# AĞIRLIKLI UZAYLARDA BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

**Hakan ADIGÜZEL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2012**
**ANKARA**

Hakan ADIGÜZEL tarafından hazırlanan "AĞIRLIKLI UZAYLARDA BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN …….………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL …….………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN …….………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Yrd. Doç. Dr. Cafer ÇOŞKUN …….………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tarih: 13/07/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU …….………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hakan ADIGÜZEL

# AĞIRLIKLI UZAYLARDA BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hakan ADIGÜZEL**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**Temmuz 2012**

## ÖZET

**Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde lineer pozitif operatörler ve $q$- Analiz ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde $q$- Meyer-König ve Zeller operatörlerinin bazı yaklaşım özellikleri, sürekli fonksiyonların ağırlıklı uzaylarında ağırlıklı Korovkin teoremi yardımıyla incelenmiştir. Bu operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla elde edilmiştir. Ayrıca bu operatörler için $q$- türev ile ilgili bir diferensiyel denklem ve daha sonra Stancu-tip kalanı verilmiştir. Son bölümde $q$- Szasz-Mirakjan operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenerek bu operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla elde edilmiştir. Ayrıca bu operatörler için bir Voronovskaja-tip sonuç verilmiştir.**

| | |
|---|---|
| **Bilim Kodu** | **: 204.1.095** |
| **Anahtar Kelimeler** | **: Korovkin tip teoremler, lineer pozitif operatörler, $q$- Szasz-Mirakjan operatörleri, $q$-Meyer-König ve Zeller operatörleri, süreklilik modülü, ağırlıklı süreklilik modülü, Voronovskaja-tip formülü** |
| **Sayfa Adedi** | **: 62** |
| **Tez Yöneticisi** | **: Doc. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN** |

**SOME LINEAR POSITIVE OPERATORS IN WEIGHTED SPACES**

**(M.Sc. Thesis)**

**Hakan ADIGÜZEL**

**GAZİ UNİVERSITY**

**INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**July 2012**

## ABSTRACT

**The thesis consist of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, general informations about the linear positive operators and $q$- analysis are given. In the third chapter, a generalization of the Meyer-König ve Zeller operators based on $q$-integers are introduced and some convergence properties of these operators are investigated in weighted spaces of continous functions with the help of weighted Korovkin-type theorem. In addition, the rates of approximation of these operators are obtained with the help of the modulus of continuity and the weighted modulus of continuity. Moreover an application to differential equation related to $q$-derivatives and later a Stancu-type remainder are given. In the fourth chapter, a generalization of the Szasz-Mirakjan operators based on $q$- integers are introduced and some convergence properties of these operators are given. Therefore, the rates of approximation of these operators are obtained by means of modulus of continuity and the weighted modulus of continuity. Voronovskaja-type formula for these operators is discussed.**

**Science Code** : **204.1.095**

**Key Words** : **Korovkin- type teorems, linear positive operators, $q$ - Meyer-König and Zeller operators, $q$ - Szsaz-Mirakjan operators, modulus of continuity, weighted modulus of continuity, Voronovskaja-type formula**

**Page Number** : **62**

**Adviser** : **Assoc. Prof. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN**

# TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli Hocam Doc. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN'a ve bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

ÖZET ..... iv

ABSTRACT ..... v

TEŞEKKÜR ..... vii

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... iix

1. GİRİŞ ..... 1

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER ..... 4

2.1. Lineer Pozitif Operatörler ..... 4

2.2. $q$ - Analizi ..... 7

3. $q$ - MEYER- KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ ..... 10

3.1. $q$ - Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Tanımı ..... 10

3.2. $q$ - Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri ..... 10

3.3. $q$ - Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Diferensiyel Denklemlere Uygulanması ..... 29

3.4. $q$ - Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Bir Stancu- tip Kalanı ..... 32

4. $q$ - SZASZ- MİRAKJAN OPERATÖRLERİ ..... 37

4.1. $q$ - Szasz- Mirakjan Operatörlerinin Tanımı ..... 37

4.2. $q$ - Szasz- Mirakjan Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri ..... 47

4.3. $q$ - Szasz- Mirakjan Operatörleri için Voronovskaja- tip Sonucu ..... 57

KAYNAKLAR ..... 60

ÖZGEÇMİŞ ..... 62

# SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simge** | **Açıklama** |
| --- | --- |
| $L(f;x)$ | $L$ operatörünün $f$ fonksiyonuna uygulanması |
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ deki sürekli fonksiyonların uzayı |
| $\lVert\cdot\rVert_{C[a,b]}$ | $C[a,b]$ uzayında $\lVert f\rVert_{C[a,b]}=\max\limits_{a\le x\le b}\lvert f(x)\rvert$ ile tanımlı olan norm |
| $B[0,\infty)$ | $[0,\infty)$ da tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı |
| $B_m[0,\infty)$ | $[0,\infty)$ da tanımlı $\lvert f(x)\rvert\le M_f\left(1+x^m\right)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı |
| $B_\rho[0,\infty)$ | $[0,\infty)$ da tanımlı $\lvert f(x)\rvert\le M_f\rho(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı |
| $C_m[0,\infty)$ | $B_m[0,\infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $C_\rho[0,\infty)$ | $B_\rho[0,\infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $C[0,\infty)$ | $[0,\infty)$ da tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $C(X)$ | $X$ de sürekli fonksiyonlar uzayı |

| **Simge** | **Açıklama** |
|---|---|
| $C_m^*[0,\infty)$ | $C_m[0,\infty)$ dan olan ve $\lim_{x\to\infty}\frac{\lvert f(x)\rvert}{1+x^m}<\infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı |
| $C_\rho^0[0,\infty)$ | $C_\rho[0,\infty)$ dan olan ve $\lim_{x\to\infty}\frac{\lvert f(x)\rvert}{\rho(x)}<\infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı |
| $\lVert\cdot\rVert_m$ | $C_m[0,\infty)$ ve $B_m[0,\infty)$ uzaylarında $\lVert\cdot\rVert_m=\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{\lvert\cdot\rvert}{1+x^m}$ ile tanımlı olan norm |
| $\lVert\cdot\rVert_\rho$ | $C_\rho[0,\infty)$ ve $B_\rho[0,\infty)$ uzaylarında $\lVert\cdot\rVert_\rho=\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{\lvert\cdot\rvert}{\rho(x)}$ ile tanımlı olan norm |
| $\omega(f;\delta)$ | Süreklilik modülü |
| $\Omega(f;\delta)$ | $C_\rho^0[0,\infty)$ uzayındaki ağırlıklı süreklilik modülü |
| $\Omega_m(f;\delta)$ | $C_m^*[0,\infty)$ uzayındaki ağırlıklı süreklilik modülü |
| $(A_n)$ | $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $A_n$ operatörlerinin dizisi |
| $[r]_q$ | $r$ tamsayısının $q$ - genelleşmesi |
| $[k]_q!$ | $\begin{cases}[1]_q[2]_q\cdots[r]_q, & r\geq 1\\ 1, & r=1\end{cases}$ |
| $\begin{bmatrix} n\\ r\end{bmatrix}_q$ | $q$ - binom katsayıları |

| **Simge** | **Açıklama** |
|---|---|
| $(x,q)_n$ | $\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-q^s x\right)$ |
| $\dfrac{1}{(x,q)_n}$ | $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k$ |
| $D_q f$ | $f$ fonksiyonunun $q$ türevi |
| $\left(L_{n,q}\right)$ | $q$ - Meyer-König ve Zeller operatörleri dizisi |
| $\left(S_{n,q}\right)$ | $q$ - Szasz-Mirakjan operatörleri dizisi |
| $f\left[x_0, x_1, \cdots, x_n\right]$ | $f$ fonksiyonunun bölünmüş farkları |
| $E(z)$ | $e^z$ üstel fonksiyonunun $q$ -genelleşmesi |

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında daha kolay bilgi elde etmenin bir yolunu verir. Bu nedenle 1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir, [1]. Bu ifade yaklaşımlar teorisinin temelini teşkil etmektedir. Daha sonra 1912 yılında Bernstein, Weierstrass ın bu ifadesinin bir ispatı olarak, bir $f$ fonksiyonuna yakınsayan polinomları, toplam biçiminde lineer operatörler dizisi şeklinde göstermiş ve böylece lineer operatörler teorisinin oluşmasını sağlamıştır, [2]. 1951 yılında Bohman lineer pozitif operatörlerin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu gerçeklemesi gerektiğini ifade ve ispat etmiştir, [3]. Daha sonra 1953 yılında Korovkin, Bohman ın bu ifadesini $[a,b]$ aralığına genellemiştir, [4]. Bohman ve Korovkin teoremleri lineer pozitif operatörler teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Bu teoremlerin şartlarını sağlayan çok sayıda operatör tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Yaklaşımlar teorisinde $q$- genelleşme kavramı ise ilk kez Lupaş tarafından 1987 yılında yapılmıştır, [5]. Lupaş, Bernstein polinomlarının bir $q$ tipli genelleşmesini yapmıştır. Daha sonra, 1996 yılında, Phillips klasik Bernstein polinomlarının farklı bir $q$ tipli genelleşmesini tanımlamıştır. Bu genelleşme bu gün $q$-Bernstein polinomları olarak literatüre geçmiştir. Ayrıca Phillips, $q$-Bernstein polinomlarının yaklaşım özelliklerini incelemiştir, [6].

1960 yılında Meyer-König ve Zeller tarafından

$$M_n(f;x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f\left(\dfrac{k}{n+k+1}\right)\dbinom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}, & 0\le x<1 \text{ ise}\\ f(1) & , \quad x=1 \text{ ise}\end{cases} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan Meyer-König ve Zeller operatörlerinin [7], $q$-genelleşmesi ilk olarak 2000 yılında Trif tarafından tanımlanmış, yaklaşım ve monotonluk özellikleri incelenmiştir, [8].

(1.1) Meyer-König ve Zeller operatörlerinin farklı bir genelleşmesini ise 2007 yılında Rempulska ve Skorupka tanımlamışlardır. Bu operatörler sırasıyla

$1 \leq b_n < b_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b_n)$ için

$$M_n(f, b_n; x) = \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır. Rempulska ve Skorupka ağırlıklı uzaylarda diferensiyellenebilir fonksiyonlar için bu operatörlerin bazı yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir, [9].

2012 yılında Erencin, İnce ve Olgun (1.2) operatörlerinin $q$-genelleşmesini tanımlamış ve ağırlıklı uzaylarda bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Bu operatörler ise

$(b_n)$ pozitif artan ve sınırsız bir dizi olmak üzere $q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, b_n)$ için

$$L_{n,q}(f; x) = \prod_{s=0}^{n} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanmıştır, [10].

2006 yılında Szasz-Mirakjan operatörlerinin [11], $0 \leq x < \dfrac{b_n}{(1-q)[n]_q}$, $f \in C[0, \infty)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ olmak üzere

$$S_{n,q}(f; x) = E\left(-\frac{[n]_q x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q}\right) \frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q! b_n^k} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanan bir $q$- genelleşmesi Aral tarafından tanımlanarak, yaklaşım özellikleri verilmiştir, [12]. Daha sonra Aral ve Gupta, $q$-türev yardımıyla bu operatörlerin farklı özelliklerini çalışmışlardır, [12,13].

2010 yılında Mahmudov tarafından Szasz-Mirakjan operatörlerinin, $x \in [0,\infty)$, $0 < q < 1$ ve $f \in C[0,\infty)$ olmak üzere

$$S_{n,q}(f;x) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+(1-q)q^j[n]x\right)} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{q^{k-2}[n]}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]^k x^k}{[k]!} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanan farklı bir $q$-genelleşmesi tanımlanmış ve ağırlıklı uzaylarda bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir, [14].

Operatörlerin $q$ genelleşmelerini çalışmaktaki amaç $q$ nun seçimiyle daha iyi bir yaklaşım derecesi elde etmektir. Bu nedenle operatörlerin $q$ genelleşmeleri yapılırken $q = 1$ seçildiğinde klasik operatöre dönüşmesine dikkat edilir.

