{03} : \alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{12} = \dots = \alpha\beta_{ab} = 0 \quad (3.21)$$

biçimindedir. Hipotezleri test etmek için, toplam varyansın parçalanmasıyla elde edilen ANOVA tablosu kullanılır. (3.19) hipotezi için,

$$F_{LS,deneme} = \frac{bn \sum_{i=1}^a \tilde{\alpha}_{i,LS}^2}{(a-1)\tilde{\sigma}_{LS}^2} \quad (3.22)$$

(3.20) hipotezi için,

$$F_{LS,blok} = \frac{an \sum_{j=1}^b \tilde{\beta}_{j,LS}^2}{(b-1)\tilde{\sigma}_{LS}^2} \quad (3.23)$$

ve (3.21) hipotezi için,

$$F_{LS,etkilesim} = \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha\tilde{\beta}_{ij,LS}}{(a-1)(b-1)\tilde{\sigma}_{LS}^2} \quad (3.24)$$

kullanılmaktadır. (3.22)'de verilen F test istatistiği $a-1$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli F dağılımına, (3.23)'de verilen F test istatistiği $b-1$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli F dağılımına ve (3.24)'de verilen F test istatistiği ise $(a-1)(b-1)$ ve $N-ab$ serbestlik dereceli F dağılımına sahiptir. Söz konusu F test istatistikleri tek-yönlü ANOVA'da olduğu gibi LS tahmin edicilerine dayanmaktadır. Buna göre ML ve MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistikleri, (3.19) hipotezi için,

$$F_{ML,deneme} = \frac{bn \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i,ML}^2}{(a-1)(1-\lambda^2 t^2) \hat{\sigma}_{ML}^2}, \quad F_{MML,deneme} = \frac{bm \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i,MML}^2}{(a-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (3.25)$$

(3.20) hipotezi için,

$$F_{ML,blok} = \frac{an \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_{j,ML}^2}{(b-1)(1-\lambda^2 t^2) \hat{\sigma}_{ML}^2}, \quad F_{MML,blok} = \frac{am \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_{j,MML}^2}{(b-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (3.26)$$

ve (3.21) hipotezi için,

$$F_{ML,etkileşim} = \frac{n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha \hat{\beta}_{ij,ML}}{(a-1)(b-1)(1-\lambda^2 t^2) \hat{\sigma}_{ML}^2}, \quad F_{MML,etkileşim} = \frac{m \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \alpha \hat{\beta}_{ij,MML}}{(a-1)(b-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (3.27)$$

şeklinde önerilmiştir.

Çizelge 3.4, deneme, blok ve etkileşim için (2.31) eşitliğinde verilen olasılıklar yardımıyla hesaplanan test istatistiklerinin I. tip hatalarını vermektedir. Buna göre her üç test istatistiği için 1. tip hata değerleri 0.050 civarındadır.

Çizelge 3.4 F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları ; $a=3, b=3, n=5, \alpha=0.050$.

<i>F test istatistiği</i>				
λ		<i>Deneme</i>	<i>Blok</i>	<i>Etkileşim</i>
0.0	F_{LS}	0.049	0.046	0.048
	F_{ML}	0.055	0.052	0.048
	F_{MML}	0.046	0.045	0.048
0.4	F_{LS}	0.056	0.048	0.052
	F_{ML}	0.054	0.046	0.051
	F_{MML}	0.053	0.044	0.054
0.7	F_{LS}	0.045	0.054	0.046
	F_{ML}	0.048	0.052	0.049
	F_{MML}	0.049	0.054	0.047
1.0	F_{LS}	0.047	0.047	0.052
	F_{ML}	0.048	0.046	0.054
	F_{MML}	0.048	0.045	0.053

Son olarak, çizelge 3.5, denemeler ve bloklar arasındaki farklılığı sınamak için kullanılan F test istatistiklerinin gücünü ve yine çizelge 3.5, etkileşimin anlamlılığını sınamak için kullanılan F test istatistiklerinin gücünü göstermektedir. Güçler, (2.32) eşitliğinde verilen olasılıklar yardımıyla hesaplanmıştır. Buna göre, tek yönlü-varyans analizinde olduğu gibi her üç durum için ML ve MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiklerinin güçleri az da olsa LS tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinin güçlerinden fazladır. Bununla beraber çarpıklık parametresi arttıkça güçler arasındaki farklılık artmaktadır. Bu fark en fazla $\lambda=1$ 'de görülmektedir.

Çizelge 3.5 F_{deneme} , F_{blok} ve $F_{etkilesim}$ test istatistiklerinin gücü; $a=3, b=3, n=5$.

$\lambda = 0$				$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
F_{deneme}												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.055	0.055	0.055	0.056	0.054	0.053	0.045	0.048	0.049	0.047	0.048	0.048
0.1	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.11	0.08	0.09	0.09
0.2	0.33	0.33	0.33	0.31	0.31	0.31	0.26	0.27	0.27	0.20	0.22	0.21
0.3	0.63	0.63	0.63	0.60	0.61	0.61	0.51	0.51	0.51	0.46	0.49	0.48
0.4	0.88	0.88	0.88	0.87	0.87	0.87	0.77	0.78	0.78	0.68	0.71	0.71
0.5	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.93	0.93	0.93	0.88	0.90	0.90
0.6	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.98	0.99	0.99	0.97	0.98	0.98
F_{blok}												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.052	0.052	0.052	0.048	0.046	0.044	0.054	0.052	0.054	0.047	0.046	0.045
0.1	0.10	0.10	0.10	0.10	0.11	0.11	0.09	0.10	0.10	0.09	0.10	0.10
0.2	0.36	0.36	0.36	0.34	0.34	0.34	0.26	0.27	0.27	0.23	0.24	0.24
0.3	0.63	0.63	0.63	0.61	0.62	0.62	0.50	0.52	0.51	0.47	0.51	0.50
0.4	0.87	0.87	0.87	0.86	0.87	0.87	0.77	0.78	0.78	0.68	0.71	0.70
0.5	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.93	0.93	0.93	0.88	0.90	0.90
0.6	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.98	0.99	0.99	0.97	0.98	0.98
$F_{etkilesim}$												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.049	0.049	0.049	0.052	0.051	0.054	0.046	0.049	0.047	0.052	0.054	0.053
0.1	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09	0.08	0.08	0.09	0.09
0.2	0.23	0.23	0.23	0.22	0.22	0.22	0.20	0.21	0.20	0.17	0.19	0.19
0.3	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.40	0.41	0.40	0.35	0.38	0.37
0.4	0.73	0.73	0.73	0.71	0.71	0.71	0.65	0.66	0.65	0.58	0.61	0.59
0.5	0.90	0.90	0.90	0.89	0.89	0.89	0.84	0.85	0.84	0.78	0.80	0.79
0.6	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.95	0.96	0.96	0.91	0.92	0.92

3.2 Hata Terimlerinin Çarpık t Olması Durumunda İki Yönlü Varyans Analizi

İki yönlü varyans analizinde hata terimlerinin çarpık t olması durumunda (3.1) modeli için

$$\varepsilon_{ijk} \sim St_v(0, \sigma, \lambda) \quad (3.28)$$

olmak üzere,

$$Y_{ijk} \sim St_v(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma, \lambda) \quad (3.29)$$

şeklindedir.

3.2.1 Parametre tahmini

Bu bölümde, (3.1) modeli için, hata terimlerinin çarpık t dağılımı durumunda parametre tahminleri LS, ML ve MML yöntemleri ile elde edilmiştir.

3.2.1.1 En küçük kareler yöntemi

(3.1) modeli için parametrelerin LS tahmin edicileri (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitliklerinde verilmiştir. Ancak, tahmin ediciler normallik varsayımı için olup, çarpık t dağılımı için daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi yan düzeltmesi yapmak gerekmektedir.

3.2.1.2 En çok olabilirlik yöntemi

(3.1) modelinde parametre tahminlerinin ML tahmin edicilerini bulmak için öncelikle olabilirlik fonksiyonunu elde etmek gerekmektedir. Buna göre,

$$z_{ijk} = \frac{y_{ijk} - \mu - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij}}{\sigma} \quad (3.30)$$

olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu

$$L = \left(\frac{2}{\sigma}\right)^N \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^n t_v(z_{ijk}) T_{v+1} \left(\lambda z_{ijk} \sqrt{\frac{v+1}{v+z_{ijk}^2}} \right) \quad (3.31)$$

biçimindedir. Burada, $t_v(\cdot)$, v serbestlik dereceli t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu, $T_{v+1}(\cdot)$, $v+1$ serbestlik dereceli t dağılımının dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritmasını alarak bulunan log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} \ln L = N \ln 2 - N \ln \sigma + N \ln \left(\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) v^{\frac{v}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \right) - \frac{v+1}{2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (v + z_{ijk}^2) \\ + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \ln \left(T_{v+1} \left(\lambda z_{ijk} \sqrt{\frac{v+1}{v+z_{ijk}^2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde elde edilir. Log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevinin alınmasıyla,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} z_{ijk} - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \frac{t_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})}{T_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})} w_{ijk}^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} z_{ijk} - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \frac{t_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})}{T_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})} w_{ijk}^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n w_{ijk} z_{ijk} - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n \frac{t_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})}{T_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})} w_{ijk}^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha \beta_{ij}} = \sum_{k=1}^n w_{ijk} z_{ijk} - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{k=1}^n \frac{t_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})}{T_{v+1}(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}})} w_{ijk}^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} z_{ijk}^2 - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \frac{t_{v+1} \left(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}} \right)}{T_{v+1} \left(\lambda z_{ijk} \sqrt{w_{ijk}} \right)} z_{ijk} w_{ijk}^{3/2} = 0 \quad (3.33)$$

olabilirlik denklemleri elde edilir. Burada,

$$w_{ijk} = \frac{v+1}{v + z_{ijk}^2} \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlanır. (3.33)'de verilen denklemlerin yeniden düzenlenmesiyle ML tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \hat{\mu}_{...} - \lambda \frac{v}{v+1} \bar{g}_{...} \hat{\sigma}, & \hat{\alpha}_i &= \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{...} - \left\{ \lambda \frac{v}{v+1} (\bar{g}_{i..} - \bar{g}_{...}) \right\} \hat{\sigma} \\ \hat{\beta}_j &= \hat{\mu}_{.j.} - \hat{\mu}_{...} - \left\{ \lambda \frac{v}{v+1} (\bar{g}_{.j.} - \bar{g}_{...}) \right\} \hat{\sigma} \\ \hat{\alpha\beta}_{ij} &= \hat{\mu}_{ij.} - \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{.j.} + \hat{\mu}_{...} - \lambda \frac{v}{v+1} (\bar{g}_{ij.} - \bar{g}_{i..} - \bar{g}_{.j.} + \bar{g}_{...}) \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} (y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij.})^2}{N - \lambda^2 \left(\frac{v}{v+1} \right)^2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} \bar{g}_{ij.}^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{...} &= \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} y_{ijk}}{m}, \quad \hat{\mu}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} y_{ijk}}{m_i}, \quad \hat{\mu}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n w_{ijk} y_{ijk}}{m_j}, \\ \hat{\mu}_{ij.} &= \frac{\sum_{k=1}^n w_{ijk} y_{ijk}}{m_{ij}}, \quad \bar{g}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n t_{ijk} w_{ijk}^{3/2}}{m}, \quad \bar{g}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n t_{ijk} w_{ijk}^{3/2}}{m_i}, \quad \bar{g}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n t_{ijk} w_{ijk}^{3/2}}{m_j}, \\ \bar{g}_{ij.} &= \frac{\sum_{k=1}^n t_{ijk} w_{ijk}^{3/2}}{m_{ij}}, \quad t_{ijk} = \frac{t_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)}{T_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)}\end{aligned}$$

ve

$$m = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk}, \quad m_i = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk}, \quad m_j = \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n w_{ijk}, \quad m_{ij} = \sum_{k=1}^n w_{ijk}$$

biçiminde tanımlanır.

3.2.1.3 Uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi

Parametre tahmini için uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemi kullanıldığında ise, olabilirlik denklemlerinde yer alan,

$$g_1(z) = \frac{v+1}{v+z^2} z \quad \text{ve} \quad g_2(z) = \frac{t_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)}{T_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)} \left(\frac{v+1}{v+z^2} \right)^{3/2} \quad (3.36)$$

fonksiyonlarının $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ civarında Taylor serisine açılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\beta_{1(j)} = \frac{(v+1)(v-t^2)}{(v+t^2)^2}, \quad \alpha_{1(j)} = \frac{(v+1)t}{(v+t^2)} - t\beta_{1(j)} \quad (3.37)$$

ve

$$c = \lambda t \sqrt{\frac{v+1}{v+t^2}} \quad (3.38)$$

olmak üzere,

$$\beta_{2(j)} = \left[\frac{\frac{t_{v+1}(c) T_{v+1}(c) \lambda^2 t (v+2) v}{(v+(1+\lambda)t^2)(v+t^2)} + \frac{v\sqrt{v+1} (t_{v+1}(c))^2}{(v+t^2)^{3/2}}}{(T_{v+1}(c))^2} \right] \left(\frac{v+1}{v+t^2} \right)^{3/2} + 3 \frac{t_{v+1}(c)}{T_{v+1}(c)} \frac{(v+1)^{3/2} t}{(v+t^2)^{5/2}}$$

ve

$$\alpha_{2(j)} = \frac{t_{v+1}(c)}{T_{v+1}(c)} \left(\frac{v+1}{v+t^2} \right)^{3/2} + t \beta_{2(j)} \quad (3.39)$$

şeklinde elde edilir. $g_i(.)$ fonksiyonları olabilirlik denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{1(k)} + \beta_{1(k)} z_{ij(k)}) - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{2(k)} - \beta_{2(k)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{1(k)} + \beta_{1(k)} z_{ij(k)}) - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{2(k)} - \beta_{2(k)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} &= \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n (\alpha_{1(k)} + \beta_{1(k)} z_{ij(k)}) - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n (\alpha_{2(k)} - \beta_{2(k)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha \beta_{ij}} &= \sum_{k=1}^n (\alpha_{1(k)} + \beta_{1(k)} z_{ij(k)}) - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{k=1}^n (\alpha_{2(k)} - \beta_{1(k)} z_{ij(k)}) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -N + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{1(k)} + \beta_{1(k)} z_{ij(k)}) z_{ij(k)} - \lambda \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\alpha_{2(k)} - \beta_{2(k)} z_{ij(k)}) z_{ij(k)} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

uyarlanmış olabilirlik denklemlerine ulaşılır. Denklem sistemlerinin analitik olarak çözülmesiyle MML tahmin edicileri

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{...} - \frac{\Delta}{m} \hat{\sigma} \quad ; \quad \hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{...} \quad , \quad \hat{\beta}_j = \hat{\mu}_{.j.} - \hat{\mu}_{...} \quad , \quad \hat{\alpha\beta}_{ij} = \hat{\mu}_{ij.} - \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{.j.} + \hat{\mu}_{...}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4NC}}{2\sqrt{N(N-a)}} \quad (3.41)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\alpha_{(k)} = \lambda \frac{v}{v+1} \alpha_{2(k)} - \alpha_{1(k)} \quad ; \quad \Delta = \sum_{k=1}^n \alpha_{(k)} \quad , \quad \beta_{(k)} = \beta_{1(k)} + \lambda \frac{v}{v+1} \beta_{2(k)} \quad , \quad m = \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} \quad ;$$

$$A = N \quad ; \quad B = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \alpha_{(k)} (y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.}) \quad ; \quad C = - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} (y_{ij(k)} - \hat{\mu}_{ij.})^2$$

$$\hat{\mu}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} y_{ij(k)}}{abm} \quad , \quad \hat{\mu}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} y_{ij(k)}}{bm} \quad , \quad \hat{\mu}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{k=1}^n \beta_{(k)} y_{ij(k)}}{am} \quad ,$$

$$\hat{\mu}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n \beta_{(k)} y_{ij(k)}}{m}$$

olarak verilir.

3.2.2 Monte Carlo simülasyon çalışması

Tahmin edicilerin, etkinliklerini karşılaştırmak için konum parametresi 0, ölçek parametresi 1 olan çarpık t dağılımından sayı üretilmiştir. ML tahmin edicileri için yine IRA kullanılmış ve başlangıç değerleri parametrelerin LS tahmin edicileri alınmıştır.

Çizelge 3.6, (3.1) modeli için hata terimlerinin dağılımının 3,5,7 ve 10 serbestlik dereceli çarpık t olması durumunda, $\mu_{ij}(\mu + \alpha_i + \beta_j)$ parametresi için, LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalamaları, varyansları, MSE değerleri ve (2.24)'te verildiği gibi RE değerlerini göstermektedir.

Çizelge 3.7, etkileşim etkisinin LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalamalarını, varyanslarını, MSE değerlerini ve RE değerlerini göstermektedir. Çizelge 3.8 ise σ parametresi için ortalama, varyans, MSE ve RE değerlerini göstermektedir.

Çizelge 3.6 μ_{ij} parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

$\nu = 3$											
	Ortalama			Varyans			MSE			RE	
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.003	0.003	0.005	0.527	0.345	0.410	0.527	0.345	0.410	65	78
4	0.012	0.006	0.007	0.407	0.250	0.287	0.406	0.250	0.287	62	71
5	0.023	0.019	0.022	0.333	0.185	0.202	0.333	0.186	0.203	56	61
$\lambda = 0.4$											
3	-0.234	-0.013	-0.024	0.500	0.258	0.342	0.554	0.295	0.342	53	62
4	-0.203	-0.001	0.003	0.407	0.208	0.260	0.448	0.208	0.259	47	58
5	-0.250	-0.003	-0.013	0.345	0.180	0.196	0.407	0.180	0.196	44	48
$\lambda = 0.7$											
3	-0.324	-0.048	-0.003	0.484	0.272	0.329	0.589	0.278	0.329	47	56
4	-0.311	-0.031	-0.005	0.407	0.191	0.218	0.503	0.192	0.218	38	43
5	-0.284	-0.010	-0.002	0.342	0.160	0.183	0.422	0.160	0.183	38	43
$\lambda = 1$											
3	-0.303	-0.050	0.032	0.515	0.239	0.316	0.607	0.241	0.316	40	52
4	-0.319	-0.017	0.015	0.393	0.173	0.203	0.494	0.173	0.203	35	41
5	-0.298	-0.015	0.016	0.284	0.121	0.146	0.373	0.121	0.146	32	39
$\nu = 5$											
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.018	0.008	0.023	0.334	0.279	0.310	0.334	0.282	0.311	84	93
4	-0.003	-0.003	-0.004	0.227	0.187	0.203	0.227	0.187	0.203	82	90
5	-0.011	-0.001	-0.008	0.185	0.147	0.166	0.185	0.147	0.166	79	89
$\lambda = 0.4$											
3	-0.087	-0.019	-0.005	0.293	0.249	0.268	0.301	0.249	0.268	83	90
4	-0.066	-0.001	0.012	0.211	0.173	0.193	0.215	0.173	0.193	81	90
5	-0.059	0.016	0.020	0.178	0.138	0.150	0.182	0.138	0.150	76	83
$\lambda = 0.7$											
3	-0.076	-0.027	0.034	0.261	0.220	0.232	0.267	0.221	0.233	83	87
4	-0.081	-0.011	0.025	0.198	0.162	0.173	0.204	0.162	0.173	79	85
5	-0.080	-0.006	0.022	0.150	0.118	0.123	0.156	0.118	0.123	76	79
$\lambda = 1$											
3	-0.051	-0.026	0.067	0.237	0.196	0.205	0.240	0.196	0.210	82	86
4	-0.061	-0.025	0.039	0.161	0.135	0.137	0.164	0.129	0.139	78	84
5	-0.067	-0.012	0.036	0.137	0.107	0.112	0.141	0.106	0.112	75	79

Çizelge 3.6-devam μ_{ij} parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

$\nu = 7$											
	Ortalama			Varyans			MSE			RE	
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\lambda = 0$											
3	-0.008	-0.006	-0.008	0.259	0.240	0.252	0.258	0.240	0.251	93	97
4	0.003	0.002	0.003	0.184	0.169	0.175	0.183	0.169	0.175	92	96
5	-0.001	-0.002	-0.001	0.154	0.132	0.141	0.154	0.132	0.141	86	92
$\lambda = 0.4$											
3	-0.025	0.002	0.022	0.227	0.214	0.221	0.227	0.214	0.222	94	97
4	-0.034	0.001	0.014	0.188	0.173	0.180	0.189	0.172	0.180	91	96
5	-0.047	-0.005	0.000	0.140	0.124	0.130	0.142	0.124	0.130	88	92
$\lambda = 0.7$											
3	-0.037	-0.034	0.028	0.209	0.190	0.198	0.210	0.194	0.199	93	95
4	-0.015	-0.003	0.044	0.168	0.157	0.161	0.168	0.157	0.159	92	95
5	-0.021	-0.010	0.033	0.130	0.120	0.123	0.130	0.119	0.124	91	95
$\lambda = 1$											
3	0.003	-0.028	0.068	0.203	0.186	0.190	0.202	0.186	0.194	93	96
4	-0.005	-0.016	0.056	0.153	0.141	0.143	0.153	0.142	0.146	92	96
5	0.021	0.012	0.073	0.121	0.109	0.110	0.122	0.109	0.115	90	95
$\nu = 10$											
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.000	-0.002	-0.001	0.239	0.231	0.236	0.238	0.231	0.235	97	99
4	0.012	0.011	0.011	0.183	0.175	0.180	0.183	0.175	0.180	96	98
5	0.009	0.007	0.008	0.139	0.134	0.136	0.139	0.134	0.136	96	98
$\lambda = 0.4$											
3	-0.023	-0.011	0.006	0.189	0.183	0.187	0.189	0.183	0.186	97	98
4	-0.017	-0.002	0.012	0.161	0.157	0.159	0.161	0.156	0.159	97	98
5	-0.012	0.004	0.015	0.124	0.119	0.121	0.124	0.119	0.121	96	98
$\lambda = 0.7$											
3	-0.006	-0.028	0.036	0.182	0.176	0.177	0.182	0.177	0.178	97	98
4	0.005	-0.005	0.044	0.144	0.140	0.138	0.144	0.140	0.140	97	97
5	-0.008	-0.017	0.026	0.104	0.100	0.099	0.104	0.100	0.100	96	96
$\lambda = 1$											
3	0.044	-0.017	0.083	0.176	0.172	0.171	0.178	0.172	0.174	97	98
4	0.041	-0.004	0.074	0.128	0.126	0.126	0.130	0.126	0.129	97	98
5	0.020	-0.021	0.048	0.108	0.103	0.104	0.108	0.104	0.105	96	97

Çizelge 3.7 $\alpha\beta_{ij}$ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

$\nu = 3$											
Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.009	-0.001	0.004	0.424	0.311	0.333	0.423	0.311	0.333	74	79
4	-0.008	-0.004	-0.006	0.335	0.228	0.232	0.335	0.228	0.232	68	69
5	-0.016	-0.009	-0.012	0.275	0.173	0.174	0.275	0.173	0.174	63	64
$\lambda = 0.4$											
3	0.002	-0.006	-0.006	0.377	0.250	0.299	0.376	0.250	0.299	66	79
4	-0.003	0.006	0.001	0.313	0.195	0.208	0.312	0.194	0.207	62	66
5	-0.014	-0.024	-0.026	0.237	0.139	0.147	0.237	0.139	0.147	59	62
$\lambda = 0.7$											
3	-0.013	-0.027	-0.021	0.453	0.287	0.322	0.453	0.288	0.323	64	71
4	0.004	0.000	0.006	0.281	0.163	0.181	0.281	0.163	0.181	58	64
5	-0.019	-0.002	-0.006	0.238	0.131	0.133	0.238	0.131	0.133	55	56
$\lambda = 1$											
3	-0.019	-0.018	-0.020	0.333	0.223	0.227	0.333	0.223	0.227	67	68
4	0.012	0.002	0.009	0.249	0.147	0.158	0.249	0.147	0.158	59	64
5	-0.001	0.000	-0.002	0.194	0.098	0.103	0.194	0.098	0.103	51	53
$\nu = 5$											
n	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.026	0.014	0.023	0.267	0.230	0.249	0.268	0.230	0.249	86	93
4	-0.009	-0.004	-0.007	0.174	0.150	0.161	0.174	0.150	0.161	86	93
5	-0.009	-0.006	-0.005	0.148	0.125	0.130	0.148	0.125	0.130	85	88
$\lambda = 0.4$											
3	0.006	0.008	0.008	0.243	0.211	0.226	0.243	0.211	0.226	86	93
4	0.009	0.010	0.010	0.161	0.137	0.150	0.161	0.137	0.150	85	93
5	-0.007	-0.005	-0.007	0.143	0.115	0.118	0.143	0.115	0.118	80	83
$\lambda = 0.7$											
3	0.010	0.016	0.010	0.223	0.186	0.196	0.223	0.186	0.196	83	88
4	0.010	0.011	0.010	0.196	0.163	0.168	0.196	0.162	0.168	83	86
5	0.016	0.017	0.014	0.120	0.100	0.104	0.120	0.100	0.104	83	86
$\lambda = 1$											
3	0.003	0.010	0.007	0.142	0.117	0.120	0.142	0.117	0.120	82	85
4	-0.021	-0.019	-0.018	0.147	0.120	0.126	0.147	0.120	0.126	81	84
5	-0.021	-0.019	-0.019	0.102	0.083	0.086	0.102	0.083	0.086	81	84

Çizelge 3.7-devam $\alpha\beta_{ij}$ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

$\nu = 7$											
	Ortalama			Varyans			MSE			RE	
n	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$
$\lambda = 0$											
3	-0.011	-0.011	-0.011	0.207	0.201	0.204	0.207	0.201	0.204	97	99
4	0.005	0.008	0.006	0.151	0.147	0.147	0.151	0.147	0.147	97	97
5	0.004	0.005	0.003	0.130	0.124	0.125	0.130	0.124	0.125	96	96
$\lambda = 0.4$											
3	-0.013	-0.010	-0.011	0.186	0.178	0.182	0.186	0.178	0.182	96	98
4	0.009	0.007	0.008	0.134	0.125	0.128	0.134	0.125	0.127	93	95
5	0.003	0.003	0.002	0.120	0.112	0.115	0.120	0.112	0.115	93	95
$\lambda = 0.7$											
3	-0.002	0.000	0.001	0.161	0.148	0.152	0.161	0.147	0.152	93	94
4	-0.008	-0.006	-0.005	0.126	0.117	0.120	0.126	0.117	0.120	92	94
5	-0.010	-0.008	-0.010	0.094	0.086	0.087	0.094	0.086	0.087	91	93
$\lambda = 1$											
3	0.000	0.001	0.001	0.153	0.140	0.144	0.153	0.142	0.144	93	95
4	-0.014	-0.013	-0.014	0.114	0.106	0.109	0.114	0.105	0.109	91	94
5	-0.021	-0.019	-0.019	0.087	0.079	0.080	0.088	0.079	0.080	90	91
$\nu = 10$											
n	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,LS}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$	$\alpha\beta_{ij,ML}$	$\alpha\beta_{ij,MML}$
$\lambda = 0$											
3	-0.021	-0.023	-0.022	0.186	0.184	0.183	0.186	0.184	0.184	99	99
4	-0.003	-0.002	-0.002	0.136	0.132	0.133	0.136	0.132	0.133	97	97
5	0.001	0.004	0.003	0.106	0.105	0.105	0.106	0.104	0.104	97	97
$\lambda = 0.4$											
3	0.009	0.009	0.010	0.162	0.158	0.159	0.162	0.159	0.159	99	99
4	0.005	0.004	0.004	0.120	0.118	0.118	0.119	0.117	0.117	98	98
5	0.009	0.016	0.013	0.098	0.096	0.096	0.098	0.095	0.095	97	97
$\lambda = 0.7$											
3	-0.010	-0.012	-0.011	0.144	0.141	0.141	0.144	0.141	0.141	98	98
4	-0.003	-0.002	-0.003	0.110	0.107	0.108	0.110	0.107	0.107	97	97
5	-0.020	-0.019	-0.018	0.088	0.083	0.085	0.088	0.084	0.085	95	97
$\lambda = 1$											
3	0.012	0.010	0.012	0.147	0.142	0.142	0.147	0.142	0.142	97	97
4	-0.011	-0.010	-0.010	0.097	0.093	0.092	0.097	0.093	0.092	96	96
5	-0.002	-0.004	-0.004	0.088	0.082	0.083	0.087	0.082	0.083	94	95

