ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erkut BOLAT

ESNEK DİREKT ÇARPIMLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2012

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK DİREKT ÇARPIMLAR

Erkut BOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez / / Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

....	....
Doç. Dr. Fikret KUYUCU	Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
DANIŞMAN	ÜYE

....
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Selahattin SERİN
Enstitü Müdürü

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK DİREKT ÇARPIMLAR

Erkut BOLAT

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Fikret KUYUCU
2. Danışman : Yrd. Doç. Dr Kenan KAYGISIZ
Yıl : 2012, Sayfa: 45
Jüri : Doç. Dr. Fikret KUYUCU
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Yrd.Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

Bu çalışmada, ilk olarak Grup Teorideki grup tanımı ve özellileri verildi. Sonra direkt çarpımlar sunuldu.Daha sonra esnek küme ve esnek int-grup kavramaları ve genel özellikleri incelendi. Son olarak esnek direkt çarpımlar incelendi ve grup yapısındakilere benzer olarak temel özellikleri verildi.

Anahtar Kelimeler: Grup, Direkt Çarpım, Esnek Küme, Esnek int-Grup, Esnek Direkt Çarpımlar

ABSTRACT

MSc. THESIS

SOFT DIRECT PRODUCTS

Erkut BOLAT

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fikret KUYUCU
Co-Supervisor : Asst. Prof. Dr. Kenan KAYGISIZ
Year : 2012, Pages: 45
Jury : Assoc.Prof. Dr. Fikret KUYUCU
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Asst. Prof. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

In this study, firstly, definition of group in Group Theory and its properties are given. Then, direct product is presented. After that, concepts of soft set, soft int-group and their properties are investigated. Finally,soft direct product is defined and basic properties are given analogous to group structure.

Keywords: Group, Direct Product, Soft Set, Soft int-Group, Soft Direct Product

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanlarını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan değerli danışman hocalarım Sayın Doç. Dr. Fikret KUYUCU' ya ve Yrd. Doç. Dr. Kenan KAYGISIZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ve bu üniversiteye geldiğimden beri bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Doğan Dönmez'e sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca, Gaziosmanpaşa ve Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü akademik personeline bu çalışmanın oluşmasında yardımlarını esirgemedikleri için teşekkürlerimi sunarım. Ve bugüne kadar desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1. GİRİŞ

Belirsizlik içeren problemleri matematiksel olarak modellemek klasik mantık kurallarıyla her zaman mümkün olmaz, olsa bile her durum için farklı farklı analiz yöntemliri uygulamak gerekir ki bu uygulamalar çoğu zaman sistematik olmaz. Çünkü Aristo mantığında doğruluk değerleri 1 veya 0 olup ara değerler göz ardı edilir. Oysa günlük hayatta karşılaşılan problemler sadece doğru veya yanlıştan ibaret değildir. Özellikle sosyal bilimlerde karşılaşılan problemlerde siyah ve beyazın dışında gri tonlara da ihtiyaç vardır. Bu nedenle bu belirsizliklerle başa çıkmak için yeni matematiksel modellemeler geliştirilmiştir. Bulanık küme teorisi (Zadeh, 1965), yaklaşımlı küme teorisi (Pawlak, 1982), sezgisel bulanık küme teorisi (Atanassov, 1986) ve esnek küme teorisi (Molodtsov, 1999) bu modellemelerden en önemli olanlarıdır. Özellikle bulanık mantık bu modellemelerin hepsine kaynak teşkil etmektedir.

Klasik mantık anlayışında bir önermenin doğruluk değeri 0 veya 1 olarak kabul edilmiş ve tüm mantık kuralları bu kabule göre şekillenmiştir. Bu mantık kuralları ile her şeyi modelleyemeyeceğini gören Lütfi Alizade 1965 yılında bulanık küme (fuzzy set) teorisini ortaya atmıştır. İlk bakışta bilim adamlarına ters gelen bu teori daha sonra kabul görmüş ve geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Matematiğin ve hatta hayatın hemen hemen her alanında kullanılmıştır.

Bu teoride temel olarak bir önermenin doğru ya da yanlış olmasının dışında ara değerlerinde olduğu hesaba katılmıştır. Bir önermenin doğruluk değeri 0 yada 1 olmanın dışında [0,1] aralığındaki her değeri alabilir. Bunun için bir üyelik fonksiyonu yardımıyla önermelerin üyelik değeri elde edilir. Bulanık küme teorisi özellikle mühendislik ve sosyal bilimlerinde çok geniş uygulama alanına sahiptir.

Belirsizliklerle ilgili problemlere uygulanmak üzere geliştirilen bir diğer teori de esnek küme teorisidir. İlk defa 1999 yılında Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi ile bulanık kümelerdeki üyelik fonksiyonunun inşasından kaynaklanan problemleri de ortadan kaldırmıştır. Molodtsov (2004) esnek küme teorisimi matematiğin birçok alanına özellikle analize uygulamıştır. Sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, yöneylem araştırması, Riemann integrali, Perron integrali, olasılık teorisi, ölçüm teorisi de esnek küme teorisini başarıyla uygulandığı alanlardır.

Molodtsov (1999) yaptığı ilk çalışmadan sonra Maji ve ark. (2003) esnek kümeler üzerinde çeşitli işlemleri tanımladı ve temel özellikleri inceledi. Daha sonra Maji ve ark. (2001, 2002) bulanık küme ile esnek kümeyi birleştirerek bulanık esnek küme kavramını ortaya attı. Chen ve ark. (2003) esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine bir çalışma yaptı. Mushrif ve ark. (2006), esnek küme temelli sınıflandırmalar başlıklı bir makale yayımladı. Molodtsov ve ark. (2006) tarafından, esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramılar tanıttı. Ayrıca bulanık esnek fonksiyon ve bulanık esnek homomorfizma tanımlarına yer verdi. Aktaş ve Çağman (2007) esnek grupları tanımladı ve temel özelliklerini elde etti. Daha sonra Çağman ve Enginoğlu (2010), tümleyen ve fark işleminde ortaya çıkan bazı problemler nedeniyle esnek küme işlemlerini yeniden tanımladılar. Babitha ve Sunil (2010) tarafından ilk kez esnek bağıntılar ve fonksiyonlar tanımlandı. Daha sonra Gong ve ark. (2010) tarafından birebir örten esnek kümeler ve işlemler tanıtıldı. Qin ve Hong (2010), aynı yıl esnek eşitlik tanımını yaptı. Majumdar ve Samanta (2010) esnek fonksiyon üzerine bir çalışma yayımladılar.

Bulanık küme teorisinde cebirsel yapıları ilk olarak 1971 yılında Azriel Rosenfeld incelemiştir. Yaptığı çalışmada bulanık grubu tanımlamış ve klasik grup teorideki sonuçlara benzer sonuçlar elde etmiştir. Daha sonra birçok matematikçi analoji yoluyla cebirsel kavramları bulanık küme teorisine uygulamış ve bulanık cebir teorisi şekillenmiştir. Bunların ilklerinden bazıları aşağıda verilmiştir.

Anthony ve Sheerwood (1979) t-normu baz alarak bulanık grubu tekrar tanımladı. Ve bu şartlara göre bulanık grubun özelliklerini verdi. Liu (1982) bulanık normal alt gruplar ve bulanık idealleri araştırdı. Mukherjee ve Bhattacharya (1984) bulanık normal alt gruplar ve bulanık yan kümeler üzerine çalıştı. Mujherjee ve Bhattacharya (1986, 1987) grup teorideki birçok kavramın bulanık analojisini verdiler. Akgül (1988) bulanık normal altgrup ve bulanık seviye altgrupları tanımladı ve bazı özelliklerini araştırdı. Dixit (1990) ve arkadaşları seviye alt gruplarını ve bulanık alt grupların birleşimini inceledi. Asaad (1991) ve Filep (1992) bir grubun bulanık alt gruplarını oluşturmak için stratejiler üzerinde, Kumar ve ark. (1992) bulanık normal alt grupları ve bulanık bölüm grupları üzerinde çalıştılar. Ajmal ve Prajapati (1992) bulanık normal alt grubun homomorfik görüntüsünün karakterini inceledi. Abou-Zaid (1993) normal bulanık altgrupların değişmeli idempotent yarıbasit yarıgrup olduğunu gösterdi. Kim (1994) grubunun bir elemanının bulanık mertebesi kavramını ortaya attı ve grup teorideki birçok özelliğin analojisini elde etti. Makamba (1992) bulanık grupların iç ve dış direkt çarpımlarını ve bulanık grupların izomorfluğunu inceledi ve Ray (1999) bulanık alt grupların bulanık alt kümelerinin çarpımı üzerine çalıştı.

Bulanık çarpımlar ile ilgili ilk çalışma Foster (1979) tarafından yapıldı. Bu çalışmada Foster Rosenfeld'in tanımını kullanarak bulanık altgrupların çarpımı kavramını ortaya attı. Sherwood (1983) t-normlardan yararlanarak bulanık altgrupların çarpımının yapısını inceledi. Abu Osman (1984) Anthony ve Sherwood'un bulanık altgrup tanımından yararlanarak bulanık altgrup kavramını yeniden inceledi. Daha sonra Abu Osman (1987) bir grubun bulanık altgruplarının t-çarpımının bazı özelliklerini ve bulanık altgrupların iç bulanık iç direkt çarpımı konusunu inceledi. Makamba (1992) bulanık altgrupların iç ve dış direkt çarpımını ve iç direkt çarpımın dış direkt çarpıma izomorf olduğu durumları inceledi.

Esnek kümeler üzerindeki cebirsel yapılar ilk kez Aktaş ve Çağman (2007) tarafından yayımlanan esnek kümeler ve esnek grup isimli çalışmayla tanımlandı. Sonra, Feng ve ark. (2008) esnek yarı halkayı tanımlayıp temel özelliklerini incelediler. Jun (2008) esnek BKC/BCI cebirlerini tanımladılar. Yine Jun ve ark. (2008) BCK cebirlerindeki değişmeli ideallere esnek küme teorisini uyguladılar. Daha sonra Park ve ark. (2008) esnek WS-cebirlerini incelediler. Jun ve Park (2008) BCK/BCI cebirlerindeki ideallere esnek küme teorisini uyguladılar. Sun ve ark. (2008) esnek modüller üzerine bir çalışma yaptılar. Jun ve Kim (2009) Pseudo d-cebirlerini tanımladılar. Jun ve ark. (2009) esnek küme teorisini d-cebirlerine uyguladılar. Jun ve ark. (2009) BCK-cebirlerinin esnek p-ideallerini incelediler. Jun ve Park (2009) Hilbert cebirlerinde esnek kümelerin uygulamalarını araştırdılar. Jun ve ark. (2010) bulanık esnek küme teorisini BCK/BCI-cebirlerine uyguladılar. Acar ve Tanay (2010) esnek halka kavramını tanımladılar. Zhan ve Jun (2010) bulanık kümelere dayalı olarak esnek BL-cebirlerini tanımladılar. Atagün ve Sezgin (2011) cisimlerin, halkaların ve modüllerin esnek yapıları üzerinde çalıştılar. İnan ve Öztürk (2011) bulanık esnek halka ve bulanık esnek modülü tanımladılar. Sezgin ve Atagün (2011) esnek ve normal esnek gruplar üzerine bir çalışma yaptılar. Yamak ve ark. (2011) hiper yapılar üzerine bir çalışma yaptılar. Yang (2011) bulanık esnek yarıgrup ve bulanık esnek ideal kavramlarını literatüre kazandırdı.