Bu tezde ilk olarak, Erencin, İnce ve Olgun tarafından tanımlanan $q$- Meyer- König ve Zeller operatörleri tanıtılarak, bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenecek, diferensiyel denklemlere bir uygulaması ve Stancu- tip kalanı verilecektir. Daha sonra, Mahmudov tarafından tanımlanan $q$- Szasz- Mirakjan operatörlerinin, ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenecek ve son olarakta bu operatörler için bir Voronovskaja- tip sonuç verilecektir.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde lineer pozitif operatörler ve sahip olduğu temel özellikler verilecektir.

### 2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım [15]:

$X$ ve $Y$ normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer $X$ den alınmış herhangi $f$ fonksiyonuna $Y$ de bir $g$ fonksiyonu karşılık getiren bir $L$ kuralı varsa bu $L$ kuralına $X$ den $Y$ ye bir operatör denir.

$f \in X$ , $g \in Y$ ve $x$, $g$ nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f;x) = g(x)$$

ya da daha açık biçimde; $t$, $f$ nin $x$, $g$ nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L\big(f(t);x\big) = g(x)$$

şeklinde gösterilir.

2.1.2 Tanım [15]:

$L : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $L$ operatörü $\forall f_1, f_2 \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1;x) + \beta L(f_2;x)$$

koşulunu sağlıyor ise, $L$ operatörüne lineer operatör denir.

2.1.3. Tanım [15]:

$L : X \to Y$ bir operatör ve $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ gerçekleniyorsa $L$ operatörüne pozitif operatör denir. Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan $L$ operatörüne, lineer pozitif operatör denir.

2.1.4. Lemma [15]:

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. $f, g \in X$ olmak üzere $f \le g$ ise $L(f;x) \le L(g;x)$ dir. Buna $L$ lineer operatörünün monotonluk özelliği denir.

2.1.5. Lemma [15]:

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f;x)| \le L(|f|;x)$$

dir.

2.1.6. Tanım [16]:

$[a,b]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilir. $C[a,b]$,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

normu ile bir lineer normlu uzaydır.

2.1.7. Tanım [17,18]:

$x \in [0,\infty)$ ve $m > 0$ için

$$|f(x)| \le M_f (1 + x^m)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı $B_m[0,\infty)$ ile gösterilir. Burada $M_f$, $f$ fonksiyonuna bağlı pozitif bir sabittir

$B_m[0,\infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı da $C_m[0,\infty)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle

$$C_m[0,\infty) := B_m[0,\infty) \cap C[0,\infty)$$

dir. Burada $C[0,\infty)$, $[0,\infty)$ daki sürekli fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca $1+x^m$ ye ağırlık fonksiyonu, $B_m[0,\infty)$ ve $C_m[0,\infty)$ uzaylarına da ağırlıklı uzaylar denir.

$C_m[0,\infty)$ uzayında

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)|}{1+x^m}<\infty$$

koşulunu gerçekleyen tüm $f$ fonksiyonlarının uzayı ise $C_m^*[0,\infty)$ ile gösterilir.

Açıktır ki $C_m^*[0,\infty)\subset C_m[0,\infty)\subset B_m[0,\infty)$ dır. $B_m[0,\infty)$ ve $C_m[0,\infty)$ uzayı

$$\|f\|_m = \sup_{x\in[0,\infty)}\frac{|f(x)|}{1+x^m}$$

normu ile birer lineer normlu uzaydır.

Burada özel olarak $m=2$ seçilirse, $\rho(x)=1+x^2$ olmak üzere $B_2[0,\infty)=B_\rho[0,\infty)$, $C_2[0,\infty)=C_\rho[0,\infty)$ ve $C_2^*[0,\infty)=C_\rho^0[0,\infty)$ şeklinde gösterilir.

2.1.8. Tanım [19]:

$f\in C[a,b]$ olsun. Herhangi bir $\delta>0$ için

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{t,x\in[a,b]\\|t-x|\le\delta}}|f(t)-f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

2.1.9. Lemma [19]:

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i ) $\omega(f;\delta)\ge 0$

ii ) $\delta_1 \le \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$

iii ) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \le m\omega(f;\delta)$

iv ) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\omega(f;\delta)$

v ) $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega(f;\delta) = 0$

vi ) $|f(t) - f(x)| \le \omega(f;|t-x|)$

vii ) $|f(t) - f(x)| \le \left(\dfrac{|t-x|}{\delta} + 1\right)\omega(f;\delta)$

**2.2. $q$ Analizi**

2.2.1 Tanım [20]:

Herhangi sabit $q > 0$ reel sayısı için negatif olmayan bir $r$ tamsayısının, $q$-genelleşmesi $[r]_q$ ve $q$- faktöriyeli $[r]_q!$ ile gösterilir ve sırasıyla

$$[r]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^r}{1-q} & ,q \neq 1 \\ r & ,q = 1 \end{cases}$$

ve

$$[r]_q! = \begin{cases} [1]_q [2]_q \dots [r]_q & ,\ r \ge 1 \\ 1 & ,\ r = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$(x,q)_n = \prod_{s=0}^{n-1} \left(1 - q^s x\right) \tag{2.1}$$

ve $q$- binom katsayıları da

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[r]_q![n-r]_q!}, \quad \mathrm{n} \geq r \geq 0$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca

$$\frac{1}{(x,q)_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k, \quad |x| < 1 \tag{2.2}$$

olup, $k \geq 0$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$[k]_q = q[k-1]_q + 1 \tag{2.3}$$

$$[k]_q = q^2[k-2]_q + q + 1 \tag{2.4}$$

$$[k]_q = q^3[k-3]_q + q^2 + q + 1 \tag{2.5}$$

2.2.2. Tanım [20]:

Bir $f$ fonksiyonunun $q$- türevi $D_q f$ ile gösterilir ve

$$(D_q f)(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad x \neq 0, \quad (D_q f)(0) := \lim_{x \to 0} (D_q f)(x) \tag{2.6}$$

olarak tanımlıdır.

Belirtelim ki

$$\lim_{q \to 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

olur. Yani $q \to 1$ durumunda klasik türev tanımına denktir. Ayrıca çarpımın ve bölümün türevi

$$D_q(u(x)v(x)) = D_q(u(x))v(x) + u(qx)D_q(v(x)) \tag{2.7}$$

ve

$$D_q \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(qx) D_q \left(u(x)\right) - u(qx) D_q \left(v(x)\right)}{v(x) v(qx)} \tag{2.8}$$

olup, özel olarak $f(x) = x^n$ için

$$D_q x^n = [n]_q \, x^{n-1} \tag{2.9}$$

olur.

# 3. $q$- MEYER- KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ

Bu bölümde $q$- Meyer- König ve Zeller operatörlerinin tanımı, yaklaşım özellikleri, diferansiyel denklemlere uygulanması ve Stancu tip kalanı verilecektir.

## 3.1. $q$- Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Tanımı

3.1.1. Tanım [10]:

$n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$, $(b_n)$ artan ve sınırsız pozitif bir sayı dizisi ve $x \in [0, b_n)$ olsun.

$$L_{n,q}(f,x) = P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left( \frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n \right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left( \frac{x}{b_n} \right)^k \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan operatörler, Meyer-König ve Zeller operatörlerinin $q$-genelleşmesi olarak adlandırılır. Burada $P_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^{n} \left( 1 - q^s \frac{x}{b_n} \right)$ dir.

Açıktır ki $x \in [0, b_n)$ ve $q \in (0,1)$ için (3.1) ile tanımlı $L_{n,q}$ operatörleri lineer ve pozitiftir.

$(b_n)$ sınırsız bir dizi olduğundan $L_{n,q}$ operatörlerinin tanım bölgesi $[0, b_n)$, $n \to \infty$ için sonsuza genişler. Bu durumda $L_{n,q}$ operatörlerinin yaklaşım özellikleri maksimum norm yardımıyla incelenemez. Bu yüzden ağırlıklı norm ile pozitif yarı eksen üzerinde sürekli fonksiyonların ağırlıklı uzaylarında bazı yaklaşım özellikleri incelenecektir.

## 3.2. $q$- Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

3.2.1. Lemma [10]:

$n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$ ve $x \in [0, b_n)$ olsun. Bu durumda (3.1) ile verilen $L_{n,q}$ operatörleri için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

$$L_{n.q}(1;x)=1 \tag{i}$$

$$L_{n.q}(t;x)=x \tag{ii}$$

$$x^2 \leq L_{n,q}\left(t^2;x\right) \leq qx^2+\frac{b_n}{[n]_q}x \tag{iii}$$

*İspat:*

(2.2) de $n$ yerine $n+1$ ve $x$ yerine $\frac{x}{b_n}$ alınırsa,

$$\frac{1}{(x,q)_{n+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k=\frac{1}{P_{n,q}(x)}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} L_{n,q}(1;x) &= P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= P_{n,q}(x)\frac{1}{P_{n,q}(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

eşitliği görülür ve

$$\begin{aligned} L_{n,q}(t;x) &= P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= P_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}b_n\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \\ &= xP_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q![n]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{n,q}\left(t;x\right) &= xP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[k\right]_q!\left[n\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\\ &= xP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\\ &= xP_{n,q}\left(x\right)\frac{1}{P_{n,q}\left(x\right)}\\ &= x\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}L_{n,q}\left(t^2;x\right) &= P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q^2}{\left[n+k\right]_q^2}b_n^2\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\\ &= P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q}{\left[n+k\right]_q}b_n^2\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-1\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\end{aligned}$$

(2.3) den

$$\begin{aligned}L_{n,q}\left(t^2;x\right) &= qP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{b_n^2}{\left[n+k\right]_q}\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-2\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2}\left(\frac{x}{b_n}\right)^2\\ &\quad+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{\left[n+k\right]_q}\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-1\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)\\ &= qx^2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k\right]_q!}\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-2\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2}\\ &\quad+b_nxP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k\right]_q}\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-1\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{n,q}\left(t^2;x\right) &= qx^2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+2\right]_q}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\\ &\quad+b_nxP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+1\right]_q}\begin{bmatrix}n+k\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\end{aligned}\qquad(3.2)$$

$\left[n+k+1\right]_q < \left[n+k+2\right]_q$, $\left[n\right]_q < \left[n+k+1\right]_q$ olduğundan $\dfrac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+2\right]_q} < 1$ ve

$\dfrac{1}{\left[n+k+1\right]_q} < \dfrac{1}{\left[n\right]_q}$ dir. Bunları (3.2) de kullanırsak

$$L_{n,q}\left(t^2;x\right) \le qx^2 + \frac{b_n}{\left[n\right]_q}x \tag{3.3}$$

bulunur. Yine benzer şekilde (3.2) de $\left[n+k+1\right]_q = \dfrac{\left[n+k+2\right]_q - 1}{q}$ eşitliği ve

$\left[n+k+1\right]_q < \left[n+k+2\right]_q$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_{n,q}\left(t^2;x\right) \ge{}& qx^2 P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+2\right]_q - 1}{q\left[n+k+2\right]_q}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ b_n x P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+2\right]_q}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
={}& x^2 P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&- x^2 P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+2\right]_q}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ b_n x P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+2\right]_q}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. (3.4) eşitsizliğinin sağ tarafındaki toplamın son kısmı $\dfrac{x}{b_n} \in \left[0,1\right)$ ile çarpılırsa

$$L_{n,q}\left(t^2;x\right) \ge x^2 \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.5) den

$$x^2 \le L_{n,q}\left(t^2;x\right) \le qx^2 + \frac{b_n}{\left[n\right]_q}x$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.2. Lemma [10]:

$n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$ ve $x \in [0, b_n)$ olsun. Bu durumda (3.1) ile tanımlı $L_{n,q}$ operatörü için

$$\begin{aligned} L_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right) \le \left(q_n^6+6q_n-7\right)x^4 \\ +\left[\left(1+[2]_{q_n}+[3]_{q_n}\right)q_n^3-4\left(1+[2]_{q_n}\right)+6\right]\frac{b_n}{[n]_{q_n}}x^3 \\ +\left[\left(1+[2]_{q_n}+[2]_{q_n}^2\right)q_n\right]\frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2}x^2+\frac{b_n^3}{[n]_{q_n}^3}x \end{aligned} \tag{3.6}$$

gerçeklenir.