Çizelge 3.8 σ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

$\nu = 3$											
Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.915	1.160	1.359	0.149	0.076	0.268	0.987	1.423	1.954	144	198
4	0.917	1.113	1.232	0.112	0.044	0.104	0.953	1.282	1.621	135	170
5	0.946	1.089	1.166	0.101	0.035	0.050	0.995	1.222	1.408	123	142
$\lambda = 0.4$											
3	0.958	1.150	1.294	0.158	0.077	0.193	1.074	1.399	1.867	130	174
4	0.960	1.096	1.194	0.106	0.045	0.112	1.028	1.245	1.537	121	150
5	0.968	1.068	1.164	0.105	0.032	0.107	1.041	1.174	1.462	113	140
$\lambda = 0.7$											
3	0.956	1.125	1.205	0.163	0.068	0.142	1.077	1.333	1.595	124	148
4	0.942	1.054	1.138	0.111	0.043	0.106	0.997	1.154	1.402	116	141
5	0.951	1.031	1.105	0.110	0.032	0.104	1.014	1.095	1.324	108	131
$\lambda = 1$											
3	0.922	1.089	1.136	0.156	0.067	0.123	1.006	1.252	1.413	124	140
4	0.935	1.022	1.092	0.160	0.038	0.136	1.034	1.081	1.328	105	128
5	0.956	0.999	1.082	0.229	0.028	0.177	1.142	1.095	1.348	96	118
$\nu = 5$											
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.976	1.097	1.194	0.054	0.051	0.077	1.006	1.255	1.504	125	150
4	0.968	1.060	1.141	0.036	0.030	0.045	0.972	1.153	1.345	119	138
5	0.981	1.060	1.128	0.030	0.023	0.034	0.991	1.147	1.307	116	132
$\lambda = 0.4$											
3	0.989	1.087	1.097	0.062	0.053	0.058	1.039	1.235	1.262	119	121
4	0.999	1.011	1.023	0.037	0.031	0.035	1.072	1.053	1.081	98	101
5	1.010	1.001	1.002	0.035	0.021	0.028	1.039	1.022	1.033	98	99
$\lambda = 0.7$											
3	1.005	1.008	1.078	0.067	0.055	0.062	1.076	1.071	1.223	100	114
4	1.078	1.081	1.070	0.062	0.036	0.062	1.223	1.204	1.206	98	99
5	1.013	1.005	1.005	0.035	0.026	0.029	1.062	1.037	1.039	98	98
$\lambda = 1$											
3	1.030	1.037	1.036	0.068	0.053	0.059	1.129	1.128	1.132	100	100
4	1.025	1.015	1.013	0.045	0.037	0.035	1.095	1.067	1.062	97	97
5	1.030	1.002	1.002	0.038	0.028	0.026	1.098	1.031	1.030	94	94

Çizelge 3.8-devam σ parametresi için LS, ML ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

$v = 7$											
Ortalama			Varyans			MSE			RE		
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\lambda = 0$											
3	0.981	1.074	1.128	0.044	0.046	0.057	1.007	1.199	1.330	119	132
4	0.980	1.052	1.098	0.030	0.030	0.036	0.991	1.137	1.242	115	125
5	0.991	1.043	1.093	0.025	0.020	0.028	1.008	1.108	1.222	110	121
$\lambda = 0.4$											
3	1.003	1.002	1.010	0.044	0.046	0.050	1.050	1.051	1.069	100	102
4	1.016	1.003	1.001	0.031	0.028	0.032	1.064	1.035	1.037	97	98
5	1.022	1.007	1.010	0.026	0.022	0.025	1.069	1.036	1.045	97	98
$\lambda = 0.7$											
3	1.069	1.001	1.027	0.055	0.053	0.048	1.197	1.056	1.102	88	92
4	1.070	1.003	1.008	0.038	0.032	0.031	1.183	1.039	1.047	88	89
5	1.074	1.000	0.999	0.027	0.022	0.021	1.181	1.022	1.019	87	86
$\lambda = 1$											
3	1.109	1.004	1.098	0.052	0.039	0.038	1.282	1.048	1.243	82	97
4	1.126	1.016	1.020	0.042	0.028	0.028	1.310	1.059	1.068	81	82
5	1.138	1.008	1.010	0.032	0.021	0.021	1.327	1.036	1.041	78	78
$v = 10$											
n	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
$\lambda = 0$											
3	1.010	1.041	1.072	0.036	0.039	0.043	1.056	1.122	1.194	106	113
4	1.010	1.038	1.073	0.026	0.026	0.030	1.046	1.104	1.180	106	113
5	1.020	1.023	1.056	0.017	0.018	0.020	1.058	1.065	1.135	101	107
$\lambda = 0.4$											
3	1.034	1.040	1.041	0.037	0.037	0.038	1.106	1.119	1.120	101	101
4	1.034	1.023	1.026	0.026	0.023	0.024	1.095	1.070	1.077	98	98
5	1.039	1.015	1.021	0.022	0.019	0.020	1.101	1.050	1.062	95	96
$\lambda = 0.7$											
3	1.135	1.101	1.107	0.046	0.041	0.043	1.333	1.253	1.268	94	95
4	1.153	1.078	1.097	0.035	0.028	0.027	1.365	1.191	1.232	87	90
5	1.156	1.061	1.068	0.025	0.020	0.020	1.362	1.146	1.159	84	85
$\lambda = 1$											
3	1.264	1.144	1.194	0.059	0.046	0.032	1.657	1.355	1.458	82	88
4	1.258	1.087	1.093	0.039	0.026	0.020	1.621	1.208	1.214	75	75
5	1.269	1.073	1.093	0.032	0.021	0.016	1.643	1.172	1.210	71	74

Çizelge 3.6’da görüldüğü gibi hata terimlerinin çarpık t dağılması durumunda μ_{ij} parametresi için, iki yönlü varyans analizinde bulunan sonuçlar bir yönlü varyans

analizinde bulunan sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Bir başka deyişle, küçük serbestlik dereceleri için ML ve MML yöntemleriyle bulunan tahmin edicilerin etkinlikleri LS yöntemiyle bulunan tahmin edicilerin etkinliklerinden oldukça yüksektir. Serbestlik derecesi arttıkça dağılım çarpık normal dağılıma yakınsadığından, çarpık normal dağılım için bulunan sonuçlara denk sonuçlar bulunmuştur. Benzer yorumlar $\alpha\beta_{ij}$ ve σ parametresi için de söylenebilir. Yani, bulunan sonuçlar bir yönlü varyans analizinde bulunan sonuçlarla benzerlik göstermektedir.

3.2.3 Hipotez testi

İki yönlü varyans analizi için, Bölüm 3.1.3’de anlatıldığı gibi denemeler için (3.22) test istatistiği, bloklar için (3.23) test istatistiği, etkileşim etkisinin anlamlılığı için ise (3.24) test istatistiği kullanılmaktadır.

ML tahmin edicileri için, F test istatistikleri,

$$k = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk}}{N - \lambda^2 \left(\frac{v}{v+1} \right)^2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n w_{ijk} \bar{g}_{ij}^2} \quad (3.42)$$

olmak üzere hipotezler için sırasıyla,

$$F_{ML,deneme} = \frac{bn \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i,ML}^2}{(a-1)k \hat{\sigma}_{ML}^2} \quad (3.43)$$

$$F_{ML,blok} = \frac{an \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_{j,ML}^2}{(b-1)k \hat{\sigma}_{ML}^2} \quad (3.44)$$

$$F_{ML, etkilesim} = \frac{n \sum_{i=1}^a \hat{\alpha} \hat{\beta}_{ij, ML}^2}{(a-1)(b-1)k \hat{\sigma}_{ML}^2} \quad (3.45)$$

şeklinde önerilir. Benzer şekilde MML tahmin edicilerinin asimptotik olarak normal dağılması özelliğinden, MML tahmin edicileri elde edilmiş F test istatistikleri sırasıyla,

$$F_{MML, deneme} = \frac{bm \sum_{i=1}^a \hat{\alpha}_{i, MML}^2}{(a-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (3.46)$$

$$F_{MML, blok} = \frac{am \sum_{j=1}^b \hat{\beta}_{j, MML}^2}{(b-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (3.47)$$

$$F_{MML, etkilesim} = \frac{m \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\alpha} \hat{\beta}_{ij, MML}}{(a-1)(b-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (3.48)$$

biçiminde önerilmiştir.

Çizelge 3.9, test istatistiklerinin (2.31) eşitliğinde verilen olasılıklar yardımıyla bulunan I. tip hatalarını göstermektedir. Büyük örneklem büyüklükleri için, önerilen test istatistiklerinin dağılımı asimptotik olarak F dağılımdır. Ancak, çizelgeden de görüleceği gibi denemeler, bloklar ve etkileşim için bulunan test istatistiklerinin I. tip hataları 0.050 civarındadır. Yani, küçük deney birimleri için önerilen test istatistiklerinin dağılımları F dağılımıdır.

Çizelge 3.9 LS, ML ve MML yöntemleriyle elde edilmiş F_{deneme} , F_{blok} ve $F_{etkileşim}$ için I. tip hatalar

$$a = 3, b = 3, n = 5, \alpha = 0.050.$$

Deneme												
	$\lambda = 0$			$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
V	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
3	0.049	0.055	0.043	0.044	0.059	0.043	0.042	0.048	0.044	0.040	0.043	0.047
5	0.052	0.057	0.048	0.046	0.059	0.046	0.043	0.047	0.048	0.042	0.049	0.042
7	0.055	0.050	0.055	0.052	0.057	0.045	0.045	0.048	0.042	0.049	0.048	0.044
10	0.054	0.053	0.049	0.048	0.055	0.050	0.044	0.050	0.046	0.045	0.047	0.049
Blok												
	$\lambda = 0$			$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
V	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
3	0.046	0.054	0.047	0.044	0.058	0.049	0.045	0.049	0.047	0.046	0.045	0.046
5	0.042	0.056	0.048	0.049	0.058	0.048	0.044	0.050	0.048	0.044	0.047	0.045
7	0.053	0.054	0.050	0.057	0.059	0.048	0.043	0.048	0.046	0.042	0.048	0.043
10	0.052	0.055	0.048	0.047	0.055	0.049	0.044	0.052	0.048	0.050	0.046	0.048
Etkileşim												
V	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
3	0.049	0.051	0.047	0.046	0.055	0.047	0.049	0.051	0.046	0.040	0.049	0.046
5	0.051	0.054	0.046	0.047	0.052	0.046	0.045	0.052	0.047	0.042	0.049	0.046
7	0.052	0.053	0.044	0.049	0.051	0.046	0.048	0.048	0.045	0.049	0.048	0.046
10	0.053	0.052	0.043	0.047	0.055	0.050	0.043	0.053	0.046	0.045	0.047	0.049

Son olarak (2.32) eşitliğinde verilen olasılıklar yardımıyla hesaplanan güçler hesaplanmıştır. Çizelge 3.10 denemeler arasında farklılığı sınamak için kullanılan F test istatistiğinin güçlerini, çizelge 3.11 bloklar arasında farklılığı sınamak için kullanılan F test istatistiğinin güçlerini, çizelge 3.12 ise etkileşim etkisinin anlamlılığını test etmek için kullanılan F test istatistiğinin güçlerini göstermektedir.

Çizelge 3.10 Denemeler için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ; $a = 3, b = 3, n = 5$.

$\lambda = 0$				$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
v=3												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.050	0.051	0.053	0.051	0.050	0.049	0.051	0.049	0.050	0.045	0.044	0.047
0.1	0.14	0.14	0.14	0.13	0.14	0.14	0.12	0.15	0.14	0.11	0.12	0.12
0.2	0.33	0.36	0.35	0.32	0.35	0.34	0.36	0.39	0.37	0.21	0.33	0.26
0.3	0.66	0.70	0.69	0.65	0.69	0.68	0.62	0.66	0.64	0.53	0.68	0.63
0.4	0.79	0.85	0.84	0.88	0.78	0.83	0.87	0.93	0.91	0.78	0.84	0.83
0.5	0.98	0.98	0.98	0.96	0.98	0.97	0.92	0.99	0.94	0.88	0.96	0.92
0.6	0.99	0.99	0.99	0.98	0.99	0.99	0.95	0.99	0.97	0.95	0.97	0.96
v=5												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.044	0.046	0.045	0.043	0.046	0.044	0.051	0.052	0.054	0.044	0.046	0.045
0.1	0.12	0.14	0.13	0.11	0.14	0.13	0.12	0.14	0.13	0.09	0.11	0.10
0.2	0.25	0.28	0.26	0.24	0.27	0.25	0.20	0.23	0.21	0.18	0.21	0.19
0.3	0.48	0.51	0.50	0.47	0.50	0.49	0.41	0.46	0.44	0.32	0.37	0.35
0.4	0.71	0.75	0.74	0.70	0.74	0.73	0.62	0.68	0.66	0.58	0.65	0.64
0.5	0.90	0.94	0.92	0.89	0.93	0.91	0.74	0.82	0.81	0.71	0.79	0.76
0.6	0.97	0.98	0.97	0.96	0.98	0.96	0.92	0.96	0.93	0.87	0.94	0.83
v=7												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.050	0.053	0.054	0.042	0.044	0.043	0.048	0.051	0.049	0.050	0.052	0.049
0.1	0.12	0.14	0.13	0.11	0.14	0.13	0.12	0.13	0.11	0.10	0.11	0.10
0.2	0.24	0.25	0.25	0.23	0.24	0.24	0.24	0.26	0.25	0.19	0.26	0.21
0.3	0.46	0.48	0.47	0.45	0.47	0.46	0.34	0.39	0.38	0.35	0.39	0.37
0.4	0.68	0.70	0.69	0.67	0.69	0.68	0.55	0.59	0.58	0.61	0.68	0.66
0.5	0.89	0.89	0.90	0.86	0.88	0.89	0.73	0.81	0.79	0.74	0.80	0.78
0.6	0.96	0.98	0.97	0.95	0.97	0.96	0.92	0.95	0.94	0.91	0.93	0.92
v=10												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.045	0.046	0.047	0.045	0.046	0.044	0.044	0.046	0.044	0.055	0.056	0.054
0.1	0.12	0.12	0.12	0.11	0.11	0.11	0.10	0.11	0.11	0.09	0.09	0.09
0.2	0.24	0.25	0.25	0.23	0.25	0.24	0.22	0.24	0.23	0.19	0.20	0.20
0.3	0.48	0.51	0.50	0.47	0.48	0.49	0.39	0.45	0.43	0.37	0.41	0.38
0.4	0.75	0.75	0.74	0.71	0.74	0.73	0.66	0.68	0.67	0.59	0.62	0.62
0.5	0.89	0.92	0.91	0.88	0.91	0.90	0.84	0.86	0.85	0.79	0.83	0.81
0.6	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.95	0.96	0.96	0.92	0.94	0.93

Çizelge 3.11 Bloklar için F_{LS}, F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ; $a = 3, b = 3, n = 5$.

$\lambda = 0$				$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
v=3												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.049	0.050	0.054	0.052	0.049	0.050	0.052	0.048	0.051	0.046	0.043	0.048
0.1	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13	0.14	0.18	0.19	0.14	0.19	0.19
0.2	0.43	0.47	0.46	0.43	0.50	0.49	0.43	0.56	0.58	0.44	0.59	0.58
0.3	0.75	0.80	0.79	0.73	0.82	0.81	0.73	0.75	0.76	0.72	0.80	0.79
0.4	0.91	0.95	0.93	0.88	0.94	0.94	0.90	0.96	0.96	0.89	0.94	0.93
0.5	0.98	0.98	0.98	0.96	0.98	0.97	0.96	0.99	0.98	0.96	0.99	0.98
0.6	0.99	0.99	0.99	0.98	0.99	0.99	0.97	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
v=5												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.045	0.047	0.046	0.044	0.045	0.045	0.052	0.051	0.055	0.045	0.045	0.046
0.1	0.09	0.12	0.11	0.10	0.11	0.11	0.09	0.10	0.10	0.09	0.11	0.10
0.2	0.35	0.37	0.35	0.22	0.29	0.30	0.27	0.28	0.28	0.29	0.31	0.30
0.3	0.71	0.76	0.71	0.51	0.57	0.55	0.55	0.57	0.57	0.56	0.57	0.57
0.4	0.89	0.93	0.91	0.81	0.82	0.83	0.79	0.80	0.80	0.78	0.80	0.80
0.5	0.97	0.99	0.97	0.93	0.96	0.95	0.92	0.95	0.93	0.91	0.94	0.93
0.6	0.98	0.99	0.98	0.97	0.99	0.98	0.96	0.99	0.97	0.95	0.98	0.97
v=7												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.049	0.052	0.055	0.043	0.043	0.044	0.049	0.050	0.050	0.051	0.051	0.050
0.1	0.10	0.13	0.12	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09	0.09
0.2	0.31	0.32	0.34	0.24	0.27	0.27	0.22	0.26	0.26	0.21	0.27	0.25
0.3	0.68	0.70	0.69	0.50	0.55	0.55	0.37	0.42	0.46	0.38	0.42	0.41
0.4	0.89	0.90	0.90	0.74	0.79	0.78	0.57	0.69	0.69	0.59	0.68	0.66
0.5	0.98	0.99	0.98	0.88	0.92	0.92	0.76	0.84	0.85	0.77	0.85	0.85
0.6	0.99	0.99	0.99	0.97	0.98	0.98	0.92	0.95	0.94	0.93	0.97	0.97
v=10												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.046	0.047	0.048	0.046	0.045	0.045	0.045	0.045	0.045	0.056	0.055	0.055
0.1	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09	0.08	0.08	0.09	0.09
0.2	0.24	0.24	0.24	0.22	0.22	0.22	0.20	0.21	0.20	0.21	0.24	0.24
0.3	0.48	0.48	0.48	0.46	0.46	0.46	0.44	0.45	0.45	0.42	0.44	0.45
0.4	0.72	0.72	0.72	0.70	0.78	0.78	0.71	0.75	0.76	0.70	0.74	0.75
0.5	0.90	0.90	0.90	0.89	0.89	0.89	0.89	0.92	0.92	0.88	0.92	0.91
0.6	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.95	0.96	0.96	0.94	0.96	0.95

Çizelge 3.12 Etkileşim için F_{LS} , F_{ML} ve F_{MML} test istatistiklerinin gücü ; $a=3, b=3, n=5$.

$\lambda = 0$				$\lambda = 0.4$			$\lambda = 0.7$			$\lambda = 1$		
v=3												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.049	0.052	0.052	0.050	0.051	0.048	0.050	0.050	0.049	0.044	0.045	0.043
0.1	0.10	0.15	0.10	0.11	0.12	0.11	0.12	0.14	0.14	0.11	0.12	0.12
0.2	0.34	0.45	0.35	0.33	0.37	0.34	0.36	0.39	0.37	0.21	0.33	0.26
0.3	0.65	0.80	0.67	0.65	0.66	0.77	0.67	0.66	0.64	0.53	0.68	0.63
0.4	0.87	0.92	0.88	0.86	0.94	0.88	0.87	0.92	0.90	0.86	0.90	0.88
0.5	0.98	0.98	0.98	0.96	0.98	0.97	0.92	0.99	0.94	0.88	0.96	0.92
0.6	0.99	0.99	0.99	0.98	0.99	0.99	0.95	0.99	0.97	0.95	0.97	0.96
v=5												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.043	0.047	0.044	0.042	0.047	0.043	0.050	0.053	0.053	0.043	0.047	0.044
0.1	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09	0.08	0.09	0.09	0.09	0.10	0.10
0.2	0.25	0.28	0.26	0.19	0.21	0.22	0.17	0.21	0.21	0.16	0.21	0.20
0.3	0.53	0.59	0.55	0.40	0.47	0.47	0.43	0.44	0.44	0.42	0.47	0.35
0.4	0.79	0.86	0.82	0.65	0.70	0.70	0.64	0.69	0.68	0.64	0.68	0.66
0.5	0.94	0.97	0.94	0.86	0.89	0.90	0.90	0.94	0.94	0.89	0.91	0.90
0.6	0.97	0.98	0.97	0.96	0.98	0.96	0.93	0.96	0.96	0.87	0.94	0.83
v=7												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.049	0.054	0.053	0.041	0.045	0.042	0.047	0.052	0.048	0.049	0.053	0.048
0.1	0.10	0.11	0.10	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09	0.09
0.2	0.23	0.24	0.24	0.22	0.23	0.23	0.20	0.22	0.21	0.20	0.27	0.22
0.3	0.46	0.48	0.48	0.44	0.46	0.46	0.33	0.37	0.37	0.33	0.39	0.37
0.4	0.68	0.72	0.70	0.66	0.69	0.67	0.52	0.60	0.59	0.59	0.67	0.64
0.5	0.86	0.90	0.90	0.85	0.88	0.89	0.72	0.80	0.78	0.75	0.86	0.78
0.6	0.96	0.98	0.97	0.95	0.97	0.96	0.92	0.95	0.94	0.91	0.93	0.92
v=10												
d	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}	F_{LS}	F_{ML}	F_{MML}
0	0.044	0.047	0.046	0.044	0.047	0.043	0.043	0.047	0.043	0.054	0.057	0.053
0.1	0.09	0.09	0.09	0.08	0.08	0.08	0.10	0.11	0.11	0.09	0.09	0.09
0.2	0.26	0.27	0.27	0.22	0.24	0.24	0.22	0.24	0.23	0.19	0.20	0.20
0.3	0.52	0.55	0.55	0.37	0.45	0.45	0.39	0.45	0.44	0.37	0.40	0.38
0.4	0.82	0.83	0.83	0.71	0.74	0.73	0.66	0.68	0.67	0.59	0.63	0.62
0.5	0.95	0.96	0.96	0.88	0.91	0.90	0.84	0.86	0.85	0.79	0.83	0.81
0.6	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.97	0.95	0.96	0.96	0.92	0.94	0.93

Çizelge 3.10'a göre, ML ve MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiğinin gücü LS tahmin edicilerine dayanan F test istatistiğinin gücünden fazladır. Bu fark en fazla serbestlik derecesi 3 iken görülmektedir. Serbestlik derecesi arttıkça, dağılım çarpık normale yakınsayacağından, güçler arası farklılık azalmakla beraber, çarpık normal

dağılımda bulunan güçlerle tutarlı hale gelmektedir. Çizelge 3.11-3.12’de de Çizelge 3.10’da bulunan sonuçların benzerleri gözlenmektedir.

4. II. TİP SANSÜRLENMİŞ VERİLER İÇİN BİR YÖNLÜ VARYANS ANALİZİ

Gözlemlerin bir takım nedenlerden dolayı tam olarak gözlenememesi veya kısmen elde edilmesi sansürlü verilerin elde edilmesine sebep olur. Deney tasarımı modellerinde ise sansürleme bazı pratik durumlarda ortaya çıkmaktadır. Örneğin hava veya su kirliliği çalışmalarında, bazı zorunluluklar sebebiyle gözlemler kısıtlıdır II. tip sansürleme önceden belirlenmiş sayıdaki en büyük ve en küçük gözlemlerin sansürlenmesidir.

ANOVA modelleri için i . denemede en küçük r_{1i} gözlem ve en büyük r_{2i} gözlem deney kısıtları yüzünden gözlenemeyebilir. Bu sebeple, i . denemedeki gözlenemeyen en küçük r_{1i} veriyi ve en büyük r_{2i} veri sansürlenir. Sansürlemeden sonra her bir denemede (gözlem sayılarını eşit varsayarsak) $n - r_{1i} - r_{2i}$ gözlem kalacaktır. a denemeye sahip bir yönlü varyans analizi için sansürlenmemiş veri yapısı

1.deneme	$Y_{1(1)}$	$Y_{1(2)}$	$\dots$	$Y_{1(n-1)}$	$Y_{1(n)}$
2.deneme	$Y_{2(1)}$	$Y_{2(2)}$	$\dots$	$Y_{2(n-1)}$	$Y_{2(n)}$
$\dots$					
a . deneme	$Y_{a(1)}$	$Y_{a(2)}$	$\dots$	$Y_{a(n-1)}$	$Y_{a(n)}$

olsun. Her bir deneme içerisinde r_{1i} ve r_{2i} belirledikten sonra, bir yönlü varyans analizi için kullanılacak olabilirlik fonksiyonu,

$$L(z_{ij}, \mu, \alpha_i, \sigma) = c \prod_{i=1}^a \prod_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} f(z_{ij}) \prod_{i=1}^a [F(z_{ij})]^{r_{1i}} \prod_{i=1}^a [1-F(z_{ij})]^{r_{2i}} \quad (4.2)$$

şeklinde elde edilir. Burada f , olasılık yoğunluk fonksiyonunu, F ise dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

4.1 Hata Terimlerinin Çarpık Normal Olması Durumunda Sansürlü Verilerde Tek Yönlü Varyans Analizi

Bu bölümde hata terimlerinin dağılımının çarpık normal olması durumunda II. tip sansürlenmiş veriler için bir yönlü varyans analizi ele alınmıştır. Buna göre, a denemeye sahip bir yönlü varyans analizi için r_{1i} i . denemedeki soldan sansürlemeyi, r_{2i} i . denemedeki sağdan sansürlemeyi göstermek üzere, (4.2)'de f yerine çarpık normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu, F yerine çarpık normal dağılımın dağılım fonksiyonu yazılırsa, olabilirlik fonksiyonu,

$$L(z_{ij}, \theta) = c \prod_{i=1}^a \prod_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \frac{2}{\sigma} \phi(z_{ij}) \Phi(\lambda z_{ij}) \prod_{i=1}^a [\Phi(z_{ij}) - 2T(z_{ij}; \lambda)]^{r_{1i}} \prod_{i=1}^a [1 - (\Phi(z_{ij}) - 2T(z_{ij}; \lambda))]^{r_{2i}} \quad (4.3)$$

şeklinde elde edilir. (4.3)'te $T(x; \lambda)$, Owen fonksiyonu olarak bilinmektedir. Owen fonksiyonu, sınırları $x = h, y = 0, y = ax$ olan iki değişkenli normal dağılımın altında kalan alandır. Buna göre Owen fonksiyonu,

$$T(x, \lambda) = \int_0^\infty \int_x^{\lambda s} \phi(s) \phi(t) dt ds \quad (4.4)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned} \ln L = & \left(\sum_{i=1}^a (n - r_{1i} - r_{2i}) \right) \ln \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} z_{ij}^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \ln \Phi(\lambda z_{ij}) \\ & + \sum_{i=1}^a r_{1i} \ln (\Phi(z_{ij}) - 2T(z_{ij}; \lambda)) + \sum_{i=1}^a r_{2i} \ln (1 - (\Phi(z_{ij}) - 2T(z_{ij}; \lambda))) \end{aligned} \quad (4.5)$$

log-olabilirlik fonksiyonu elde edilir. Burada, $z_{ij} = \frac{y_{ij} - \mu - \alpha_i}{\sigma}$ şeklinde tanımlanır.

Log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} z_{ij} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g(z_{ij}) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} g_1(z) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} g_2(z) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} z_{ij} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g(z_{ij}) - \frac{1}{\sigma} r_{1i} g_1(z) + \frac{1}{\sigma} r_{2i} g_2(z) = 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{\sum_{i=1}^a n - r_{1i} - r_{2i}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} z_{ij}^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g(z_{ij}) z_{ij} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} g_1(z) z \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} g_2(z) z = 0\end{aligned}$$

olabilirlik denklemleri elde edilir. Burada,

$$g(z) = \frac{\phi(\lambda z)}{\Phi(\lambda z)}, \quad g_1(z) = \frac{\frac{2}{\sigma} \phi(z_{ij}) \Phi(\lambda z_{ij})}{\Phi(z_{ij}) - 2T(z_{ij}; \lambda)}, \quad g_2(z) = \frac{\frac{2}{\sigma} \phi(z_{ij}) \Phi(\lambda z_{ij})}{1 - (\Phi(z_{ij}) - 2T(z_{ij}; \lambda))}$$

şeklindedir.

