

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SÜREKLİ DEĞİŞKENLİ KUANTUM DOLANIKLIK
VE KUANTUM BİLİŞİM KURAMINDAKİ UYGULAMALARI**

Erdem AKYÜZ

FİZİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2012**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜREKLİ DEĞİŞKENLİ KUANTUM DOLANIKLIK ve KUANTUM BİLİŞİM KURAMINDAKİ UYGULAMALARI

Erdem AKYÜZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Bileşik kuantum sistemlerin bütünlükçü bir özelliği olan dolanıklık altsistemler arasında yerel-olmayan korelasyonları betimler. Kuantum uz-aktarım, yoğun kodlama ve kuantum şifreleme gibi birçok kuantum bilişim uygulamalarının başarılmasında kuantum dolanıklığın kullanılması kaçınılmazdır. Klasik karşılığı olmayan bu tür uygulamalarda oldukça önemli bir kaynak olan kuantum dolanıklığın nicelendirilmesi, nitelendirilmesi ve algılanması zordur. Kesikli sistemler (sonlu boyutlu Hilbert uzayına sahip sistemler) için iyi araştırılmış olan bu kavramın sürekli değişkenli sistemler (sonsuz boyutlu Hilbert uzayına sahip sistemler) için araştırmalar daha yenidir. Bu tezde, sürekli değişkenli sistemlerin daha çok Gaussiyen durumlarında dolanıklığın nicelendirilmesini ve nitelendirilmesi amaçlayan yaklaşımlar ele alınmıştır. Bu yaklaşımlar belirsizlik bağıntılarını temel alan kovaryans matrisi formalizmine dayanır. Sürekli değişkenli sistemler olarak kuantum optikteki çok kipli elektromanyetik salınımlar ve bunların Wigner fonksiyonları aracılığıyla faz uzayı formalizmindeki karşılıkları ele alınmıştır. Sürekli değişkenli sistemlerde kuantum uz-aktarım ve kuantum yoğun kodlama uygulamaları da tartışılmıştır.

Eylül 2012, 77 sayfa

Anahtar Kelimeler : Kuantum Dolanıklık, Alan Kuadratürleri, Bilişim Kuramı, Ayrılabilirlik, Kuantum Optik, Kovaryans Matrisi, Wigner Fonksiyonları.

ABSTRACT

Master Thesis

CONTINUOUS VARIABLE ENTANGLEMENT AND ITS APPLICATIONS IN QUANTUM INFORMATION THEORY

Erdem AKYÜZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

As a holistic property of compound systems, quantum entanglement describes non-local correlations among the parts of the system. In many applications of quantum information theory, such as quantum teleportation, quantum dense coding and quantum cryptology, quantum entanglement is an indispensable resource. Despite its importance in these applications with no classical analog, the quantification and qualification of quantum entanglement are hard issues. Compared to discrete systems (systems with finite dimensional Hilbert spaces) the studies of entanglement in continuous variable systems (systems with infinite dimensional Hilbert spaces) are relatively new. This thesis considers some approaches aiming the quantification and qualification of entanglement in continuous variable systems, mostly in their Gaussian states. These approaches rely on covariance matrix formalism that is based on uncertainty relations. As continuous variable systems, multimode electromagnetic oscillations of quantum optics and their phase space analogs constructed via Wigner functions are considered. Quantum teleportation and quantum dense coding with continuous variables are also discussed as applications.

September 2012, 77 pages

Key Words: Quantum Entanglement, Field Quadratures, Information Theory, Separability, Quantum Optics, Covariance matrix, Wigner Functions.

TEŐEKKÖR

Çalıőmalarımın her aőamasında bilgi öneri ve yardımlarını esirgemeyerek gerek çalıőma konularımnda gerekse çok çeőitli konulardaki fikirleriyle kiőisel geliőmeme önemli katkılarda bulunan, özellikle fiziksel bir probleme nasıl yaklaőmam gerektiği konusunda yok gösterici olan sayın danışman hocam Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e (Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı) ve çalıőma konum hakkında sürekli fikir aliőveriői yaptığım değerli arkadaőlarım Adem TÖRKMEN, Solmaz YILMAZ ve Durgun DURAN'a en derin duygularımla teőekkör ederim.

Erdem AKYÖZ

Ankara Eylül 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ÇİZELGE DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KUANTUM DOLANIKLIK	5
2.1 Saf Durumlarda Dolanıklık.....	6
2.1.1 Schmidt ayrışımı	7
2.1.2 Örnek: Bell durumları	9
2.2 Saf Olmayan Durumlarda Dolanıklık.....	11
2.2.1 Örnek: Werner durumları.....	12
2.3 Peres kriteri: pozitif parçalı transpoz (PPT) kriteri.....	13
3. SÜREKLİ DEĞİŞKENLİ DURUMLAR VE WIGNER FONKSİYONLARI....	16
3.1 Boyutsuz Kuadratür İşlemcileri	17
3.2 Sürekli Değişkenli Kuantum Durumlar.....	18
3.2.1 Eş-uyumlu durumlar	18
3.2.2 Isısal (termal) durumlar	19
3.3 Kuantum Optikte Sıkıştırılmış Durumlar ve Dolanık Durumların Üretilmesi.....	21
3.4 Wigner fonksiyonları.....	25
3.4.1 Wigner Fonksiyonlarının temel özellikleri	26
3.4.2 Gaussiyen Wigner fonksiyonları	27
3.4.3 Tek kip için faz uzayında transpoz işlemi	28
3.4.4 İki kip için faz uzayında parçalı transpoz işlemi	29
3.4.5 Wigner fonksiyonları aracılığı ile dolanıklık kriteri	29
4. SÜREKLİ DEĞİŞKENLİ DOLANIKLIK	31
4.1 Kovaryans Matrisi ve Belirsizlik Bağlılıkları.....	31
4.1.1 İki kip için kovaryans matrisi	32
4.1.2 Kovaryans matrisi cinsinden iki kip için belirsizlik bağılılıkları	32

4.2 Ayrılabilir Durumlarda Kovaryans Matrisi.....	33
4.2.1 Uygulama: Ayrılabilir durumlarda PPT koşulundan gelen kısıtlamalar.....	35
4.3 Sürekli Değişkenli Durumlarda Simplektik Dönüşümler	37
4.3.1 Kovaryans matrisinin blok formu.....	39
4.3.2 Kovaryans matrisinin standart formları	41
4.3.4 Sürekli değişkenli ayrılabilir durumların P temsili.....	44
4.3.5 Dolanıklık analizinde PPT kriterinin Gaussiyen durumlarda gerek ve yeter koşul oluşu	45
4.6 Duan Yaklaşımı:Toplam Varyans Üzerinden Dolanıklık Analizi.....	48
4.6.1 Duan yaklaşımının Gaussiyen durumlarda ayrılabilirlik için gerek ve yeter koşul oluşu	51
5. KUANTUM BİLİŞİM KURAMINDAKİ UYGULAMALAR.....	57
5.1 Kuantum Uz-Aktarım.....	57
5.2 Kuantum Yoğun Kodlama... ..	60
6. SONUÇ.....	64
KAYNAKLAR	66
EKLER.....	67
EK 1 Schmidt Ayrışımı.....	68
EK 2 Wigner Fonksiyonları Yardımıyla Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması	71
EK 3 Simplektik Dönüşümler Ve Williamson Teoremi	74
ÖZGEÇMİŞ.....	77

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

\mathcal{H}	Hilbert Uzayı
\otimes	Tensörel Çarpım
$ +\rangle, 0\rangle$	Spin-yukarı durum
$ -\rangle, 1\rangle$	Spin-aşağı durum
\mathbf{I}	Birim işlemci
$\sigma_x, X, \sigma_y, Y, \sigma_z, Z$	Pauli spin matrisleri
$ \Phi^\pm\rangle, \psi^\pm\rangle$	Bell (veya EPR) durumları
\mathbf{U}	Üniter işlemci
$ \psi_{AB}\rangle$	Altsistemleri A ve B olan iki-parçalı bir sistemin durum vektörü
ρ	Yoğunluk işlemcisi
ρ_{AB}	Altsistemleri A ve B olan iki-parçalı bir sistemin yoğunluk işlemcisi (matrisi)
ρ_A, ρ_B	İki-parçalı bir sistemin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri
ρ_W	Werner durumu
$r(\psi)$	İki-parçalı bir $ \psi\rangle$ durumunun Schmidt rankı
\mathbf{T}	Transpozisyon işlemi
$\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B$	İki-parçalı bir sistemde altsistemler üzerine etkiyen transpozisyon işlemleri
Tr	İz işlemi
CNOT	Kontrollü-NOT Geçiti (<i>Controlled-NOT</i>)
EPR	Einstein-Podolsky-Rosen
PPT	Pozitif Parçalı (Kısmi) Transpoz
a_k, a_k^+	Alçaltma, yükseltme işlemcisi
\mathbf{D}	Yerdeğiştirme işlemcisi
$W(x, p)$	Tek serbestlik dereceli bir sistemin Wigner Fonksiyonu
\mathfrak{z}	Genelleştirilmiş kuadratür işlemcisi
\mathbf{V}	Kovaryans matrisi
Ω	Simpektik matris

ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 4.1 Kuantum Durumların ve Kuantum işlemlerin Hilbert Uzayındaki ve Kuantum Faz uzayındaki karşılıkları.....	47
---	----

1. GİRİŞ

1930'lara gelindiğinde fiziksel dünyanın (görelî olmayan) kuantum mekaniksel tarifi tamamlanmış olmasına rağmen günümüze kadar geçen 80 yıllık bir zamandan sonra bile kuantum mekaniği halen fiziksel dünyayı daha derinden anlamamız ve ondan yararlanmamız için yeni imkanlar sunuyor. Doğanın daha ince özelliklerinin görülmesini sağladığı gibi yeni matematiksel yapıların ortaya çıkmasına ve yeni kavramların türetilmesine de imkan tanımaktadır. Kuantum mekaniğinin bu heyecan verici yanı; hem onunla yeni karşılaşmalar hem de onunla ilgili araştırmacılar açısından cesaret verici bir güçtür. Özellikle 1980'lerden günümüze gelen süreçte, kuantum araştırmalarında sessiz bir devrim gerçekleşmektedir. Bu devrimin merkezinde ise daha önce bir sorunsal olarak görülen bileşik sistemlerin bütüncül özellikleri olan dolanıklık kavramı ve diğer kuantum korelasyonlar (karşılıklı ilintiler) yatmaktadır.

Paradoksal olarak, dolanıklık kavramı, Einstein, Podolsky ve Rosen tarafından 1935'te yayınlanan, yerel gerçekliği savunan ve fiziksel niceliklerin ölçümden önce belirli değerlere sahip olması gerektiğini iddia eden makaleleri ile gündeme gelmiştir (Einstein vd.1935). Bu makalede yerel gerçeklik savunusu yapılmıştır. Bu sav aşağıdaki iki varsayıma dayanır;

1. Eğer sistemi bozmadan sistemle ilgili bir fiziksel değer tam bir kesinlikle öngörülebilirse, bu durumda bu değere karşılık gelen bir fiziksel gerçeklik vardır.
2. Uzaysal olarak ayırık olan iki sistem aynı anda birbirini etkileyemez (birindeki ölçümün sonucu diğerinde ne olup bittiğinden bağımsız gerçekleşir). Tüm etkiler yereldir.

EPR makalesi bu varsayımları destekleyecek bir düşünce deneyi ortaya koydu. Bir tepkimeyle veya bir bozunum süreciyle ortaya çıkmış A ve B gibi iki parçacık düşünölsün ve oluşumdan sonra birbirlerinden uzaysal olarak ayrılmış olsunlar. Momentum korunumu (bileşke dış kuvvetin olmadığı) her durumda sağlanmak zorunda olduğundan, A parçacığının momentumu ölçölürse B parçacığının momentumu 'hem de ölçüm yapmadan' öngörülebilir. Benzer şekilde A parçacığının konumu ölçölürse

dolanık parçacıkların dalga fonksiyonları yardımıyla B'nin de konumu 'ölçüm yapmaksızın' öngörülebilir. O halde B üzerinde gözlem yapmadan B ile ilgili fiziksel bir bilgi, korunum yasalarının öngördüğü bir kesinlikle belirlenmiş olmaktadır. EPR'ye göre "sistemin herhangi bir gözleniri, ölçmeden de bir fiziksel gerçekliğe karşılık gelmektedir" denilebilir.

Bu durumda EPR düşüncesine göre aşağıdaki ilk önerme ikincisini gerektirmektedir.

1. Teoride belirtilen (*sıra değişmeyen işlemciler karşılık gelen*) gözlenebilirler eş zamanlı bir fiziksel gerçekliğe sahip olamazlar.
2. Bir fiziksel sistemin durumuyla ilgili gerçekliğin kuantum mekaniğinde dalga fonksiyonu ile betimlenmesi tam değildir.

Aynı yıl Schrödinger kuantum formalizminin doğal bir sonucu olarak bileşik sistemlerde klasik karşılığı olmayan bir korelasyon olarak dolanıklığın varolması gerektiğini göstererek bu durumu kısaca şöyle ifade etmiştir: "Sistemle ilgili olası en iyi bilginin, tamamen ayrılmış olsalar bile tüm alt sistemlerle ilgili olası en iyi bilgiyi içermesi gerekmez". Önceleri yerel gerçekliği temel alan kuramlar ile klasik bir korelasyon olarak açıklanabileceği düşünülen dolanıklık kavramının, 1964'te John Bell tarafından ortaya konan ve Bell eşitsizlikleri olarak bilinen eşitsizlikler aracılığıyla yerel saklı değişkenli kuramlar ile açıklanamayacağı gösterilmiştir. Yerel gerçeklik anlayışına sahip olan kuramların Bell eşitsizliklerini her durumda sağlaması gerekir. Oysa gösterilmiştir ki, kuantum mekaniğindeki birçok durum Bell eşitsizliklerini ihlal eder. Daha sonra Bell tipi Cirel'son eşitsizlikleri, Mermin eşitsizlikleri gibi başka eşitsizlikler de ortaya konulmuştur. Bütün bu eşitsizlikler yerel gerçekliği temel alan kuramlarda ihlal edilmemesi gereken eşitsizlikler olup, bu eşitsizliklerin ihlal edildikleri kuantum mekaniksel durumlar deneysel olarak 1982 yılında Aspect deneyleri ile tespit edilmiştir.

1982'deki Bell eşitsizliklerinin ihlalini gösteren Aspect deneylerinden ve yine aynı yıl R. Feynman'ın kuantum mekaniğinin yasalarını temel alan bir bilgisayar sürecinden bahsetmesinden bu yana kuantum dolanıklık ilgi odağı haline gelmiştir. Önceleri felsefi tartışmalara neden olmuş olan kuantum dolanıklık kavramı artık fiziksel dünyanın daha

iyi anlaşılmasında ve kuantum bilişim, kuantum bilgisayarım (*quantum computation*) gibi yeni ve heyecan verici araştırma alanlarında önemli rol oynamaktadır: Bu uygulamalarda kuantum dolanıklık, nicelendirilebilir, işlenebilir, aktarılabilir ve tüketilebilir önemli bir kaynaktır. Bununla beraber aynı kavram, sistemlerin kuantum özellikleri ve süreçleri hakkında yeni ve genel bazı tanımlamalar yapılabilmesini de mümkün kılmıştır.

Werner (1989) ilk defa genel olarak ayrılabilir bir durumun nasıl ifade edilebileceğini göstermiştir. Ama bir durumun Werner'in gösterdiği gibi ifade edilip edilemeyeceği yani bir durumun ayrılabilir mi yoksa dolanıklık içeren bir durum mu olduğu cevabı aşikâr olmayan, zor bir sorudur. Bunun için bazı işlevsel kriterler geliştirilmiştir. Bunların başlıcaları Peres-Horodecki (PPT: pozitif parçalı iz) kriteri, indirgeme (*reduction*) kriteri, pozitif gönderimler kriteri ve dolanıklık tanıkları (*entanglement witness*) kriteridir. Bu kriterlerin birbirlerine göre uygulamada üstünlükleri veya zayıflıklarının olduğu durumlar vardır. Genel olarak bu kriterler içinde en güçlüsü, yani diğerlerinin algılayabildiğinden daha çok sayıda dolanık durumu algılayabilen Peres-Horodecki kriteridir.

Kuantum yoğun kodlama (*quantum dense coding*), kuantum uz-aktarım (*quantum teleportation*), kuantum anahtar dağıtımı (*key distribution*) gibi bilişim-bilgisayarım süreçlerinde dolanıklık vazgeçilemezdir. Her ne kadar klasik bilgisayarım süreçlerine göre kuantum bilgisayarım süreçlerdeki hızlanmada dolanıklığın rolü henüz çok açık olmasa da, ölçüm temelli şemaları, tek yönlü kuantum bilgisayarım ve çizgisel kuantum optik bilgisayarımı içeren süreçlerde de önemli bir rolü olduğu düşünülmektedir. Bununla beraber, dolanıklık hakkında şu üç nokta da vurgulanmalıdır. Dolanıklık genel olarak çok karmaşık bir yapıdır, çevresel etkilere karşı oldukça kırılgandır ve sistemler doğrudan etkileşim halinde değilse (uzaysal olarak ayrıksalar) ortalama olarak dolanıklık miktarı arttırılmaz.

Bu çalışmada temel olarak kuantum optikte sürekli değişkenli durumlardaki dolanıklığın algılanması, nitelendirilmesi ve nicelendirilmesi üzerine geliştirilen kriterler incelenecektir. İkinci bölümde saf ve saf olmayan kesikli değişkenli durumlardaki (durum uzayları sonlu boyutlu olan sistemlerdeki) dolanıklığın genel bir

tanımı ve ayrılabilirlik kriterleri ele alınacaktır. Üçüncü Bölümde sürekli değişkenli durumlar ve Wigner fonksiyonları, dördüncü bölümde sürekli değişkenli sistemlerde dolanıklık tartışılmaktadır. Aynı bölümde; faz uzayı, kovaryans matris formalizmi, Gaussiyen durumlar ve Gaussiyen durumların standart formları, tanıtılacaktır. Beşinci bölümde sürekli değişkenli durumlardaki dolanıklığın kuantum bilişim kuramındaki uygulamalarına değinilecektir.

2. KUANTUM DOLANIKLIK

Kuantum dolanıklık, kuantum mekaniğinde bileşik sistemlere has bir korelasyon türüdür. Bileşik sistem birbirlerinden uzaysal ve kinematik olarak ayrılabilir alt sistemlerden (bileşenlerden, parçalardan) oluşan sistemlere denir. Bunlar; alt sistemlerin sayısına göre iki-parçalı (*bipartite*), üç-parçalı (*tripartite*) ya da çok parçalı (*multipartite*) sistemler olarak sınıflandırılabilir.

Bileşik sistemin bütünlükçü bir özelliği olan dolanıklık kavramı; bileşik sistemin, alt sistemlerinin basit bir toplamı olmadığını vurgular. Dolanık durumlarda, alt sistemler arasında klasik olmayan korelasyonlar vardır. Bunun nedeni temel olarak kuantum mekaniğinde, klasik mekanikten farklı olarak durumlar uzayının kartezyen değil tensörel genişlemesi ve durumlar uzayının her zaman bir vektör uzayı yapısı göstermesinden dolayı durum vektörlerinin eşyumlu (*coherent*) üst üste gelim (*superposition*) özelliğine sahip olmasıdır. Klasik mekanikte de üst üste gelim klasik dalga denklemlerinde olduğu gibi bazı özel durumlarda karşımıza çıkar. Ama kuantum mekaniğindeki üst üste gelim olasılık genliklerinin eşyumlu bir üst üste gelimi iken, klasik fizikte “olasılık genliği” kavramı yoktur: Klasik mekanikteki üst üste gelim, fiziksel olan salıncı dalga genliklerinin üst üste gelimidir.

Kuantum mekaniksel açıdan durumlar, saf (*pure*) durumlar ve saf-olmayan (*mixed, impure, nonpure*) durumlar olmak üzere ikiye ayrılabilir. Saf durumlar; sistemin durumunun, tanımlı olduğu Hilbert uzayında bir $|\psi\rangle$ durum vektörüyle temsil edilebildiği durumlardır. Saf-olmayan durumlarsa, tanımlı oldukları Hilbert uzayında bir vektörle değil, yoğunluk işlemcisi veya yoğunluk matrisi denilen bir işlemciyle anlatılabilen durumlardır. Yoğunluk işlemcileri, saf durum vektörlerinden kurulan izdüşüm işlemcilerinin $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ şeklindeki konveks (p_i 'ler ağırlık kesirleridir, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, $p_i \in [0,1]$) bileşimidir. Sistem başlangıçta bir saf durumda hazırlanmış olsa bile çevrenin sistemle etkileşmesinin doğal bir sonucu olarak eş-fazlılığın bozulmasından (*decoherence*) dolayı, laboratuarda saf durumlarla değil de saf-olmayan durumlarla daha çok karşılaşılır.

von Neumann tarafından geliştirilen yoğunluk işlemcileri formalizmi, saf durumları da temsil etmekte kullanılabilen daha genel bir formalizmdir. Yoğunluk işlemcilerinin sağlaması gereken özellikler şöyle sıralanabilir (Sakurai 1994):

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \rho^\dagger = \rho && \text{(Hermitesellik özelliği)}^1 \\
 \text{ii)} \quad & \text{Tr}(\rho) = 1 && \text{(Birim izlilik özelliği)} \\
 \text{iii)} \quad & \rho \geq 0 && \text{(Pozitiflik özelliği)}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kuantum dolanıklık saf ve saf-olmayan durumlarda ayrı ayrı incelenebilir.