*İspat:*

$$\begin{aligned} L_{n,q}\left((t-x)^4;x\right) &= L_{n,q}\left(t^4;x\right)-4xL_{n,q}\left(t^3;x\right)+6x^2L_{n,q}\left(t^2;x\right) \\ &\quad -4x^3L_{n,q}\left(t;x\right)+x^4L_{n,q}\left(1;x\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

olduğu biliniyor. Böylece

$$\begin{aligned} L_{n,q}\left(t^3;x\right) &= P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[k]_q^3}{[n+k]_q^3}b_n^3\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= P_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q^2}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned} \tag{3.8}$$

olup (3.8) eşitliğinde (2.3) kullanılırsa

$$L\left(t^3;x\right)=P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q\,q[k-1]_q}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$=qP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[k]_q}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-2]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(q[k-1]_q+1\right)}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

$$L\left(t^3;x\right)=qP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[k]_q}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-2]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+qP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-2]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \qquad (3.9)$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

(2.4), (3.9) eşitliğinde kullanılırsa

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right)=q^3P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-3]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+q\left(q+2\right)P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-2]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[n+k]_q^2}b_n^3\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamın birinci kısmında $k$ yerine $k+3$, ikinci kısmında $k$ yerine $k+2$ ve üçüncü kısmında $k$ yerine $k+3$ alınırsa

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right)=q^3P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+2\right]_q\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q^2}b_n^3\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^3$$
$$+q\left(q+2\right)P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+2\right]_q^2}b_n^3\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^2 \tag{3.10}$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+1\right]_q^2}b_n^3\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(\frac{x}{b_n}\right)$$

bulunur. (3.10) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamın birinci kısmında

$\left[n+k+2\right]_q=\dfrac{\left[n+k+3\right]_q-1}{q}$ eşitliği, ikinci kısmında $\dfrac{1}{\left[n+k+2\right]_q^2}>\dfrac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}$

eşitsizliği ve üçüncü kısımda $\dfrac{1}{\left[n+k+1\right]_q^2}>\dfrac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right)\geq q^2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3$$
$$-q^2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3$$
$$+q^2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2b_n \tag{3.11}$$
$$+2q\,P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2b_n$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k xb_n^2$$

bulunur. (3.11) eşitsizliğinin üçüncü kısımda $x^2b_n>x^3$ olduğu dikkate alınırsa

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right)\geq q^2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3$$
$$+2qP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2b_n \tag{3.12}$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k xb_n^2$$

elde edilir. (3.12) eşitsizliğinin birinci ve ikinci toplam ifadesinde $\left[n+k+1\right]_q=\dfrac{\left[n+k+3\right]_q-q-1}{q^2}$ eşitliği kullanılırsa

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right)\geq P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3$$
$$-\left(1+q\right)P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3$$
$$+\frac{2}{q}P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2b_n \tag{3.13}$$
$$-2\frac{\left(1+q\right)}{q}P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2b_n$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k xb_n^2$$

olur. (3.13) eşitsizliği düzenlenirse Lemma 3.2.1 (i) den

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right)\geq x^3-\left(1+q\right)P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3$$
$$-2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2b_n$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+3\right]_q^2}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k xb_n^2$$

olup $xb_n^2 > x^2 b_n$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} L_{n,q}\left(t^3;x\right) \geq x^3 - (1+q)P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[n+k+3]_q}\frac{[n+k]_q!}{[n]_q![k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3 \\ -P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[n+k+3]_q^2}\frac{[n+k]_q!}{[n]_q![k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.14) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son toplamda $x^2 b_n > x^3$,

$\dfrac{1}{[n+k+3]_q^2} < \dfrac{1}{[n+k+3]_q}$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right) \geq x^3 - (2+q)P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[n+k+3]_q}\frac{[n+k]_q!}{[n]_q![k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) eşitsizliğinde $\dfrac{1}{[n+k+3]_q} < \dfrac{1}{[n]_q}$ eşitsizliği kullanılırsa Lemma 3.2.1 (i) den

$$L_{n,q}\left(t^3;x\right) \geq x^3 - (2+q)x^2\frac{b_n}{[n]_q} \tag{3.16}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} L_{n,q}\left(t^4;x\right) &= P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[k]_q^4}{[n+k]_q^4}b_n^4\frac{[n+k]_q!}{[n]_q![k]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= P_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]_q^3}{[n+k]_q^3}b_n^4\frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q![k-1]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned}$$

olup (2.3) den

$$L_{n,q}\left(t^4;x\right)=qP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q^2}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-2\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q^2}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-1\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \tag{3.17}$$

bulunur. (3.17) nin sağ tarafındaki birinci toplamda (2.4) ve (3.17) nin sağ tarafındaki ikinci toplamda (2.3) kullanılırsa

$$L_{n,q}\left(t^4;x\right)=q^3P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-3\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+q\left(q+2\right)P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-2\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \tag{3.18}$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-1\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

elde edilir. (3.18) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci toplamında (2.5), ikinci toplamda (2.4) ve üçüncü toplamda da (2.3) kullanırsa,

$$L_{n,q}\left(t^4;x\right)=q^6P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-4\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+\left(q^5+2q^4+3q^3\right)P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-3\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$
$$+\left(q^3+3q^2+3q\right)P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-2\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \tag{3.19}$$
$$+P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k\right]_q^3}b_n^4\frac{\left[n+k-1\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k-1\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

bulunur. (3.19) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamın birinci kısmında $k$ yerine $k+4$, ikinci kısmında $k$ yerine $k+3$, üçüncü kısmında $k$ yerine $k+2$ ve dördüncü kısımda $k$ yerine $k+1$ alınırsa,

$$L_{n,q}\left(t^4;x\right)=q^6x^4P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+3\right]_q\left[n+k+2\right]_q\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+4\right]_q^3}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

$$+\left(q^5+2q^4+3q^3\right)x^3b_nP_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+2\right]_q\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q^3}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

$$+\left(q^3+3q^2+3q\right)x^2b_n^2P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+2\right]_q^3}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

$$+xb_n^3P_{n,q}\left(x\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left[n+k+1\right]_q^3}\frac{\left[n+k\right]_q!}{\left[n\right]_q!\left[k\right]_q!}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\left[n+k+3\right]_q\left[n+k+2\right]_q\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+4\right]_q^3}<1\,,$$

$$\frac{\left[n+k+2\right]_q\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+3\right]_q^3}<\frac{1}{\left[n\right]_q}\,,$$

$$\frac{\left[n+k+1\right]_q}{\left[n+k+2\right]_q^3}<\frac{1}{\left[n\right]_q^2}$$

ve

$$\frac{1}{\left[n+k+1\right]_q^3}<\frac{1}{\left[n\right]_q^3}$$

oldukları göz önüne alınırsa,

$$L_{n,q}\left(t^4;x\right)\le q^6x^4+x^3\frac{b_n}{\left[n\right]_q}\left(q^5+2q^4+3q^3\right)+x^2\frac{b_n^2}{\left[n\right]_q^2}\left(q^3+3q^2+3q\right)+x\frac{b_n^3}{\left[n\right]_q^3}\qquad(3.20)$$

elde edilir. Lemma 3.2.1 (i), (ii), (iii), (3.16) ve (3.20) den (3.7) düzenlenirse,

$$L_{n,q}\left((t-x)^4;x\right) \le \left(q^6+6q-7\right)x^4$$
$$+\left[\left(1+1+q+1+q+q^2\right)q^3-4\left(2+q\right)+6\right]x^3\frac{b_n}{[n]_q}$$
$$+\left[\left(1+1+q+1+2q+q^2\right)q\right]x^2\frac{b_n^2}{[n]_q^2}+x\frac{b_n^3}{[n]_q^3}$$
$$=\left(q^6+6q-7\right)x^4$$
$$+\left[\left(1+[2]_q+[3]_q\right)q^3-4\left(1+[2]_q\right)+6\right]x^3\frac{b_n}{[n]_q}$$
$$+\left[\left(1+[2]_q+[2]_q^2\right)q\right]x^2\frac{b_n^2}{[n]_q^2}+x\frac{b_n^3}{[n]_q^3}$$

elde edilir.

$0<q<1$ olacak şekilde bir $q$ seçilirse $\lim\limits_{n\to\infty}[n]_q=\dfrac{1}{1-q}$ dir. Bu yüzden $L_{n,q}$ operatörlerinin yakınsaklığını garanti etmek için $q$ yerine $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0<q_n<1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$ olacak şekilde bir $(q_n)$ dizisi seçilecektir. Böylece

$$L_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right) \le \left(q_n^6+6q_n-7\right)x^4$$
$$+\left[\left(1+[2]_{q_n}+[3]_{q_n}\right)q_n^3-4\left(1+[2]_{q_n}\right)+6\right]\frac{b_n}{[n]_{q_n}}x^3$$
$$+\left[\left(1+[2]_{q_n}+[2]_{q_n}^2\right)q_n\right]\frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2}x^2+\frac{b_n^3}{[n]_{q_n}^3}x$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.3. Önerme [17,18]:

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_n$ lineer pozitif operatörleri için

$$A_n: C_\rho[0,\infty)\to B_\rho[0,\infty)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\left\|A_n(\rho;x)\right\|_\rho \le M_\rho$$

olmasıdır. Burada $\rho(x)=1+x^2$ ve $M_\rho$ bir pozitif sabittir.

3.2.4. Teorem [17,18]:

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $A_n : C_\rho[0,\infty)\to B_\rho[0,\infty)$ lineer pozitif operatörleri verilsin. Eğer $\rho(x)=1+x^2$ olmak üzere $(A_n)$ lineer pozitif operatör dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n\left(t^\nu;x\right)-x^\nu\right\|_\rho=0,\qquad \nu=0,1,2$$

şartı sağlanırsa bu durumda herhangi bir $f\in C_\rho^0[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n(f;x)-f(x)\right\|_\rho=0$$

olur.

3.2.5. Lemma [10]:

$(q_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0<q_n<1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$ olacak şekilde bir dizi olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{[n]_{q_n}}=0$ ise bu durumda $\rho(x)=1+x^2$ olmak üzere $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\left(L_{n,q_n}\right)$, $C_\rho[0,\infty)$ uzayından $B_\rho[0,\infty)$ uzayına giden bir lineer pozitif operatör dizisidir.

*İspat:*

$L_{n,q_n}(\rho;x)=L_{n,q_n}\left(1+t^2;x\right)=L_{n,q_n}(1;x)+L_{n,q_n}\left(t^2;x\right)$ dir. Lemma 3.2.1 (i) ve (iii) den

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{L_{n,q_n}(\rho;x)}{1+x^2} &= \sup_{x\in[0,b_n)}\frac{L_{n,q_n}(1;x)+L_{n,q_n}\left(t^2;x\right)}{1+x^2}\\
&\le \sup_{x\in[0,b_n)}\frac{1+q_nx^2+\dfrac{b_n}{[n]_{q_n}}x}{1+x^2}\\
&=1+q_n+\frac{b_n}{[n]_{q_n}}
\end{aligned}$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} < M$ olacak şekilde bir pozitif $M$ sabiti vardır. Buradan $\sup\limits_{x\in[0,b_n)} \frac{L_{n,q_n}(\rho;x)}{1+x^2} < 1+M$ dir. O halde Önerme 3.2.3 den ispat tamamlanır.

Belirtelim ki,

$q_n = \frac{n}{n+1}$ ve $b_n = \sqrt{n}$ alınırsa Lemma 3.2.5 in şartları sağlanır.

3.2.6 Teorem [10]:

$(q_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < q_n < 1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ ise bu durumda her $f \in C_\rho^0[0,\infty)$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b_n)} \frac{\left|L_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right|}{1+x^2} = 0$$

eşitliği sağlanır.