Söz konusu eşitliklerin yeniden düzenlenmesiyle elde edilen tahmin ediciler ML tahmin edicileridir. Ancak, eşitliklerin açık çözümleri yoktur ve iteratif yöntemlerle çözmek olabilirlik denklemlerinde $a+1$ adet lineer olmayan ifadenin olmasından dolayı zordur. Bu bölümde diğer bölümlerden farklı olarak MML tahmin edicileri incelenmiştir.

Buna göre her bir deneme içindeki deney birimleri,

$$y_{i(r_{1i}+1)} \leq y_{i(r_{1i}+2)} \leq \dots \leq y_{i(n-r_{2i})}; i = 1, 2, \dots, a \quad (4.7)$$

şeklinde sıralanır. Daha sonra olabilirlik denklerimde yer alan doğrusal olmayan ifadeler $t_{(j)} = E(z_{i(j)})$ etrafında Taylor serisinin ilk iki terimi kullanılarak doğrusallaştırılır. Daha önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi fonksiyonlar,

$$g(z_{i(j)}) = \alpha_{ij} - \gamma_{ij} z_{i(j)} \quad j = r_{1i} + 1, \dots, n - r_{2i},$$

$$g_1(z_{i(r_{1i}+1)}) \cong \alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}$$

ve

$$g_2(z_{i(n-r_{2i})}) \cong \alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})} \quad (4.8)$$

şeklinde doğrusallaştırılır. Burada,

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{\phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \left[1 + t_{(j)} \left(\frac{\lambda^2 t_{(j)} \Phi(\lambda t_{(j)}) + \lambda \phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \right) \right] \\ \gamma_{ij} &= \frac{\phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \left(\frac{\lambda^2 t_{(j)} \Phi(\lambda t_{(j)}) + \lambda \phi(\lambda t_{(j)})}{\Phi(\lambda t_{(j)})} \right), \quad \beta_{ij} = 1 + \gamma_{ij} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ve

$$\alpha_{i(r_{1i}+1)} = \frac{f(t_{1i})}{q_{1i}} + t_{1i} \beta_{1i}, \quad \beta_{1i} = - \left[\frac{f'(t_{1i})}{q_{1i}} - \frac{(f(t_{1i}))^2}{q_{1i}^2} \right], \quad q_{1i} = \frac{r_{1i}}{(n+1)}, \quad (4.10)$$

$$\alpha_{i(n-r_{2i})} = \frac{f(t_{2i})}{q_{2i}} - t_{2i} \beta_{2i}, \quad \beta_{2i} = \frac{f'(t_{2i})}{q_{2i}} + \frac{(f(t_{2i}))^2}{q_{2i}^2}, \quad q_{2i} = 1 - \frac{r_{2i}}{(n+1)} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanır.

(4.9)-(4.11) eşitlikleri (4.6)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} z_{ij} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \alpha_{ij} - \gamma_{ij} z_{i(j)} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} (\alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} (\alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})}) = 0 \\
\frac{\partial \ln L^*}{\partial \alpha_i} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} z_{ij} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \alpha_{ij} - \gamma_{ij} z_{i(j)} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma} r_{1i} (\alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}) + \frac{1}{\sigma} r_{2i} (\alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})}) = 0 \\
\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} &= - \frac{\sum_{i=1}^a n - r_{1i} - r_{2i}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} z_{ij}^2 - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} (\alpha_{ij} - \gamma_{ij} z_{i(j)}) z_{ij} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} (\alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}) z_{i(r_{1i}+1)} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} (\alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})}) z_{i(n-r_{2i})} = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. (4.12) denklem sisteminin çözülmesiyle, MML tahmin edicileri,

$$\begin{aligned}
\hat{\mu} &= M + \Delta \hat{\sigma}, \quad \hat{\alpha}_i = (M_i - M) - (\Delta_i - \Delta) \hat{\sigma} \\
\hat{\sigma} &= \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\sqrt{A(A-a)}}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
M_i &= \left\{ \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \beta_{ij} y_{i(j)} - r_{1i} \beta_{i(r_{1i}+1)} y_{i(r_{1i}+1)} + r_{2i} \beta_{i(n-r_{2i})} y_{i(n-r_{2i})} \right\} / m_i, \quad M = \sum_{i=1}^a m_i M_i / m \\
\Delta_i &= \left\{ -\lambda \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \alpha_{ij} - r_{1i} \alpha_{i(r_{1i}+1)} + r_{2i} \alpha_{i(n-r_{2i})} \right\} / m_i, \quad \Delta = \sum_{i=1}^a m_i \Delta_i / m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_i &= \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \beta_{ij} - r_{1i} \beta_{i(r_{1i}+1)} + r_{2i} \beta_{i(n-r_{2i})}, \quad m = \sum_{i=1}^a m_i \\
A &= \sum_{i=1}^a (n - r_{1i} - r_{2i}) \\
B &= \lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \alpha_{ij} (y_{i(j)} - M_i) + \sum_{i=1}^a r_{1i} \alpha_{i(r_{1i}+1)} (y_{i(r_{1i}+1)} - M_i) - \sum_{i=1}^a r_{2i} \alpha_{i(n-r_{2i})} (y_{i(n-r_{2i})} - M_i) \\
C &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \beta_{ij} (y_{i(j)} - M_i)^2 - \sum_{i=1}^a r_{1i} \beta_{i(r_{1i}+1)} (y_{i(r_{1i}+1)} - M_i)^2 + \sum_{i=1}^a r_{2i} \beta_{i(n-r_{2i})} (y_{i(n-r_{2i})} - M_i)^2
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $r_{1i} = r_{2i} = 0$ ($1 \leq i \leq a$) alınırsa, tahmin ediciler Bölüm 2.1.1.3'de bulunan tahmin edicilerle aynı olacaktır. Çizelge 4.1-4.2'de değişik deney birimi büyüklükleri, değişik çarpıklık parametreleri ve değişik sansürlenme oranları ile tahmin edicilerin ortalama değerleri, varyansları, MSE değerleri ve RE değerleri verilmiştir. Ancak, Bölüm 2.1.1.1'de anlatıldığı gibi LS tahmin edicileri için düzeltme yapmak gerekmektedir. Buna göre,

$$E(Y) = \mu + \sigma E(\varepsilon) \quad (4.14)$$

olmak üzere, hata terimlerinin teorik olarak bulunan beklenen değerine ihtiyaç duyulacaktır. Simülasyonda, ilk r_{1i} veriyi gözlem setinden sansürlemeye karşılık sıra istatistiğinin beklenen değerinden budamak (truncated) aynı anlama gelmektedir. Bir başka deyişle, yeni oluşan dağılım t_1 ile t_2 arasında budanmış dağılıma dönüşmektedir. Bu sebeple, sansürlenmiş veriler için budanmış çarpık normal dağılımın beklenen değeri ve varyansı gerekmektedir. Yan düzeltmesi yapmak için $E(X | t_1 < X < t_2)$ ve $Var(X | t_1 < X < t_2)$ ifadelerini teorik olarak ifade etmek gereklidir.

Lemma 4.1: Z standart normal dağılıma sahip rasgele değişken olmak üzere, $m_r(a, b) = E(Z^r | a < Z < b)$ a ile b arasında budanmış Z rasgele değişkeninin r . momentini göstermek üzere,

$$m_{2k}(a, b) = (2k-1)!! \left(1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)!!} \frac{[z^{2i-1}\phi(z)]_a^b}{[\Phi(z)]_a^b} \right) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$m_{2k+1}(a, b) = - \left(\sum_{i=0}^k \frac{(2k)!!}{(2i)!!} \frac{[z^{2i}\phi(z)]_a^b}{[\Phi(z)]_a^b} \right) \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.14)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada

$$n!! = \begin{cases} 1, & n = -1, 0, 1 \\ n(n-2)!!, & n \geq 2 \end{cases} \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Arfken 1985).

Lemma 4.1'den hareketle (u, v) aralığında budanmış çarpık normal dağılıma sahip bir rasgele değişkeninin momentleri,

$$s_{\lambda, 2p}(u, v) = (2p-1)!! + \sum_{k=1}^p \frac{(2p-1)!!}{(2k-1)!!} r_{\lambda, 2k}(u, v) \quad p = 1, 2, \dots$$

$$s_{\lambda, 2p+1}(u, v) = \sum_{k=1}^p \frac{(2p)!!}{(2k)!!} r_{\lambda, 2k+1}(u, v) \quad p = 0, 1, \dots \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlanır. (4.16)'da verilen $r_{\lambda, r}(u, v)$

$$r_{\lambda, r}(u, v) = - \frac{[x^{r-1} f_{\lambda}(x)]_u^v}{[F_{\lambda}(x)]_u^v} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(\sqrt{1+\lambda^2})^r} \frac{[\Phi(\sqrt{1+\lambda^2}x)]_u^v}{[F_{\lambda}(x)]_u^v} m_{r-1}(\sqrt{1+\lambda^2}u, \sqrt{1+\lambda^2}v) \quad (4.17)$$

şeklinde ifade edilir.

Çizelge 4.1, μ_i parametresi için, çizelge 4.2, σ parametresi için MML ve LS yöntemleri için karşılaştırmalı sonuçları vermektedir. Çizelgede sansürleme oranı, $q = \frac{r_{2i}}{n}$ olarak alınmıştır. Burada q sansürleme oranı olup, çalışmada çarpıklık tarafından yani kuyruktan sansürleme yapıldığı için sadece sağdan sansürleme ele alınmıştır. Çizelgelerde I, II ve III denemeleri göstermektedir.

Çizelge 4.1 μ_i parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

	Sansürleme Oranı (q)			Ortalama		Varyans		MSE		RE
	I	II	III	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,MML}$
$\lambda = 0.4$	0.1	0.1	0.1	0.043	0.041	0.096	0.096	0.098	0.098	100
	0.1	0.2	0.1	0.035	0.030	0.092	0.092	0.093	0.093	100
	0.2	0.2	0.2	-0.069	-0.030	0.095	0.096	0.100	0.096	96
$\lambda = 0.7$	0.1	0.1	0.1	0.096	0.038	0.086	0.087	0.095	0.088	93
	0.1	0.2	0.1	0.109	0.047	0.080	0.082	0.092	0.084	91
	0.2	0.2	0.2	0.009	0.009	0.084	0.080	0.084	0.080	96
$\lambda = 1$	0.1	0.1	0.1	0.177	-0.028	0.071	0.075	0.102	0.076	74
	0.1	0.2	0.1	0.169	-0.039	0.069	0.073	0.097	0.075	77
	0.2	0.2	0.2	0.156	0.061	0.074	0.074	0.098	0.078	79

Çizelge 4.2 σ parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

	Sansürleme Oranı (q)			Ortalama		Varyans		MSE		RE
	I	II	III	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,MML}$
$\lambda = 0.4$	0.1	0.1	0.1	1.246	0.884	0.036	0.018	1.589	0.799	50
	0.1	0.2	0.1	1.214	0.872	0.039	0.020	1.513	0.780	52
	0.2	0.2	0.2	1.243	0.833	0.046	0.020	1.592	0.715	45
$\lambda = 0.7$	0.1	0.1	0.1	1.103	0.885	0.028	0.018	1.244	0.801	64
	0.1	0.2	0.1	1.078	0.878	0.028	0.018	1.191	0.789	66
	0.2	0.2	0.2	1.133	0.847	0.035	0.019	1.318	0.737	56
$\lambda = 1$	0.1	0.1	0.1	1.026	0.894	0.025	0.019	1.077	0.819	76
	0.1	0.2	0.1	0.997	0.885	0.024	0.019	1.017	0.802	79
	0.2	0.2	0.2	1.015	0.849	0.028	0.019	1.059	0.740	70

Çizelge 4.1-4.2'ye göre MML tahmin edicileri, LS tahmin edicilerine göre daha etkindir.

Daha önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi (1.8) hipotezini test etmek için kullanılan LS tahmin edicilerine dayanan F test istatistiği,

$$F_{LS} = \frac{\sum_{i=1}^a n_i \tilde{\alpha}_{i,LS}^2}{(a-1) \tilde{\sigma}_{LS}^2} \quad (4.18)$$

şeklindedir. MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiği de,

$$F_{MML} = \frac{\sum_{i=1}^a m_i \hat{\alpha}_{i,MML}^2}{(a-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (4.19)$$

şeklinde önerilmiştir. Buna göre (2.31) de verilen olasılık yardımıyla hesaplanan I. tip hatalar çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.3 F_{LS} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları ($a = 3, n = 10, \alpha = 0.050$).

		Sansürleme Oranı				
		I	II	III	LS	MML
$\lambda = 0.4$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.059	0.048
	0.1	0.2	0.1	0.1	0.077	0.051
	0.2	0.2	0.2	0.2	0.081	0.053
$\lambda = 0.7$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.084	0.052
	0.1	0.2	0.1	0.1	0.089	0.050
	0.2	0.2	0.2	0.2	0.119	0.057
$\lambda = 1$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.091	0.058
	0.1	0.2	0.1	0.1	0.096	0.055
	0.2	0.2	0.2	0.2	0.116	0.057

Çizelge 4.3'ten de görüldüğü gibi MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiğinin I. tip hataları 0.050 civarında olup, LS tahmin edicilerine dayanan F test istatistiğinin I. tip hataları 0.050'den yüksek çıkmıştır. Bu durum da, küçük örneklem büyüklükleri için MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiğinin dağılımının F dağılımı olduğunun göstergesidir. Ancak, LS tahmin edicilerine dayalı test istatistiğinin dağılım F dağılımı değildir.

4.2 Hata Terimlerinin Çarpık t Olması Durumunda Sansürlü Verilerde Tek Yönlü Varyans Analizi

Bu bölümde hata terimlerinin çarpık t dağılması durumunda sansürlenmiş veriler için bir yönlü ANOVA ele alınmıştır. Bu sebeple, (4.2)'de f yerine çarpık t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu, F yerine çarpık t dağılımının dağılım fonksiyonunu yazılırsa, elde edilen olabilirlik fonksiyonu,

$$L(z_{ij}, \varrho) = c \prod_{i=1}^a \prod_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \frac{2}{\sigma} t_v(z_{ij}) T_{v+1} \left(\lambda z_{ij} \sqrt{\frac{v+1}{v+z_{ij}^2}} \right) \prod_{i=1}^a \left[F(z_{i(r_{1i}+1)}) \right]^{r_{1i}} \prod_{i=1}^a \left[1 - F(z_{i(n-r_{2i})}) \right]^{r_{2i}} \quad (4.20)$$

şeklinde elde edilir. Burada $F(\cdot)$ çarpık t dağılımının dağılım fonksiyonudur. Olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak bulunan log-olabilirlik fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} \ln L = & \left(\sum_{i=1}^a (n - r_{1i} - r_{2i}) \right) \ln \sigma - \frac{v+1}{2} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \ln(v + z_{ij}^2) + \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \ln \left(T_{v+1} \lambda z_{ij} \sqrt{\frac{v+1}{v+z_{ij}^2}} \right) \\ & + \sum_{i=1}^a r_{1i} \ln \left(F(z_{i(r_{1i}+1)}) \right) + \sum_{i=1}^a r_{2i} \ln \left(1 - F(z_{i(n-r_{2i})}) \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre log-olabilirlik fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g_1(z_{ij}) - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g_2(z_{ij}) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} g_{1i}(z) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} g_{2i}(z) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g_1(z_{ij}) - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{v}{v+1} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g_2(z_{ij}) - \frac{1}{\sigma} r_{1i} g_{1i}(z) + \frac{1}{\sigma} r_{2i} g_{2i}(z) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = & -\frac{\sum_{i=1}^a n - r_{1i} - r_{2i}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g_1(z_{ij}) z_{ij} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} g_2(z_{ij}) z_{ij} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} g_{1i}(z) z \\
& + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} g_{2i}(z) z = 0
\end{aligned}
\tag{4.22}$$

olabilirlik denklemleri elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
g_1(z) = \frac{v+1}{v+z^2} z, \quad g_2(z) = \frac{t_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)}{T_{v+1} \left(\lambda z \sqrt{\frac{v+1}{v+z^2}} \right)} \left(\frac{v+1}{v+z^2} \right)^{3/2} \\
g_{1i}(z) = \frac{f(z)}{F(z)}, \quad g_{2i}(z) = \frac{f(z)}{1-F(z)}
\end{aligned}
\tag{4.23}$$

şeklindedir. (4.22)'de yer alan ve doğrusal olmayan ifadeler Taylor serisinin ilk iki terimi kullanılarak doğrusal hale getirilirse,

$$g_1(z_{i(j)}) = \alpha_{1(j)} + \beta_{1(j)} z_{i(j)} \quad j = r_{1i} + 1, \dots, n - r_{2i},$$

$$g_2(z_{i(j)}) = \alpha_{2(j)} - \beta_{2(j)} z_{i(j)} \quad j = r_{1i} + 1, \dots, n - r_{2i},$$

$$g_1(z_{i(r_{1i}+1)}) \cong \alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}$$

ve

$$g_2(z_{i(n-r_{2i})}) \cong \alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})} \tag{4.24}$$

doğrusal denklemleri elde edilir. Burada,

$$\beta_{1(j)} = \frac{(v+1)(v-t^2)}{(v+t^2)^2} \quad , \quad \alpha_{1(j)} = \frac{(v+1)t}{(v+t^2)} - t\beta_{1(j)} \quad (4.25)$$

ve

$$c = \lambda t \sqrt{\frac{v+1}{v+t^2}} \quad (4.26)$$

olmak üzere,

$$\beta_{2(j)} = \left[\frac{\frac{t_{v+1}(c)T_{v+1}(c)\lambda^2 t(v+2)v}{(v+(1+\lambda)t^2)(v+t^2)} + \frac{v\sqrt{v+1}(t_{v+1}(c))^2}{(v+t^2)^{3/2}}}{(T_{v+1}(c))^2} \right] \left(\frac{v+1}{v+t^2} \right)^{3/2} + 3 \frac{t_{v+1}(c)}{T_{v+1}(c)} \frac{(v+1)^{3/2}t}{(v+t^2)^{5/2}}$$

$$\alpha_{2(j)} = \frac{t_{v+1}(c)}{T_{v+1}(c)} \left(\frac{v+1}{v+t^2} \right)^{3/2} + t\beta_{2(j)} \quad (4.27)$$

ve

$$\alpha_{i(r_i+1)} = \frac{f(t_{1i})}{q_{1i}} + t_{1i}\beta_{1i} \quad , \quad \beta_{1i} = - \left[\frac{f'(t_{1i})}{q_{1i}} - \frac{(f(t_{1i}))^2}{q_{1i}^2} \right] \quad q_{1i} = r_{1i} / (n+1), \quad (4.28)$$

$$\alpha_{i(n-r_{2i})} = \frac{f(t_{2i})}{q_{2i}} - t_{2i}\beta_{2i} \quad , \quad \beta_{2i} = \frac{f'(t_{2i})}{q_{2i}} + \frac{(f(t_{2i}))^2}{q_{2i}^2} \quad , \quad q_{2i} = 1 - r_{2i} / (n+1) \quad (4.29)$$

şeklinde bulunur. (4.24) eşitlikleri, (4.22)'de bulunan olabilirlik denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L^*}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} (\alpha_{1(j)} + \beta_{1(j)} z_{i(j)}) - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{v}{v+1} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} (\alpha_{2(j)} - \beta_{2(j)} z_{i(j)}) \\ &\quad - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} (\alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}) + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} (\alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L^*}{\partial \alpha_i} &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} (\alpha_{1(j)} + \beta_{1(j)} z_{i(j)}) - \frac{\lambda}{\sigma} \frac{v}{v+1} \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} (\alpha_{2(j)} - \beta_{2(j)} z_{i(j)}) \\
&\quad - \frac{1}{\sigma} r_{1i} (\alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}) + \frac{1}{\sigma} r_{2i} (\alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})}) = 0 \\
\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} &= - \frac{\sum_{i=1}^a n - r_{1i} - r_{2i}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} (\alpha_{1(j)} + \beta_{1(j)} z_{i(j)}) z_{i(j)} - \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} (\alpha_{2(j)} - \beta_{2(j)} z_{i(j)}) z_{i(j)} \\
&\quad - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{1i} (\alpha_{i(r_{1i}+1)} - \beta_{i(r_{1i}+1)} z_{i(r_{1i}+1)}) z_{i(r_{1i}+1)} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^a r_{2i} (\alpha_{i(n-r_{2i})} + \beta_{i(n-r_{2i})} z_{i(n-r_{2i})}) z_{i(n-r_{2i})} = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

uyarlanmış olabilirlik denklemleri elde edilir. (4.30)'da bulunan denklem sistemi çözüldüğünde MML tahmin edicileri,

$$\hat{\mu} = M + \Delta \hat{\sigma}, \quad \hat{\alpha}_i = (M_i - M) - (\Delta_i - \Delta) \hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2\sqrt{A(A-a)}} \tag{4.31}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \lambda \frac{v}{v+1} \alpha_{2(j)} - \alpha_{1(j)}, \quad \beta_{ij} = \beta_{1(j)} + \lambda \frac{v}{v+1} \beta_{2(j)} \\
M_i &= \left\{ \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \beta_{ij} y_{i(j)} + r_{1i} \beta_{i(r_{1i}+1)} y_{i(r_{1i}+1)} + r_{2i} \beta_{i(n-r_{2i})} y_{i(n-r_{2i})} \right\} / m_i, \quad M = \sum_{i=1}^a m_i M_i / m \\
\Delta_i &= \left\{ -\lambda \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \alpha_{ij} + r_{1i} \alpha_{i(r_{1i}+1)} + r_{2i} \alpha_{i(n-r_{2i})} \right\} / m_i, \quad \Delta = \sum_{i=1}^a m_i \Delta_i / m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_i &= \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \beta_{ij} + r_{1i} \beta_{i(r_{1i}+1)} + r_{2i} \beta_{i(n-r_{2i})}, \quad m = \sum_{i=1}^a m_i \\
A &= \sum_{i=1}^a (n - r_{1i} - r_{2i}) \\
B &= -\lambda \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \alpha_{ij} (y_{i(j)} - M_i) - \sum_{i=1}^a r_{1i} \alpha_{i(r_{1i}+1)} (y_{i(r_{1i}+1)} - M_i) + \sum_{i=1}^a r_{2i} \alpha_{i(n-r_{2i})} (y_{i(n-r_{2i})} - M_i) \\
C &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=r_{1i}+1}^{n-r_{2i}} \beta_{ij} (y_{i(j)} - M_i)^2 + \sum_{i=1}^a r_{1i} \beta_{i(r_{1i}+1)} (y_{i(r_{1i}+1)} - M_i)^2 + \sum_{i=1}^a r_{2i} \beta_{i(n-r_{2i})} (y_{i(n-r_{2i})} - M_i)^2
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak amacıyla daha önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi düzeltme yapmak gereklidir. Buna göre II. tip sansürlenmiş veriler için dağılım asimptorik olarak t_1 ile t_2 arasında budanmış çarpık t dağılımına yakınsamaktadır. Dolayısıyla yan düzeltmesi yapmak için $E(X | t_1 < X < t_2)$ ve $Var(X | t_1 < X < t_2)$ ifadelerini teorik olarak ifade etmek gereklidir.

Buna göre, budanmış çarpık- t dağılımının momentleri genel bir ifadeyle,

$$\begin{aligned}
E(X^n) &= \frac{b^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\nu}B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)D} {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -\frac{b^2}{\nu}\right) - \\
&\quad \frac{a^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\nu}B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)D} {}_2F_1\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2}; -\frac{a^2}{\nu}\right), \quad n \geq 2 \text{ ve çift}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde gösterilmektedir (Nadarajah 2004).

Burada,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \tag{4.33}$$

şeklinde tanımlanan gauss- hipergeometrik fonksiyonu ve $(z)_k = z(z+1)...(z+k-1)$ şeklinde tanımlanan artan faktöriyeldir.

Çizelge 4.4 serbestlik derecesi 4 ve 6 olan çarpık t dağılımında μ_i için, çizelge 4.5 σ parametresi için ortalama, varyans, MSE ve RE değerlerini göstermektedir.

Çizelge 4.4 μ_i parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri .

v=4										
Sansürleme Oranı			Ortalama		Varyans		MSE		RE	
I	II	III	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$	$\mu_{i,LS}$	$\mu_{i,MML}$
$\lambda = 0.4$	0.1	0.1	0.1	0.029	0.029	0.200	0.137	0.201	0.138	69
	0.1	0.2	0.1	0.029	0.028	0.171	0.136	0.172	0.137	80
	0.2	0.2	0.2	0.018	0.022	0.177	0.143	0.177	0.143	81
$\lambda = 0.7$	0.1	0.1	0.1	0.035	0.029	0.174	0.128	0.175	0.129	74
	0.1	0.2	0.1	0.036	0.029	0.147	0.116	0.148	0.117	79
	0.2	0.2	0.2	0.026	0.026	0.143	0.117	0.144	0.118	82
$\lambda = 1$	0.1	0.1	0.1	0.033	0.031	0.145	0.125	0.146	0.126	86
	0.1	0.2	0.1	0.030	0.030	0.144	0.112	0.145	0.113	78
	0.2	0.2	0.2	0.036	0.035	0.136	0.108	0.137	0.109	80
v=6										
$\lambda = 0.4$	0.1	0.1	0.1	0.052	0.025	0.199	0.135	0.202	0.136	67
	0.1	0.2	0.1	0.036	0.032	0.169	0.132	0.170	0.133	78
	0.2	0.2	0.2	0.027	0.005	0.168	0.125	0.169	0.125	74
$\lambda = 0.7$	0.1	0.1	0.1	0.095	0.075	0.168	0.126	0.177	0.132	74
	0.1	0.2	0.1	-0.005	-0.015	0.155	0.124	0.155	0.124	80
	0.2	0.2	0.2	0.025	0.026	0.151	0.118	0.152	0.119	78
$\lambda = 1$	0.1	0.1	0.1	0.074	0.085	0.156	0.119	0.161	0.126	78
	0.1	0.2	0.1	0.005	0.011	0.144	0.110	0.144	0.110	76
	0.2	0.2	0.2	0.051	0.049	0.135	0.105	0.138	0.107	78

Çizelge 4.5 σ parametresi için LS ve MML tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri.

v=4										
Sansürleme Oranı			Ortalama		Varyans		MSE		RE	
	I	II	III	σ_{LS}	σ_{MML}	σ_{LS}	σ_{MML}	σ_{LS}	σ_{MML}	σ_{MML}
$\lambda = 0.4$	0.1	0.1	0.1	1.093	0.948	0.060	0.032	1.256	0.932	74
	0.1	0.2	0.1	1.060	0.936	0.071	0.035	1.194	0.910	76
	0.2	0.2	0.2	0.981	0.905	0.073	0.037	1.034	0.856	83
$\lambda = 0.7$	0.1	0.1	0.1	1.062	0.949	0.057	0.036	1.185	0.936	79
	0.1	0.2	0.1	1.013	0.936	0.055	0.036	1.080	0.911	84
	0.2	0.2	0.2	0.937	0.910	0.059	0.038	0.936	0.867	93
$\lambda = 1$	0.1	0.1	0.1	1.023	0.941	0.051	0.038	1.098	0.923	84
	0.1	0.2	0.1	0.999	0.942	0.050	0.037	1.047	0.924	88
	0.2	0.2	0.2	0.903	0.907	0.048	0.040	0.863	0.862	99
v=6										
$\lambda = 0.4$	0.1	0.1	0.1	1.148	0.927	0.049	0.029	1.367	0.888	65
	0.1	0.2	0.1	1.127	0.930	0.050	0.030	1.319	0.895	68
	0.2	0.2	0.2	1.044	0.894	0.054	0.033	1.143	0.832	73
$\lambda = 0.7$	0.1	0.1	0.1	1.008	0.959	0.092	0.038	1.321	0.960	73
	0.1	0.2	0.1	1.052	0.934	0.065	0.035	1.169	0.909	77
	0.2	0.2	0.2	0.985	0.915	0.061	0.035	1.033	0.879	86
$\lambda = 1$	0.1	0.1	0.1	1.025	0.952	0.072	0.039	1.122	0.945	84
	0.1	0.2	0.1	0.998	0.949	0.067	0.039	1.063	0.939	88
	0.2	0.2	0.2	1.014	0.951	0.065	0.038	1.093	0.942	89

Çizelge 4.4-4.5'e göre MML tahmin edicileri, LS tahmin edicilerine göre daha etkin olduğu görülmektedir.

