

**BRINKMAN-FORCHHEIMER DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI, TEKLİĞİ, FORCHHEIMER VE
DARCY KATSAYILARINA SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI ÜZERİNE**

ORKUN YEŞİLOVA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2012
ANKARA**

Orkun YEŞİLOVA tarafından hazırlanan “BRINKMAN-FORCHHEIMER
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI, TEKLİĞİ, FORCHHEIMER
VE DARCY KATSAYILARINA SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI ÜZERİNE” adlı bu
tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

Tez danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

.....

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek
Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

.....

Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

.....

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Ogün DOĞRU

.....

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tarih: 09/01/2012

Bu tez ile G.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayanlar her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Orkun YEŞİLOVA

**BRINKMAN-FORCHHEIMER DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN
VARLIĞI, TEKLİĞİ, FORCHHEIMER VE DARCY KATSAYILARINA
SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI ÜZERİNE**

(Yüksek Lisans Tezi)

Orkun YEŞİLOVA

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2012

ÖZET

Bu tezde; Brinkman-Forchheimer Denklemlerinin çözümlerinin varlığı, tekliği, Forchheimer Katsayısı ve Darcy Katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir. Birinci bölümde, Brinkman-Forchheimer Denklemlerinin çözümlerinin varlığı, ikinci bölümde bu çözümlerin tekliği, üçüncü bölümde bu çözümlerin H^1 normunda b Forchheimer Katsayısına sürekli bağımlılığı ve dördüncü bölümde ise bu çözümlerin H^1 normunda a Darcy Katsayısına sürekli bağımlılığı gösterilmiştir. Çalışma, literatürde bilinen sonuçlar araştırılarak oluşturulmuştur.

Bilim Kodu : 204.1.138

**Anahtar Kelimeler : Brinkman-Forchheimer Denklemleri, sürekli bağımlılık,
Forchheimer Katsayısı, Darcy Katsayısı**

Sayfa Adedi : 52

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

**ON EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE BRINKMAN-
FORCHHEIMER EQUATIONS SOLUTIONS AND CONTINUOUS
DEPENDENCE ON FORCHHEIMER AND DARCY COEFFICIENTS OF
THE BRINKMAN-FORCHHEIMER EQUATIONS
(M.Sc.Thesis)**

Orkun YEŞİLOVA

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 2012**

ABSTRACT

In this thesis, the existence and uniqueness of the Brinkman- Forchheimer equations solutions and the continuous dependence of Forchheimer and Darcy coefficients on Brinkman- Forchheimer equations are investigated. In the first chapter the existence of solutions, in the second chapter the uniqueness of these solutions, in the third chapter the continuous dependence of b Forchheimer coefficient on H^1 norm to these solutions, in the fourth chapter the continuous dependence of a Darcy coefficient on H^1 norm to these solutions are shown. This work is performed by investigating the results known in literature.

Science Code : 204.1.138

**Key Words : Brinkman-Forchheimer Denklemleri, sürekli bağımlılık,
Forchheimer Katsayısı, Darcy Katsayısı**

Page Number : 52

Adviser : Assist. Prof. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bu tezi oluşturmamda yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli hocam, Sayın, Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ ' e ve çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen sevgili eşim ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSRTACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1.GİRİŞ	1
2.ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 .Temel Tanımlar	3
2.2 .İlgili Teoremler	7
2.3 .Kullanılan Eşitsizlikler	9
3. VARLIK	11
4. TEKLİK	31
5. FORCHHEIMER KATSAYISINA SÜREKLİ BAĞIMLILIK	33
6. DARCY KATSAYISINA SÜREKLİ BAĞIMLILIK	43
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	52

1. GİRİŞ

Bu tezde; Brinkman-Forchheimer denklemleri için,

$$u_t = \gamma \Delta u - au - b|u|^\alpha u - \nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

başlangıç sınır değer problemi üzerinde çalışılacaktır. Burada; $u = (u_1, u_2, u_3)$ akışkan hız vektörü, $\gamma > 0$ Brinkman Katsayısı, $a > 0$ Darcy Katsayısı, $b > 0$ Forchheimer Katsayısı ve p basınçtır. $\alpha \in [1, 2]$ verilen bir sayı, Ω bölgesi ise $\partial\Omega$ sınırı C^2 sınıfından olan $\mathbb{R}^3$ ün sınırlı bir bölgesidir. Bu çalışmada, (1.1)–(1.3) probleminin çözümlerinin varlığı, tekliği, b ve a katsayılarına sürekli bağımlılığı incelenecektir.

Denklemlerin çözümlerinin katsayılarla sürekli bağımlılığı bir tür kararlı yapıdır öyle ki; bu katsayılardaki küçük değişikliklerin çözümlere etkisini yansıtır. Bu tip yapılarla ilgili birçok sonuç Ames ve Straughan incelemesinde [2] bulunabilir. Darcy ve Brinkman sistemlerinde anlatılan, akışkanın geçirgen ortamdaki akışının yapısal sabitliği; Ames ve Payne [3], Payne ve Straughan [4–7] makalelerinde incelemişlerdir. [7] de Payne ve Straughan akışkanın doymun geçirgen ortamdaki akışını açıklayan (1.1)–(1.3) başlangıç sınır değer problemini $\alpha = 1$ için düşünmüşlerdir. Problemin L^2 normunda b ve γ katsayılarına sürekli bağımlılığını ispatlamışlardır. Bizim amacımız; problemin b ve a katsayılarına sürekli bağımlılığını daha güçlü bir norm olan H^1 normunda göstermektir.

İlerleyen bölümde;

$$\tilde{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) : \nabla \cdot u = 0 \right\} \quad \text{ve} \quad \tilde{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

fonksiyon uzayları kullanılacaktır. Burada, ikinci uzay; $\tilde{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ in kapanışıdır.

Yani;

$$\tilde{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3) = \overline{\tilde{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3)} \subset L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

dir. Kolaylık için, $\tilde{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^3) = \tilde{L}^2(\Omega)$ ve $\tilde{H}_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) = \tilde{H}_0^1(\Omega)$ yazılacaktır.

L^p deki norm için $\| \cdot \|_p$ notasyonu kullanılacaktır. L^2 deki norm $\| \cdot \|$ ve iç çarpım

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ olarak tanımlanacaktır.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

2.1.1. Tanım

Bir $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayından her Cauchy dizisi norma göre yakınsak ise bu normlu uzaya bir Banach Uzayı denir.

2.1.2. Tanım

$\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir Ω bölgesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayına $C(\Omega)$ uzayı denir.

2.1.3. Tanım

$\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir Ω bölgesi üzerinde tanımlı, m ve m ye kadar olan mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayına $C^m(\Omega)$ uzayı denir.

2.1.4. Tanım

Bir Ω bölgesi üzerinde her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların uzayına $C^\infty(\Omega)$ uzayı denir.

$$C^\infty(\Omega) = \{u: u \in C^k(\Omega), k = 0, 1, 2, \dots\}$$

2.1.5. Tanım

$p \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfına, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir.

Bu uzay üzerindeki norm da;

$$\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.

2.1.6. Tanım

$L^\infty(\Omega)$ uzayı, hemen hemen her yerde sınırlı ve ölçülebilir (ölçüsü sıfır olan yerler dışında sınırlı) fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

$$L^\infty(\Omega) = \{u: |u(x)| \leq k, \quad \Omega \text{ üzerinde hemen hemen her yerde}\}$$

2.1.7. Tanım

Ω üzerinde tanımlı bir u fonksiyonu Ω nın bir K alt cümlesine ait noktalar için sıfırdan farklı olsun. $\overline{K}$, K nın kapanışı olmak üzere;

$$\overline{K} = \overline{\{x: u(x) \neq 0\}}$$

ifadesine u nun kompakt desteği denir.

2.1.8. Tanım

Ω , $\mathbb{R}^n$ nin açık ve sınırlı bir bölgesi olmak üzere; her mertebeden türevlenebilir ve türevleri ile birlikte Ω üzerinde kompakt desteğe sahip olan fonksiyonların uzayına $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı denir.

2.1.9. Tanım

$L(U, V)$, normlu bir U uzayından normlu bir V uzayına lineer normlu operatörlerin bir uzayıdır. $V = \mathbb{R}$ olduğunda; $L(U, \mathbb{R})$, U üzerindeki lineer fonksiyonların uzayıdır. U normlu uzayı üzerinde sürekli lineer fonksiyonların uzayı U nun dual uzayı olarak tanımlanır ve U' biçiminde gösterilir. $L(U, \mathbb{R}) = U'$

2.1.10. Tanım

$k > 0$ tamsayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına ait olan fonksiyonlar uzayına $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ Sobolev Uzayı denir. Yani;

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_p(\mathbb{R}^n) : \forall |\alpha| \leq k, D^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

dır. Bu uzay üzerindeki norm ise ;

$$\|u\|_{k,p,\mathbb{R}^n} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

biçiminde tanımlanır.

- Eğer, $p = 2$ ise ; $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ dir. Ayrıca $H^{-m}(\Omega)$ uzayı $H_0^m(\Omega)$ uzayının dualidir.

2.1.11. Tanım

H bir Hilbert uzayı, $x \in H$ ve $(x_n), H$ uzayında bir dizi olsun. Eğer, $\forall y \in H$ için,

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$$
ise H , x noktasına zayıf yakınsaktır denir. Burada, $\langle ., . \rangle$ H uzayındaki iç çarpımdır.

2.1.12. Tanım

A bir kare matris olsun. $Ax = \lambda x$ olacak şekilde, sıfır olmayan bir x vektörü varsa λ ya A nın bir öz değeri denir. Ayrıca x vektörüne; λ ya karşılık gelen öz vektör, (λ, x) ikilisine de A için bir öz ikili denir.

2.1.13. Tanım (Lipschitz Süreklilik)

$f(x)$ fonksiyonu bir $A \subset \mathbb{R}$ de tanımlı olsun. Eğer $x, y \in A$ için,

$$|f(x) - f(y)| < k|x - y|$$
eşitsizliğini sağlayacak şekilde, f fonksiyonundan bağımsız bir $k > 0$ sabiti varsa f fonksiyonuna A da Lipschitz süreklidir denir.

2.1.14. Tanım

$\mathbb{R}^n$ de bir Ω bölgesi üzerinde bir distribution, $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonel olarak tanımlanır. Bu durumda, bir distribution $C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli lineer dönüşümdür. Distributionlar uzayı $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının dual uzayıdır ve $[C_0^\infty(\Omega)]'$ ile gösterilir.

2.2. İlgili Teoremler

2.2.1. Teorem (Peona-Varlık)

$g(t, u)$ fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, $|u| < \infty$ bölgesinde sürekli ve sınırlı olsun. Bu durumda;

$$u' = g(t, u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

başlangıç değer problemi, $[t_0, t_0 + a]$ aralığı üzerinde en az bir $u(t)$ çözümüne sahiptir.