*İspat:*

Her $n \in \mathbb{N}$ için Önerme 3.2.3 den $L_{n,q_n} : C_\rho[0,\infty) \to B_\rho[0,\infty)$ dir.

$$A_n(f;x) = \begin{cases} L_{n,q_n}(f;x), x \in [0,b_n) \\ f(x) \qquad\quad , x \geq b_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A_n$ operatörünü ele alalım. Teorem 3.2.4 den

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,b_n)} \frac{\left|L_{n,q_n}(t^\nu;x) - x^\nu\right|}{1+x^2} = 0, \qquad \nu = 0,1,2$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 3.2.1 (i), (ii) ve (iii) den

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|L_{n,q_n}\left(t^{\nu};x\right)-x^{\nu}\right|}{1+x^2}=0, \qquad \nu=0,1$$

ve

$$\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|L_{n,q_n}\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2}\le\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|q_nx^2+\dfrac{b_n}{[n]_{q_n}}x-x^2\right|}{1+x^2}$$

$$=\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|\left(q_n-1\right)x^2+\dfrac{b_n}{[n]_{q_n}}x\right|}{1+x^2}$$

$$\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|L_{n,q_n}\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2}\le 1-q_n+\frac{b_n}{[n]_{q_n}}$$

elde edilir. $q_n\in(0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{[n]_{q_n}}=0$ olduğundan son eşitsizlikten

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|L_{n,q_n}\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2}=0$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.7. Teorem [10]:

$(q_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0<q_n<1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$ olacak şekilde bir dizi olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{[n]_{q_n}}=0$ ise bu durumda her $f\in C_{\rho}^{0}[0,\infty)$ için,

$$\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|L_{n,q_n}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{1+x^2}\le 2\omega\left(f;\delta_{n,q_n}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\omega(f;\delta)$, Tanım 2.1.8 ile tanımlanmış süreklilik modülüdür ve $\delta_{n,q_n}=\sqrt{1-q_n+\dfrac{b_n}{[n]_{q_n}}}$ dir.

*İspat:*

$L_{n,q_n}$ operatörünün lineerlik ve monotonluk özellikleri ve Lemma 2.1.5 den

$$\left|L_{n,q_n}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq L_{n,q_n}\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|;x\right) \tag{3.21}$$

olur. Bu durumda Lemma 2.1.9 (vii), Lemma 3.2.1 (i) ve $L_{n,q_n}$ operatörünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}\left|L_{n,q_n}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq L_{n,q_n}\left(\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega\left(f;\delta\right);x\right)\\ &= L_{n,q_n}\left(\omega\left(f;\delta\right);x\right)+L_{n,q_n}\left(\frac{|t-x|}{\delta}\omega\left(f;\delta\right);x\right)\\ &= \omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}L_{n,q_n}\left(\left|t-x\right|;x\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur. $L_{n,q_n}\left(\left|t-x\right|;x\right)$ ifadesinde Cauchy- Schwarz eşitsizliği kullanılırsa, Lemma 3.2.1 (i) den

$$\left|L_{n,q_n}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq \omega\left(f;\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{L_{n,q_n}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}\right)$$

elde edilir. $L_{n,q_n}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)$ ifadesi düzenlenirse Lemma 3.2.1 (i), (ii) ve (iii) den,

$$\begin{aligned}L_{n,q_n}\left(\left(t-x\right)^2;x\right) &= \left[L_{n,q_n}\left(t^2;x\right)-x^2\right]-2x\left[L_{n,q_n}\left(t;x\right)-x\right]\\ &= \left|L_{n,q_n}\left(t^2;x\right)-x^2\right|\\ &\leq \left(1-q_n\right)x^2+\frac{b_n}{[n]_{q_n}}x\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{L_{n,q_n}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\leq 1-q_n+\frac{b_n}{[n]_{q_n}}$$

olur. Eğer $\delta = \delta_{n,q_n} = \sqrt{1-q_n+\frac{b_n}{[n]_{q_n}}}$ seçilirse,

$$\sup_{x\in[0,b_n)} \frac{\left|L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right|}{1+x^2} \leq 2\omega\left(f;\delta_{n,q_n}\right)$$

elde edilir.

3.2.8. Tanım [21]:

$f \in C_\rho^0[0,\infty)$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{|h|\leq\delta,\, x\in[0,b_n)} \frac{\left|f(x+h)-f(x)\right|}{\left(1+h^2\right)\left(1+x^2\right)}$$

şeklinde tanımlı $\Omega(f;\delta)$ ifadesine $f$ fonksiyonunun $f \in C_\rho^0[0,\infty)$ uzayında ağırlıklı süreklilik modülü denir.

3.2.9. Lemma [21]:

$f \in C_\rho^0[0,\infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i ) $\Omega(f;\delta) \geq 0$

ii ) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f;\delta_1) \leq \Omega(f;\delta_2)$

iii ) $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \Omega(f;\delta) = 0$

iv ) $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;m\delta) \leq 2m\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta)$

v ) Herhangi $\lambda > 0$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta)$

vi ) $\left|f(t)-f(x)\right| \leq \left(1+x^2\right)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega\left(f;|t-x|\right)$

vii ) $\left|f(t)-f(x)\right| \le 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;\delta)$

3.2.10. Teorem [10]:

$(q_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0<q_n<1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ ise, her $f \in C_\rho^0[0,\infty)$ için,

$$\sup_{x\in[0,b_n)} \frac{\left|L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^3} \le M\Omega\left(f;K_{n,q_n}^{1/4}\right)$$

sağlanır. Burada $M$, $n$ den bağımsız pozitif bir sabit, $\Omega(f;\delta)$, Tanım 3.2.8 ile tanımlı ağırlıklı süreklilik modülü ve

$$\begin{aligned} K_{n,q_n} = \max\Bigg\{ & q_n^6 + 6q_n - 7, \left[\left(1+[2]_{q_n}+[3]_{q_n}\right)q_n^3 - 4\left(1+[2]_{q_n}\right)+6\right]\frac{b_n}{[n]_{q_n}}, \\ & \left[\left(1+[2]_{q_n}+[2]_{q_n}^2\right)q_n\right]\frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2}, \ \frac{b_n^3}{[n]_{q_n}^3}\Bigg\} \end{aligned}$$

dir.

*İspat:*

$L_{n,q_n}$ operatörünün lineerlik özelliği kullanılarak, Lemma 2.1.5 ve Lemma 3.2.9 (vii) den

$$\begin{aligned} \left|L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right| \le {} & 2\left(1+\delta^2\right)\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta) \\ & \times L_{n,q_n}\left(\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right);x\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$S(x)=\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)$$

seçilirse, bu durumda

i ) $|t-x|\leq\delta_n$ ise $\dfrac{|t-x|}{\delta_n}\leq 1$ olup $S(x)\leq 2\left(1+\delta_n^2\right)$ dir.

ii ) $|t-x|\geq\delta_n$ ise $\dfrac{|t-x|}{\delta_n}\geq 1$ dir. Böylece $1\leq\dfrac{|t-x|}{\delta_n}\leq\dfrac{(t-x)^2}{\delta_n^2}$ olup

$$\begin{aligned}S(x)&\leq\left(\frac{(t-x)^2}{\delta_n^2}+\frac{(t-x)^2}{\delta_n^2}\right)\left(\frac{(t-x)^2}{\delta_n^2}+(t-x)^2\right)\\&=2\frac{(t-x)^2}{\delta_n^2}\left(\frac{(t-x)^2+\delta_n^2(t-x)^2}{\delta_n^2}\right)\\&=2\frac{(t-x)^4}{\delta_n^4}\left(1+\delta_n^2\right)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$S(x)\leq\begin{cases}2\left(1+\delta_n^2\right) & ,|t-x|\leq\delta_n\\ 2\left(1+\delta_n^2\right)\dfrac{(t-x)^4}{\delta_n^4} & ,|t-x|\geq\delta_n\end{cases}$$

olup her $x\in[0,b_n)$ ve $t\in[0,\infty)$ için

$$S(x)\leq 2\left(1+\delta_n^2\right)\left\{1+\frac{(t-x)^4}{\delta_n^4}\right\}\tag{3.23}$$

olur. (3.23) eşitsizliği (3.22) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right|&\leq 4\left(1+\delta^2\right)^2\Omega(f;\delta)\left(1+x^2\right)\left[1+\frac{1}{\delta^4}L_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)\right]\\&\leq 16\Omega(f;\delta)\left(1+x^2\right)\left[1+\frac{1}{\delta^4}L_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)\right]\end{aligned}\tag{3.24}$$

olur. Lemma 3.2.2, (3.24) de kullanılırsa

$$\left|L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right|\le 16\Omega(f;\delta)\left(1+x^2\right)\left[1+\frac{1}{\delta^4}K_{n,q_n}\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\right]$$

elde edilir. $\delta = K_{n,q_n}^{1/4}$ seçilirse bu durumda;

$$\left|L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right|\le 16\Omega\left(f;K_{n,q_n}^{1/4}\right)\left(1+x^2\right)\left[1+\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\right]$$

olup

$$\sup_{x\in[0,b_n)}\frac{\left|L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\le M\Omega\left(f;K_{n,q_n}^{1/4}\right)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.11. Sonuç:

Teorem 3.2.7 de $L_{n,q_n}$ operatörünün $C_\rho[0,\infty)$ uzayındaki yaklaşımının derecesi, süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır. Teorem 3.2.10 da ise $L_{n,q_n}$ operatörünün $C_{\rho^3}[0,\infty)$ uzayındaki yaklaşımının derecesi, ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır.

**3.3. $q$- Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Diferensiyel Denklemlere Uygulanması**

Bu kısımda (3.1) ile verilen $L_{n,q}$ operatörleri için $q$- türevle ilgili bir fonksiyonel diferensiyel denklem verilecektir.

3.3.1. Teorem [10]:

$0<q<1$ için $g_n(t)=\dfrac{q_n t}{b_n-q_n t}$ , $f\in C_\rho^0[0,\infty)$ ve $x\in[0,b_n)$ olsun. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için (3.1) ile tanımlı $L_{n,q_n}$ operatörü

$$\frac{q^n}{[n]_q} x\left(1-\frac{x}{b_n}\right) D_q L_{n,q}(f;x)-\left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) L_{n,q}(fg_n;x)+\frac{q^n[n+1]_q}{[n]_q b_n} x L_{n,q}(f;x)=0$$

diferensiyel denklemini sağlar.

*İspat:*

$q$ - türevin tanımından

$$\begin{aligned}
\frac{q^n}{[n]_q} x\left(1-\frac{x}{b_n}\right) D_q L_{n,q}(f;x) &= \frac{q^n}{[n]_q} x\left(1-\frac{x}{b_n}\right)\left[\frac{L_{n,q}(f;x)-L_{n,q}(f;qx)}{(1-q)x}\right] \\
&= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q}\left(1-\frac{x}{b_n}\right) L_{n,q}(f;x) \\
&\quad -\frac{q^n}{(1-q)[n]_q}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s+1}\frac{x}{b_n}\right) \\
&\quad \times\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{x}{b_n}\right)\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s+1}\frac{x}{b_n}\right) &= \left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right)\prod_{s=0}^{n}\left(1-q^{s}\frac{x}{b_n}\right) \\
&= \left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\frac{q^n}{[n]_q} x\left(1-\frac{x}{b_n}\right) D_q L_{n,q}(f;x) &= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q}\left(1-\frac{x}{b_n}\right) L_{n,q}(f;x) \\
&\quad -\frac{q^n}{(1-q)[n]_q}\left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \qquad (3.25) \\
&\quad \times\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right)\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

yazılabilir. $q$ tamsayılarının tanımından

$$q^k = (q-1)[k]_q + 1$$

eşitliği (3.25) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{q^n}{[n]_q} x\left(1-\frac{x}{b_n}\right) D_q L_{n,q}(f;x) &= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q}\left(1-\frac{x}{b_n}\right) L_{n,q}(f;x) \\
&+\frac{q^n}{[n]_q}\left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q [k]_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&-\frac{q^n}{(1-q)[n]_q}\left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{q^n}{[n]_q} x\left(1-\frac{x}{b_n}\right) D_q L_{n,q}(f;x) &= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q}\left[\left(1-\frac{x}{b_n}\right)-\left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right)\right] L_{n,q}(f;x) \\
&+\left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \\
&\times \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \frac{x}{b_n}\left(q^{n+1}-1\right) L_{n,q}(f;x) + \left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= -\frac{q^n [n+1]_q}{[n]_q b_n} x L_{n,q}(f;x) + \left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g_n\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) = \frac{q^n [k]_q}{[n]_q}$ olup bu da ispatı tamamlar. Yani,

$$\frac{q^n}{[n]_q}x\left(1-\frac{x}{b_n}\right)D_qL_{n,q}(f;x)+\frac{q^n[n+1]_q}{[n]_q b_n}xL_{n,q}(f;x)-\left(1-q^{n+1}\frac{x}{b_n}\right)L_{n,q}(fg_n;x)=0$$

olur.