Çağman ve arkadaşları (2011) Rosenfeld'in grup tanımına analoji yaparak esnek küme teorisinde grup için yeni bir tanım verdi ve bunu esnek int-grup olarak adlandırdı. Bu tanım Aktaş ve Çağman'ın daha önceki esnek grup tanımından tamamen farklı idi. Daha sonra Çağman ve arkadaşları (2012) yeni grup tanımı kullanarak esnek int-halkayı tanımlayıp temel bazı özelliklerini elde etti. Kaygısız (2012-1) esnek int-grupların bazı özelliklerini elde etti. Kaygısız (2012) normal esnek int-grubu ve özellilerini inceleyip esnek int-gruplar üzerinde bölüm grupları inşa etti.

2. GRUP VE BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 2.1 G boş olmayan bir küme ve $*$ bu küme üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde $(G,*)$ ikilisine **grupoid** denir.

Tanım 2.2 G boş olmayan bir küme ve $*$ bu küme üzerinde bir ikili işlem olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına bir **grup** denir.

1. Her $a,b,c \in G$ için $a*(b*c) = (a*b)*c$ (birleşme özelliği)

2. Öyle bir $e \in G$ vardır ki her $a \in G$ için $a*e = e*a = a$ dır. (birim eleman)

3. e, G nin birim elemanı olmak üzere, G kümesindeki herbir a elemanı için

$$a*a' = a'*a = e$$

olacak şekilde $a' \in G$ vardır. (a' elemanına a-nın tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir.)

Eğer sadece (1) sağlanırsa G ye **yarı grup**; (1) ve (2) sağlanırsa G ye **monoid** denir.

Tanım 2.3 $(G,*)$ bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G grubundaki işleme göre bir grup ise $(H,*)$ grubuna $(G,*)$ grubunun bir **alt grubu** denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.4 $(G,*)$ bir grup ve $\phi \neq H \subseteq G$ olsun. Bu taktdirde $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a,b \in H$ için $a*b^{-1} \in H$ olmasıdır.

Tanım 2.5 G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer, her $g \in G$ için $gN = Ng$ oluyorsa N ye G nin **normal alt grubu** denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

Teorem 2.6 G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Buna göre aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

1. Her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.

2. Her $g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$ dir.

3. Her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ dir.

4. Her $g \in G$ için $gN = Ng$ dir.

3. GRUPLARIN DİREKT ÇARPIMLARI

Bu bölümde dış ve iç direkt çarpımlar incelenecektir.

Bundan sonra I kümesi, $I=\{1,2,\ldots n\}$ sonlu indis kümesini temsil edecektir.

3.1 Dış Direkt Çarpım

Tanım 3.1 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i \in I\}$$

şeklindeki sıralı n-lilerden oluşan kümedir.

Eğer $n=1$ ise kartezyen çarpım sadece kümenin kendisi olarak kabul edilecektir.

Teorem 3.2 $G_1, G_2, \ldots, G_n$, sonlu gruplar ve

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) : g_i \in G_i,\ i \in I\}$$

olsun. Bu küme her $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, $(g_1', g_2', \ldots, g_n') \in G$ için

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)(g_1', g_2', \ldots, g_n') = (g_1 g_1', g_2 g_2', \ldots, g_n g_n')$$

şeklinde tanımlanan işleme göre bir gruptur. Burada her $i \in I$ için g_i ile g_i' arasındaki işlem G_i grubunun işlemidir.

Tanım 3.3 $G_1, G_2, \ldots, G_n$, sonlu gruplar ve

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots G_n = \{(g_1, g_2, \ldots, g_n) : g_i \in G_i,\ i \in I\}$$

olsun. Bu kümeye $G_1, G_2, \ldots G_n$ gruplarının **dış direkt çarpımı** denir ve

$$G = \widetilde{\prod_{i \in I}} G_i = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 3.4 $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ olsun. Her $i \in I$ için e_i ler G_i gruplarının birim elemanları olmak üzere

$$K_i = \{(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in G : g_i \in G_i\}$$

şeklinde G nin bir alt kümesini ele alalım. Bu takdirde $K_i \leq G$ dir.

İspat: Her $g, g' \in K_i$ için $g(g')^{-1} \in K_i$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi

$$g = (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n), \;\; g_i \in G_i$$

ve

$$g' = (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g'_i, e_{i+1}, \ldots, e_n), \;\; g'_i \in G_i$$

elemanlarını alalım. O halde

$$\begin{aligned} g(g')^{-1} &= (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g'_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)^{-1} \\ &= (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g_i(g'_i)^{-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n) \end{aligned}$$

yazarız. $g_i, g'_i \in G_i$ ve G_i grup olduğundan $g_i(g'_i)^{-1} \in G_i$ olur. Bu yüzden $g, g' \in K_i$ dir. Dolayısıyla $K_i \leq G$ dir.

Teorem 3.5 $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ olsun. Her $i \in I$ için $g_i \in G_i$ ve e_i ler G_i gruplarının birim elemanları olmak üzere

$$K_i = \{(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, g_n) \in G : g_i \in G_i\}$$

şeklinde G nin bir alt kümesi olsun. Bu takdirde her $i \in I$ için $K_i \cong G_i$ dir.

İspat: $\varphi : G_i \to K_i$, $g_i \in G_i$ olmak üzere

$$\varphi_i(g_i) = (e_1, \ldots e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün bir izomorfizma olduğunu göstermeliyiz.

1) Her $i \in I$ ve her $g_i, g'_i \in G_i$ için

$$\begin{aligned} \varphi_i(g_i) &= \varphi_i(g'_i) \Rightarrow (e_1, \ldots e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g'_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \\ &\Rightarrow g_i = g'_i \end{aligned}$$

olduğundan φ_i 1-1 dir.

2) Her $i \in I$ ve $(e_1, \ldots e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in K_i$ için $\varphi(g_i) = (e_1, \ldots e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ olacak şekilde bir $g_i \in G_i$ vardır. Bu nedenle φ_i örtendir.

3) φ_i nin homomorfizma olduğunu gösterelim. Her $i \in I$ ve $g_i, g'_i \in G_i$ için

$$\begin{aligned} \varphi_i(g_i g'_i) &= (e_1, \ldots e_{i-1}, g_i g'_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \\ &= (e_1, \ldots e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)(e_1, \ldots e_{i-1}, g'_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \\ &= \varphi_i(g_i)\varphi_i(g'_i) \end{aligned}$$

olduğundan φ_i bir homomorfizmadır.

Bu üç şart da sağlandığından φ_i izomorfizmadır. Dolayısıyla $K_i \cong G_i$ dir.

Örnek 3.6 $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ ve $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ toplam gruplarını ele alalım.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\overline{0},\overline{0}), (\overline{0},\overline{1}), (\overline{0},\overline{2}), (\overline{1},\overline{0}), (\overline{1},\overline{1}), (\overline{0},\overline{2})\}$$

dış direkt çarpımı bir gruptur.

Örnek 3.7

$$\mathbb{Z}^*_{(6)} = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x < 6 \text{ ve } ebob(x,6) = 1\} = \{\overline{1}, \overline{5}\}$$

kümesinin (mod 6) da çarpım grubunu ve

$$\mathbb{Z}^*_{(8)} = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x < 8 \text{ ve } ebob(x,8) = 1\} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$$

kümesinin (mod 8) de çarpım grubunu ele alalım.

$$\mathbb{Z}^*_{(6)} \times \mathbb{Z}^*_{(8)} = \{(\overline{1},\overline{1}), (\overline{1},\overline{3}), (\overline{1},\overline{5}), (\overline{1},\overline{7}), (\overline{5},\overline{1}), (\overline{5},\overline{3}), (\overline{5},\overline{5}), (\overline{5},\overline{7})\}$$

dış direkt çarpımı bir gruptur.

Örnek 3.8 $G_1 = \{e, a, b, ab\}$ Klein 4-grubu,

$G_2 = A_3 = \{(1), (1,2,3), (1,3,2)\}$ alterne grubunu alalım

Bu durumda bu grupların dış direkt çarpımı

$$\begin{aligned} G_1 \times G_2 = \{&(e,(1)), (a,(1)), (b,(1)), (ab,(1)) \\ &(e,(1,2,3)), (a,(1,2,3)), (b,(1,2,3)), (ab,(1,2,3)), \\ &(e,(1,3,2)), (a,(1,3,2)), (b,(1,3,2)), (ab,(1,3,2))\} \end{aligned}$$

olup, bu yapı bir gruptur.

3.2 İç Direkt Çarpım

Tanım 3.9 G bir grup ve her $i \in I$ için A_i, G nin alt kümeleri olsun.

$$\prod_{i\in I}^{*} A_i = \left\{ \prod_{i\in I} x_i \mid x_i \in A_i,\ i \in I \right\}$$

kümesine A_i lerin **iç çarpımı** denir.

Tanım 3.10 Her $i \in I$ için G_i, G nin altgrupları olsun. e, G nin birimi olmak üzere, aşağıdaki şartlar sağlanırsa G ye G_i altgruplarının **iç direkt çarpımı** denir ve $G = \overset{\bullet}{\prod\limits_{i \in I}} G_i$ şeklinde gösterilir.

1. $G = \overset{*}{\prod\limits_{i \in I}} G_i$
2. Her $i, j \in I$ ve $i \neq j$ için $x_i \in G_i$ ve $x_j \in G_j \Rightarrow x_i x_j = x_j x_i$
3. Her $j \in I$, $G_j \cap (\overset{*}{\prod\limits_{i \in I \setminus \{j\}}} G_i) = \{e\}$

Eğer $i \in I \setminus \{j\}$ tek elemanlı bir küme ise, mesela $\{i_o\}$ ise bu durumda $(\overset{*}{\prod\limits_{i \in I \setminus \{j\}}} G_i) = G_{i_0}$ şeklinde yazarız.