2.2.2. Teorem (Sobolev Gömülme Teoremi)

Ω bir Γ Lipschitz sınırına sahip, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Eğer, $m > \frac{n}{2}$ ise bu durumda; $H^m(\Omega)$ deki her v fonksiyonu sürekli ve ;

$$\sup |v(x)| \leq c \|x\|_{H^m} \quad (*)$$

eşitsizliği sağlanır. Teoreme göre, $n = 1$ ise bu durumda; Ω reel sayıların bir alt cümlesi ise böylece $H^1(\Omega)$ deki fonksiyonlar sürekli. $n = 2$ ise 2-boyutlu uzayda $u \in H^2(\Omega)$ da ise u sürekli. (*) dan ifade edilebilir ki ; $H^m(\Omega)$ normu ile $H^m(\Omega)$ dan $\sup$ normu ile $C(\Omega)$ ya bir özdeşlik operatörü sınırlı bir operatördür.

$$I : H^m(\Omega) \rightarrow C(\Omega) \quad , \quad \|I(u)\|_{C(\Omega)} \leq K \|u\|_{H^m}$$

$$u \rightarrow I(u)$$

2.2.3. Teorem

X bir Banach uzay olsun. $\{u_n\} \subset X$ bir dizi olsun öyleki X içinde bir $u \in X$ noktasına zayıf yakınsasın. Bu durumda,

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2.4. Teorem (Rellich-Kondrasov)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, C' sınıfından sınırlı bir açık bölge olsun. Bu durumda, aşağıdaki gömmeler kompakttır.

$$i) \ p < n \text{ ise; } W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \frac{np}{n-p},$$

$$ii) \ p = n \text{ ise; } W^{1,n}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$iii) \ p > n \text{ ise; } W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Eğer Ω herhangi sınırlı bir bölge ise bu teorem $W_0^{1,p}(\Omega)$ için geçerlidir.

2.2.5. Lemma

V, H Hilbert uzaylar ve $V \subset H \subset V'$ olsun. Burada, V', V nin duali ve V, H de yoğun, H da V' de yoğundur. Eğer, u fonksiyonu $L^2((0,T), V)$ ye ait ve bunun türevi olan u_t de $L^2((0,T), V')$ ye ait ise; u fonksiyonu, H uzayında $[0,T]$ aralığında sürekli bir fonksiyona hemen hemen her yerde eşittir ve $(0,T)$ aralığında skalar distribution anlamında geçerli olan aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{d}{dt}(u, u) = \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = 2 \langle u', u \rangle.$$

2.3. Kullanılan Eşitsizlikler

2.3.1. Sobolev Eşitsizliği

$u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ ve $1 \leq p < n$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ olsun. Bu durumda;

$$\|u\|_q \leq c \|\nabla u\|_p$$

olur.

2.3.2. Young Eşitsizliği

$p, q \leq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda;

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q} , \quad (a, b > 0) , \quad (\varepsilon > 0)$$

olur.

2.3.3. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}$ üzerindeki iç çarpım ve $\mathbb{R}$ üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış norm:

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dir.}$$

2.3.4. Hölder Eşitsizliği

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer, $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ ise;

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

olur.

2.3.5. Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği

$1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ ve $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |u_1(x) \dots u_m(x)| dx \leq \prod_{i=1}^m \|u_i\|_{p_i}$$

olur.

2.3.6. Gronwall Lemması

$\eta(\cdot)$, $[0, T]$ aralığında sürekli, negatif olmayan bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$, $[0, T]$ aralığında integrallenebilen, negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere;

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği geçerli ise, her $0 \leq t \leq T$ için,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

olur.

3. VARLIK

$$u_t = \gamma \Delta u - au - b|u|^\alpha u - \nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

p basınç, γ , a ve b pozitif sabitler, $n = 2$ için $\alpha \geq 0$, $n > 2$ için $1 \leq \alpha \leq \frac{4}{n-2}$

olmak üzere, bu bölümde (1.1) - (1.3) probleminin çözümünün varlık ve tekliği Faedo-Calarkin metodu kullanılarak gösterilecektir. Bu metod birkaç adımdan oluşur. İlk adımda, $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ uzayındaki bir Ω bölgesi için standart bazların lineer toplamından oluşan bir yaklaşık çözüm bulunacaktır. Sonra bu yaklaşık çözümler için enerji tahminleri elde edilecektir. Son olarak, bu yaklaşık çözümün, (1.1) - (1.3) probleminin zayıf çözümüne yakınsayan bir alt dizisi seçilecektir.

İlk olarak, (1.1) - (1.3) probleminin zayıf çözümü aşağıdaki formda tanımlanacaktır.

3.1. Tanım

$$u \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right) \quad \text{ve} \quad u_t \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right)$$

şeklinde tanımlanan bir u fonksiyonu eğer,

$$\langle u_t, v \rangle + \gamma(\nabla u, \nabla v) + a(u, v) + b(|u|^\alpha u, v) = 0, \quad \forall v \in \widetilde{H}_0^1(\Omega), \quad \forall t \in (0, T) \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (3.2)$$

eşitliklerini sağlıyor ise bu u fonksiyonu (1.1) - (1.3) probleminin bir çözümüdür.

Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ ve $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ uzaylarından alınan fonksiyonların iç çarpımıdır.

3.2. Teorem

$n = 2$ için $\alpha \geq 0$, $n > 2$ için $1 \leq \alpha \leq \frac{4}{n-2}$ ve $u_0 \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$ olsun. Bu durumda, (1.1)-(1.3) probleminin bir u çözümü vardır öyle ki;

$$u \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right) \text{ ve } u_t \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right)$$

dir. Ayrıca, $u \in C\left((0, T), \widetilde{L}^2(\Omega)\right)$ dir.

İspat :

Teoremin ispatı için Faedo-Galerkin metodu kullanılacaktır. Ancak öncelikle,

$$-\Delta w_j + \nabla p_j = \lambda_j w_j, \quad \nabla w_j = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.3)$$

$$w_j = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (3.4)$$

öz değer problemini göz önüne alınacaktır. Burada, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de yeteri kadar düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. $-\Delta$ pozitif ve self-adjoint operatör, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, ile $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ ni sağlayan öz değerler dizisi ve $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi de bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler dizisidir. Öyle ki, bu dizi $\widetilde{L}^2(\Omega)$ ve $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ için bir ortogonal bazdır. Normalleştirmeden sonra bu dizi $\widetilde{L}^2(\Omega)$ de bir tam ortonormal sistem olarak alınabilir. Şimdi üç adımdan oluşan ispat verilecektir.

1. Adım (Yaklaşık çözüm belirleme):

m keyfi pozitif bir sabit olmak üzere, (3.1) - (3.2) nin,

$$u_m(x, t) := \sum_{k=1}^m f_{km}(t) w_k(x) \quad (3.5)$$

formundaki u_m çözümleri aranacaktır. Burada $w_1, \dots, w_m$ ler, (3.3) - (3.4)

probleminin çözümleridir. Kolaylık için $u_m(x, t)$ yerine $u_m(t)$ ve $u_m'(t) = \frac{\partial u_m(x, t)}{\partial t}$

yazılacaktır. Bu ifadeler (3.1) de yerine yazılırsa,

$$\bullet \left(u_m'(t), v \right) + \gamma \left(\nabla u_m(t), \nabla v \right) + a(u_m(t), v) + b(|u_m(t)|^\alpha u_m(t), v) = 0$$

v yerine w_k yazılıp iç çarpılırsa,

$$\Rightarrow \left(u_m'(t), w_k \right) + \gamma \left(\nabla u_m(t), \nabla w_k \right) + a(u_m(t), w_k) + b(|u_m(t)|^\alpha u_m(t), w_k) = 0 \quad (3.6)$$

$$u_m(0) = u_{om}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.7)$$

$0 \leq t \leq T$ için, elde edilir. Burada, u_{om} , u_0 in $w_1, \dots, w_m$ ler tarafından gerilen

m - boyutlu $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ uzayındaki ortogonal projeksiyondur. $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ da, $m \rightarrow \infty$

için $u_{om} \rightarrow u_0$ dir.

u_m , (3.5) yapısında olduğundan ve $\{w_k\}_{k=1}^m$, $\widetilde{L}^2(\Omega)$ de bir ortonormal cümle

oldüğundan; $u_m(x, t)$ nin her iki yanı w_k ile çarpılırsa,

$$\bullet \left(u_m(x, t), w_k \right) = \left(\sum_{k=1}^m f_{km}(t) w_k(x), w_k \right)$$

$$\Rightarrow f_{km}'(t) = \left(u_m'(t), w_k \right) \quad \text{ve} \quad f_{km}'(t) = \left(u_m'(t), w_k \right) \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada,

$$f_{km}'(t) = \frac{df_{km}}{dt} \quad \text{ve} \quad \left(u_m(t), w_k \right) = \int_{\Omega} u_m(x, t) w_k(x) dx$$

dir. Bundan dolayı, (3.6)-(3.7) denklemleri $f_{1m}(t), f_{2m}(t), \dots, f_{mm}(t)$ için m – boyutlu lineer olmayan 1.dereceden basit diferensiyel denklem sistemine denk olur. Buradan,

$$f_{km}' = F_k(f_{1m}, f_{2m}, \dots, f_{mm}) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada,

$$F_k = -(\gamma\lambda_k + a) f_{km}(t) - b \sum_{j=1}^m f_{jm}(t) \left(\left| \sum_{j=1}^m f_{jm}(t) w_j \right|^\alpha w_j, w_k \right),$$

dir. Başlangıç koşulları,

$$f_{km}(0) = \left(u_m(0), w_k \right) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.10)$$

olur. Buradan, her F_k fonksiyonu f_{km} , $k = 1, 2, \dots, m$ için süreklidir. Aynı zamanda f_{km} , $k = 1, 2, \dots, m$ için diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla Peano'nun birinci mertebeden diferensiyel denklemler için varlık teoremi gereğince bu problem, (3.9)-(3.10) şartlarını sağlayan, $f_{km}(t) = (f_{1m}(t), f_{2m}(t), \dots, f_{mm}(t))$ lokal çözümüne sahiptir. Dolayısıyla (3.5) şeklinde tanımlanan $u_m(x, t)$, (3.6)-(3.7) nin lokal çözümüdür. Daha büyük t ler için genişletilmiş çözümler için bazı yaklaşımlara ihtiyaç vardır.

2.Adım (Kesin yaklaşım):

(3.6) nın her iki yanını $f_{km}(t)$ ile çarpılıp sonuçlar $k=1,2,...,m$ için toplanır ve (3.5) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \bullet \left(u_m'(t), f_{km}(t) w_k \right) + \gamma \left(\nabla u_m(t), \nabla w_k f_{km}(t) \right) + a \left(u_m(t), w_k f_{km}(t) \right) \\
& + b \left(|u_m(t)|^\alpha u_m(t), w_k f_{km}(t) \right) = 0 \\
& \Rightarrow \left(u_m'(t), \sum_{k=1}^m f_{km}(t) w_k \right) + \gamma \left(\nabla u_m(t), \nabla \sum_{k=1}^m w_k f_{km}(t) \right) + a \left(u_m(t), \sum_{k=1}^m w_k f_{km}(t) \right) \\
& + b \left(|u_m(t)|^\alpha u_m(t), \sum_{k=1}^m w_k f_{km}(t) \right) = 0 \\
& \Rightarrow \left(u_m'(t), u_m(t) \right) + \gamma \left(\nabla u_m(t), \nabla u_m(t) \right) + a \left(u_m(t), u_m(t) \right) \\
& + b \left(|u_m(t)|^\alpha u_m(t), u_m(t) \right) = 0 \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} u_m'(t) u_m(t) dt + \gamma \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla u_m(t) dt + a \int_{\Omega} u_m(t) u_m(t) dt \\
& + b \int_{\Omega} |u_m(t)|^\alpha u_m(t) u_m(t) dt = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 + \gamma \|\nabla u_m(t)\|^2 + a \|u_m(t)\|^2 + b \|u_m(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} = 0 .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Son eşitlik 0 dan T_0 ye integrallenirse,

$$\bullet \int_0^{T_0} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 dt + \gamma \int_0^{T_0} \|\nabla u_m(t)\|^2 dt + a \int_0^{T_0} \|u_m(t)\|^2 dt + b \int_0^{T_0} \|u_m(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} dt = 0$$

$$\Rightarrow \|u_m(T_0)\|^2 + \int_0^{T_0} \left\{ 2\gamma \|\nabla u_m(t)\|^2 + 2a \|u_m(t)\|^2 \right\} dt + 2b \int_0^{T_0} \|u_m(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} dt = \|u_m(0)\|^2. \quad (3.12)$$

elde edilir. $\|u_m(0)\| \leq \|u_0\|$ olduğundan, $\|u_m(0)\|$ her m için sınırlıdır. Böylece,

$$\bullet \|u_m(T_0)\|^2 + \int_0^{T_0} \left\{ 2\gamma \|\nabla u_m(t)\|^2 + 2a \|u_m(t)\|^2 \right\} dt + 2b \int_0^{T_0} \|u_m(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} dt = M_1. \quad (3.13)$$

elde edilir. Burada M_1 pozitif sabittir. (3.13) ün sol tarafındaki ifadeden ilk ve son terim çıkarılırsa,

$$\bullet \int_0^{T_0} \left\{ 2\gamma \|\nabla u_m(t)\|^2 + 2a \|u_m(t)\|^2 \right\} dt \leq M_1. \quad (3.14)$$

elde edilir. Buradan;

$$\Rightarrow u_m \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right). \quad (3.15)$$

elde edilir.