2.1 Saf Durumlarda Dolanıklık

N parçalı sistemlerin;

$$\psi = \psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \dots \otimes \psi_N \tag{2.2}$$

şeklinde altsistemlerin durum vektörlerinin tensörel bir çarpımı olarak yazılabilen durum vektörlerine ayrılabilen (*separable* veya *decomposable*, *ayrıştırılabilir* ya da *çarpım*) durum vektörleri denir. Bu şekilde yazılamayanlara da dolanık durum vektörleri denir. N parçalı saf bir durum vektörünün en genel biçimdeki ifadesi şöyledir.

$$\psi = \sum_{i_1 \dots i_N} c_{i_1 \dots i_N} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_N\rangle \tag{2.3}$$

Özel olarak tüm açılım katsayıları için $c_{i_1 \dots i_N} = c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_N}$ yazılabiliyorsa, bu ayrılabilir bir durumdur. Burada alt sistemlerin durum vektörleri şöyledir.

$$\psi_1 = \sum_{i_1} c_{i_1} |i_1\rangle \quad \psi_2 = \sum_{i_2} c_{i_2} |i_2\rangle \quad \dots \quad \psi_N = \sum_{i_N} c_{i_N} |i_N\rangle \tag{2.4}$$

Dolanık durum vektörleri ayrılabilir durum vektörlerinin çizgisel bileşimidir.

¹ Pozitif her işlemci Hermitesel olduğundan iii özelliği ilk özelliği kapsar. Buna rağmen ilk özelliği açıkça ifade etmek anlatım kolaylığı sağlar.

Kuantum dolanıklık teorisindeki temel soru; verilen bir durum vektörünün dolanıklık içerip içermediğidir. Verilen bazı özel durum vektörleri için bu kolayca yanıtlanabilmesine karşılık, sadece iki parçalı sistemlerde en genel gerek ve yeter koşullar tanımlanabilmektedir.

2.1.1 Schmidt ayrışımı

İki parçalı saf bir durum vektörü, $\Psi_{AB} \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ancak ve ancak alt sistemlerin \mathcal{H}_A ve \mathcal{H}_B Hilbert uzaylarındaki iki vektörün tensör çarpımı olarak;

$$\Psi_{AB} = \phi_A \otimes \psi_B \quad \phi_A \in \mathcal{H}_A \quad \psi_B \in \mathcal{H}_B \quad \forall \phi_A, \psi_B \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabiliyorsa ayrılabilir, yazılamıyorsa dolanık bir durum vektörüdür. Burada ilk çarpan birinci sisteme ve ikincisi de ikinci sisteme ait birer durum vektörüdür.

Genel olarak, boylandırılmış bir Ψ_{AB} vektörü $a_i \otimes b_j$ gibi herhangi bir ortonormal çarpım (tensör) bazında yazılabilir:

$$\Psi_{AB} = \sum_{i=0}^{d_A-1} \sum_{j=0}^{d_B-1} c_{ij} a_i \otimes b_j, \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=0}^{d_A-1} \sum_{j=0}^{d_B-1} c_{ij}^2 = 1. \quad (2.7)$$

Burada ikinci eşitlik boylandırma koşulu olup a_i ve b_j ortonormal bazları sırasıyla d_A boyutlu \mathcal{H}_A ve d_B boyutlu \mathcal{H}_B altuzaylarını gererler. Ψ_{AB} rankı iki olan bir tensör olup kompleks c_{ij} katsayıları da bunun (kullanılan bazlardaki) tensörel bileşenleridirler. Buna karşılık Ψ_{AB} 'ye bileşik sistemin Hilbert uzayındaki bir durum vektörü ve c_{ij} katsayılarına da açılım katsayıları yani olasılık genlikleri olarak bakmak daha öğreticidir. Bu durumda c_{ij}^2 , bileşik sistem Ψ_{AB} durumundayken birinci altbileşeni a_i ve ikincisini b_j durumunda bulma olasılığıdır.

Rankı iki olan her tensör bir matrisle temsil edilebilir. (2.6)'daki tensörün de temel özellikleri ona karşılık getirilen ve elemanları c_{ij} katsayıları olan C matrisinin özellikleriyle ifade edilir. $d_A \times d_B$ 'li dikdörtgen C matrisinin matris rankı 1 ise bu bir çarpım durumudur. Genel olarak, bu matrisin r ψ ile gösterilen rankı d_A ve d_B 'nin küçük olanından daha büyük olamaz:

$$r \psi \leq k \equiv \min d_A, d_B \quad (2.7)$$

$r \psi$, Ψ_{AB} vektörünün Schmidt rankı olarak da bilinir ve

$$\rho_A = \text{Tr}_B \Psi_{AB} \Psi_{AB} \quad (2.8)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* a_i a_k \text{Tr}_B b_j b_l$$

$$= \sum_{i,k,l} c_{il} c_{kl}^* a_i a_k$$

$$= \sum_{i,k} C C^\dagger_{ik} a_i a_k$$

$$\rho_B = \text{Tr}_A \Psi_{AB} \Psi_{AB} \quad (2.9)$$

$$= \sum_{j,l} C^\dagger C_{lj} b_j b_l$$

ile verilen indirgenmiş yoğunluk matrislerinin ranklarına eşittir. Burada indirgenmiş yoğunluk matrisleri sırasıyla $C C^\dagger$ ve $C^\dagger C$ kare matrislerine karşılık gelirler. Schmidt ayrışımı (2.6) şeklinde verilen bir durum vektörünün her zaman,

$$\Psi_{AB} = \sum_{n=0}^{r \psi} c_n \Phi_n \otimes \psi_n \quad (2.10)$$

olacak şekilde $\lambda_n \otimes \Phi_n$ iki-ortonormal bazının olduğunu vurgular.

Burada $c_n = \overline{p_n}$ pozitif sayıları, c_{ij} 'nin sıfırdan farklı tekil özdeğerlerine karşılık gelir ve p_n değerleri indirgenmiş yoğunluk matrislerinden birisinin spektrumunun sıfırdan farklı elemanlarıdır. Schmidt ayrışımı ayrıntılı olarak Ek 1'de verilmiştir.

Kuantum dolanıklık genel olarak, hem nitel hem de nicel olarak $U_A \otimes U_B$ üniter çarpım işlemleri altında değişmez bir özellik olarak ele alınır. Saf bir Ψ_{AB} vektör durumunda ve karşılık gelen $\Psi_{AB} \Psi_{AB}$ saf durum izdüşüm işlemcilerinde, c_n katsayıları böyle üniter işlemler altında değişmez olan parametreler olduğundan iki-parçalı saf durumların dolanıklığını tamamen belirlerler.

Saf durum izdüşüm işlemcileri, ancak ve ancak Ψ_{AB} vektörü bir çarpım durumuysa ayrılabilir. Eşdeğer olarak ρ_A ve ρ_B indirgenmiş yoğunluk matrislerinden birisinin rankı 1'e eşit ya da sıfırdan farklı tek bir Schmidt katsayısı vardır. Böylece iki-parçalı saf durumlar için, bu durumun indirgenmiş yoğunluk matrisinin köşegenleştirilmesiyle ayrılabilir olup olmadığına karar verilir.

2.1.2 Örnek: Bell durumları

İki parçalı saf durumlardaki dolanıklığa Bell durumlarını örnek verebiliriz. İki spin $s_1 = s_2 = 1/2$ parçacığın bileşik spin durumları dolanıklık için verilebilecek en basit örneklerdendir.

Böyle bir sistemin olası spin durumları $s = 1$ 'e karşılık gelen üçlü (triplet) durumları;

$$|1, 1\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

$$|\psi^+\rangle = |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle \quad (2.11)$$

ve $s = 0$ 'a karşılık gelen

$$|\psi^-\rangle = |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) \quad (2.12)$$

tekli (*singlet*) durumlarıdır. Bunların dördü de boylandırılmış olup birbirlerine diktirler. Burada boylandırılmış $|\pm\rangle$ durumları, spin yukarı ve spin aşağı durumlar olarak bilinir. Bunlar spin işlemcisinin z bileşeninin $\pm \hbar/2$ özdeğerli öz durumlarıdır. Parçacık değiş-tokuşu altında üçlü durumlar simetrik, tekli durum antisimetriktir. Üçlü durumlardan $|11\rangle$ ve $|1, -1\rangle$ durumları ayrılabilirken, $|10\rangle$ ve tekli $|00\rangle$ durumu dolanık durumlardır. Ayrılabilir $|11\rangle$ ve $|1, -1\rangle$ durumların aşağıda gösterilen çizgisel bileşimleri alınarak dolanık durumlar oluşturulabilir. Bu şekilde oluşturulan

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |+\rangle \pm |-\rangle \otimes |-\rangle)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle \otimes |-\rangle \pm |-\rangle \otimes |+\rangle) \quad (2.13)$$

dört dolanık duruma Bell durumları veya EPR durumları denir. Bu durumlar birbirlerine diktirler. Bell durumları kutuplanma durumlarıyla dolanık haldeki iki foton sistemini de temsil ederler.

Üçlü (*triplet*) $|11\rangle$ durumu gibi ayrılabilir bir durumda sistem, $s = m = 1$ durumundadır ve her iki bileşeni de kesinlikle $m_1 = m_2 = 1/2$ durumundadır. Bunlar hem sistem hem de alt sistemler ile ilgili bilinebilecek en iyi bilgilerdir. Diğer taraftan, dolanık durumlarda sistemle ilgili en iyi bilgiye sahip olunmasına karşın, bileşenlerle ilgili bilgi o kadar iyi değildir. Örneğin spin-singlet durumunda, sadece birinci spini $|+\rangle$ ya da $|-\rangle$ durumunda bulma olasılığının % 50 olduğu bilgisi vardır. Bu bilgi ve bundan türetilebilecek diğer bilgiler, ayrılabilir durumdaki bilgiler kadar iyi değildir. Bu, ikinci sistem için de böyledir. Buna karşın sistem, $s = m = 0$ durumundadır.

En genel iki parçalı saf kübit durum vektörü şu biçimde yazılabilir.

$$|\psi\rangle = \alpha|++\rangle + \beta|+-\rangle + \gamma|-+\rangle + \delta|--\rangle \quad (2.14)$$

Bu durum vektörünün dolanıklık içermesi için gerek ve yeter şart katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (2.15)$$

Bu koşulu sağlayan özel $\alpha, \delta, \beta, \gamma$ değerlerinden Bell durumları elde edilebilir.

$\alpha = \delta = \frac{1}{2}$ ve $\beta = \gamma = 0$ alınırsa $|\Phi^+\rangle$ durumu,

$\beta = \gamma = \frac{1}{2}$ ve $\alpha = \delta = 0$ alınırsa $|\psi^+\rangle$ durumu,

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{-1}{2}$ ve $\beta = \gamma = 0$ alınırsa $|\Phi^-\rangle$ durumu,

$\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{-1}{2}$ ve $\alpha = \delta = 0$ alınırsa $|\psi^-\rangle$ durumu

elde edilir.

Dolanık durumda bulunan bir sistemin kendisi ile ilgili bütüncül bilgi, her kuantum sayısının (yukarıdaki sistem için s ve m sayılarının) kesin değerlerini bilme imkânı tanımayabilir. Örneğin, ayrılabilir üçlü durumların denklemindeki $|\Phi^\pm\rangle$ vektörlerinin çizgisel bileşimlerini göz önüne alalım. Bunlar en basit bir koherent üst-üste gelimi de gösterir. Terimlerdeki durum vektörleri ve katsayıları bir kere açıkça yazılınca, terimler arasında artık iyi belirlenmiş bir faz ilişkisi vardır. $|\Phi^\pm\rangle$ 'lerin her ikisi de dolanık durumlardır. Sistem $|\Phi^+\rangle$ (ya da $|\Phi^-\rangle$) durumunda iken yine sistem ile ilgili en iyi bilgi mevcuttur: Her şeyden önce sistem kesin olarak bilinen açıkça $|\Phi^+\rangle$ bir kuantum durumundadır. Fakat bu sefer $s = 1$ olduğunu kesin olarak bilmemize karşılık, m sayısı % 50 olasılıkla 1 ve aynı olasılıkla -1 olabilir. Dolanık durumlarda, bir altsisteme iyi belirlenmiş bir kuantum durumu karşılık getirilemeyebilir.

2.2 Saf-olmayan Durumlarda Dolanıklık

Saf olmayan N parçalı bir bileşik sistemin durumu;

$$\rho = \prod_{i=1}^k p_i \rho_{(1)}^i \otimes \rho_{(2)}^i \otimes \dots \otimes \rho_N^i \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1 \quad p_i \in [0,1] \quad (2.16)$$

şeklinde bir konveks bileşim olarak yazılabiliyorsa ayrılabilir bir durumdur, aksi takdirde dolanık (ayrılmaz) bir durumdur (Werner 1989). Burada $\rho_{(k)}^i$ 'lar, her i için k . parçanın olası birer yoğunluk işlemcisidirler.

Herhangi bir durum verilmişse, ayrılabilir olup olmadığını doğrulamak zordur. Ama saf-olmayan bir durum da dolanıklık içerebilir. İki parçalı bir durum için genel tanıma göre, $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ Hilbert uzayında tanımlanmış herhangi bir ρ_{AB} durumu ancak ve ancak altsistemlerin durum vektörlerinin konveks bir bileşimi olarak yazılabiliyorsa ayrılabiliridir.

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^k p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi} \quad p_i = 1 \quad p_i \in [0,1] . \quad (2.17)$$

Burada ρ_{Ai} ve ρ_{Bi} , altsistemlerin yoğunluk işlemcileri olup sırasıyla \mathcal{H}_A ve \mathcal{H}_B yerel Hilbert uzaylarında tanımlıdır. Toplamın üst sınırını belirleyen k sayısı Hilbert uzayının boyutunun karesiyle sınırlandırılabilir: $k \leq \dim \mathcal{H}_{AB}^2 = \dim \mathcal{H}_A \dim \mathcal{H}_B^2$. İki boyutlu durumlar için, ayrışmada gerek duyulan durumların sayısı (*kardinalite*) her zaman Hilbert uzayının kendisinin boyutuna karşılık gelen 4 'tür. Ama $d \geq 3$ için $d \otimes d$ boyutlu durumlar $d^4 - 2$ mertebeden kardinaliteye sahiptirler. Bu şekilde tanımlanmış tüm S_{AB} ayrılabilir durumlar kümesi konveks, kompakt ve $U_A \otimes U_B$ üniter çarpım işlemler altında değişmezdir.

2.2.1 Örnek: Werner durumları

Werner durumları $U \otimes U$ dönüşümleri altında değişmez kalan iki parçalı $d \times d$ boyutlu ρ durumlarıdır.

$$\rho = U \otimes U \rho U^T \otimes U^T \quad (2.18)$$

Bütün Werner durumları simetrik ve antisimetrik altuzaylar üzerine izdüşüm işlemcilerinin bir karışımıdır.

$$P = \sum_{i,j} |i\rangle\langle j| \otimes |j\rangle\langle i| \quad (2.19)$$

olmak üzere

$$P_{sym} = \frac{1}{2} (1 + P) \quad P_{asym} = \frac{1}{2} (1 - P) , \quad (2.20)$$

biçiminde alınır, Werner durumları;

$$\rho = p_{sym} \frac{2}{d^2+d} P_{sym} + (1 - p_{sym}) \frac{2}{d^2-d} P_{asym} \quad (2.21)$$

olarak yazılabilir. Burada p_{sym} , P_{sym} izdüşüm işlemcisinin özdeğeridir. $p_{sym} \geq 1/2$ olan Werner durumları ayrılabilir durumlardır, $p_{sym} < 1/2$ olan durumlar dolanık durumlardır.

2.3 Peres Kriteri: Pozitif Parçalı Transpoz (PPT) Kriteri

İki parçalı saf veya saf-olmayan bir duruma dair yoğunluk işlemcisi aşağıdaki gibi yazılabiliyorsa ayrılabilir, yazılamıyorsa sistem dolanıklık içeriyordur.

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi} \quad p_i = 1, p_i \in [0,1] \quad (2.22)$$

İki parçalı genel bir yoğunluk işlemcisinin ayrılabilir olup olmadığı, cevabı aşikâr olmayan bir sorudur. Bunu test etmede bir metot, Peres (1996) tarafından “Parçalı Transpoz Kriteri” olarak önerilmiştir.

Bu kriter gere, $\rho_{Ai}^T = (\rho_{Ai})^*$ olduğundan ρ_{Ai}^T işlemcisi de Hermitesel, pozitif değerli ve birim izli geçerli bir durum işlemcisidir ve

$$\rho_{AB}^{TA} = \sum_i p_i \rho_{Ai}^T \otimes \rho_{Bi} \quad (2.23)$$

durum işlemcisi de, yine iki geçerli durum işlemcisinin konveks bir bileşimi olduğundan geçerli bir ayrılabilir durum işlemcisidir.

Peres’in orijinal yaklaşımına dayanarak

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi} \quad (2.24)$$

şeklinde yazılabilir. Altsistemler farklı boyutlarda olabilirler. Şimdi yeni bir matris tanımlayalım:

$$\sigma_{m\mu,n\nu} \equiv \rho_{n\mu,m\nu} \quad (2.25)$$

Birinci altsistem üzerinden parçalı transpoz almaya karşılık gelen bu dönüşüm üniter bir dönüşüm değildir: Fakat yine de σ matrisi Hermitseldir. (4.9) denklemi doğruysa, yani sistem ayrılabilir bir durumdaysa

$$\sigma = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \quad (2.26)$$

yoğunluk matrisi elde edilir. Transpoz alınmış $\rho_{Ai}^T \equiv \rho_{Ai}^*$ matrisleri birim izli negatif-olmayan matrisler olduğundan bunlar da uygun yoğunluk matrisleridirler. σ yoğunluk matrisinin özdeğerlerinin hiçbirisi negatif değildir. Bu, (2.26) denkleminin sağlanması için gerek koşuldur. σ yoğunluk matrisinin özdeğerleri, iki gözlemci tarafından kullanılmış olan bazlara sahip U_A ve U_B gibi ayrı üniter dönüşümler altında değişmezdir. Böyle bir durumda, ρ yoğunluk matrisi

$$\rho \rightarrow U_A \otimes U_B \rho U_A \otimes U_B^\dagger \quad (2.27)$$

ile ifade edilir ve benzer şekilde σ yoğunluk matrisi

$$\sigma \rightarrow U_A^T \otimes U_B \sigma U_A^T \otimes U_B^\dagger \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir. Bu dönüşümler, σ yoğunluk matrisinin özdeğerlerini değişmez bırakan üniter dönüşümlerdir. Yukarıdaki inceleme:

$$\rho \text{ ayrılabilir} \Rightarrow \rho^{T_B} \text{ bir yoğunluk işlemcisidir}$$

önermesiyle özetlenebilir. Burada ρ^{T_B} ikinci altsistem üzerinden parçalı transpoz alma işlemini gösterir. İki-parçalı sistemler için ρ^{T_A} da eşdeğer anlamda kullanılabilir. Yukarıdaki önermenin mantıksal değillemesi

$$\rho^{T_B} \text{ bir yoğunluk işlemcisi değildir} \Rightarrow \rho \text{ dolanıktır.}$$

şeklindedir. İki-parçalı sistemlerin dolanıklığı için ρ^{TB} 'nin en az bir özdeğerinin negatif olmasını yeterli gören bu önerme Peres kriteri olarak bilinir. Buna göre verilen bir yoğunluk işlemcisinin altsistemlerden birine göre parçalı transpozuyla elde edilen işlemcinin özdeğerlerinden en az birinin negatif olması (böyle bir durumda ρ^{TB} artık bir yoğunluk işlemcisi değildir) onun dolanıklığı için yeterli bir kriterdir.

Bu kriter tek yönlü bir koşul ortaya koyar. Kısmi transpoz altında negatif özdeğerli bir işlemcinin elde edilmesi dolanık durumların varlığını garantilese de, negatif özdeğerli olmayan bir işlemcinin elde edilmesi dolanık durumların olmadığını garantilemez.