Örnek 3.11 $G = \mathbb{Z}^*_{(20)} = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x < 20 \text{ ve } (x, 20) = 1\}$ $(mod\ 20)$ de çarpım grubunu inceleyelim. Bu grubun

$$\mathbb{Z}_5(20) = \{x \in \mathbb{Z}^*_{(20)} : x \equiv 1(\text{mod}5)\}$$

ve

$$\mathbb{Z}_4(20) = \{x \in \mathbb{Z}^*_{(20)} : x \equiv 1(\text{mod}4)\}$$

alt gruplarını alalım. Bu grupların elemanları

$\mathbb{Z}^*_{(20)} = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$, $\mathbb{Z}_5(20) = \{1, 11\}$ ve $\mathbb{Z}_4(20) = \{1, 9, 13, 17\}$ şeklinde elde edilir. Bu grupların çarpımı

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_4(20) \cdot \mathbb{Z}_5(20) &= \{1.1, 1.9, 1.13, 1.17, 11.1, 11.9, 11.13, 11.17\} \\
&= \{1, 9, 13, 17, 11, 19, 3, 7\} \\
&= \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}
\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı

1) $G = \mathbb{Z}_4(20) \cdot \mathbb{Z}_5(20)$ olur.

2) Tamsayılarda $(mod\ n)$ ye göre çarpma işleminin değişme özelliği olduğundan ikinci şart sağlanır.

3) $\mathbb{Z}_4(20) \cap \mathbb{Z}_5(20) = \{1\}$ dir.

Dolayısıyla $\mathbb{Z}_4(20).\ \mathbb{Z}_5(20)$ çarpımı G nin bir iç direkt çarpımdır.

4. ESNEK KÜMELER

4.1 Esnek Kümeler

Esnek kümeler ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından ortaya atılmıştır. Sonra Maji ve ark. (2003) esnek kümelerde bazı işlemleri tanımlamıştır. Daha sonra Çağman ve Enginoğlu (2010) bu işlemler üzerinde değişiklikler yapmıştır. Bu bölümde Çağman ve Enginoğlu'nun çalışmaları göz önüne alınarak esnek kümelerle ilgili bazı bilgiler verilmiştir.

Tanım 4.1 U ve E boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere

$$f : E \to \mathcal{P}(U)$$

küme değerli fonksiyonuna U üzerinde bir **esnek küme** denir. Buna göre bir f esnek kümesini

$$f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in E \Big\}$$

biçiminde ikililer kümesi olarak yazabiliriz (Molodtsov, 1999).

Parametreler cümlesi E olan farklı esnek kümeler $f_1, f_2, f_3, \dots$ veya $f, g, h, \dots$şeklinde gösterilir. Eğer $A \subseteq E$ ve $x \in E \backslash A$ için, $f_A(x) = \phi$ oluyorsa bu esnek küme f_A şeklinde gösterilir. Ayrıca parametreler cümlesi A olan farklı esnek kümeler $f_A, g_A, h_A, ...$ şeklinde gösterilir. Bir esnek kümede bir elemanın görüntüsü boş ise bu eleman esnek küme içerisinde gösterilmeyecektir. U üzerinde parametre kümesi E olan tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.2 Bir araba şirketine araba almak için talepte bulunan adayların kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ olsun. Bu şirketteki arabalar, "*klimalı*", "*ABS'li*", "*Far Sensörlü*", "*Park Sensörlü*" ve "*kameralı*"özelliklere sahip olsun. Bu özellikleri parametre kümesi ile gösterelim. Bu parametreleri $i = 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere sırasıyla x_i ile isimlendirirsek, parametreler kümesi $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olur.

$A = \{x_2, x_4, x_5\}, B = \{x_1, x_3, x_4\} \subseteq E$ olmak üzere, araba talepleri

$$
\begin{aligned}
f_A(x_2) &= \{u_2, u_4, u_6\} \\
f_A(x_4) &= \{u_1, u_2, u_5\} \\
f_A(x_5) &= \{u_3, u_5\} \\
g_B(x_1) &= \{u_1, u_3, u_4, u_5\} \\
g_B(x_3) &= \{u_1, u_3, u_6\} \\
g_B(x_4) &= \{u_1, u_2, u_3, u_5\} \\
h_A(x_2) &= \emptyset \\
h_A(x_4) &= \{u_2, u_3, u_4\} \\
h_A(x_5) &= U
\end{aligned}
$$

biçiminde olduğu kabul edilirse, bunların oluşturacağı f_A, g_B ve h_A esnek kümeleri sırasıyla

$$
\begin{aligned}
f_A &= \Big\{\big(x_2, \{u_2, u_4, u_6\}\big), \big(x_4, \{u_1, u_2, u_5\}\big)\big(x_5, \{u_3, u_5\}\big)\Big\} \\
g_B &= \Big\{\big(x_1, \{u_1, u_3, u_4, u_5\}\big), \big(x_3, \{u_1, u_3, u_6\}\big)\big(x_4, \{u_1, u_2, u_3, u_5\}\big)\Big\} \\
h_A &= \Big\{\big(x_4, \{u_2, u_3, u_4\}\big), \big(x_5, U\big)\Big\}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Tanım 4.3 Her $x \in E$ için $f(x) = \emptyset$ oluyorsa f esnek kümesine boş esnek küme denir ve f_ϕ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 4.4 Her $x \in E$ için $f(x) = U$ oluyorsa f esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve $f_{\tilde{E}}$ ile gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 4.5 $f, g \in S_E(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $f(x) \subseteq g(x)$ oluyorsa f esnek kümesine g esnek kümesinin alt esnek kümesi denir ve $f \tilde{\subseteq} g$ şeklinde gösterilir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 4.6 $f, g \in S_E(U)$ ise

$$f \tilde{\cup} g = \Big\{(x, f(x) \cup g(x)) : x \in E\Big\}$$

esnek kümesine f ve g esnek kümelerinin esnek birleşimi denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Tanım 4.7 $f, g \in S_E(U)$ ise

$$f \tilde{\cap} g = \Big\{(x, f(x) \cap g(x)) : x \in E\Big\}$$

esnek kümesine f ve g esnek kümelerinin esnek kesişimi denir (Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Örnek 4.8 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_1, x_4\}$ ve $B = \{x_2, x_4\}$ olsun.

$$\begin{aligned} f_A &= \{(x_1, \{u_1, u_3\}), (x_4, \{u_3, u_4\})\} \\ f_B &= \{(x_2, \{u_2, u_3\}), (x_4, \{u_1, u_2, u_4\})\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa

$$f_A \tilde{\cup} f_B = \{(x_1, \{u_1, u_3\}), (x_2, \{u_2, u_3\}), (x_4, U)\} \text{ ve } f_A \tilde{\cap} f_B = \{(x_4, \{u_4\})\}$$

olur.

Teorem 4.9 $f \in S_E(U)$ için,

1. $f \tilde{\cup} f = f$
2. $f \tilde{\cup} f_\phi = f$
3. $f \tilde{\cup} f_{\tilde{E}} = f_{\tilde{E}}$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 4.10 $f \in S_E(U)$ için,

1. $f \tilde{\cap} f = f$
2. $f \tilde{\cap} f_\phi = f_\phi$
3. $f \tilde{\cap} f_{\tilde{E}} = f$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 4.11 $f, g, h \in S_E(U)$ için,

1. $f \tilde{\cup} g = g \tilde{\cup} f$
2. $(f \tilde{\cup} g) \tilde{\cup} h = f \tilde{\cup} (g \tilde{\cup} h)$

3. $f\tilde{\cup}(g\tilde{\cap}h) = (f\tilde{\cup}g)\tilde{\cap}(f\tilde{\cup}h)$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

Teorem 4.12 $f,g,h \in S_E(U)$ için,

1. $f\tilde{\cap}g = g\tilde{\cap}f$
2. $(f\tilde{\cap}g)\tilde{\cap}h = f\tilde{\cap}(g\tilde{\cap}h)$
3. $f\tilde{\cap}(g\tilde{\cup}h) = (f\tilde{\cap}g)\tilde{\cup}(f\tilde{\cap}h)$

(Çağman ve Enginoğlu, 2010).

4.2 Esnek int-Grup

Tanım 4.13 G bir grup ve $f \in S_G(U)$ olsun. Bu takdirde her $x,y \in G$ için,

$$f(xy) \supseteq f(x) \cap f(y)$$

ise, f ye U üzerinde bir esnek int-grupoid denir. Ayrıca f, U üzerinde bir esnek int-grupoid ve f, her $x,y \in G$ için,

$$f(x^{-1}) = f(x)$$

şartını sağlıyorsa f ye U üzerinde bir esnek int-grup denir (Çağman ve ark., 2011). Burada hemen belirtelim ki $f(x^{-1}) = f(x)$ şartı $f(x^{-1}) \supseteq f(x)$ şartına denktir.

Bu tanımı şöyle genişletebiliriz.

Eğer G, bir yarı grup ve her $x,y \in G$ için $f(xy) \supseteq f(x) \cap f(y)$ ise f ye esnek int-yarı grup denir.

Eğer G, bir monoid, her $x,y \in G$ için $f(xy) \supseteq f(x) \cap f(y)$ ve her $x \in G$ için $f(e) \supseteq f(x)$ ise f ye esnek int-monoid denir. Bundan sonra, U üzerinde parametreler cümlesi G olan tüm esnek int-grupların cümlesi $S_G^g(U)$ ile gösterilecektir.

Örnek 4.14 $G = Z_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$, $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ ve
$f = \{(\overline{0},U),(\overline{1},\{u_1,u_3,u_4\}),(\overline{2},\{u_1,u_2,u_3,u_4\}),(\overline{3},\{u_1,u_3,u_4\})\}$ olsun.

f nin esnek int-grup olup olmadığını inceleyelim.

İlk olarak $f(xy) \supseteq f(x) \cap f(y)$ şartını kontrol edelim. $x = \overline{0}$, $y = \overline{1}$ için

$$\begin{aligned} f(\overline{0}) &= U \\ f(\overline{1}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{0}+\overline{1}) &= f(\overline{1}) = \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{0}) \cap f(\overline{1}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \end{aligned}$$

olduğundan $f(\overline{0}+\overline{1}) \supseteq f(\overline{0}) \cap f(\overline{1})$ dir.

$x = \overline{1}$, $y = \overline{1}$ için

$$\begin{aligned} f(\overline{1}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{1}+\overline{1}) &= f(\overline{2}) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\ f(\overline{1}) \cap f(\overline{1}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \end{aligned}$$

olduğundan $f(\overline{1}+\overline{1}) \supseteq f(\overline{1}) \cap f(\overline{1})$ dir.