Bu bölümde LS tahmin edicilerine alternatif olarak MML tahmin edicilerinin asimptotik olarak normal dağılması özelliğinden, MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiği de,

$$F_{MML} = \frac{\sum_{i=1}^a m_i \hat{\alpha}_{i,MML}^2}{(a-1) \hat{\sigma}_{MML}^2} \quad (4.35)$$

şeklinde önerilir. Eşitlik (2.31)'de verilen olasılık yardımıyla hesaplanan I. tip hatalar çizelge 4.6'da verilmiştir.

Çizelge 4.6 F_{LS} ve F_{MML} test istatistiklerinin I. tip hataları ; $a=3, n=10, \alpha=0.050$

Sansürleme Oranı					
	I	II	III	LS	MML
$v=4$					
$\lambda=0.4$	0.1	0.1	0.1	0.075	0.055
	0.1	0.2	0.1	0.080	0.056
	0.2	0.2	0.2	0.087	0.056
$\lambda=0.7$	0.1	0.1	0.1	0.085	0.056
	0.1	0.2	0.1	0.089	0.058
	0.2	0.2	0.2	0.090	0.057
$\lambda=1$	0.1	0.1	0.1	0.092	0.056
	0.1	0.2	0.1	0.097	0.056
	0.2	0.2	0.2	0.101	0.058
$v=6$					
$\lambda=0.4$	0.1	0.1	0.1	0.071	0.052
	0.1	0.2	0.1	0.077	0.053
	0.2	0.2	0.2	0.081	0.053
$\lambda=0.7$	0.1	0.1	0.1	0.085	0.054
	0.1	0.2	0.1	0.092	0.052
	0.2	0.2	0.2	0.090	0.054
$\lambda=1$	0.1	0.1	0.1	0.094	0.056
	0.1	0.2	0.1	0.099	0.057
	0.2	0.2	0.2	0.107	0.059

Çizelge 4.6'dan da görüldüğü gibi MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiğinin I. tip hataları 0.050 civarında olup, LS tahmin edicilerine dayanan F test istatistiğinin I. tip hataları 0.050'den yüksek çıkmıştır.

5. UYGULAMA

Bu bölümde literatürden veya daha önce yapılan çalışmalardan derlenmiş gerçek veri setleri kullanılarak önceki bölümlerde geliştirilen teorinin uygulamaları yapılmıştır.

5.1 Radyo Frekansı Gücü Verisi

Montgomery (2005) mühendislik alanı ile ilgili radyo frekansı güçleri açısından elektroliz düzeyleri arasındaki farkı saptamak için bir başka deyişle,

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

hipotezini test etmek için çizelge 5.1’de verilen veri setini kullanmıştır. Bu amaçla her bir elektroliz düzeyi, yarı iletken levhalara rasgele olarak atanmıştır. Söz konusu veri seti 4 denemeli bir yönlü ANOVA modeline örnektir. Her bir denemede 5 deney birimi olmak üzere toplam 20 gözlem elde edilmiştir. Deneye ilişkin gözlem değerleri,

Çizelge 5.1 Radyo frekans gücü verisi

Elektroliz düzeyleri			
160 W	180 W	200 W	220 W
575	565	600	725
542	593	651	700
530	590	610	715
539	579	637	685
570	610	629	710

şeklinde elde edilmiştir.

Öncelikle hata terimlerinin dağılımını belirlemek için Q-Q grafiği tekniği kullanılmıştır. Q-Q grafiği tekniği, bir veri setinin belli bir dağılımdan gelip gelmediğini belirlemek için kullanılan görsel bir tekniktir. Q-Q grafiği tekniği aşağıdaki adımlar izlenerek yapılır:

- (i) Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır,

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}.$$

$$(ii) \quad t_{(i)} = E(Z_{(i)}) \left(Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \text{ değerleri yaklaşık olarak}$$

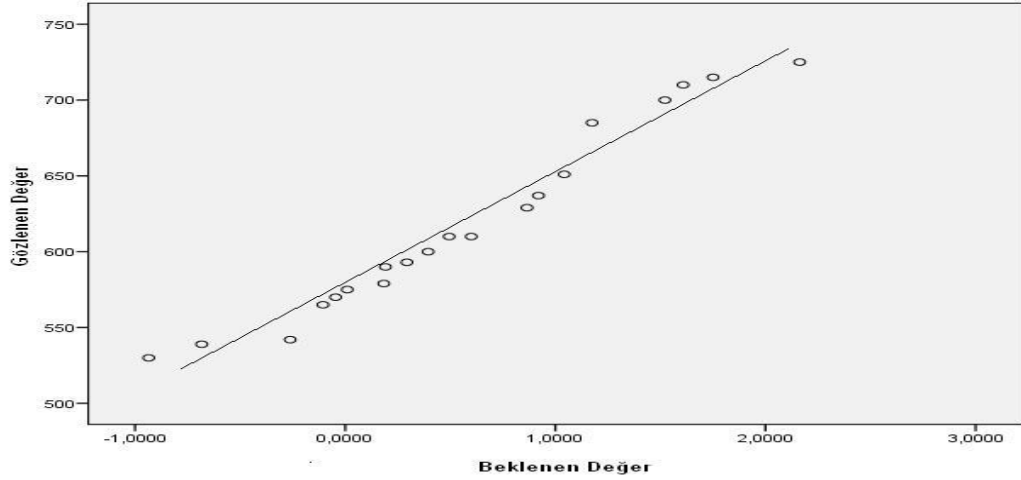
$$F(t_{(i)}) = \int_{-\infty}^{t_{(i)}} f(z) dz = \frac{i}{n+1} \text{ eşitliği kullanılarak } t_{(i)} = F^{-1} \left(\frac{i}{n+1} \right) \text{ şeklinde}$$

hesaplanır.

Burada F , X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonudur.

- (iii) $X_{(i)}$ değerleri y eksenine ve $t_{(i)}$ değerleri x eksenine gelecek şekilde grafiğe yerleştirilir. Eğer veriler düz bir doğru üzerinde yayılım gösteriyorsa verilerin belirtilen dağılıma uyduğuna karar verilir.

Değişik λ değerleri için radyo frekans gücü verisine ait Q-Q grafikleri elde edilmiş ve bunlar arasında arpıklık parametresi $\lambda = 0.8$ olan çarpık normal dağılımın hata terimlerinin dağılımına en iyi uyum gösterdiği belirlenmiştir, bkz şekil 5.1.



şekil 5.1 Radyo frekans gücü verisi için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.8$.

Ayrıca, Q-Q grafik tekniği kullnılarak elde edilen sonucu desteklemek için Kolmogrov testi yapılmıştır.

Burada, sıfır hipotezi

H_0 : Veri seti çarpık normal dağılıma uymaktadır.

şeklinde ifade edilir. H_0 hipotezini test etmek için $D = \sup_x \{|F_n(x) - F_0(x)|\}$ istatistiği kullanılır. Burada,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \\ 1, & x \geq X_{(n)} \end{cases}$$

dır.

Çarpık normal dağılıma uygunluk testi için gerekli olan $F_0(x) = P(X \leq x)$ değerleri, Gupta ve Cohen (2001) tarafından hesaplanmıştır. Ayrıca, $\lambda = 0.8$ için $|F_0(x) - F_n(x)|$ değerleri çizelge 5.2’te verilmiştir.

Çizelge 5.2 Radyo frekansı gücü verisi için $F_0(x)$ ve $|F_0(x) - F_n(x)|$ değerleri.

x_i	$F_0(x)$	$ F_0(x) - F_n(x) $
-1.423	0.012	0.038
-1.277	0.019	0.081
-1.229	0.022	0.128
-0.856	0.057	0.143
-0.775	0.069	0.181
-0.693	0.083	0.217
-0.629	0.094	0.256
-0.450	0.136	0.264
-0.401	0.149	0.301
-0.288	0.185	0.315
-0.106	0.247	0.303
-0.106	0.247	0.346
0.182	0.361	0.289
0.312	0.419	0.281
0.539	0.515	0.235
1.091	0.718	0.082
1.334	0.832	0.018
1.496	0.873	0.027
1.577	0.893	0.057
1.740	0.921	0.079

Çizelge 5.2'ye göre, D test istatistiğinin değeri 0.346 olarak elde edilmiştir. Tek örneklem Kolmogrov tablosunda örneklem çapı 20 için tablo değeri 0.351 olarak verilmiştir. Buradan, $D_{hesap} = 0.346 < D_{Tablo} = 0.351$ olduğundan dolayı $\alpha = 0.01$ anlam düzeyinde veri seti, $\lambda = 0.8$ parametresi ile çarpık normal dağılıma uymaktadır denir. Bu durum, Q-Q grafik tekniği ile elde edilen sonuçla örtüşmektedir.

Elektroliz düzeylerinin radyo frekans güçleri açısından farklılığını anlamak için LS, ML ve MML yöntemleriyle elde edilmiş tahmin değerleri ve bu tahminlere dayalı test istatistikleri çizelge 5.3'te verilmiştir.

Çizelge 5.3 Radyo Frekansı gücü verisi için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiklerinin değeri.

	μ	α_1	α_2	α_3	α_4	σ	F
LS	608.64	-66.55	-30.35	7.65	89.25	21.428	66.79*
ML	605.42	-66.69	-30.24	7.49	89.44	20.984	70.32*
MML	607.41	-66.63	-30.27	7.49	89.42	21.112	69.49*

* H_0 red

Buna göre, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde her üç tahmin edici ile yapılan analiz sonucunda yokluk hipotezi reddedilir. Bununla beraber, ML ve MML tahminleri kullanılarak elde edilen σ değerleri LS tahmini kullanılarak elde edilen σ değerinden daha düşüktür. Ayrıca, ML ve MML tahmin değerlerine dayanan F test istatistiğinin p -değeri LS tahmin değerlerine dayanan F test istatistiğinin p -değerinden daha düşüktür.

Uygulamadan elde edilen sonuçların simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlar tarafından desteklenip desteklenmediğini görmek için çizelge 5.4'te $\lambda = 0.8$ ve $n=5$ için için elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 5.4 Parametre tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri; $\lambda = 0.8$, $n=5$.

Ortalama			Varyans			MSE			RE	
$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
0.078	0.021	0.024	0.155	0.157	0.159	0.161	0.157	0.157	97	97
$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
0.996	0.975	0.979	0.043	0.041	0.042	1.035	0.993	1.013	96	98

Çizelge 5.4'ten de görüldüğü gibi ML ve MML tahmin edicilerinin etkinlikleri LS tahmin edicilerinin etkinliklerinden daha yüksek çıkmıştır. Bu durum, simülasyon sonuçlarının uygulamada elde edilen sonucu desteklediğini göstermektedir.

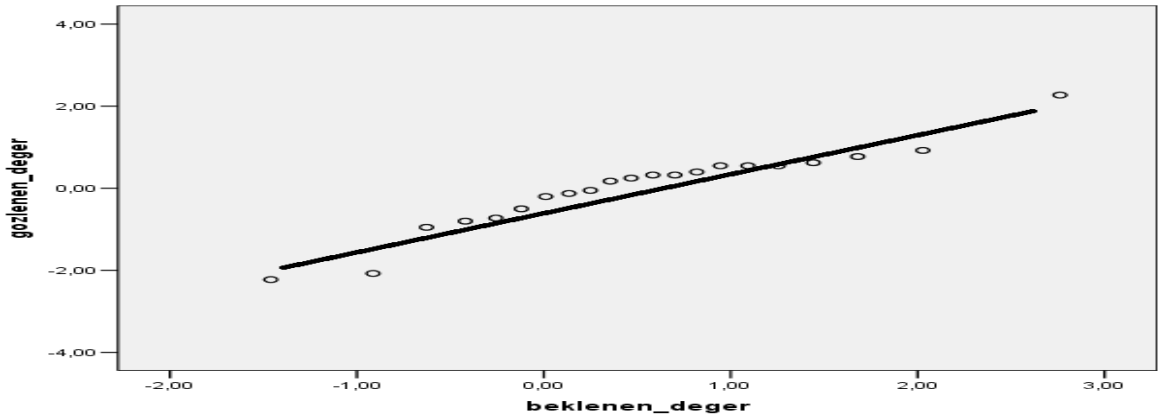
5.2 ASG Değerleri Verisi

Üç farklı serum bileşeninin hastaların kanında bulunan ASG değerlerine olan etkisi araştırılmak istenmektedir. Buna göre 21 hastaya, farklı serumlar rasgele olarak uygulanmaktadır. Deney sonucunda elde edilen veriler çizelge 5.5'te verilmiştir.

Çizelge 5.5 ASG değerleri verisi.

Serum Tipleri		
Serum 1	Serum 2	Serum3
1.04	1.11	0.73
0.90	0.99	0.71
0.94	1.08	1.06
1.31	1.09	1.00
1.08	0.91	0.88
1.08	1.05	1.03
0.98	1.13	1.05

Öncelikle, hata terimlerinin dağılımının belirlenmesi gereklidir. Bir çok farklı λ ve ν değerleri için çizilen Q-Q grafikleri arasından, verilerin normal dağılıma sahip olmadığı, ancak 7 serbestlik dereceli ve 0.7 çarpıklık parametrelili çarpık t dağılıma uyduğu saptanmıştır. Çünkü elde edilen noktalar düz bir doğru etrafında yayılım göstermektedir.



Şekil 5.2 ASG değerleri verisi için Q-Q grafiği; $\nu = 7$, $\lambda = 0.7$.

LS, ML ve MML tahmin edicilerinin değerleri ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiklerinin değerleri çizelge 5.6’da verilmiştir.

Çizelge 5.6 ASG değerleri verisi için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiklerini değeri.

	μ	α_1	α_2	α_3	σ	F
LS	0.942	0.04	0.04	-0.08	0.125	2.38
ML	0.923	0.02	0.05	-0.07	0.119	2.53
MML	0.929	0.03	0.05	-0.08	0.121	2.49

Buna göre, $\alpha = 0.05$ anlam seviyesinde her üç tahmin edici ile yapılan analiz sonucunda yokluk hipotezi reddedilir. Bununla beraber, ML ve MML tahminleri kullanılarak elde edilen σ değerleri LS tahmini kullanılarak elde edilen σ değerinden daha düşüktür. Ayrıca, ML ve MML tahmin değerlerine dayanan F test istatistiğinin p -değerleri LS tahmin değerlerine dayanan F test istatistiğinin p -değerinden daha düşüktür. Çizelge 5.7 ise 0.7 çarpıklık parametresi, 5 serbestlik derecesi ve 7 deney birimi sayısı için simülasyon sonuçlarını göstermektedir.

Çizelge 5.7 Parametre tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri ; $\lambda = 0.7$, $v = 7$, $n = 7$

Ortalama			Varyans			MSE			RE	
$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,ML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
0.05	0.05	0.05	0.156	0.145	0.145	0.156	0.148	0.148	95	95
$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{ML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
0.969	0.956	0.960	0.051	0.034	0.041	0.990	0.947	0.961	96	97

Çizelge 5.7’den de görüldüğü gibi simülasyon sonuçları uygulamada elde edilen sonucu desteklemektedir.

5. 3 FG Değerleri Verisi

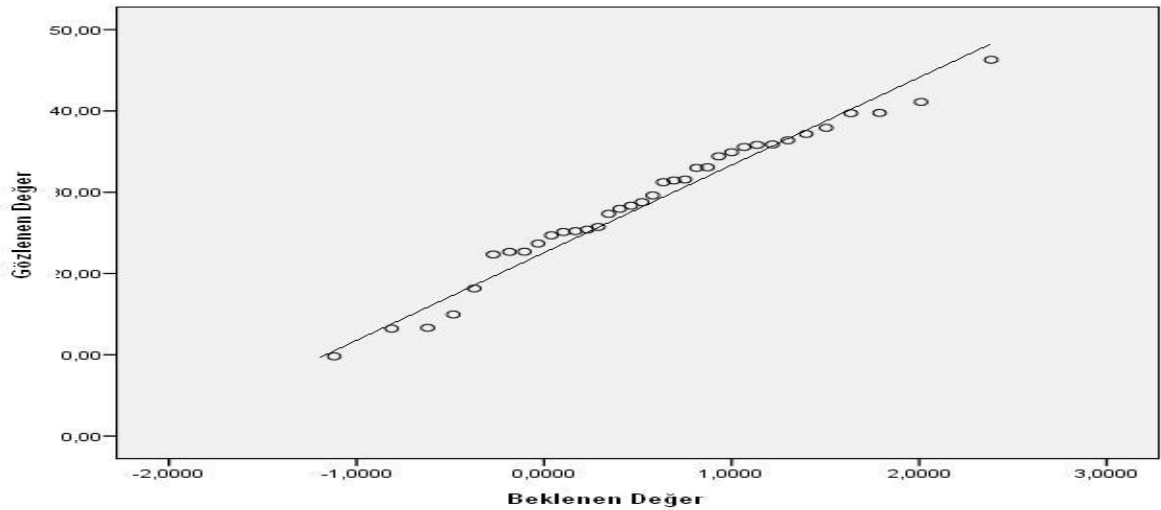
Uygulama 2’de uygulanan serum türlerinin, FG değerleri üzerindeki etkisinin araştırılmak istendiği bir deneyde, toplam 36 hastaya farklı serumlar uygulanmıştır. Ancak, hastaların homojenliğini sağlamak amacıyla hastalar (18-25), (26-40) ve 40 ve

üstü olmak üzere toplam 3 farklı yaş grubuna ayrılmıştır. Deney sonucunda çizelge 5.8’de gösterilen sonuçlar elde edilmiştir.

Çizelge 5.8 FG değerleri verisi.

		Yaş Grupları											
		18-25				26-40				≥ 40			
Serum Türleri	S1	28.77	27.96	39.75	22.66	9.81	24.69	13.22	22.34	46.29	31.56	13.32	29.61
	S2	31.23	32.99	34.41	34.92	28.34	27.34	25.21	14.96	25.11	18.16	33.06	22.68
	S3	35.82	23.69	41.10	35.88	39.72	35.56	37.17	25.41	36.38	31.45	37.92	25.73

Farklı λ değerleri için çizilen bir çok Q-Q grafiğinden, hata terimlerinin dağılımının $\lambda = 0.6$ olan çarpık normal olduğu tespit edilmiştir.



Şekil 5.3 FG değerleri için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.6$.

Daha sonra Uygulama 1’de olduğu gibi Q-Q grafiği kullanılarak verilen kararı desteklemek için Kolmogrov testi uygulanmış ve sonuçlar Çizelge 5.9’da gösterilmiştir.

Çizelge 5.9 FG değerleri verisi için $F_0(x)$ ve $|F_0(x) - F_n(x)|$ değerleri.

x_i	$F_0(x)$	$ F_0(x) - F_n(x) $	x_i	$F_0(x)$	$ F_0(x) - F_n(x) $
-2.256	0.001	0.027	-0.028	0.277	0.223
-1.855	0.003	0.053	0.071	0.314	0.214
-1.843	0.003	0.080	0.261	0.396	0.160
-1.651	0.006	0.105	0.287	0.405	0.178
-1.275	0.019	0.120	0.300	0.414	0.197
-0.783	0.068	0.099	0.468	0.488	0.151
-0.746	0.074	0.120	0.476	0.497	0.170
-0.743	0.074	0.148	0.635	0.566	0.128
-0.625	0.097	0.153	0.695	0.597	0.125
-0.507	0.123	0.155	0.770	0.628	0.122
-0.458	0.136	0.170	0.801	0.641	0.137
-0.446	0.136	0.197	0.808	0.645	0.161
-0.423	0.144	0.217	0.867	0.670	0.163
-0.385	0.152	0.237	0.959	0.703	0.158
-0.196	0.214	0.203	1.048	0.737	0.152
-0.123	0.239	0.205	1.259	0.812	0.105
-0.078	0.258	0.214	1.263	0.812	0.132

Çizelge 5.9'a göre, D test istatistiğinin değeri 0.223 olarak bulunmuştur. Tek örneklem Kolmogrov tablosunda örneklem çapı 36 için tablo değeri 0.265 olarak verilmiştir. $D_{hesap} = 0.223 < D_{tablo} = 0.265$ olduğuna göre $\alpha = 0.01$ anlam düzeyinde sıfır hipotezi reddedilemez. Yani hata terimleri, $\lambda = 0.8$ parametresi ile çarpık normal olduğu sonucuna varılır. LS, ML ve MML tahmin yöntemleriyle elde edilen tahmin değerleri ve bulunan test istatistikleri çizelge 5.10'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.10 FG değerleri için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiklerinin değerleri.

	LS	ML	MML		LS	ML	MML
μ	25.63	25.02	25.27	$(\alpha\beta)_{21}$	-4.62	-4.51	-4.55
α_1	3.42	3.48	3.47	$(\alpha\beta)_{22}$	0.27	0.21	0.22
α_2	-3.68	-3.65	-3.67	$(\alpha\beta)_{23}$	4.34	4.31	4.33
α_3	0.26	0.16	0.19	$(\alpha\beta)_{31}$	4.09	3.91	4.01
β_1	-3.17	-3.31	-3.27	$(\alpha\beta)_{32}$	-2.87	-2.82	-2.88
β_2	-1.64	-1.54	-1.56	$(\alpha\beta)_{33}$	-1.21	-1.08	-1.12
β_3	4.81	4.86	4.83	σ	8.27	7.17	8.24
$(\alpha\beta)_{11}$	0.52	0.61	0.55	F_{deneme}	2.22	2.98	2.80
$(\alpha\beta)_{12}$	2.59	2.62	2.65	F_{blok}	3.14	4.32*	3.99*
$(\alpha\beta)_{13}$	-3.12	-3.22	-3.21	$F_{etkilesim}$	1.21	1.57	1.51

* H_0 Red

Çizelge 5.10’da görüldüğü gibi, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde her üç yöntemle de serumlar arasında anlamlı bir fark bulunamamıştır. Yaşlar arasında, LS yöntemi kullanılarak elde edilen F test istatistiğine göre anlamlı bir fark bulunamazken, ML ve MML yöntemiyle, yaşlar arasında FG bakımından anlamlı bir farklılık saptanmıştır. Etkileşim etkisi her üç tahmin yöntemi içinde anlamsız bulunmuştur.

Uygulamada elde edilen sonuçlar simülasyon sonuçları ile örtüşmektedir. Ancak, burada simülasyon sonuçları verilmemiştir.

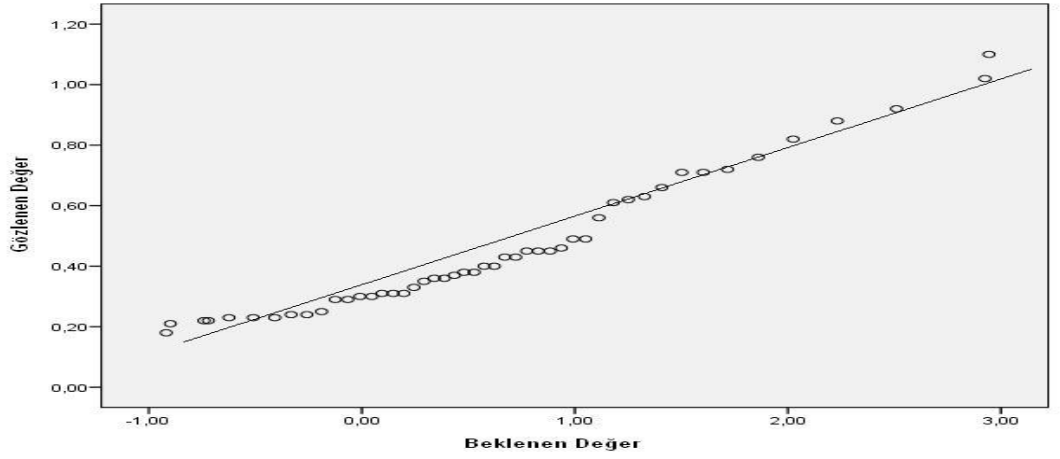
5.4 Hayvanların Yaşam Süreleri Verisi

Box ve Cox (1964), 3 farklı zehir türünün belli bir hayvan türünün yaşam süresine olan etkisini araştırmak için zehirleri toplam 48 hayvan üzerine uygulamıştır. Her bir zehir türünü rasgele olarak 4 hayvana uygulayarak toplam dört tekrar yapmıştır. Sonuç olarak, hayvanların yaşam sürelerini 10 saat cinsinden Çizelge 5.11’deki gibi elde etmiştir.

Çizelge 5.11 Hayvanların yaşam süreleri verisi.

	1. blok				2. blok				3. blok				4. blok			
Zehir 1	0.31	0.45	0.46	0.43	0.82	1.10	0.88	0.72	0.43	0.45	0.63	0.76	0.45	0.71	0.66	0.62
Zehir 2	0.36	0.29	0.40	0.23	0.92	0.61	0.49	0.24	0.49	0.35	0.31	0.40	0.56	1.02	0.71	0.38
Zehir 3	0.22	0.21	0.18	0.23	0.30	0.37	0.38	0.29	0.23	0.25	0.24	0.22	0.30	0.36	0.31	0.33

Hata terimlerinin dağılımının normal olmadığı, ancak 5 serbestlik dereceli ve 1 çarpıklık parametrelili çarpık t dağılıma uyduğu Q-Q grafiği yardımıyla bulunmuştur.



Şekil 5.4 Hayvanları yaşam süreleri verisi için Q-Q grafiği; $v = 5$, $\lambda = 1$.

Zehir türlerinin hayvanların yaşam sürelerine olan etkisinin araştırıldığı deneyde, LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin edicilere dayalı test istatistiklerinin değeri çizelge 5.12’de verilmiştir.

Çizelge 5.12 Hayvanları yaşam süreleri verisi için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiklerinin değeri.

	LS	ML	MML		LS	ML	MML
μ	0.41	0.41	0.41	$(\alpha\beta)_{21}$	0.07	0.09	0.07
α_1	-0.19	-0.17	-0.19	$(\alpha\beta)_{22}$	0.05	0.03	0.05
α_2	0.16	0.14	0.16	$(\alpha\beta)_{23}$	-0.12	-0.12	-0.12
α_3	0.03	0.03	0.02	$(\alpha\beta)_{31}$	-0.05	-0.04	-0.04
β_1	0.13	0.15	0.13	$(\alpha\beta)_{32}$	0.04	-0.05	0.04
β_2	0.09	0.04	0.09	$(\alpha\beta)_{33}$	0.01	0.00	0.00
β_3	-0.22	-0.19	-0.22	σ	0.18	0.13	0.15
$(\alpha\beta)_{11}$	-0.03	-0.05	-0.02	F_{deneme}	17.39*	20.50*	18.35*
$(\alpha\beta)_{12}$	-0.09	-0.03	-0.09	F_{blok}	16.10*	17.68*	16.34*
$(\alpha\beta)_{13}$	0.11	0.08	0.12	$F_{etkilesim}$	1.96	2.31	2.03

* H_0 Red

Buna göre, $\alpha = 0.05$ anlam düzeyinde zehirler ve bloklar arası farklılığı sınamak için kullanılan F test istatistiklerine göre

$$H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a$$

$$H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b$$

$$H_{03} : \alpha\beta_{11} = \alpha\beta_{12} = \dots = \alpha\beta_{ab}$$

olarak ifade edilen sıfır hipotezleri reddedilmiştir. Ancak, görüldüğü gibi ML ve MML tahmin edicilerine dayanan F test istatistiklerinin değeri daha yüksektir. Bununla beraber ML ve MML tahminleri kullanılarak elde edilen σ değerleri LS tahmini kullanılarak elde edilen σ değerinden daha düşüktür.