Buna rağmen aşağıdaki durumlarda negatif kısmi transpoz kriteri gerek ve yeter koşuldur. (Horodecki 2009)

Negatif kısmi transpoz \square (2x2) – boyutlu, dolanık

Negatif kısmi transpoz \square (2x3) – boyutlu, dolanık

Negatif kısmi transpoz \square (1xN) – kipli Gaussiyen, dolanık

3. SÜREKLİ DEĞİŞKENLİ DURUMLAR VE WİGNER FONKSİYONLARI

Kuantum optiğinde, kuantize olmuş elektromanyetik alanın kipleri birer harmonik salınıcıya karşı gelir ve burada kiplerin kuadratür işlemcileri, harmonik salınıcının birimsizleştirilmiş konum ve momentum işlemcileridir. Birim kütleli, kuantum harmonik salınıcının ω_k açısal frekansına sahip k. kiptinin Hamilton işlemcisi, X_k konum ve P_k momentum işlemcileri cinsinden şu formda yazılır:

$$H_k = \frac{1}{2} P_k^2 + \omega_k^2 X_k^2 \quad X_k, P_{k'} = i\hbar\delta_{kk'} \quad (3.1)$$

Konum ve momentum işlemcileri cinsinden k. kiptin boyutsuz;

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k X_k + iP_k) \quad a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k X_k - iP_k) \quad (3.2)$$

alçaltma ve yükseltme işlemcileri tanımlanır ve bunların sağladığı

$$a_k, a_{k'}^+ = \delta_{kk'} \quad a_k, a_{k'} = 0 = a_k^+, a_{k'}^+ \quad (3.3)$$

sıradеğişim bağıntıları göz önüne alınırsa, k. kiptinin Hamilton işlemcisi;

$$H_k = \hbar\omega_k a_k^+ a_k + \frac{\hbar}{2} \quad (3.4)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Konum ve momentum işlemcilerinin, alçaltma ve yükseltme işlemcileri cinsinden ifadesi ve sıra değişim bağıntıları aşağıdaki gibidir:

$$X_k = \frac{\hbar}{2\omega_k} (a_k + a_k^+) \quad P_k = i \frac{\hbar\omega_k}{2} (a_k - a_k^+) \quad (3.5)$$

3.1 Boyutsuz Kuadratür İşlemcileri

Alçaltma işlemcisinin gerçel ve sanal kısımları olarak boyutsuzlaştırılmış konum ve momentum işlemcileri;

$$x_k = \frac{\overline{\omega_k}}{2\hbar} X_k = \frac{1}{2} a_k + a_k^+ , \quad p_k = \frac{1}{2\hbar\omega_k} P_k = \frac{1}{2i} a_k - a_k^+ \quad (3.6)$$

ile tanımlanır. Bunların sıradeğişim bağıntıları da aşağıdaki gibidir.

$$x, p = \frac{i}{2} \delta_{kk'} \quad (3.7)$$

Alçaltma ve yükseltme işlemcilerine faz çarpanları ekleyerek;

$$x_k^{(\phi)} = \frac{1}{2} a_k e^{-i\phi} + a_k^+ e^{+i\phi} \quad p_k^{(\phi)} = \frac{1}{2i} a_k e^{-i\phi} - a_k^+ e^{+i\phi} \quad (3.8)$$

bağıntılarıyla daha genel kuadratür işlemcileri tanımlanabilir. Faz çarpanlarının açık, $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ ifadelerini kullanarak kuadratür işlemcileri arasındaki dönüşüm;

$$\begin{pmatrix} x_k^{(\phi)} \\ p_k^{(\phi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & i\sin\phi \\ -i\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

matris formunda yazılabilir. Bu dönüşüm üniter olduğundan genel kuadratür işlemcileri de (3.7) sıradeğişim bağıntılarını sağlarlar.

Tek kip kuadratür işlemcilerinin öz durumları için geçerli genel bağıntılar şöyle sıralabilir:

$$\begin{aligned} x x &= x x , \quad p p = p p \\ \langle x' | x \rangle &= \delta(x - x') \quad \langle p' | p \rangle = \delta(p - p') \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bu öz durum kümeleri aşağıdaki tamlık bağıntılarını sağlarlar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle x dx = \mathbb{I} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle p dp = \mathbb{I}. \quad (3.11)$$

Bu öz durumlar birbirlerinin Fourier dönüşümleridir;

$$x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ixp} p dp \quad p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ixp} x dx. \quad (3.12)$$

3.2 Sürekli Değişkenli Kuantum Durumlar

3.2.1 Eş-uyumlu (coherent) durumlar

Gaussiyen durumlar, sürekli değişkenli durumların özel bir halidir. Bu durumlar kuantum bilişim kuramında yararlanılan dolanıklık ve ayrılabilirlik analizlerinin yapılabildiği durumlardır. Gaussiyen durumlar kümesi, çok kipli kuantum faz uzayındaki (*Wigner faz uzayı*) sanki-olasılık dağılımları ve Gaussiyen karakteristik fonksiyonları ile tanımlanabilen durumlardır.

Genel olarak bir $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$ kompleks sayısıyla numaralanan ve α ile belirtilen eş-uyumlu durumlar aşağıda belirtilen eşdeğer üç farklı şekilde tanımlanabilir.

1-Alçaltıcı işlemcinin öz durumları.

$$a \alpha = \alpha \alpha \quad \alpha = \alpha e^{i\phi} \quad (3.13)$$

2-Minimum belirsizlikli durumlar.

3-Ötelenmiş vakum öz durumları.

$$\begin{aligned} \alpha &= D(\alpha) |0\rangle \\ D(\alpha) &= e^{(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)} \\ D^\dagger \alpha a D \alpha &= a + \alpha \end{aligned} \quad (3.14)$$

Burada α kompleks bir parametre ve α^* , α 'nın kompleks eşleniği olup, $D(\alpha)$ yerdeğiştirme (*displacement*) işlemcisi olarak bilinir.

Koherent bir durumun k . kipinin genel ifadesi o kipe ait yerdeğiştirme işlemcisinin o kipin vakum durumuna uygulanması ile elde edilir.

$$\alpha_k = D_k \alpha_0 = e^{\alpha a_k^\dagger - \alpha^* a_k} \alpha_0 \quad (3.15)$$

$$= e^{\alpha a_k^\dagger} e^{\alpha^* a_k} e^{\frac{1}{2}[\alpha a_k^\dagger, \alpha^* a_k]} \alpha_0$$

$$= e^{\alpha a_k^\dagger} e^{\alpha^* a_k} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \alpha_0$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{(\alpha a_k^\dagger)} \alpha_0$$

$$\alpha_k = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a_k^\dagger)^n}{n!} \alpha_0$$

$$\alpha_k = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} n_k \quad (3.16)$$

$|\alpha|^2$: α_k koherent durumunda bulunan ortalama foton sayısını gösterir:

$$n_k = \alpha a_k^\dagger a_k \alpha = \alpha^* \alpha = |\alpha|^2 \quad (3.17)$$

3.2.2 Isısal (termal) durumlar

T sıcaklığında ısısal dengede bulunan ve H Hamilton işlemcisiyle betimlenen bir sistemin ρ yoğunluk işlemcisi $\beta = 1/kT$ (k , Boltzman sabitidir) cinsinden

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \quad Z = \text{Tr} e^{-\beta H} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Z bölüşüm fonksiyonu olarak bilinir. Harmonik salıncının

$$H = \hbar \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad N = a^\dagger a \quad (3.19)$$

Hamilton işlemcisi kullanılırsa w frekanslı bir elektromanyetik kipin ısısal durumları tanımlanmış olur. Bu durumda bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
 Z &= \text{Tr } e^{-\beta H} & (3.20) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} | n \rangle, \\
 &= e^{\frac{-\beta \hbar \omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n}
 \end{aligned}$$

Burada boyutsuz $x = e^{-\beta \hbar \omega} < 1$ ($T \rightarrow \infty$ için x , 1'e yaklaşır) parametresi tanımlanırsa, son ifade;

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x} x^n = \frac{\bar{x}}{1-x} \quad (3.21)$$

halini alır. Burada $|x| < 1$ için geçerli

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (3.22)$$

genel bağıntısı kullanıldı. (3.21) ifadesi (3.18)'de yerine yazılır ve enerji öz durumlarının $\sum_{n=0}^{\infty} \langle n | n \rangle = 1$ tamlık bağıntısı kullanılırsa; yoğunluk işlemcisi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir;

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{1-x}{\bar{x}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | & (3.23) \\
 &= \frac{1-x}{\bar{x}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} | n \rangle \langle n |
 \end{aligned}$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n n N n \quad (3.24)$$

Isısal durumdaki w açısıl frekanslı bir kipin ortalama foton sayısı $n = Tr N \rho$

$$\begin{aligned} n &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n n N n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \end{aligned} \quad (3.25)$$

bulunur. Burada;

$$x \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (3.26)$$

eşitliği kullanılırsa

$$n = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{n}{n+1} \quad (3.27)$$

yazılabilir. Ortalama foton sayısı cinsinden yoğunluk işlemcisi için

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n)^n}{n+1} n n \quad (3.28)$$

elde edilir. Isısal durumlar her enerji durumunda ortalama farklı sayıda foton olan saf olmayan bir kuantum durumudur. Buradaki açılım katsayıları yani ρ 'nun özdeğerleri sistemi n durumunda bulma olasılığını göstermektedir. Foton sayısı n sabit tutulursa sistemi 0 taban durumunda bulma olasılığı en yüksektir.

3.3 Kuantum Optikte Sıkıştırılmış Durumlar ve Dolanık Durumların Üretilmesi

Sürekli değişkenli dolanık durumlar üretmek için sıkıştırılmış ışık durumları gereklidir ve elektromanyetik alanın kuantum dalgalanmalarını sıkıştırmak için de çizgisel

olmayan etkilere ihtiyaç vardır. Sıkıştırma işlemine karşı gelen etkileşim H_{int} Hamilton işlemcisi, alçaltma ve yükseltme işlemcilerinin karesel bir fonksiyonudur. Tek kipli bir durum için bu aşağıdaki gibi tanımlanır (Gerry 2005)

$$H_{int} = \frac{K}{2} i\hbar (a^\dagger e^{i\phi} + a e^{-i\phi}) \quad (3.29)$$

Burada K gerçel bir parametredir.

Alçaltma ve yükseltme işlemcilerinin zamanla değişiminin nasıl olduğu;

$$\frac{d a(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [a(t), H_{int}] = K e^{-i\phi} a^\dagger(t) \Rightarrow \frac{d a^\dagger(t)}{dt} = K e^{i\phi} a(t) \quad (3.30)$$

Heisenberg hareket denklemlerinden görülebilir. İlk denklemin t'ye göre bir kere daha türevi alınırsa $\frac{d^2 a(t)}{dt^2} - K^2 a(t) = 0$ bulunur ki, bunun da çözümü $\phi = 0$ için çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0) \cosh Kt + a^\dagger(0) \sinh Kt \\ x(t) &= e^{Kt} x(0), \quad p(t) = e^{-Kt} p(0) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Kuadratür işlemcilerinin varyanslarının zamanla değişimi, başlangıç varyans değerlerine şu biçimde bağlıdır:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x(t))^2 \rangle &= e^{2Kt} \langle (\Delta x(0))^2 \rangle \\ \langle (\Delta p(t))^2 \rangle &= e^{-2Kt} \langle (\Delta p(0))^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

Buradan da görüldüğü gibi zamana bağlı $x(t)$ kuadratür işlemcisinin varyansının beklenen değeri zamanla artmakta iken, $p(t)$ kuadratür işlemcisinin varyansının beklenen değeri zamanla azalmaktadır. Bu durumlara sıkıştırılmış durumlar denir. Sıkıştırılmış durum, minimum belirsizlikli durum olarak kalmaya devam eder. Kuadratür işlemci çiftlerinden birisindeki belirsizlik vakum gürültü seviyesinin altına inerken diğerkindeki belirsizlik vakum gürültü seviyesinin üstüne çıkar. Başlangıçtaki vakum durumu sıkıştırılmış kuadratür durumuna dönüşür.

Üniter zamanla gelişim işlemcisi,

$$U(t, t_0) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0) \right] \quad (3.33)$$

olmak üzere, (4.7) ifadesi yerine yazılırsa ve $t_0 = 0$ alınırsa, zamana bağlı üniter sıkıştırma işlemcisi aşağıdaki tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} S(\zeta) &= U(t, 0) = \exp \frac{1}{2} (\zeta^* a^2 - \zeta a^{\dagger 2}) \\ \zeta &= -r \exp i\phi \quad r = Kt \end{aligned} \quad (3.34)$$

Burada ζ^* , ζ 'nin kompleks eşleniğini göstermekte olup, gerçel r parametresine sıkıştırma parametresi denir.

İki kipli sıkıştırma işlemcisinin etkileşim Hamilton işlemcisi şu biçimdedir:

$$H_{int} = \frac{K}{2} i\hbar (a_1^\dagger a_2^\dagger e^{i\phi} - a_1 a_2 e^{-i\phi}) \quad (3.35)$$

Bu Hamilton işlemcisini zamanla gelişim işlemcisinde yerine koyarsak iki kipli durumlar için sıkıştırma işlemcisi,

$$S(\zeta) = e^{\zeta a_1^\dagger a_2^\dagger - \zeta^* a_1 a_2} \quad (3.36)$$

olarak ifade edilir. Bu sıkıştırma işlemcisini iki kipli $|00\rangle$ vakum durumuna uygularsak

$$\lambda = \tanh^2 r \quad (3.37)$$

olmak üzere,

$$S(\zeta) |00\rangle = e^{\zeta a_1^\dagger a_2^\dagger - \zeta^* a_1 a_2} |00\rangle = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\frac{n}{2}} |nn\rangle \quad (3.38)$$

dolanık durumu elde edilir.

(3.38) durumu, her iki kipteki foton sayı öz durumlarının ve fazın korelasyon içinde olduğu bir durumdur.

Burada sıkıştırma işlemi %50-%50 bir demet bölücü aracılığı ile iki adet tek kipli durumun demet bölücüye giriş durumu olarak verildiğinde iki kipli tek bir çıkış durumu elde etmeyi ifade eder. Bunu görmenin en iyi yolu Heisenberg temsilini kullanmaktır.

$$S \zeta^\dagger a_1 r S \zeta = a_1 \cosh r + a_2^\dagger \sinh r \quad (3.39)$$

$$S \zeta^\dagger a_2(r) S \zeta = a_2 \cosh r + a_1^\dagger \sinh(r) \quad (3.40)$$

Çıkış kipleri dolanıktır ve kuadratürler arasında korelasyon vardır.

Denklem (4.16) ve (4.17)'de olduğu gibi $\emptyset = 0$, p kuadratüründe sıkıştırılmış tek kipli bir durum;

$$a_1 = a_1^{(0)} \cosh r + a_1^{(0)\dagger} \sinh r \quad (3.41)$$

x kuadratüründe sıkıştırılmış bir başka durum:

$$a_2 = a_2^{(0)} \cosh r - a_2^{(0)\dagger} \sinh r \quad (3.42)$$

dengeli bir demet bölücüde bir araya getirilirse,

$$b_1^{(0)} = \frac{a_1^{(0)} + a_2^{(0)}}{\sqrt{2}} \quad b_2^{(0)} = \frac{a_1^{(0)} - a_2^{(0)}}{\sqrt{2}} \quad (3.43)$$

olmak üzere,

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} = b_1^{(0)} \cosh r + b_2^{(0)\dagger} \sinh r \quad (3.44)$$

$$b_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} = b_2^{(0)} \cosh r + b_1^{(0)\dagger} \sinh r \quad (3.45)$$

çıkış kipleri dolanıktır. Giriş durumu olarak vakum durumu verilen dolanık bir durum elde edilmiş olur. Bu durumu;

$$b_k = x_k + ip_k \quad a_k^{(0)} = x_k^{(0)} + ip_k^{(0)} \quad (3.46)$$

olmak üzere kuadratür işlemcileri cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$x_1 = \frac{e^{+r} x_1^0 + e^{-r} x_2^0}{\sqrt{2}} \quad p_1 = \frac{e^{-r} p_1^0 + e^{+r} p_2^0}{\sqrt{2}} \quad (3.47)$$

$$x_2 = \frac{e^{+r} x_1^0 - e^{-r} x_2^0}{\sqrt{2}} \quad p_2 = \frac{e^{-r} p_1^0 - e^{+r} p_2^0}{\sqrt{2}} \quad (3.48)$$

3.4 Wigner Fonksiyonları

İlk defa 1932’de Eugene Wigner tarafından önerilen Wigner fonksiyonları kuantum faz uzayında birer birleşik sanki-olasılık dağılımıdır (*joint quasi-probability distributions*). Klasik fizikte bir parçacık belirli bir konum ve momentuma sahiptir ve bu klasik faz uzayında bir nokta ile temsil edilir. Verilen bir parçacık topluluğundan bir parçacığın faz uzayındaki belirli bir noktada bulunma olasılığı bir olasılık dağılımı ile verilir. Kuantum mekaniğinde ise belirsizlik ilkesinden dolayı klasik olasılık dağılımları yerine Wigner sanki-olasılık dağılımı benzer bir rol oynar. Wigner dağılımı klasik olasılık dağılımlarından farklı özelliklere sahiptir. Klasik olarak negatif olasılık mümkün değildir ama Wigner dağılımında negatif değerler söz konusu olabilir. Bu negatif olasılıklar kuantum etkilerinin, örneğin kuantum mekaniksel girişimin göstergesi olarak yorumlanabilir.

Wigner fonksiyonlarının temel olduğu kuantum mekaniğinin faz uzayı formülasyonu, klasik faz-uzayında tanımlı sıra değişen fonksiyonlarla, Hilbert uzayında, fonksiyonlar üzerine etkiyen işlemciler olan kuantum gözlenebilirleri arasında bir eşleştirme olarak tanımlanır. Bu yöntemde, klasik faz-uzayı üzerinde kuantumlaşma yapılarak, kuantum mekaniği bir klasik istatistik teoriye benzer olarak geliştirilebilmektedir. Ayrıca, işlemciler yerine klasik faz-uzayında tanımlı gerçel değerli fonksiyonlar (*klasik gözlenebilirler*) kullanıldığı için, kuantum-klasik karşılığı konusunda önemli içgörüler elde edilebilmektedir. Bu formülasyonun, kuantum mekaniksel olguların klasik mekaniğin diliyle işlemcilerle eşleştirmelere gerek duymadan betimlenmesine olanak vermesi, diğer yöntemlerle kolayca elde edilemeyen yararlı fiziksel yaklaşımların ortaya çıkmasını sağlamaktadır. Yoğunluk işlemcisi ρ olan tek serbestlik dereceli bir sistemin Wigner fonksiyonu;

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2iy(p-x)/\hbar} \rho(x+y) \quad (3.49)$$

dönüşümüyle tanımlanır. Burada ve bundan sonra kullanılacak tüm integraller, aksi belirtilmedikçe, $-\infty$ 'dan ∞ 'a kadardır. Bu dönüşümde kullanılan x ve p değişkenleri bir serbestlik dereceli bir sistemin faz uzayının kanonik konum ve momentum değişkenleri olarak yorumlanarak Wigner fonksiyonu bu faz uzayı üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olur.

3.4.1 Wigner fonksiyonlarının temel özellikleri

Wigner fonksiyonunun temel özellikleri $|x\rangle$ ve $|p\rangle$ konum ve momentum öz durumları olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$W(x, p) dx = \langle p | \rho | p \rangle$$

$$W(x, p) dp = \langle x | \rho | x \rangle$$

$$\int W(x, p) dx dp = 1 \quad (3.50)$$

Son özellik boylandırma özelliği olup, ilk iki özelliğin ve $\text{Tr } \rho = 1$ özelliğinin bir sonucudur:

$$\text{Tr } \rho = \int \langle p | \rho | p \rangle dp = \int \langle x | \rho | x \rangle dx = 1 \quad (3.51)$$

(3.50)'deki ilk iki özellik ise Wigner fonksiyonlarının marjinal özellikleri olarak bilinirler. Bu iki bağıntının sol tarafları marjinal olasılık yoğunluklarıdır ve bir yoğunluk matrisinin köşegen elemanları daima pozitif olduğundan (ρ pozitif bir işlemcidir) bu olasılık yoğunlukları da doğal olarak poziftir. $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ saf durumları için marjinal olasılık dağılımları

$$W(x, p) dx = |\psi(p)|^2$$

$$W(x, p) = |\psi(x)|^2 \quad (3.52)$$

şeklinde sırasıyla momentum ve konum uzayındaki bilinen olasılık yoğunluklarıdır. (3.50)'deki ilk iki bağıntının ispatları aşağıda verilen (3.53) bağıntısının ispatıyla birlikte Ek 2'de verilmiştir.