## 3.4. $q$ -Meyer- König ve Zeller Operatörlerinin Bir Stancu- Tip Kalanı

Bu bölümde bölünmüş farklar yardımıyla $L_{n,q_n}$ operatörü için Stancu- tip kalanı verilecektir.

3.4.1. Tanım [13]:

$x_0, x_1, \cdots, x_n$, $f$ in tanım kümesinin ayrık noktaları olmak üzere $f$ fonksiyonunun bölünmüş farkları

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]=\sum_{r=0}^{n}\frac{f(x_r)}{\prod\limits_{j\neq r}^{n}(x_r-x_j)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $r$ sabit kalır ve $j$, 0 dan $n$ e kadar $r$ dışındaki tüm değerleri alır.

3.4.2. Teorem [10]:

Eğer $x\in[0,b_n)\setminus\left\{\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n;\ k=0,1,2...\right\}$ ise bu durumda

$$L_{n,q}(f;x)-f(x)=b_nxP_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{[n+k+1]_q}f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]$$
$$\times\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

sağlanır.

*İspat:*

$L_{n,q}$ operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned} L_{n,q}(f;x)-f(x) &= P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)\left\{f(x)-f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)\right\}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= -P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f(x)-f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)\right\}\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned} \tag{3.26}$$

yazılır.

$$\begin{aligned} f(x)-f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right) &= \left(x-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)\left\{\frac{f(x)}{x-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n}+\frac{f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)}{\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n-x}\right\} \\ &= \left(x-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n=\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q b_n$$

eşitlikleri (3.26) da kullanılırsa,

$$\begin{aligned} L_{n,q}(f;x)-f(x) &= P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad -P_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]x\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= b_nP_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad -xP_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{n,q}(f;x)-f(x) &= b_n\frac{x}{b_n}P_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty} f\left[x,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&\quad -xP_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty} f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= xP_{n,q}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\left\{f\left[x,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]-f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]\right\} \\
&\quad \times\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

elde edilir. Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
f\left[x,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]-f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right] &= \frac{f(x)}{x-\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n}+\frac{f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right)}{\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n-x} \\
&\quad -\frac{f(x)}{x-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n}-\frac{f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)}{\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n-x} \\
&= \frac{f(x)\left(\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)}{\left(x-\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right)\left(x-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)} \\
&\quad +\frac{f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right)}{\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n-x}-\frac{f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)}{\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n-x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left[x,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]-f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]=&\left\{\frac{f(x)}{\left(x-\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right)\left(x-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)}\right.\\
&+\frac{f\left(\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right)}{\left(\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n-x\right)\left(\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)}\\
&\left.+\frac{f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right)}{\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n-x\right)\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n-\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right)}\right\}\\
&\times\left\{\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right\}\\
&=f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]\\
&\times\left\{\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right\}b_n
\end{aligned}
$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında

$$
\begin{aligned}
\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}-\frac{[k]_q}{[n+k]_q}&=\frac{\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\frac{1-q^{n+k}}{1-q}-\frac{1-q^{k}}{1-q}\frac{1-q^{n+k+1}}{1-q}}{[n+k]_q[n+k+1]_q}\\
&=\frac{\frac{q^k\left(-q^n(1-q)+1-q\right)}{(1-q)(1-q)}}{[n+k]_q[n+k+1]_q}\\
&=\frac{q^k[n]_q}{[n+k]_q[n+k+1]_q}
\end{aligned}
$$

eşitliği kullanılırsa,

$$f\left[x,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]-f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n\right]=f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]$$
$$\times\frac{q^k[n]_q}{[n+k]_q[n+k+1]_q}b_n \tag{3.28}$$

elde edilir. Son olarak (3.28), (3.27) de yerine yazılırsa,

$$L_{n,q}(f;x)-f(x)=b_nxP_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{[n+k+1]_q}f\left[x,\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n,\frac{[k+1]_q}{[n+k+1]_q}b_n\right]$$
$$\times\begin{bmatrix}n+k-1\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

eşitliğini elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar.

3.4.3. Tanım [15]:

$(a,b)$ aralığında tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonunun bu aralıkta olan keyfi $(n+1)$ noktadaki $n$- inci bölünmüş farkları pozitif ise $f(x)$ fonksiyonuna $n$- inci basamaktan konveks, negatif ise $f(x)$ fonksiyonuna $n$- inci basamaktan konkav, sıfır ise $f(x)$ fonksiyonuna $n$- inci basamaktan sabit fonksiyon denir.

3.4.4. Sonuç:

Eğer $f$, $[0,b_n)$ aralığında konveks ise bu durumda $0<q<1$, $x\in[0,b_n)\setminus\left\{\frac{[k]_q}{[n+k]_q}b_n;\quad k=0,1,2,\cdots\right\}$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $L_{n,q_n}(f;x)-f(x)\geq 0$ dır.

3.4.5. Sonuç:

(3.1) ile tanımlı $L_{n,q}$ operatörü için $q=1$ durumunda da tüm sonuçlar geçerlidir, [9].

# 4. $q$- SZASZ- MİRAKJAN OPERATÖRLERİ

Bu bölümde ağırlıklı uzaylarda $q$- Szasz- Mirakjan operatörlerinin tanımı, yaklaşım özellikleri ve Voronovskaja tip sonucu verilecektir.

## 4.1. $q$-Szasz- Mirakjan Operatörlerinin Tanımı

4.1.1. Tanım [20]:

$e^z$ üstel fonksiyonunun iki tane $q$- genelleşmesi vardır:

$$e(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{[k]_q!}=\frac{1}{\left(1-(1-q)z\right)_q^{\infty}}, \quad |z|<\frac{1}{1-q}, \quad |q|<1,$$

ve

$$\begin{aligned} E(z)&=\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+(1-q)q^j z\right) \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}q^{k(k-1)/2}\frac{z^k}{[k]_q!}=\left(1+(1-q)z\right)_q^{\infty}, \quad |q|<1 \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $q$-türev tanımından

$$D_qE(ax)=aE(qax) \tag{4.1}$$

dir.

4.1.2. Tanım [14]:

$q\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$ ve $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $q$- Szasz- Mirakjan operatörleri

$$\begin{aligned} S_{n,q}(f;x)&=\frac{1}{E\left([n]_q x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)q^{k(k-1)/2}\frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!} \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)s_{nk}(q;x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$s_{nk}(q;x)=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^k x^k}{\left[k\right]_q!},\qquad n=1,2,...$$

olup

$$\sum_{k=0}^{\infty}s_{nk}(q;x)=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{\left(\left[n\right]_q x\right)^k}{\left[k\right]_q!}=1 \tag{4.3}$$

olur ve açıktır ki $S_{n,q}$ operatörü lineer ve pozitiftir.

4.1.3. Lemma [14]:

$q\in(0,1)$ olsun. Bu durumda (4.2) ile verilen $S_{n,q}$ operatörleri için

$$S_{n,q}\left(t^{m+1};x\right)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{x}{q^{2j-m-1}\left[n\right]_q^{m-j}}S_{n,q}\left(t^j;x\right) \tag{4.4}$$

rekürans formülü geçerlidir.

*İspat:*

(4.2) de $\left[k\right]_q=\left[k-1\right]_q+q^{k-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
S_{n,q}\left(t^{m+1};x\right)&=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q^{m+1}}{q^{(k-2)(m+1)}\left[n\right]_q^{m+1}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^k x^k}{\left[k\right]_q!}\\
&=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q\left[k\right]_q^m}{q^{(k-2)m}\left[n\right]_q^m}q^{\frac{k(k-1)}{2}-k+1}\frac{\left[n\right]_q^{k-1} x^k}{\left[k-1\right]_q!}\\
&=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=1}^{\infty}q\frac{\left(\left[k-1\right]_q+q^{k-1}\right)^m}{q^{(k-2)m}\left[n\right]_q^m}q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^{k-1} x^k}{\left[k-1\right]_q!}\\
&=\frac{q}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}q^{(k-1)(m-j)}\left[k-1\right]_q^j\frac{1}{q^{(k-2)m}\left[n\right]_q^m}q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^{k-1} x^k}{\left[k-1\right]_q!}
\end{aligned}$$

$$S_{n,q}\left(t^{m+1};x\right)=\frac{q}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{1}{q^{2j-m}\left[n\right]_q^{m-j}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[k-1\right]_q^{j}}{q^{(k-3)j}\left[n\right]_q^{j}}q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^{k-1}x^k}{\left[k-1\right]_q!}$$

$$=\frac{q}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{x}{q^{2j-m}\left[n\right]_q^{m-j}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q^{j}}{q^{(k-2)j}\left[n\right]_q^{j}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^{k}x^k}{\left[k\right]_q!}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{x}{q^{2j-m-1}\left[n\right]_q^{m-j}}S_{n,q}\left(t^{j};x\right)$$

elde edilir.

4.1.4. Lemma [14]:

$q\in(0,1)$ için,

$$S_{n,q}(1;x)=1 \tag{i}$$

$$S_{n,q}(t;x)=qx \tag{ii}$$

$$S_{n,q}\left(t^2;x\right)=qx^2+\frac{q^2}{\left[n\right]_q}x \tag{iii}$$

$$S_{n,q}\left(t^3;x\right)=\frac{q^3x}{\left[n\right]_q^2}+\left(2q^2+q\right)\frac{x^2}{\left[n\right]_q}+x^3 \tag{iv}$$

$$S_{n,q}\left(t^4;x\right)=\frac{q^4x}{\left[n\right]_q^3}+\left(3q^3+3q^2+q\right)\frac{x^2}{\left[n\right]_q^2}+\left(3q+2+\frac{1}{q}\right)\frac{x^3}{\left[n\right]_q}+\frac{x^4}{q^2} \tag{v}$$

eşitlikleri geçerlidir.

*İspat:*

$$S_{n,q}(1;x)=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^{k}x^k}{\left[k\right]_q!}$$

(4.3) den

$$S_{n,q}\left(1;x\right)=1$$

olur.

$$S_{n,q}\left(t;x\right)=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[k\right]_q}{q^{k-2}\left[n\right]_q}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{\left[n\right]_q^k x^k}{\left[k\right]_q!}$$

$$=\frac{1}{E\left(\left[n\right]_q x\right)}\sum_{k=1}^{\infty}q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}q\frac{\left[n\right]_q^{k-1} x^k}{\left[k-1\right]_q!}$$

son eşitlikte $k$ yerine $k+1$ alınırsa (4.3) den

$$S_{n,q}\left(t;x\right)=qx$$

bulunur. (4.4) rekürans formülü kullanılırsa (i) ve (ii) den

$$S_{n,q}\left(t^2;x\right)=\frac{q^2x}{\left[n\right]_q}S_{n,q}\left(1;x\right)+xS_{n,q}\left(t;x\right)$$
$$=\frac{q^2}{\left[n\right]_q}x+qx^2$$

olur. (i), (ii) ve (iii) den

$$S_{n,q}\left(t^3;x\right)=\frac{q^3x}{\left[n\right]_q^2}S_{n,q}\left(1;x\right)+2\frac{qx}{\left[n\right]_q}S_{n,q}\left(t;x\right)+\frac{x}{q}S_{n,q}\left(t^2;x\right)$$

$$=\frac{q^3x}{\left[n\right]_q^2}+\frac{2q^2x^2}{\left[n\right]_q}+\frac{x}{q}\left(qx^2+\frac{q^2x}{\left[n\right]_q}\right)$$
$$=\frac{q^3x}{\left[n\right]_q^2}+\left(2q^2+q\right)\frac{x^2}{\left[n\right]_q}+x^3$$

olup ve (i), (ii), (iii) ve (iv) den

$$S_{n,q}\left(t^4;x\right)=\frac{q^4x}{\left[n\right]_q^3}S_{n,q}\left(1;x\right)+3\frac{q^2x}{\left[n\right]_q^2}S_{n,q}\left(t;x\right)+3\frac{x}{\left[n\right]_q}S_{n,q}\left(t^2;x\right)+\frac{x}{q^2}S_{n,q}\left(t^3;x\right)$$

$$S_{n,q}\left(t^4;x\right)=\frac{q^4x}{[n]_q^3}+3\frac{q^3x^2}{[n]_q^2}+\frac{3x}{[n]_q}\left(qx^2+\frac{q^2x}{[n]_q}\right)+\frac{x}{q^2}\left(\frac{q^3x}{[n]_q^2}+\left(2q^2+q\right)\frac{x^2}{[n]_q}+x^3\right)$$

$$=\frac{q^4x}{[n]_q^3}+\left(3q^3+3q^2+q\right)\frac{x^2}{[n]_q^2}+\left(3q+2+\frac{1}{q}\right)\frac{x^3}{[n]_q}+\frac{x^4}{q^2}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.5. Lemma [14]:

$(q_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $0<q_n<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}q_n^n=a$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda her $x\in[0,\infty)$ için,

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}\left(t-x;x\right)=\left(a-1\right)x \tag{4.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)=\left(1-a\right)x^2+x \tag{4.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2S_{n,q_n}\left(\left(t-x\right)^4;x\right)=3x^2+6\left(1-a\right)x^3+3\left(1-a\right)^2x^4 \tag{4.7}$$

eşitlikleri sağlanır.