$x = \overline{1}$, $y = \overline{2}$ için

$$\begin{aligned} f(\overline{1}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{2}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\ f(\overline{1}+\overline{2}) &= f(\overline{3}) = \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{1}) \cap f(\overline{2}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \end{aligned}$$

olduğundan $f(\overline{1}+\overline{2}) \supseteq f(\overline{1}) \cap f(\overline{2})$ dir.

$x = \overline{1}$, $y = \overline{3}$ için

$$\begin{aligned} f(\overline{1}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{3}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{1}+\overline{3}) &= f(\overline{0}) = U \\ f(\overline{1}) \cap f(\overline{3}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \end{aligned}$$

olduğundan $f(\overline{1}+\overline{3}) \supseteq f(\overline{1}) \cap f(\overline{3})$ dir.

$x = \overline{2},\ y = \overline{3}$ için

$$\begin{aligned} f(\overline{2}) &= \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \\ f(\overline{3}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{2}+\overline{3}) &= f(\overline{1}) = \{u_1, u_3, u_4\} \\ f(\overline{2}) \cap f(\overline{3}) &= \{u_1, u_3, u_4\} \end{aligned}$$

olduğundan $f(\overline{2}+\overline{3}) \supseteq f(\overline{2}) \cap f(\overline{3})$ dir. Dolayısıyla $f(xy) \supseteq f(x) \cap f(y)$ şartı sağlanır. Şimdi de $f(x) = f(x^{-1})$ şartını inceleyelim.

$$f(\overline{0}) = U = f(-\overline{0}) = f(\overline{0})$$

$$f(\overline{1}) = \{u_1, u_3, u_4\} = f(-\overline{1}) = f(\overline{3})$$

$$f(\overline{2}) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = f(-\overline{2}) = f(\overline{2})$$

$$f(\overline{3}) = \{u_1, u_3, u_4\} = f(-\overline{3}) = f(\overline{1})$$

olduğundan $f(x) = f(x^{-1})$ şartı da sağlanır. Bu nedenle f, G içinde bir esnek int-gruptur.

Teorem 4.15 $f \in S_G^g(U)$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ ise

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) \supseteq f(x_1) \cap f(x_2) \cap \ldots f(x_n)$$

dir.

Teorem 4.16 $f \in S_G^g(U)$ olsun. Bu takdirde her $x \in G$ için $f(e) \supseteq f(x)$ dır. (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 4.17 $f \in S_G^g(U)$ ise, her $x \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $f(x^n) \supseteq f(x)$ dir (Kaygısız, 2012).

İspat: Her $x \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu taktirde, $n > 0$ için

$$\begin{aligned} f(x^n) &= f(xx \ldots x) \\ &\supseteq f(x) \cap f(x) \cap \ldots \cap f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$n < 0$ için $n = -k$ olsun

$$\begin{aligned} f(x^n) &= f(x^{-k}) = f((x^{-1})^k) = f(x^{-1}x^{-1}\ldots x^{-1}) \\ &\supseteq f(x^{-1}) \cap f(x^{-1}) \cap \ldots \cap f(x^{-1}) \\ &= f(x) \cap f(x) \cap \ldots \cap f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$n = 0$ için

$$\begin{aligned} f(x^0) &= f(e) = f(x^1x^{-1}) \supseteq f(x) \cap f(x^{-1}) \\ &= f(x) \cap f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olduğundan

$$f(e) \supseteq f(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $x \in G$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $f(x^n) \supseteq f(x)$ olur.

Tanım 4.18 $f \in S_G^g(U)$ olsun. Bu takdirde f nin e-kümesi e_f şeklinde gösterilir ve

$$e_f = \{x \in G : f(x) = f(e)\}$$

olarak tanımlanır (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 4.19 $A \subseteq E$ ve $f_A \in S_E(U)$ olsun. Bu takdirde f_A^* kümesi

$$f_A^* = \{x \in A : f_A(x) \neq \phi\}$$

olarak tanımlanır ve bu kümeye f_A nın destek kümesi denir (Çağman ve ark, 2012).

Teorem 4.20 $f \in S_G^g(U)$ ve $H \leq G$ olsun. Bu taktirde $f\,|_H \in S_H^g(U)$ olur. (Kaygısız, 2012).

Tanım 4.21 G bir grup ve $f \in S_G(U)$ olsun. Bu takdirde her $x, y \in G$ için

$$f(xy) = f(yx)$$

ise f ye Abelian esnek küme denir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 4.22 G bir grup ve $f \in S_G^g(U)$ olsun. Her $x, y \in G$ için $f(xy) = f(yx)$ ise ya G içinde bir normal esnek int-grup denir (Kaygısız, 2012).

Not: U üzerinde parametre kümesi G olan tüm normal esnek int-grupların kümesi $NS_G^g(U)$ ile gösterilir.

Sonuç 4.23 $f \in S_G^g(U)$ olsun.$f \in NS_G^g(U)$ olması için gerek ve yeter şart şart her $x, y \in G$ için, $f(xyx^{-1}) = f(y)$ olmasıdır (Kaygısız, 2012).

Örnek 4.24 Grup olarak

$$G = A_3 = \{(1), (1,2,3), (1,3,2)\}$$

alterne grubu ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ nesneler kümesini alalım.

$f = \{((1), U)), ((1,2,3), \{u_2, u_3, u_5\}), ((1,3,2), \{u_2, u_3, u_5\})\}$ esnek int-grubunu inceleyelim.

$$\begin{aligned} f((1)(1,2,3)(1)^{-1}) &= f((1)(1,2,3)(1)) = f((1,2,3)) \\ &= \{u_2, u_3, u_5\} = f((1,2,3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f((1,3,2)(1,2,3)(1,3,2)^{-1}) &= f((1,3,2)(1,2,3)(1,2,3)) \\ &= f((1,2,3)) = \{u_2, u_3, u_5\} = f((1,2,3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f((1)(1,3,2)(1)^{-1}) &= f((1)(1,3,2)(1) = f((1,3,2)) \\ &= \{u_2, u_3, u_5\} = f((1,3,2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f((1,2,3)(1,3,2)(1,2,3)^{-1}) &= f((1,2,3)(1,3,2)(1,3,2)) = f((1,3,2)) \\ &= \{u_2, u_3, u_5\} = f((1,3,2)) \end{aligned}$$

bu durumda her $x, y \in G$ için, $f(xyx^{-1}) = f(y)$ şartı sağlandığından $f \in NS_G^g(U)$ dur.

Tanım 4.25 $f_1, f_2 \in S_G^g(U)$ ve $f_1 \widetilde{\subseteq} f_2$ olsun. Bu takdirde her $x, y \in G$ için

$$f_1(yxy^{-1}) \supseteq f_1(x) \cap f_2(y)$$

ise f_1 e f_2 nin esnek normal int-altgrubu denir ve $f_1 \widetilde{\lhd}\, f_2$ şeklinde gösterilir (Kaygısız, 2012).

Örnek 4.26 $G = S_3$ permütasyon grubu içinde tanımlı

$$f_1 = \{((1),U),((1,2,3),\{u_1,u_3\}),((1,3,2),\{u_1,u_3\})\}$$

ve

$$\begin{aligned} f_2 &= \{((1),U),((1,2),\{u_2,u_3,u_5\}),((2,3),\{u_2,u_3,u_5\}),((1,3),\{u_2,u_3,u_5\}), \\ &\quad ((1,2,3),\{u_1,u_2,u_3,u_5\}),((1,3,2),\{u_1,u_2,u_3,u_5\})\} \end{aligned}$$

esnek int-gruplarını alalım. $f_1 \widetilde{\subseteq} f_2$ olduğu aşikardır. $f_1(yxy^{-1}) \supseteq f_1(x) \cap f_2(y)$ şartını inceleyelim. $x = (1,2,3)$, $y = (1,2)$ için

$$f_1((1,2)(1,2,3)(1,2)^{-1}) = f_1((1,3,2)) = \{u_1,u_3\}$$

$$f_1((1,2,3) \cap f_2((1,2)) = \{u_1,u_3\} \cap \{u_2,u_3,u_5\} = \{u_3\}$$

$$f_1((1,2)(1,2,3)(1,2)^{-1}) \supseteq f_1((1,2,3) \cap f_2((1,2))$$

$x = (1,2,3)$, $y = (1,3)$ için

$$f_1((1,3)(1,2,3)(1,3)^{-1}) = f_1((1,3,2)) = \{u_1,u_3\}$$

$$f_1((1,2,3)) \cap f_2((1,3)) = \{u_1,u_3\} \cap \{u_2,u_3,u_5\} = \{u_3\}$$

$$f_1((1,3)(1,2,3)(1,3)^{-1}) \supseteq f_1((1,2,3)) \cap f_2((1,3))$$

$x = (1,2,3)$, $y = (2,3)$ için

$$f_1((2,3)(1,2,3)(2,3)^{-1}) = f_1((1,3,2)) = \{u_1,u_3\}$$

$$f_1((1,2,3)) \cap f_2((2,3)) = \{u_1,u_3\} \cap \{u_2,u_3,u_5\} = \{u_3\}$$

$$f_1((2,3)(1,2,3)(2,3)^{-1}) \supseteq f_1((1,2,3)) \cap f_2((2,3))$$

$x = (1,3)$, $y = (1,2,3)$ için

$$f_1((1,2,3)(1,3)(1,2,3)^{-1})) = f_1((1,2) = \phi$$

$$f_1((1,3)) \cap f_2((1,2,3)) = \phi \cap \{u_2,u_3,u_5\} = \phi$$

$$f_1((1,2,3)(1,3)(1,2,3)^{-1})) \supseteq f_1((1,3)) \cap f_2((1,2,3))$$

$x=(2,3)$, $y=(1,3,2)$ için

$$f_1((1,3,2)(2,3)(1,3,2)^{-1}))=f_1((1,2))=\phi$$

$$f_1((2,3))\cap f_2((1,3,2))=\phi\cap\{u_2,u_3,u_5\}=\phi$$

$$f_1((1,2,3)(2,3)(1,3,2)^{-1}))\supseteq f_1((2,3))\cap f_2((1,3,2))$$

$x=(2,3)$, $y=(1,2)$ için

$$f_1((1,2)(2,3)(1,2)^{-1}))=f_1((1,3,2))=\{u_1,u_3\}$$

$$f_1((2,3))\cap f_2((1,2))=\phi\cap\{u_2,u_3,u_5\}=\phi$$

$$f_1((1,2)(2,3)(1,2)^{-1}))\supseteq f_1((2,3))\cap f_2((1,2))$$

diğer elemanlarda benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla $f_1(yxy^{-1})\supseteq f_1(x)\cap f_2(y)$ şartı sağlandığından dolayı $f_1\widetilde{\lhd} f_2$ olur.

5. ESNEK GRUPLARIN DİREKT ÇARPIMLARI

5.1 Esnek Grupların Dış Direkt Çarpımı

Bu bölümde esnek dış direkt çarpım tanımlanacaktır.