Wigner fonksiyonunun en büyük yararı kuantum mekaniksel beklenen değer hesaplarını faz uzayındaki bilinen basit ortalama hesap olarak yapabilme imkânı tanınmasıdır. Bu somut olarak;

$$\langle A \rangle = \text{Tr } \rho A = \int W(x, p) A(x, p) dx dp \quad (3.53)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $A(x, p)$, kuantum mekaniksel A işlemcisine karşılık gelen faz uzayı fonksiyonudur:

$$A(x, p) = \int dy e^{\frac{2iyp}{\hbar}} x - y A(x + y) \quad (3.54)$$

Bu eşleştirme konum ve momentum işlemcilerine bağlı bütün kuantum mekaniksel işlemcilerle faz uzayı fonksiyonları arasında birebir bir eşleştirme olup, Wigner fonksiyonları yoğunluk işlemcilerine karşılık gelen boylandırılmış ((3.49) ile (3.54) arasındaki $(\pi\hbar)^{-1}$ katsayısı farkı boylandırmadan dolayıdır) gerçel değerli faz uzayı fonksiyonlarıdır. İspatı Ek 2'de verilen (3.53) bağıntısı Wigner fonksiyonlarının sanki-olasılık dağılımları olarak yorumlanmasını sağlayan bağıntıdır.

3.4.2 Gaussiyen Wigner fonksiyonları

Tanımı olarak Wigner fonksiyonları Gaussiyen fonksiyonlar olan ρ yoğunluk işlemcilerine de Gaussiyen durumlar denir. Bunlar kuadratur alan işlemcilerinin ilk ve ikinci momentleri ile tam olarak karakterize edilir. N kipli bir Gaussiyen durum aşağıdaki Wigner fonksiyonu tam olarak betimlenebilir.

$$W(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^N} \frac{1}{\det V^{(N)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \zeta^T V^{(N)} \zeta \right\} \quad (3.55)$$

Burada V Kovaryans matrisi ve $\mathcal{z} = x_1, p_1, x_N, p_N$ genelleştirilmiş kuadratürleri göstermektedir. $\mathcal{z} = (x_1, p_1, \dots, x_N, p_N)$ ise N serbestlik dereceli bir sistemin faz uzayı noktalarını betimlemektedir. Buradaki $W \mathcal{z}$, N serbestlik dereceli Gaussiyen bir sistemin Wigner fonksiyonudur.

3.4.3 Tek kip için faz uzayında transpoz işlemi

Gaussiyen ya da daha genel olarak sürekli değişkenli durumlarda yoğunluk işlemcisi üzerinden transpoz alma işlemi ne anlama gelir? Yoğunluk işlemcisi Hermitesel olduğundan, transpoz almak, kompleks eşlenik almaktır. Bir kuantum sisteminin zamanla evrimini tarif eden Schrödinger denklemi gereği kompleks eşlenik almak ise zaman tersinimi (*time reversal*) yapmaktır.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dt} = i\hbar \frac{d}{d-t} \quad (3.56)$$

Buna göre diyebiliriz ki, bir yoğunluk işlemcisinin transpozu, sürekli değişkenlerden momentum değişkeninin işaret değiştirmesi anlamına gelir. (3.29) ifadesinin transpozu alınır;

$$W' x, p = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{\frac{2iyp}{\hbar}} \rho x - y \quad (3.57)$$

elde edilir. (3.36)'da ki ifadede y yerine $-y$ ve dy yerine $-dy$ yazılırsa;

$$W' x, p = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{-2iyp/\hbar} \rho x + y$$

bulunur. Bu ifade (3.29) ile karşılaştırılırsa,

$$W' x, p = W x, -p \quad (3.57)$$

elde edilir. Buna göre faz uzayında parçalı transpoz tek kip için p yerine $-p$ yazma dönüşümüdür. Bu da faz uzayında zaman tersinimi dönüşümüdür.

3.4.4 İki kip için faz uzayında parçalı transpoz işlemi

Çok kipli durumlarda, hangi parça üzerinden parçalı transpoz alınırsa o kiplin p kuadratür işlemcisi işaret değiştirir. Örneğin iki kipli durumlarda ikinci parça üzerinden transpoz alınırsa $W(x_1, p_1, x_2, p_2) \rightarrow W(x_1, p_1, x_2, -p_2)$ olarak dönüşür.

$$W_{\mathfrak{z}} = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy_1 dy_2 e^{\frac{2i}{\hbar} y_1 p_1 + y_2 p_2} [x_1 - y_1 \otimes x_2 - y_2] \rho [x_1 + y_1 \otimes x_2 + y_2] \quad (3.59)$$

Wigner dağılımında ikinci parça üzerinden transpoz alınırsa,

$$W'_{\mathfrak{z}} = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy_1 dy_2 e^{\frac{2i}{\hbar} y_1 p_1 + y_2 p_2} [x_1 - y_1 \otimes x_2 + y_2] \rho [x_1 + y_1 \otimes x_2 - y_2] \quad (3.60)$$

elde edilir. Burada y_2 yerine $-y_2$ yazılırsa $dy_2 \rightarrow -dy_2$ olur ve

$$W'_{\mathfrak{z}} = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy_1 dy_2 e^{\frac{2i}{\hbar} y_1 p_1 - y_2 p_2} [x_1 - y_1 \otimes x_2 - y_2] \rho [x_1 + y_1 \otimes x_2 - y_2] \quad (3.61)$$

İfadesi elde edilir. Buradan açıkça,

$$W'(x_1, p_1, x_2, p_2) = W(x_1, p_1, x_2, -p_2) \quad (3.62)$$

olduğu görülmektedir.

3.4.5 Wigner fonksiyonları aracılığıyla dolanıklık kriteri

Eğer ρ ayrılabilir bir durumsa, onun Wigner dağılımı, parçalı transpoz alma işlemi sonunda faz uzayında ikinci parça üzerinden ayna simetrisi alınmış durumuna dönüşür. Bu dönüşüm;

$$\Lambda = \text{diag}(1, 1, 1, -1) \quad (3.63)$$

matrisi ile anlatılabilir. İkinci parçada zaman tersinim işlemine de karşı gelen bu dönüşüm ayrılabilir durumlar uzayının alt uzayında bir simetri işlemidir. Bu durum dolanıklık hakkında tek yönlü bir kriter oluşturma da kullanılabilir.

İki parçalı bir yoğunluk işlemcisinde ikinci parça üzerinden parçalı transpoz alma işlemi Wigner dağılımında (3.40)'de gösterildiği gibi,

$$W' \zeta = W \Lambda \zeta , \quad \Lambda = \text{diag } 1,1,1,-1 \quad (3.64)$$

dönüşümüne eşdeğerdir. Eğer ρ durumu ayrılabilir bir durumsa, $W' \zeta$ 'da gerçek bir Wigner fonksiyonudur. Yani (3.38)'de olduğu gibi gerçek bir yoğunluk işlemcisine (ayrılabilir bir durumun yoğunluk işlemcisinin parçalı transpozu olan bir başka yoğunluk işlemcisine) karşılık gelen bir başka Wigner fonksiyonudur. Bir başka deyişle $W' \zeta = W(\Lambda \zeta)$ fonksiyonu $W(\zeta)$ gibi geçerli bir Wigner dağılımıdır. Bu gözlem tek yönlü

$$\rho \text{ ayrılabilir} \Rightarrow W' \zeta \text{ bir Wigner fonksiyonudur} \quad (3.65)$$

önermesiyle ifade edilebilir. Bu önermenin mantıksal değillemesi olarak şu sonuç çıkarılabilir. Eğer parçalı transpoz alma işlemi sonunda ρ durumunun Wigner dağılımı yine geçerli bir Wigner dağılımına dönüşmüyorsa bu ayrılamazlık (dolanıklık) için yeter bir koşuldur. Bu koşul dördüncü bölümle sıkça kullanılarak Gaussiyen Wigner fonksiyonları için gerek ve yeter koşul oluşturmada yararlanılacaktır.

4. SÜREKLİ DEĞİŞKENLİ DOLANIKLIK

Ayrılabilirlik analizlerinde en güçlü kriterlerden birisi olan Peres-Horodecki kriteri sürekli değişkenli dolanıklık analizlerinde de önemli rol oynar. Bu kriter sürekli değişkenli durumlara Simon (2000) tarafından genellenmiştir. Simon parçalı transpoz alma işleminin sürekli değişkenli durumlarda zaman tersinimi ile ifade edilen zarif bir yorumunu vermiştir. Bu bölümde önce kovaryans matrisi formalizmi alt başlığı altında Simon tarafından önerilen kriter tartışıldıktan sonra Duan vd. (2000) tarafından PPT kriterinden bağımsız olarak önerilen yöntem tartışılacaktır. Duan'ın yönteminde toplam varyanslar için altsınır kriteri kullanılmaktadır.

4.1 Kovaryans Matrisi ve Belirsizlik Bağlıları

Sürekli değişkenli durumlarda dolanıklık analizlerinde kovaryans matrisi önemli bir yer tutar. Belirsizlik bağlantıları da bu matris aracılığıyla kısa ve özlü bir şekilde ifade edilebilmektedir. Bu şekilde ifade edilen belirsizlik bağlantıları, Peres-Horodecki kriteriyle birlikte kullanıldığında dolanıklık analizlerini de özlüce yapma imkânı doğar.

İki parçalı bir sistemin verilmiş bir ρ durumu için, $\mathfrak{z} = x_1, p_1, x_2, p_2$ genelleştirilmiş kuadratür işlemcilerinin;

$$\mathfrak{z}_\alpha = Tr \rho \mathfrak{z}_\alpha, \quad \Delta \mathfrak{z} = \mathfrak{z} - \mathfrak{z} \quad (4.1)$$

ile tanımlanan beklenen değerlerini ve $\Delta \mathfrak{z}$ sapmalarını göz önüne alalım. Kuadratür işlemcilerinin \mathfrak{z}_α bileşenleri topluca,

$$[\mathfrak{z}_\alpha, \mathfrak{z}_\beta] = i\Omega_{\alpha\beta}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

sıradeğişim bağlantılarını sağlarlar. Burada elemanları $\Omega_{\alpha\beta}$ olan 4x4'lük antisimetrik matrise simplektik matris denir. $\Delta \mathfrak{z}_\alpha = \mathfrak{z}_\alpha - \langle \mathfrak{z}_\alpha \rangle$ olmak üzere, Wigner dağılım fonksiyonu $W \mathfrak{z}$ ile hesaplanan \mathfrak{z}_α ortalama değerler, \mathfrak{z}_α beklenen değerlerine eşittir.

4.1.1 İki kip için kovaryans matrisi

V ile gösterilecek olan simetrik kovaryans matrisinin $V_{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, matris elemanları, anti-sıradeğişim bağıntılarıyla tanımlanan Hermitesel,

$$\Delta z_{\alpha}, \Delta z_{\beta} = \frac{\Delta z_{\alpha} \Delta z_{\beta} + \Delta z_{\beta}, \Delta z_{\alpha}}{2} \quad (4.3)$$

işlemcilerinin beklenen değerleriyle aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= \Delta z_{\alpha}, \Delta z_{\beta} \\ &= Tr \rho \Delta z_{\alpha}, \Delta z_{\beta} = \int d^4 z \Delta z_{\alpha} \Delta z_{\beta} W z . \end{aligned} \quad (4.4)$$

4x4'lük V matrisine iki kipli sistemin kovaryans matrisi denir. Yukarıdaki son eşitlik kovaryans matrisinin faz uzayındaki eşdeğer tanımı olup, $d^4 z$ faz uzayının hacim elemanını göstermektedir.

4.1.2 Kovaryans matrisi cinsinden iki kip için belirsizlik bağıntıları

Kovaryans matrisi cinsinden belirsizlik bağıntıları topluca şöyle ifade edilebilir:

$$V + \frac{i}{2} \Omega \geq 0 \quad (4.5)$$

Çok kipli sistemlere için bu bağıntılar rahatlıkla genellenebilir. Fakat bu tezde aksi belirtilmedikçe sadece iki kipli durumlar ele alınacaktır. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin ispatı aşağıdaki gibi yapılabilir.

(4.5) ifadesi, (4.2) sıradeğişim bağıntısı ve yoğunluk işlemcisinin pozitifliğinin doğrudan bir sonucudur. Bunu görmek için c_{α} katsayıları kompleks sayılar olmak üzere;

$$\eta = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + c_4 z_4 , \quad \Delta \eta = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \Delta z_{\alpha}$$

işlemcilerini göz önüne alalım. Bu durumda $\Theta = \Delta\eta\Delta\eta^\dagger$ bir pozitif işlemci olacağından, herhangi bir ρ durumunda beklenen değeri daima pozitif olacaktır:

$$\begin{aligned}
0 \leq \Theta &= Tr(\rho\Theta) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta^* Tr\{\rho\Delta z_\alpha \Delta z_\beta\} \\
&= \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} c_\alpha c_\beta^* \langle z_\alpha, z_\beta \rangle + 2\{\langle \Delta z_\alpha \Delta z_\beta \rangle\} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Bu ifadeleri yazarken; herhangi iki A ve B işlemcisi için geçerli olan,

$$AB = \frac{1}{2} A, B + \frac{1}{2} A, B, \quad \Delta A, \Delta B = A, B \quad (4.7)$$

bağıntıları kullanıldı. (4.6) eşitsizliğinde parantez içindeki ifadeler simplektik matris ve kovaryans matrisinin elemanları olduğundan bunu kısaca,

$$0 \leq \sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{2} c_\alpha c_\beta^* i\Omega_{\alpha\beta} + 2V_{\alpha\beta} \quad (4.8)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu her kompleks (c_1, c_2, c_3, c_4) vektörü için geçerli olduğundan $i\Omega + 2V$ matrisinin daima pozitif olduğunu söyler ki, bu da yukarıdaki (4.5) bağıntısını ispatlar. Ayrıca pozitif bir matrisin transpozu ve kendisi ile transpozunun toplamı da pozitif olduğundan (4.5) bağıntısı V kovaryans matrisinin de pozitifliğini gerektirir:

$$0 \leq V \quad (4.9)$$

4.2 Ayrılabilir Durumlarda Kovaryans Matrisi

İki parçalı bir sistemin ayrılabilir bir durumunu temsil eden ρ yoğunluk işlemcisinin ikinci parçaya göre parçalı transpozu alınmış ρ^{T_2} işlemciside bir yoğunluk işlemcidir. Aynı ifade birinci parçaya göre parçalı transpoz içinde geçerlidir. ρ^{T_2} 'ye karşılık gelen

Wigner fonksiyonu üçüncü bölümde gösterildiği gibi $W' \zeta = W(\Lambda \zeta)$ şeklinde dönüşür. Simon (2000) Burada Λ , köşegen elemanları sırasıyla (1,1,1,-1) olan köşegen matristir.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Ayrılabilir durumlar için ρ^{T_2} bir yoğunluk işlemcisi olduğundan $W' \zeta$ 'u da gerçek bir Wigner fonksiyonudur. Bu durumda hesaplanan kovaryans matrisi V ile gösterilirse; bunun matris elemanları

$$V_{\alpha\beta} = \int d^4 \zeta \Delta \Lambda_{\zeta\alpha} \Delta \Lambda_{\zeta\beta} W(\Lambda \zeta) \quad (4.11)$$

ile hesaplanabilir. Burada

$$\zeta' = \Lambda \zeta \square \zeta = \Lambda \zeta' \square \zeta_\gamma = \Lambda_{\gamma\eta} \zeta'_\eta \quad (4.12)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$V_{\alpha\beta} = \int d^4 \zeta' (\Delta \Lambda_{\alpha\gamma} \zeta'_\gamma) (\Delta \Lambda_{\beta\eta} \zeta'_\eta) W(\zeta')$$

$$V_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\gamma} \int d^4 \zeta' \Delta \zeta'_\alpha \Delta \zeta'_\beta W(\zeta') \Lambda_{\eta\beta} \quad \Lambda_{\eta\beta} = \Lambda_{\beta\eta}$$

$$V = \Lambda V \Lambda \quad (4.13)$$

dönüşümü bulunur. Ω matrisi aynı kaldığından parçalı transpozunu alınmış durumdaki belirsizlik bağıntıları da şu şekilde olacaktır:

$$0 \leq V + \frac{i}{2} \Omega \quad V = \Lambda V \Lambda \quad (4.14)$$

$\Lambda^2 = 1$ olduğundan bu bağıntı aşağıdaki gibi de yazılabilir;

$$0 \leq V + \frac{i}{2}\Omega \quad \Omega = \Lambda\Omega\Lambda \quad 4.15$$

Ayrılabilir durumlar için bu sağlanması gereken bir gereklilik koşulu yani Peres-Horodecki koşuludur ve dolanıklık analizinde temel bir rol oynar. Bu dolanıklık analizine girmeden önce (4.12) koşulunun ayrılabilir durumlarda getirdiği sıkı kısıtlamaları gösteren bir örneği ele almak yararlı olacaktır.

4.2.1 Uygulama: Ayrılabilir durumda PPT koşulundan gelen kısıtlamalar

Gerçel değerli ve dört bileşenli her

$$\mathbf{d} = d_1, d_2, d_3, d_4, \quad \mathbf{d}' = d'_1, d'_2, d'_3, d'_4$$

vektör çifti için,

$$\begin{aligned} X \mathbf{d} &= \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{z}} = d_1 x_1 + d_2 p_1 + d_3 x_2 + d_4 p_2 = d_\alpha^T \bar{\mathbf{z}}_\alpha \\ X \mathbf{d}' &= \mathbf{d}'^T \bar{\mathbf{z}} = d'_1 x_1 + d'_2 p_1 + d'_3 x_2 + d'_4 p_2 = d_\beta^T \bar{\mathbf{z}}_\beta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Hermiteşel işlemcilerini tanımlanırsa, (4.5) belirsizlik bağıntısından yararlanılarak

$$(\mathbf{d}' - i\mathbf{d})^T V (\mathbf{d}' + i\mathbf{d}) + \frac{i}{2} (\mathbf{d}' - i\mathbf{d})^T \Omega (\mathbf{d}' + i\mathbf{d}) \geq 0 \quad (4.17)$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.14)'de olduğu gibi bu kesimde tekrarlı indisler üzerinden toplam olduğu anlaşması kullanılacaktır. (4.15) eşitsizliğinin sol tarafında, V kovaryans matrisiyle ilgili olan kısım aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} L &= d'_\alpha - i d_\alpha \quad {}^T V_{\alpha\beta} (d'_\beta + i d_\beta) \\ &= d'_\alpha V_{\alpha\beta} d'_\beta + i (d'_\alpha V_{\alpha\beta} d_\beta - d_\alpha V_{\alpha\beta} d'_\beta) + d_\alpha V_{\alpha\beta} d_\beta \end{aligned} \quad (4.18)$$

Burada ikinci eşitlikte parantez içindeki ifade V matrisi simetrik olduğundan sıfır olur ve $V_{\alpha\beta}$ yerine (4.4) eşitliğindeki karşılığı yazılırsa

$$L = d'_\alpha V_{\alpha\beta} d'_\beta + d_\alpha V_{\alpha\beta} d_\beta$$

$$\begin{aligned}
&= d'_\alpha \text{Tr}(\rho\{\Delta z_\alpha, \Delta z_\beta\})d'_\beta + d_\alpha \text{Tr} \rho \Delta z_\alpha, \Delta z_\beta d_\beta \\
&= \text{Tr}(\rho d'_\alpha \Delta z_\alpha, d'_\beta \Delta z_\beta) + \text{Tr}(\rho d_\alpha \Delta z_\alpha, d_\beta \Delta z_\beta)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (4.14) tanımları kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
L &= \text{Tr}(\rho \Delta X d' , \Delta X d') + \text{Tr}(\rho \Delta X d , \Delta X d) \\
&= \langle (\Delta X d')^2 \rangle + \langle (\Delta X d)^2 \rangle
\end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir.

(4.15) eşitsizliğinin sol tarafındaki simplektik matrisle ilgili olan ikinci kısım;

$$\begin{aligned}
T &= d'_\alpha - id_\alpha{}^T \Omega_{\alpha\beta} (d'_\beta + id_\beta) \\
&= d'_\alpha \Omega_{\alpha\beta} d'_\beta + d_\alpha \Omega_{\alpha\beta} d_\beta + i(d'_\alpha \Omega_{\alpha\beta} d_\beta - d_\alpha \Omega_{\alpha\beta} d'_\beta)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak hesaplanır. Ω matrisi antisimetrik ve bir antisimetrik matrisin tüm beklenen değerleri sıfır olduğundan son eşitliğin sağındaki iki terim ayrı ayrı sıfırdır ve

$$T = i d'_\alpha \Omega_{\alpha\beta} d_\beta + d'_\beta \Omega_{\beta\alpha} d_\alpha = 2i \mathbf{d}'^T \Omega \mathbf{d} \tag{4.21}$$

yazılabilir. Böylece $L + \frac{i}{2}T \geq 0$ şeklinde olan (4.14) eşitsizliği

$$\langle (\Delta X d')^2 \rangle + \langle (\Delta X d)^2 \rangle - \mathbf{d}'^T \Omega \mathbf{d} \geq 0 \tag{4.22}$$

halinde yazılabilir. Bunun sol tarafı pozitif bir matris olduğundan ve pozitif bir matrisin transpozu da pozitif olacağından (4.20) ifadesinin sol tarafındaki ikinci terimin önündeki işaretin + olduğu durum da (\mathbf{d} ve \mathbf{d}' yer değiştirdikten sonra) geçerlidir. Bu yolla bulunan eşitsizlik (4.20) ile birleştirilirse;

$$(\Delta X(d))^2 + (\Delta X(d'))^2 \geq |d'^T \Omega d| = d_1 d'_2 - d_2 d'_1 + d_3 d'_4 - d_4 d'_3 \tag{4.23}$$

koşulu elde edilir.