*İspat:*

Lemma 4.1.4 (i), (ii), (iii), (iv) ve (v) den

$$S_{n,q_n}\left(\left(t-x\right)^4;x\right)=S_{n,q}\left(t^4;x\right)-4xS_{n,q}\left(t^3;x\right)+6x^2S_{n,q}\left(t^2;x\right)-4xS_{n,q}\left(t;x\right)+x^4$$

$$=\frac{q^4x}{[n]_q^3}+\left(3q^3+3q^2+q\right)\frac{x^2}{[n]_q^2}+\left(3q+2+\frac{1}{q}\right)\frac{x^3}{[n]_q}+\frac{x^4}{q^2}$$

$$-4x\left(\frac{q^3x}{[n]_q^2}+\left(2q^2+q\right)\frac{x^2}{[n]_q}+x^3\right)+6x^2\left(qx^2+\frac{q^2x}{[n]_q}\right)-4qx^4+x^4$$

$$S_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)=\frac{q^4x}{[n]_q^3}+\left(3q^2+q-q^3\right)\frac{x^2}{[n]_q^2}+\left(2+\frac{1}{q}-q-2q^2\right)\frac{x^3}{[n]_q}$$
$$+x^4\left(\frac{1}{q^2}+2q-3\right) \tag{4.8}$$

bulunur. Böylece $[n]_{q_n}(q_n-1)=q_n^n-1$ olduğundan hipotezden

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}(t-x;x)&=\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}(q_n-1)x\\&=\lim_{n\to\infty}\left(q_n^n-1\right)x\\&=(a-1)x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}\left((t-x)^2;x\right)&=\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\left((1-q_n)x^2+\frac{q_n^2x}{[n]_{q_n}}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-q_n^n\right)x^2+q_n^2x\right)\\&=(1-a)x^2+x\end{aligned}$$

ve (4.8) den

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2S_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q_n^4x}{[n]_{q_n}}+\left(3q_n^2+q_n-q_n^3\right)x^2\right)\\&\quad+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{[n]_{q_n}\left(1-q_n^2\right)(2q_n+1)}{q_n}x^2+\frac{[n]_{q_n}^2(1-q_n)^2(2q_n+1)}{q_n^2}x^4\right)\\&=3x^2+6(1-a)x^3+3(1-a)^2x^4\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.6. Lemma [14]:

Her $0<q<1$, $x\in[0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$ ve $k\geq 0$ için

$$xD_qs_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)=[k]_q\,s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)-xq^{k-1}[n]_q\,s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right) \tag{i}$$

$$q^k s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)=\frac{q}{q+\left(1-q^n\right)x}s_{nk}\left(q;x\right) \tag{ii}$$

$$xD_q S_{n,q}\left(t^m;\frac{x}{q}\right)=\frac{[n]_q}{q\left(q+\left(1-q^n\right)x\right)}S_{n,q}\left(t^{m+1};x\right)-\frac{[n]_q\,x}{q+\left(1-q^n\right)x}S_{n,q}\left(t^m;x\right) \tag{iii}$$

özdeşlikleri geçerlidir.

*İspat:*

(i) Tanım 2.2.2, (2.8), (2.9) ve (4.1) kullanılarak

$$\begin{aligned}
xD_q s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)&=xq^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k}{[k]_q!}\frac{E\left([n]_q\,x\right)[k]_q\,x^{k-1}-q^{k-1}[n]_q\,x^kE\left([n]_q\,x\right)}{q^kE\left([n]_q\,x/q\right)E\left([n]_q\,x\right)}\\
&=[k]_q\,q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k}{[k]_q!}\frac{x^k}{q^kE\left([n]_q\,x/q\right)}-xq^{k-1}[n]_q\,q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k}{[k]_q!}\frac{x^k}{q^kE\left([n]_q\,x/q\right)}\\
&=[k]_q\,s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)-xq^{k-1}[n]_q\,s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

(ii)

$$q^k s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)=\frac{1}{\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+(1-q)q^j\frac{[n]_q\,x}{q}\right)}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k\,x^k}{[k]_q!}$$

$$\begin{aligned}
q^k s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)&=\frac{1}{\left(1+(1-q)\frac{[n]_q\,x}{q}\right)\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+(1-q)q^j[n]_q\,x\right)}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q^k\,x^k}{[k]_q!}\\
&=\frac{q}{q+\left(1-q^n\right)x}s_{nk}\left(q;x\right)
\end{aligned}$$

olur.

(iii) (i) den

$$xD_qS_{n,q}\left(t^m;\frac{x}{q}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^m\left([k]_q-q^{k-1}x[n]_q\right)s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^m[n]_q\,q^{k-2}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}-qx\right)s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)$$

$$=[n]_q\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^{m+1}q^{k-2}s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)$$

$$-[n]_q\,x\sum_{k=0}^{\infty}q^{k-1}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^m s_{nk}\left(q;\frac{x}{q}\right)$$

olur. (ii) den

$$xD_qS_{n,q}\left(t^m;\frac{x}{q}\right)=[n]_q\frac{q}{q^2\left(q+\left(1-q^n\right)x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^{m+1}s_{nk}\left(q;x\right)$$

$$-[n]_q\,x\frac{1}{\left(q+\left(1-q^n\right)x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^m s_{nk}\left(q;x\right)$$

$$=\frac{[n]_q}{q\left(q+\left(1-q^n\right)x\right)}S_{n,q}\left(t^{m+1};x\right)-\frac{[n]_q\,x}{q+\left(1-q^n\right)x}S_{n,q}\left(t^m;x\right)$$

olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.7. Lemma [14]:

$0<q<1$ ve $m\in\mathbb{N}$ için

$$S_{n,q}\left(t^m;x\right)=\sum_{j=1}^{m}a_{m,j}\left(q\right)\frac{x^j}{[n]_q^{m-j}} \tag{4.9}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$a_{m+1,j}\left(q\right)=\frac{[j]a_{m,j}\left(q\right)+a_{m,j-1}\left(q\right)}{q^{j-2}},\quad m\geq 0,\quad j\geq 1,$$

$$a_{0,0}(q)=1,\quad a_{m,0}(q)=0,\quad m>0,\quad a_{m,j}(q)=0,\quad m<j. \tag{4.10}$$

olup, $S_{n,q}(t^m;x)$, sabit bir terimi olmaksızın $m$ . dereceden bir polinomdur.

*İspat:*

Lemma 4.1.4 (ii) ve (iii) den $S_{n,q}(t;x)=qx,\ S_{n,q}(t^2;x)=qx^2+\frac{q^2x}{[n]_q}$ olduğundan

$m=1,2$ için $a_{2,1}=q^2,\ a_{1,1}=q$ olup (4.9) geçerlidir.

Şimdi kabul edelim ki (4.9) $m$ için sağlansın. Lemma 4.1.6 (iii) den

$$\begin{aligned}
&S_{n,q}(t^{m+1};x)\\
&=q\left(q+(1-q^n)x\right)\frac{x}{[n]_q}D_qS_{n,q}\left(t^m;\frac{x}{q}\right)+qxS_{n,q}(t^m;x)\\
&=q\left(q+(1-q^n)x\right)\frac{x}{[n]_q}\sum_{j=1}^{m}[j]_q\,a_{m,j}(q)\frac{x^{j-1}}{q^j[n]_q^{m-j}}+qx\sum_{j=1}^{m}a_{m,j}(q)\frac{x^j}{[n]_q^{m-j}}\\
&=q^2\sum_{j=1}^{m}[j]_q\,a_{m,j}(q)\frac{x^j}{q^j[n]_q^{m-j+1}}+q\sum_{j=1}^{m}a_{m,j}(q)\frac{x^{j+1}}{[n]_q^{m-j}}+q(1-q)\sum_{j=1}^{m}[j]_q\,a_{m,j}(q)\frac{x^{j+1}}{q^j[n]_q^{m-j}}\\
&=q\frac{x}{[n]_q^m}a_{m,1}(q)+qx^{m+1}a_{m,m}(q)+q(1-q)x^{m+1}[m]_q\frac{1}{q^m}a_{m,m}(q)\\
&+\sum_{j=2}^{m}\left(q^2[j]_q\,a_{m,j}(q)q^{-j}+qa_{m,j-1}(q)+q(1-q)[j-1]_q\,a_{m,j-1}(q)q^{-j+1}\right)\frac{x^j}{[n]_q^{m-j+1}}\\
&=qa_{m,1}(q)\frac{x}{[n]_q^m}+\frac{1}{q^{m-1}}a_{m,m}(q)x^{m+1}+\sum_{j=2}^{m}\frac{[j]_q\,a_{m,j}(q)+a_{m,j-1}(q)}{q^{j-2}}\frac{x^j}{[n]_q^{m-j+1}}\\
&=\sum_{j=1}^{m+1}\frac{[j]_q\,a_{m,j}(q)+a_{m,j-1}(q)}{q^{j-2}}\frac{x^j}{[n]_q^{m-j+1}}
\end{aligned}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

4.1.8. Lemma [14]:

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $q \in (0,1)$ sabit olsun. Bu durumda

$$\left\| S_{n,q}\left(1+t^m;x\right)\right\|_m \le K_m(q), \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.11}$$

olacak şekilde bir $K_m(q)$ pozitif sabiti vardır. Ayrıca her $f \in C_m^*[0,\infty)$ için

$$\left\| S_{n,q}(f)\right\|_m \le K_m(q)\left\| f\right\|_m, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.12}$$

eşitsizliği geçerlidir. Yani herhangi bir $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $S_{n,q}$, $C_m^*[0,\infty)$ dan $C_m^*[0,\infty)$ a bir lineer pozitif operatördür.

*İspat:*

(4.11) eşitsizliği $m=0$ için açıktır. $m \ge 1$ olsun. Bu durumda (4.9) ve Lemma 4.1.4 (i) den

$$\frac{1}{1+x^m} S_{n,q}\left(1+t^m;x\right) = \frac{1}{1+x^m} + \frac{1}{1+x^m}\sum_{j=1}^{m} a_{m,j}(q)\frac{x^j}{[n]_q^{m-j}} \le 1 + c_m(q) = K_m(q)$$

olup $K_m(q)$, $m$ ve $q$ ya bağlı pozitif bir sabittir. Diğer taraftan her $f \in C_m^*[0,\infty)$ için

$$\left\| S_{n,q}(f)\right\|_m \le \left\| f\right\|_m \left\| S_{n,q}\left(1+t^m\right)\right\|_m$$

olup (4.11) den

$$\left\| S_{n,q}(f)\right\|_m \le K_m(q)\left\| f\right\|_m$$

elde edilir.