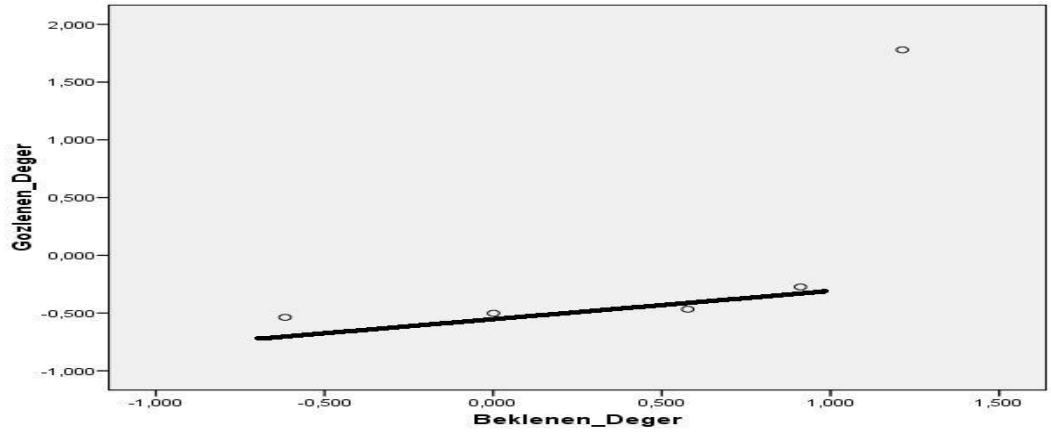
5.5 Çimento Kuruma Süreleri Verisi

Üç tür çimento markasının kuruma süreleri üzerinde bir araştırmada 15 ayrı yere rasgele olarak çimentolar dökülmüş ve kuruma süreleri çizelge 5.13'te verildiği gibi elde edilmiştir.

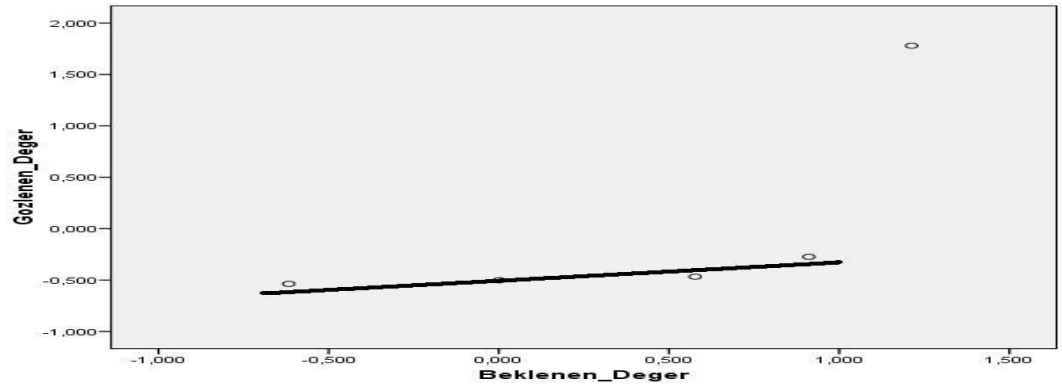
Çizelge 5.13 Çimento Kuruma Süreleri Verisi (dk).

Çimento Türleri		
A	B	C
23	25	34
21	27	30
36	29	143
153	159	40
25	35	31

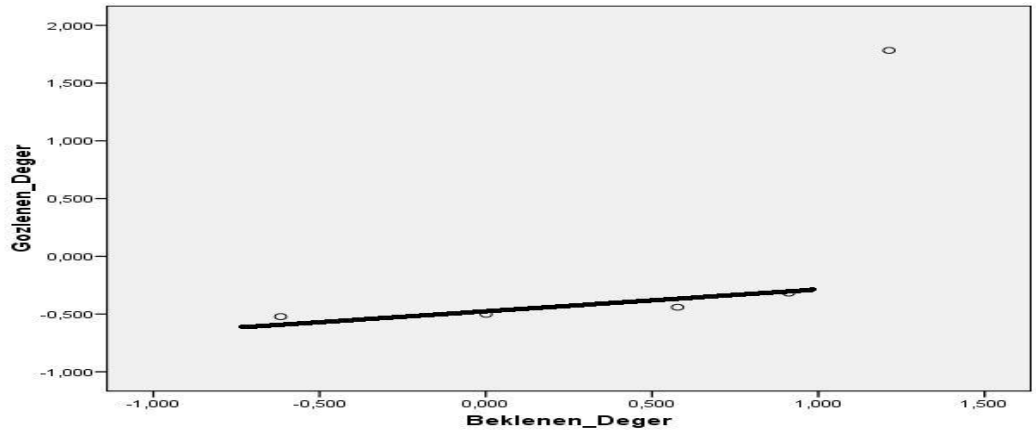
Kuruma süreleri açısından çimento markaları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığının testi için öncelikle hata terimlerinin dağılımının saptanması gerekir. Her bir deneme için Q-Q grafiklerine bakıldığında denemlerdeki hata terimlerinin $\lambda = 1.0$ çarpıklık parametresi ile çarpık normal dağıldığı görülmektedir. Ancak grafiklere bakıldığında her bir denemede bir tane aykırı değer olduğu görülmüş ve bu aykırı değerler sansürlenmiştir. Bira başka deyişle, $r_{21} = r_{22} = r_{32} = 1$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.5 Çimento Kuruma Süreleri verisi 1. deneme için Q-Q grafiği; $\lambda = 1$.



Şekil 5.6 Çimento Kuruma Süreleri verisi 2. deneme için Q-Q grafiği; $\lambda = 1$.



Şekil 5.7 Çimento Kuruma Süreleri verisi 3. deneme için Q-Q grafiği; $\lambda = 1$.

Daha sonra, Uygulama 1’de olduğu gibi Q-Q grafik tekniği ile verilen kararı desteklemek için veriye Kolmogrov testi uygulanmıştır.

Çizelge 5.14 Çimento kuruma süreleri verisi için $F_0(x)$ ve $|F_0(x) - F_n(x)|$ değerleri.

x_i			$F_0(x)$			$ F_0(x) - F_n(x) $		
-0.537	-0.514	-0.522	0.123	0.132	0.128	0.077	0.068	0.072
-0.501	-0.480	-0.501	0.136	0.138	0.136	0.264	0.262	0.264
-0.466	-0.446	-0.440	0.145	0.146	0.146	0.455	0.454	0.454
-0.273	-0.343	-0.318	0.185	0.192	0.189	0.615	0.608	0.611
1.779	1.785	1.783	0.921	0.924	0.924	0.079	0.076	0.076

Tek örneklem Kolmogrov tablosunda örneklem çapı 4 için tablo değeri 0.734 olarak verilmiştir. Çizelge 5.14’e göre 1. deneme için D_{hesap} 0.615, ikinci deneme için 0.608 ve 3. deneme için 0.611 olarak elde edilmiştir. Sonuç olarak her bir deneme için $D_{hesap} < D_{tablo}$ olduğundan her bir denemedeki hata terimlerinin dağılımının $\lambda=1$ çarpıklık parametresi ile çarpık normal dağılıma uyduğuna karar verilir.

Çizelge 5.15 veri sansürlemeden işlem yapıldığı zamanki sonuçları, çizelge 5.16 ise sansürleme yapıldıktan sonraki sonuçları vermektedir. Sansürleme yapıldıktan sonra daha yüksek F değeri ve daha düşük σ değeri bulunmuştur. Çizelge 5.16’ya bakıldığında, σ değerinin tam veri kullanılarak elde edilen σ değerinden oldukça düşük olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.15 Çimento kuruma süreleri verisi için parametrelerin LS, ML ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiklerini değeri (tam veri).

	μ	α_1	α_2	α_3	σ	F
LS	26.701	-2.466	0.933	1.533	69.317	0.007
ML	22.852	-2.620	0.681	1.939	61.157	0.009
MML	24.304	-2.609	0.787	1.821	63.548	0.009

Çizelge 5.16 Çimento kuruma süreleri verisi için parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiklerinin değeri (sansürlenmiş veri).

	μ	α_1	α_2	α_3	σ	F
LS	28.157	-3.416	-0.666	4.083	10.401	2.06
MML	27.231	-3.255	-0.753	4.008	7.412	2.99

Çizelge 5.17, çarpıklık parametresi 1, deney birimi sayısı 5 olan olan çarpık normal dağılım için 0.20 sansürleme oranı ile ilgili simülasyon sonuçlarını göstermektedir.

Çizelge 5.17 Parametre tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri ; $\lambda = 1$, $n=5$, $q = 0.2$.

	Ortalama		Varyans		MSE		RE
n	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
5	0.141	0.017	0.151	0.155	0.171	0.156	91
	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
5	1.252	0.966	0.096	0.046	1.665	0.967	58

Çizelge 5.17’den de görüldüğü gibi simülasyon sonuçları uygulamada elde edilen sonucu desteklemektedir.

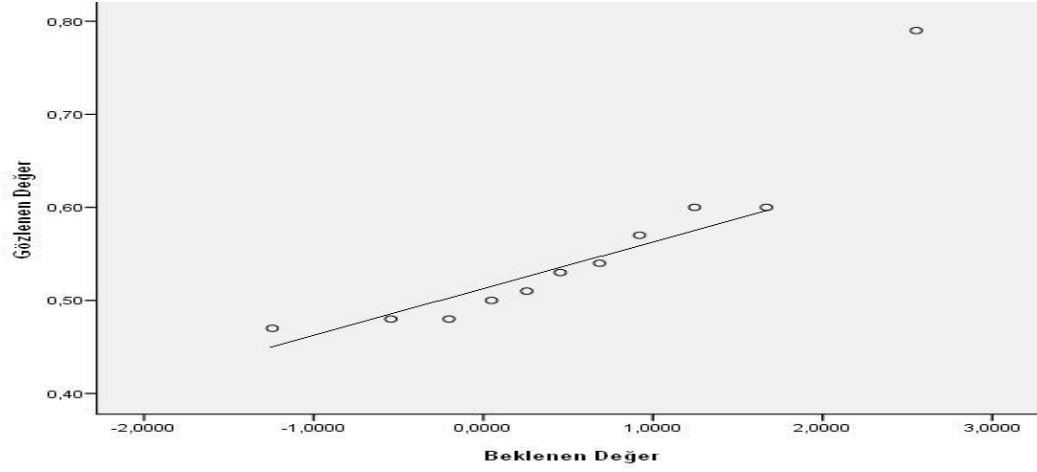
5.6 Fındık Miktarları Verisi

Bhar (2000), Hindistan’da yetiştirilen bir fındık türünün (groundnut) üretiminde farklı gübre türlerinin etkisini araştırmak amacıyla Çizelge 5.18’deki sonuçları elde etmiştir.

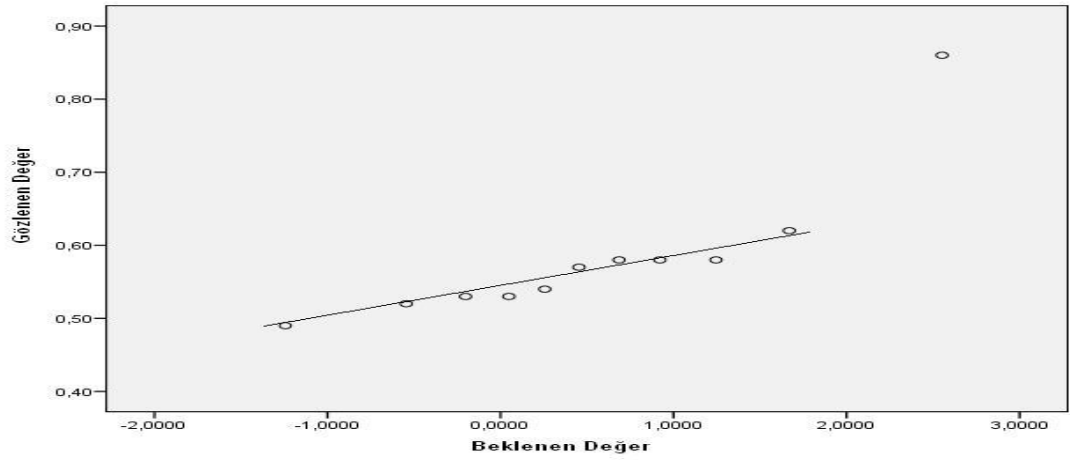
Çizelge 5.18 Fındık miktarları verisi

Gübre	1	0.55	0.57	0.57	0.59	0.61	0.62	0.62	0.65	0.72	0.75	0.95
Türleri	2	0.49	0.52	0.53	0.53	0.54	0.57	0.58	0.58	0.58	0.62	0.86
	3	0.47	0.48	0.48	0.50	0.51	0.53	0.54	0.57	0.60	0.60	0.79

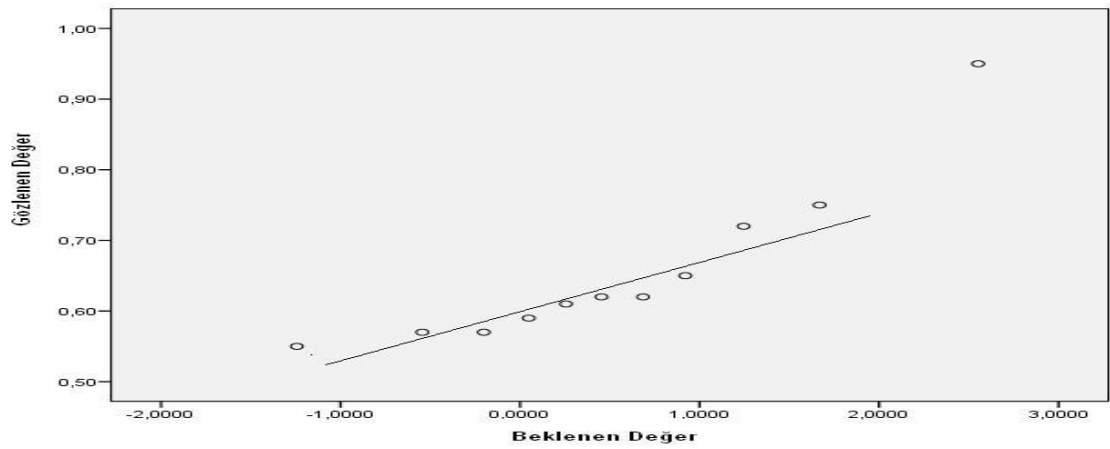
Gübreler arasındaki anlamlılığı test etmek için öncelikle hata terimlerinin dağılımının saptanması gereklidir. her bir deneme için Q-Q grafiklerine bakıldığında üç denemede hata terimlerinin de 0.7 çarpıklık parametresi ve 6 serbestlik derecesi ile çarpık-t dağıldığı görülmektedir. Ancak grafiklere bakıldığında her üç denemede de bir tane aykırı değer olduğu görülmüş ve veriler sansürlenmiştir.



Şekil 5.8 Fındık verisi 1. deneme için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.7$, $\nu = 6$.



Şekil 5.9 Fındık verisi 2. deneme için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.7$, $\nu = 6$.



Şekil 5.10 Fındık verisi 3. deneme için Q-Q grafiği; $\lambda = 0.7$, $\nu = 6$.

Sansürlenmiş veriler kullanılarak LS ve MML yöntemleriyle elde edilen tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak F test istatistiklerinin değerleri çizelge 5.19’da verilmiştir.

Çizelge 5.19 Fındık miktarları verisi için parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiklerinin değeri (sansürlenmiş veri).

	μ	α_1	α_2	α_3	σ	F
LS	0.541	0.056	-0.015	-0.041	0.067	7.23*
MML	0.542	0.052	-0.012	-0.040	0.053	9.31*

* H_0 Red

Çizelge 5.20 fındık miktarları verisi için tam veri kullanılarak LS ve MML yöntemleriyle elde edilen tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak F test istatistiklerinin değerlerini göstermektedir.

Çizelge 5.20 Fındık miktarları verisi parametrelerin LS ve MML tahmin değerleri ve bu tahmin değerleri kullanılarak elde edilen F test istatistiğinin değeri (tam veri).

	μ	α_1	α_2	α_3	σ	F
LS	0.541	0.058	-0.014	-0.044	0.131	2.90
MML	0.563	0.048	-0.008	-0.040	0.083	4.59*

* H_0 Red

Çizelge 5.19’a göre, $\alpha = 0.05$ anlam seviyesinde her iki tahmin yöntemi kullanıldığı zaman hipotez reddedilmekte ancak, MML tahmin edicilerine bağlı olan F test istatistiği daha yüksek bulunmuştur.

Diğer taraftan, çizelge 5.20’den de görüldüğü gibi LS tahminlerine dayanan F test istatistiğine göre

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a$$

olarak ifade edilen sıfır hipotezi reddedilmemektedir. MML tahminlerine dayalı F test istatistiğine göre ise hipotez reddedilmektedir. Ancak görülmektedir ki, sansürleme uygulandığı ve uygulanmadığı zamanda LS tahminlerine dayalı test istatistiği

kullanılırsa karar değişmişken, MML tahminlerine dayalı test istatistiğinde ise karar değişmemiştir.

Çizelge 5.21 ise ilgili parametre değerleri ile elde edilen simülsayon sonuçlarını göstermektedir.

Çizelge 5.21 Parametre tahmin edicilerinin ortalama, varyans ve MSE değerleri; $\lambda = 0.7$, $v = 6$, $n=11$, $q = 1/11$.

Ortalama		Varyans		MSE		RE
$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\tilde{\mu}_{i,LS}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$	$\hat{\mu}_{i,MML}$
-0.126	-0.068	0.111	0.103	0.126	0.108	85
$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\tilde{\sigma}_{LS}$	$\hat{\sigma}_{MML}$	$\hat{\sigma}_{MML}$
1.135	0.923	0.041	0.025	1.330	0.877	66

Çizelge 5.21'den de göüldüğü gibi simülasyon sonuçları uygulamada elde edilen sonucu desteklemektedir.

6. SONUÇ

Varyans analizi modellerinde parametre tahminleri geleneksel olarak LS yöntemiyle yapılmaktadır. Ancak LS yöntemiyle elde edilen tahmin ediciler, hata terimlerinin normal dağılımı varsayımı altında en etkin tahmin edicilerdir. Normal dağılım varsayımı sağlanamazsa parametrelerin LS tahmin edicilerinin etkinlikleri düşmekte, dolayısıyla bu tahmin edicilere dayalı test istatistiklerinin de gücü düşmektedir. Uygulamada normal olmayan dağılımlar normal dağılımlara göre daha yaygındır. Bu çalışmada bir yönlü ve iki yönlü etkileşimli ANOVA modellerinde hata terimlerinin dağılımı çarpık normal ve çarpık t olarak alınmış ve parametre tahminleri ML ve MML yöntemleriyle yapılmıştır. Ayrıca, ML ve MML tahmin edicilerine dayanan test istatistikleri geliştirilmiştir.

Bir yönlü ANOVA modelinde hata terimlerinin çarpık normal dağılması durumunda, çeşitli çarpıklık parametre değerleri ve değişik örneklem büyüklükleri için ML ve MML tahmin edicileri, LS tahmin edicilerine göre daha etkin tahmin ediciler olarak saptanmıştır. Diğer taraftan, ML ve MML tahmin edicilerine dayalı test istatistiklerinin gücünün de LS tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinden daha büyük olduğu Monte Carlo simülasyon yöntemi ile saptanmıştır. ML tahmin edicileri, birbirlerine bağlı olarak bulunduğu parametre tahminleri IRA ile yapılmıştır. Bununla beraber, dayanıklılık için dört farklı alternatif model tanımlanmış ve ML ve MML tahmin edicilerinin daha dayanıklı olduğu görülmüştür.

Hata terimlerinin çarpık t dağılması durumunda ise, μ_i parametresi için ML ve MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicisine göre oldukça etkin olduğu görülmüştür. Etkinlik serbestlik derecesi düştükçe artmaktadır. Serbestlik derecesi arttıkça, dağılım çarpık normal dağılıma yakınsayacağından, etkinlikler çarpık normal dağılımda bulunan etkinliklere yakınsamaktadır. Ancak, σ parametresi için bazı durumlarda LS tahmin edicileri, ML ve MML tahmin edicilerine göre daha etkin çıkmasına rağmen birlikte düşünüldüğü zaman, ML ve MML yöntemleriyle bulunan tahmin edicilerin daha etkin oldukları görülmüştür. ML ve MML tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinin de

LS tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerin de daha güçlü oldukları yine Monte Carlo simülasyon yöntemiyle saptanmıştır.

İki yönlü ve etkileşimli model için, hataların çarpık normal dağılması durumunda, ML ve MML yöntemleriyle elde edilen tahmin ediciler ile LS yöntemiyle elde edilen tahmin ediciler etkinlik yönünden birbirlerine çok yakındır. Ancak, küçük de olsa ML ve MML yöntemleriyle elde edilen tahmin ediciler daha etkindir. Diğer taraftan, etkileşim için ML ve MML tahmin edicileri daha etkin bulunmuştur.

Bir sonraki bölümde, deney tasarımında II. tip sansürleme ele alınmış ve hata terimlerinin çarpık normal ve çarpık t dağılması durumları incelenmiştir. Bu durumda olabilirlik fonksiyonlarında yer alan doğrusal olmayan ifadeler sebebiyle sadece MML yöntemi ile tahminler yapılmış ve yine MML tahmin edicilerinin LS tahmin edicilerine göre daha etkin oldukları görülmüştür. Ancak, bu bölümde, LS tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinin de I. tip hatalarının bozulduğu da saptanmıştır. I. tip hataların yüksek çıkması LS tahmin yöntemiyle elde edilen tahmin edicilere dayalı test istatistiğinin F dağılmadığını göstermektedir.

Hata terimlerinin normal dağılmadığı ancak çarpık normal ve ya çarpık t dağılımına sahip olması durumunda, dağılımı normal dağılımı gibi varsayıp işlemler yapmak, etkinlik kaybına sebep olmakta, ayrıca test istatistiklerinin de gücünün düşmesine neden olmaktadır. Ayrıca, veri setinde aykırı değerler olması durumunda ise LS tahmin edicileri sapmakta, dolayısıyla yanlış çıkarımlara sebep olmaktadır. ML ve MML tahmin edicilerinin her iki dağılım için hem daha etkin hem de daha dayanıklı oldukları, Monte Carlo simülasyon yöntemiyle sonucu elde edilmiştir.

Son olarak, ML ve MML tahmin edicilerini kıyaslayacak olursak, ML tahmin edicileri MML tahmin edicilerine göre az da olsa beklenildiği üzere daha etkin olduğu görülmüştür. Ayrıca ML tahmin edicilerine dayanan test istatistikleri de MML tahmin edicilerine dayanan test istatistiklerinden az da olsa daha güçlü olduğu tespit edilmiştir. Ancak ML tahmin edicilerinin analitik çözümleri bulunamamakta dolayısıyla iteratif yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Diğer taraftan MML tahmin edicileri iterasyona

gerek kalmadan analitik olarak bulunmakla beraber, ML tahmin edicilerinin de özelliklerini taşımaktadır.

KAYNAKLAR

- Arfken, G. 1985. Mathematical methods for Physicists, 3rd rd. Orlando, FL: Academic Press.
- Arslan, O. 1995. Constable P.D.L. and Kent, J.T. Convergence behavior of the EM algorithm for the multivariate t-distribution, Comm. Statist. Theory Methods, Vol: 24, pp: 2981-3000.
- Arslan, O. 2011. A review on the univariate skew t-distributions, Far East Journal of Theoretical Statistics, Vol:34-1, pp: 17-34.
- Azzalini, A. 1985. A class of distributions which includes the normal ones. Scand. Journal of Statistics, Vol:12, pp: 171-178.
- Azzalini, A. 1986. Further results on a class of distributions which includes the normal ones, Statistica, Vol: 46, pp: 199-208.
- Azzalini, A. and Dalla Valle, A. 1996. The multivariate skew-normal distribution, Biometrika, Vol: 83, pp: 715-726.
- Azzalini, A. and Capitanio, A. 1999. Statistical applications of the multivariate skew normal distributions. J. R. Stat. Soc., Vol: ser. B 61, pp: 579-602.
- Azzalini, A. 2005. The skew-normal distribution and related multivariate families (with discussion). Scand. J. Statist. Vol: 32, pp: 159-188 (C/R 189-200).
- Barnett, V. D. 1966. Evaluation of the maximum likelihood estimator where the likelihood equation has multiple roots, Biometrika, Vol: 52, pp: 151-165.
- Bhar, L. 2000. Outliers in designed experiment, I.A.S.R.I, New Delhi, India
- Branco, M.D., Dey, D.K. 2001, A general class of multivariate skew elliptical distributions, J. Multivariate Anal. Vol: 79, pp: 99-113.
- Box, G. E. P. and Cox, D. R. 1964. An anlaysis of transformation, Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol: 26 (2), pp: 211-252.
- Chiogna, M. 1998. Some results on the scalar skew-normal distribution, J. Ital. Statist. Soc., Vol: 1, pp: 1-13.
- Chung, K.L. 2001. A course in probabillity theory, Academiz Pres, USA.
- Cochran, M. 1934. The distributions of quadratic forms, Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Vol: 30, pp: 178-191.
- Dempster, A.P., Laird, N.M. and Ruin, D.B. 1977. Maximum likelihood from

incomplete data via the EM algorithm (with discussion). J. Roy. Statist. Soc. Ser. B Vol: 39, pp: 1-38.

Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. 1980. Iteratively reweighted least squares for linear regression when errors are normal/independent distributed. In: Krishnaiah, P.R. (Ed.) Multivariate Analysis V. North-Holland, Amsterdam, 35-34.

Elveback, L.R., Guillier, C.L. and Keating, F.R. 1970. Health, Normality and the Ghost of Gauss, J. American Medical Assoc., Vol: 211, pp: 69-75.

Ferreira, J., Steel, M.F.J. 2006. A constructive representation of univariate skewed distributions. J Am Stat Assoc. Vol: 101, pp: 823–829

Flecher, C., Allard, D. and Naveau, P. 2009. Truncated skew normal distributions: moments, estimation by weighted moments and application to climatic data, Mathematiques et Informatique Appliquees, Vol: 29, pp: 1-16.

Geary, R.C. 1947. Testing for normality, Biometrika, Vol: 34, pp: 209-242.

Genton, M.G., He, L. and Liu, X. 2001. Moments of skew-normal random vectors and their quadratic forms, Statistics and probability letters, Vol: 51, pp: 319-325.

Genton, M.G. and Loperfida, N.M.R. 2005. Generalized skew-elliptical distributions and their quadratic forms, Ann. Inst. Statist. Math, Vol: 57 (2), pp: 389-401.

Gupta, A.K and Cohen, T. 2001. Goodness-of-fit tests for the skew normal distribution, Communications in Statistics-Simulation and Computation Vol: 30, pp: 907-930.

Gupta, A.K. and Huang, W.J. 2002. Quadratic forms in skew normal variates, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol: 273, pp: 558-564.

Gupta, A.K., Chang, F.C. and Huang, W.J. 2002. Some skew-symmetric models, Random Operators and Stochastic Equations. Vol: 10, pp: 133-140.

Gupta, A.K. 2003. Multivariate skew t-distribution, Statistics. Vol: 37, pp: 359-363.

Henze, N. 1986. A probabilistic representation of the 'skew normal' distribution, Scand. J. Statistics Vol:13, pp: 271-275.

Huber, P.J. 1964. Robust estimation of a location parameter, The Annals of Mathematical Statistics, Vol: 35, pp: 73–101.

Huber, P. J. 1981. Robust Statistics, John Wiley, New York.

Loperfido, N.M.R. 2001. Quadratic forms of skew-normal random vectors, Statistics and probability letters, Vol: 54(4), pp: 381-387.