Bu koşul belirsizlik ilkesinin iki kipli sürekli değişkenli durumlardaki bir ifadesidir. (4.21)'de ki eşitsizliğin sağ tarafı $||[X(d), X(d')]\|$ 'ye eşittir:

$$\begin{aligned} X(d), X(d') &= [d_1x_1 + d_2p_1 + d_3x_2 + d_4p_2, d'_1x_1 + d'_2p_1 + d'_3x_2 + d'_4p_2] \\ &= d_1d'_2 - d_2d'_1 + d_3d'_4 - d_4d'_3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

ρ 'nun ayrılabilirliği $|d'^T \Omega d|$ ile ilgili olarak (4.23) bağıntısına ek olarak

$$(\Delta X(\mathbf{d}))^2 + (\Delta X(\mathbf{d}'))^2 \geq |\mathbf{d}'^T \Omega \mathbf{d}| = d_1d'_2 - d_2d'_1 - d_3d'_4 + d_4d'_3 \quad (4.25)$$

Sınırlamasını getirir. Bu sınırlama (4.21) ile beraber ele alınırsa, her \mathbf{d}, \mathbf{d}' için tüm ayrılabilir durumlarda daha güçlü olan aşağıdaki sınırlama elde edilir:

$$(\Delta X(\mathbf{d}))^2 + (\Delta X(\mathbf{d}'))^2 \geq d_1d'_2 - d_2d'_1 + |d_3d'_4 - d_4d'_3|. \quad (4.26)$$

Özel bir uygulama olarak; eğer $X(d)$ ile $X(d')$ işlemcileri sıradedeğişirse $d'^T \Omega d = 0$ olur ve (4.21)'in sağ tarafı sıfır olur. Fakat verilen durum ayrılabilirse $d'^T \Omega d = 0$ olmadıkça yani $d_1d'_2 - d_2d'_1 = 0 = d_3d'_4 - d_4d'_3$ koşulları sağlanmadıkça, (4.26)'nın sağ tarafı sıfır olamazlar ve $X(d), X(d')$ keyfi biçimde küçük belirsizliklere sahip olamazlar.

Örnek olarak, sıra değişen

$$X = q_1 + p_1 + q_2 + p_2, \quad Y = q_1 - p_1 - q_2 + p_2 \quad (4.27)$$

İşlemcilerini göz önüne alalım. Bu durumda $\mathbf{d} = (1,1,1,1)$, $\mathbf{d}' = (1, -1, -1,1)$ ve (4.22)'nin sağ tarafı $d_1d'_2 - d_2d'_1 - d_3d'_4 + d_4d'_3 = 4$ olarak bulunur. Böylece herhangi bir ayrılabilir durumdaki $(\Delta X(\mathbf{d}))^2 + (\Delta X(\mathbf{d}'))^2$ belirsizlikleri toplamı daima en az 4 olmalıdır.

4.3 Sürekli değişkenli durumlarda simplektik dönüşümler

Peres-Horodecki (4.27) koşulu basitleştirilebilir. İki kipli bir sistemin gerçel, çizgisel kanonik dönüşümleri 10 parametrelili gerçel simplektik grup $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ oluşturur. Her 4×4 gerçel matris için $S \in \text{Sp}(4, \mathbb{R})$, Hermitesel \mathfrak{z} işlemcilerini birbirleri arasında dönüştüren ve temel sıradedeğişim bağıntılarını değişmez bırakan simplektik dönüşüm vardır.

$$S \in \text{Sp } 4, \mathbb{R} : S \Omega S^T = \Omega \quad (4.27)$$

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z}' = S \bar{z} \quad (4.28)$$

$$\bar{z}'_{\alpha}, \bar{z}'_{\beta} = i \Omega_{\alpha\beta} \quad (4.29)$$

Simplektik grup iki kipli Hilbert uzayında üniter ve indirgenemez olarak etki eder. $U(S)$, $S \in \text{Sp } 4, \mathbb{R}$ 'e karşı gelen sonsuz boyutlu üniter işlemci olsun. Bu işlemci, iki parçalı ψ durum vektörünü;

$$\psi' = U S \psi \quad (4.30)$$

durum vektörüne ve ρ yoğunluk işlemcisini;

$$\rho' = U S \rho U^\dagger S \quad (4.31)$$

yoğunluk işlemcisine dönüştürür. Bu dönüşüm Wigner resminde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\rho \rightarrow U S \rho U^\dagger S \Leftrightarrow W \bar{z} \rightarrow W S^{-1} \bar{z} \quad (4.32)$$

İki parçalı Wigner dağılımları basitçe skaler alanlar olarak dönüşür. V kovaryans matrisinin dönüşümü de şu biçimdedir:

$$S \in \text{Sp } 4, \mathbb{R} : V \rightarrow V' = S V S^T \quad (4.33)$$

Belirsizlik bağıntısı (4.5) bağıntısı $\text{Sp } 4, \mathbb{R}$ dönüşümü altında değişmez bir formda kalır. Bununla beraber ayrılabilir durumlar sadece (4.5) koşulunu değil (4.14) koşulunu da sağlamalıdır. Bu koşul ancak $\text{Sp } 4, \mathbb{R}$ 'ün 6 parametrelili $\text{Sp } 2, \mathbb{R} \otimes \text{Sp } 2, \mathbb{R}$ alt grubunun elemanlarıyla yapılacak dönüşümlerle sağlanabilir. Bu dönüşümler bağımsız yerel kanonik dönüşümlerdir.

$$S_{\text{Yerel}} \in \text{Sp } 2, \mathbb{R} \otimes \text{Sp } 2, \mathbb{R} \subset \text{Sp } 4, \mathbb{R}$$

$$S_{\text{Yerel}} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \quad S_1 J S_1^T = J = S_2 J S_2^T \quad (4.34)$$

Peres-Horodecki koşulunun $\text{Sp } 2, \mathbb{R} \otimes \text{Sp } 2, \mathbb{R}$ dönüşümü altında değişmez kalması istenir. Bunun için öncelikle kovaryans matrisinin blok formunu göz önüne almamız gerekir.

4.3.1 Kovaryans matrisinin blok formu

Kovaryans matrisi blok formda aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

(4.5) fiziksel koşulunun zorunlu sonucu olarak $\det A \geq 1/4$, $\det B \geq 1/4$ koşulunu sağlar.

$$\det \begin{pmatrix} A + \frac{i}{2}J & C \\ C^T & B + \frac{i}{2}J \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.36)$$

Bu matrisin asal alt matrisleri olan 2×2 'li $A + \frac{i}{2}J$ ve $B + \frac{i}{2}J$ matrislerin determinantları da aynı koşulu ayrı ayrı sağlar. (Pozitif bir matrisin asal alt matrisleri de pozitiftir). Asal alt matrisler aynı numaralı satır ve sütünün silinmesinden sonra elde edilen kare matrislerdir. Kovaryans matrisi için geçerli olan (4.36) koşulu asal matrisler içinde geçerlidir.

$$\det \left(A + \frac{i}{2}J \right) = \det A \left(1 - \text{Tr} \frac{i}{2}A^{-1}J \right) + \det \frac{i}{2}A^{-1}J \geq 0 \quad (4.37)$$

olarak hesaplanabilir. J antisimetrik bir matris olduğundan

$$\text{Tr} \frac{i}{2}A^{-1}J = 0 \quad (4.38)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (4.36) ifadesi daha basit biçimde yazılırsa;

$$\det \left(A + \frac{i}{2}J \right) = \det A + \det A \cdot \det \frac{i}{2}A^{-1}J$$

$$= \det A + \frac{i^2}{2} \det A \frac{1}{\det A} \det J \geq 0$$

$$\Rightarrow \det A \geq \frac{1}{4} \quad (4.39)$$

koşulu elde edilir. Aynı koşul $B + \frac{i}{2}J$ matrisi içinde uygulanırsa $\det B \geq \frac{1}{4}$ olarak bulunur. (4,36) determinantının kendisi hesaplanmak istenirse bir $P = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi seçilir ($\det P = 1$) ve $\det(P^TVP) = \det V$ özdeşliği kullanılırsa, (4.35) kovaryans matrisinin determinanı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\det V = \begin{pmatrix} A & AX + C \\ X^T A + C^T & X^T AX + X^T C + C^T X + B \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$X = -A^{-1}C$, $X^T = -C^T(A^{-1})^T$ olarak seçilirse bu matris aşağıdaki forma dönüşür.

$$\det V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B(-B^{-1}C^T A^{-1}C + 1) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Bu köşegen matrisin determinanı;

$$\begin{aligned} \det V &= \det A \cdot \det B \cdot \det(1 - B^{-1}C^T A^{-1}C) \\ &= \det A \cdot \det B \cdot (1 - \text{Tr}(B^{-1}C^T A^{-1}C) + \det(B^{-1}C^T A^{-1}C)) \\ &= \det A \cdot \det B - \det A \cdot \det B \cdot \text{Tr}(B^{-1}C^T A^{-1}C) + \det C^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

şeklinde yazılabilir. (4.41)'de 2×2 'li A^{-1} ve B^{-1} matrislerinin A ve B matrisleri cinsinden ifadeleri,

$$A^{-1} = -\frac{JA}{\det A} \quad B^{-1} = -\frac{JB}{\det B} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

olmak üzere;

$$\det V = \det A \cdot \det B + (\det C)^2 - \text{Tr} AJCJB^T J \quad (4.44)$$

olarak elde edilir.

(4.32) bağıntısından görüleceği gibi S_{Yerel} , V matrisinin bloklarını şu biçimde dönüştürecektir.

$$A \rightarrow S_1 A S_1^T \quad B \rightarrow S_2 B S_2^T \quad C \rightarrow S_1 C S_2^T \quad (4.45)$$

Bu durumda V matrisi için $Sp(2, \mathbb{R}) \otimes Sp(2, \mathbb{R})$ değişmezleri

$$A' \rightarrow A + \frac{i}{2} J \quad B' \rightarrow B + \frac{i}{2} J \quad (4.46)$$

olmak üzere (4.5) belirsizlik bağıntısının $Sp(2, \mathbb{R}) \otimes Sp(2, \mathbb{R})$ değişmezleri cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir,

$$\det V' = \det A' \cdot \det B' + \det C^2 - \text{Tr} A' J C B' J C^T J . \quad (4.47)$$

4.3.2 Kovaryans matrisinin standart formları

Burada A' ve B' matrisleri için (4.44) eşitliği ve kovaryans matris için

$$V_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

standart formu kullanılırsa (herhangi bir kovaryans matrisi $Sp(2, \mathbb{R}) \otimes Sp(2, \mathbb{R})$ 'nin elemanları ile uygun yerel kanonik dönüşümlerle V_0 formuna dönüştürülebilir.)

$$\det A' = \det \left(A + \frac{i}{2} J \right) = \det A - \frac{1}{4}$$

$$\det B' = \det \left(B + \frac{i}{2} J \right) = \det B - \frac{1}{4} \quad (4.49)$$

olarak hesaplanır.(4.48)'deki ifadeler (4.47)'de yerine yazılırsa,

$$\det V' = \det A - \frac{1}{4} \quad \det B - \frac{1}{4} + \det C^2 - \text{Tr} A' J C B' J C^T J$$

$$\begin{aligned}
&= \det A \det B - \frac{1}{4} \det A + \det B + \det C^2 + \frac{1}{16} \\
&\quad - \text{Tr } A'JCJB'JC^TJ
\end{aligned} \tag{4.50}$$

şeklinde hesaplanır. (4.50)'de ki $\text{Tr } A'JCJB'JC^TJ$ A, B, C matrisleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\text{Tr } A'JCJB'JC^TJ &= \text{Tr } \left(A + \frac{i}{2} J \right) \left(J C J \right) \left(B + \frac{i}{2} J \right) \left(J C^T J \right) \\
&= \text{Tr } \left(A J C J + \frac{i}{2} J J C J \right) \left(B J C^T J + \frac{i}{2} J J C^T J \right) \\
&= \text{Tr } A J C J B J C^T J - \frac{i}{2} A J C J C^T J - \frac{i}{2} C J B J C^T J - \frac{1}{4} C J C^T J
\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak yazılabilir. Eğer kovaryans matrisinin (4.48)'deki standart formu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
A J C J C^T J &= \begin{pmatrix} 0 & -ac_1c_2 \\ ac_1c_2 & 0 \end{pmatrix} \quad C J B J C^T J = \begin{pmatrix} 0 & -bc_1^2 \\ bc_2^2 & 0 \end{pmatrix} \\
\text{Tr } \frac{i}{2} A J C J C^T J &= 0 = \text{Tr } \frac{i}{2} C J B J C^T J
\end{aligned} \tag{4.52}$$

olduğu açıktır. (4.51)'deki diğer ifade;

$$\frac{1}{4} C J C^T J = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -c_1c_2 & 0 \\ 0 & -c_1c_2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \det C \mathbb{1}_2 \tag{4.53}$$

olarak yazılabileceğinden (4.52) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
\text{Tr } A'JCJB'JC^TJ &= \text{Tr } A J C J B J C^T J + \text{Tr } \frac{1}{4} \det C \mathbb{1}_2 \\
&= \text{Tr } A J C J B J C^T J + \frac{1}{2} \det C
\end{aligned} \tag{4.54}$$

(4.54)'den yararlanarak (4.50) ifadesi daha kısa biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - \det C \right)^2 - \text{Tr } A J C J B J C^T J \geq \frac{1}{4} \det A + \det B \tag{4.55}$$

Peres-Horodecki parçalı iz alma veya ayna yansımaları yöntemi altında kovaryans matrisinin dönüşümü $V \rightarrow V = \Lambda V \Lambda$ şeklindedir. Burada $C \rightarrow C \sigma_3$, $B \rightarrow \sigma_3 B \sigma_3$ olarak dönüşür A değişmez olarak kalır. (σ_3 köşegen Pauli matrisi, $\sigma_3 = \text{diag}(1, -1)$). Sonuç olarak I_1, I_2, I_4 değişmez kalırken $I_3 = \det C$ işaret değiştirir. Bu yüzden (4.55) bağıntısının V için yazılacak olan formunda sadece $\det C$ işaret değiştirecek ve

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} + \det C\right)^2 - \text{Tr} AJCJB JC^T J \geq \frac{1}{4} \det A + \det B \quad (4.56)$$

biçimini alacaktır. (4.55) ve (4.56) beraber ele alındığında ayrılabilir durumlar için kovaryans matrisinin sağlanması gereken koşul aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\det A \det B + \left(\frac{1}{4} - |\det C|\right)^2 - \text{Tr} AJCJB JC^T J \geq \frac{1}{4} \det A + \det B \quad (4.57)$$

Bu koşul sadece $\text{Sp } 2, \mathbb{R} \otimes \text{Sp } 2, \mathbb{R}$ dönüşümleri altında değil beklendiği gibi ayna yansımalarında da değişmezdir ve bu durum, ikinci momentlere dair Peres-Horodecki koşulunun tam bir tarifidir.

Özetlemek gerekirse (4.5), (4.23) ve (4.55) koşulları temel belirsizlik bağıntısının eşdeğer ifadeleridir ve bütün fiziksel durumlar için geçerlidir. (4.25), (4.27) ve (4.56) ikinci momentler düzeyinde Peres-Horodecki koşulunun bir sonucu olup, her ayrılabilir durum için geçerlidir. Önemli bir belirleme olarak $\det C \geq 0$ olan durumlar (4.57) koşulunu kesin olarak sağlar.

Standart V_0 formu için (4.57) koşulu şu biçimde yazılabilir.

$$4 ab - c_1^2 - ab - c_2^2 \geq a^2 + b^2 + 2 c_1 c_2 - \frac{1}{4} \quad (4.58)$$

Ama ayrılabilirlik için gereklilik koşulu olan (4.57) sadece V_0 formuna değil doğrudan V üzerine uygulanabilir.

Şimdi bu sonuçları Gaussiyen durumlara uygulayalım. Yerel üniter yerdeğiştirme işlemcileri kullanılarak $\langle z_\alpha \rangle$ ortalama değerleri değiştirilebileceği için genellik

kaybedilmeden $\langle z_\alpha \rangle = 0$ alınabilir. Bir sıfır ortalama değerli Gaussiyen durum, Wigner dağılımından da anlaşılacağı gibi ikinci momentleriyle tam olarak karakterize edilebilir.

4.3.4 Sürekli değişkenli ayrılabilir durumların P temsili

Kuantum optikte ayrılabilir durum yoğunluk işlemcisi;

$$\rho = \int d^2 z_1 d^2 z_2 P(z_1, z_2) |z_1\rangle\langle z_1| \otimes |z_2\rangle\langle z_2| \quad (4.59)$$

olarak ifade edilebilir. $|z_1\rangle$ ve $|z_2\rangle$ koharent durumları göstermekte. $P(z_1, z_2)$ bir ağırlık kesri fonksiyonudur ve Galuber-Sudarshan fonksiyonu olarak da bilinir. $P(z_1, z_2)$, istatistik mekanikteki faz uzayı dağılım fonksiyonu ile benzerdir.

(4.59) ifadesini elde etmek için herhangi bir ρ yoğunluk işlemcisini ele alalım. Bu yoğunluk işlemcisi $|n\rangle$ ve $|m\rangle$ sayı durumlarının tamlık bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{n,m} |n\rangle\langle n| \rho |m\rangle\langle m| \\ &= \sum_{n,m} P_{nm} |n\rangle\langle m|, \quad P_{nm} = \langle n| \rho |m\rangle \end{aligned} \quad (4.60)$$

Burada $|n\rangle$ ve $|m\rangle$ sayı durumları yerine tek parçalı bir $|\alpha\rangle$ koherent durumunun tamlık bağıntısı kullanırsa;

$$\rho = \int d^2 \alpha P(\alpha) |\alpha\rangle\langle \alpha| \quad \int d^2 \alpha P(\alpha) = 1 \quad (4.61)$$

İfadesi elde edilir. $d^2 \alpha$, α kompleks sayısının elemanı olduğu kompleks düzlemin gerçel iki boyutlu hacim elemanıdır.

iki parçalı ρ koherent durum yoğunluk işlemcisi göz önüne alınırsa ve $|z_1\rangle, |z_2\rangle$ koherent durumlarının $H_1 \otimes H_2$ uzayındaki;

$$d^2 z_1 d^2 z_2 \langle z_1 | \otimes \langle z_2 | \rho = 1 \quad (4.62)$$

amlık bağıntısı kullanılırsa iki parçalı ρ yoğunluk işlemcisi,

$$\begin{aligned} \rho &= d^2 z_1 d^2 z_2 \langle z_1 | \otimes \langle z_2 | \rho | z_1 \rangle \otimes | z_2 \rangle \\ &= d^2 z_1 d^2 z_2 \langle z_1 z_2 | \rho | z_1 z_2 \rangle \end{aligned} \quad (4.63)$$

$P_{z_1, z_2} = \langle z_1 z_2 | \rho | z_1 z_2 \rangle$ Olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho &= d^2 z_1 d^2 z_2 P_{z_1, z_2} | z_1 z_2 \rangle \langle z_1 z_2 | \\ &= d^2 z_1 d^2 z_2 P_{z_1, z_2} | z_1 \rangle \langle z_1 | \otimes | z_2 \rangle \langle z_2 | \end{aligned} \quad (4.64)$$

Şeklinde tekrar yazılabilir.

4.3.5 Dolanıklık analizinde PPT kriterinin gaussiyen durumlarda gerek ve yeter koşul oluşu

Teorem: Peres-Horodecki koşulu (4.57) tüm iki parçalı Gaussiyen durumlarda ayrılabilirlik için gerek ve yeter koşuldur.

$Sp(2, \mathbb{R}) \otimes Sp(2, \mathbb{R})$ yerel grubu ayrılabilirliği etkilemediğinden herhangi bir ayrılabilir durumun bu grup altındaki dönüşümü de ayrılabilir. Sonuç olarak bir Gaussiyen durum ancak ve ancak

$$V - \frac{1}{2} \geq 0 \quad (4.65)$$

koşulunu sağlıyorsa ayrılabilir.