## 4.2. $q$ - Szasz- Mirakjan Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde q- Szasz- Mirakjan operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenecektir. Öncelikle bu kısımda, kullanılacak olan ifade ve önermeler verilecektir.

4.2.1. Tanım [22]:

$P$ bir küme olsun. $P$ üzerinde tanımlı "$\leq$" bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, "$\leq$" bağıntısına sıralama bağıntısı ve $(P,\leq)$ ikilisine de sıralı küme denir. Her $x,y,z\in P$ için,

i ) $x\leq x$,

ii ) $x\leq y$ ve $y\leq x$ ise $x=y$,

iii ) Her $x,y,z\in M$ için $x\leq y$ ve $y\leq z$ ise $x\leq z$ .

Bu koşullar sırasıyla yansıma, ters simetri ve geçişme özelliği olarak adlandırılır.

4.2.2. Tanım [22]:

$P$ boştan farklı ve sıralı bir küme olsun. Eğer her $x,y\in P$ için

$$\sup\{x,y\}:=x\vee y$$

ve

$$\inf\{x,y\}:=x\wedge y$$

olmak üzere $\sup\{x,y\}\in P$, $\inf\{x,y\}\in P$ ise $P$ ye bir latis denir.

4.2.3. Tanım [19]:

$E$ bir reel vektör uzayı ve $E$ üzerinde vektör işlemleri ile uyumlu "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı tanımlı olsun. Eğer her $x,y\in E$ için $x\leq y$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $E$ uzayına sıralı vektör uzayı denir.

i ) Her $z\in E$ için $x+z\leq y+z$

ii ) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \geq 0$ için $\alpha x \leq \alpha y$

4.2.4. Tanım [19]:

Sıralı bir $(E,\leq)$ vektör uzayı aynı zamanda bir latis ise, $E$ ye vektör latis denir.

Bu durumda, bir vektör latiste $|x| := \sup\{-x,x\}$, $x^{+} := \sup\{x,0\}$ ve $x^{-} := \sup\{-x,0\}$ elemanlarına sırasıyla $x$ in mutlak değeri, pozitif kısmı ve negatif kısmı denir.

4.2.5. Tanım [19]:

$E$ bir vektör latis olsun. Her $f,g \in E$ için $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$ şartını sağlayan norma latis normu denir.

4.2.6. Tanım [23]:

$E$ bir Banach uzayı, $(E,\leq)$ bir vektör latis ve $E$ üzerindeki norm latis normu ise $E$ ye bir Banach latis denir.

$C_2^*[0,\infty)$ bir Banach latisdir.

4.2.7. Tanım [22]:

$L$ ve $K$ birer latis ve $f : L \to K$ bir lineer operatör olsun. Her $a,b \in L$ için,

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$$

ve

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

ise, yani $f$ sup ve inf işlemlerini koruyorsa, $f$ ye bir latis homomorfizmi denir.

4.2.8. Tanım [23]:

$E$ bir Banach latis ve $H$, $E$ nin bir alt kümesi olsun. $E$ ‘den $E$ ’ye her $(L_n)_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi için,

i) $\sup_{n\geq 1}\|L_n\|<\infty$

ve

ii) Her $g\in H$ için, $\lim_{n\to\infty} L_n(g)=g$

koşulları sağlanıyorken, her $f\in E$ için

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=f$$

oluyorsa, $H$ ye $E$ nin bir Korovkin alt kümesi denir.

4.2.9. Önerme (Lineer Pozitif Operatörlere Göre Genel Korovkin Tip Özellik) [19]:

$X$ kompakt bir uzay, $H$, $C(X)$ in bir Korovkin alt kümesi ve $f\in C(X)$ olsun. Eğer $E$ bir Banach latis, $S:C(X)\to E$ bir latis homomorfizmi ve $(L_n)$, $C(X)$ den $E$ ye bir lineer pozitif operatör dizisi ise, bu durumda her $h\in H$ için

$$\lim_{n\to\infty} L_n(h)=S(h)$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=S(f)$$

dir.

4.2.10. Önerme [19]:

$\{1,t,t^2\}$, $C_2^*[0,\infty)$ için bir Korovkin alt kümedir.

4.2.11. Teorem [14]:

$q_n\in(0,1)$ olsun. Her $f\in C_2^*[0,\infty)$ için $\left(S_{n,q_n}\right)$ dizisinin $f$ e $[0,A]$ da düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} q_n=1$ olmasıdır.

*İspat:*

$\Leftarrow$ : $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$ ve $A > 0$ olsun. $T_A : C[0,\infty) \to C[0,A]$, $T_A(f) := f\,|_{[0,A]}$ şeklinde tanımlanan $T_A$ bir latis homomorfizmidir. Açıktır ki Lemma 4.1.4 (i), (ii) ve (iii) den

$$T_A\left(S_{n,q_n}(1)\right) = T_A(1)$$

$$T_A\left(S_{n,q_n}(t)\right) \to T_A(t)$$

$$T_A\left(S_{n,q_n}(t^2)\right) \to T_A(t^2)$$

olup bu yakınsamalar $[0,A]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Diğer yandan Önerme 4.2.10 dan $\{1,t,t^2\}$, $C_2^*[0,\infty)$ için bir Korovkin alt kümedir ve $C_2^*[0,\infty)$, $C[0,1]$ e izomorftur, [19, Önerme 4.2.5]. Böylece Önerme 4.2.9 dan $f \in C_2^*[0,\infty)$ ve $A > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,q_n}(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,A]} = 0$$

olur.

$\Rightarrow$ : Kabul edelim ki $(q_n)$ dizisi 1 e yakınsamasın. Bu durumda $(q_n)$ dizisinin, $\alpha \neq 1$ ve $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $q_{n_k} \to \alpha$, $(k \to \infty)$ olacak şekilde bir $(q_{n_k}) \subset (0,1)$ alt dizisi vardır. Böylece

$$\frac{1}{[n_k]_{q_{n_k}}} = \frac{1 - q_{n_k}}{1 - (q_{n_k})^{n_k}} \to 1 - \alpha\,,\ (k \to \infty)$$

olup

$$\begin{aligned} S_{n,q_n}(t^2;x) - x^2 &= (q_n - 1)x^2 + \frac{q_{n_k}^2 (1 - q_{n_k})}{(1 - q_{n_k}^{n_k})} x \\ &\to (\alpha - 1)x^2 + \alpha^2 (1 - \alpha) x \neq 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise hipotezle çelişir. Bu çelişkiye $\lim_{n\to\infty} q_n \neq 1$ olduğunu kabul etmekle düşüldü. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ dir.

4.2.12. Teorem [14]:

$f \in C_m^*[0,\infty)$ ve

$f^*(z) = f(z^2)$, $z \in [0,\infty)$

olsun. Bu durumda her $t > 0$ ve $x \geq 0$ için

$$\left|S_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right| \leq 2\omega\left(f^*; \sqrt{(1-q_n)x + \frac{q_n^2}{[n]_{q_n}}}\right)$$

dir. Eğer $f^*$ düzgün sürekli ise bu durumda $\left(S_{n,q_n}\right)$ lineer pozitif operatör dizisi $[0,A]$ da $f$ e düzgün yakınsar.

*İspat:*

Sabit bir $f \in C_m^*[0,\infty)$ seçilsin. Bu durumda $t > 0$, $x \in [0,\infty)$ için $f^*$ ın tanımından

$$S_{n,q_n}(f;x) = S_{n,q_n}\left(f^*\left(\sqrt{t}\right);x\right)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\left|S_{n,q_n}(f;x) - f(x)\right| &= \left|S_{n,q_n}\left(f^*\left(\sqrt{t}\right);x\right) - f^*\left(\sqrt{x}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(f^*\left(\sqrt{\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}}\right) - f^*\left(\sqrt{x}\right)\right)s_{nk}(q_n;x)\right| \qquad (4.13) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\left(f^*\left(\sqrt{\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}}\right) - f^*\left(\sqrt{x}\right)\right)\right| s_{nk}(q_n;x)
\end{aligned}$$

olup. (4.13) de Lemma 2.1.9 (vi) kullanılırsa

$$\left|S_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\omega\left(f^*;\left|\sqrt{\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}}-\sqrt{x}\right|\right)s_{nk}(q_n;x)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\omega\left(f^*;\frac{\left|\sqrt{\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}}-\sqrt{x}\right|}{S_{n,q_n}\left(\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|;x\right)}S_{n,q_n}\left(\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|;x\right)\right)s_{nk}(q_n;x)$$

elde edilir. Lemma 2.1.9 (vii) den

$$\left|S_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right| \le \omega\left(f^*;S_{n,q_n}\left(\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|;x\right)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{\left|\sqrt{\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}}-\sqrt{x}\right|}{S_{n,q_n}\left(\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|;x\right)}\right)s_{nk}(q_n;x)$$

$$=2\omega\left(f^*;S_{n,q_n}\left(\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|;x\right)\right) \tag{4.14}$$

olur. İspatı tamamlamak için her $t>0$ ve $x>0$ için

$$S_{n,q_n}\left(\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|;x\right) \le \sqrt{(1-q_n)x+\frac{q_n^2}{[n]_{q_n}}}$$

olduğu gösterilmelidir.

$$S_{n,q_n}\left(\left|\sqrt{t}-\sqrt{x}\right|;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\sqrt{\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}}-\sqrt{x}\right|s_{nk}\left(q_n;x\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|}{\left|\sqrt{\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}}+\sqrt{x}\right|}s_{nk}\left(q_n;x\right)$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|s_{nk}\left(q_n;x\right)$$

olup son eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy- Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|s_{nk}\left(q_n;x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|s_{nk}^{1/2}\left(q_n;x\right)s_{nk}^{1/2}\left(q_n;x\right)$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|^2 s_{nk}\left(q_n;x\right)}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}s_{nk}\left(q_n;x\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|s_{nk}\left(q_n;x\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|^2 s_{nk}\left(q_n;x\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{S_{n,q_n}\left((t-x)^2;x\right)} \tag{4.15}$$

bulunur. Lemma 4.1.4 (i),(ii) ve (iii), (4.15) de kullanılırsa

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right|s_{nk}\left(q_n;x\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{S_{n,q_n}\left(t^2;x\right)-2xS_{n,q_n}\left(t;x\right)+x^2S_{n,q_n}\left(1;x\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\left(1-q_n\right)x^2+\frac{q_n^2}{[n]_{q_n}}x}=\sqrt{\left(1-q_n\right)x+\frac{q_n^2}{[n]_{q_n}}} \tag{4.16}$$

elde edilir. Böylece (4.16), (4.14) de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

İyi bilinir ki, eğer $\left[0,\infty\right)$ aralığında $f$ düzgün sürekli değilse $\delta \to 0$ için Tanım 2.1.8 ile tanımlı süreklilik modülü $\omega\left(f;\delta\right)$ sıfıra yaklaşmaz. Bu nedenle aşağıda verilecek teoremle $C_m^*\left[0,\infty\right)$ uzayında direkt bir yaklaşım teoremi ve ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla bir yaklaşım derecesi verilecektir.

4.2.13. Tanım [24]:

Her $f \in C_m^*\left[0,\infty\right)$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega_m\left(f;\delta\right) = \sup_{x\geq 0, 0<h\leq\delta} \frac{\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|}{1+\left(x+h\right)^m}$$

ifadesine $f$ fonksiyonun $C_m^*\left[0,\infty\right)$ uzayında ağırlıklı süreklilik modülü denir.

4.2.14. Lemma [24]:

Ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i ) $\Omega_m\left(f;\delta\right) \geq 0$

ii ) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega_m\left(f;\delta_1\right) \leq \Omega_m\left(f;\delta_2\right)$

iii ) $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \Omega_m\left(f;\delta\right) = 0$

iv ) Her $\lambda \in \left[0,\infty\right)$ için $\Omega_m\left(f;\lambda\delta\right) \leq \left(\lambda+1\right)\Omega_m\left(f;\delta\right)$

4.2.15. Teorem [14]:

Eğer $f \in C_m^*\left[0,\infty\right)$ ise

$$\left\|S_{n,q}\left(f\right)-f\right\|_{m+1} \leq k\Omega_m\left(f;\frac{1}{\sqrt{\left[n\right]_q}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır ve burada $k$, $f$ ve $n$ den bağımsız bir sabittir.