- Montgomery, D.C. 2005. Design and Analysis of Experiments, John Wiley&Sons Inc., United States of America.
- Nadarajah, S. and Kotz, S. 2003. Skewed distributions generated by the normal kernel, Statistics&Probabiltiy letters, Vol: 65, pp: 269-277.
- Nadarajah, S. and Masoom, A.M. 2004. A skewed truncated T distribution, Mathematical and computer modeling, Vol: 40, pp: 935-939.
- Owen, D.B. 1956. Tables for computing bivariate normal probabilities, Annals of Mathematical Statistics, Vol: 27, pp: 1075-1090.
- Pearson, E.S. 1932. The analysis of variance in cases of nonnormal variation, Biometrika, Vol: 23, pp: 114-133.
- Pewsey, A. 2010. Problems of inference for Azzalini's skewnormal distribution, Journal of applied Statistics, Vol: 27:7, pp: 859 870.
- Puthenpura, S. and Sinha, N.K. 1986. Modified maximum likelihood method fort he robust estimation os system parameters from very noisy data. Automatica, Vol: 22, pp: 231-235.
- Smith, W.B., Zeiss, C.D. and Syler, G.W. 1973. Three parameter lognormal estimation from censored data. J. Indian Statist. Assoc., 1 Vol: 1, pp: 15-31.
- Şenoğlu, B. and Tiku, M.L. 2001. Analysis of variance in experimental design with nonnormal error distributions, Communication in Statistics-Theory and Methods, Vol: 30, pp: 1335-1352.
- Şenoğlu, B. and Tiku, M. L. 2002. Linear contrasts in experimental design with non-identical error distributions, Biometrical Journal, Vol: 44(3), pp. 359–374.
- Şenoğlu, B. and Tiku, M.L. 2004. Censored and truncated samples in experimental design under non-normality, Statistical Methods, Vol: 6 (2), pp: 173-199.
- Şenoğlu, B. 2005. Robust 2^k factorial design with Weibull error distributions, Journal of Applied Statistics, Vol: 32, pp: 1051-1066.
- Şenoğlu, B. 2007. Estimating parameters in one-way analysis of covariance model with short-tailed symmetric error distributions", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol: 201, pp: 275-283.
- Şenoğlu, B. 2007. Robust Estimation and hypothesis testing of linear contrasts in analysis of covariance with stochastic covariates", Journal of Applied Statistics, Vol: 34, pp: 141-151.
- Şenoğlu B., Avcioğlu M.D. 2009. Analysis of covariance with non-normal errors", International Statistical Reviews, Vol: 77(3), pp: 366-377.

- Şenoğlu, B., Acıtaş, Ş. 2010. İstatistiksel Deney Tasarımı-Sabit Etkili Modeller, Nobel Yayınevi, Türkiye
- Tan, W.Y. 1985. On Tiku's robust procedure- a Bayesian insight. J. Stat. Plan. Inf., Vol: 11, pp: 329-340.
- Tiku, M. L. 1967. Estimating the mean and standard deviation from censored normal samples, Biometrika, Vol: 54, pp: 155–165.
- Tiku, M.L. 1968. Estimating the parameters of log-normal distribution from censored samples, J. Amer. Stat Assoc., Vol: 63, pp: 134-140.
- Tiku, M.L., 1971. Power function of the F test under nonnormal situations", J.Amer.Stat.Assoc., Vol: 66, pp: 913-916.
- Tiku ,M.L., Tan, W.Y., Balakrishnan, N. 1986. Robust Inference , Marcel Dekker, New York, A.B.D.
- Tiku, M.L. and Suresh, R.P. 1992. A new method of estimation for location and scale parameters. J. Stat. Plann. Inf., Vol: 30 , pp: 281–292.
- Vaughan, D.C. 1992. On the Tiku-Suresh method of estimation, Commun. Stat.-Theory Meth., Vol: 22, pp: 231-235.
- Wang, J., Boyer, J. and Genton, M. G. 2004. A note on an equivalence between chi-square and generalized skew-normal distributions. Statist. Probab. Lett. Vol: 66, pp: 395-398.

EKLER

**EK 1 NORMAL, t , ÇARPIK NORMAL ve ÇARPIK t
DAĞILIMLARI**

**EK 2 t , ÇARPIK NORMAL ve ÇARPIK t DAĞILIMLARI İLE
İLGİLİ BAZI ÖNEMLİ TEOREMLER VE İSPATLARI**

**EK 3 İKİ YÖNLÜ VE BİR YÖNLÜ SANSÜRLENMİŞ ANOVA İÇİN
MATLAB PROGRAM KODLARI**

EK 1 NORMAL, t , ÇARPIK NORMAL ve ÇARPIK t DAĞILIMLARI

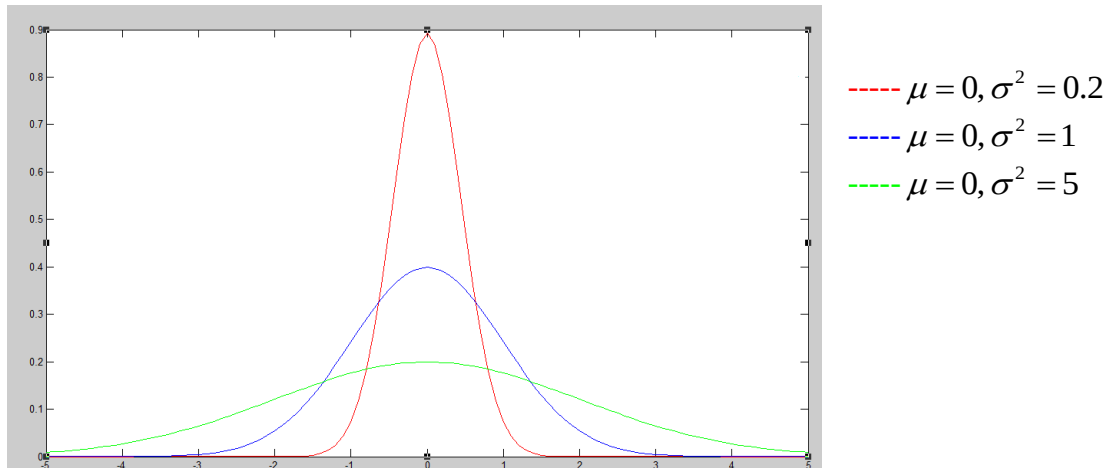
1. Normal Dağılım

İstatistik ve olasılığın önemli dağılımlarından biri olan normal dağılım, ilk olarak 1733'te Abraham de Moivre tarafından yayınlanan bir yazıda ortaya çıkartılmıştır ve 1738'de yayınlanan The Doctrine of Chances (Şanslar Doktrini) adlı kitabının ikinci baskısında p değişmemek koşuluyla n değerinin artışıyla binom dağılımının limit şekli, yaklaşım olarak gösterilmiştir. Normal dağılım, aynı zamanda Gauss tipi dağılım olarak isimlendirilen birçok alanda pratik uygulaması olan çok önemli bir sürekli olasılık dağılım ailesinden biridir. Bu dağılım, olasılık fonksiyonunun grafik şekli bir çan gibi görüntü verdiği için çoğu kez çan eğrisi olarak da anılır.

Bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in R, \mu \in R, \sigma^2 > 0 \quad (1)$$

biçiminde tanımlandığında X rasgele değişkenine, μ ortalamalı σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ biçiminde gösterilir.



Şekil 1 Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ olması durumunda X rasgele değişkenine, standart normal dağılıma sahiptir denir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, -\infty < x < \infty \quad (2)$$

biçimindedir.

1.1 Normal Dağılımın Momentleri

Normal dağılımın beklenen değeri ve varyansı,

$$E(X) = \mu \quad V(X) = \sigma^2 \quad (3)$$

şeklindedir. Çarpıklığı ve basıklığı,

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 3 \quad (4)$$

şeklindedir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ise,

$$M_x(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \quad (5)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

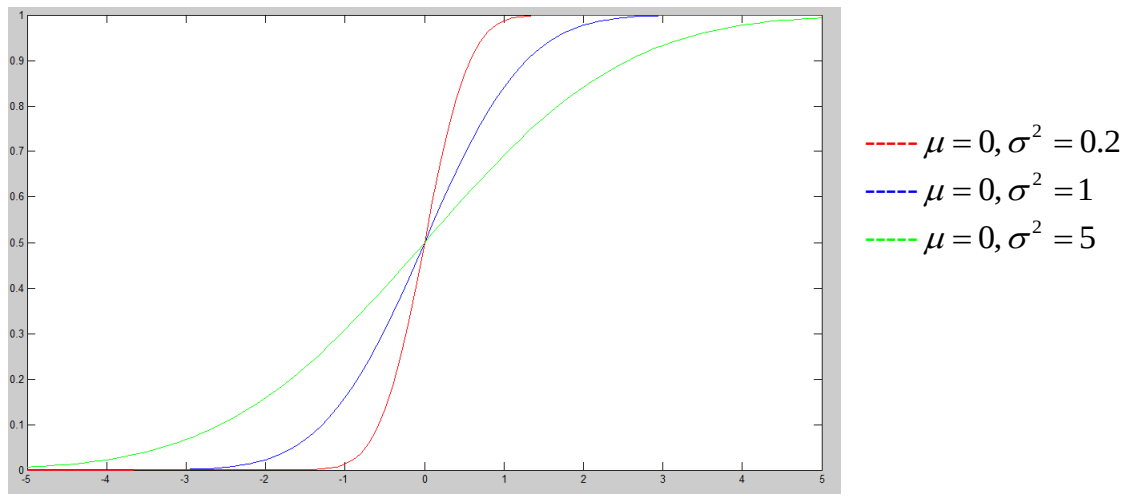
1.2 Dağılım Fonksiyonu

Normal dağılımın dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du \\
&= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), x \in R
\end{aligned} \tag{6}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Normal dağılımın dağılım fonksiyonunun açık bir formu yoktur.



Şekil 2 Normal dağılımın dağılım fonksiyonu grafikleri

2. Student-t Dağılımı

Students' t dağılımı genel olarak örneklem sayısı veya sayıları küçük ise ve kitle normal dağılım gösterdiği varsayılırsa, istatistik uygulaması için çok kullanılan bir sürekli olasılık dağılımıdır. Çok popüler olarak tek bir kitle ortalaması için güven aralığı veya hipotez sınaması ve iki kitle ortalamasının arasındaki fark için güven aralığı veya hipotez sınamasında kullanılmaktadır. t -dağılımının ortaya çıkarılması, ilk defa 1908'de Dublince Guinness Bira Fabrikasında çalışan William Sealy Gosset tarafından yayımlanan bir makale ile olmuştur. Çalıştığı firma, yazıya adının koyulmasını kabul etmeyince, bu yayının yazarı, Student (öğrenci) olarak verilmiştir. Sonradan t -sınamaları ve ilişkili teori, R.A. Fisher tarafından geliştirilmiş ve bu dağılıma, Student'in t dağılımı adı verilmiştir. Çıkarımsal istatistiksel çalışmalarda, normal dağılımın yerine

küçük örneklem bulunan problemler için kullanılmakla beraber Student t -dağılımı, teorik bakımdan genelleştirilmiş hiperbolik dağılımının bir özel halidir (Hogg ve Craig 1978).

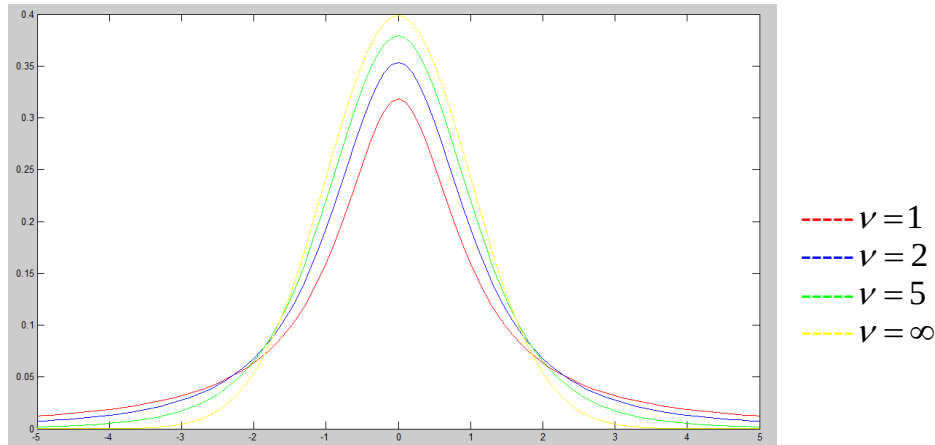
Student-t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad -\infty < x < \infty, \nu > 0 \quad (7)$$

olarak verilmektedir. Burada $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ beta fonksiyonu olarak tanımlanmakta olup,

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (8)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. t -dağılımı sadece ν parametresine dayanır ve μ veya σ , t -dağılımı için parametre değildirler. İşte bu gerçek (yani μ ve σ nin parametre olmaması) hem teorik bakımdan ve daha belirgin olarak pratik çıkarımsal istatistik analizi bakımından, t -dağılımı istatistik bilimi için çok önemlidir (Hogg ve Craig 1978).



Şekil 3 Student-t dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

2.1 Student-t Dağılımının Mometleri

Student-t dağılımının momentleri,

$$E(X^k) = \begin{cases} 0 & k \text{ tek}, 1 < k < \nu \\ \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-k}{2}\right)\nu^{k/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} & k \text{ çift}, 1 < k < \nu \\ \text{belirsiz} & k \text{ tek}, 1 < \nu \leq k \\ \infty & k \text{ çift}, 1 < \nu \leq k \end{cases} \quad (9)$$

formülü ile genelleştirilebilir. Buna göre, student-t dağılımın beklenen değeri, varyansı, basıklığı ve çarpıklığı sırasıyla,

$$E(X) = 0 \quad (\nu > 1 \text{ iken}) \quad (10)$$

$$V(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (\nu > 2 \text{ iken}) \quad (11)$$

$$\gamma_1 = 0 \quad (\nu > 3 \text{ iken}), \quad \gamma_2 = \frac{6}{\nu - 4} \quad (\nu > 4 \text{ iken}) \quad (12)$$

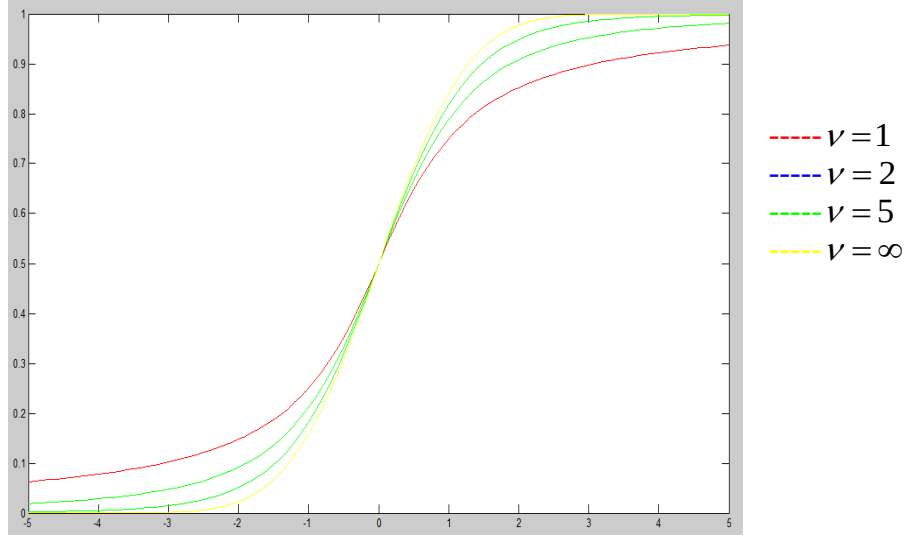
şeklindedir. Ayrıca t- dağılımının moment çıkaran fonksiyonun açık formu mevcut değildir.

2.2 Dağılım Fonksiyonu

Student-t dağılım fonksiyonu,

$$T_\nu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\nu}}\right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{(\nu-1)/2} B\left(i, \frac{1}{2}\right) \frac{\nu^{i-\frac{1}{2}} x}{(\nu + x^2)^i} & , \quad \nu \text{ tek} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu/2} B\left(i - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{\nu^{i-1} x}{(\nu + x^2)^{i-\frac{1}{2}}} & , \quad \nu \text{ çift} \end{cases} \quad (13)$$

olarak verilmektedir (Nadarajah and Kotz 2003)



Şekil 4 Student-t dağılımının dağılım fonksiyonu

3. Çarpık (Skew) Normal Dağılım

Çarpık-normal dağılımın önemli teoriksel özellikleri ise aşağıdaki gibidir.

1. $X \sim SN(0) \Rightarrow X \sim N(0,1)$ olur.
2. $\lambda \rightarrow \infty \Rightarrow h(x) = 2\phi(x)I_{x>0}$ olur ve yarı normal dağılım olarak adlandırılır.
3. $X \sim SN(\lambda) \Rightarrow -X \sim SN(-\lambda)$ olur.
4. $SN(\lambda)$ dağılımı tek-tepeli (unimodal) bir dağılımdır. Çünkü, $\log(h(x))$ x 'in konkav bir fonksiyonudur.
5. $Y \sim N(0,1)$ ve $Z \sim SN(\lambda)$ ise $|Y|$ ve $|Z|$ aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.
6. $X \sim SN(\lambda) \Rightarrow X^2 \sim \chi_{(1)}^2$ olur.

3.1 Çarpık-Normal Dağılımın Momentleri

6. özellikten faydalanarak, normal dağılımın ve çarpık-normal dağılımın çift momentlerinin aynı olduğu söylenebilir. Tek momentlerini bulmak için Lemma 1.2.'den faydalanılır.

Lemma 1.2: X ve Y aralarında δ korelasyon olan iki değişkenli normal dağılıma sahip olmak üzere,

$$Y | X > 0 \sim SN(\lambda(\delta))$$

(E1.18) dağılmaktadır. Burada, $\lambda(\delta) = \delta / \sqrt{1 - \delta^2}$ ve $\delta = \lambda / \sqrt{1 + \lambda^2}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Çarpık-normal dağılımın tek momentlerini bulmak için, moment çıkaran fonksiyondan faydalanılır. Burada, $X \sim SN(\lambda)$ ise moment çıkaran fonksiyon,

$$M_X(t) = 2 \exp(t^2) \Phi(\lambda t) \quad (14)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Çarpık-normal dağılımın tek momentleri,

$$E(X^{2k+1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda (1 + \lambda^2)^{-k+1/2} 2^{-k} (2k+1)! \sum_{t=0}^k \frac{t! (2\lambda)^{2t}}{(2t+1)!(k-t)!} \quad (15)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Çift momentler ise serbestlik derecesi bir olan ki-kare dağılımın momentleri ile aynıdır.

$$X \sim SN(\lambda) \Rightarrow X^2 \sim \chi_{(1)}^2 \quad (16)$$

olduğundan, çarpık-normal dağılımın çift momentleri,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= v = 1 \\ E(X^4) &= v^2 + 2v = 3 \\ E(X^6) &= v^3 + 6v^2 + 8v = 15 \end{aligned} \quad (17)$$

şeklinde sıralanabilir. Buna göre

3.2 Dağılım Fonksiyonu

Azzalini (1985) çarpık-normal dağılım fonksiyonunu,

$$H(x) = 2 \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda s} \phi(s)\phi(t) dt ds \quad (18)$$

integralinin çözümü olarak,

$$H(x) = \Phi(x) - 2T(x; \lambda) \quad (19)$$

şeklinde ifade etmiştir. Burada, $T(x; \lambda)$, Owen fonksiyonu olarak bilinmektedir. Owen fonksiyonu, sınırları $x = h, y = 0, y = ax$ olan iki değişkenli normal dağılımın altında kalan alandır. Buna göre Owen fonksiyonu,

$$T(x, \lambda) = \int_x^\infty \int_0^{\lambda s} \phi(s)\phi(t) dt ds \quad (20)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Owen fonksiyonu, x için azalan bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki özellikleri taşımaktadır.

- $-T(x, \lambda) = T(x, -\lambda)$
- $T(-x, \lambda) = T(x, \lambda)$
- $2T(x, 1) = \Phi(\lambda)\Phi(-\lambda)$

Owen fonksiyonu özelliklerinden ve çarpık normal dağılımın $X \sim SN(\lambda)$ ise $-X \sim SN(-\lambda)$ olması özelliğinden, çarpık normal dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $1 - H(-x, \lambda) = H(x, -\lambda)$
- $H(z, 1) = \{\Phi(x)\}^2$

- $\sup_x |\Phi(x) - H(x, \lambda)| = \frac{1}{\pi} \arctan |\lambda|$

3.3 Tahmin ve Sonuç Çıkarımı

Çarpık normal dağılımın konum, ölçek ve şekil parametrelerini tahmin etmek için momentler yöntemi veya en çok olabilirlik yöntemi kullanılmaktadır. Ancak her iki yöntemde de şekil parametresini tahmin etmek hususunda ciddi problemler söz konusudur. Momentler yönteminde, şekil parametresi sadece $(-0.9953, 0.9953)$ aralığında ise tahmin söz konusudur. Bu da uygulamada önemli kısıtlar getirmektedir. En çok olabilirlik yönteminde ise çarpık normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$h(x; \mu, \sigma, \lambda) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (21)$$

olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\mu, \sigma, \lambda) = 2^n \sigma^{-n} \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \quad (22)$$

şeklindedir. Olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre türevi alınıp, sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki eşitliklere ulaşılmaktadır.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i - \lambda \sum_{i=1}^n \beta_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n z_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^n \beta_i z_i - n &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \beta_i z_i &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Burada,

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad \text{ve} \quad \beta_i = \frac{\phi(\lambda z_i)}{\Phi(\lambda z_i)} \quad (24)$$

şeklindedir. (23) 'deki eşitlikler Chiogna (1997) tarafından,

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{x} - \hat{\lambda} \hat{\sigma} \bar{\beta}, \\ \bar{\sigma}^2 &= s^2 (1 - \hat{\lambda}^2 \bar{\beta}^2)^{-1}, \\ \sum_{i=1}^n \beta_i z_i &= 0,\end{aligned}\tag{25}$$

şeklinde sadeleştirilmiştir. Burada, $\bar{x}$ ve s^2 , sırasıyla örneklem ortalamasını ve varyansını göstermektedir. Ancak söz konusu eşitliklerden parametrelerin tahmin edicilerinin kapalı bir formunu bulmak mümkün değildir. Bunun yerine, sayısal maksimizasyon problemleriyle tahmin edicilerin tahmin değerleri bulunmaya çalışılmıştır. Azzalini (1985),

$$Y = \theta_1 + \theta_2 \left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \right)\tag{26}$$

şeklinde eşitliğe yeni parametreler ekleyerek en çok olabilirlik yöntemindeki zorlukları aşmak istemiştir. Burada, iteratif maksimizasyon yöntemleri kullanarak parametre tahminlerine ulaşılmıştır. Azzalini ve Capitanio (1999), Newton-Rapson yöntemini, quasi-Newton Rapson yöntemini ve EM algoritmasını kullanmışlardır. Pewsey (2000) ise Nelder-Mead simpleks algoritmasını kullanmıştır. Son olarak yeni parametrelerin aşağıdaki değerlerine ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned}\mu &= \theta_1 - \theta_2 \left(\frac{2\gamma}{4 - \pi} \right)^{1/3}, \\ \sigma &= \theta_2 \left[1 + \left(\frac{2\gamma}{4 - \pi} \right)^{2/3} \right]^{1/2}, \\ \lambda &= \left(\frac{2\gamma}{4 - \pi} \right)^{1/3} \left[\frac{2}{\pi} + \left(\frac{2\gamma}{4 - \pi} \right)^{2/3} \left(\frac{2 - \pi}{\pi} \right) \right]\end{aligned}\tag{27}$$

Burada, γ , yeni parametrelendirilmiş Y rasgele değişkeninin çarpıklık katsayısıdır.

EK 2 t, ÇARPIK NORMAL ve ÇARPIK t DAĞILIMLARI İLE İLGİLİ BAZI ÖNEMLİ TEOREMLER VE İSPATLARI

Teorem 1: Student-t dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = 0 \quad (\nu > 1 \text{ iken})$$

$$V(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (\nu > 2 \text{ iken})$$

şeklindedir.

İspat: Student- t dağılımının beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \nu^{\nu/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (v+x^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \nu^{\nu/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} x (v+x^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx \end{aligned}$$

Burada, $u = v + x^2$ ve $2xdx = du$ dönüşümü uygulanarak,

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \nu^{\nu/2}}{2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^{\frac{\nu+1}{2}}} du$$

integraline ulaşılır. Burada $\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)v^{\frac{v}{2}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$ ifadesine a denilir ve integral limit şeklinde

yazılırsa,

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} a \int_{-t}^t u^{\frac{v+1}{2}} du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} a \frac{u^{\frac{1-v}{2}}}{1-\frac{v}{2}} \Big|_{-t}^t \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunmaktadır.

Teorem 2: f , 0 etrafında simetrik olasılık yoğunluk fonksiyonu ve G , mutlak sürekli (Lebesgue ölçüsüne göre) dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$h(x) = 2G(\lambda x) f(x), \quad x \in R$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon da $\lambda \in R$ için olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliklerini taşır (Azzalini, 1985).

İspat:

Teoremin isaptı için öncelikle aşağıdaki tanıma ihtiyaç duyulur.

Tanım: f , $[a, b]$ aralığından reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığı $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ $i = 1, 2, \dots, n$, $n < \infty$ olmak üzere n tane ayrık alt aralığa bölünsün.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcutsa f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir. Buna göre, f

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ise $[a, b]$ nin hemen hemen her noktasında türevlidir.

Son olarak F fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ise, $\forall x_1 < x_2 \in [a, b]$ için tanımlı bir f mevcuttur öyle ki,

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$

olur (Chung, 1968). Buna göre,

λX ve Y birbirinden bağımsız ve sırasıyla özdeş f ve G' (G mutlak sürekli) olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere,

$$P(Y \leq \lambda X) = \frac{1}{2}$$

olması beklenir. Buradan hareketle,

$$P(Y \leq \lambda X) = \int_{-\infty}^{\infty} P(Y \leq \lambda X \mid X = x) f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda x) f(x) dx = \frac{1}{2}$$

olduğundan, $h(x) = 2G(\lambda x) f(x)$, $x \in R$ olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliğini taşımaktadır.

Teorem 3: Çarpık normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t) = 2 \exp(t^2) \Phi(\alpha t)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat: Bilindiği üzere moment çıkaran fonksiyon,

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. İspat için aşağıdaki özellikten faydalanılmaktadır. Buna göre, X , standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere, $\forall h, k \in R$ için,

$$E\{\Phi(hX + k)\} = \Phi\left\{k / \sqrt{1 + h^2}\right\}$$

şeklindedir.

Buna göre moment çıkaran fonksiyon,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int e^{tx} 2\phi(x)\Phi(\lambda x)dx \\ &= 2e^{t^2/2} \int \phi(x+t)\Phi(\lambda(x+t))dx \\ &= 2e^{t^2/2} E(\Phi(\lambda x + \lambda t)) \\ &= 2e^{t^2/2} \Phi(\delta) \end{aligned}$$

şeklinde bulunmaktadır.

Teorem 4: Çarpık normal dağılımın beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\delta \\ V(X) &= 1 - \frac{2}{\pi}\delta^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada,

$$\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

dir.

İspat: Çarpık-normal dağılımın moment çıkarar fonksiyonu,

$$M(t) = 2 \exp(t^2) \Phi(\delta t)$$

olmak üzere moment çıkarar fonksiyonun birinci türevinde $t=0$ ifadesi yerine koyularak beklenen değer bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{dM_X(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \exp(t^2) \Phi(\delta t) \Big|_{t=0} \\ &= 2 \exp(t^2) \Big|_{t=0} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\delta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Big|_{t=0} \\ &= 2 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\delta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Buradan, Leibnitz kuralına göre integralin türevi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\delta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \Big|_{t=0} &= f(\delta t) \frac{d}{dt}(\delta t) + \int_{-\infty}^{\delta t} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^3}{2}} \Big|_{t=0} + 0 \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Buna göre çarpık normal dağılımın beklenen değeri,

$$E(X) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Varyansı ise,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

formülünden,

$$V(X) = 1 - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \right)^2$$

olarak hesaplanmaktadır.

Teorem 5: Çarpık normal dağılım fonksiyonu,

$$H(x) = \Phi(x) - 2T(x; \lambda)$$

şeklindedir.