Yardımcı Teorem: $\det C \geq 0$ olan Gaussiyen durumlar ayrılabilir. Öncelikle $\det C > 0$ durumu gözönüne alalım. (4.48)'deki özel V_0 formunda $a \geq b$, $c_1 \geq c_2 > 0$ olarak

düzenleme yapılabilir. İki parça üzerinde yerel sıkıştırma işlemine karşı gelen $S_{Yerel} = \text{diag}(x, x^{-1}, x^{-1}, x)$ ve bundan sonra $S_{Yerel} = \text{diag}(y, y^{-1}, y, y^{-1})$ yerel kanonik dönüşümleri uygulanırsa, parçalar üzerinde aynı yerel sıkıştırma işlemleri yapılmış olur:

$$V_0 \rightarrow V_0' = \begin{pmatrix} y^2 x^2 a & 0 & y^2 c_1 & 0 \\ 0 & y^{-2} x^{-2} a & 0 & y^{-2} c_2 \\ y^2 c_1 & 0 & y^2 x^{-2} b & 0 \\ 0 & y^{-2} c_2 & 0 & y^{-2} x^2 b \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Burada $c_1 \quad x^2 a - x^{-2} b = c_2 \quad x^{-2} a - x^2 b$ şeklinde seçilirse;

$$x = \frac{c_1 a + c_2 b}{c_2 a + c_1 b} \quad (4.67)$$

olarak bulunur. Bu durumda V_0' q_1, q_2 ve p_1, p_2 düzlemlerinde eşit miktarda döndürülerek köşegenleştirilebilecek bir formdadır. Bu köşegenleştirme işlemi,

$$U = \begin{pmatrix} \cos\emptyset & 0 & -\sin\emptyset & 0 \\ 0 & \cos\emptyset & 0 & -\sin\emptyset \\ \sin\emptyset & 0 & \cos\emptyset & 0 \\ 0 & \sin\emptyset & 0 & \cos\emptyset \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

olmak üzere,

$$V_0'' = U^T V_0' U \quad (4.69)$$

dönüşümü ile yapılabilir.

$$V_0' \rightarrow V_0'' = \text{diag}(K_+, K_+, K_-, K_-) \quad (4.70)$$

$$K_{\pm} = \frac{1}{2} y^2 \left(x^2 a + x^{-2} b \pm (x^2 a - x^{-2} b)^2 + 4c_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.71)$$

$$K'_{\pm} = \frac{1}{2} y^{-2} \left(x^{-2} a + x^2 b \pm (x^{-2} a - x^2 b)^2 + 4c_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.72)$$

Böyle bir dönme kanonik bir dönüşümdür ve belirsizlik bağıntıları korur. Köşegen V_0'' için $V_0'' + \frac{i}{2} \Omega \geq 0$ belirsizlik bağıntısından $K_- K'_- \geq 1/4$ olarak bulunur. y öyle seçilebilir ki $K_-, K'_- = 1/2$ ve $V_0'' \geq 1/2$ olur. V_0'', V_0' durumundan bir dönme işlemi

ile elde edildiğinden $V_0' \geq 1/2$ olarak yazılabilir ve bu durumda V_0' pozitif bir P dağılımına yani ayrılabilir bir duruma ve bunun doğal bir sonucu olarak (4.5)'de ki V kovaryans matrisi de ayrılabilir duruma karşı gelir ve $\det C > 0$ için ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $\det C = 0$ olduğu durumu göz önüne alalım. Bu durumda V_0 matris elemanları için $c_1 \geq 0 = c_2$ koşulu yazılabilir. Simplektik dönüşüm işlemcisini

$$S_{yere1} = \text{diag} \quad \overline{2a}, \frac{1}{\overline{2a}}, \overline{2b}, \frac{1}{\overline{2b}} \quad (4.73)$$

olacak biçimde değiştirirsek $V_0 \rightarrow V_0'$ dönüşümden sonra V_0' matrisinin köşegen elemanları $(2a^2, \frac{1}{2}, 2b^2, \frac{1}{2})$ ve köşegen dışı iki elaman $2abc_1$ olarak elde edilir. V_0' formu için geçerli $V_0' + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$ belirsizlik bağıntısından $V_0 \geq \frac{1}{2}$ sonucu elde edilir bu da Gaussiyen durumlar için ayrılabilirlik koşuludur ve yardımcı teorem ispatlanmış olur.

Esas teoremin ispatı şöyle tamamlanır. İki farklı durum olarak $\det C < 0$ ve $\det C \geq 0$ alalım. $\det C < 0$ olduğunu farzedelim. Bu durumda iki olasılık vardır. (4.56) ayrılabilirlik için bir gerek koşul olduğundan eğer ihlal ediliyorsa Gaussiyen durum kesinlikle dolanıktır. Eğer (4.56) ihlal edilmiyorsa, o zaman ayna yansımış durum $\det C > 0$ koşulunu sağlayan fiziksel bir durumdur (ayna yansımı $\det C$ 'nin işaretini değiştirir) ve yardımcı teoremden görüldüğü gibi bu durum ayrılabilir bir durumdur. Bu ayna yansımış durum ayrılabilir olduğundan esas durumun da ayrılabilir olduğunu gösterir. Son olarak $\det C \geq 0$ olduğunda (4.56) koşulu kesinlikte sağlanır ve teorem ispatlanmış olur. Kuantum durumların ve işlemlerin Hilbert ve Faz uzayındaki karşılıklarını özetlemek gerekirse;

Çizelge 4.1 Kuantum Durumların ve Kuantum işlemlerin Hilbert Uzayındaki ve Kuantum Faz uzayındaki karşılıkları

	Hilbert Uzayı	Faz Uzayı
Boyut	∞	$2N$
Yapı	\otimes	\oplus
Tarif, Temsil	ρ	V
	$\rho \geq 0$	$V + i/2 \Omega \geq 0$
Operasyonlar	$U: U^\dagger U = 1, \rho' \rightarrow U^\dagger \rho U$	$S: S^T \Omega S = \Omega, V \rightarrow S^T V S$
Spektral ayrışım	$U^\dagger \rho U = \text{diag}\{\lambda_k\}$ $0 \leq \lambda_k \leq 1$	$S^\dagger V S = \text{diag } v_k$ $1 \leq v_k \leq \infty$

4.6 Duan Yaklaşımı: Toplam Varyans Üzerinden Dolanıklık Analizi

Sürekli değişkenli sistemler için bir parçalı iz alma kriterinden bağımsız bir dolanıklık kriteri “sürekli değişkenli sistemler için ayrılamazlık kriteri” (*Inseperability Criterion for Continious Variable Systems*) adlı makalede (Duan vd. 2000) önerilmiştir.

Bu kriter EPR tipi işlemcilerin toplam varyasyonlarının hesabına dayanır. Herhangi bir ayrılabilir sürekli değişkenli durumlar için bu toplam varyansın belirsizlik bağıntısından dolayı alttan belirli bir değerler sınırlandığı gösterilmiştir. Dolanık durumlar için bu sınır aşılabilmektedir. Öyleyse toplam varyanslar için altsınırın ihlali dolanıklık için yeter bir koşul olarak ortaya konabilir. Bu sınırın Gaussiyen durumlar için ne kadar güçlü bir sınır olduğu incelenirse görülecektir ki, belirli bir EPR tipi işlemci çifti için bu altsınıra uygunluk, durumun pozitif dağılımlı bir P temsiline sahip olduğunu garantiler. Öyleyse bu durum ayrılabilir olmalıdır. Buradan Gaussiyen durumlarda dolanıklık için gerek ve yeter bir koşul elde etmiş oluruz.

İki kipli bir ayrılabilir durum işlemcisi ancak ve ancak aşağıdaki gibi ifade edilebiliyorsa ayrılabilirlerdir.

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i1} \otimes \rho_{i2} \quad (4.74)$$

Burada ρ_{i1} ve ρ_{i2} birinci ve ikinci kiplerin normalize olmuş durum işlemcileridir. $0 \leq p_i \leq 1$ ve $\sum_i p_i = 1$ koşulunu sağlar.

Maksimum dolanık bir sürekli değişkenli sistem bir EPR tipi işlemci çifti olan $x_1 + x_2$ ve $p_1 - p_2$ işlemcilerinin özdeğerleri ile ifade edilebilir. Bu yüzden bu iki işlemcinin toplam varyansları sürekli değişkenli maksimum dolanık durumlar için sıfır olur. Elbette sürekli değişkenli maksimum dolanık durumlar fiziksel değildir ama fiziksel olan sürekli değişkenli dolanık durumlar için (iki kipli sıkıştırılmış durumlar) bu varyans sıkıştırma derecesinin artmasıyla hızla sıfıra gider. İlginç olarak her ayrılabilir durum için toplam varyansın bir alt sınırı vardır. Daha genel olmak için aşağıdaki gibi EPR tipi işlemciler göz önüne alalım.

$$u = a x_1 + \frac{1}{a} x_2 \quad v = a p_1 - \frac{1}{a} p_2 \quad (4.75)$$

Burada a sıfır olmayan keyfi bir gerçel sayıdır. Her ayrılabilir durum için (4.75) ifadesindeki her EPR tipi işlemcinin toplam varyansları için aşağıdaki teoremlerle gösterilen bir alt sınır vardır.

Teorem: Dolanıklık için yeterlilik kriteri: Her ayrılabilir ρ durumu için $[x_j, p_k] = i\delta_{jk}$ olmak üzere (4.75)'de gösterilen EPR tipi işlemciler için toplam varyans aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta v)^2 \rangle_\rho \geq a^2 + \frac{1}{a^2} \quad (4.76)$$

İspat: Ayrılabilir bir durumdaki u ve v işlemcilerinin toplam varyansını hesaplamak için doğrudan ρ yoğunluk işlemcisinin (4.74) formunu kullanabiliriz.

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta v)^2 \rangle_\rho = \sum_i p_i (\langle u^2 \rangle_i + \langle v^2 \rangle_i - \langle u \rangle_\rho^2 - \langle v \rangle_\rho^2) \quad (4.77)$$

Burada u ve v işlemcilerinin açık ifadeleri yerine yazılırsa;

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta v)^2 \rangle_\rho = \sum_i p_i \left(a^2 \langle x_1^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle x_2^2 \rangle_i + a^2 \langle p_1^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle p_2^2 \rangle_i \right)$$

$$+2 \frac{a}{|a|} \sum_i p_i (\langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_i - \langle p_1 \rangle_i \langle p_2 \rangle_i) - \langle u \rangle_\rho^2 - \langle v \rangle_\rho^2 \quad (4.78)$$

elde edilir.

Şimdi $\langle u \rangle_\rho^2 = (\sum_i p_i \langle u \rangle_i)^2$ ve $\langle v \rangle_\rho^2 = (\sum_i p_i \langle v \rangle_i)^2$ eşitliklerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta u)^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta v)^2 \rangle_\rho &= \sum_i p_i \left(a^2 \langle (\Delta x_1)^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle (\Delta x_2)^2 \rangle_i + a^2 \langle (\Delta p_1)^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle (\Delta p_2)^2 \rangle_i \right) \\ &+ \sum_i p_i \langle u \rangle_i^2 - \left(\sum_i p_i \langle u \rangle_i \right)^2 + \sum_i p_i \langle v \rangle_i^2 - \left(\sum_i p_i \langle v \rangle_i \right)^2 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Burada $\langle \dots \rangle_i$, $\rho_{i1} \otimes \rho_{i2}$ çarpım durumu üzerinden ortalama değeri göstermektedir.

$$\langle (\Delta x_j)^2 \rangle_i + \langle (\Delta p_j)^2 \rangle_i \geq x_j, p_j = 1, j = 1, 2 \quad (4.80)$$

$$\langle (\Delta x_j)^2 \rangle_i = \langle x_j^2 \rangle_i - \langle x_j \rangle_i^2, \quad \langle (\Delta p_j)^2 \rangle_i = \langle p_j^2 \rangle_i - \langle p_j \rangle_i^2 \quad (4.81)$$

Cauchy-Scwarz eşitliği,

$$\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2, \quad (4.82)$$

kullanılırsa;

$$\sum_i p_i \langle u \rangle_i^2 \geq \left(\sum_i p_i \langle u \rangle_i \right)^2 \quad (4.83)$$

eşitsizliği yazılabilir. Dikkat edilirse (4.79) ifadesi alttan sıfır değeri ile sınırlandırılır. Bundan dolayı EPR tipi u ve v işlemcilerinin ρ ayrılabilir durumundaki toplam varyansları da alttan $a^2 + \frac{1}{a^2}$ ile sınırlandırılmış olur. Burada x_j, p_k yerel işlemcileri $[x_j, p_k] = i\delta_{jk}$ sıradışı bağıntısını sağlayan herhangi bir yerel işlemci olabilirler. u ve v işlemcilerine yerel $U_1 \otimes U_2$ üniter dönüşümleri uygulanırsa () eşitsizliği değişmeden kalır. Genelliği kaybetmeden x_j, p_k işlemcilerini boyutsuz kabul edildi.

Dolanık durumlar için u ve v işlemcilerinin toplam varyansları da $|a^2 - \frac{1}{a^2}| \geq 0$ koşulunu sağlamaktadır. $a = 1$ olduğu zaman bu sınır sıfır olur. Ayrılabilir durumlar için ise daha güçlü bir eşitsizlik olan (4.76) geçerlidir.

(4.76) ile verilen sınırın ne kadar güçlü bir sınır olduğu, ayrılabilir durumlar için bu sınırın bir gerek ve yeter koşul olup olmadığı doğal olarak akla gelen bir sorudur. Herhangi bir sürekli değişkenli durum için bu (4.76) koşulu ayrılabilirlik için gerek ve yeter bir koşul ortaya koymaz. Bu koşulu sağlayan dolanık durumlar varolabilir. Ama sürekli değişkenli Gaussiyen durumlar için (4.76) koşulu ayrılabilirlik için gerek ve yeter bir koşuldur.

4.6.1 Duan yaklaşımının gaussiyen durumlarda ayrılabilirlik için gerek ve yeter koşul oluşu

Gaussiyen bir durum tam olarak Wigner karakteristik fonksiyonu ile temsil edilebilir. İki kipli bir ρ durumunun Wigner karakteristik fonksiyonu,

$$\lambda = \lambda_j^R + i\lambda_j^I \quad a_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_j + ip_j) \quad x_j, p_{j'} = i\delta_{jj'} \quad (4.84)$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^w \lambda_1, \lambda_2 &= Tr[\rho \exp(\lambda_1 a_1 - \lambda_1^* a_1^\dagger + \lambda_2 a_2 - \lambda_2^* a_2^\dagger)] \\ &= Tr[\rho \exp i \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda_1^I x_1 + \lambda_1^R p_1 + \lambda_2^I x_2 + \lambda_2^R p_2)] \end{aligned} \quad (4.85)$$

Sürekli değişkenli Gaussiyen bir durum için Wigner karakteristik fonksiyonu λ_j^I ve λ_j^R gerçel parametrelerinin Gaussiyen bir fonksiyonudur. Genelliği kaybetmeden,

$$\mathcal{X}^w \lambda_1, \lambda_2 = \exp\left[\frac{-1}{2} (\lambda_1^I, \lambda_1^R, \lambda_2^I, \lambda_2^R) M \begin{pmatrix} \lambda_1^I & \lambda_1^R & \lambda_2^I & \lambda_2^R \end{pmatrix}^T\right] \quad (4.86)$$

olarak ifade edilebilir. (4.86)'da üstel ifadede ki çizgisel terimler yazılmamıştır çünkü bunlar x_j ve p_j üzerinden yerel yerdeğiştirmelerle sıfırlanabilir ve bu yüzden

ayrılabilirlik üzerine etkileri yoktur. Gaussiyen bir durumun kovaryans matrisi tam olarak 4x4 gerçel, simetrik bir M matrisi ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$M = \begin{pmatrix} G_1 & C \\ C_{PT}^T & G_2 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Burada G_1 , G_2 ve C gerçel matrislerdir. Ayrılabilirlik analizinde Gaussiyen bir durumun kovaryans matrisini öncelikle yerel, çizgisel, üniter Bogoliubov (LLUBOs) dönüşümleriyle uygun bir standart forma dönüştürmek kolaylık sağlar. Heisenberg resminde LLUBO genel olarak U_l ile temsil edilir öyle ki; $U_l(x_j, p_j)^T U_l^\dagger = H_j(x_j, p_j)^T$ $j=1,2$ ve H_j gerçel bir 2x2 matris ve $\det H_j=1$. Her LLUBO, sıkıştırma ve döndürme işlemleri ile elde edilebilir. Gaussiyen durumlar standart formları için iki yardımcı teorem gereklidir.

Yardımcı teorem 1- Standart form I: Her Gaussiyen durum ρ_G durumu LLUBO ile aşağıdaki standart forma dönüştürülebilir:

$$M_S^I = \begin{pmatrix} n & 0 & c & 0 \\ 0 & n & 0 & c' \\ c & 0 & m & 0 \\ 0 & c' & 0 & m \end{pmatrix} \quad n, m \geq 1 \quad (4.88)$$

İspat: Bir ρ_G üzerinde bir LLUBO, Wigner karakteristik fonksiyonundaki M kovaryans matrisini aşağıdaki gibi dönüştürür.

$$\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

(4.87) ifadesindeki G_1 ve G_2 gerçel ve simetrik iken burada V_1 ve V_2 gerçel matrisler ve $\det V_1 = \det V_2 = 1$. Öncelikle G_1 ve G_2 'yi köşegenleştiren ortogonal V_1 ve V_2 'ler seçebiliriz. Sonra köşegenleşmiş G_1 ve G_2 'yi yerel sıkıştırma işlemiyle $G_1 \rightarrow G_1' = nI_2$ ve $G_2 \rightarrow G_2' = mI_2$ olacak şekilde dönüştürebiliriz (I_2 , 2x2 birim matris). Bu aşamalardan sonra (7)'deki C matrisinin her zaman tekil değer ayrışımı olan C' matrisine dönüştüğünü varsayabiliriz. Bu yüzden ortogonal uygun başka V_1 ve V_2 'ler aracılığıyla başka bir LLUBO dönüşümü yapılabilir. Son ortogonal LLUBO birim

matris ile orantılı oldukları için G'_1 ve G'_2 etkilenmez. Bu yüzden her Gaussiyen durum bu üç aşamada M_S^I standart formuna dönüştürülebilir.

Yardımcı teorem 2 - Standart form II: Herhangi bir ρ_G Gaussiyen durumu LLUBO dönüşümleri ile aşağıdaki kovaryans matrisiyle betimlenen bir Gaussiyen duruma dönüştürülebilir. Standart form 1'e iki yerel sıkıştırma işlemi uygulanırsa;

$$M_S^{II} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

Standart formu elde edilir. Burada n_i, m_i, c_i arasında aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

$$\frac{n_1 - 1}{m_1 - 1} = \frac{n_2 - 1}{m_2 - 1}$$

$$c_1 - c_2 = \frac{\overline{n_1 - 1}}{m_1 - 1} - \frac{\overline{n_2 - 1}}{m_2 - 1} \quad (4.91)$$

İspat: Herhangi bir ρ_G Gaussiyen durumu LLUBO dönüşümleri standart form-1'e dönüştürülebilir sonra fazladan iki yerel sıkıştırma işlemi daha uygulanırsa aşağıdaki kovaryans matrisi elde edilir.

$$M' = \begin{pmatrix} nr_1 & 0 & c \frac{\overline{r_1 r_2}}{r_1 r_2} & 0 \\ 0 & n/r_1 & 0 & c'/\frac{\overline{r_1 r_2}}{r_1 r_2} \\ c \frac{\overline{r_1 r_2}}{r_1 r_2} & 0 & mr_2 & 0 \\ 0 & c'/\frac{\overline{r_1 r_2}}{r_1 r_2} & 0 & m/r_2 \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

r_1 ve r_2 keyfi sıkıştırma parametreleri olduğu (4.92)'da ki M' eğer r_1 ve r_2 aşağıdaki koşulu sağlıyorsa

$$\frac{\frac{n}{r_1} - 1}{nr_1 - 1} = \frac{\frac{m}{r_2} - 1}{mr_2 - 1} \quad (4.93)$$

$$\frac{\overline{r_1 r_2}}{r_1 r_2} c - \frac{|c'|}{\overline{r_1 r_2}} = \frac{\overline{nr_1 - 1}}{nr_1 - 1} - \frac{\overline{mr_2 - 1}}{mr_2 - 1} - \frac{\frac{n}{r_1} - 1}{r_1} - \frac{\frac{m}{r_2} - 1}{r_2} \quad (4.94)$$

Burada yapılması gereken (4.93) ve (4.94) ifadelerinin pozitif r_1, r_2 değerleri ve keyfi Gaussiyen durumlar için sağlandığının gösterilmesidir. Genelliği kaybetmeden $c \geq c'$ ve $n \geq m$ olduğu varsayılabilir. (4.93)'den r_2, r_1 'in sürekli bir fonksiyonu olarak yazılabilir. $r_2 r_1 = 1$ ve $r_2 r_1 \rightarrow m$. Buradaki $r_2 r_1$ ifadesi (4.94)'de yerine yazılırsa,

$$f_{r_1} = \overline{r_1 r_2} c - \frac{|c'|}{\overline{r_1 r_2}} - \overline{\frac{n}{r_1} - 1} \overline{\frac{m}{r_2} - 1} \quad (4.95)$$

fonksiyonu kurulabilir. Açıkça görülmektedir ki;

$$f_{r_1=1} = c - c' \geq 0, \quad (4.96)$$

$$f_{r_1 \rightarrow \infty} = \overline{r_1 m} c - \overline{n \left(m - \frac{1}{m}\right)} \leq 0. \quad (4.97)$$

Yazılabilir. (4.97) ifadesi ve fiziksel koşul olarak,

$$\langle (\Delta u_0)^2 \rangle + \langle (\Delta v_0)^2 \rangle \geq u_0, v_0 \quad (4.98)$$

göz önüne alındığında;

$$u_0 = \overline{m - \frac{1}{m}} x_1 + \frac{c}{c} \overline{n} x_2, \quad v_0 = \frac{n}{m}, \quad (4.99)$$

olmak üzere;

$$c \geq \overline{n \left(m - \frac{1}{m}\right)}, \quad (4.100)$$

eşitsizliği elde edilir.