Diğer yandan (3.6), $f_{km}'(t)$ ile iç çarpılır ve sonuçlar $k=1, 2, \dots, m$ için toplanırsa,

$$\bullet \left(u_m'(t), \sum_{k=1}^m f_{km}'(t) w_k \right) + \gamma \left(\nabla u_m(t), \nabla \sum_{k=1}^m f_{km}'(t) w_k \right) + a \left(u_m(t), \sum_{k=1}^m f_{km}'(t) w_k \right)$$

$$\begin{aligned}
& +b\left(\left|u_m(t)\right|^{\alpha} u_m(t), \sum_{k=1}^m f_{km}'(t) w_k\right)=0 \\
& \Rightarrow\left(u_m'(t), u_m'(t)\right)+\gamma\left(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)\right)+a\left(u_m(t), u_m'(t)\right) \\
& +b\left(\left|u_m(t)\right|^{\alpha} u_m(t), u_m'(t)\right)=0 \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} u_m'(t) u_m'(t) dt + \gamma \int_{\Omega} \nabla u_m(t) \nabla u_m'(t) dt + a \int_{\Omega} u_m(t) u_m'(t) dt \\
& +b \int_{\Omega} \left|u_m(t)\right|^{\alpha} u_m(t) u_m'(t) dt = 0 \\
& \Rightarrow\left\|u_m(t)\right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left\{\gamma\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2 + a\left\|u_m(t)\right\|^2 + \frac{b}{\alpha+2}\left\|u_m(t)\right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}\right\}=0 \quad (3.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik 0 dan T_0 ye integrallenirse,

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_0^t\left\|u_m'(s)\right\|^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{ds}\left\{\gamma\left\|\nabla u_m(s)\right\|^2 + a\left\|u_m(s)\right\|^2 + \frac{b}{\alpha+2}\left\|u_m(s)\right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}\right\} ds = 0 \\
& \Rightarrow 2 \int_0^t\left\|u_m'(s)\right\|^2 ds + \gamma\left\|\nabla u_m(s)\right\|^2 + a\left\|u_m(s)\right\|^2 + \frac{b}{\alpha+2}\left\|u_m(s)\right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \\
& = \gamma\left\|\nabla u_m(0)\right\|^2 + a\left\|u_m(0)\right\|^2 + \frac{b}{\alpha+2}\left\|u_m(0)\right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.17) eşitliğinin sağ yanında $p=2$, $q=2$ ve $p=2$, $q=\alpha+2$ için Sobolev eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \bullet 2 \int_0^t \left\| u_m'(s) \right\|^2 ds + \gamma \left\| \nabla u_m(t) \right\|^2 + a \left\| u_m(t) \right\|^2 + \frac{b}{\alpha+2} \left\| u_m(t) \right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \\
& \leq \gamma \left\| \nabla u_m(0) \right\|^2 + ac_0 \left\| \nabla u_m(0) \right\|^2 + \frac{bc_1}{\alpha+2} \left\| \nabla u_m(0) \right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. Burada, c_0 ve c_1 Sobolev sabitleridir.

u_0 in $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ uzayındaki ortogonal projeksiyonu u_{0m} olduğundan,

$$\left\| \nabla u_m(0) \right\| \leq \left\| \nabla u_0 \right\|$$

elde edilir. Böylece (3.18) den,

$$\bullet 2 \int_0^t \left\| u_m'(s) \right\|^2 ds + \gamma \left\| \nabla u_m(t) \right\|^2 + a \left\| u_m(t) \right\|^2 + \frac{b}{\alpha+2} \left\| u_m(t) \right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \leq M. \tag{3.19}$$

elde edilir. Burada,

$$M = \gamma \left\| \nabla u_0 \right\|^2 + ac_0 \left\| \nabla u_0 \right\|^2 + \frac{bc_1}{\alpha+2} \left\| \nabla u_0 \right\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}.$$

dir. Buradan (3.19) un sol yanındaki son terim yok sayılırsa,

$$\bullet 2 \int_0^t \left\| u_m'(s) \right\|^2 ds + \gamma \left\| \nabla u_m(t) \right\|^2 + a \left\| u_m(t) \right\|^2 \leq M. \tag{3.20}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\Rightarrow u_m' \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right).$$

elde edilir.

Böylece istenilen (3.9)-(3.10) çözümlerinin global varlığını göstermek için bir kesin yaklaşım elde edildi. Buradan f_{km} , $1 \leq k \leq m$ olmak üzere; $F = (F_1, \dots, F_m)$ nin, (3.9) denklemlerinin cümlesinde Lipschitz şartını sağladığı görülür. $f_{km}(t) = (u_m(t), w_k)$ olduğundan, Cauchy-Schwarz eşitliği ve (3.20) kullanılırsa, f_{km} , $1 \leq k \leq m$ nin t de düzgün sınırlı olduğu görülür. Buradan [1] varlık teoremine göre (3.9)-(3.10) sisteminin f_{km} , $1 \leq k \leq m$ çözümleri, $\forall t \in [0, T]$, $\forall T > 0$ için genişletilebilir.

Şimdi, $v \in H_0^1(\Omega)$, $\|\nabla v\| \leq 1$ ile sabitlensin ve $v = v_1 + v_2$ biçiminde yazılsın. Burada, $v_1 \in \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$ ve $1 \leq k \leq m$ için $(v_2, w_k) = 0$ dir. $w_1, \dots, w_m$ fonksiyonları $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ de ortogonal olduğundan, $\|\nabla v_1\| \leq \|\nabla v\| \leq 1$ elde edilir. (3.6) kullanılırsa, her $0 \leq t \leq T$ için;

$$\bullet \left(u_m', v_1 \right) + \gamma(\nabla u_m, \nabla v_1) + a(u_m, v_1) + b(|u_m|^\alpha u_m, v_1) = 0. \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.5) kullanılırsa,

$$\bullet \left\langle u_m', v \right\rangle = \left(u_m', v \right) = -\gamma(\nabla u_m, \nabla v_1) - a(u_m, v_1) - b(|u_m|^\alpha u_m, v_1) = 0. \quad (3.22)$$

elde edilir. (3.22) de Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa, $\|\nabla v_1\| \leq 1$ olduğundan;

$$\begin{aligned} \bullet \left| \left\langle u_m', v \right\rangle \right| &\leq -\gamma(\nabla u_m(t), \nabla v_1) - a(u_m(t), v_1) - b(|u_m(t)|^\alpha u_m(t), v_1) \\ &\leq -\gamma(\|\nabla u_m(t)\| \|\nabla v_1\|) - a(\|u_m(t)\| \|v_1\|) - b|u_m(t)|^\alpha (\|u_m(t)\| \|v_1\|) \\ &\leq -\gamma \|\nabla u_m(t)\| + a \|u_m(t)\| - b \|u_m(t)\|_{2(\alpha+1)}^{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) de v üzerinden supremum alınır ve $\|\nabla v\| \leq 1$ olduğu kullanılırsa,

$$\bullet \left\| u_m'(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \gamma \left\| \nabla u_m(t) \right\| + a \left\| u_m(t) \right\| + b \left\| u_m(t) \right\|_{2(\alpha+1)}^{\alpha+1}. \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) de $p = 2$, $q = 2$ ve $p = 2$, $q = 2(\alpha + 1)$ için Sobolev eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet \left\| u_m'(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \gamma \left\| \nabla u_m(t) \right\| + ac_0 \left\| \nabla u_m(t) \right\| + bd_0^{\alpha+1} \left\| \nabla u_m(t) \right\|^{\alpha+1} \\ &\leq (\gamma + ac_0) \left\| \nabla u_m(t) \right\| + bd_0^{\alpha+1} \left\| \nabla u_m(t) \right\|^{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Burada c_0 ve d_0 Sobolev sabitleridir. (3.25) nin her iki tarafının karesi alınır ve $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet \left\| u_m'(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leq \left[(\gamma + c_0 a) \left\| \nabla u_m(t) \right\| + bd_0^{\alpha+1} \left\| \nabla u_m(t) \right\|^{\alpha+1} \right]^2 \\ &\leq 2(\gamma + c_0 a)^2 \left\| \nabla u_m(t) \right\|^2 + 2b^2 d_0^{2(\alpha+1)} \left\| \nabla u_m(t) \right\|^{2(\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.26), 0 dan T ye integrallenirse,

$$\bullet \int_0^T \left\| u_m'(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq 2(\gamma + c_0 a)^2 \int_0^T \left\| \nabla u_m(t) \right\|^2 dt + 2b^2 d_0^{2(\alpha+1)} \int_0^T \left\| \nabla u_m(t) \right\|^{2(\alpha+1)} dt \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.20) kullanılırsa,

$$\int_0^T \left\| u_m'(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq 2(\gamma + c_0 a)^2 \int_0^T \left\| \nabla u_m(t) \right\|^2 dt + 2b^2 d_0^{2(\alpha+1)} \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla u_m(t) \right\|^{2\alpha} \int_0^T \left\| \nabla u_m(t) \right\|^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2(\gamma + c_0 a)^2 + 2b^2 d_0^{2(\alpha+1)} \frac{M^\alpha}{\gamma} \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|^2 dt \\
&\leq E_1 \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|^2 dt
\end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. Burada, $E_1 = 2(\gamma + c_0 a)^2 + 2b^2 d_0^{2(\alpha+1)} \frac{M^\alpha}{\gamma}$ dir. Buradan (3.14) ifadesi

(3.28) de kullanılırsa,

$$\bullet \int_0^T \|u_m'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq M_2. \tag{3.29}$$

elde edilir. Burada M_2 pozitif sabittir. Dolayısıyla;

$$u_m' \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right). \tag{3.30}$$

elde edilir.

3.Adım (Limite Geçiş):

(3.6) ve (3.7) de $m \rightarrow \infty$ olacak şekilde limite geçilirse, (1.1)-(1.3) için bir zayıf çözüm elde edilir. (3.14) ve (3.29) kestirimlerinden,

$\{u_m\}$ nin $L^2\left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right)$ de sınırlı ve $\{u_m'\}$ nin de $L^2\left((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right)$ de sınırlı olduğu görülür.