Aksi belirtilmedikçe bu bölümde, G_i birim elemanları e_i olan gruplar olarak, ayrıca $G = \tilde{\prod\limits_{i\in I}} G_i$ ve $e = (e_i)_{i\in I}$ olarak kabul edilecektir.

Tanım 5.1 $G = \tilde{\prod\limits_{i\in I}} G_i$ ve her $i \in I$ için $f_i \in S_{G_i}(U)$ olsun. Bu takdirde her $(x_i)_{i\in I}$ için

$$(f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\widetilde{\prod_{i\in I}} f_i\right)((x_i)_{i\in I}) = \cap_{i\in I} f_i(x_i)$$

şeklindeki çarpıma f_i *lerin* **dış direk çarpımı** denir.

Burada $(x_i)_{i\in I}$ ifadesi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şeklindeki sıralıları n-lileri ifade etmektedir.

Örnek 5.2 Grup olarak $G = \{1, -1, i, -i\}$ kümesi üzerinde çarpım grubunu alalım ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ olsun.

$$f_1 = \{(1, U), (-1, \{u_1, u_2, u_3, u_5\}), (i, \{u_1, u_2\}), (-i, \{u_1, u_2\})\}$$

$$f_2 = \{(1, \{u_1, u_3, u_4, u_5\}), (-1, \{u_1, u_3, u_4\}), (i, \{u_1, u_4\}), (-i, \{u_1, u_4\})\}$$

esnek int-gruplarını alalım. Bu takdirde $f_1 \times f_2 =$

$$\{((1,1), \{\{u_1, u_3, u_4, u_5\}), ((1,-1), \{u_1, u_3, u_4\}), ((1,i), \{u_1, u_4\}), ((1,-i), \{u_1, u_4\}),$$
$$((-1,1), \{u_1, u_3, u_5\}), ((-1,-1), \{u_1, u_3\}), ((-1,i), \{u_1\}), ((-1,-i), \{u_1\}),$$
$$((i,1), \{u_1\}), ((i,-1), \{u_1\}), ((i,i), \{u_1\}), ((i,-i), \{u_1\}), ((-i,1), \{u_1\}),$$
$$((-i,-1), \{u_1\}), ((-i,i), \{u_1\}), ((-i,-i), \{u_1\})\}$$

elde edilir.

Teorem 5.3 $G = \tilde{\prod\limits_{i\in I}} G_i$ ve her $i \in I$ için $f_i \in S^g_{G_i}(U)$ olsun. Bu takdirde f_i esnek gruplarının dış direkt çarpımı $\widetilde{\prod\limits_{i\in I}} f_i \in S^g_G(U)$ dur.

İspat: $f = \widetilde{\prod_{i\in I}} f_i$ ve her $i \in I$ için $x_i, y_i \in G_i$ olsun. Burada f_i ler esnek int-grup olduğundan

$$\begin{aligned} f_1(x_1y_1) &\supseteq f_1(x_1)\cap f_1(y_1) \\ f_2(x_2y_2) &\supseteq f_2(x_2)\cap f_2(y_2) \\ &\vdots \\ f_n(x_ny_n) &\supseteq f_n(x_n)\cap f_n(y_n) \end{aligned}$$

olup bu ifadelerin taraf tarafa arakesitini alırsak

$$f_1(x_1y_1)\cap\ldots\cap f_n(x_ny_n) \supseteq (f_1(x_1)\cap f_1(y_1))\cap\ldots\cap(f_n(x_n)\cap f_n(y_n))$$

olur. Buradan da

$$f(x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ny_n) \supseteq (f_1(x_1)\cap\ldots\cap f_n(x_n)\cap(f_1(y_1)\cap\ldots\cap f_n(y_n))$$

$$f((x_1,x_2,\ldots,x_n)(y_1,y_2,\ldots y_n)) \supseteq f((x_1,x_2,\ldots,x_n))\cap f((y_1,y_2,\ldots,y_n))$$

elde edilir. Böylece $f(xy) \supseteq f(x)\cap f(y)$ şartı sağlanır.

Şimdi $f(x) = f(x^{-1})$ şartının sağlandığını gösterelim. Her $i \in I$ için $f_i \in S^g_{G_i}(U)$ olduğundan

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= f_1(x_1^{-1}) \\ f_2(x_2) &= f_2(x_2^{-1}) \\ &\vdots \\ f_n(x_n) &= f(x_n^{-1}) \end{aligned}$$

olur. Taraf tarafa arakesitini alırsak

$$\begin{aligned} f_1(x_1)\cap f_2(x_2)\cap\ldots\cap f_n(x_n) &= f_1(x_1^{-1})\cap f_2(x_2^{-1})\cap\ldots\cap f(x_n^{-1}) \\ f((x_1,x_2,\ldots,x_n) &= f_1((x_1^{-1},x_2^{-1},\ldots,x_n^{-1})) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $f = \widetilde{\prod_{i\in I}} f_i \in S^g_G(U)$ olur.

Örnek 5.4 Örnek 3.8 deki $G_1 \times G_2$ grubunun bir alt grubu olan

$$\begin{aligned} G_1' \times G_2 = \{&(e,(1)),(a,(1)),(e,(1,2,3)),(a,(1,2,3)), \\ &(e,(1,3,2)),(a,(1,3,2))\} \end{aligned}$$

grubunu alalım. $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ olsun.

Ayrıca bunlar üzerinde tanımlı

$$f_1 = \{(e,U),(a,\{u_1,u_2,u_4\}\}$$

ve

$$f_2 = \{((1),U),((1,2,3),\{u_2,u_4\}),((1,3,2),\{u_2,u_4\})\}$$

esnek kümelerinin G_1' ve G_2 içinde esnek int-gruplar oldukları açıktır. Bu esnek grupların dış direkt çarpımını bulup bir esnek int-grup olduğunu gösterelim.

Bu esnek int-grupların dış direkt çarpımı

$$\begin{aligned} f &= \left(\tilde{\prod_{i\in I}} f_i\right)\left((x_i)_{i\in I}\right) \\ &= (f_1 \times f_2)(x_1,x_2) \\ &= \{((e,(1)),U),((a,(1)),\{u_1,u_2,u_4\}),((e,(1,2,3)),\{u_2,u_4\}), \\ &\quad ((a,(1,2,3)),\{u_2,u_4\}),((e,(1,3,2)),\{u_2,u_4\}),((a,(1,3,2)),\{u_2,u_4\})\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $f \in S^g_{G_1'\times G_2}(U)$ olduğunu göstermek için önce $f(xy) \supseteq f(x)\cap f(y)$ şartının sağlandığını gösterelim.

$$f((e,(1))(a,(1))) = f((a,(1))) = \{u_1,u_2,u_4\}$$

$$f((e,(1))) = U \quad , \quad f((a,(1))) = \{u_1,u_2,u_4\}$$

$$f((e,(1)))\cap f((a,(1))) = \{u_1,u_2,u_4\}$$

olduğundan

$$f((e,(1))(a,(1))) \supseteq f((e,(1)))\cap f((a,(1)))$$

dir.

$$f((a,(1))(a,(1,3,2))) = f((e,(1,3,2))) = \{u_2,u_4\}$$

$$f((a,(1))) = \{u_1,u_2,u_4\} \quad , \quad f((a,(1,3,2))) = \{u_2,u_4\}$$

$$f((a,(1)))\cap f((a,(1,3,2))) = \{u_2,u_4\}$$

olduğundan

$$f((a,(1))(a,(1,3,2))) \supseteq f((a,(1)))\cap f((a,(1,3,2)))$$

dir.

Diğer elemanlarda benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi de $f(x^{-1}) = f(x)$ şartının sağlanğını gösterelim.

$$f((a,(1))^{-1}) = f((a,(1))) = \{u_1,u_2,u_4\} = f(a,(1))$$

$$f((e,(1,3,2))^{-1}) = f((e,(1,2,3))) = \{u_2,u_4\} = f((e,(1,3,2)))$$

Diğer elemanlarda benzer şekilde gösterilebilir. Bu nedenle $f \in S^{g}_{G_1' \times G_2}(U)$ olur.

5.2 Esnek Grupların İç Direkt Çarpımı

Bu bölümde esnek iç direkt çarpım konusu incelecektir.

G sonlu bir grup olmak üzere $i \in I$ için $x_i \in G$ ise $\prod\limits_{i\in I} x_i$ ifadesi x$_i$ lerin çarpımını ifade etmektedir. Gösterim kolaylığı sağlamak için bunu $\prod x_i$ şeklinde yazacağız.

Tanım 5.5 Her $i \in I$ için, $f_i \in S_G(U)$ olsun. f esnek kümesi her $x \in G$ için,

$$f(x) = \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) | x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = x\}$$

şeklinde tanımlanır. f ye f_i lerin **iç çarpımı** denir ve $f = \overset{*}{\prod\limits_{i\in I}} f_i$ ile gösterilir.

Örnek 5.6 G olarak D_3 Dihedral grubunu ve nesneler kümesi olarak da U kümesini alalım. D_3 Dihedral grubu $u^3 = v^2 = e$, $uv = vu^2$ şartlarını sağlayan $D_3 = \{e,u,u^2,v,vu,vu^2\}$ elemanlarından oluşur. Bu grup üzerinde f_1 ve f_2 esnek kümeleri $\phi \subseteq \alpha_5 \subseteq \alpha_4 \subseteq \alpha_3 \subseteq \alpha_2 \subseteq \alpha_1 \subseteq U$ sağlayan $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5 \subseteq U$ kümeleri için

$$f_1(x) = \begin{cases} \alpha_4 & \text{eğer } x = e \text{ ise} \\ \alpha_2 & \text{eğer } x = v \\ \alpha_3 & \text{eğer } x = vu \\ \phi & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \alpha_5 & \text{eğer } x = e \text{ ise} \\ \alpha_1 & \text{eğer } x = v, vu^2 \\ \phi & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.$f_{A_1} \bullet f_2$ iç çarpımını bulalım.