İspat: Çarpık normal dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{-\infty}^x h(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^x 2\phi(x)\Phi(\lambda x) dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda x} \phi(t)\phi(s) dt ds \end{aligned}$$

şeklindedir. İstatistik teorisinde önemli bir yeri olan Owen fonksiyonu,

$$T(x, \lambda) = \int_x^\infty \int_0^{\lambda s} \phi(s)\phi(t) dt ds$$

şeklinde bilinmektedir. Buradan, dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda x} \phi(t)\phi(s) dt ds &= \int_{-\infty}^x \phi(s) ds - 2 \int_x^\infty \int_0^{\lambda s} \phi(s)\phi(t) dt ds \\ &= \Phi(x) - 2T(x, \lambda) \end{aligned}$$

şeklinde yazılmaktadır.

Teorem 6: Çarpık-t dağılımının beklenen değer ve varyansı sırasıyla,

$$E(X) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{(\lambda^2+1)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad \nu > 1$$

$$V(X) = \frac{\nu}{\nu-2} - \frac{\nu}{\pi} \frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2, \quad \nu > 2$$

şeklindedir.

İspat: $X = ZV^{-1/2}\sqrt{\nu}$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(ZV^{-1/2}\sqrt{\nu}) \\ &= \sqrt{\nu} E(Z) E(V^{-1/2}) \end{aligned}$$

Burada, Z ve V sırasıyla, çarpık normal dağılıma sahip rasgele değişken ve ν serbestlik dereceli ki-kare dağılıma sahip rasgele değişken olmak üzere,

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \\ E(V^{-1/2}) &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \end{aligned}$$

olduğu bilindiğinden,

$$E(X) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\lambda \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\sqrt{(\lambda^2+1)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad \nu > 1$$

olarak hesaplanmaktadır. Buradan,

$$X^2 = Z^2 V^{-1} \nu$$

ise,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(Z^2 V^{-1} \nu) \\ &= \nu E(X^2) E(V^{-1}) \end{aligned}$$

olduğundan ve,

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= 1 \\ E(V^{-1}) &= \frac{1}{\nu - 2} \end{aligned}$$

bilindiğinden,

$$E(X^2) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

olarak hesaplanır. Buradan varyans,

$$V(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} - \frac{\nu}{\pi} \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \right)^2, \quad \nu > 2$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

EK 3 İKİ YÖNLÜ VE BİR YÖNLÜ SANSÜRLENMİŞ ANOVA İÇİN MATLAB PROGRAM KODLARI

EK 3.1 Hata Terimlerinin Çarpık Normal Dağılımı Durumunda İki Yönlü Varyans Analizi Bilgisayar Programı

```
clear
clc

a=3;
b=3;
n=5;

N=a*b*n;

sim=100000/n;

lamda=1;
delta=lamda/(sqrt(1+lamda^2));
sabit=sqrt(2/pi);
ortalama=delta*sabit;
variance=1-delta^2*(2/pi);
d=0;

Ftablo1=finv(0.95,a-1,N-(a*b));

Ftablo2=finv(0.95,b-1,N-(a*b));

Ftablo3=finv(0.95,(a-1)*(b-1),N-(a*b));

t1=tic;

% bu kısım çarpık normal dağılımdan sayı üretir %

for k=1:sim
    u1(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u2(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u3(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u4(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u5(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u6(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u7(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u8(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);
    u9(:,k)=rsn(n,0,1,lamda);

    % bu kısım güç hesaplaması için %

    %y1=((u1)./sqrt(variance))+d;
    %y2=((u2)./sqrt(variance))+d;
    %y3=((u3)./sqrt(variance))+d;
    %y4=((u4)./sqrt(variance))-(2*d);
    %y5=((u5)./sqrt(variance))-(2*d);
```

```

%y6=( (u6) ./sqrt (variance)) - (2*d);
%y7=( (u7) ./sqrt (variance)) +d;
%y8=( (u8) ./sqrt (variance)) +d;
%y9=( (u9) ./sqrt (variance)) +d;

y1 (:,k)=u1 (:,k);
y2 (:,k)=u2 (:,k);
y3 (:,k)=u3 (:,k);
y4 (:,k)=u4 (:,k);
y5 (:,k)=u5 (:,k);
y6 (:,k)=u6 (:,k);
y7 (:,k)=u7 (:,k);
y8 (:,k)=u8 (:,k);
y9 (:,k)=u9 (:,k);

y (:,k)=[y1 (:,k);y2 (:,k);y3 (:,k);y4 (:,k);y5 (:,k);y6 (:,k);y7 (:,k);y8 (:,k)
);y9 (:,k)];
y1a (:,k)=[y1 (:,k);y2 (:,k);y3 (:,k)];
y2a (:,k)=[y4 (:,k);y5 (:,k);y6 (:,k)];
y3a (:,k)=[y7 (:,k);y8 (:,k);y9 (:,k)];
y1b (:,k)=[y1 (:,k);y4 (:,k);y7 (:,k)];
y2b (:,k)=[y2 (:,k);y5 (:,k);y8 (:,k)];
y3b (:,k)=[y3 (:,k);y6 (:,k);y9 (:,k)];

mu (:,k)=mean (y (:,k));
mu1a (:,k)=mean (y1a (:,k));
mu2a (:,k)=mean (y2a (:,k));
mu3a (:,k)=mean (y3a (:,k));
mu1b (:,k)=mean (y1b (:,k));
mu2b (:,k)=mean (y2b (:,k));
mu3b (:,k)=mean (y3b (:,k));

mu1 (:,k)=mean (y1 (:,k));
mu2 (:,k)=mean (y2 (:,k));
mu3 (:,k)=mean (y3 (:,k));
mu4 (:,k)=mean (y4 (:,k));
mu5 (:,k)=mean (y5 (:,k));
mu6 (:,k)=mean (y6 (:,k));
mu7 (:,k)=mean (y7 (:,k));
mu8 (:,k)=mean (y8 (:,k));
mu9 (:,k)=mean (y9 (:,k));

tao1 (:,k)=mu1a (:,k)-mu (:,k);
tao2 (:,k)=mu2a (:,k)-mu (:,k);
tao3 (:,k)=mu3a (:,k)-mu (:,k);

gama1 (:,k)=mu1b (:,k)-mu (:,k);
gama2 (:,k)=mu2b (:,k)-mu (:,k);
gama3 (:,k)=mu3b (:,k)-mu (:,k);

tetagama11 (:,k)=mu1 (:,k)-mu1a (:,k)-mu1b (:,k)+mu (:,k);
tetagama12 (:,k)=mu2 (:,k)-mu1a (:,k)-mu2b (:,k)+mu (:,k);
tetagama13 (:,k)=mu3 (:,k)-mu1a (:,k)-mu3b (:,k)+mu (:,k);
tetagama21 (:,k)=mu4 (:,k)-mu2a (:,k)-mu1b (:,k)+mu (:,k);
tetagama22 (:,k)=mu5 (:,k)-mu2a (:,k)-mu2b (:,k)+mu (:,k);
tetagama23 (:,k)=mu6 (:,k)-mu2a (:,k)-mu3b (:,k)+mu (:,k);
tetagama31 (:,k)=mu7 (:,k)-mu3a (:,k)-mu1b (:,k)+mu (:,k);
tetagama32 (:,k)=mu8 (:,k)-mu3a (:,k)-mu2b (:,k)+mu (:,k);

```

```

tetagama33(:,k)=mu9(:,k)-mu3a(:,k)-mu3b(:,k)+mu(:,k);

s1(:,k)=sum((y1(:,k)-mu1(:,k)).^2);
s2(:,k)=sum((y2(:,k)-mu2(:,k)).^2);
s3(:,k)=sum((y3(:,k)-mu3(:,k)).^2);
s4(:,k)=sum((y4(:,k)-mu4(:,k)).^2);
s5(:,k)=sum((y5(:,k)-mu5(:,k)).^2);
s6(:,k)=sum((y6(:,k)-mu6(:,k)).^2);
s7(:,k)=sum((y7(:,k)-mu7(:,k)).^2);
s8(:,k)=sum((y8(:,k)-mu8(:,k)).^2);
s9(:,k)=sum((y9(:,k)-mu9(:,k)).^2);

SSE(:,k)=s1(:,k)+s2(:,k)+s3(:,k)+s4(:,k)+s5(:,k)+s6(:,k)+s7(:,k)+s8(:,k)+s9(:,k);

MSE(:,k)=SSE(:,k)/(N-(a*b));

% LS tahmin edicileri%

mutilda=mu-ortalama.*sqrt(MSE);
sigma2tilda=MSE/variance;

Fdeneme(:,k)=(b*n).*(tao1(:,k).^2+tao2(:,k).^2+tao3(:,k).^2)/(a-1))./MSE(:,k);

Fblok(:,k)=(a*n).*(gama1(:,k).^2+gama2(:,k).^2+gama3(:,k).^2)/(b-1))./MSE(:,k);

Fetkilesim(:,k)=(n.*(tetagama11(:,k).^2+tetagama12(:,k).^2+tetagama13(:,k).^2+tetagama21(:,k).^2+tetagama22(:,k).^2+tetagama23(:,k).^2+tetagama31(:,k).^2+tetagama32(:,k).^2+tetagama33(:,k).^2)/((a-1)*(b-1)))./MSE(:,k);

% Bu kısım ML tahmin edicileri için %

stdx1(:,k)=(y1(:,k)-mu(:,k)-tao1(:,k)-gama1(:,k)-tetagama11(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx2(:,k)=(y2(:,k)-mu(:,k)-tao1(:,k)-gama2(:,k)-tetagama12(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx3(:,k)=(y3(:,k)-mu(:,k)-tao1(:,k)-gama3(:,k)-tetagama13(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx4(:,k)=(y4(:,k)-mu(:,k)-tao2(:,k)-gama1(:,k)-tetagama21(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx5(:,k)=(y5(:,k)-mu(:,k)-tao2(:,k)-gama2(:,k)-tetagama22(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx6(:,k)=(y6(:,k)-mu(:,k)-tao2(:,k)-gama3(:,k)-tetagama23(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx7(:,k)=(y7(:,k)-mu(:,k)-tao3(:,k)-gama1(:,k)-tetagama31(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx8(:,k)=(y8(:,k)-mu(:,k)-tao3(:,k)-gama2(:,k)-tetagama32(:,k))./sqrt(MSE(:,k));
stdx9(:,k)=(y9(:,k)-mu(:,k)-tao3(:,k)-gama3(:,k)-tetagama33(:,k))./sqrt(MSE(:,k));

```

```

g1(:,k)=normpdf(lamda*stdx1(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx1(:,k),0,1);
g2(:,k)=normpdf(lamda*stdx2(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx2(:,k),0,1);
g3(:,k)=normpdf(lamda*stdx3(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx3(:,k),0,1);
g4(:,k)=normpdf(lamda*stdx4(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx4(:,k),0,1);
g5(:,k)=normpdf(lamda*stdx5(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx5(:,k),0,1);
g6(:,k)=normpdf(lamda*stdx6(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx6(:,k),0,1);
g7(:,k)=normpdf(lamda*stdx7(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx7(:,k),0,1);
g8(:,k)=normpdf(lamda*stdx8(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx8(:,k),0,1);
g9(:,k)=normpdf(lamda*stdx9(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx9(:,k),0,1);

g(:,k)=[g1(:,k);g2(:,k);g3(:,k);g4(:,k);g5(:,k);g6(:,k);g7(:,k);g8(:,k);g9(:,k)];

g1a(:,k)=[g1(:,k);g2(:,k);g3(:,k)];
g2a(:,k)=[g4(:,k);g5(:,k);g6(:,k)];
g3a(:,k)=[g7(:,k);g8(:,k);g9(:,k)];
g1b(:,k)=[g1(:,k);g4(:,k);g7(:,k)];
g2b(:,k)=[g2(:,k);g5(:,k);g8(:,k)];
g3b(:,k)=[g3(:,k);g6(:,k);g9(:,k)];

g1ort(:,k)=mean(g1(:,k));
g2ort(:,k)=mean(g2(:,k));
g3ort(:,k)=mean(g3(:,k));
g4ort(:,k)=mean(g4(:,k));
g5ort(:,k)=mean(g5(:,k));
g6ort(:,k)=mean(g6(:,k));
g7ort(:,k)=mean(g7(:,k));
g8ort(:,k)=mean(g8(:,k));
g9ort(:,k)=mean(g9(:,k));

g1aort(:,k)=mean(g1a(:,k));
g2aort(:,k)=mean(g2a(:,k));
g3aort(:,k)=mean(g3a(:,k));

g1bort(:,k)=mean(g1b(:,k));
g2bort(:,k)=mean(g2b(:,k));
g3bort(:,k)=mean(g3b(:,k));
gort(:,k)=mean(g(:,k));

sigma2ilk(:,k)=SSE(:,k)./(N-(a*b))-(N-(a*b))*lamda^2*(g1ort(:,k).^2+g2ort(:,k).^2+g3ort(:,k).^2+g4ort(:,k).^2+g5ort(:,k).^2+g6ort(:,k).^2+g7ort(:,k).^2+g8ort(:,k).^2+g9ort(:,k).^2))./(a*b));
muilk(:,k)=mu(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*gort(:,k);
tao1ilk(:,k)=tao1(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g1aort(:,k)-gort(:,k));
tao2ilk(:,k)=tao2(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g2aort(:,k)-gort(:,k));
tao3ilk(:,k)=tao3(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g3aort(:,k)-gort(:,k));
gama1ilk(:,k)=gama1(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g1bort(:,k)-gort(:,k));
gama2ilk(:,k)=gama2(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g2bort(:,k)-gort(:,k));
gama3ilk(:,k)=gama3(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g3bort(:,k)-gort(:,k));

```

```

        tetagama11ilk(:,k)=tetagama11(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g1ort(:,k)-g1aort(:,k)-
g1bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama12ilk(:,k)=tetagama12(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g2ort(:,k)-g1aort(:,k)-
g2bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama13ilk(:,k)=tetagama13(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g3ort(:,k)-g1aort(:,k)-
g3bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama21ilk(:,k)=tetagama21(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g4ort(:,k)-g2aort(:,k)-
g1bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama22ilk(:,k)=tetagama22(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g5ort(:,k)-g2aort(:,k)-
g2bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama23ilk(:,k)=tetagama23(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g6ort(:,k)-g2aort(:,k)-
g3bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama31ilk(:,k)=tetagama31(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g7ort(:,k)-g3aort(:,k)-
g1bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama32ilk(:,k)=tetagama32(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g8ort(:,k)-g3aort(:,k)-
g2bort(:,k)+gort(:,k));
        tetagama33ilk(:,k)=tetagama33(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2ilk(:,k)).*(g9ort(:,k)-g3aort(:,k)-
g3bort(:,k)+gort(:,k));

        stdx11(:,k)=(y1(:,k)-muilk(:,k)-tao1ilk(:,k)-gama1ilk(:,k)-
tetagama11ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx21(:,k)=(y2(:,k)-muilk(:,k)-tao1ilk(:,k)-gama2ilk(:,k)-
tetagama12ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx31(:,k)=(y3(:,k)-muilk(:,k)-tao1ilk(:,k)-gama3ilk(:,k)-
tetagama13ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx41(:,k)=(y4(:,k)-muilk(:,k)-tao2ilk(:,k)-gama1ilk(:,k)-
tetagama21ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx51(:,k)=(y5(:,k)-muilk(:,k)-tao2ilk(:,k)-gama2ilk(:,k)-
tetagama22ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx61(:,k)=(y6(:,k)-muilk(:,k)-tao2ilk(:,k)-gama3ilk(:,k)-
tetagama23ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx71(:,k)=(y7(:,k)-muilk(:,k)-tao3ilk(:,k)-gama1ilk(:,k)-
tetagama31ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx81(:,k)=(y8(:,k)-muilk(:,k)-tao3ilk(:,k)-gama2ilk(:,k)-
tetagama32ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));
        stdx91(:,k)=(y9(:,k)-muilk(:,k)-tao3ilk(:,k)-gama3ilk(:,k)-
tetagama33ilk(:,k))./sqrt(sigma2ilk(:,k));

        g11(:,k)=normpdf(lamda*stdx11(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx11(:,k),0,1);
        g21(:,k)=normpdf(lamda*stdx21(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx21(:,k),0,1);
        g31(:,k)=normpdf(lamda*stdx31(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx31(:,k),0,1);
        g41(:,k)=normpdf(lamda*stdx41(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx41(:,k),0,1);
        g51(:,k)=normpdf(lamda*stdx51(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx51(:,k),0,1);
        g61(:,k)=normpdf(lamda*stdx61(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx61(:,k),0,1);
        g71(:,k)=normpdf(lamda*stdx71(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx71(:,k),0,1);
        g81(:,k)=normpdf(lamda*stdx81(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx81(:,k),0,1);
        g91(:,k)=normpdf(lamda*stdx91(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx91(:,k),0,1);

```

```

gson(:,k)=[g11(:,k);g21(:,k);g31(:,k);g41(:,k);g51(:,k);g61(:,k);g71(:,k);g81(:,k);g91(:,k)];

g11a(:,k)=[g11(:,k);g21(:,k);g31(:,k)];
g21a(:,k)=[g41(:,k);g51(:,k);g61(:,k)];
g31a(:,k)=[g71(:,k);g81(:,k);g91(:,k)];
g11b(:,k)=[g11(:,k);g41(:,k);g71(:,k)];
g21b(:,k)=[g21(:,k);g51(:,k);g81(:,k)];
g31b(:,k)=[g31(:,k);g61(:,k);g91(:,k)];

g11ort(:,k)=mean(g11(:,k));
g21ort(:,k)=mean(g21(:,k));
g31ort(:,k)=mean(g31(:,k));
g41ort(:,k)=mean(g41(:,k));
g51ort(:,k)=mean(g51(:,k));
g61ort(:,k)=mean(g61(:,k));
g71ort(:,k)=mean(g71(:,k));
g81ort(:,k)=mean(g81(:,k));
g91ort(:,k)=mean(g91(:,k));

g11aort(:,k)=mean(g11a(:,k));
g21aort(:,k)=mean(g21a(:,k));
g31aort(:,k)=mean(g31a(:,k));

g11bort(:,k)=mean(g11b(:,k));
g21bort(:,k)=mean(g21b(:,k));
g31bort(:,k)=mean(g31b(:,k));
gsonort(:,k)=mean(gson(:,k));

sigma2son(:,k)=SSE(:,k)./( (N-(a*b))-(N-(a*b))*(lamda^2*(g11ort(:,k).^2+g21ort(:,k).^2+g31ort(:,k).^2+g41ort(:,k).^2+g51ort(:,k).^2+g61ort(:,k).^2+g71ort(:,k).^2+g81ort(:,k).^2+g91ort(:,k).^2)))/(a*b));
muson(:,k)=mu(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*gsonort(:,k);
taolson(:,k)=tao1(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g11aort(:,k)-gsonort(:,k));
tao2son(:,k)=tao2(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g21aort(:,k)-gsonort(:,k));
tao3son(:,k)=tao3(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g31aort(:,k)-gsonort(:,k));
gamalson(:,k)=gama1(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g11bort(:,k)-gsonort(:,k));
gama2son(:,k)=gama2(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g21bort(:,k)-gsonort(:,k));
gama3son(:,k)=gama3(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g31bort(:,k)-gsonort(:,k));

tetagama11son(:,k)=tetagama11(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g11ort(:,k)-g11aort(:,k)-g11bort(:,k)+gsonort(:,k));
tetagama12son(:,k)=tetagama12(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g21ort(:,k)-g21aort(:,k)-g21bort(:,k)+gsonort(:,k));

```

```

        tetagama13son(:,k)=tetagama13(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g31ort(:,k)-g11aort(:,k)-
g31bort(:,k)+gsonort(:,k));
        tetagama21son(:,k)=tetagama21(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g41ort(:,k)-g21aort(:,k)-
g11bort(:,k)+gsonort(:,k));
        tetagama22son(:,k)=tetagama22(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g51ort(:,k)-g21aort(:,k)-
g21bort(:,k)+gsonort(:,k));
        tetagama23son(:,k)=tetagama23(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g61ort(:,k)-g21aort(:,k)-
g31bort(:,k)+gsonort(:,k));
        tetagama31son(:,k)=tetagama31(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g71ort(:,k)-g31aort(:,k)-
g11bort(:,k)+gsonort(:,k));
        tetagama32son(:,k)=tetagama32(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g81ort(:,k)-g31aort(:,k)-
g21bort(:,k)+gsonort(:,k));
        tetagama33son(:,k)=tetagama33(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2son(:,k)).*(g91ort(:,k)-g31aort(:,k)-
g31bort(:,k)+gsonort(:,k));

fark1(:,k)=abs(muson(:,k)-muilk(:,k));
fark2(:,k)=abs(sigma2son(:,k)-sigma2ilk(:,k));
fark3(:,k)=abs(tetagama11son(:,k)-tetagama11ilk(:,k));
fark4(:,k)=abs(tetagama12son(:,k)-tetagama12ilk(:,k));
fark5(:,k)=abs(tetagama13son(:,k)-tetagama13ilk(:,k));
fark6(:,k)=abs(tetagama21son(:,k)-tetagama21ilk(:,k));
fark7(:,k)=abs(tetagama22son(:,k)-tetagama22ilk(:,k));
fark8(:,k)=abs(tetagama23son(:,k)-tetagama23ilk(:,k));
fark9(:,k)=abs(tetagama31son(:,k)-tetagama31ilk(:,k));
fark10(:,k)=abs(tetagama32son(:,k)-tetagama32ilk(:,k));
fark11(:,k)=abs(tetagama33son(:,k)-tetagama33ilk(:,k));

fark(:,k)=[fark1(:,k);fark2(:,k);fark3(:,k);fark4(:,k);fark5(:,k);fark
6(:,k);fark7(:,k);fark8(:,k);fark9(:,k);fark10(:,k);fark11(:,k);];

V(:,k)=norm(fark(:,k));
while V(:,k)>0.01

        stdx111(:,k)=(y1(:,k)-muson(:,k)-tao1son(:,k)-gama1son(:,k)-
tetagama11son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));
        stdx211(:,k)=(y2(:,k)-muson(:,k)-tao1son(:,k)-gama2son(:,k)-
tetagama12son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));
        stdx311(:,k)=(y3(:,k)-muson(:,k)-tao1son(:,k)-gama3son(:,k)-
tetagama13son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));
        stdx411(:,k)=(y4(:,k)-muson(:,k)-tao2son(:,k)-gama1son(:,k)-
tetagama21son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));
        stdx511(:,k)=(y5(:,k)-muson(:,k)-tao2son(:,k)-gama2son(:,k)-
tetagama22son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));
        stdx611(:,k)=(y6(:,k)-muson(:,k)-tao2son(:,k)-gama3son(:,k)-
tetagama23son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));
        stdx711(:,k)=(y7(:,k)-muson(:,k)-tao3son(:,k)-gama1son(:,k)-
tetagama31son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));
        stdx811(:,k)=(y8(:,k)-muson(:,k)-tao3son(:,k)-gama2son(:,k)-
tetagama32son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));

```

```

stdx911(:,k)=(y9(:,k)-muson(:,k)-tao3son(:,k)-gama3son(:,k)-
tetagama33son(:,k))./sqrt(sigma2son(:,k));

g111(:,k)=normpdf(lamda*stdx111(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx111(:,k),0,1);
g211(:,k)=normpdf(lamda*stdx211(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx211(:,k),0,1);
g311(:,k)=normpdf(lamda*stdx311(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx311(:,k),0,1);
g411(:,k)=normpdf(lamda*stdx411(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx411(:,k),0,1);
g511(:,k)=normpdf(lamda*stdx511(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx511(:,k),0,1);
g611(:,k)=normpdf(lamda*stdx611(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx611(:,k),0,1);
g711(:,k)=normpdf(lamda*stdx711(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx711(:,k),0,1);
g811(:,k)=normpdf(lamda*stdx811(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx811(:,k),0,1);
g911(:,k)=normpdf(lamda*stdx911(:,k),0,1)./normcdf(lamda*stdx911(:,k),0,1);

gest(:,k)=[g111(:,k);g211(:,k);g311(:,k);g411(:,k);g511(:,k);g611(:,k)
;g711(:,k);g811(:,k);g911(:,k)];
    g111a(:,k)=[g111(:,k);g211(:,k);g311(:,k)];
    g211a(:,k)=[g411(:,k);g511(:,k);g611(:,k)];
    g311a(:,k)=[g711(:,k);g811(:,k);g911(:,k)];
    g111b(:,k)=[g111(:,k);g411(:,k);g711(:,k)];
    g211b(:,k)=[g211(:,k);g511(:,k);g811(:,k)];
    g311b(:,k)=[g311(:,k);g611(:,k);g911(:,k)];

g111ort(:,k)=mean(g111(:,k));
g211ort(:,k)=mean(g211(:,k));
g311ort(:,k)=mean(g311(:,k));
g411ort(:,k)=mean(g411(:,k));
g511ort(:,k)=mean(g511(:,k));
g611ort(:,k)=mean(g611(:,k));
g711ort(:,k)=mean(g711(:,k));
g811ort(:,k)=mean(g811(:,k));
g911ort(:,k)=mean(g911(:,k));

g111aort(:,k)=mean(g111a(:,k));
g211aort(:,k)=mean(g211a(:,k));
g311aort(:,k)=mean(g311a(:,k));

g111bort(:,k)=mean(g111b(:,k));
g211bort(:,k)=mean(g211b(:,k));
g311bort(:,k)=mean(g311b(:,k));
gestort(:,k)=mean(gest(:,k));

sigma2est(:,k)=SSE(:,k)./(N-(a*b))-(N-
(a*b)).*(lamda^2*((g111ort(:,k).^2+g211ort(:,k).^2+g311ort(:,k).^2+g41
1ort(:,k).^2+g511ort(:,k).^2+g611ort(:,k).^2+g711ort(:,k).^2+g811ort(:,
k).^2+g911ort(:,k).^2))./(a*b));
muest(:,k)=mu(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*gestort(:,k);
taolest(:,k)=tao1(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g111aort(:,k)-
gestort(:,k));
tao2est(:,k)=tao2(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g211aort(:,k)-
gestort(:,k));
tao3est(:,k)=tao3(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g311aort(:,k)-
gestort(:,k));
gama1est(:,k)=gama1(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g111bort(:,k)-
gestort(:,k));
gama2est(:,k)=gama2(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g211bort(:,k)-
gestort(:,k));
gama3est(:,k)=gama3(:,k)-lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g311bort(:,k)-
gestort(:,k));

```

```

        tetagama11est(:,k)=tetagama11(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g111ort(:,k)-g111aort(:,k)-
g111bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama12est(:,k)=tetagama12(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g211ort(:,k)-g111aort(:,k)-
g211bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama13est(:,k)=tetagama13(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g311ort(:,k)-g111aort(:,k)-
g311bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama21est(:,k)=tetagama21(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g411ort(:,k)-g211aort(:,k)-
g111bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama22est(:,k)=tetagama22(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g511ort(:,k)-g211aort(:,k)-
g211bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama23est(:,k)=tetagama23(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g611ort(:,k)-g211aort(:,k)-
g311bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama31est(:,k)=tetagama31(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g711ort(:,k)-g311aort(:,k)-
g111bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama32est(:,k)=tetagama32(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g811ort(:,k)-g311aort(:,k)-
g211bort(:,k)+gestort(:,k));
        tetagama33est(:,k)=tetagama33(:,k)-
lamda.*sqrt(sigma2est(:,k)).*(g911ort(:,k)-g311aort(:,k)-
g311bort(:,k)+gestort(:,k));

fark1(:,k)=abs(muson(:,k)-muest(:,k));
fark2(:,k)=abs(sigma2est(:,k)-sigma2son(:,k));
fark3(:,k)=abs(tetagama11son(:,k)-tetagama11est(:,k));
fark4(:,k)=abs(tetagama12son(:,k)-tetagama12est(:,k));
fark5(:,k)=abs(tetagama13son(:,k)-tetagama13est(:,k));
fark6(:,k)=abs(tetagama21son(:,k)-tetagama21est(:,k));
fark7(:,k)=abs(tetagama22son(:,k)-tetagama22est(:,k));
fark8(:,k)=abs(tetagama23son(:,k)-tetagama23est(:,k));
fark9(:,k)=abs(tetagama31son(:,k)-tetagama31est(:,k));
fark10(:,k)=abs(tetagama32son(:,k)-tetagama32est(:,k));
fark11(:,k)=abs(tetagama33son(:,k)-tetagama33est(:,k));

fark(:,k)=[fark1(:,k);fark2(:,k);fark3(:,k);fark4(:,k);fark5(:,k);fark
6(:,k);fark7(:,k);fark8(:,k);fark9(:,k);fark10(:,k);fark11(:,k)];

V(:,k)=norm(fark(:,k));

muson(:,k)=muest(:,k);
taolson(:,k)=taolest(:,k);
tao2son(:,k)=tao2est(:,k);
tao3son(:,k)=tao3est(:,k);
gamalson(:,k)=gama1est(:,k);
gama2son(:,k)=gama2est(:,k);
gama3son(:,k)=gama3est(:,k);

        tetagama11son(:,k)=tetagama11est(:,k);
        tetagama12son(:,k)=tetagama12est(:,k);
        tetagama13son(:,k)=tetagama13est(:,k);
        tetagama21son(:,k)=tetagama21est(:,k);
        tetagama22son(:,k)=tetagama22est(:,k);