Şimdi, $u \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right)$ ve $u' \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right)$ fonksiyonlarına

yakınsayan $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$ alt dizisini alınabilir. (Bundan böyle kolaylık için k indisi yok kabul edilecektir.) Öyle ki; $\forall T > 0$ için,

$$m \rightarrow \infty \text{ için } u_m \rightarrow u \quad , \quad L^2\left((0,T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right) \text{ de,} \quad (3.31)$$

$$m \rightarrow \infty \text{ için } u_m' \rightarrow u' \quad , \quad L^2\left((0,T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right) \text{ de.} \quad (3.32)$$

(3.14) ve Teorem 2.2.3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2\gamma \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2 dt + 2a \int_0^T \|u(t)\|^2 dt &\leq 2\gamma \int_0^T \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\nabla u_m(t)\|^2 dt \\ &\quad + 2a \int_0^T \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m(t)\|^2 dt \leq M_1 . \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir. (3.33) de $D = \frac{M_1}{2a}$ ve $D_1 = \frac{M_1}{2\gamma}$ alınırsa,

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq D \quad \text{ve} \quad \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2 dt \leq D_1 \quad (3.34)$$

elde edilir. Ayrıca (3.32) ve Teorem 2.3 kullanılırsa,

$$\bullet \quad \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt \leq \int_0^T \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m'(t)\|^2 dt . \quad (3.35)$$

(3.6) ifadesinde, (3.31) ve (3.32) yi kullanarak $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$\int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla v(t)) dt \rightarrow \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v(t)) dt , \quad (3.36)$$

$$\int_0^T (u_m(t), v(t)) dt \rightarrow \int_0^T (u(t), v(t)) dt \quad , \quad \forall v \in L^2\left((0,T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right) \quad (3.37)$$

elde edilir. $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ sürekli yoğun ve $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ içine gömülü olduğundan,

$v \in L^2\left((0,T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right)$ için (3.36) ve (3.37) sağlanır. Ayrıca (3.32) kullanılırsa,

$$\bullet \int_0^T \langle u_m'(t), v(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle dt, \quad \forall v \in L^2((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)). \quad (3.38)$$

elde edilir. Şimdi,

$$m \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad \int_0^T (|u_m|^\alpha u_m, v) dt \rightarrow \int_0^T (|u|^\alpha u, v) dt, \quad \forall v \in L^2((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega))$$

veya bu ifadeye denk olan,

$$m \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad \int_0^T (|u_m|^\alpha u_m - |u|^\alpha u, v) dt \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

ifadesi gösterilmelidir. Bunun için aşağıdaki teorem verilecektir.

3.3. Teorem (kompaktlık)

$X_1 \subset X_2$ kompakt gömülü olacak şekilde, $X_1 \subset X_2 \subset X_{-1}$ sürekli gömülü Banach uzayları olsun. $0 \leq T < \infty$, $1 < p < \infty$ ve $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi $L^p((0, T), X_1)$ de sınırlı ve $\{u_k'\}_{k=1}^\infty$ dizisi de $L^p((0, T), X_{-1})$ sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda, $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ dizisi $L^p((0, T), X_0)$ içinde kompakt bir cümlede sınırlıdır.

Teorem 2.2.3. e göre $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ uzayı, $\widetilde{L}^2(\Omega)$ uzayının içine kompakt gömülmektedir.

$\{u_m\}$, $L^2((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ de sınırlı ve $\{u_m'\}$ de $L^2((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega))$ de sınırlı olduğundan, $X_1 = \widetilde{H}_0^1(\Omega)$, $X_0 = \widetilde{L}^2(\Omega)$ ve $X_{-1} = \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ alınarak Teorem 3.3 uygulanırsa,

$$u_m \rightarrow u, \quad L^2((0, T), \widetilde{L}^2(\Omega)) \quad \text{de}. \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.39) ifadesini ispatlamak için integrali,

$$\int_0^T (|u_m|^\alpha u_m - |u|^\alpha u, v) dt = L_1 + L_2,$$

olarak yeniden yazılsın. Burada,

$$L_1 = \int_0^T \left(|u_m|^\alpha (u_m - u), v \right) dt \quad \text{ve} \quad L_2 = \int_0^T \left(\left(|u_m|^\alpha - |u|^\alpha \right) u, v \right) dt. \quad (3.41)$$

dir. Şimdi, L_1 için bir kestirim bulmaya çalışılsın. $v \in L^2 \left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega) \right)$ olsun.

Cauchy-Schwarz Eş. ve $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ve $p_3 = 6$ için genelleştirilmiş Hölder Eş. kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad |L_1| &= \int_0^T \left| \left(|u_m|^\alpha (u_m - u), v \right) \right| dt \\ &\leq \left(\int_0^T |v|^6 dt \right)^{\frac{1}{6}} \left(\int_0^T |u_m - u|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \left(|u_m|^\alpha \right)^3 dt \right)^{\frac{\alpha}{3\alpha}} \\ &\leq \int_0^T \|v(t)\|_6 \cdot \|u_m(t) - u(t)\|_2 \cdot \|u_m(t)\|_{3\alpha}^\alpha dt. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$p = 2$ ve $q = 3\alpha$ için Sobolev eşitsizliği kullanılır, (3.42) de $p = 2$ ve $q = 6$ alınır,

$$\begin{aligned} \Rightarrow |L_1| &\leq \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \left(d_1 \|\nabla u_m(t)\| \right)^\alpha \cdot d_2 \|\nabla v(t)\| dt \\ &\leq d_1^\alpha d_2 \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \|\nabla u_m(t)\|^\alpha \cdot \|\nabla v(t)\| dt. \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. Burada d_1 ve d_2 Sobolev sabitleridir. (3.20) ve (3.43) den,

$$\bullet \quad |L_1| \leq d_1^\alpha d_2 \max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u_m(t)\|^\alpha \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \|\nabla v(t)\| dt \quad (3.44)$$

$$\leq d_1^\alpha d_2 D_3^\alpha \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \|\nabla v(t)\| dt. \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.45) de Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\bullet \quad |L_1| \leq d_1^\alpha d_2 D_3^\alpha \left[\int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^T \|\nabla v(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.46)$$

elde edilir.

$v \in L^2\left((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega)\right)$ olduğundan,

$$\left[\int_0^T \|\nabla v(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq N_1 \quad (3.47)$$

olacak şekilde bir N_1 pozitif sabiti vardır. Böylece, (3.46) ve (3.47) den,

$$\bullet \quad |L_1| \leq C_T \left[\int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.48)$$

elde edilir. Burada, $C_T = d_1^\alpha d_2^\alpha D_3^\alpha N_1$ dir.

Böylece, (3.40) ifadesi (3.48) de kullanılırsa,

$$m \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad |L_1| \rightarrow 0.$$

elde edilir. Dolayısıyla, $L_1 \rightarrow 0$ olur. Bu sonuç,

$$m \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad L_2 = \int_0^T \left((|u_m|^\alpha - |u|^\alpha) u, v \right) dt \rightarrow 0. \quad (3.49)$$

olduğunu gösterir.

$[0, \infty)$ aralığında $f(x) = x^\alpha$ fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\bullet \quad |u_m|^\alpha - |u|^\alpha = \alpha (\theta |u_m| + (1-\theta)|u|)^{\alpha-1} (|u_m| - |u|) \quad (3.50)$$

elde edilir. Burada, $0 < \theta < 1$ dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve,

$$| |u_m| - |u| | \leq |u_m - u|,$$

kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad L_2 &= \int_0^T \left(\alpha (\theta |u_m| + (1-\theta)|u|)^{\alpha-1} (|u_m| - |u|) u, v \right) dt \\ \Rightarrow |L_2| &\leq \alpha \int_0^T \int_\Omega (\theta |u_m| + (1-\theta)|u|)^{\alpha-1} |u_m - u| \cdot |u| \cdot |v| dx dt. \end{aligned} \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.51) de $p_1 = 6$, $p_2 = 6$, $p_3 = 6$, $p_4 = 2$ için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\bullet |L_2| \leq \alpha \int_0^T g(t) \|u_m(t) - u(t)\|_6 \cdot \|v(t)\|_6 \cdot \|u(t)\|_6 dt \quad (3.52)$$

elde edilir. Burada,

$$g(t) = \left[\int_{\Omega} (\theta |u_m| + (1-\theta)|u|)^{6(\alpha-1)} dx \right]^{\frac{1}{6}} \quad (3.53)$$

dir. $g(t)$ için bir yaklaşım bulmak için,

$$(a+b)^p \leq 2^p (a^p + b^p) \quad (3.54)$$

eşitsizliği (3.53) de arka arkaya iki kez kullanılarak ,

$$\begin{aligned} \bullet g(t) &\leq \left[2^{6(\alpha-1)} \int_{\Omega} (\theta^{6(\alpha-1)} |u_m|^{6(\alpha-1)} + (1-\theta)^{6(\alpha-1)} |u|^{6(\alpha-1)}) dx \right]^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\alpha-1} \left\{ \theta^{6(\alpha-1)} \left[\left(\int_{\Omega} |u_m|^{6(\alpha-1)} dx \right)^{\frac{1}{6(\alpha-1)}} \right]^{6(\alpha-1)} + (1-\theta)^{6(\alpha-1)} \left[\left(\int_{\Omega} |u|^{6(\alpha-1)} dx \right)^{\frac{1}{6(\alpha-1)}} \right]^{6(\alpha-1)} \right\}^{\frac{1}{6}} \\ &= 2^{\alpha-1} \left[\theta^{6(\alpha-1)} \|u_m(t)\|_{6(\alpha-1)}^{6(\alpha-1)} + (1-\theta)^{6(\alpha-1)} \|u(t)\|_{6(\alpha-1)}^{6(\alpha-1)} \right]^{\frac{1}{6}} \\ &\leq 2^{\alpha-1} 2^{\frac{1}{6}} k_0^{\alpha-1} \left[\|u_m(t)\|_{6(\alpha-1)}^{(\alpha-1)} + \|u(t)\|_{6(\alpha-1)}^{(\alpha-1)} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

elde edilir. Burada, a ve b negatif olmayan reel sayılar ve $k_0 = \max\{\theta, (1-\theta)\}$ dir.

(3.55) de $p=2$ ve $q=6(\alpha-1)$ için Sobolev eşitsizliği kullanılırsa,

$$\bullet g(t) \leq 2^{\alpha-1} 2^{\frac{1}{6}} k_0^{\alpha-1} d_3^{\alpha-1} \left(\|\nabla u_m(t)\|^{(\alpha-1)} + \|\nabla u(t)\|^{(\alpha-1)} \right) \quad (3.56)$$

elde edilir. Burada, d_3 Sobolev sabitidir. (3.20) ve $\max_{0 \leq t < T} \|\nabla u(t)\| \leq D_3$, (burada

$D_3 = \sqrt{M/\gamma}$ dir.) ifadesi (3.56) de kullanılırsa,

$$\bullet \sup_{0 \leq t < T} g(t) \leq A_0 = 2^{\alpha-1} 2^{\frac{1}{6}} k_0^{\alpha-1} d_3^{\alpha-1} D_3^{\alpha-1}. \quad (3.57)$$

elde edilir. (3.57) ifadesi (3.52) de kullanılırsa,

$$\bullet |L_2| \leq \alpha A_0 \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \|v(t)\|_6 \cdot \|u(t)\|_6 dt. \quad (3.58)$$

elde edilir. (3.58) de $p=2$ ve $q=6$ için Sobolev eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet |L_2| &\leq \alpha A_0 \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| d_2 \|\nabla u(t)\| d_2 \|\nabla v(t)\| dt \\ &\leq \alpha A_0 d_2^2 \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \|\nabla u(t)\| \|\nabla v(t)\| dt \end{aligned} \quad (3.59)$$

elde edilir. Burada, d_2 Sobolev sabitidir. Buradan,

$$\begin{aligned} \bullet |L_2| &\leq \alpha A_0 d_2^2 \max_{0 \leq t < T} \|\nabla u(t)\| \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \|\nabla v(t)\| dt \\ &\leq \alpha C_0 \max_{0 \leq t < T} \|\nabla u(t)\| \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \|\nabla v(t)\| dt \\ &\leq \alpha C_0 \int_0^T \|u_m(t) - u(t)\| \cdot \|\nabla v(t)\| dt \end{aligned} \quad (3.60)$$

elde edilir. Burada, $C_0 = A_0 d_2^2 D_3$ dir. (3.60) de Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$\bullet |L_2| \leq C_0 \left[\int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^T \|\nabla v(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.61)$$

elde edilir. (3.61) ve (3.47) den,

$$\bullet |L_2| \leq C_0 N_1 \left[\int_0^T \|u_m(t) - u(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.62)$$

elde edilir. (3.40) ifadesi (3.62) de kullanılırsa, $|L_2| \rightarrow 0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$m \rightarrow \infty \quad \text{için} \quad L_2 \rightarrow 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak; $m \rightarrow \infty$ için $L_1 + L_2 \rightarrow 0$ olduğundan, (3.39) ispatlanmış olur.