$$\begin{aligned}
f(e) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \mid x_i \in G,\ i\in I,\ \prod x_i = e\} \\
&= \{f_1(e)\cap f_2(e)\}\cup\{f_1(u)\cap f_2(u^2\}\cup\{f_1(u^2)\cap f_2(u)\} \\
&\quad \cup\{f_1(v)\cap f_2(v)\cup\{f_1(vu)\cap f_2(vu\}\cup\{f_1(vu^2)\cap f_2(vu^2)\} \\
&= \{\alpha_4\cap\alpha_5\}\cup\{\phi\cap\phi\}\cup\{\phi)\cap\phi\} \\
&\quad \cup\{\alpha_2\cap\alpha_1\}\cup\{\alpha_3\cap\phi\}\cup\{\phi\cap\alpha_1\} \\
&= \alpha_5\cup\phi\cup\phi\cup\alpha_2\cup\phi\cup\phi \\
&= \alpha_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(u) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \mid x_i \in G, i\in I, \prod x_i = u\} \\
&= \{f_1(u)\cap f_2(e)\}\cup\{f_1(e)\cap f_2(u)\}\cup\{f_1(u^2)\cap f_2(u^2)\} \\
&\quad \cup\{f_1(v)\cap f_2(vu)\}\cup\{f_1(vu)\cap f_2(vu^2)\}\cup\{f_1(v)\cap f_2(vu)\} \\
&= \{\phi\cap\alpha_5\}\cup\{\alpha_4\cap\phi\}\cup\{\phi\cap\phi\} \\
&\quad \cup\{\phi\cap\phi\}\cup\{\alpha_3\cap\alpha_1\}\cup\{\alpha_2\cap\phi\} \\
&= \phi\cup\phi\cup\phi\cup\phi\cup\alpha_3\cup\phi = \alpha_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(vu^2) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \mid x_i \in G, i\in I, \prod x_i = vu^2\} \\
&= \{f_1(e)\cap f_2(vu^2)\}\cup\{f_1(vu^2)\cap f_2(e)\}\cup\{f_1(u)\cap f_2(v)\} \\
&\quad \cup\{f_1(u^2)\cap f_2(vu)\}\cup\{f_1(v)\cap f_2(u^2)\}\cup\{f_1(vu)\cap f_2(u)\} \\
&= \{\alpha_4\cap\alpha_1\}\cup\{\phi\cap\alpha_5\}\cup\{\alpha_3\cap\alpha_1\} \\
&= \cup\{\phi\cap\phi\}\cup\{\alpha_2\cap\phi\}\cup\{\alpha_3\cap\phi\} \\
&= \alpha_4\cup\phi\cup\alpha_3\cup\phi\cup\phi\cup\phi \\
&= \alpha_3
\end{aligned}$$

Diğer elemanlar da benzer şekilde bulunabilir.

Dolayısıyla $f = f_1.f_2 = \{(e,\alpha_3),(u,\alpha_3),(u^2,\alpha_2),(v,\alpha_4),(vu,\alpha_5),(vu^2,\alpha_3)\}$ elde edilir.

Tanım 5.7 $f \in S_G^g(U)$ ve her $i\in I$ için $f_i \in S_{G_i}^g(U)$ olsun. Ayrıca her $i,j\in I$ için $f_i(e) = f_j(e)$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, eğer

(1) $f = \prod^{*}_{i\in I} f_i$.

(2) Her $i \in I$ için $f_i \widetilde{\triangleleft} f$ dir.

(3) Her $j \in I$ için $f_j \cap (\prod^{*}_{i\in I\setminus\{j\}} f_i) = (e, f(e))$

şartları sağlanırsa, f ya f_i esnek int-gruplarının **iç direkt çarpımı** denir ve $f = \prod^{\bullet}_{i\in I} f_i$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5.8

$$G = \mathbb{Z}^*_{(20)} = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x < 20 \text{ ve } (x,20) = 1\} = \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$$

$(mod\ 20)$ de çarpım grubunu ve

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_5(20) &= \{x \in \mathbb{Z}^*_{(20)} : x \equiv 1(\text{mod } 5)\} = \{1,11\} \\ \mathbb{Z}_4(20) &= \{x \in \mathbb{Z}^*_{(20)} : x \equiv 1(\text{mod } 4)\} = \{1,9,13,17\} \end{aligned}$$

alt gruplarını ele alalım. Parametreler kümesi bu gruplar olan esnek int-gruplar aşağıdaki şekilde olsun.

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}^*_{(20)}} = f &= \{(1,U),(3,\{u_1,u_3\}),(7,\{u_1,u_3\}),(9,\{u_1,u_3,u_4\}),(11,\{u_1,u_2\ u_3,u_4\}), \\ &\quad (13,\{u_1,u_3\}),(17,\{u_1,u_3\}),(19,\{u_1,u_3,u_4\})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}_5(20)} = f_1 &= \{(1,U),(11,\{u_1,u_2\ u_3,u_4\})\} \\ f_{\mathbb{Z}_4(20)} = f_2 &= \{(1,U),(9,\{u_1,u_3,u_4\}),(13,\{u_1,u_3\}),(17,\{u_1,u_3\})\} \end{aligned}$$

Şimdi f nın, f_1 ve f_2 nin esnek iç direkt çarpımı olduğunu gösterelim.

1)

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(1) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) : x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 1\} \\ &= f_1(1) \cap f_2(1) \\ &= U \cap U = U = f(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(3) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) : x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 3\} \\ &= f_1(11) \cap f_2(13) \\ &= \{u_1,u_2\ u_3,u_4\} \cap \{u_1,u_3\} = \{u_1,u_3\} = f(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(7) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \ : x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 7\} \\ &= f_1(11) \cap f_2(17) \\ &= \{u_1, u_2\, u_3, u_4\} \cap \{u_1, u_3\} = \{u_1, u_3\} = f(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(9) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \ : x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 9\} \\ &= f_1(1) \cap f_2(9) \\ &= U \cap \{u_1, u_3, u_4\} = \{u_1, u_3, u_4\} = f(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(11) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \ : x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 11\} \\ &= f_1(11) \cap f_2(1) \\ &= \{u_1, u_2\, u_3, u_4\} \cap U = \{u_1, u_2\, u_3, u_4\} = f(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(13) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \ : \ x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 13\} \\ &= f_1(1) \cap f_2(13) \\ &= U \cap \{u_1, u_3\} = \{u_1, u_3\} = f(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(17) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \ : x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 17\} \\ &= f_1(1) \cap f_2(17) \\ &= U \cap \{u_1, u_3\} = \{u_1, u_3\} = f(17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1 \bullet f_2(19) &= \cup\{(\cap_{i\in I} f_i(x_i)) \ : x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = 19\} \\ &= f_1(11) \cap f_2(9) \\ &= \{u_1, u_2\, u_3, u_4\} \cap \{u_1, u_3, u_4\} = \{u_1, u_3, u_4\} = f(19) \end{aligned}$$

olduğundan $f = f_1.f_2$ dir.

2)$\mathbb{Z}^*_{(20)}$ grubu değişmeli olduğu için f_1 ve f_2, f nın normal esnek alt grubudur, dolayısıyla ikinci şart sağlanır.

3) $f_1 \cap f_2 = (1, (f(1))$ olduğundan üçüncü şart da sağlanır. Sonuç olarak tanımdaki üç şart da sağlandığından $f = f_1 \bullet f_2$ olur.

Teorem 5.9 *G* bir grup olsun. Her $i \in I$ için, f_i ve $f \in S_G(U)$ ve $f = \prod^*_{i\in I} f_i$ olsun. Eğer G bir Abelian grup ise aşağıdakiler sağlanır.

(1) f_i, G içinde esnek int-yarıgrup ise f da G içinde esnek int-yarıgruptur.

(2) f_i, G içinde esnek int-monoid ve her $i, j \in I$ için $f_i(e) = f_j(e)$ olsun. Bu takdirde f, G içinde esnek int-monoiddir.

(3)$f_i \in S_G^g(U)$ ve her $i, j \in I$ için $f_i(e) = f_j(e)$ ise $f \in S_G^g(U)$ dur.

İspat: (1) f_i, G içinde esnek int-yarı grup ve $f = \prod_{i \in I}^{*} f_i$ olsun. Ayrıca her $\prod x_i = x$, $\prod y_i = y$ $\in G$ olsun. $f = \prod_{i \in I}^{*} f_i$ olduğundan

$$f(x) = \cup\{(\cap_{i \in I} f_i(x_i))|x_i \in G,\ i \in I,\ \prod x_i = x\}$$

$$f(y) = \cup\{(\cap_{i \in I} f_i(y_i))|y_i \in G,\ i \in I,\ \prod y_i = y\}$$

yazabiliriz. $f(xy) \supseteq f(x) \cap f(y)$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi, $u \in f(x) \cap f(y)$ olsun.$u \in f(x)$ ve $u \in f(y)$ olur. Bu durumda $u \in f_1(x_1) \cap f_2(x_2) \cap \ldots \cap f_n(x_n)$ ve $x_1 x_2 \ldots x_n = x$ olacak şekilde $x_i \in G$ vardır. Aynı zamanda $u \in f_1(y_1) \cap f_2(y_2) \cap \ldots \cap f_n(y_n)$ ve $y_1 y_2 \ldots y_n = y$ olacak şekilde $y_i \in G$ vardır. Dolayısıyla $u \in f_i(x_i)$ ve $u \in f_i(y_i)$ olur. $z_i = x_i y_i$ ve $z = z_1 z_2 \ldots z_n$ ise $z = xy$ dir. $f_i(z_i) = f_i(x_i y_i) \supseteq f_i(x_i) \cap f_i(y_i)$ olduğundan $u \in z_i(x_i)$ olur. Dolayısıyla $u \in f(z) = f(xy)$ olup, $f(xy) \supseteq f(x) \cap f(y)$ elde edilir. Bundan dolayı f de G içinde esnek int-yarıgruptur.

(2) f_i, G içinde esnek int-monoid ise ispatın birinci bölümden f, G içinde esnek int-yarı gruptur.

Her $i \in I$ ve her $x \in G_i$ için $f_i(e) \supseteq f_i(x)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$f(e) = \cap_{i \in I} f_i(e)$$

yazabiliriz. Buradan, her $x \in G$ için

$$\begin{aligned} f(e) &= \cap_{i \in I} f_i(e) \\ &\supseteq \cap_{i \in I} f_i(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Bu nedenle f, G içinde esnek int-monoiddir.

(3) $f_i \in S_G^g(U)$ olsun. Bu durumda ispatın ikinci bölümünden f, G içinde esnek int-monoididir. Ayrıca, her $x \in G$ için

$$\begin{aligned} f(x^{-1}) &= \cup\{\cap_{i \in I} f_i(y_i)|y_i \in G, i \in I, \prod y_i = x^{-1}\} \\ &= \cup\{\cap_{i \in I} f_i(y_i^{-1})|y_i \in G, i \in I, \prod y_i^{-1} = x\} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $f \in S_G^g(U)$ dur.