```

```

        tetagama23son(:,k)=tetagama23est(:,k);
        tetagama31son(:,k)=tetagama31est(:,k);
        tetagama32son(:,k)=tetagama32est(:,k);
        tetagama33son(:,k)=tetagama33est(:,k);

sigma2son(:,k)=sigma2est(:,k);

    end

    k=1-lamda^2*((g111ort(:,k).^2+g211ort(:,k).^2+g311ort(:,k).^2+
g411ort(:,k).^2+g511ort(:,k).^2+g611ort(:,k).^2+g711ort(:,k).^2+g811or
t(:,k).^2+g911ort(:,k).^2)./(a*b));

Fdenememl(:,k)=(b*n).*(tao1son(:,k).^2+tao2son(:,k).^2+tao3son(:,k).^
2)./(a-1))./(ff.*(sigma2son(:,k))));
Fblokml(:,k)=(a*n).*(gama1son(:,k).^2+gama2son(:,k).^2+gama3son(:,k).^
2)./(b-1))./(ff.*(sigma2son(:,k))));
Fetkilesimml(:,k)=(n.*(tetagama11son(:,k).^2+tetagama12son(:,k).^2+tet
agama13son(:,k).^2+tetagama21son(:,k).^2+tetagama22son(:,k).^2+tetagam
a23son(:,k).^2+tetagama31son(:,k).^2+tetagama32son(:,k).^2+tetagama33s
on(:,k).^2)./((a-1)*(b-1)))./(ff.*(sigma2son(:,k))));

end

MLsure=toc(t1);

t2=tic;

% Bu kısım MML tahmin edicileri için %

y1or=sort(y1);
y2or=sort(y2);
y3or=sort(y3);
y4or=sort(y4);
y5or=sort(y5);
y6or=sort(y6);
y7or=sort(y7);
y8or=sort(y8);
y9or=sort(y9);

% Bu kısım t değerlerini hesaplamak için %

for k=1:n
    toplamin(k,:)=0;
    for i=1:sim
        toplamin(k,:)=toplamin(k,:)+y1or(k,i);
    end
end

tmml=toplamin/sim;

betailk1=lamda^2.*tmml.*normpdf(lamda.*tmml,0,1).*normcdf(lamda.*tmml,
0,1)+lamda.*normpdf(lamda.*tmml,0,1).*normpdf(lamda.*tmml,0,1);

```

```

betailk2=normcdf(lamda.*tmml,0,1).*normcdf(lamda.*tmml,0,1);
betailk=betailk1./betailk2;
beta=1+lamda.*betailk;

alfaicin1=normpdf(lamda.*tmml,0,1)./normcdf(lamda.*tmml,0,1);
alfaicin2=tmml.*betailk;
alfa=lamda.*(alfaicin1+alfaicin2);

delta1=sum(alfa);
m=sum(beta);

for i=1:sim

    muicin1(:,i)=beta.*y1or(:,i);
    muicin2(:,i)=beta.*y2or(:,i);
    muicin3(:,i)=beta.*y3or(:,i);
    muicin4(:,i)=beta.*y4or(:,i);
    muicin5(:,i)=beta.*y5or(:,i);
    muicin6(:,i)=beta.*y6or(:,i);
    muicin7(:,i)=beta.*y7or(:,i);
    muicin8(:,i)=beta.*y8or(:,i);
    muicin9(:,i)=beta.*y9or(:,i);

    mulicin(:,i)=sum(muicin1(:,i))./m;
    mu2icin(:,i)=sum(muicin2(:,i))./m;
    mu3icin(:,i)=sum(muicin3(:,i))./m;
    mu4icin(:,i)=sum(muicin4(:,i))./m;
    mu5icin(:,i)=sum(muicin5(:,i))./m;
    mu6icin(:,i)=sum(muicin6(:,i))./m;
    mu7icin(:,i)=sum(muicin7(:,i))./m;
    mu8icin(:,i)=sum(muicin8(:,i))./m;
    mu9icin(:,i)=sum(muicin9(:,i))./m;

    Bicin1(:,i)=alfa.*(y1or(:,i)-mulicin(:,i));
    Bicin2(:,i)=alfa.*(y2or(:,i)-mu2icin(:,i));
    Bicin3(:,i)=alfa.*(y3or(:,i)-mu3icin(:,i));
    Bicin4(:,i)=alfa.*(y4or(:,i)-mu4icin(:,i));
    Bicin5(:,i)=alfa.*(y5or(:,i)-mu5icin(:,i));
    Bicin6(:,i)=alfa.*(y6or(:,i)-mu6icin(:,i));
    Bicin7(:,i)=alfa.*(y7or(:,i)-mu7icin(:,i));
    Bicin8(:,i)=alfa.*(y8or(:,i)-mu8icin(:,i));
    Bicin9(:,i)=alfa.*(y9or(:,i)-mu9icin(:,i));

    B(:,i)=lamda.*sum(Bicin1(:,i)+Bicin2(:,i)+Bicin3(:,i)+Bicin4(:,i)+Bicin5(:,i)+Bicin6(:,i)+Bicin7(:,i)+Bicin8(:,i)+Bicin9(:,i));

    Cicin1(:,i)=beta.*((y1or(:,i)-mulicin(:,i)).^2);
    Cicin2(:,i)=beta.*((y2or(:,i)-mu2icin(:,i)).^2);
    Cicin3(:,i)=beta.*((y3or(:,i)-mu3icin(:,i)).^2);
    Cicin4(:,i)=beta.*((y4or(:,i)-mu4icin(:,i)).^2);
    Cicin5(:,i)=beta.*((y5or(:,i)-mu5icin(:,i)).^2);
    Cicin6(:,i)=beta.*((y6or(:,i)-mu6icin(:,i)).^2);
    Cicin7(:,i)=beta.*((y7or(:,i)-mu7icin(:,i)).^2);
    Cicin8(:,i)=beta.*((y8or(:,i)-mu8icin(:,i)).^2);

```

```

Cicin9(:,i)=beta.*((y9or(:,i)-mu9icin(:,i)).^2);

C(:,i)=sum(Cicin1(:,i)+Cicin2(:,i)+Cicin3(:,i)+Cicin4(:,i)+Cicin5(:,i)
+Cicin6(:,i)+Cicin7(:,i)+Cicin8(:,i)+Cicin9(:,i));

sigmamml(:,i)=(-
B(:,i)+sqrt(B(:,i).^2+(4*N.*C(:,i))))/(2*sqrt(N*(N-(a*b))));

mummlilk=(sum(muicin1+muicin2+muicin3+muicin4+muicin5+muicin6+muicin7+
muicin8+muicin9)/(a*b*m));
mumml1a=sum(muicin1+muicin2+muicin3)/(b*m);
mumml2a=sum(muicin4+muicin5+muicin6)/(b*m);
mumml3a=sum(muicin7+muicin8+muicin9)/(b*m);
mumml1b=sum(muicin1+muicin4+muicin7)/(a*m);
mumml2b=sum(muicin2+muicin5+muicin8)/(a*m);
mumml3b=sum(muicin3+muicin6+muicin9)/(a*m);

mumml=mummlilk-((delta1/(m)).*sigmamml);
tao1mml=mumml1a-mummlilk;
tao2mml=mumml2a-mummlilk;
tao3mml=mumml3a-mummlilk;
gama1mml=mumml1b-mummlilk;
gama2mml=mumml2b-mummlilk;
gama3mml=mumml3b-mummlilk;

tetagama11mml=mulicin-mumml1a-mumml1b+mummlilk;
tetagama12mml=mu2icin-mumml1a-mumml2b+mummlilk;
tetagama13mml=mu3icin-mumml1a-mumml3b+mummlilk;
tetagama21mml=mu4icin-mumml2a-mumml1b+mummlilk;
tetagama22mml=mu5icin-mumml2a-mumml2b+mummlilk;
tetagama23mml=mu6icin-mumml2a-mumml3b+mummlilk;
tetagama31mml=mu7icin-mumml3a-mumml1b+mummlilk;
tetagama32mml=mu8icin-mumml3a-mumml2b+mummlilk;
tetagama33mml=mu9icin-mumml3a-mumml3b+mummlilk;

Fdenememml(:,i)=(b*m).*(tao1mml(:,i).^2+tao2mml(:,i).^2+tao3mml(:,i).
^2)/(a-1))/(sigmamml(:,i).^2);
Fblokmmml(:,i)=(a*m).*(gama1mml(:,i).^2+gama2mml(:,i).^2+gama3mml(:,i)
.^2)/(b-1))/(sigmamml(:,i).^2);
Fetkilesimmml(:,i)=(m.*(tetagama11mml(:,i).^2+tetagama12mml(:,i).^2+te
tagama13mml(:,i).^2+tetagama21mml(:,i).^2+tetagama22mml(:,i).^2+tetaga
ma23mml(:,i).^2+tetagama31mml(:,i).^2+tetagama32mml(:,i).^2+tetagama33
mml(:,i).^2)/((a-1)*(b-1)))/(sigmamml(:,i).^2);

end

MMLsure=toc(t2);

toplamdeneme=0;
for i=1:sim
    if Fdeneme(i)>Ftablo1;
        toplamdeneme=toplamdeneme+1;
    end
end

```

```

end
TypeIerrordeneme=toplamdeneme/sim;

toplamblok=0;
for i=1:sim
    if Fblok(i)>Ftablo2;
        toplamblok=toplamblok+1;
    end
end
TypeIerrorblok=toplamblok/sim;

toplametskilesim=0;
for i=1:sim
    if Fetkilesim(i)>Ftablo3;
        toplametskilesim=toplametskilesim+1;
    end
end
TypeIerroretkilesim=toplametskilesim/sim;

toplamdenememl=0;
for i=1:sim
    if Fdenememl(i)>Ftablo1;
        toplamdenememl=toplamdenememl+1;
    end
end
TypeIerrordenememl=toplamdenememl/sim;

toplamblokml=0;
for i=1:sim
    if Fblokml(i)>Ftablo2;
        toplamblokml=toplamblokml+1;
    end
end
TypeIerrorblokml=toplamblokml/sim;

toplametskilesimml=0;
for i=1:sim
    if Fetkilesimml(i)>Ftablo3;
        toplametskilesimml=toplametskilesimml+1;
    end
end
TypeIerroretkilesimml=toplametskilesimml/sim;

toplamdenememml=0;
for i=1:sim
    if Fdenememml(i)>Ftablo1;
        toplamdenememml=toplamdenememml+1;
    end
end
TypeIerrordenememml=toplamdenememml/sim;

toplamblokmmml=0;
for i=1:sim
    if Fblokmmml(i)>Ftablo2;
        toplamblokmmml=toplamblokmmml+1;
    end
end

```

```

        end
    end
    TypeIerrorblokmml=toplamblokmml/sim;

    toplametskilesimmmml=0;
    for i=1:sim
        if Fetkilesimmmml(i)>Ftablo3;
            toplametskilesimmmml=toplametskilesimmmml+1;
        end
    end
    TypeIerroretkilesimmmml=toplametskilesimmmml/sim;

    MatrisLS=[mean(mutilda+taol+gamal) mean(tetagamall)
    mean(sqrt(sigma2tilda))
        var(mutilda+taol+gamal) var(tetagamall) var(sqrt(sigma2tilda))
        mse(mutilda+taol+gamal) mse(tetagamall) mse(sqrt(sigma2tilda))];

    MatrisML=[mean(muson+taolson+gamalson) mean(tetagamallson)
    mean(sqrt(sigma2son))
        var(muson+taolson+gamalson) var(tetagamallson)
    var(sqrt(sigma2son))
        mse(muson+taolson+gamalson) mse(tetagamallson)
    mse(sqrt(sigma2son))];

    MatrisMML=[mean(mumml+taolmml+gamalmml) mean(tetagamallmml)
    mean((sigmamml))
        var(mumml+taolmml+gamalmml) var(tetagamallmml) var((sigmamml))
        mse(mumml+taolmml+gamalmml) mse(tetagamallmml) mse((sigmamml))];

```

EK 3.2 Hata Terimlerinin Çarpık Normal Dağılımı Durumunda Sansürlü Verilerde Tek Yönlü Varyans Analizi İçin Bilgisayar Programı Kodları

```
clear
clc

n=10;
a=3;
N=a*n;

sim=100000/n;

r11=0;
r21=1;
r12=0;
r22=2;
r13=0;
r23=1;

lamda=1;
delta=lamda/(sqrt(1+lamda^2));
b=2/sqrt((2*pi));
ortalama1=delta*b;

n1=n-r11-r21;
n2=n-r12-r22;
n3=n-r13-r23;

for k=1:sim

    u1(:,k)=transpose(rsn(n,0,1,lamda));
    u2(:,k)=transpose(rsn(n,0,1,lamda));
    u3(:,k)=transpose(rsn(n,0,1,lamda));

    y1(:,k)=u1(:,k);
    y2(:,k)=u2(:,k);
    y3(:,k)=u3(:,k);

    y1or(:,k)=sort(y1(:,k));
    y2or(:,k)=sort(y2(:,k));
    y3or(:,k)=sort(y3(:,k));

    for i=1:n1
        y1son(i,k)=y1or(i+r11,k);
    end

    for i=1:n2
        y2son(i,k)=y2or(i+r12,k);
    end
end
```

```

end

for i=1:n3
    y3son(i,k)=y3or(i+r13,k);
end

Nson=n1+n2+n3;

yson(:,k)=[y1son(:,k);y2son(:,k);y3son(:,k)];

mu(:,k)=mean(yson(:,k));
mu1(:,k)=mean(y1son(:,k));
mu2(:,k)=mean(y2son(:,k));
mu3(:,k)=mean(y3son(:,k));

tao1(:,k)=mu1(:,k)-mu(:,k);
tao2(:,k)=mu2(:,k)-mu(:,k);
tao3(:,k)=mu3(:,k)-mu(:,k);

s1(:,k)=sum((y1son(:,k)-mu1(:,k)).^2);
s2(:,k)=sum((y2son(:,k)-mu2(:,k)).^2);
s3(:,k)=sum((y3son(:,k)-mu3(:,k)).^2);

SSE(:,k)=s1(:,k)+s2(:,k)+s3(:,k);
MSE(:,k)=(SSE(:,k)/(Nson-a));

Fpaytilda(:,k)=(n1.*tao1(:,k).^2+n2.*tao2(:,k).^2+n3.*tao3(:,k).^2)/(a-1);
Fpaydatilda(:,k)=MSE(:,k);
Ftilda(:,k)=Fpaytilda(:,k)./Fpaydatilda(:,k);

end

if lamda==1
    tmml=[-0.52;-0.18;0.55;0.26;0.46;0.63;0.83;1.05;1.31;1.68];
else if lamda==0.7
    tmml=[-0.724;-0.35;-0.094;0.14;0.35;0.55;0.76;0.99;1.265;1.65];
else if lamda==0.4
    tmml=[-0.98;-0.58;-0.29;-0.04;0.19;0.40;0.624;0.872;1.164;1.579];

end
end
end

betailk1=lamda^2.*tmml.*normpdf(lamda.*tmml,0,1).*normcdf(lamda.*tmml,
0,1)+lamda.*normpdf(lamda.*tmml,0,1).*normpdf(lamda.*tmml,0,1);
betailk2=normcdf(lamda.*tmml,0,1).*normcdf(lamda.*tmml,0,1);
betailk=betailk1./betailk2;
beta=1+lamda.*betailk;

```

```

alfaicin1=normpdf(lamda.*tmml,0,1)./normcdf(lamda.*tmml,0,1);
alfaicin2=tmml.*betailk;
alfa=lamda.*(alfaicin1+alfaicin2);

for i=1:n1
    beta1son(i)=beta(i+r11);
    alfa1son(i)=alfa(i+r11);
end

beta1=transpose(beta1son);
alfa1=transpose(alfa1son);

for i=1:n2
    beta2son(i)=beta(i+r12);
    alfa2son(i)=alfa(i+r12);
end
beta2=transpose(beta2son);
alfa2=transpose(alfa2son);

for i=1:n3
    beta3son(i)=beta(i+r13);
    alfa3son(i)=alfa(i+r13);
end

beta3=transpose(beta3son);
alfa3=transpose(alfa3son);

q11=r11/(n+1);
q12=r12/(n+1);
q13=r13/(n+1);

q21=1-(r21/(n+1));
q22=1-(r22/(n+1));
q23=1-(r23/(n+1));

t1=tmml(r11+1);
t2=tmml(r12+1);
t3=tmml(r13+1);
t11=tmml(n-r21);
t21=tmml(n-r22);
t31=tmml(n-r23);

if r11<=0;
    alfa11=0;
    beta11=0;
else
    beta11=-((( -
2*t1*normpdf(t1)*normcdf(lamda*t1)+2*lamda*normpdf(t1)*normpdf(lamda*t
1))/q11-((2*normpdf(t1)*normcdf(lamda*t1))^2/(q11^2)))));
    alfa11=(2*normpdf(t1)*normcdf(lamda*t1))/q11+t1*beta11;
end

if r12<=0;

```

```

        alfa12=0;
        beta12=0;
    else
        beta12=-((-
2*t2*normpdf(t2)*normcdf(lamda*t2)+2*lamda*normpdf(t2)*normpdf(lamda*t
2))/q12-((2*normpdf(t2)*normcdf(lamda*t2))^2/(q12^2))));
        alfa12=(2*normpdf(t2)*normcdf(lamda*t2))/q12+t2*beta11;
    end

    if r13<=0;
        alfa13=0;
        beta13=0;
    else
        beta13=-((-
2*t3*normpdf(t3)*normcdf(lamda*t3)+2*lamda*normpdf(t3)*normpdf(lamda*t
3))/q13-((2*normpdf(t3)*normcdf(lamda*t3))^2/(q13^2))));
        alfa13=(2*normpdf(t3)*normcdf(lamda*t3))/q13+t3*beta11;
    end

    beta21=(-
2*t11*normpdf(t11)*normcdf(lamda*t11)+2*lamda*normpdf(t11)*normpdf(lam
da*t11))/q21+((2*normpdf(t11)*normcdf(lamda*t11))^2/(q21^2));
    alfa21=(2*normpdf(t11)*normcdf(lamda*t11))/q21-t11*beta21;

    beta22=(-
2*t21*normpdf(t21)*normcdf(lamda*t21)+2*lamda*normpdf(t21)*normpdf(lam
da*t21))/q22+((2*normpdf(t21)*normcdf(lamda*t21))^2/(q22^2));
    alfa22=(2*normpdf(t21)*normcdf(lamda*t21))/q22-t21*beta22;

    beta23=(-
2*t31*normpdf(t31)*normcdf(lamda*t31)+2*lamda*normpdf(t31)*normpdf(lam
da*t31))/q23+((2*normpdf(t31)*normcdf(lamda*t31))^2/(q23^2));
    alfa23=(2*normpdf(t31)*normcdf(lamda*t31))/q23-t31*beta23;

    m1=sum(beta1)-r11*beta11+r21*beta21;
    m2=sum(beta2)-r12*beta12+r22*beta22;
    m3=sum(beta3)-r13*beta13+r23*beta23;
    m=m1+m2+m3;

    teta1=(-sum(alfa1)-r11*alfa11+r21*alfa21)/m1;
    teta2=(-sum(alfa2)-r12*alfa12+r22*alfa22)/m2;
    teta3=(-sum(alfa3)-r13*alfa13+r23*alfa23)/m3;

    teta=(m1*teta1+m2*teta2+m3*teta3)/m;

    for k=1:sim

        muicin1(:,k)=(sum(beta1.*y1son(:,k))-
r11.*beta11.*y1or(r11+1,k)+r21.*beta21.*y1or(n-r21,k))./m1;
        muicin2(:,k)=(sum(beta2.*y2son(:,k))-
r12.*beta12.*y2or(r12+1,k)+r22.*beta22.*y2or(n-r22,k))./m2;
        muicin3(:,k)=(sum(beta3.*y3son(:,k))-
r13.*beta13.*y3or(r13+1,k)+r23.*beta23.*y3or(n-r23,k))./m3;

```

```

muicin(:,k)=(m1.*muicin1(:,k)+m2.*muicin2(:,k)+m3.*muicin3(:,k))./m;

Bicin1(:,k)=sum(alfa1.*(y1son(:,k)-muicin1(:,k)));
Bicin2(:,k)=sum(alfa2.*(y2son(:,k)-muicin2(:,k)));
Bicin3(:,k)=sum(alfa3.*(y3son(:,k)-muicin3(:,k)));

Bilk(:,k)=sum((r11*alfa11.*(y1or(r11+1,k)-muicin1(:,k)))-
(r12*alfa12.*(y2or(r12+1,k)-
muicin2(:,k)))+(r13*alfa13.*(y3or(r13+1,k)-muicin3(:,k))));
Bson(:,k)=sum((r21*alfa21.*(y1or(n-r21,k)-muicin1(:,k)))-
(r22*alfa22.*(y2or(n-r22,k)-muicin2(:,k)))+(r23*alfa23.*(y3or(n-
r23,k)-muicin3(:,k))));

B(:,k)=Bicin1(:,k)+Bicin2(:,k)+Bicin3(:,k)-Bilk(:,k)+Bson(:,k);

Cicin1(:,k)=sum((beta1).*(y1son(:,k)-muicin1(:,k)).^2);
Cicin2(:,k)=sum((beta2).*(y2son(:,k)-muicin2(:,k)).^2);
Cicin3(:,k)=sum((beta3).*(y3son(:,k)-muicin3(:,k)).^2);

Cilk(:,k)=sum(r11*beta11*((y1or(r11+1,k)-
muicin1(:,k)).^2)+r12*beta12*((y2or(r12+1,k)-
muicin2(:,k)).^2)+r13*beta13*((y3or(r13+1,k)-muicin3(:,k)).^2));
Cson(:,k)=sum(r21*beta21*((y1or(n-r21,k)-
muicin1(:,k)).^2)+r22*beta22*((y2or(n-r22,k)-
muicin2(:,k)).^2)+r23*beta23*((y3or(n-r23,k)-muicin3(:,k)).^2));

C(:,k)=Cicin1(:,k)+Cicin2(:,k)+Cicin3(:,k)+Cilk(:,k)+Cson(:,k);

sigmamml(:,k)=(B(:,k)+sqrt(B(:,k).^2+4.*Nson.*C(:,k)))/(2*sqrt(Nson*(
Nson-a)));

mumml(:,k)=muicin(:,k)+teta.*sigmamml(:,k);
tao1mml(:,k)=(muicin1(:,k)-muicin(:,k))-(teta1-
teta).*sigmamml(:,k);
tao2mml(:,k)=(muicin2(:,k)-muicin(:,k))-(teta2-
teta).*sigmamml(:,k);
tao3mml(:,k)=(muicin3(:,k)-muicin(:,k))-(teta3-
teta).*sigmamml(:,k);

end

Ftablo=finv(0.95,a-1,Nson-a);

toplamtilda=0;
for k=1:sim
    if Ftilde(k)>Ftablo;
        toplamtilda=toplamtilde+1;
    end
end

```

```

end
TypeIerrortilda=toplamtilda/sim;

carpim2=(normcdf((1+lamda^2)*t11)-
normcdf((1+lamda^2)*t1))/((normcdf(t11)-2*T_Owen(t11, lamda))-
(normcdf(t1)-2*T_Owen(t1, lamda)));
carpim1=-(2*normpdf(t11)*normcdf(lamda*t11)-
2*normpdf(t11)*normcdf(lamda*t1))/((normcdf(t11)-2*T_Owen(t11, lamda))-
(normcdf(t1)-2*T_Owen(t1, lamda)));
ortalama=carpim1+ortalama1*carpim2;

carpim3=1-((1+lamda^2)*t11*normpdf((1+lamda^2)*t11)-
(1+lamda^2)*t1*normpdf((1+lamda^2)*t1))/((normcdf((1+lamda^2)*t11)-
normcdf((1+lamda^2)*t1)));
carpim4=carpim2*carpim3;
carpim5=(2/sqrt(2*pi))*(lamda/(1+lamda^2))*carpim4;
carpim6=-(2*t11*normpdf(t11)*normcdf(lamda*t11)-
2*t1*normpdf(t1)*normcdf(lamda*t1))/((normcdf(t11)-
2*T_Owen(t11, lamda))-(normcdf(t1)-2*T_Owen(t1, lamda)));
ex2=1+carpim6+carpim5;

variance=ex2-ortalama^2;

mutilda=mu-ortalama*sqrt(MSE);
sigmatilda=sqrt(MSE/variance);

MatrisLS=[mean(mutilda+tao1) mean((sigmatilda))
var(mutilda+tao1) var((sigmatilda))
mse(mutilda+tao1) mse((sigmatilda))];

Fmmlpay=((n1.*tao1mml.^2+n2.*tao2mml.^2+n3.*tao3mml.^2))/(a-1);
Fmmlpayda=sigmamml.^2;
Fmml=Fmmlpay./Fmmlpayda;

sayma=0;
for k=1:sim
    if Fmml(k)>Ftablo,
        sayma=sayma+1;
    end
end
TypeIerrormml=sayma/sim;

Matrismmml=[mean(mumml+tao1mml) mean(sigmamml)
var(mumml+tao1mml) var(sigmamml)
mse(mumml+tao1mml) mse(sigmamml)];

```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Nuri ÇELİK

Doğum Yeri: Konya

Doğum Tarihi: 01.01.1980

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Diller: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Konya Lisesi (İngilizce) (1993-1997)

Lisans : Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü (1997-2002)

Yüksek Lisans: Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi, İstatistik Anabilim Dalı, (2007-2009)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü (2008-2009)

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü (2009-devam)

Yayınlar (SCI ve diğer)

Makaleler

1. Genç A., Çelik N., (2009), Konno Yamazaki portfolio optimization model and an application to İstanbul Stock Exchange, Selçuk Journal of Mathematics, vol: 12, pp: 84-95.
2. Çelik N., Kaya F., (2010), Uç değerler yöntemi ile riske maruz değer'in Tahmini ve İstanbul menkul kıymetler borsası üzerine bir uygulama, Bankacılık ve Sigortacılık Araştırma Dergisi, Vol: 1, pp: 19-32.

Bildiriler

1. Çelik N., Genç A., (2008), Bayesci regresyon ve uygulaması, İstatistik Günleri, Samsun.
2. Çelik N., Yapıcı N.P., (2009), Comparing portfolio optimization model with respect to VaR values, İME, İstanbul.
3. Tayyar F., Çelik N., Genç A., (2009), Markowitz portföy seçim modelinin farklı risk ölçütleriyle portföy optimizasyonu üzerine bir çalışma, 1. Ulusal Tebliğ Günleri, Ereğli, Konya.

4. Özer C., Çelik N., Genç A., (2009), Yaşam tabloları analizi tekniği, 1. Ulusal Tebliğ Günleri, Ereğli, Konya.
5. Çelik N., (2011), Kategorik varyans analizi ve bir uygulama, İstatistik Günleri, Antalya.
6. Çelik, N., Şenoğlu, B and Arslan O., (2012), Robust analysis in one-way ANOVA, ICORS 2012, Burlington, USA.