N sabit bir tamsayı olsun.

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^N g_k(t) w_k(x), \quad (3.63)$$

(3.63) formunda $v \in C^1([0, T], \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ seçilsin. Burada, $\{g_k\}_{k=1}^N$ düzgün fonksiyonlar olsun. (3.6), g_k ile çarpılır ve $m \geq N$ için $k=1$ den N ye kadar toplanırsa,

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=1}^N \left\{ (u_m', w_k) g_k + \gamma (\nabla u_m, \nabla w_k) g_k + a(u_m, w_k) g_k + b(|u_m|^\alpha u_m, w_k) g_k \right\} &= 0 \\ \Rightarrow \langle u_m', v \rangle + \gamma (\nabla u_m, \nabla v) + a(u_m, v) + b(|u_m|^\alpha u_m, v) &= 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

elde edilir. (3.64) de 0 dan T ye integral alınırsa,

$$\bullet \int_0^T \left\{ (u_m', v) + \gamma (\nabla u_m, \nabla v) + a(u_m, v) + b(|u_m|^\alpha u_m, v) \right\} dt = 0. \quad (3.65)$$

elde edilir. Sonuçta, (3.65) de $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$\bullet \int_0^T \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} (u_m', v) + \gamma \lim_{m \rightarrow \infty} (\nabla u_m, \nabla v) + a \lim_{m \rightarrow \infty} (u_m, v) + b \lim_{m \rightarrow \infty} (|u_m|^\alpha u_m, v) \right\} dt = 0$$

elde edilir.

Burada, (3.36), (3.37), (3.38) ve (3.39) kullanılırsa, $v \in C^1([0, T], \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ için,

$$\bullet \int_0^T \left\{ \langle u', v \rangle + \gamma(\nabla u, \nabla v) + a(u, v) + b(|u|^\alpha u, v) \right\} dt = 0 \quad (3.66)$$

elde edilir. Buradan açıkça görülür ki, (3.66) eşitliği tüm $v \in L^2([0, T], \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ fonksiyonları için geçerlidir. Bu fonksiyonlar (3.63) formunda olduğundan bu uzayda yoğundur. Bundan dolayı özellikle; $v \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$ ve $0 \leq t \leq T$ için,

$$\langle u', v \rangle + \gamma(\nabla u, \nabla v) + a(u, v) + b(|u|^\alpha u, v) = 0. \quad (3.67)$$

elde edilir.

3.4. Sonuç

(1.1) - (1.3) probleminin bir çözümü u olsun. Öyle ki, $u \in L^2((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ ve

$u_t \in L^2((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega))$. Bu durumda,

$u \in L^\infty((0, T), \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ ve $u_t \in L^\infty((0, T), \widetilde{H}^{-1}(\Omega))$ dir.

Böylece, (3.20), (3.30) ve Lemma 2.2.5 gözönüne alınırsa, (1.1)–(1.3) probleminin bir zayıf çözümü olan u nun t için sürekli olduğu görülür. Diğer bir deyişle,

$$u \in C([0, T], \widetilde{L}^2(\Omega))$$

dir.

$u(0) = u_0$ olduğunu göstermek için, (3.65) den $v(T) = 0$ ile her

$v \in C^1([0, T], \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ için,

$$\bullet \int_0^T \left\{ -\langle v', u \rangle + \gamma(\nabla u, \nabla v) + a(u, v) + b(|u|^\alpha u, v) \right\} dt = (u(0), v(0)) \quad (3.68)$$

dir. Benzer şekilde, (3.65) den ,

$$\bullet \int_0^T \left\{ -\langle v', u_m \rangle + \gamma(\nabla u_m, \nabla v) + a(u_m, v) + b(|u_m|^\alpha u_m, v) \right\} dt = (u_m(0), v(0)) \quad (3.69)$$

elde edilir. $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ de $u_m(0) \rightarrow u_0$ olduğundan (3.36)–(3.39) ifadeleri (3.69) de tekrar kullanılırsa,

$$\bullet \int_0^T \left\{ -\langle v', u \rangle + \gamma(\nabla u, \nabla v) + a(u, v) + b(|u|^\alpha u, v) \right\} dt = (u_0, v(0)) \quad (3.70)$$

elde edilir. $v(0)$ keyfi olduğundan, (3.68) ve (3.70) karşılaştırılarak, $u(0) = u_0$ sonucuna varılır. Böylece teorem ispatlanmış olur. [14]

4. TEKLİK

Bu bölümde; (1.1)–(1.3) probleminin Teorem 3.2. de varlığı verilen, bir zayıf çözümü olan u nun tekliği gösterilecektir.

u nun tek olmadığı kabul edilsin.

(u, p) ve (v, q) ikilileri (1.1)–(1.3) probleminin aynı başlangıç koşullarına göre iki aşikar çözümü olsun. $w = u - v$ ve $\pi = p - q$ olacak şekilde bir w farklı çözümü tanımlansın. (1.1)–(1.3) den, (w, π) çözümü,

$$w_t = \gamma \Delta w - a w - b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) - \nabla \pi, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.40)$$

$$w = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (4.41)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4.42)$$

denklemini sağlar. (4.40) ifadesi $L^2(\Omega)$ de w ile iç çarpılırsa,

$$\bullet (w_t, w) - \gamma (\Delta w, w) + a(w, w) + b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w) + (\nabla \pi, w) = 0.$$

elde edilir. Buradan parça parça integral alınır,

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (ww) dt - \gamma \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} w ds + \gamma \int_{\Omega} \nabla w \nabla w dx + a \int_{\Omega} ww dx + b \int_{\Omega} [|u|^\alpha u - |v|^\alpha v] w dx \\ & + \int_{\Omega} \nabla \pi w dx = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|\nabla w\|^2 + a \|w\|^2 = -b \int_{\Omega} [|u|^\alpha u - |v|^\alpha v] w dx \end{aligned} \quad (4.43)$$

(4.43), 0 dan T ye integrallenirse,

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{1}{2} \|w(T)\|^2 + \gamma \int_0^T \|\nabla w(t)\|^2 dt + a \int_0^T \|w(t)\|^2 dt = -b \int_0^T \int_{\Omega} [|u|^\alpha u - |v|^\alpha v] w dx dt \\ & + \frac{1}{2} \|w(0)\|^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. Şimdi,

$$\int_{\Omega} \left[|u|^\alpha u - |v|^\alpha v \right] w dx \geq 0 \quad (4.45)$$

olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} \bullet \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v \right) w &= \sum_{i=0}^n \left(|u|^\alpha u_i - |v|^\alpha v_i \right) w_i \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{2} |u|^\alpha (u_i - v_i + u_i) w_i + \frac{1}{2} |u|^\alpha u_i w_i - \frac{1}{2} |v|^\alpha v_i w_i + \frac{1}{2} |v|^\alpha (u_i - v_i - u_i) w_i \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\frac{1}{2} (|u|^\alpha + |v|^\alpha) w_i w_i + \frac{1}{2} (|u|^\alpha - |v|^\alpha) (u_i^2 - v_i^2) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{2} (|u|^\alpha + |v|^\alpha) w_i w_i + \frac{1}{2} (|u|^\alpha - |v|^\alpha) (|u| - |v|) (|u| + |v|). \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$(|u|^\alpha - |v|^\alpha) (|u| - |v|) \geq 0 \quad (4.46)$$

olduğu gösterilmelidir.

$f(x) = x^\alpha$ fonksiyonu, $[0, \infty)$ da monoton artan olduğundan (4.46)

geçerlidir. (4.44) ün sol yanındaki ilk terim pozitif ve sağ yanındaki ilk terim negatif

olduğundan atılabilir. Bun durumda,

$$\bullet 2\gamma \int_0^T \|\nabla w(t)\|^2 dt + 2a \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{2} \|w(0)\|^2$$

elde edilir. $w(0) = 0$ olduğundan,

$$\bullet 0 \leq 2\gamma \int_0^T \|\nabla w(t)\|^2 dt + 2a \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \leq 0.$$

elde edilir. Son eşitsizlik $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ da $w=0$ olduğunu ispat eder. Dolayısıyla teklik gösterilmiş olur.

5. FORCHHEIMER KATSAYISINA SÜREKLİ BAĞIMLILIK

Bu bölümde;

$$u_t = \gamma \Delta u - au - b|u|^\alpha u - \nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

Probleminin çözümlerinin H^1 normunda, b Forchheimer katsayısına sürekli bağımlılığı ispatlanacaktır.

5.1. Teorem :

$1 \leq \alpha \leq 2$ olsun. Bu durumda bir $u_0 \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)$ için (1.1) – (1.3) probleminin bir tek $u \in C([0, T]; \widetilde{H}_0^1(\Omega))$ çözümü vardır. Ek olarak, herhangi bir $T > 0$ için;

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\nabla u(t)\| \leq D \quad \text{ve} \quad \int_0^T \|u_t(t)\|^2 dt \leq D \quad (5.1)$$

dir. Burada D , (1.1) in başlangıç parametre ve verilerine bağlı uygun pozitif sabittir.