Teorem 5.9 sadece Abel grupları için verilmişti. Şimdi keyfi bir grup için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.10 *G bir grup olsun. Her $i \in I$ için, f_i ve $f \in S_G(U)$ ve $f = \overset{*}{\prod\limits_{i \in I}} f_i$ olsun. f_i esnek int-gruplarının $i \neq j$ için $x_i \in f_i^*$ ve $x_j \in f_j^*$ ise $x_i x_j = x_j x_i$ şartını sağladığını kabul edelim. Eğer G nin her f_i esnek int-yarıgrubu (esnek int-monoid, esnek int-grup, normal esnek int-grup) için $f_i(e) = f_j(e)$ $(her\ i, j \in I)$ şartını sağlıyorsa f da esnek int-yarıgrup (esnek int-monoid, esnek int-grup, normal esnek int-grup) olur.*

İspat: f_i lerin esnek int-yarıgrup, esnek int-monoid ve esnek int-grup olması durumunda ispat Teorem 5.9 un ispatı ile aynıdır.

Şimdi $f_i \in NS_G^g(U)$ olsun. Bu durumda her $x, y \in G$ için

$$
\begin{aligned}
f(xyx^{-1}) &= \cup\{\cap_{i \in I} f_i(z_i) : z_i \in G, i \in I, \textstyle\prod z_i = xyx^{-1}\} \\
&= \cup\{\cap_{i \in I} f_i(xy_ix^{-1}) \ : \ y_i \in G, \ i \in I, \ \textstyle\prod xy_ix^{-1} = xyx^{-1}\} \\
&= \cup\{\cap_{i \in I} f_i(y_i) \ : \ y_i \in G, i \in I, \ \textstyle\prod y_i = y\} \\
&= f(y)
\end{aligned}
$$

olup $f \in NS_G^g(U)$ dur.

5.3 Esnek Grupların Direkt Çarpımlarıyla İlgili Bazı Sonuçlar

Bu bölümde esnek dış ve iç direkt çarpımlar ile ilgili bazı ilişkiler verilecektir.

Teorem 5.11 *Her $i \in I$ için, $f_i \in NS_{G_i}^g(U)$ olsun. Bu takdirde*

$$f = \widetilde{\prod_{i \in I}} f_i \in NS_{G_i}^g(U)$$

olur.

İspat: Teorem 5.3 den $f \in S_G^g(U)$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse G deki her $x = (x_i)_{i\in I}$ ve $y = (y_i)_{i\in I}$ elemanları için

$$\begin{aligned} f(xy) &= f((x_i)_{i\in I}.(y_i)_{i\in I}) \\ &= f((x_i.y_i)_{i\in I}) \\ &= \cap_{i\in I} f_i(x_i y_i) \\ &= \cap_{i\in I} f_i(y_i x_i) \quad (f_i \in NS_{G_i}^g(U) \text{ olduğundan}) \\ &= f(yx) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f \in NS_G^g(U)$ olur.

Teorem 5.12 $G_1, G_2, \ldots G_n$ gruplar ve $f \in S_{G_1\times\ldots\times G_n}^g(U)$ olsun. Ayrıca f_i, her $x \in G_i$, $(i \in I)$ için

$$f_i(x) = f(e_1, \ldots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

şeklinde tanımlanan bir esnek küme olsun. Bu takdirde

1. Her $i \in I$ için $f_i \in S_{G_i}^g(U)$ olur.
2. $\tilde{\prod_{i\in I}} f_i \widetilde{\subseteq} f$ dır.

İspat:

1. $i \in I$ için

$$K_i = \{e_1\} \times \ldots \times \{e_{i-1}\} \times G_i \times \{e_{i+1}\} \times \ldots \times \{e_n\}$$

olsun. Bu takdirde Teorem 3.4 ten $K_i \leq G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca Teorem 4.20 den $f|_{K_i} \in S_{K_i}^g(U)$ dur. Şimdi, $\varphi : G_i \to K_i$, her $x \in G_i$ için

$$\varphi(x) = (e_1, \ldots e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon olsun. Bu takdirde φ nin bir izomorfizma olduğu Teorem 3.5 ten biliyoruz. Şimdi $f_i = f|_{K_i} \circ \varphi$ olduğunu gösterelim.

$$f|_{K_i}(\varphi(x)) = f|_{K_i}((e_1, \ldots e_{i-1}, x, e_{i+1}, \ldots, e_n)) = f_i(x)$$

olur. Dolayısıyla $f_i \in S_{G_i} g(U)$ dur.

2. Her $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in G_1\times G_2\times\ldots\times G_n$ için

$$\begin{aligned}
& f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
= \;& f((x_1,e_2,\ldots,e_n)(e_1,x_2,\ldots,x_n))\\
\supseteq \;& f(x_1,e_2,\ldots,e_n)\cap f(e_1,x_2,\ldots,x_n)\\
= \;& f_1(x_1)\cap f(e_1,x_2,x_3\ldots,x_n)\\
= \;& f_1(x_1)\cap f((e_1,x_2,e_3\ldots,e_n)(e_1,e_2,x_3,\ldots,x_n))\\
\supseteq \;& f_1(x_1)\cap f((e_1,x_2,e_3,\ldots,e_n)\cap f(e_1,e_2,x_3,\ldots,x_n))\\
= \;& f_1(x_1)\cap (f_2(x_2)\cap f(e_1,e_2,x_3,\ldots,x_n))\\
\supseteq \;& f_1(x_1)\cap f_2(x_2)\cap f(e_1,e_2,x_3,\ldots,x_n)\\
& \vdots\\
= \;& f_1(x_1)\cap f_2(x_2)\cap\ldots\cap f_n(x_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) &\supseteq f_1(x_1)\cap f_2(x_2)\cap\ldots\cap f_n(x_n)\\
&= (\tilde{\prod_{i\in I}} f_i)(x_1,x_2,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Lemma 5.13 $G_1,G_2\ldots,G_n$ gruplar ve $f\in S^g_{G_1\times\ldots\times G_n}(U)$ olsun. Bu durumda eğer, her $i\in I\setminus\{k\}$ için,

$$f(e_1,e_2,\ldots e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n)\supseteq f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

ise

$$f(e_1,e_2,\ldots,e_{k-1},x_k,e_{k+1},\ldots,e_n)\supseteq f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

olur.

İspat: Her $i \in I \setminus \{k\}$ için

$$
\begin{aligned}
& f(e_1,e_2,\ldots,e_{k-1},x_k,e_{k+1},\ldots,e_n) \\
= \;& f((x_1,x_2,\ldots,x_n)(x_1^{-1},\ldots,x_{k-1}^{-1},e_k,x_{k+1}^{-1},\ldots,x_n^{-1})) \\
\supseteq \;& f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \cap f(x_1^{-1},x_2^{-1},\ldots,x_{k-1}^{-1},e_k,x_{k+1}^{-1},\ldots,x_n^{-1}) \\
= \;& f(x_1,,\ldots,x_n) \cap f(x_1,,\ldots,x_{k-1},e_k,x_{k+1},\ldots,x_n) \\
= \;& f(x_1,\ldots,x_n) \\
& \cap f((e_1,\ldots,e_{k-2},x_{k-1},e_k,\ldots,e_n)(x_1,\ldots,x_{k-2},e_{k-1},e_k,x_{k+1},\ldots,x_n)) \\
\supseteq \;& f(x_1,\ldots,x_n) \cap \\
& (f(e_1,\ldots,e_{k-2},x_{k-1},e_k,\ldots,e_n) \cap f(x_1,\ldots,x_{k-2},e_{k-1},e_k,x_{k+1},\ldots,x_n)) \\
= \;& f(x_1,\ldots,x_n) \cap f(x_1,\ldots,x_{k-2},e_{k-1},e_k,x_{k+1},\ldots,x_n) \\
= \;& f(x_1,\ldots,x_n) \cap \\
& f((e_1,\ldots,e_{k-3},x_{k-2},e_{k-1},e_k,\ldots,e_n)(x_1,\ldots,x_{k-3},e_{k-2},e_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)) \\
\supseteq \;& f(x_1,\ldots,x_n) \cap (f(e_1,\ldots,e_{k-3},x_{k-2},e_{k-1},e_k,\ldots,e_n) \\
& \cap f(x_1,\ldots,x_{k-3},e_{k-2},e_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)) \\
= \;& f(x_1,\ldots,x_n) \cap f(x_1,\ldots x_{k-3},e_{k-2},e_{k-1},x_{k+1},e_{k+1},\ldots,x_n) \\
& \vdots \\
\supseteq \;& f(x_1,\ldots,x_n) \cap f(e_1,\ldots,e_{k-2},e_{k-1},e_k,e_{k+1},\ldots,e_{n-1},x_n) \\
= \;& f(x_1,x_2,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece

$$f(e_1,e_2,\ldots,e_{k-1},x_k,e_{k+1},\ldots,e_n) \supseteq f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

elde edilir.

Teorem 5.14 $G_1,G_2\ldots,G_n$ gruplar, $f \in S^g_{G_1\times\ldots\times G_n}(U)$ ve olsun.
Bu takdirde her $i \in I$ ve $x_i \in G_i$ için,

$$f(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n) \supseteq f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \tag{5.1}$$

olması için gerek ve yeter şart $f_i \in S^g_{G_i}(U)$ olmak üzere $f = \tilde{\prod\limits_{i\in I}} f_i$ olmasıdır.

İspat: Önce $j \in I$ için $f_j : G_j \to P(U)$

$$f_j(x_j) = f(e_1, \ldots, e_{j-1}, x_j, e_{j+1}, \ldots, e_n)$$

olacak biçimde bir dönüşüm tanımlayalım. Ayrıca

$$K_j = \{e_1\} \times \ldots \times \{e_{j-1}\} \times G_j \times \{e_{j+1}\} \times \ldots \times \{e_n\}$$

olsun. Bu takdirde Teorem 4.20 den her $j \in I$ için $f|_{K_j} \in S^g_{K_j}(U)$ olur. Teorem 5.12 den

$$\tilde{\prod_{i\in I}} f_i \subseteq f \tag{5.2}$$

olduğunu 5.1 ve Lemma 5.13 ten her $i \in I$ için

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \supseteq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla her $i \in J$ için

$$f_j(x_j) = f(e_1, \ldots, x_j, \ldots, e_n) \supseteq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

elde edilir. Böylece,

$$(\tilde{\prod_{i\in I}} f_i)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cap f_2(x_2) \cap \ldots f_n(x_n) \supseteq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

olup buradan

$$\tilde{\prod_{i\in I}} f_i \supseteq f \tag{5.3}$$

elde edilir. Dolayısıyla (5.2) ve (5.3) ten

$$\tilde{\prod_{i\in I}} f_i = f$$

olur.