*İspat:*

Tanım 4.2.13 de $\delta = |t-x|$ alınırsa, Tanım 4.2.13 ve Lemma 4.2.14 (iv) den

$$\begin{aligned}|f(t)-f(x)| &\le \left(1+\left(x+|t-x|\right)^m\right)\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\Omega_m(f;\delta)\\ &\le \left(1+(2x+t)^m\right)\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\Omega_m(f;\delta)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda $S_{n,q}$ operatörünün lineerlik özelliğinden ve Lemma 2.1.5 den

$$\begin{aligned}\left|S_{n,q}(f;x)-f(x)\right| &\le S_{n,q}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\\ &\le \Omega_m(f;\delta)\left(S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right);x\right)+S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right)\frac{|t-x|}{\delta};x\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci kısma Cauchy- Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right)\frac{|t-x|}{\delta};x\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\left(2x+\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^m\right)\frac{\left|\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}-x\right|}{\delta}s_{nk}^{1/2}(q;x)\,s_{nk}^{1/2}(q;x)\\ &\le \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\left(2x+\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}\right)^m\right)^2 s_{nk}(q;x)}\\ &\quad\times\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|\frac{[k]_q}{q^{k-2}[n]_q}-x\right|^2}{\delta^2}s_{nk}(q;x)}\\ &= \left(S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right)^2;x\right)\right)^{1/2}\left(S_{n,q}\left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2};x\right)\right)^{1/2}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\left|S_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \le \Omega_m(f;\delta)\Bigg(S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right);x\right) \\ +\left(S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right)^2;x\right)\right)^{1/2}\left(S_{n,q}\left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2};x\right)\right)^{1/2}\Bigg) \tag{4.17}$$

bulunur. Diğer yandan Lemma 4.1.7 ve Lemma 4.1.8 den

$$S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right);x\right) \le K_m(q)\left(1+x^m\right)$$

$$\left(S_{n,q}\left(\left(1+(2x+t)^m\right)^2;x\right)\right)^{1/2} \le K_m^1(q)\left(1+x^m\right) \tag{4.18}$$

olacak şekilde $K_m(q)$ ve $K_m^1(q)$ sabitleri vardır. Ayrıca Lemma 4.1.4 (i),(ii) ve (iii) den

$$\begin{aligned}\left(S_{n,q}\left(\frac{|t-x|^2}{\delta^2};x\right)\right)^{1/2} &= \frac{1}{\delta}\sqrt{S_{n,q}(t^2;x)-2xS_{n,q}(t;x)+x^2S_{n,q}(1;x)} \\ &= \frac{1}{\delta}\sqrt{(1-q)x^2+\frac{q^2x}{[n]_q}} = \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{1-q^n}{[n]_q}x^2+\frac{q^2x}{[n]_q}} \\ &\le \frac{1}{\delta\sqrt{[n]_q}}\sqrt{x^2+x} \\ &\le \frac{1+x}{\delta\sqrt{[n]_q}}\end{aligned} \tag{4.19}$$

olup (4.17), (4.18) ve (4.19) dan

$$\begin{aligned}&\left|S_{n,q}(f;x)-f(x)\right| \\ &\le \Omega_m(f;x)\left(K_m(q)\left(1+x^m\right)+K_m^1(q)\frac{\left(1+x^m\right)(1+x)}{\delta\sqrt{[n]_q}}\right) \\ &\le \Omega_m(f;x)\left(K_m(q)\left(1+x^m\right)+K_m^1(q)K_1\frac{1+x^{m+1}}{\delta\sqrt{[n]_q}}\right)\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Burada

$$K_1 = \sup_{x\geq 0} \frac{1+x^m+x+x^{m+1}}{1+x^{m+1}}$$

olup, (4.20) de $\delta = \delta_n = [n]^{-1/2}$ seçilirse istenen sonuç elde edilir.

### 4.3. $q$ - Szasz- Mirakjan Operatörleri için Voronovskaja- Tip Sonucu

Şimdi $q$ - Szasz- Mirakjan operatörleri için Voronovskaja- tip sonucu verelim.

4.3.1. Teorem [14]:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $q_n \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} q_n^n = a$ olsun. Bu durumda $f', f'' \in C_2^*[0,\infty)$ olacak şekildeki herhangi bir $f \in C_2^*[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} [n]_{q_n} \left( S_{n,q_n}(f;x) - f(x) \right) = (a-1)x\, f'(x) + \frac{1}{2} f''(x)\left((1-a)x^2 + x\right)$$

olup bu yakınsama $A > 0$ için $[0, A]$ da düzgündür.

*İspat:*

$f, f', f'' \in C_2^*[0,\infty)$ ve $x \in [0,\infty)$ verilsin. Bu durumda Taylor formülünden

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + r(t;x)(t-x)^2 \tag{4.21}$$

yazılır. Burada $r(t;x)$ kalan terimin Peano formudur, $r(t;x) \in C_2^*[0,\infty)$ ve $\lim_{t\to x} r(t;x) = 0$ dır. $S_{n,q_n}$, (4.21) e uygulanır ve eşitliğin her iki tarafı $[n]_{q_n}$ ile çarpılırsa

$$[n]_{q_n}\left(S_{n,q_n}\left(f(t)-f(x)\right)\right)=f'(x)[n]_{q_n}S_{n,q_n}(t-x\ ;x)$$
$$+\frac{1}{2}f''(x)[n]_{q_n}S_{n,q_n}\left((t-x)^2;x\right) \tag{4.22}$$
$$+[n]_{q_n}S_{n,q_n}\left(r(t\ ;x)(t-x)^2;x\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin son kısmındaki $S_{n,q_n}\left(r(t\ ;x)(t-x)^2;x\right)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$S_{n,q_n}\left(r(t;x)(t-x)^2;x\right)\le\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(r\left(\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}};x\right)\right)^2\left(s_{n,k}^{1/2}(q_n;x)\right)^2}$$
$$\times\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{[k]_{q_n}}{q_n^{k-2}[n]_{q_n}}-x\right)^4\left(s_{n,k}^{1/2}(q_n;x)\right)^2} \tag{4.23}$$
$$=\sqrt{S_{n,q_n}\left(r^2(t;x);x\right)}\sqrt{S_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)}$$

bulunur. Diğer yandan $r^2(x\ ;x)=0$ ve $r^2(t\ ;x)\in C_2^*[0,\infty)$ olup böylece $\lim_{n\to\infty}q_n=1$ olduğundan Teorem 4.2.11 den $[0,A]$ aralığında

$$S_{n,q_n}\left(r^2(t\ ;x);x\right)=r^2(x\ ;x)\ \ (n\to\infty)\ \text{(düzgün)}, \tag{4.24}$$

olur. Bu durumda (4.23), (4.24) ve (4.7) den

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}S_{n,q_n}\left(r(t;x)(t-x)^2;x\right)\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{S_{n,q_n}\left(r^2(t;x);x\right)}$$
$$\times\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\sqrt{S_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{S_{n,q_n}\left(r^2(t;x);x\right)}$$
$$\times\sqrt{\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}^2S_{n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)} \tag{4.25}$$
$$=0.\sqrt{3x^2+6(1-a)x^3+3(1-a)^2x^4}$$
$$=0$$

elde edilir. Yani $\lim\limits_{n\to\infty}[n]_{q_n} S_{n,q_n}\left(r(t\;;x)(t-x)^2\;;x\right)=0$ olup, böylece (4.22), (4.25), (4.5) ve (4.6) dan

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{q_n}\left(S_{n,q_n}(f;x)-f(x)\right)=(a-1)x\,f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)\left((1-a)x^2+x\right)$$

elde edilir.

## KAYNAKLAR


1. Weierstrass, K., "Über die analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Funktionen reler Argumente", ***Sitzungsberichte der Acad.***, Berlin, 633-639, 789-805 (1885).

2. Bernstein, S.N., "Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilities", ***Comm. Soc. Math. Charkow Ser.,*** 2(13):1-2 (1912).

3. Bohman, H., "On approximation of continuous and analytic functions", ***Arkif Für Math.***, 2(3): 43-56 (1951).

4. Korovkin, P.P., "On convergence of linear positive operators in the space of continous functions", ***Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)***, 90: 961-964 (1953).

5. Lupaş, A., "A $q$-analogue of the Bernstein operator", ***University of Cluj-Napoca,*** Seminar on Numerical and Statistical Calculus, No.9 (1987).

6. Phillips, G.M., "Bernstein polynomials based on the $q$-integers", ***Annals Num. Math.***, 4:511-518 (1997).

7. Meyer-König, W.-Zeller, K., "Bernsteinsche potenzreihen", ***Studia Math.,*** 19:89-94 (1960).

8. Trif, T., "Meyer-König ve Zeller operators based on $q$-integers", ***Rev. Anal. Numer. Theory Approx.,*** 29:221-229 (2000).

9. Rempulska, L., Skorupka, M., "Approximation by generalized MKZ-operators in polynomial weighted spaces", ***Anal. Theory Appl.,*** 23:64-75 (2007).

10. Erencin, A., Ince, H.G., Olgun, A., "A class of linear positive operators in weighted spaces", ***Math. Slovaca***, 62(1): 63-76 (2012).

11. Szasz, O., "Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval", ***J. Research Nat. Bur. Standards,*** 45:239-245 (1950).

12. Aral, A., "A generalization of Szasz-Mirakjan operators based on $q$-integers", ***Mathematical and Computer Modelling***, 47(9-10): 1052-1062 (2008).

13. Aral, A., Gupta, V., “The $q$-derivative and applications to $q$-Szasz-Mirakjan operators”, ***Calcolo,*** 43(3): 151-170 (2006).

14. Mahmudov, N.I., “On $q$-Parametric Szasz-Mirakjan Operators”, ***Mediterr. J. Math.,*** 7:297-311 (2010).

15. Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., “Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı”, ***Ankara,*** 1-16 (1995).

16. Musayev, B., Alp, M., “Fonksiyonel Analiz”, ***Balcı Yayınları,*** Kütahya, 27-83 (2000).

17. Gadjiev, A.D., “On P.P. Korovkin type theorems”, ***Math. Zametki,*** 20:781-786 (1976), ***Math. Notes,*** 20:995-998 (1976).

18. Gadjiev, A.D., “The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P. Korovkin”, ***Soviet Math. Dokl.,*** 15:1433-1436 (1974).

19. Altomare, F., Campiti, M., “Korovkin-type Approximation Theory and its Applications”, de Gruyter Studies in Mathematics, 17. ***Walter de Gryter***, Berlin, New York, xii+627 (1994).

20. Andrews, G.E., Askey, R., Roy, R., “Special Functions”, ***Cambridge University Press,*** (1999).

21. İspir, N., “On modified Baskakov operators on weighted spaces”, ***Turk. J. Math.,*** 25:355-365 (2001).

22. Davey, B.A., Priestley, H.A., “Introduction to Lattices and Order”, ***Cambridge University Press,*** 1-2, 33-43 (2002).

23. Altomare, F., “Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators”, ***Surveys in Approximation Theory***, 5: 92-164 (2010).

24. Lopez-Moreno, A.-J., “Weighted simaltaneous approxmation with Baskakov type operators”, ***Acta Math. Hungar.,*** 104(1-2): 143-151 (2004).

# ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler**


| | |
|---|---|
| Soyadı, Adı | : ADIGÜZEL, Hakan |
| Uyruğu | : T.C. |
| Doğum tarihi ve Yeri | : 30.11.1987 Antalya |
| e-mail | : adiguzelhkn@gmail.com |


**Eğitim**

| **Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet tarihi** |
|---|---|---|
| Yüksek lisans | Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü | |
| Lisans | Atatürk Üniversitesi/ Matematik Bölümü | 2010 |
| Lise | Antalya Atatürk Lisesi | 2005 |

**Yabancı Dil**

İngilizce

**Hobiler**

Kitap okumak, müzik dinlemek, gitar çalmak, dans etmek, satranç, sinema, tiyatro.