İspat :

(5.1) eşitsizliklerini elde edebilmek için;

İlk olarak (1.1) in her iki yanı $u_t + u$ ile $L^2(\Omega)$ da iç çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \bullet (u_t, u_t + u) &= \gamma (\Delta u, u_t + u) - a(u, u_t + u) - b(|u|^\alpha u, u_t + u) - (\nabla p, u_t + u) \\ \Rightarrow (u_t, u_t) + (u_t, u) &- \gamma (\Delta u, u_t) - \gamma (\Delta u, u) + a(u, u_t) + a(u, u) + b(|u|^\alpha u, u_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b(|u|^\alpha u, u) + (\nabla p, u_t) + (\nabla p, u) = 0 \\
\Rightarrow & \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 - \gamma \left\{ \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \right\} - \gamma \left\{ \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx \right\} \\
& + a \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + a \|u\|^2 + b \int_{\Omega} |u|^\alpha u u_t dx + b \int_{\Omega} |u|^\alpha u u dx + \int_{\Omega} \nabla p u_t dx + \int_{\Omega} \nabla p u dx = 0 \\
\Rightarrow & \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 + \gamma \|\nabla u\|^2 + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2 + a \|u\|^2 + \frac{b}{\alpha+2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx \\
& + b \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx = 0 \\
\Rightarrow & 2\|u_t\|^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \gamma \|\nabla u\|^2 + (a+1) \|u\|^2 + \frac{2b}{\alpha+2} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx \right\} + 2\gamma \|\nabla u\|^2 + 2a \|u\|^2 \\
& + 2b \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx = 0 \tag{5.2}
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Bu eşitsizlikte,

$$\phi(t) = \gamma \|\nabla u\|^2 + (a+1) \|u\|^2 + \frac{2b}{\alpha+2} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx$$

olarak aldığımızda (5.2) denklemi,

$$\frac{d}{dt} \phi(t) + \frac{2a}{a+1} \phi(t) \leq 0$$

halini alır. Bu eşitsizlikte Gronwall Lemması kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{2a}{a+1}t} \cdot \phi(t) \right) \leq 0 \\
\Rightarrow & \int_0^t \frac{d}{d\delta} \left(e^{\frac{2a\delta}{a+1}} \phi(\delta) \right) d\delta \leq 0 \\
\Rightarrow & e^{\frac{2a}{a+1}t} \cdot \phi(t) - \phi(0) \leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \phi(t) \leq e^{\frac{-2a}{a+1}t} \phi(0) \\
&\Rightarrow \gamma \|\nabla u\|^2 + (a+1) \|u\|^2 + \frac{2b}{\alpha+2} \int_{\Omega} |u|^{\alpha+2} dx \leq D_1 e^{\frac{-2a}{a+1}t} \quad (5.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$D_1 = \gamma \|\nabla u_0\|^2 + (a+1) \|u_0\|^2 + \frac{2b}{\alpha+2} \int_{\Omega} |u_0|^{\alpha+2} dx$$

dir. (5.3) den, $\phi(t)$ nin sınırlılığı ve böylece (5.1) in birinci kısmı; (5.2) ifadesi 0 dan t ye integre edilir ve $\phi(t)$ nin sınırlılığı kullanılırsa, (5.1) in ikinci kısmı elde edilir.

Şimdi, (1.1)–(1.3) denklemlerinin (u, p) ve (v, q) şeklinde iki çözümünün var olduğu kabul edilsin ve aşağıdaki denklemler sağlansın;

• (u, p) ikilisi için,

$$\begin{aligned}
u_t &= \gamma \Delta u - au - b_1 |u|^{\alpha} u - \nabla p, & \nabla \cdot u &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= u_0(x), & x &\in \Omega, \\
u &= 0, & x &\in \partial\Omega, \quad t > 0
\end{aligned}$$

• (v, q) ikilisi için,

$$\begin{aligned}
v_t &= \gamma \Delta v - av - b_2 |v|^{\alpha} v - \nabla q, & \nabla \cdot v &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\
v(x, 0) &= u_0(x), & x &\in \Omega, \\
v &= 0, & x &\in \partial\Omega, \quad t > 0
\end{aligned}$$

olsun. Bu durumda; $w = u - v$ ve $\pi = p - q$ alındığında (w, π) ikilisi de,

$$w_t = \gamma \Delta w - aw - b_1 |u|^{\alpha} u + b_2 |v|^{\alpha} v - \nabla \pi, \quad \nabla \cdot w = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (5.4)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.5)$$

$$w = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (5.6)$$

probleminin bir çözümü olur.

Şimdi, (1.1)–(1.3) probleminin b Forchheimer katsayısına sürekli bağımlı olduğunu veren teorem verilsin;

3.2. Teorem

(w, π) ikilisi, (5.4)–(5.6) probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $w(t)$,

$$\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\| \leq K(b_1 - b_2)^2, \quad \forall t > 0 \quad (5.7)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada; K , (1.1) ' in parametrelerine bağlı pozitif sabittir.

İspat:

(5.4), w ile $L^2(\Omega)$ anlamında iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet (w_t, w) &= \gamma(\Delta w, w) - a(w, w) - b_1(|u|^\alpha u, w) + b_2(|v|^\alpha v, w) - (\nabla \pi, w) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 - \gamma \left\{ \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \nabla w \nabla w dx \right\} + a\|w\|^2 &= -b_1(|u|^\alpha u, w) + b_2(|v|^\alpha v, w) \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla \pi w dx \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|\nabla w\|^2 + a\|w\|^2 &= -b_1(|u|^\alpha u, w) + b_2(|v|^\alpha v, w) + b_2(|u|^\alpha u, w) \\ &\quad - b_2(|u|^\alpha u, w) - (\pi w)|_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \pi \nabla w dx \\ &= -(b_1 - b_2) \cdot (|u|^\alpha u, w) - b_2(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w) \\ &= -\hat{b}(|u|^\alpha u, w) - b_2(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w) \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. Burada; $\hat{b} = b_1 - b_2$ dir.

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(u) = |u|^\alpha u$ olarak tanımlanan T operatörü monoton olduğundan;

$$\begin{aligned}
\bullet \quad & \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w \right) = \sum_{i=1}^n \left(|u|^\alpha u_i - |v|^\alpha v_i \right) w_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} |u|^\alpha (u_i - v_i + u_i) w_i + \frac{1}{2} |u|^\alpha v_i w_i - \frac{1}{2} |v|^\alpha v_i w_i + \frac{1}{2} |v|^\alpha (u_i - v_i - v_i) w_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} |u|^\alpha (w_i + u_i) w_i + \frac{1}{2} |u|^\alpha v_i w_i - \frac{1}{2} |v|^\alpha v_i w_i + \frac{1}{2} |v|^\alpha (w_i - u_i) w_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (|u|^\alpha + |v|^\alpha) w_i w_i + \frac{1}{2} |u|^\alpha (u_i + v_i) w_i - \frac{1}{2} |v|^\alpha (u_i + v_i) w_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (|u|^\alpha + |v|^\alpha) w_i^2 + \frac{1}{2} (u_i + v_i) (u_i - v_i) (|u|^\alpha - |v|^\alpha) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} (|u|^\alpha + |v|^\alpha) w_i^2 + (|u_i|^2 - |v_i|^2) (|u|^\alpha - |v|^\alpha) \right] \geq 0 \\
&\Rightarrow \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w \right) \geq 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

olur. Böylece, (5.8) den ;

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|\nabla w\|^2 + a \|w\|^2 \leq \left| \hat{b} \left(|u|^\alpha u, w \right) \right| \tag{5.10}$$

elde edilir. Hölder ve Sobolev Eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$\bullet \quad \hat{b} \left(|u|^\alpha u, w \right) \leq \left| \hat{b} \right| \cdot \left| \int_{\Omega} |u|^\alpha u w dx \right|$$

Hölder Eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
&\leq |\hat{b}| \cdot \left[\left(\int_{\Omega} |u|^{3\alpha} dx \right)^{\frac{1}{3\alpha}} \right]^{\alpha} \cdot (u^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (w^6)^{\frac{1}{6}} \\
&\leq |\hat{b}| \cdot \|u\|_{3\alpha}^{\alpha} \cdot \|u\|_6 \cdot \|w\|_6
\end{aligned}$$

Sobolev Eşitsizliğinden;

$$(\forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \quad \|v\|_p \leq d_0 \|\nabla v\|, \quad 1 \leq p \leq 6, \quad (d_0 : \text{Sobolev sbt}) \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\hat{b}| \cdot d_0^{\alpha} \|\nabla u\|^{\alpha} d_0 \|\nabla u\| d_0 \|\nabla u\| \\
&\leq |\hat{b}| \cdot d_0^{\alpha+2} \|\nabla u\|^{\alpha+1} \|\nabla w\|
\end{aligned}$$

$p=2$ ve $\varepsilon = \frac{1}{\gamma}$ için Young Eşitsizliğinden,

$$\leq \frac{\hat{b}^2 d_0^{2\alpha+4}}{2\gamma} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \frac{\gamma}{2} \|\nabla w\|^2 \quad (5.12)$$

elde edilir. (5.10) de (5.12) ve (5.1) kullanılırsa;

$$\bullet \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|\nabla w\|^2 + 2a \|w\|^2 \leq \hat{b}^2 D^{2\alpha+2} d_0^{2\alpha+4} \gamma^{-1} = K_0 \hat{b}^2, \quad (K_0 = D^{2\alpha+2} d_0^{2\alpha+4} \gamma^{-1})$$

elde edilir. (5.4), $L^2(\Omega)$ de w_t ile iç çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
&\bullet (w_t, w_t) = \gamma (\Delta w, w_t) - a (w, w_t) - b_1 (|u|^{\alpha} u, w_t) + b_2 (|v|^{\alpha} v, w_t) - (\nabla \pi, w_t) \\
&\Rightarrow \|w_t\|^2 = \gamma \left\{ \int_{\Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \nabla w \nabla w_t dx \right\} - a \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 - b_1 (|u|^{\alpha} u, w_t) + b_2 (|v|^{\alpha} v, w_t) \\
&\quad = -\gamma \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|^2 - a \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 - b_1 (|u|^{\alpha} u, w_t) + b_2 (|v|^{\alpha} v, w_t) \\
&\Rightarrow \|w_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \gamma \|\nabla w\|^2 + a \|w\|^2 \right\} = -b_1 (|u|^{\alpha} u, w_t) + b_2 (|v|^{\alpha} v, w_t) + b_2 (|u|^{\alpha} u, w_t) \\
&\quad \quad \quad - b_2 (|u|^{\alpha} u, w_t)
\end{aligned}$$

$$= -b_2 \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right) - \hat{b} \left(|u|^\alpha u, w_t \right) \quad (5.13)$$

bulunur. Burada; $\hat{b} = b_1 - b_2$ dir. (5.13) un sağ tarafını elde etmek için Ortalama Değer Teoremi ve Hölder Eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \bullet \left| \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right) \right| &\leq \int_{\Omega} \left| \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v \right) \right| |w_t| dx, \\ &\leq (\alpha+1) \int_{\Omega} |\theta|^\alpha \cdot |w| \cdot |w_t| dx, \\ &\leq (\alpha+1) \int_{\Omega} |u + kv|^\alpha \cdot |w| \cdot |w_t| dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^p &\leq 2^p (a^p + b^p) \text{ eşitsizliği kullanılırsa,} \\ &\leq (\alpha+1) 2^\alpha \int_{\Omega} \left(|u|^\alpha + |v|^\alpha \right) |w| \cdot |w_t| dx, \\ &\leq 3(\alpha+1) \int_{\Omega} \left(|u|^\alpha + |v|^\alpha \right) \cdot |w| \cdot |w_t| dx, \end{aligned}$$

Hölder Eşitsizliği kullanılırsa ,

$$\leq 3(\alpha+1) \left[\|u\|_{3\alpha}^\alpha + \|v\|_{3\alpha}^\alpha \right] \cdot \|w\|_6 \cdot \|w_t\| \quad (5.14)$$

elde edilir. $1 \leq \alpha \leq 2$ olduğundan, Sobolev Eşitsizliği kullanılırsa ,

$$\leq 3(\alpha+1) \left[d_0^\alpha \left(\|\nabla u\|^\alpha + \|\nabla v\|^\alpha \right) \right] d_0 \|\nabla w\| \cdot \|w_t\| ,$$

(5.1) den ,

$$\leq 6(\alpha+1) D^\alpha d_0^{\alpha+1} \|\nabla w\| \cdot \|w_t\| ,$$

$p=2$ ve $\varepsilon = \frac{1}{b_2}$ için Young Eşitsizliği kullanılırsa ,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{36}{2} b_2 (\alpha+1)^2 D^{2\alpha} d_0^{2(\alpha+1)} \|\nabla w\|^2 + \frac{1}{2b_2} \|w_t\|^2, \\ &\leq 18b_2 (\alpha+1)^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 + (2b_2)^{-1} \|w_t\|^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.13) un sağ tarafının son terimini elde etmek için ,

$$\bullet \left| \left\langle |u|^\alpha u, w_t \right\rangle \right| = \left| \int_{\Omega} |u|^\alpha u w_t dx \right|$$

$$\leq \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} |w_t| dx$$

Hölder Eşitsizliği kullanılırsa ,

$$\leq \left(\int_{\Omega} |u|^{2(\alpha+1)} dx \right)^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha+1)}} \left(\int_{\Omega} |w_t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|u\|_{2(\alpha+1)}^{(\alpha+1)} \|w_t\|$$