Diğer yandan her $i \in I$ için $f_i \in S^g_{G_i}(U)$ olmak üzere $f = \tilde{\prod_{i\in I}} f_i$ olsun. Her $i \in I$ ve $x_i \in G_i$ için

$$(\tilde{\prod_{i\in I}} f_i)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cap f_2(x_2) \cap \ldots f_n(x_n)$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} f_1(e_1) &\supseteq f_1(x_1) \\ f_2(e_2) &\supseteq f_2(x_2) \\ &\vdots \\ f_i(x_i) &\supseteq f_i(x_i) \\ &\vdots \\ f_n(e_n) &\supseteq f_n(x_n) \end{aligned}$$

olduğundan

$$f_1(e_1)\cap f_2(e_2)\cap\ldots\cap f_i(x_i)\cap\ldots\cap f_n(e_n)\supseteq f_1(x_1)\cap f_2(x_2)\cap\ldots\cap f_n(x_n)$$

olur. Dolayısıyla

$$f(e_1,e_2,\ldots,e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n)\supseteq f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

elde edilir.

Lemma 5.15 G bir grup, $f\in S_G^g(U)$ ve bir $x\in G$ nin mertebesi sonlu ve k olsun. Ayrıca $r\in\mathbb{N}$ ile k aralarında asal olsun. Bu takdirde $f(x)=f(x^r)$ dir.

İspat: r ile k aralarında asal olduğundan $1=sr+kt$ olacak şekilde s ve t tam sayıları vardır. Bundan dolayı $x=x^1=x^{sr+kt}$ yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^{sr+tk}) \\ &= f(x^{sr}x^{tk}) \\ &= f(x^{sr}) \ \ (\, x^k=e \text{ olduğu için}) \\ &\supseteq f(x) \ \ (\text{Teorem } 4.17) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıdaki tüm ifadeler eşit olup $f(x)=f(x^r)$ olur.

Lemma 5.16 $G_1,G_2,\ldots G_n$ sonlu gruplar ve $f\in S^g_{G_1\times\ldots\times G_n}(U)$ olsun. Ayrıca her $i,j\in I$ ve $i\neq j$ için G_i ve G_j nin mertebeleri aralarında asal olsun. Bu takdirde her $i\in I$ ve her $x_i\in G_i$ için

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)\subseteq f(e_1,\ldots,e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$$

dir.

İspat: $(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n) \in G_1\times\ldots\times G_n$ ve $i \in I$ için $r_i = |G_1|\ldots|G_{i-1}||G_{i+1}|\ldots|G_n|$ olsun. Bu takdirde her $i \in I$ için r_i ile $|G_i|$ aralarında asal olduğu gibi r_i ile x_i nin mertebesi de aralarında asaldır. Buradan $i, j \in I$ ve $j \neq i$ için $(x_j)^{r_i} = e_j$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \subseteq f((x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)^{r_i}) \\
= \;& f((x_1,e_2,\ldots,e_n)^{r_i}\ldots(e_1,\ldots,e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n)^{r_i}\ldots(e_1,\ldots e_{n-1},x_n)^{r_i}) \\
= \;& f(e_1,\ldots,e_{i-1},x_i^{r_i},e_{i+1},\ldots,e_n) \; ((x_j)^{r_i} = e_j \text{ olduğu için}) \\
= \;& f(e_1,\ldots,e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n) \; \text{(Lemma 5.15 ten)}
\end{aligned}$$

olur. O halde

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \subseteq f(e_1,\ldots,e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$$

elde edilir.

Teorem 5.17 $G_1, G_2, \ldots G_n$ sonlu gruplar ve $f \in S^g_{G_1\times\ldots\times G_n}(U)$ olsun. Eğer her $i, j \in I$ ve $i \neq j$ için G_i ve G_j nin mertebeleri aralarında asal ise,

$$f = \tilde{\prod_{i\in I}} f_i$$

dir.

İspat: Lemma 5.16 dan her $i, j \in I$ ve $i \neq j$ için G_i ve G_j nin mertebeleri aralarında asal ise

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \subseteq f(e_1,\ldots,e_{i-1},x_i,e_{i+1},\ldots,e_n)$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse Teorem 5.14 den $f = \tilde{\prod_{i\in I}} f_i$ olacak şekilde $f_i \in S^g_G(U)$ vardır.

KAYNAKLAR

ABOU-ZAID, S., 1993. On fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 55, 237-240.

AJMAL, N. and PRAJAPATI A.S., 1992. Fuzzy cosets and fuzzy normal subgroups, İnform. Sci.,64, 17-25.

AKGÜL, M., 1988. Some properties of soft groups, J. Math. Anal. Appl. 133, 93-100.

AKTAŞ, H. and ÇAĞMAN, N.,(2007). Soft sets and soft groups, Inform. Sci. 177, 2726-2735 .

ALI, M.I., FENG F., LIU, X., MIN, W.K. and SHABIR, M., 2009. On some new operations in soft set theory, Comput. Math. Appl. 57, 1547-1553.

ANTHONY, J. M. and SHERWOOD, H.,(1979). Fuzzy subgroups redefined, J. Math. Anal. Appl. 69 , 124-130.

ASAAD, M., 1991. Groups and fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems 39 , 323- 328.

ASAR, A. O., ARIKAN, A., ARIKAN, A.,2009. Cebir , Eflatun Yayınları, Ankara.

BHATTACHARYA, P. and MUJHERJEE, N. P.,(1987). Fuzzy groups, some group theoretic analogs II, Inform. Sci., 41,77-91.

ATANASSOV, K., 1986. Intuitionistic Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Syst.64(2):87-96.

BHUTANI, K. R., Fuzzy sets,(1993). soft relations and soft groups: Someinterrelations, Inform. Sci. 73, 107-115.

BABITHA, K. V. and SUNIL, J. J., 2010. Soft set relations and functions. Computers and Mathematics with Applications, 60, 1840-1849.

CHEN, D., TSANG, E.C.C. and YEUNG, D.S., 2003. Some notes on the parameterization reduction of soft sets. International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 3,1442-1445.

ÇAĞMAN, N. ÇITAK, F. and AKTAŞ, H., 2011. Soft int-group and its applications to group theory, Neural Comput. and Appl., DOI:10.1007/s00521-011-0752-x.

ÇAĞMAN, N. and ENGİNOĞLU, S., 2010. Soft set theory and uni-int decision making, European J. Oper. Res. 207, 848-855.

ÇALLIALP, F., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.

DAS, P. S.,1981. Fuzzy groups and level subgroups, J. Math. Anal. Appl. 84 , 264-269.

DIXIT, V. N., KUMAR, R., and AJAMAL, N., 1990. Level subgroups and union of soft int-groups, Fuzzy Sets and Systems 37 ,359-371.

FENG, F., JUN, Y. B. and ZHAO, X., 2008. Soft semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56(10), 2621-2628.

FILEP, L., 1992. Structure and contruction of fuzzy subgroups of a group. Fuzzy Set Syst. 51, 105-109.

JUN, Y. B., 2008. Soft BCK/BCI-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 56(1), 1408-1413.

JUN, Y. B., Lee, K. J. and PARK, C. H., 2008. Soft set theory applied to commutative ideals in *BCK*-algebras. Journal of Applied Mathematics and Informatics, 26(3-4), 707-720.

JUN, Y. B. and KIM, H. S., 2009. Pseudo d-algebras. Information Sciences, 179, 1751-1759.

JUN, Y. B., Lee, K. J. and ZHAN, J., 2009. Soft p-ideals of soft *BCI*-algebras. Computers and Mathematics with Applications, 58, 2060-2068.

JUN, Y. B. and PARK, C. H., 2009. Applications of soft sets in Hilbert algebras. Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6(2), 75-86.

JUN, Y. B., LEE, K. J. and PARK, C. H., 2010. Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI- algebras. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3180-3192.

KAYGISIZ, K., 2012. On Soft int-Groups, Ann. Fuzzy Math. Inform., 4(2), 365-375.

KAYGISIZ, K., Normal Soft int-Groups, submitted.

KIM, J. G., 1994. Fuzzy orders relative to soft int-groups, Inform. Sci. 80 , 341-348. 31.

LIU, W.J., 1982., Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals,Fuzzy Set Syst.,8 , 133-139.

MAKAMBA, B. B.,1992. Direct product and isomorphism of fuzzy subgroups, Inf. Sci. 65 , 33-43.

MAJI, P.K., BISWAS, R. and ROY A.R., 2003. Soft set theory, Comput. Math. Appl. 45, 555-562 .

MAJI, P.K., ROY, A.R. and BISWAS, R., 2004. On Intuitionistic Fuzzy soft sets. J. Fuzzy Math, 12(3), 669-683.

MOLODTSOV D.A.,1999. Soft set theory-first results, Comput. Math. Appl. 37, 19-31 .

MORDESON, J. N., BHUTANI, K. R. and ROSENFELD, A.,2005. Fuzzy group theory, Springer,

MORDESON, J. N.,1998. MALIK, D.S., Fuzzy commutative algebra, Word Scientific. theory, Springer,

MUJHERJEE, N. P., BHATTACHARYA, P. ,1986.Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets, Inform. Sci., 34,225-239.

MUJHERJEE, N. P. and BHATTACHARYA, 1986. some group theoretic analogs, Inform. Sci., 39,247-268

MUSHRIF, M., SENGUPTA, S. and RAY, A.K., 2006. Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. Lecture Notes In Computer Science, 3851 246-254.

OSMAN, M. T. A.,1984. On direct product of fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems 12, 87-91

OSMAN M. T. A.,1987 On some product of fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems 24 79-86.

PAWLAK, Z., 1982. Rough sets. International Journal of Information and Computer Sciences, 11(1), 341-356.

QIN, K. and HONG, Z., 2010. On soft equality. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234, 1347-1355.

ROSENFELD, A. 1971. Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35 512-517.

SEZGIN, A. and ATAGÜN, A.O.,2011. On operations of soft sets, Comput. Math. Appl. 61/5, 1457-1467

SHERWOOD, H. (1983). Products of fuzzy subgroups. Fuzzy Sets Syst., 11, 79-89.

TAŞÇI D. ,2007. Soyut Cebir, Alp Yayınevi, Ankara,

YANG, C., 2011. Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals. Computers and Mathematics with Applications, 61, 255-261.

YAMAK, S., KAZANCI, O. and DAVVAZ, B., 2011. Soft Hyperstructure. Computers and Mathematics with Applications, 62, 797-803.

ZADEH, L. A.,1965. Fuzzy sets, Inform. Control 8, 338-353.

ZHAN, J. and JUN, Y. B., 2010. Soft BL-algebras based on fuzzy sets. Computers and Mathematics with Applications, 59, 2037-2046.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Samsun'da doğdu. İlköğretim ve Lise öğrenimini İstanbul'un Gaziosmanpaşa ilçesinde tamamladı. 2006 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimine başladı. 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Gaziosmanpaşa Üniversitesinde yüksek lisans eğitimine başladı. 2012 Eylül ayında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2012 yılıEkim Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsüne yatay geçiş yaptı. Halen Ç.Ü. Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya devam etmektedir.