Süreklilik gereği $r_1^* \in [1, \infty)$ değeri vardır öyle ki; $f(r_1 = r_1^*) = 0$ koşulu sağlanır. Sonuç olarak (4.93) ve (4.94) denklemlerinin en az bir çözümü vardır. Böylece yardımcı teorem 2 ispatlanmış olur.

Dikkat edilmelidir ki Standart Form-I ya da Standart Form-II ile betimlenen LLUBO dönüşümleri altında eşdeğer olan bir Gaussiyen durumlar sınıfı vardır. LLUBO dönüşümleri altında ayrılabilirlik veya dolanıklık özellikleri etkilenmez. Öyleyse standart formlarla betimlenen Gaussiyen durumlar aynı ayrılabilirlik-dolanıklık özelliklerine sahiptir.

Teorem 2: Gaussiyen durumlarda ayrılabilirlik için gerek ve yeter koşul olma durumu: Bir ρ_G Gaussiyen durumu ayrılabilir ancak ve ancak bu durumun kovaryans matrisi Standart Form-II’de olduğu gibi ifade edilebiliyorsa, (4.76) eşitsizliği aşağıdaki EPR tipi işlemciler tarafından sağlanır.

$$u = a_0 x_1 - \frac{c}{c} \frac{1}{a_0} x_2 \quad (4.101)$$

$$v = a_0 p_1 - \frac{c}{c} \frac{1}{a_0} p_2 \quad (4.102)$$

$$a_0^2 = \frac{m_1 - 1}{n_1 - 1} = \frac{m_2 - 1}{n_2 - 1} \quad (4.103)$$

İspat: Gerek koşul teorem 1’den elde edilmektedir. Burada sadece yeter koşulun ispatlanması gerekmektedir. Yardımcı teorem 2 ile gösterildiği gibi Gaussiyen durumları LLUBO dönüşümleriyle standart form 2’ye dönüştürülmelidir. Dönüşümden sonraki durum ρ_G^{II} olarak gösterilir. (4.101) ve (4.102) ifadeleri (4.76)’da yerine yazılıp M_S^{II} kovaryans matrisi kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$a_0^2 \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{m_1 + m_2}{2 a_0^2} - c_1 - c_2 \geq a_0^2 + \frac{1}{a_0^2} \quad (4.104)$$

(4.104) ile (4.91) bağıntıları beraber ele alınırsa;

$$\begin{aligned}
c_1 &\leq \frac{n_1 - 1}{m_1 - 1} \\
c_2 &\leq \frac{n_2 - 1}{m_2 - 1}
\end{aligned} \tag{4.105}$$

(4.105) eşitsizlikleri $M_S^{II} - I$ matrisinin pozitif bir matris olmasını garantiler. Bundan dolayı ρ_G^{II} durumunun normal karakteristik fonksiyonunun;

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{II}^{(n)}(\lambda_1, \lambda_2) &= \mathcal{X}_{II}^{(w)}(\lambda_1, \lambda_2) \exp \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\
&= \exp \left[-\frac{1}{2} (\lambda_1^I, \lambda_1^R, \lambda_2^I, \lambda_2^R) (M_S^{II} - I) (\lambda_1^I, \lambda_1^R, \lambda_2^I, \lambda_2^R)^T \right]
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Fourier dönüşümü vardır. Buradan ρ_G^{II} durumu;

$$\rho_G^{II} = \int d^2\alpha d^2\beta P(\alpha, \beta) \langle \alpha, \beta | \tag{4.107}$$

olarak yazılabileceği anlaşılır. $P(\alpha, \beta)$, $\mathcal{X}_{II}^{(n)}$ karakteristik fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür ve bu yüzden pozitif bir Gaussiyen fonksiyondur. Bu durumda ρ_G^{II} , esas ρ_G yoğunluk işlemcisinden bazı LLUBO dönüşümleriyle elde edildiğinden ρ_G durumu da ayrılabilir bir durum olduğu ispatlanmış olur.

5. SÜREKLİ DEĞİŞKENLİ KUANTUM DOLANIKLIĞIN KUANTUM BİLİŞİM KURAMINDAKİ UYGULAMALARI

5.1 Kuantum Uz-aktarım

Kuantum uz-aktarım ilk defa 1993 yılında Bennett ve arkadaşları tarafından kubitler için kuramsal olarak önerilmiştir. Daha sonra Veidman tarafından 1994’de bu sürekli değişkenli sistemlere genişletilmiştir.

Kubitleri temel alan Bennett ve arkadaşlarının yaptığı çalışmada Alice ve Bob olarak adlandırılan iki gözlemci arasında paylaşılmış bir Bell durumu aracılığıyla Alice tarafından bilinmeyen bir

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (5.1)$$

kübit durumunun Bob’un kontrolünde bulunan parçaya aktarılması söz konusudur. Örneğin bu süreçte önce;

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (5.2)$$

Bell durumunu hazırlansın ve birinci parça Alice’e ikinci parça Bob’a gönderilsin Bu sayede Alice ve Bob arasında bir kuantum kanal kurulmuş olur. Alice’in elinde aktarmak istediği ve bilmediği bir $|\psi\rangle$ durumu vardır. Alice’in elinde aktarımdan önceki ilk durum;

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a|0\rangle|00\rangle + b|1\rangle|00\rangle + a|0\rangle|11\rangle + b|1\rangle|11\rangle) \end{aligned} \quad (5.3)$$

olarak yazılabilir. Burada ilk iki parça Alice’in tarafında üçüncü parça Bob’un tarafındadır. Alice kendi tarafındaki birinci kubit ile ikinci kubit arasında C-NOT devresi kurarsa;

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [a|0\rangle|00\rangle + b|1\rangle|10\rangle + a|0\rangle|11\rangle + b|1\rangle|01\rangle] \quad (5.4)$$

durumunu elde eder. Sonra ilk kübüti Hadamard devresinden geçirirse;

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a(|0\rangle + |1\rangle)|00\rangle + b(|0\rangle - |1\rangle)|10\rangle + a(|0\rangle + |1\rangle)|11\rangle \\ &\quad + b(|0\rangle - |1\rangle)|01\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [a|000\rangle + a|100\rangle + b|010\rangle - b|110\rangle + a|011\rangle + a|111\rangle \\ &\quad + b|001\rangle - b|101\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) + |10\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) \\ &\quad + |11\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

durumu elde edilir. Alice kendi parçaları yapacağı ölçümün 00,01,10,11 olmak üzere ölçümün dört olası sonucu vardır. Alice bu iki bitlik bilgiyi klasik bir haberleşme kanalıyla Bob'a aktarması sonucu Bob bu bilgiye göre elinde parça üzerinde üniter dönüşümler yapar ve Alice'in aktardığı bilinmeyen kübit durumunu kendi parçası üzerinde oluşturmuş olur. Alice eğer Bob'a 00 bilgisini gönderirse Bob hiçbir dönüşüm yapmaz, 01 bilgisini gönderirse Bob X üniter dönüşümünü uygular, Alice 10 bilgisini gönderirse Bob Z üniter dönüşümü uygular, Alice 11 bilgisini gönderirse Bob önce X sonra Z üniter dönüşümünü uygular ve aktarım tamamlanmış olur (X ve Z Pauli spin matrisleridir).

Sürekli değişkenli kuantum uz-aktarım tarif edebilmek için en uygun formalizm Heisenberg temsilidir. (3.48) ifadesinde birinci ve ikinci kip maksimum dolanık olmayan bir (saf) duruma karşı gelen sonlu derecede dolanık kipleri göstermektedir. Sonsuz sıkıştırma limitinde ($r \rightarrow \infty$) tek kipler sonsuz gürültülü olur ama aralarındaki EPR korelasyonu ideal hale gelir; $(x_1 - x_2) \rightarrow 0$, $(p_1 + p_2) \rightarrow 0$.

Birinci kip Alice'e, ikinci kip Bob'a gönderilsin. Alice kendi kipini %50-%50 bir demet bölücüde aktarmak istediği "in" kipi ile birleştirsin. Alice tarafında birleştirilmiş iki kipli durumun kuadratür işlemcileri;

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{1}{2}x_{in} - \frac{1}{2}x_1, \quad p_u = \frac{1}{2}p_{in} - \frac{1}{2}p_1 \\ x_v &= \frac{1}{2}x_{in} + \frac{1}{2}x_1, \quad p_v = \frac{1}{2}p_{in} + \frac{1}{2}p_1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

olur. (5.6) ve (3.48) denklemlerini kullanarak Bob'un kipinin kuadratür işlemcileri;

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{in} - x_1 - x_2 - \sqrt{2}x_u \\ &= x_{in} - \sqrt{2}e^{-r}x_2^0 - \sqrt{2}x_u \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_{in} + p_1 + p_2 - \sqrt{2}p_v \\ &= p_{in} + \sqrt{2}e^{-r}p_1^0 - \sqrt{2}p_v \end{aligned} \quad (5.8)$$

olarak yazılabilir (Braunstein ve Loock 2005). Alice'in Bell ölçümü x_u ve p_v işlemcileri için belirli klasik x_u ve p_v değerlerini üretir. x_u ve p_v kuantum değişkenleri rasgele x_u ve p_v değerleri ile klasik olarak belirlenmiş olur. Dolanıklıktan dolayı Bob'un kipi $r \rightarrow \infty$ için, Alice'in giriş kipinden, faz uzayında rasgele bir yerdeğiştirme işlemi kadar fark etmiş bir duruma çöker. Alice x_u ve p_v klasik sonuçlarını Bob'a klasik bir haberleşme kanalıyla bildirdikten sonra Bob kendi kipi üzerinde;

$$x_2 \rightarrow x_{tel} = x_2 + g\sqrt{2}x_u, \quad p_2 \rightarrow p_{tel} = p_2 + g\sqrt{2}p_v \quad (5.9)$$

yerdeğiştirme işlemlerini yaparak uz-aktarım sürecini tamamlamış olur. g parametresi klasik foto-akımdan, kompleks alan genliğine dönüşümdeki kazancı tarif eder. Tam verimli bir uz-aktarım sürecinde ($g = 1$ kazanç değeri için) Bob'un yapacağı yerdeğiştirme işleminde (5.7) ve (5.8)'deki x_u ve p_v kaybolur ve aktarılan durum;

$$x_{tel} = x_{in} + \sqrt{2}e^{-r}x_2^0, \quad p_{tel} = p_{in} + \sqrt{2}e^{-r}p_1^0 \quad (5.10)$$

halini alır. Keyfi g kazanç değerleri içinse aşağıdaki durumlar elde edilir.

$$x_{tel} = gx_{in} - \frac{g-1}{2} e^{+r} x_1^0 - \frac{g+1}{2} e^{-r} x_2^0 \quad (5.11)$$

$$p_{tel} = gp_{in} + \frac{g-1}{2} e^{+r} p_2^0 + \frac{g+1}{2} e^{-r} p_1^0 \quad (5.12)$$

Bu ifadelerde (Bell) ölçüm cihazından kaynaklanabilecek verimsizlikler dikkate alınmamaktadır.

5.2 Kuantum Yoğun Kodlama

Kuantum yoğun kodlamada amaç paylaşılmış dolanık bir durum aracılığıyla, haberleşme kanalının kapasitesini arttırmaktır. Holevo sınırı bir kuantum sisteminde taşınabilecek bilişim miktarına bir üst sınır koyar. Bu sınıra göre bir kübit en fazla bir bit bilişim içerebilir. Oysa dolanıklık yardımıyla bu sınır daha yukarı çekilebilir. 1992’de Bennett ve Wiesner, Holevo sınırından kurtulabilen ve kuantum yoğun kodlama olarak adlandırılan temel bir kavram keşfetmişlerdir. Kuantum yoğun kodlama, tek bir önsel dolanık kübit göndererek iki klasik bit iletmeyi mümkün kılar. Kuantum uz-aktarım ve kuantum yoğun kodlamada kuantum ve klasik haberleşme kanallarının rolleri değişmiş olarak düşünülebilir. Sürekli değişkenli kuantum durumları temel alan kuantum yoğun kodlama ilk defa 1999’da Ban’ın ve 2000 yılında Braunstein ve Kimble’in çalışmaları ile ele alınmıştır.

Bilginin miktarı ya da bitlerin sayısını tek bir kübitte kodlayabilme protokolü şu şekildedir: Eğer Alice 0 ve 1 gibi iki durumu ya da eşit olasılıklı bu iki dik durumdan birisini seçerse bu işlem başarıyla yapılabilir. Bir σ_z ölçümü bit değerini ortaya çıkaracaktır. Bu protokolde kübit, tamamen klasik bir bitin fiziksel bir yorumu gibidir. İki kübit durumu varsa, bunlar üzerinde iki bit bilişimin tamamı kodlanabilir. Bunu yapmak için genel yol; iki terimli 00, 01, 10 ve 11 ile temsil edilen $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ ve $|11\rangle$ durumlarını kullanmaktır. Fakat bu durumların yerine bunların bir üst üste gelimi olan Bell durumlarını kullanmak daha kullanışlı olacaktır:

$$\begin{aligned}
|\psi_{12}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \\
|\Phi_{12}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Eğer Alice Bob'a iki klasik bitlik bilişimi göndermek için bu durumları kullanırsa, ilk olarak bu olası durumların her birinde bir kübit çifti hazırlayacak şekilde bir araç geliştirmelidir. Bunu yapmanın bir yolu kübitleri $|\psi^{-}$ durumunda hazırlamaktır ve ilk kübite I, σ_x, σ_y ve σ_z Pauli işlemcilerinden birisini uygulamaktır:

$$\begin{aligned}
I \otimes I |\psi^{-} &= |\psi^{-} \\
\sigma_x \otimes I |\psi^{-} &= -|\Phi^{-} \\
\sigma_y \otimes I |\psi^{-} &= i |\Phi^{+} \\
\sigma_z \otimes I |\psi^{-} &= |\psi^{+}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Bu durumların faz çarpanları gözlenemezdir. Bu yüzden $|\psi^{-}$ Bell durumu yalnız ilk kübit üzerine etki eden herhangi bir üniter dönüşüm aracılığıyla diğer üç durumdan herhangi birisine dönüştürülebilir.

Alice ve Bob dolanık bir durumu paylaşıyorsa, Alice'in Bob'a iletim için iki kübit hazırlaması gerekli değildir. Örneğin, Alice ve Bob'un $|\psi^{-}_{AB}$ Bell durumunda hazırlanmış bir kübit çifti formundaki bir dolanık durumu paylaşmış olsunlar. Alice, dört Pauli işlemcisinden birisiyle kendi kübiti üzerinde işlem yaparak bu durum üzerindeki iki bitlik bilgiyi kodlayabilir. Alice bu tek kübiti Bob'a gönderirse, Bob iki kübit üzerindeki Bell bazlarında bir ölçüm yaparak iki bit bilişimi geri kazanacaktır. Tek bir kübit üzerindeki iki bit bilişimi kodlamayı sağlayan bu olguya kuantum yoğun kodlama denir. Kuantum yoğun kodlama için 2-kübite ihtiyaç vardır. Fakat bunlar Alice ve Bob arasında paylaşılmış önsel bir dolanık 2-kübitten oluşur. Önemli bir özellik de şudur: Mesaj seçildikten sonra Alice'in Bob'a sadece bir kübit göndermesi yeterlidir.

Sürekli değişkenli durumlarda da kuantum yoğun kodlamada Alice ve Bob klasik ve kuantum olmak üzere iki haberleşme kanalı kullanır. Wigner fonksiyonu;

$$W_{EPR}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4}{\pi^2} \exp \left[-e^{-2r} \left(\alpha_1 - \alpha_2 \right)^2 - e^{2r} \left(\alpha_1 + \alpha_2 \right)^2 \right] \tag{5.15}$$

olan iki kipli sıkıştırılmış dolanık EPR demetleri düşünelim. (R ve I, α alan genliğinin gerçel ve sanal kısımlarını oluşturmakta). Birinci demet Alice'e ikinci demet Bob'a gönderilir. Alice kendi parçasına α kadarlık yerdeğiştirme işlemi uygular. Bu işlem sonunda paylaşılan durumun Wigner fonksiyonu;

$$W_{EPR}(\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow W_{EPR}(\alpha_1 - \alpha, \alpha_2) \quad (5.16)$$

olarak dönüşür. Bu durum Bob'a bir kuantum kanal aracılığıyla aktarılır. Aktarılan durumu alan Bob, bu durumla daha önce kendinde olan durumu %50-%50 bir demet bölücüsünde birleştirir.

Demet bölücüsünde iki demet üst üste gelir ve bunun sonucu olarak β_1 ve β_2 çıkış demetleri (3.44) ve (3.45)'te olduğu gibi giriş demetlerinin toplamı ve farkı olarak ifade edilir. Bob'un çıkış demetlerini aşağıdaki Wigner Fonksiyonuna sahiptir

$$W_{\frac{top}{fark}}(\beta_1, \beta_2) = W_{EPR} \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} - \alpha, \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \right) \quad (5.17)$$

Aranılan klasik sinyal (β_1, β_2) 'in toplam ve fark alanları için kuadratürleri ölçen eşzamanlı belirleme ile elde edilir. İdeal bir eşzamanlı belirlemenin sonuçlarının dağılımı

$$\beta = \beta_{1R} - i\beta_{2I} \quad (5.18)$$

olmak üzere,

$$P_{\beta|\alpha} = \frac{2e^{2r}}{\pi} \exp \left[-2e^{2r} \left(\beta - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] \quad (5.19)$$

şeklinde ifade edilir. $P_{\beta|\alpha}$ koşullu olasılıktır. $\frac{\alpha}{2}$ kompleks yerdeğiştirmesi yapıldığında yüksek zirveli bir dağılım elde edilir. Bu durum sıkıştırma parametresi r 'nin büyük olduğunda dağılımı,

$$P_{\alpha} = \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{\alpha^2}{\sigma^2} \right] \quad (5.20)$$

olarak seçilen α klasik sinyali ayıklayabiliriz. Burada değiştirme işlemi uygulanmış durumun ortalama foton sayısı,

$$n = \sigma^2 + \sinh^2 r \quad (5.21)$$

olarak verilir. Bu yoğun kodlama ile aktarılan bilişim miktarını hesaplamak için koşulsuz eş zaman istatistiği için olasılığın,

$$P_\alpha = \frac{1}{\pi(\sigma^2 + e^{2r})} \exp -\frac{2\beta^2}{(\sigma^2 + e^{2r})} \quad (5.22)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Yoğun kodlama kanalından çıktı olarak elde edilen duruma dair erişilebilir bilgiyi tarif eden karşılıklı bilişim miktarı,

$$\begin{aligned} I^{dense} A:B &= d^2 \beta d^2 \alpha P_{\beta|\alpha} P_\alpha \ln \frac{P_{\beta|\alpha}}{P_\alpha} \\ &= \ln 1 + \sigma^2 e^{2r} \end{aligned} \quad (5.23)$$

ifadesi ile verilir (Braunstein ve Loock. 2005).

6. SONUÇ

Dolanıklık, bileşik bir sistemin klasik bir karşılığı olmayan kuantum mekaniksel bir özelliğidir. Bu özelliğe sahip saf kuantum durumları, parçaların durum vektörlerinin tensörel çarpımı olarak ifade edilemeyen durumları temsil eder. Saf olmayan kuantum durumlarında ise dolanıklık, durumu betimlemeyen yoğunluk işlemcisinin, parçalara ait yoğunluk işlemcilerinin tensörel çarpımlarının konveks bir bileşimi olarak ifade edilememesini temsil eder. Dolanıklık klasik kaynaklarla yerine getirilemeyen amaçlar için kullanılabilir, işlenebilir, kontrol edilebilir, dağıtılabilir ve yayınlanabilir yeni bir kuantum kaynağıdır. Kuantum dolanıklık kuramındaki temel araştırma konuları; dolanıklığın deneysel ve kuramsal olarak algılanması, nicelendirilmesi, nitelendirilmesi ve çevreye karşı dayanıklı hale getirilmesi olarak sıralanabilir.