$p=2$ ve $\varepsilon = \frac{1}{b_2}$ için Young Eşitsizliği kullanılırsa ,

$$\leq \frac{|\hat{b}|}{2} \|u\|_{2(\alpha+1)}^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{2|\hat{b}|} \|w_t\|^2 ,$$

Sobolev Eşitsizliği kullanılırsa ,

$$\leq \frac{|\hat{b}|}{2} d_0^{2(\alpha+1)} \|\nabla u\|^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{2|\hat{b}|} \|w_t\|^2 ,$$

(5.1) den ,

$$\Rightarrow \left| \left\langle |u|^\alpha u, w_t \right\rangle \right| \leq 2^{-1} |\hat{b}| d_0^{2(\alpha+1)} D^{2(\alpha+1)} + \left(2|\hat{b}| \right)^{-1} \|w_t\|^2 \quad (5.16)$$

elde edilir. Buradan, (3.15) ve (3.16) ifadesi, (3.13) da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \bullet \left\| w_t \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \gamma \left\| \nabla w \right\|^2 + a \left\| w \right\|^2 \right\} &\leq -b_2 \left\langle |u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right\rangle - \hat{b} \left\langle |u|^\alpha u, w_t \right\rangle \\ &\leq 18b_2^2 (\alpha+1)^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \left\| \nabla w \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| w_t \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \hat{b}^2 d_0^{2(\alpha+1)} D^{2(\alpha+1)} + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 \\
\Rightarrow 2 \|w_t\|^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \gamma \|\nabla w\|^2 + a \|w\|^2 \right\} & \leq 36 b_2^2 (\alpha+1)^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 + 2 \|w_t\|^2 + \hat{b}^2 (d_0 D)^{2\alpha+2} \\
& \leq (d_0 D)^{2\alpha+2} \hat{b}^2 + 36 b_2^2 (\alpha+1)^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 .
\end{aligned}$$

burada, $K_1 = (d_0 D)^{2\alpha+2}$ ve $K_2 = 36 b_2^2 (\alpha+1)^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha}$ olarak alınırsa,

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \gamma \|\nabla w\|^2 + a \|w\|^2 \right\} \leq K_1 \hat{b}^2 + K_2 \|\nabla w\|^2 \quad (5.17)$$

bulunur. (5.17) , $\frac{\gamma}{2K_2}$ ile çarpılıp, (5.12) ' u, eklenirse,

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\gamma^2}{2K_2} \|\nabla w\|^2 + \frac{a\gamma + 2K_2}{2K_2} \|w\|^2 \right\} + \gamma \|\nabla w\|^2 + 2a \|w\|^2 \leq \left(K_0 + \frac{\gamma K_1}{2K_2} \right) \hat{b}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\nabla w\|^2 \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\gamma^2}{2K_2} \|\nabla w\|^2 + \frac{a\gamma + 2K_2}{2K_2} \|w\|^2 \right\} + \frac{\gamma}{2} \|\nabla w\|^2 + 2a \|w\|^2 & \leq \left(K_0 + \frac{\gamma K_1}{2K_2} \right) \hat{b}^2 \quad (5.18)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik,

$$Y'(t) + \beta Y(t) \leq K_3 \hat{b}^2 \quad (5.19)$$

denklemini sağlar. Burada;

$$K_3 = K_1 + \frac{2K_2 K_0}{\gamma}, \quad \beta = K_2 \min \left\{ \frac{1}{\gamma}, \frac{4a}{a\gamma + 2K_2} \right\}, \quad Y(t) = \gamma^2 \|\nabla w\|^2 + (a\gamma + 2K_2) \|w\|^2$$

dir. (5.19) ' dan,

$$\bullet Y'(t) + \beta Y(t) \leq K_3 \hat{b}^2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e^{\beta t} Y'(t) + \beta e^{\beta t} Y(t) \leq K_3 \hat{b}^2 e^{\beta t} \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{\beta t} Y(t)) dt \leq K_3 \hat{b}^2 e^{\beta t} \\
&\Rightarrow \int_0^t \frac{d}{d\delta} (e^{\beta \delta} Y(\delta)) d\delta \leq \int_0^t K_3 \hat{b}^2 e^{\beta \delta} d\delta \\
&\Rightarrow Y(\delta) e^{\beta \delta} \Big|_0^t \leq K_3 \hat{b}^2 e^{\beta \delta} \Big|_0^t \\
&\Rightarrow Y(t) e^{\beta t} - Y(0) \leq K_3 \hat{b}^2 (e^{\beta t} - 1) \\
&\Rightarrow Y(t) \leq Y(0) e^{-\beta t} + \frac{K_3 \hat{b}^2}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \\
&\Rightarrow Y(t) \leq \frac{K_3 \hat{b}^2}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \\
&\Rightarrow \gamma^2 \|\nabla w\|^2 + (a\gamma + 2K_2) \|w\|^2 \leq K_3 \beta^{-1} (1 - e^{-\beta t}) \hat{b}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, teoremin kabullerinden (5.7) sağlanmış olur ve $t > 0$ olmak üzere;

$$\hat{b}^2 \rightarrow 0 \quad \text{için} \quad \|\nabla w\|^2 \rightarrow 0$$

elde edilir.

6. DARCY KATSAYISINA SÜREKLİ BAĞIMLILIK

Bu bölümde;

$$u_t = \gamma \Delta u - au - b|u|^\alpha u - \nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (1.3)$$

probleminin çözümlerinin H^1 normunda, a Darcy katsayısına sürekli bağımlılığı ispatlanacaktır.

• (u, p) ikilisi,

$$u_t = \gamma \Delta u - a_1 u - b|u|^\alpha u - \nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.2)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (6.3)$$

probleminin bir çözümü ve,

• (v, q) ikilisi de;

$$v_t = \gamma \Delta v - a_2 v - b|v|^\alpha v - \nabla q, \quad \nabla \cdot v = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6.4)$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.5)$$

$$v = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (6.6)$$

probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda;

$$w = u - v, \quad \pi = p - q \quad \text{ve} \quad \hat{a} = a_1 - a_2$$

olarak alınırsa ;

$$\bullet u_t - v_t = \gamma (\Delta u - \Delta v) - a_1 u - a_1 v + a_1 v + a_2 v - b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) - \nabla \pi$$

olur. Bu durumda, (w, π) ikilisi,

$$\bullet w_t = \gamma \Delta w - a_1 (u - v) - (a_1 - a_2) v - b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) - \nabla \pi ,$$

$$\Rightarrow w_t = \gamma \Delta w - a_1 w - \hat{a} v - b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v) - \nabla \pi , \quad \nabla w = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0 \quad (6.7)$$

$$w(x, 0) = 0 \quad , \quad x \in \Omega, \quad (6.8)$$

$$w = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (6.9)$$

probleminin bir çözümüdür.

4.1. Teorem :

(w, π) ikilisi, (6.7) – (6.9) nin bir çözümü ve $\frac{2\gamma}{a_1} > 1$ olsun. Bu durumda $w(t)$,

$$\|\nabla w(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 \leq L(a_1 - a_2)^2 , \quad \forall t > 0 \quad (6.10)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada; L , (1.1) in parametrelerine bağlı pozitif sabittir.

İspat :

(6.7) ifadesi, $L^2(\Omega)$ de w ile iç çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 &= \gamma \left\{ \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \nabla w \nabla w dx \right\} - a_1 \|w\|^2 - \hat{a}(v, w) \\ &\quad - b(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w) - \int_{\Omega} \nabla(\pi w) dx + \int_{\Omega} \pi \nabla w dx \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|\nabla w\|^2 + a_1 \|w\|^2 &\leq -\hat{a}(\hat{u}, w) - b(|u|^\alpha u, w) - (|v|^\alpha v, w) \end{aligned} \quad (6.11)$$

elde edilir.

Burada; Eş. (5.9) ve $p=2$ ve $\varepsilon = \frac{1}{a_1}$ için Young Eşitsizliği kullanılırsa,

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|\nabla w\|^2 + a_1 \|w\|^2 \leq \frac{\hat{a}^2}{a_1} \|u\|^2 + \frac{a_1}{2} \|w\|^2$$

Sobolev Eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \gamma \|\nabla w\|^2 + \frac{a_1}{2} \|w\|^2 &\leq \frac{\hat{a}^2}{a_1} d_0^2 \|\nabla u\|^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \|w\|^2 + 2\gamma \|\nabla w\|^2 + a_1 \|w\|^2 &\leq \frac{2\hat{a}^2}{a_1} d_0^2 \|\nabla u\|^2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

elde edilir. Diğer yandan; (6.7), w_t ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \bullet \quad (w_t, w_t) &= \gamma (\Delta w, w_t) - a_1 (w, w_t) - \hat{a} (v, w_t) - b \left((|u|^\alpha u, w_t) - (|v|^\alpha v, w_t) \right) - (\nabla \pi, w_t) \\ \Rightarrow \|w_t\|^2 &= \gamma \left\{ \int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} \nabla w \nabla w_t dx \right\} - \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 - \hat{a} (v, w_t) \\ &\quad - b \left((|u|^\alpha u, w_t) - (|v|^\alpha v, w_t) \right) - \int_{\Omega} \nabla (\pi w_t) dx + \int_{\Omega} \pi \nabla w_t dx \\ \Rightarrow \|w_t\|^2 &= -\frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w\|^2 - \frac{a_1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 - \hat{a} (v, w_t) - b \left((|u|^\alpha u, w_t) - (|v|^\alpha v, w_t) \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\gamma \|\nabla w\|^2 + a_1 \|w\|^2 \right] + \|w_t\|^2 &= -\hat{a} (v, w_t) - b \left((|u|^\alpha u, w_t) - (|v|^\alpha v, w_t) \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left| b \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right) \right| &\leq |b| \cdot \left| \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right) \right| \\ &\leq |b| \cdot \int_{\Omega} \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v \right) \cdot w_t dx \end{aligned}$$