Dolanık bir durumda bulunan sistemlerin bileşenleri arasındaki güçlü korelasyonlar, klasik kaynaklar kullanılarak gerçekleştirilebilen bazı bilişim yükümlülüklerinin daha etkin olarak gerçekleştirilmelerine imkân tanır. Bu, dolanıklığın karakterizasyonunun kuantum bilişimdeki en önemli problemlerden birisi olduğunu gösterir. Dolanıklık, kuantum bilişim kuramında, kuantum şifreleme, kuantum yoğun kodlama ve kuantum uz-aktarım olayları dolanıklık kavramına dayanmaktadır. Bu alanlardaki deneyler küçük mesafeler boyunca başarıyla gerçekleştirilmiştir.

Dolanıklık analizleri sürekli değişkenli durumlarda (sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarında) ve kesikli değişkenli durumlarda (sonlu boyutlu Hilbert uzaylarında) ayrı ayrı yapılır. Sürekli değişkenli durumlar da sayılabilir ve sayılamaz sonsuz boyutlu durumlar olmak üzere ikiye ayrılabilir. Bu tez çalışmasında kuantum optik temelinde sayılabilir sonsuz boyutlu durumlardaki dolanıklığı nitelendirme ve nicelendirmede kullanılan kriterlerden öncü olarak kabul edilebilecek olan Simon yaklaşımı ve Duan yaklaşımı ele alınmıştır. Bu kriterlerin, genel olarak sürekli değişkenli durumlarda dolanıklık için nasıl yeter şartlar ortaya koyduğu, sürekli değişkenli durumların özel bir hali olan Gaussiyen durumlardaysa dolanıklık için nasıl gerek ve yeter şartlar ortaya koyduğu gösterilmiştir.

Gaussiyen durumlar sadece kavramsal olarak değil uygulama alanında da özel bir yere sahiptir. Laboratuvar koşullarında oluşturulmaları daha kolay durumlardır ve bu açıdan

dolanıklığın başlıca uygulama alanları olan kuantum hesaplama, kuantum uz-aktarım, kuantum yoğun kodlama, kuantum hata düzeltme gibi vb. alanlarda yaygın bir şekilde kullanılmaları söz konusudur. Bu tez çalışmasında bu uygulamalardan kuantum uz-aktarım ve kuantum yoğun kodlama tanıtılmıştır.

Sürekli değişkenli durumların analizinde teorik çalışmalar ve uygulamalar bizi Gaussiyen durumlarla sınırlı kalmamaya yönlendirmektedir. Sürekli değişkenli kuantum dolanıklık analizlerinde en önemli araştırma alanlarından birisi de Gaussiyen olmayan durumlarda da gerek ve yeter koşullar bulabilmektir. Bununla beraber çok parçalı sistemlerde dolanıklık konusu da hem teorik hem deneysel araştırma alanlarının başında gelmektedir

Kuantum korelasyon sadece kuantum dolanıklıkla sınırlı değildir. Bununla beraber dolanıklığı da kapsayan kuantum discord ve bunun dışında kuantum dissonance olarak adlandırılan korelasyonlar da mevcuttur. Her ikisini de nicelendirmede temel olarak entropiye dayanan hesaplamalar yapılmaktadır.

Dolanıklık, dissonance ve discord gibi bütün bu temel yapıların araştırılmasında kuantum mekaniğinin temellerini daha iyi anlamak olduğu kadar somut nihai amaç olarak kuantum mekaniksel yasalara göre işleyen kuantum bilgisayarları gerçekleştirmektir. Verilen bir başlangıç durumundan daha sonraki bir duruma üniter olarak evrilen her fiziksel sistem bir kuantum bilgisayar modelidir (Nielsen 2000). Her bir üniter gelişim basamağı da bir kuantum hesaplama karşılık gelir. Kuantum bilişimde temel amaç; belirli kuantum algoritmalarla kurulan özel ardışık kuantum geçitlerinden oluşan kuantum devreleri aracılığıyla belirli bir amacı gerçekleştirmek üzere üniter kuantum gelişimlerini kontrollü olarak gerçekleştirecek donanımları ve sistemleri kurmaktır.

KAYNAKLAR

- Duan, L., Giedke, G., Cirac, J.I., Zoller, P., Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems, *Phys. Rev.Lett.* 84,2722 (2000)
- Einstein, A., Podolsky B., and Rosen N., Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Phys. Rev.* (1935).
- Gerry C. C. and Knight P. L., *Introductory Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M. and Horodecki, K. 2009. Quantum Entanglement. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 81 (2), pp. 865-942.
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. 2000. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 704 p., Cambridge.
- Peres, A., Separability Criterion for Density Matrices *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413–1415 (1996)
- Sakurai, J.J. 1994. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing, 500 p., USA.
- Samuel L. Braunstein, Peter Van Loock., Quantum information with continuous variables, *Rev. Mod. Phys.*, **77**, 513-73. (2005).
- Simon, R., Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems *Phys. Rev.Lett.* 84,2726 (2000)
- Werner, R. F. 1989. Quantum States with Einstein-Podolsky-Rosen Correlations Admitting a Hidden Variable Model. *Physical Review A*, Vol. 40 (8), pp. 4277-4281

EKLER

EK 1 Schmidt Ayrışımı

Ek-2 Wigner Fonksiyonları Yardımıyla Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması

EK 3 Simplektik Dönüşümler ve Williamson Teoremi

EK 1 Schmidt Ayrışımı

İki-parçalı bir sistemin bir saf durumuna karşı gelen yoğunluk işlemcisiyle ondan elde edilen indirgenmiş yoğunluk işlemcileri arasındaki bağıntı, bir dolanık saf durumun Schmidt ayrışımını elde etmeyi sağlar. Schmidt teoremine göre iki-parçalı bir sistemin bir dolanık saf durumu en genel haliyle

$$\Psi_{AB} = \sum_n a_n \Phi_n \otimes \psi_n \quad \Psi_{AB} \in \mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a_n \geq 0$ ve $\sum_n a_n = 1$ ile verilir. a_n katsayıları Schmidt katsayıları olarak bilinir ve sıfırdan farklı Schmidt katsayılarının sayısı Ψ_{AB} durumunun Schmidt rankı olarak tanımlanır. Ψ_{AB} durumu ancak ve ancak Schmidt rankı bir ise ayrılabilir bir durumdur.

Schmidt teoremi iki-parçalı bir sistemin (iki toplamla ifade edilen) en genel bir saf durumu için (tek toplamı ve daha az sayıda terim içeren) bir kanonik yazımına imkân verir. İki-parçalı sistemlerin sadece saf durumları için geçerli olan bu teoremin ispatı aşağıda verilmiştir.

Altsistemlerin ortonormal a_i ve b_j bazlarında açılmış olan iki-parçalı bir sistemin en genel bir saf durum vektörü;

$$\Psi_{AB} = \sum_{ij} c_{ij} a_i \otimes b_j \quad (1.2)$$

olsun. Bu denklem kullanılarak ρ_A indirgenmiş yoğunluk işlemcisi oluşturulabilir ve bu işlemcinin Φ_n öz durumlarını elde etmek için köşegenleştirilebilir. Eğer a_i baz vektörleri

$$a_i = \sum_n u_{in} \Phi_n \quad (1.3)$$

şeklinde Φ_n öz durumlarının bir açılımı olarak yazılırsa, (1.2)'deki Ψ_{AB} durumu

$$\Psi_{AB} = \sum_{ijn} u_{in} c_{ij} \Phi_n \otimes b_j = \sum_{nj} d_{nj} \Phi_n \otimes b_j \quad (1.4)$$

olarak yazılabilir. Burada $d_{nj} = \sum_i u_{in} c_{ij}$ tanımı kullanıldı. İlk altsistem için ρ_A indirgenmiş yoğunluk işlemcisi, ikinci altsistemin b_j bazına göre (1.4)'ten elde edilen yoğunluk işlemcisinin parçalı izi alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\rho_A = Tr_B \Psi_{AB} \Psi_{AB} = \sum_{njk} d_{nj} d_{kj}^* \Phi_n \Phi_k \quad (1.5)$$

Burada Φ_n 'ler ρ_A 'nın öz durumları olduğundan (1.5) ifadesi

$$\rho_A = \sum_{n=1}^r a_n^2 \Phi_n \Phi_n \quad r \leq d_1 \quad (1.6)$$

spektral ayrışım ifadesi olmalıdır. Bunun da sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\sum_j d_{nj} d_{kj}^* = a_n^2 \delta_{nk} \quad (1.7)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu koşullar sıfırdan farklı her a_n için tanımlanan;

$$\psi_n = \sum_j \frac{d_{nj}}{a_n} b_j \quad (1.8)$$

durum vektörlerinin ortonormalliğini garanti eder:

$$\begin{aligned} \psi_m \psi_n &= \sum_{jk} \frac{d_{mk}^* d_{nj}}{a_n a_m} b_k b_j \\ &= \sum_j \frac{d_{mj}^* d_{nj}}{a_n a_m} \\ &= \frac{a_n^2}{a_n a_m} \delta_{nm} = \delta_{nm} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Son olarak (E1.8) ifadesi (E1.4)'ün son eşitliğinde kullanılırsa Ψ_{AB} durumu

$$\Psi_{AB} = \sum_n a_n \Phi_n \otimes \psi_n \quad (1.10)$$

şeklinde yazılabilir. Bu da tek toplamlı Schmidt ayrışımıdır².

İkinci sistem için indirgenmiş yoğunluk işlemcisi (1.10) kullanılarak hesaplanırsa

$$\rho_B = \sum_{n=1}^r a_n^2 \Phi_n \psi_n, \quad r \leq d_2 \quad (1.11)$$

bulunur. Görüldüğü gibi her iki altsistemin indirgenmiş yoğunluk işlemcileri aynı formdadır ve sıfırdan farklı özdeğerleri aynıdır. Sadece sıfır özdeğerlerinin sayısı farklı olabilir: Birincinin $d_1 - r$ ve ikincisinin de $d_2 - r$ tane sıfır özdeğeri vardır. Özel olarak her iki yoğunluk işlemcisinin rankları aynıdır.

Schmidt ayrışımındaki katsayılar da indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinden birinin sıfırdan farklı özdeğerlerinin karekökleridirler. Bu yüzden (1.10)'daki toplamın üst sınırı $r \leq \min d_1, d_2$ bağıntısını sağlar ve Schmidt rankı ρ_A ve ρ_B 'nin rankıyla aynıdır.

Schmidt ayrışımı uygulamada verilen bir saf durumun dolanık olup olmadığını rahatlıkla görme imkânı tanır. Bunun için karşılık gelen yoğunluk işlemcisinin indirgenmiş yoğunluk işlemcilerinden birisi bulunup bunun rankı araştırılır. Bu rankın en az iki olması, verilen saf durumun dolanık olabilmesi için gerek ve yeter koşuldur.

Üç ve daha fazla parçalı sistemler için Schmidt tipi ayrışımalar üzerinde çalışılmış olmasına rağmen henüz iki-parçalı sistemlerdeki Schmidt ayrışımı gibi net bir sonuç yoktur. Ayrıca yukarıda verilen Schmidt ayrışımı iki-parçalı sistemlerin sadece saf durumları için geçerlidir, saf-olmayan durumları için böyle bir ayrışım kavramı yoktur. Buna paralel olarak en dolanık saf durum kavramı da sadece iki-parçalı sistemlerin saf durumları için tanımlıdır.

² Schmidt ayrışımının değişik bir ispatı için bakınız (Nielsen, Chuang, 2001, p. 109).

Ek-2 Wigner Fonksiyonları Yardımıyla Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması

Bu ekte; metin içinde ispatlanmadan verilen marjinal olasılık dağılımlarıyla ilgili (3.29)'daki ilk iki eşitlik ve faz uzayındaki beklenen değerle ilgili (3.33) bağıntısı açık hesaplamalarla ispatlanmaktadır.

Tek serbestlik dereceli bir sistem için Wigner dağılım fonksiyonunu

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy e^{2iy p/\hbar} \rho(x-y, x+y) \quad (2.1)$$

İfadesinde ötelenmiş;

$$\begin{aligned} x-y &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x-y)p''/\hbar} p'' dp'' \\ x+y &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+y)p'/\hbar} p' dp' \end{aligned} \quad (2.2)$$

konum özdeğerleri kullanılır ve her iki tarafın x üzerinden integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} &W(x, p) \int dx \\ &= \frac{1}{2(\pi\hbar)^2} \int dx dy dp' dp'' e^{2iy p/\hbar} e^{i(x-y)p''/\hbar} e^{-i(x+y)p'/\hbar} p'' \rho(p', p'') \\ &= \int dx dy dp' dp'' e^{-ix(p'-p'')/\hbar} e^{\frac{-2iy}{\hbar}(\frac{p'+p''}{2}-p)} p'' \rho(p', p'') \end{aligned} \quad (2.3)$$

Burada önce x'e göre integral alınır ve Dirac delta fonksiyonunun

$$2\pi\delta(p-p') = \int dx e^{-ix(p-p')} \quad (2.4)$$

tanımı kullanılırsa;

$$W(x, p) \int dx = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy dp' dp'' \delta(p'-p'') e^{\frac{-2iy}{\hbar}(\frac{p'+p''}{2}-p)} p'' \rho(p', p'') \quad (2.5)$$

Önce p'' 'ne göre ve sonra y' 'ye göre integral alınırsa aranan bağıntı bulunmuş olur:

$$W(x, p) dx = dp' \delta(p - p') \rho(p') = \rho(p) . \quad (2.6)$$

Konum uzayındaki marjinal olasılık dağılımları için hesaplar da benzer olarak aşağıdaki gibi yapılabilir

$$\begin{aligned} W(x, p) dp &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy dp' e^{2iy'p/\hbar} \rho(x - y) \rho(x + y) \\ &= \int \delta(y) dy \rho(x - y) \rho(x + y) = \rho(x) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Bir A işlemcisine faz uzayında karşılık gelen fonksiyonu üçüncü bölümde verilen;

$$A(x, p) = \int dy' e^{2iy'p/\hbar} A(x + y') \quad (2.8)$$

İfadesini kullanarak bunun Wigner fonksiyonuyla çarpımının tüm faz uzayı üzerinden integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} I &= \int W(x, p) A(x, p) dx dp \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy dy' dx dp e^{2i(y+y')p/\hbar} \rho(x - y) \rho(x + y) \int dx' A(x + y') \end{aligned} \quad (2.9)$$

yazılabilir. Burada önce p üzerinden ve sonra y' üzerinden integral alınırsa

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi\hbar} \int dy dy' dx \int dp \delta(y + y') \rho(x - y) \rho(x + y) \int dx' A(x + y') \\ I &= \int dy dx \rho(x - y) \rho(x + y) \int dx' A(x - y) \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Şimdi $u = x + y$ ve $v = x - y$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$x = \frac{u + v}{2} \quad y = \frac{u - v}{2}$$

$$dx dy = du dv \quad (2.11)$$

olduğundan;

$$I = \int du dv \int v \rho u u A v = \int dv \int v \rho A v = \text{Tr } \rho A \quad (2.12)$$

ve sonuç olarak

$$\langle A \rangle = \text{Tr } \rho A = \int W(x, p) A(x, p) dx dp \quad (2.13)$$

eşitliği ispatlanmış olur.

EK 3 Simplektik Dönüşümler ve Williamson Teoremi

Gaussiyen durumların teorik ve deneysel analizinde bu durumların karakterini koruyan üniter dönüşümler önemli bir rol oynar. Bu üniter dönüşümler karesel alan işlemcileriyle üretilir. Bu dönüşümlerden en temellerinden biri simplektik dönüşümlerdir. Bu dönüşümler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S^T \Omega S = \Omega \quad (3.1)$$

$2N$ boyutlu faz uzayı üzerinde simplektik dönüşümün S elemanları $Sp(2N, R)$ grubunun elemanlarıdır. Bu dönüşümler ilk momentler üzerine çizgisel etki eder ve kovaryans matrislerini;

$$S V S^T = V' \quad (3.2)$$

şeklinde dönüştürür. (E3.1) ifadesinden $\det S = 1$, $\forall S \in Sp(2N, R)$ olduğu anlaşılmaktadır. Uygun faz kaydırıcılarla ve sıkıştırma işlemcileri ile bu çeşit simplektik dönüşümler gerçekleştirilebilir. Örneğin iki kipli sıkıştırma işlemcisine karşılık gelen simplektik dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$S_{i,j} r = \begin{pmatrix} \cosh r & 0 & \sinh r & 0 \\ 0 & \cosh r & 0 & -\sinh r \\ \sinh r & 0 & \cosh r & 0 \\ 0 & -\sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$S_{i,j}(r)$ matrisi i ve j kipleri üzerine etki eder. Bu yolla iki kipli sıkıştırılmış durum için kovaryans matrisi,

$$V_{i,j}^{sq} r = S_{i,j} r \mathbb{1} S_{i,j}^T(r) \quad (3.4)$$

dönüşümü ile edilebilir ve açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$V_{i,j}^{sq} r = \begin{pmatrix} \cosh 2r & 0 & \sinh 2r & 0 \\ 0 & \cosh 2r & 0 & -\sinh 2r \\ \sinh 2r & 0 & \cosh 2r & 0 \\ 0 & -\sinh 2r & 0 & \cosh 2r \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Açıkça görülmektedir ki iki kipli vakum durumunun sıkıştırılmış durumlarının kovaryans matrisleri 4x4 birim matristir.

Simplektik dönüşümlerinin önemli bir özelliği Williamson teorimi gereği Gaussiyen durumların kovaryans matrislerini, normal kiplerin bazında köşegenleştirmeleridir. Williamson teoremini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Teorem: V , $2N$ boyutlu gerçel, simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olsun, Öyle bir $S \in Sp(2N, R)$ dönüşümü vardır ki;

$$S^T V S = D^2 \quad D^2 = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_n, K_1, K_2, \dots, K_n) \quad (3.6)$$

İspat: $2N$ boyutlu köşegen D köşegen matrisinin N bağımsız değişkene bağlı olduğuna dikkat edelim. $Sp(2N, R)$ grubunun S elemanları aşağıdaki koşula bağlı olarak tanımlanır.

$$S^T \Omega S = \Omega \quad \Omega = \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$S^T \Omega S = \Omega$ ifadesinden $\det S = \pm 1$ olabileceği düşünülebilir ama simplektik dönüşüm elemanlarında $\det S = 1$ olarak belirlenir. Başka bir deyişle $Sp(2N, R)$ basit bağlantılı olmayan tek bir bağlantılı parça içermektedir. Aslında her $n \geq 1$ için $Sp(2N, R)$ grubunun bağlantılılık özelliği çemberinki ile aynıdır.

En genel durumda $S \in GL(2N, R)$ ve $R \in O(2N)$ olmak üzere $S^T V S = D^2$ dönüşümünden $S = V^{-1/2} R D$ olarak bulunur. $D, R, V^{-1/2}$ $Sp(2N, R)$ 'nin elemanlarıdır. Bununla beraber aşağıda göstireceği gibi D, R 'nin V 'ye bağlı olarak seçilmesi durumunda $V^{-1/2} R D$, $Sp(2N, R)$ 'nin bir elemanıdır.

$\Omega^T = -\Omega$ olduğundan $M = V^{-1/2} \Omega V^{-1/2}$ antisimetriktir. Bu yüzden öyle bir $R \in SO(2N)$ matrisi vardır ki;

$$R^T V^{-1/2} \Omega V^{-1/2} R = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega > 0 \text{ ve köşegen} \quad (3.8)$$

Köşegen pozitif tanımlı bir,

$$D = \begin{pmatrix} \Omega^{-1/2} & 0 \\ 0 & \Omega^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

matrisi tanımlanırsa;

$$DR^T V^{-1/2} \Omega V^{-1/2} R D = \Omega \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir.

$$S = V^{-1/2} R D \quad (3.11)$$

olarak yazılırsa

$$S^T \Omega S = \Omega$$

$$S^T V S = D^2 : \text{köşegen.} \quad (3.12)$$

Dönüşümü yazılabilir.

V kovaryans matrisi $S \in Sp(2N, R)$ yardımıyla köşegenleştirilebilmektedir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erdem AKYÜZ

Doğum Yeri : ANKARA

Doğum Tarihi : 21.11.1974

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Büyük Kolej –Ankara (Haziran 1993)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü (Haziran 2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik A.B D. (Eylül 2009-Ekim 2012)