Ortalama Değer Teoreminden,

$$\leq |b| \alpha \int_{\Omega} |\theta|^\alpha w \cdot w_t dx,$$

$$\leq |b| \alpha \int |u + kv|^\alpha w w_t dx \quad (0 \leq k < 1),$$

$\left((a+b)^p \leq 2^{p+1} (a^p + b^p) \right)$ eşitsizliğinden,

$$\leq |b| 3\alpha \int (|u|^\alpha + |v|^\alpha) w w_t dx$$

elde edilir. Burada, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$ olmak üzere Hölder Eşitsizliği uygulanırsa,

$$\leq |b| 3\alpha \left(\|u\|_{3\alpha}^\alpha + \|v\|_{3\alpha}^\alpha \right) \|w\|_6 \|w_t\| \quad (6.14)$$

elde edilir. (6.14) de Sobolev Eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\leq |b| 3\alpha \left(d_0^\alpha \|\nabla u\|^\alpha + d_0^\alpha \|\nabla v\|^\alpha \right) d_0 \|\nabla w\| \|w_t\| \\ &\leq |b| 3\alpha d_0^{\alpha+1} \left(\|\nabla u\|^\alpha + \|\nabla v\|^\alpha \right) \|\nabla w\| \|w_t\| \end{aligned}$$

ve (5.1) den,

$$\leq |b| 6\alpha d_0^{\alpha+1} D^\alpha \|\nabla w\| \|w_t\|$$

elde edilir. Son ifadeye Young Eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} b^2 36\alpha^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 \\ &\leq 18b^2 \alpha^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 + \frac{1}{2} \|w_t\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| b \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right) \right| \leq \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + 18b^2 \alpha^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 \quad (6.15)$$

elde edilir. (6.4) ve Cauchy-Schwarz Eşitsizliği kullanılırsa,

$$\bullet \quad a_2 v = -v_t + \gamma \Delta v - b |v|^\alpha v - \nabla q$$

$$\Rightarrow (a_2 v, w_t) = (-v_t + \gamma \Delta v - b |v|^\alpha v - \nabla q, w_t) - (\nabla q, w_t)$$

$$\Rightarrow (v, w_t) = \frac{1}{a_2} (-v_t + \gamma \Delta v - b |v|^\alpha v - \nabla q, w_t)$$

$$\Rightarrow \left| -\hat{a}(v, w_t) \right| = \frac{|\hat{a}|}{a_2} \left| \left(v_t - \gamma \Delta v + b |v|^\alpha v + \nabla q, w_t \right) \right|. \quad (6.16)$$

elde edilir. Young Eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| -\hat{a}(v, w_t) \right| &\leq \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{\hat{a}^2}{2a_2^2} \|v_t - \gamma \Delta v + b |v|^\alpha v\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{2\hat{a}^2}{a_2^2} \left[\|v_t\|^2 + \gamma^2 \|\Delta v\|^2 + b^2 \| |v|^{2\alpha+2} \| \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{3\hat{a}^2}{a_2^2} \left[\|v_t\|^2 + \gamma^2 \|\Delta v\|^2 + b^2 \| |v|^{2\alpha+2} \| \right] \\ \Rightarrow \left| -\hat{a}(v, w_t) \right| &\leq \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{3\hat{a}^2}{a_2^2} \left[\|v_t\|^2 + \gamma^2 \|\Delta v\|^2 + b^2 \| |v|^{2\alpha+2} \| \right] \end{aligned} \quad (6.17)$$

elde edilir. $2\alpha + 2 \leq 6$ olduğundan (5.11) ve (5.1) ifadeleri (6.17) de kullanılırsa,

$$\bullet \left| -\hat{a}(v, w_t) \right| \leq \frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \frac{3\hat{a}^2}{a_2^2} \|v_t\|^2 + \frac{3\hat{a}^2}{a_2^2} \left[(d_0 \gamma D)^2 + b^2 (d_0 D)^{2\alpha+2} \right] \quad (6.18)$$

elde edilir. (6.15) ve (6.17) ifadesini, (6.13) de kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \bullet \left| \frac{d}{dt} \left[\gamma \|\nabla w\|^2 + a \|w\|^2 \right] + 2 \|w_t\|^2 \right| &= \left| -2\hat{a}(v, w_t) - 2b \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right) \right| \\ &\leq \left| 2\hat{a}(v, w_t) \right| + \left| 2b \left(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v, w_t \right) \right| \\ &\leq \|w_t\|^2 + \frac{6\hat{a}^2}{a_2^2} \|v_t\|^2 + \frac{6\hat{a}^2}{a_2^2} \left[(d_0 \gamma D)^2 + b^2 (d_0 D)^{2\alpha+2} \right] + \|w_t\|^2 + 18b^2 \alpha^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 \\ &\leq \frac{6\hat{a}^2}{a_2^2} \left[(d_0 \gamma D)^2 + b^2 (d_0 D)^{2\alpha+2} \right] + \frac{6\hat{a}^2}{a_2^2} \|v_t\|^2 + 18b^2 \alpha^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha} \|\nabla w\|^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\gamma \|\nabla w\|^2 + a \|w\|^2 \right] &\leq K_4 \hat{a}^2 + \frac{6\hat{a}^2}{a_2^2} \|v_t\|^2 + L_0 \|\nabla w\|^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

elde edilir. Burada,

$$K_4 = \frac{6}{a_2^2} \left[(d_0 \gamma D)^2 + b^2 (d_0 D)^{2\alpha+2} \right] \quad \text{ve} \quad L_0 = 18b^2 \alpha^2 d_0^{2\alpha+2} D^{2\alpha}$$

dir. (6.12) ifadesi $\tau = \frac{L_0}{a_1}$ ile çarpılırsa,

$$\bullet \tau \frac{d}{dt} \|w\|^2 + 2\gamma\tau \|\nabla w\|^2 + L_0 \|w\|^2 \leq \tau \frac{\hat{a}^2}{a_1} d_0^2 \|\nabla u\|^2 \quad (6.20)$$

elde edilir. (6.19) ve (6.20) ifadesi toplandığında,

$$\begin{aligned} \bullet \frac{d}{dt} \left[\gamma \|\nabla w\|^2 + (\tau + a) \|w\|^2 \right] + 2\gamma\tau \|\nabla w\|^2 + L_0 \|w\|^2 &\leq 2L_0 \frac{\hat{a}^2}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + K_4 \hat{a}^2 \\ &\quad + \frac{6\hat{a}^2}{a_2^2} \|v_t\|^2 + L_0 \|\nabla w\|^2 \\ \bullet \frac{d}{dt} \left[\gamma \|\nabla w\|^2 + (\tau + a) \|w\|^2 \right] + (2\gamma\tau - L_0) \|\nabla w\|^2 + L_0 \|w\|^2 \\ &\leq 2L_0 \frac{\hat{a}^2}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + K_4 \hat{a}^2 + \frac{6\hat{a}^2}{a_2^2} \|v_t\|^2 \end{aligned} \quad (6.21)$$

elde edilir.

$$k_0 = \min \left\{ \frac{1}{2\tau}, \frac{(\tau + a)}{L_0} \right\}$$

alınırsa; (6.21) eşitsizliği ,

$$Z(t) = \gamma \|\nabla w\|^2 + (\tau + a) \|w\|^2$$

fonksiyonunun sağladığı;

$$Z'(t) + k_0 Z(t) \leq \hat{a}^2 \left[\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{6}{a_2^2} \|v_t\|^2 + K_4 \right] \quad (6.18)$$

eşitsizliğine dönüşür. (6.18) eşitsizliği integrallenirse,

$$\begin{aligned}
 & \bullet \frac{d}{d\delta}(e^{k_0 t} Z(\delta)) \leq e^{k_0 t} \hat{a}^2 \left[\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{6}{a_2^2} \|v_t\|^2 + K_4 \right] \\
 & \Rightarrow \int_0^t \frac{d}{d\delta}(e^{k_0 \delta} Z(\delta)) d\delta \leq \int_0^t e^{k_0 \delta} \hat{a}^2 \left[\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{6}{a_2^2} \|v_t\|^2 + K_4 \right] d\delta \\
 & \Rightarrow e^{k_0 t} Z(t) - Z(0) \leq \hat{a}^2 \int_0^t e^{k_0 \delta} \left[\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{6}{a_2^2} \|v_t\|^2 \right] d\delta + \frac{\hat{a}^2 K_4}{k_0} (e^{k_0 t} - 1)
 \end{aligned}$$

($Z(0) = \gamma \|\nabla w(0)\|^2 + (\tau + a) \|w(0)\|^2 = 0$) olduğundan,

$$\Rightarrow Z(t) \leq e^{-k_0 t} \hat{a}^2 \int_0^t e^{k_0 \delta} \left[\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{6}{a_2^2} \|v_t\|^2 \right] d\delta + e^{-k_0 t} \frac{\hat{a}^2 K_4}{k_0} (e^{k_0 t} - 1)$$

$$\Rightarrow Z(t) \leq \hat{a}^2 \int_0^t \left[\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{6}{a_2^2} \|v_t\|^2 \right] e^{k_0(\delta-t)} d\delta + \frac{\hat{a}^2 K_4}{k_0} (1 - e^{-k_0 t})$$

($0 < \delta \leq t \Rightarrow \delta - t \leq 0 \Rightarrow k_0(\delta - t) < 1$) olduğundan,

$$\leq \hat{a}^2 \int_0^t \left[\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{6}{a_2^2} \|v_t\|^2 \right] d\delta + \frac{\hat{a}^2}{k_0} K_4$$

elde edilir. (5.1) kullanılırsa,

$$\bullet Z(t) \leq \hat{a}^2 \left(\frac{2L_0}{a_1^2} d_0^2 D + \frac{6}{a_2^2} D + \frac{K_4}{d_0} \right)$$

elde edilir. Bu ifade, (6.10) eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla ispat biter.

KAYNAKLAR

1. Çelebi, A.O., Kalantarov, V.K., Uğurlu D., “On continuous dependence on coefficients of the Brinkman–Forchheimer equations” , *Appl. Math. Letters* 19 : 801-807 (2006).
2. Ames, K.A., Straughan, B., “Non-Standard and Improperly Posed problems, in: Mathematics in Science and Engineering Series” , vol. 194, *Academic Press, San Diego*, (1997).
3. Ames, K.A., Payne L.E., “On stabilizing against modelling errors in a penetrative convection problem for a porous medium” , *Math. Models. Methods. Appl. Sci.* 4 : 733-740 (1994).
4. Payne L.E., Straughan B., “Stability in the initial-time geometry problem for the Brinkman and Darcy equations of flow in a porous media” , *J. Math. Pures Appl.* 75 : 225-271 (1996).
5. Payne L.E., Straughan B., “Structural stability for the Darcy equations of flow in porous media” , *Proc. Roy Soc. London A* 454 : 1691-1698 (1998).
6. Payne L.E., Straughan B., “Analysis of the boundary condition at the interface between a viscous fluid an porous medium and related modelling questions” , *J. Math. Pures Appl.* 77 : 317-354 (1998).
7. Payne L.E., Straughan B., “Convergence and continuous dependence for the Brinkman-Forchheimer equations” , *Stud. Appl. Math.* 102 : 419-439 (1999).
8. Suhubi, E.S.“Fonsiyonel Analiz”, *İTÜ Vakfı Yayınları*, İstanbul, 1-638 (2001).
9. Reddy, B. Dayanand, “Functional Analysis and Boundary-Value Problems: an Introductory Treatment” , **Bath Press, Avon**, (Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, ISSN (0269-3666; 30).
10. Payne L.E., Rodrigues, J.F. and Straughan, B., “Effect of anisotropic permeability on Darcy's law” , *Math. Meth. Appl. Sci.* 24: 427-438 (DOI: 10.1002/mma.228) MOS subject classification: 34 D 30; 74 F 10 (2001).
11. Çelebi, A.O., Kalantarov, V.K. and Uğurlu D., “ Continuous dependence for the convective Brinkman–Forchheimer equations” , *Applicable Analysis* Vol. 84 : 877–888, No. 9, (September 2005).
12. Constantin, P., Foias, C., “Navier-Stokes Equations” , *Univ. Chicago Press*, Chicago and London, (1989).

13. McOwen, R.C., “Partial Differential Equations Methods and Applications” , **Prentice-Hall**, (1996).
14. Uğurlu, D., “Global behavior of solutions of the Brinkman–Forchheimer equations” , **METU**, (December 2001).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YEŞİLOVA, Orkun
Uyruğu : TC
Doğum Tarihi ve Yeri : 24.04.1978 ANKARA
Medeni Hali : Evli
e-mail : orkunyesilova@hotmail.com

Eğitim Derecesi	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2001
Lise	Ahmet Yesevi Lisesi	1995

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001-2011	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okuma, Müzik dinlemek. Spor yapmak.